

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№2 (55) 2023

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Мोजаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (55) 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Аветисян Т.В., Львович Я.Е., Преображенский А.П.** Сравнительный анализ моделей оценки характеристик рассеяния полых структур 7
- Ахраменко Н.А.** К определению единицы электрического тока в системе СИ 11
- Гиргель С.С.** Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бessel – гауссовых ТМ световых пучков 15
- Коваленко М.А., Зотов С.В., Гольдаде В.А., Павлов А.А., Камалов А.М., Борисова М.Э.** Электретное состояние в нанокompозитах на основе полилактида 20
- Никитюк Ю.В., Иванов А.Ф., Ситдикова И.П., Зарипова З.Ф., Горшкова К.Л., Аушев И.Ю.** Оптимизация параметров процесса управляемого термораскалывания силикатных стекол под действием потока горячего воздуха и хладагента 25
- Осипов А.Н., Каленкович Е.Н., Рокач В.А., Ма Т.** Применение сигналов с ШИМ для генерации низкотемпературной атмосферной плазмы 31

МАТЕМАТИКА

- Бородин Н.Н., Малинковский Ю.В.** Экспоненциальные сети обслуживания со счетным числом потоков отрицательных заявок и ограничением на время пребывания в узлах 39
- Бураковский В.В.** Симметричная маркерная кольцевая локальная сеть с разнотипными сообщениями и вентильным обслуживанием 44
- Гальмак А.М.** Степени элементов в l -арных группах специального вида. I 47
- Дергачева И.М., Шабалина И.П., Задорожнюк Е.А., Соболев И.А.** О σ_3 -нильпотентных конечных группах 52
- Поцейко П.Г.** О рациональных сопряженных суммах Фейера на отрезке и аппроксимациях сопряженной функции 56
- Старовойтов А.П., Кечко Е.П., Оснач Т.М.** Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита – Фурье 68

ТЕХНИКА

- Доан Х.Т., Голосов Д.А., Джанг Дж., Кананович Н.А., Завадский С.М., Мельников С.Н.** Влияние степени легирования алюминием на свойства пленок оксида титана-алюминия 74

ИНФОРМАТИКА

- Сморозин В.С., Прохоренко В.А.** Стабилизация параметров технологического цикла при построении обратных связей по управлению 83

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- **технические;**
- **физико-математические.**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 13.06.23. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 10,7. Уч.-изд. л. 9,32. Тираж 100 экз. Заказ № 328.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2023
© Проблемы физики, математики и техники, 2023
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2023

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 2 (55) 2023

CONTENTS

PHYSICS

Avetisyan T.V., Lvovich J.E., Preobrazhensky A.P. Comparative analysis of models for estimation of hollow structures scattering characteristics	7
Akhramenko N.A. To the determination of the unit of electric current in SI system	11
Girgel S.S. Polarizing properties and crossflows of energy of vector Bessel – Gauss TM light beams	15
Kovalenko M.A., Zotov S.V., Goldade V.A., Pavlov A.A., Kamalov A.M., Borisova M.E. Electret state in nanocomposites based on polylactide	20
Nikitjuk Y.V., Ivanov A.F., Sitdikova I.P., Zaripova Z.F., Gorshkova K.L., Aushev I.Y. Optimization of the parameters of the process of controlled thermal cracking of silicate glasses under the action of a hot airflow	25
Osipov A.N., Kalenkovich Y.N., Rokach V.A., Ma T. Application of PWM signals to generate low-temperature atmospheric plasma	31

MATHEMATICS

Borodin N.N., Malinkovsky Yu.V. Exponential queueing networks with countable set of flows of negative customers and limited sojourn time	39
Burakovski V.V. Symmetrical token ring lan with messages of different types and gated service	44
Gal'mak A.M. Powers in l -ary groups of a special form. I	47
Dergacheva I.M., Shabalina I.P., Zadorozhnyuk E.A., Sobol I.A. On σ_3 -nilpotent finite groups	52
Patseika P.G. On rational conjugate Fejér sums on an interval and approximations of the conjugate function	56
Starovoitov A.P., Kechko E.P., Osnach T.M. Existence and uniqueness of consistent Hermite – Fourier approximations	68

TECHNICS

Doan H.T., Golosov D.A., Zhang J., Kananovich N.A., Zavadski S.M., Melnikov S.N. Influence of aluminum doping degree on the properties of titanium-aluminum oxide films	74
--	----

INFORMATION SCIENCE

Smorodin V.S., Prokhorenko V.A. Stabilization of technological cycle parameters when constructing feedback control	83
---	----

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- **Technics;**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 53.097:621.396.6

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_7
EDN: CQTDWZ

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ ПОЛЫХ СТРУКТУР

Т.В. Аветисян, Я.Е. Львович, А.П. Преображенский

Воронежский институт высоких технологий

COMPARATIVE ANALYSIS OF MODELS FOR ESTIMATION OF HOLLOW STRUCTURES SCATTERING CHARACTERISTICS

T.V. Avetisyan, J.E. Lvovich, A.P. Preobrazhensky

Voronezh Institute of High Technologies

Аннотация. Проведено исследование возможности использования модели полой структуры с простой формой для оценки характеристик рассеяния полой структуры со сложной формой. Даны примеры, в которых осуществляется расчет характеристик рассеяния, если происходит падение плоской электромагнитной волны.

Ключевые слова: метод интегральных уравнений, рассеяние радиоволн, моделирование.

Для цитирования: Аветисян, Т.В. Сравнительный анализ моделей оценки характеристик рассеяния полых структур / Т.В. Аветисян, Я.Е. Львович, А.П. Преображенский // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_7. – EDN: CQTDWZ

Abstract. The possibility of using a model of a hollow structure with a simple shape to estimate the scattering characteristics of a hollow structure with a complex shape was investigated. The examples are given in which the scattering characteristics are calculated if a plane electromagnetic wave is incident.

Keywords: integral equation method, radio wave scattering, modeling.

For citation: Avetisyan, T.V. Comparative analysis of models for estimation of hollow structures scattering characteristics / T.V. Avetisyan, J.E. Lvovich, A.P. Preobrazhensky // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_7 (in Russian). – EDN: CQTDWZ

Введение

Расчет радиолокационных характеристик объектов является весьма актуальным в настоящее время, данными вопросами занимались различные исследователи [1]–[3]. Полые структуры могут быть в структуре разных технических объектов. Летательные аппараты имеют в своем составе выходные сопла двигателей, а также воздухозаборники. Их размеры существенны по сравнению с длинами электромагнитных волн. Значения мощности рассеянных электромагнитных волн могут быть достаточно значительными. От всей мощности излучения в передней полусфере они могут составлять десятки процентов [2]. Полые структуры могут быть выделены также в составе антенно-фидерных устройств, например в рупорных и волноводных антеннах [3], [4].

Механизмы рассеяния электромагнитных волн на полых структурах являются достаточно сложными. Это связано с тем, что могут быть выделены несколько областей в таких структурах – внутренняя, внешняя, теневая. Изучение отмеченных механизмов позволит, если необходимо, обеспечить уменьшение вторичного электромагнитного излучения. Это относится также к

проблемам уменьшения радиолокационной заметности, достижения необходимых уровней эффективной площади рассеяния (ЭПР) и т. д. [4].

Реализация экспериментальных исследований не всегда является возможной. В этой связи повышается роль теоретических разработок, применения методов математического моделирования при рассмотрении процессов рассеяния радиоволн на полых структурах.

Целью работы является исследование возможностей использования модели полой структуры с простой формой для оценок характеристик рассеяния полых структур, в которых форма более сложная.

1 Описание моделей

В литературе можно встретить описание различных методов при описании характеристик полых структур. Но на практике полые структуры могут иметь отличия от идеальных форм. Например, в полой структуре, которая рассматривается в двумерном представлении, может быть небольшой наклон в боковых стенках. Степень наклона определяется углами α_1 и α_2 . Представляет интерес для оценок характеристик такой

полой структуры использовать модель, которая приведена на рисунок 1.1. В ней боковые стенки будут параллельными.

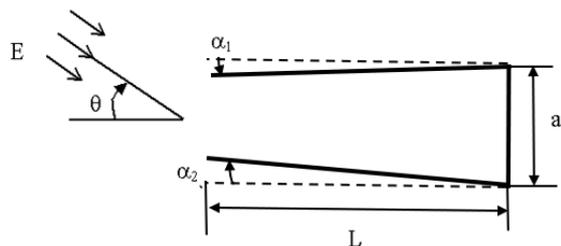


Рисунок 1.1 – Иллюстрация того, как рассеиваются электромагнитные волны на полости со сложной формой, отмечены углы α_1 , α_2 к перпендикуляру к задней стенке. Задняя стенка имеет размер a , длина полой структуры L

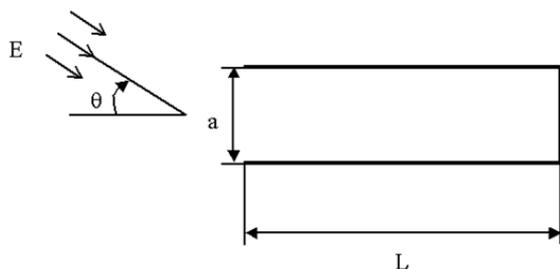


Рисунок 1.2 – Иллюстрация того, как происходит рассеяние электромагнитных волн на полой структуре, имеющей простую форму

Падение электромагнитной волны происходит под углом θ .

Требуется провести оценку диапазона углов, в котором может быть использована вторая модель (рисунок 1.2) для оценки характеристик рассеяния первой модели (рисунок 1.1). Углы отсчитываются от нормали к апертуре полой структуры. Необходимо, чтобы для двух моделей различие в ЭПР не превышало 3 дБ.

2 Методы расчета характеристик рассеяния полых структур

Для того, чтобы осуществить расчеты для характеристик рассеяния полой структуры, которая приведена на рисунке 1.1, мы опирались на метод интегральных уравнений [5]. Это связано с тем, что падающая электромагнитная волна (E -поляризация) будет возбуждать на контуре токи, которые будут распределены существенно неоднородным образом.

Выделяется произвольная точка наблюдения (x_0, y_0) . Для нее будет происходить сопоставление электрического поля $E(x_0, y_0)$. Эта точка может рассматриваться на металлическом контуре L_m (рисунок 1.1)). Формируется система интегральных уравнений Фредгольма 1 рода (1). Для того, чтобы ее записать, применяются соответствующие граничные условия [3], [5]:

$$E_0(x_0, y_0) + \int_{L_m} j_1(\tau) G_1(\rho) h(\tau) d\tau = 0, \quad (x_0, y_0) \in L_m;$$

$$\int_{L_m} j_2(\tau) G_2(\rho) h(\tau) d\tau = 0, \quad (x_0, y_0) \in L_m. \quad (2.1)$$

Интегрирование проводится по контуру L_m . Если рассматривается внешняя сторона такого контура, то ей будет соответствовать плотность потенциалов j_1 . Если рассматривается внутренняя сторона такого контура, то ей будет соответствовать плотность потенциалов j_2 . Падающая волна является плоской

$$E_0(x_0, y_0) = \exp(x_0 \cos(q) + y_0 \sin(q)).$$

Это мы рассматриваем, как соответствующий случаю, в котором наблюдение осуществляется в дальней зоне. Ведется наблюдение для моностатического случая под углом θ (рисунок 1.1). Отметим, что использование рассматриваемого подхода может быть расширено и на бистатический случай рассеяния. В рассматриваемой системе уравнений применялись две двумерных функции Грина. Первая из них $G_1(\rho)$ соответствует бесконечной области, в которой есть волновое число $k = 2\pi / \lambda$. В ходе расчетов мы учитывали, что λ соответствует длине волны, которая будет распространяться внутри свободного пространства. Вторая функция Грина $G_2(\rho)$ соответствует бесконечной области, в которой есть волновое число $k = (2\pi / \lambda) \sqrt{\epsilon\mu}$. В аргументе функции Грина рассматривается $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, что соответствует расстоянию, которое будет между точкой наблюдения и истока. При анализе контура интегрирования применяется коэффициент Ламе h .

Решение уравнения (2.1) проводилось на основе метода коллокаций. В качестве базисных функций рассматривались кусочно-постоянные функции, в качестве пробных функций – δ -функции Дирака. В образующейся матрице системы линейных уравнений число обусловленности не превышало 10^3 .

Для того, чтобы определить поле, которое будет рассеиваться от анализируемых полых структур после того, как найден ток J , необходимо применять формулу [5], [6]:

$$E(\theta, R) = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 R}} \exp[-i(k_1 R - \pi/4)] \times$$

$$\times \int_{L_m} J(\tau) \exp[ik_1(x(\tau) \cos \theta + y(\tau) \sin \theta)] h(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Чтобы определить для полости с более простой формой (рисунок 1.2) характеристики рассеяния, можно опираться на модальный метод.

Преимущество его заключается в том, что по сравнению с методом интегральных уравнений затрачивается значительно меньше времени. Особенно это становится заметно, когда полая структура имеет достаточно большую длину.

Отметим основные этапы при использовании модального метода [7], [8]:

1. Проводится решение электродинамической задачи на апертуре полой структуры. Происходит сшивание мод плоского волновода и тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на апертуре. Для входящих мод происходит определение модальных коэффициентов для входящих мод.

2. С применением матрицы рассеяния ведется определение характеристик выходящих из полости мод [7].

3. Для того, чтобы найти рассеянные поля, необходимо применять приближение Стрэттона-Чу [7], [8]. Учитывается отражение только от внутренней области полой структуры, но не от ее краев и внешней поверхности.

4. Чтобы учесть отражение от краев, могут быть применены дополнительные поправочные коэффициенты, а также метод физической оптики [9], [10].

Существует возможность без ухудшения точности вычислений уменьшить число учитываемых в расчете мод. То есть для тех мод, по

которым соответствующие модальные лучи будут близки по направлению к перпендикуляру к задней стенке, наблюдается наибольший вклад в отраженную мощность [9].

Решение двумерной задачи в дальнейшем может быть применено для того, чтобы решать трехмерную задачу. То есть, Трехмерная ЭПР полой структуры $\sigma_{трех}$ определяется на основе ЭПР двумерной полой структуры $\sigma_{двум}$ [7]:

$$\sigma_{трех} = \frac{2b^2}{\lambda} \sigma_{двум}, \quad (2.3)$$

здесь учитывается размер b , который направлен перпендикулярно к плоскости, приведенной на рисунок 1.2 схемы полой структуры.

Таким образом, существуют возможности для оценок характеристик рассеяния полых структур на базе указанных выше подходов.

При рассмотрении модели полой структуры, которая дана на рисунке 1.1, мы предлагаем использовать величину $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$. На рисунке 2.1 показано, каким образом идут линии уровня по диапазонам углов наблюдения $\Delta\theta$, внутри

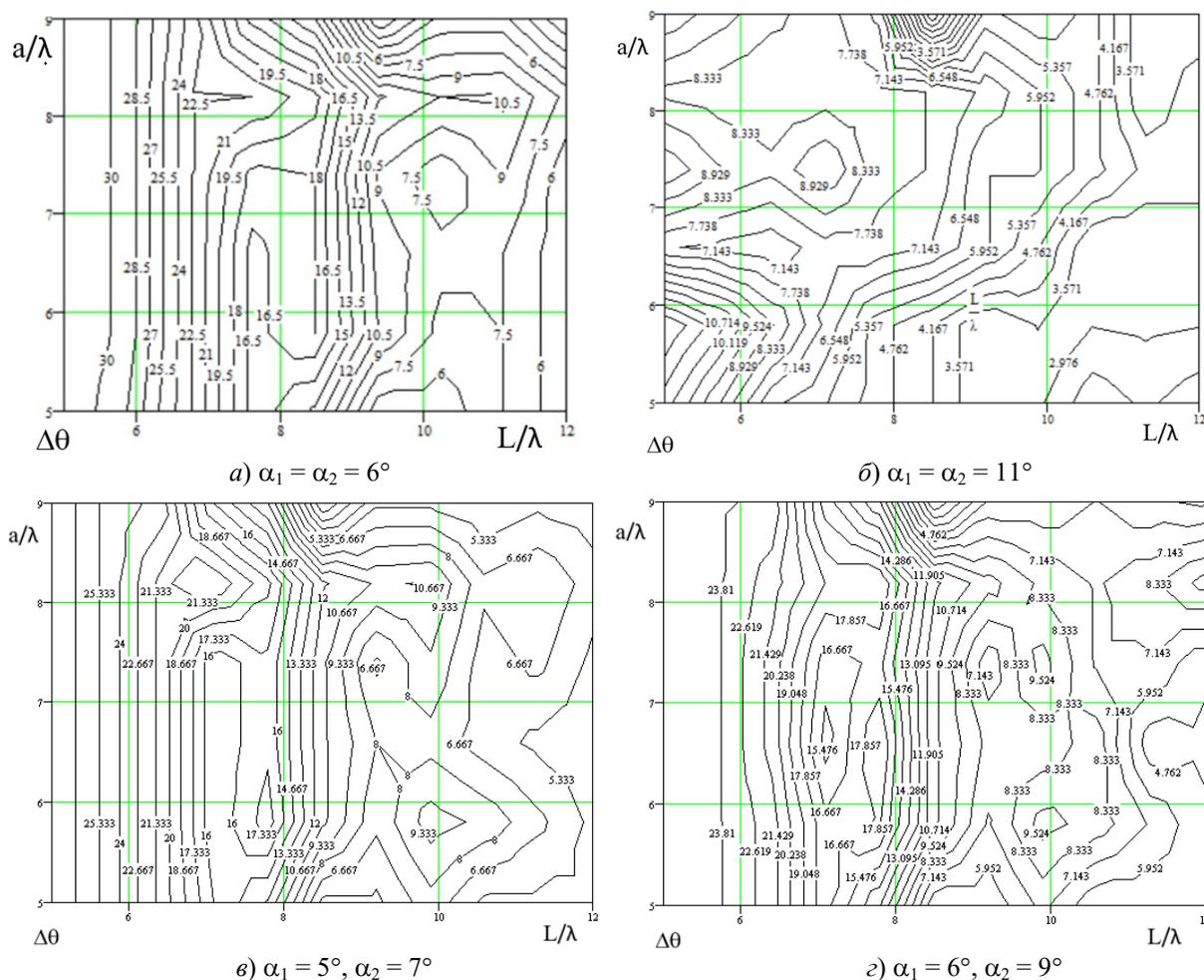


Рисунок 2.1 – Иллюстрация результатов оценок диапазонов углов $\Delta\theta$, внутри которых существуют возможности для того, чтобы представлять исходную полую структуру (рисунок 1.1) на базе приближенной модели (рисунок 1.2)

которых может быть использована модель, указанная на рисунке 1.1. Учитываются разные значения a и L . Приведено несколько зависимостей при различных значениях α .

Анализ показывает, что происходит уменьшение диапазона углов $\Delta\theta$ по мере роста значений α . Кроме того, видно, что изменение значений α будет оказывать меньшее влияние на $\Delta\theta$, чем когда будет происходить изменение в значениях длины полой структуры L .

Если значение α небольшое, то диапазон углов $\Delta\theta$ может составлять десятки градусов. Это демонстрирует эффективность предлагаемого нами подхода с использованием модели полости с более простой формой.

Дополнительным преимуществом этого подхода является возможность применения двумерной модели для решения трехмерных задач, если анализируются полые структуры с прямоугольным поперечным сечением.

Предлагаемая методика может быть использована для диапазона углов $0^\circ \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 15^\circ$.

Заключение

В работе даны предложения по использованию модели полой структуры с простой формой при оценках характеристик рассеяния полых структур со сложной формой. Осуществлены оценки возможности применения таких моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vinogradova, E.D.* Rigorous Approach to Analysis of Backscattering from 2D Open-Ended S-shaped Cavities / E.D. Vinogradova, P.D. Smith // Microwave Mediterranean Symposium. – 2022. – P. 1–4.
2. *Bozorgi, M.* A generalized method for scattering from wide cavities with specified wave functions / M. Bozorgi // Microw Antennas Propag. – 2021. – Vol. 15. – P. 69–79.

3. *Electromagnetic scattering from a cavity embedded in an impedance ground plane* / K. Du, B. Li, W. Sun, H. Yang // Math. Methods Appl. Sci. – 2018. – № 23.

4. *Преображенский, А.П.* Моделирование и алгоритмизация анализа дифракционных структур в САПР радиолокационных антенн / А.П. Преображенский. – Воронеж, 2007. – 248 с.

5. *Захаров, Е.В.* Численный анализ дифракции радиоволн / Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. – Москва: Наука, 1986. – 184 с.

6. *Preobrazhenskiy, A.P.* Estimation of possibilities of combined procedure for calculation of scattering cross section of two-dimensional perfectly conductive cavities / A.P. Preobrazhenskiy // Telecommunications and Radio Engineering. – 2005. – Т. 63, № 3. – С. 269–274.

7. *Ling, H.* RCS of waveguide cavities: a hybrid boundary-integral/modal approach / H. Ling // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1990. – Vol. AP-38, № 9. – P. 1413–1420.

8. *Ling, H.* High-frequency RCS of open cavities with rectangular and circular cross sections / H. Ling, S.W. Lee, R.C. Chou // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1989. – Vol. AP-37, № 5. – P. 648–654.

9. *Altintas, A.* A selective modal scheme for the analysis of EM coupling into or radiation from large open-ended waveguides / A. Altintas, P.H. Pathak, M.C. Liang // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1988. – Vol. AP-36, № 1. – P. 84–96.

10. *Уфимцев, П.Я.* Метод краевых волн физической теории дифракции / П.Я. Уфимцев. – Москва: Советское радио, 1962. – 244 с.

Поступила в редакцию 20.01.2023.

Информация об авторах

Аветисян Татьяна Владимировна – специалист проектного отдела
Львович Яков Евсеевич – д.т.н., профессор
Преображенский Андрей Петрович – д.т.н., профессор

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЕДИНИЦЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В СИСТЕМЕ СИ**Н.А. Ахраменко***Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***TO THE DETERMINATION OF THE UNIT OF ELECTRIC CURRENT
IN SI SYSTEM****N.A. Akhramenko***Belarusian State University of Transport, Gomel*

Аннотация. В международной системе единиц «СИ» одной из основных является ампер. За время существования единица силы электрического тока – ампер – несколько раз переопределялась. Согласно определению 1948 года ампер определялся через силу взаимодействия двух параллельных прямолинейных проводников бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения. С 2019 года вступили в силу изменения в СИ, которые переопределили ампер на основе фиксации численного значения элементарного электрического заряда, принятые в Резолюции 26-ой ГКМВ в 2018 году. Следствием этого стало, в частности, то, что коэффициенты для перевода между единицами СИ и единицами системы СГС перестали быть точными. В данной работе рассмотрена возможность модификации определения 1948 года путем изменения конфигурации взаимодействующих токов. Бесконечные проводники при этом заменяются круговыми токами конечной длины.

Ключевые слова: система единиц «СИ», ампер, электрический ток, взаимодействие токов.

Для цитирования: Ахраменко, Н.А. К определению единицы электрического тока в системе СИ / Н.А. Ахраменко // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 11–14. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_11. – EDN: FEEKTQ

Abstract. In the international system of units “SI”, one of the main ones is the ampere. During its existence, the unit of electric current strength, the ampere, was redefined several times. According to the definition of 1948, the ampere was determined through the interaction force of two parallel straight conductors of infinite length and a negligibly small circular cross-sectional area. Since 2019, changes in the SI have come into force, which redefined the ampere based on fixing the numerical value of the elementary electric charge, adopted in Resolution 26 of the CGPM in 2018. The consequence of this was, in particular, that the coefficients for converting between SI units and units of the CGS system were no longer accurate. In this paper, we consider the possibility of modifying the 1948 definition by changing the configuration of interacting currents. In this case, infinite conductors are replaced by circular currents of finite length.

Keywords: system of units “SI”, ampere, electric current, interaction of currents.

For citation: Akhramenko, N.A. To the determination of the unit of electric current in SI system / N.A. Akhramenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 11–14. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_11. – EDN: FEEKTQ

Introduction

In 1960, the XI General Conference on Weights and Measures (CGPM) adopted the standard, which for the first time was called the “International System of Units”, and established the international abbreviation for this system “SI”. The main units in it were the meter, kilogram, second, ampere, degree Kelvin and candela.

Within the SI, these units are considered to have an independent dimension, that is, none of the basic units can be obtained from others. On January 1, 1963, GOST 9867-61 “International System of Units” SI was introduced in the USSR as the preferred one in all areas of science, technology and the national economy, as well as in teaching.

At present, the SI is adopted as the main system of units by most countries of the world and is almost always used in the field of technology, even

in those countries in which traditional units are used in everyday life.

Since 2019, changes to the SI have come into force. As a result of these changes, there are no specific material standards of units in the new version of the SI system. The basic SI units began to be defined through fixed values of fundamental physical constants [1].

1 Ampere is a unit of electric current

One of the basic units of the SI system, the unit of electric current is the ampere. It was adopted at the 1st International Congress of Electricians in Paris in 1881 and named after the French physicist André-Marie Ampère. It was originally defined as one tenth of the current of the CGSM system and defined a current that produces a force of 2 dynes per centimeter of length between two thin conductors 1 cm apart.

In 1893, the unit of current was defined as the current required to electrochemically deposit 1,118 milligrams of silver per second from a solution of silver nitrate. It was assumed that the unit value would not change, but it turned out that it changed by 0,015%. This unit became known as the international ampere.

According to the definition adopted by the IX CGPM in 1948, “The ampere is that constant current which, if maintained in two straight parallel conductors of infinite length, of negligible circular cross-section, and placed 1 metre apart in vacuum, would produce between these conductors a force equal to 2×10^{-7} newton per metre of length” Figure 1.1 [2]. Thus, in fact, the original definition of ampere was returned.

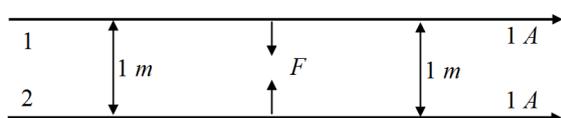


Figure 1.1

Since 2019, changes to the SI have come into force, including the redefinition of ampere based on fixing the numerical value of the elementary charge, adopted in the Resolution of the 26th CGPM in 2018 [1].

The ampere remains the unit of electric current strength, but its value will be set by fixing the numerical value of the elementary electric charge in the SI unit $A \cdot s$, which is equivalent to C . The wording, effective May 20, 2019, reads: “The ampere, symbol A , is the SI unit of electric current. It is defined by taking the fixed numerical value of the elementary charge, e , to be $1,602176634 \cdot 10^{-19}$ when expressed in the unit C , which is equal to $A \cdot s$, where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{Cs}$.” $\Delta\nu_{Cs}$ is the frequency of radiation corresponding to the transition between two hyperfine levels of the ground state of the cesium atom 133.

The value of $\Delta\nu_{Cs}$ at $0 K$ is numerically equal to 9 192 631 770 when it is expressed in the SI unit s^{-1} , which is equivalent to Hz . It can be noted that since the 1980s, quantum devices began to be used as a practical implementation of the ampere standard, which tied the ampere to the volt and ohm ($1 A = 1 V / 1 \Omega$) using Ohm’s law.

However, the change in the definition of 2019 led to the fact that the expressions for the electrical permeability of vacuum or the electrical constant ϵ_0 and the magnetic permeability of vacuum or the magnetic constant μ_0 ceased to be exact (in particular, the exact equality $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H / m$). They began to be performed only numerically (but with great accuracy) and are subject to experimental measurement.

The relative standard uncertainty μ_0 and ϵ_0 is equal to the relative standard uncertainty of the fine structure constant α . From this, in particular, it follows that the coefficients for converting between SI units and units of the CGS system have ceased to be exact, fixed values, since they are expressed in terms of a magnetic constant.

One of the reasons that made it difficult to implement the 1948 definition of the ampere was the presence of the concept of “infinity” in the definition. In this work, the possibility of eliminating the concept of “infinity” by changing the configuration of interacting currents is considered.

2 Interaction of two circular currents

Consider the interaction of two coaxial turns of the same radius (Figure 2.1).

At currents of the same magnitude and one direction, the forces of mutual attraction arise in the turns. Let the left turn create a magnetic field at the localization points of the right turn, then the Ampère force will act on the right turn. This force will determine the magnitude of the interaction of currents.

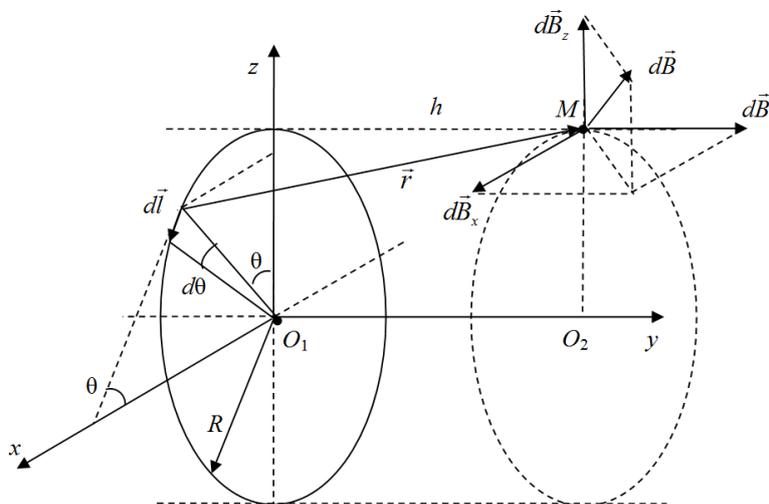


Figure 2.1

Consider a circular current of radius R and a current element $I d\vec{l}$ (left coil, Figure 2.1). The current element $I d\vec{l}$ creates a magnetic field induction at point M . The vector $d\vec{B}$ can be represented in terms of components along the coordinate axes OX , OY , $OZ - \vec{i}dB_x$ ($d\vec{B}_x$), $\vec{j}dB_y$ ($d\vec{B}_y$), $\vec{k}dB_z$ ($d\vec{B}_z$) respectively, where \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} are unit vectors along the corresponding coordinate axes.

The force that attracts the second coil to the first will be affected only by the vector component $\vec{k}dB_z$.

To determine the component $\vec{k}dB_z$ of the magnetic field induction vector $d\vec{B}$ of the circular current at point M (Figure 2.1), we use the Biot-Savart law and the principle of superposition of magnetic fields [3]–[7]. Magnetic induction created by a current element

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad (2.1)$$

where μ_0 is the magnetic constant, I is the magnitude of the current, the vector \vec{r} is directed from the current element to the point M .

In order to write down a vector $\vec{k}dB_z$, it is necessary to select a component along the OZ axis in the vector product $[d\vec{l} \times \vec{r}]$ in (2.1). This component, taking into account the properties of the cross product, is equal to $(dl_x r_y - dl_y r_x) \vec{k}$, where dl_x , r_x , dl_y and r_y are the projections of the vectors $d\vec{l}$ and \vec{r} on the OX , OY axes, \vec{k} is the unit vector along the OZ axis.

Then the vector component $d\vec{B}$ along the OZ axis

$$\vec{k}dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (dl_x r_y - dl_y r_x) \vec{k}. \quad (2.2)$$

Vector projections $d\vec{l}$ on the coordinate axes OX , OY are written as: $dl_x = dl \cos \theta$ and $dl_y = 0$. Vector projections \vec{r} on the coordinate axes OX , OY are represented as: $r_x = -R \sin \theta$ and $r_y = y$.

Then for dB_z from expression (2.2) we obtain

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} y dl \cos \theta. \quad (2.3)$$

Taking into account that the coil length element $dl = R d\theta$, from (2.3) we obtain

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} y R \cos \theta d\theta. \quad (2.4)$$

Distance from coil length element dl to point M

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \\ &= \sqrt{(R \sin \theta)^2 + y^2 + (R - R \cos \theta)^2} = \\ &= \sqrt{2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Then, substituting expression (2.5) into (2.4), we obtain

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi (2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} y R \cos \theta d\theta. \quad (2.6)$$

Having integrated over the entire length of the turn, from expression (2.6) we obtain

$$B_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi (2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} y R \cos \theta d\theta. \quad (2.7)$$

Knowing the induction of the magnetic field of the left turn at point M , it is possible to determine the force acting on the right turn. Taking into account the Ampère's law for the same currents in the turns (the length of the right turn is $2\pi R$), we obtain

$$F = B_z I 2\pi R. \quad (2.8)$$

Then, substituting expression (2.7) into (2.8), we obtain

$$F = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I^2 R^2}{2 (2R^2 + y^2 - 2R^2 \cos \theta)^{3/2}} y \cos \theta d\theta. \quad (2.9)$$

Let us introduce the notation $y/R = k$, then (2.9) will be rewritten in the form

$$F = \frac{\mu_0 k I^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(2 + k^2 - 2 \cos \theta)^{3/2}} = \frac{\mu_0 k I^2}{2} J(k), \quad (2.10)$$

where the integral $J(k)$

$$J(k) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(2 + k^2 - 2 \cos \theta)^{3/2}}. \quad (2.11)$$

The values of the integral $J(k)$ in (2.11) depending on the parameter k are presented in Table 2.1.

Table 2.1

k	$J(k)$	$F(k), 10^{-7} N$
0,2	47,8695	60,1546
0,4	10,9093	27,4181
0,6	4,28916	16,1697
0,8	2,09071	10,5091
1	1,14331	8,88009
1,2	0,67233	5,06925
1,4	0,416173	3,66085
1,6	0,267981	2,69344
1,8	0,178053	2,01373
2	0,121545	1,52738

Taking into account the data in Table 2.1 ($J(k)$), the dependence of the force F on the parameter k at a current of 1 A and a magnetic constant $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ is presented in Table 2.1 ($F(k)$).

3 Possible definition of the unit of electric current

From Table 2.1 it follows that at $k = 1,8$ the interaction force $F = 2,01373 \cdot 10^{-7} N$, and at $k = 2$ the force $F = 1,52738 \cdot 10^{-7} N$.

That is, one can choose such a value of k (slightly more than $k = 1,8$) at which the force F is exactly equal to $2 \cdot 10^{-7} N$.

At current $I = 1 A$, interaction force $F = 2 \cdot 10^{-7} N$ and magnetic constant $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$, we obtain an equation for k

$$\int_0^{2\pi} \frac{k \cos \theta d\theta}{(2 + k^2 - 2 \cos \theta)^{3/2}} = \frac{1}{\pi}. \quad (3.1)$$

The value $k = k_0$, which is a solution to Equation (3.1), can be written as $y/R = k_0$, whence $R = y/k_0$. Since the diameter of the coil is equal to twice the radius, then $D = 2y/k_0$.

Equation (3.1) can be solved with a given accuracy.

With $k_0 = 1,8048\dots$, $y = 1 m$, we get that the diameter of the turns should be equal to $D = 1,1081\dots m$.

In view of the foregoing, the definition of the unit of electric current can be written as: “ampere is the strength of an unchanging current, which, when passing through two coaxial circular conductors of the same diameter $D = 1,1081\dots m$ one from the other, would cause an interaction force equal to $2 \cdot 10^{-7}$ Newtons” Figure 3.1. At currents in one direction, the coils attract; at currents in opposite directions, the coils repel.

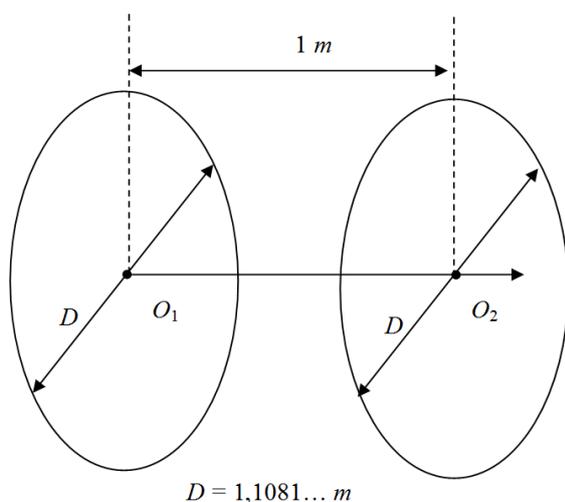


Figure 3.1

Conclusion

Thus, the definition of 1948 for the ampere (through the force of interaction of two parallel rectilinear conductors of infinite length and a negligible

small circular cross-sectional area) can be modified. For this, the configuration of the interacting currents is changed. Infinite conductors are replaced by circular currents, i.e. conductors of finite length.

The possibility of implementing the definition increases, since there is no concept of “infinity” in the definition. The expressions for the electrical permeability of the vacuum or the electrical constant ϵ_0 and the magnetic permeability of the vacuum or the magnetic constant μ_0 do not change. The coefficients for conversion between SI units and units of the CGS system remain accurate and are expressed in terms of the magnetic constant.

REFERENCES

1. *Le Système international d'unités (SI) / The International System of Units (SI)*, edition 9, – Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), 2019.
2. *Le Système international d'unités (SI) / The International System of Units (SI)*, edition 7, – Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), 1998.
3. *Raymond, A. Serway. Physics for Scientists and Engineers (with PhysicsNOW and info Trac) / A. Serway Raymond, W. Jewett John: 6 th ed., Thomson Brooks / Cole, 2004. – 1296 p.*
4. *Detlaf, A.A. Physics course: textbook. allowance for higher educational institutions / A.A. Detlaf, B.M. Yavorsky – 4th ed., corrected. – Moscow: Higher School, 2002. – 718 p.*
5. *Matveev, A.N. Electricity and magnetism / A.N. Matveev. – Moscow: Higher School, 1983. – 463 p.*
6. *Savelyev, I.V. Course of general physics: in 3 volumes – Vol. 2: Electricity and magnetism. Waves. Optics / I.V. Saveliev. – Moscow: Nauka, 1988. – 480 p.*
7. *Shilyaeva, K.P. Physics. Brief theory and tasks: manual / K.P. Shilyaeva, I.O. Delikatnaya, N.A. Akhramenko. – Gomel: BelsUT, 2021. – 211 p.*

The article was submitted 05.02.2023.

Информация об авторах

Ахраменко Николай Арсеньевич – к.т.н., доцент

УДК 535.42

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_15

EDN: FOAIZW

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА И ПОПЕРЕЧНЫЕ ПОТОКИ ЭНЕРГИИ ВЕКТОРНЫХ БЕССЕЛЬ – ГАУССОВЫХ ТМ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

POLARIZING PROPERTIES AND CROSSFLOWS OF ENERGY OF VECTOR BESSEL – GAUSS TM LIGHT BEAMS

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для векторных световых пучков Бесселя – Гаусса с неоднородной поляризацией (ТМ-моды). При ограничениях $Q_0'' > 0$ на свободный параметр Q_0'' такие пучки Бесселя – Гаусса переносят конечную мощность. Вычислены и графически исследуются картины поляризации, интенсивности и поперечные потоки энергии таких пучков.

Ключевые слова: параксиальные пучки, векторные пучки, пучки Бесселя – Гаусса, неоднородная поляризация, ТМ-моды.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бессель-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_15. – EDN: FOAIZW

Abstract. The analytical expressions in the closed form for vector light Bessel – Gauss beams with nonhomogeneous polarization (TM-modes) are offered and are investigated. At restrictions $Q_0'' > 0$ on free parameter Q_0'' such Bessel – Gauss beams transfer terminating power. The pictures of polarization, intensity and crossflows of energy of such beams are calculated and are graphically investigated.

Keywords: paraxial beams, vector beams, Bessel – Gauss beams, nonhomogeneous polarization, TM-modes.

For citation: Girgel, S.S. Polarizing properties and crossflows of energy of vector Bessel – Gauss TM light beams / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 15–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_15 (in Russian). – EDN: FOAIZW

Введение

Бесселевы пучки [1] обладают уникальными свойствами. В частности, они проявляют бездифракционность. К сожалению, бездифракционность связана с бесконечной энергией, поэтому бесселевы пучки, строго говоря, экспериментально не реализуемы. Поэтому были предложены бессель-гауссовы пучки, у которых наличие гауссовой образующей приводит к конечной переносимой мощности (см., например, [2]).

Обычно, для описания световых пучков используется скалярное приближение. Однако такой формализм пригоден, как правило, только для линейно поляризованных световых полей. Векторные бессель-гауссовы пучки, описывают световые пучки с произвольной поляризацией. Поэтому, по сравнению со скалярными, исследовались значительно меньше [3]–[8].

В работах [5]–[6] нами было начато изучение векторных пучков Бесселя – Гаусса. В работах [7]–[8] были получены явные выражения для поляризационных характеристик векторных

пучков Бесселя – Гаусса с однородной поляризацией и для ТМ мод с неоднородной поляризацией.

В настоящей работе будут более детально исследоваться поляризационные и энергетические свойства векторных бессель-гауссовых ТМ световых пучков, имеющих неоднородную поляризацию по своему поперечному сечению.

1 Векторные бессель-гауссовы световые пучки

Для скалярного параболического уравнения

$$(\Delta_{\perp} + 2i\partial_z)f(\rho, \varphi, z) = 0 \quad (1.1)$$

в цилиндрической системе координат известно решение

$$f(\rho, \varphi, z) = J_m(k_{\perp}\rho)e^{im\varphi}\exp\left(\frac{-ik_{\perp}^2z}{2k}\right),$$

описывающее параксиальные пучки Бесселя. К сожалению, такие пучки переносят бесконечную мощность и физически не реализуемы. Поэтому обычно ищут решение уравнения (1.1) в форме некоторой функции, содержащей гауссиан

$$G = \frac{1}{q} \cdot \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q}\right),$$

где $q = z - iq_0''$ – комплексный параметр пучка, и получают скалярные пучки Бесселя – Гаусса. Однако проще всего применить преобразование Апеля [9]

$$\Psi(\rho, \varphi, z) \rightarrow G\Psi\left(\frac{\rho}{\beta q}, \varphi, -\frac{1}{\beta^2 q}\right),$$

которое даёт новое гауссовоподобное решение из известного $\Psi(\rho, \varphi, z)$. Коэффициент βq должен быть безразмерным. Можно взять $\beta = i/z_0$, где рэлеевская длина $z_0 = kx_0^2/2$. Тогда получаем из $f(\rho, \varphi, z)$ решение [7], [8]

$$\psi = Q_1 G J_\nu \left(\frac{-ik_\perp z_0 \rho}{q}\right) e^{im\varphi},$$

описывающее скалярные пучки Бесселя – Гаусса конечной мощности при $q_0'' > 0$. Здесь

$$Q_1 = \exp\left(\frac{-ik_\perp^2 z_0^2}{2kq}\right)$$

– согласующий множитель между функциями Бесселя и Гаусса.

Для нахождения выражений, описывающих векторные пучки Бесселя-Гаусса, также применяют различные подходы. Проще всего сначала найти векторную амплитуду \mathbf{E}_\perp в поперечной плоскости, перпендикулярной оси OZ распространения пучка. Поперечную векторную амплитуду пучка Бесселя – Гаусса с неоднородной по сечению поляризацией (ТМ-моды) можно взять в виде $\mathbf{E}_\perp = \nabla_\perp \psi / k$. Тогда, после некоторых преобразований, получаем векторные решения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \left[\frac{i\rho J_m \mathbf{e}_\rho}{q} - \frac{k'_\perp}{2k} \left((\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi) J_{m-1} - (\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi) J_{m+1} \right) \right] \times \\ &\quad \times G Q_1 e^{im\varphi}; \\ E_z &= \frac{1}{kq} \left[\left(2 + \frac{ik\rho^2}{q} + \frac{iqk'_\perp}{k} \right) J_m + k'_\perp \rho (J_{m-1} - J_{m+1}) \right] \times \\ &\quad \times G Q_1 e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

где $J_m = J_m(u)$; $u = k'_\perp \rho$; $k'_\perp = \frac{-ik_\perp z_0}{q}$; $z_0 = \frac{kx_0^2}{2}$;

k и k_\perp – продольные и поперечные волновые числа соответственно. Последние выражения соответствуют формулам (17)–(19) в [6] для ТЕ мод.

Целесообразно далее представить векторные решения для ТМ пучков Бесселя – Гаусса, представленные выше, в безразмерной форме. Для этого введем x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные размеры пучка в направлениях вдоль осей OX и OY соответственно. Тогда $R = \rho/x_0$, $Z = z/z_0$ –

безразмерные координаты, $\varphi = \arctg(Y/X)$. $Q = Z - iQ_0''$ – безразмерный комплексный параметр пучка. Волновые безразмерные параметры: $K = kx_0$; $K_\perp = k_\perp x_0$. $\theta = 1/K \approx 10^{-4}$ – безразмерный параметр парааксиальности пучка. Аргумент функций Бесселя $u = \frac{-iK_\perp R}{Q}$.

В разложении векторной амплитуды \mathbf{E} исследуемых ТМ-мод по ортам цилиндрической системы координат $\mathbf{E} = E_R \mathbf{e}_R + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi + E_z \mathbf{e}_z$ соответствующие проекции равны:

$$E_R = \frac{iGQ_1}{2Q} \exp(im\varphi) \cdot (4RJ_m - K_\perp (J_{m-1} - J_{m+1}));$$

$$E_\varphi = \frac{GQ_1}{2Q} \exp(im\varphi) \cdot K_\perp (J_{m-1} + J_{m+1});$$

$$E_z = -\frac{GQ_1}{2Q^2 K} \exp(im\varphi) \times$$

$$\times \left((4Q + i(4R^2 - K_\perp^2)) J_m - 2iK_\perp R (J_{m-1} - J_{m+1}) \right).$$

Таким образом, векторные парааксиальные ТМ пучки Бесселя – Гаусса зависят от безразмерных переменных (R, φ, Z) и четырех безразмерных параметров (K_\perp, K, m, Q) .

Чтобы векторные ТМ-моды Бесселя – Гаусса переносили конечную мощность, необходимо, чтобы для векторной амплитуды \mathbf{E}_\perp выполнялись условия её квадратичной интегрируемости (КИ). Несложно видеть, что условия КИ для ТМ-мод следующие $Q_0'' > 0$. Будем традиционно полагать также индекс m неотрицательным целым.

2 Поляризационные характеристики ТМ пучков Бесселя – Гаусса

Неоднородная поляризация и поперечные потоки энергии для гауссовых ТМ мод обсуждались нами в [10], а циркулярных ТМ пучков Куммера – в [11].

Теперь обсудим поляризацию векторных ТМ пучков Бесселя – Гаусса. Для вычисления характеристик поляризации таких пучков введем параметр $\eta_c = E_\varphi / E_R = \text{tg}(\psi_c' + i\psi_c'')$, тогда азимут главной оси эллипса поляризации световой волны относительно оси OX равен

$$\varphi + \psi_c' = \varphi + \text{Re}(\arctg(\eta_c)),$$

а ее эллиптичность γ выражается как

$$\gamma = \text{th}\psi_c'' = \text{th}(\text{Im}(\arctg(\eta_c))).$$

Так как параметр поляризации η_c не зависит от азимута φ , то поляризационные характеристики ТМ пучков Бесселя – Гаусса зависят только от радиальных расстояний R . Как видно из рисунков 2.1 и 2.2, главные оси эллипсов поляризации могут быть ориентированы только вдоль радиальных и азимутальных направлений.

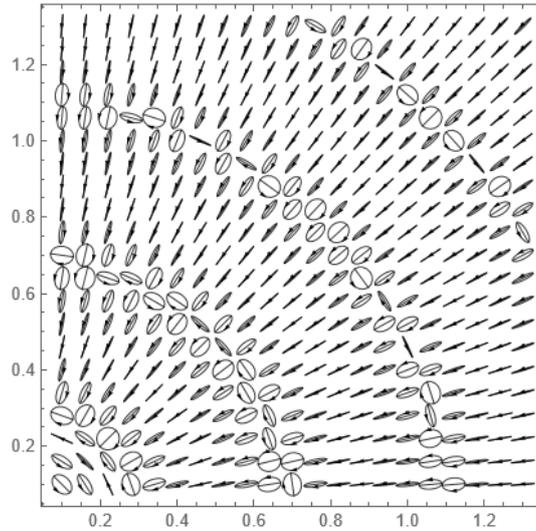


Рисунок 2.1 – Эллипсы поляризации векторных ТМ-мод Бесселя – Гаусса.
 Параметры пучка: $Q_0'' = 1; K_{\perp} = 8; m = 1; Q_0 = 1; Z = 0$.

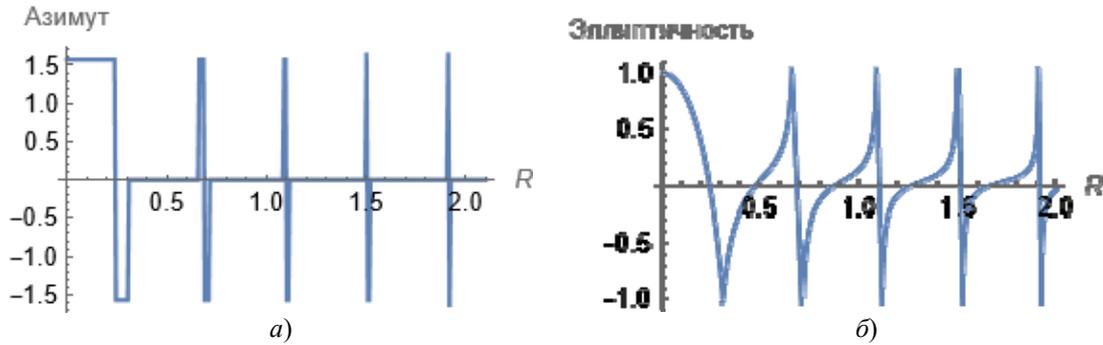


Рисунок 2.2 – Характеристики эллипсов поляризации векторных ТМ-мод:
 а) азимут эллипса поляризации, б) эллиптичность волны.
 Параметры пучка: $Q_0'' = 1; K_{\perp} = 8; m = 1; Q_0 = 1; Z = 0$.

Поляризация пучков является в общем случае неоднородной эллиптической. На оси пучка поляризация – строго циркулярная (рисунки 2.1 и 2.2). Затем при возрастании R эллиптичность у эллипсов поляризации быстро уменьшается до нуля и направления вращения у эллипсов поляризации изменяются на противоположные (при переходе через линейную азимутальную поляризацию). Потом снова поляризация постепенно становится круговой. После этого главные оси эллипсов поляризации поворачиваются на 90° . При дальнейшем возрастании расстояния R от оси пучка эллиптическая поляризация снова постепенно стремится к линейной радиальной (рисунки 2.1 и 2.2). Иначе говоря, при возрастании расстояния R от оси пучка неоднородная поляризация ТМ пучков Куммера претерпевает следующие трансформации: поляризация круговая – линейная азимутальная – круговая с противоположным направлением вращения – линейная радиальная – круговая и т. д. Главные оси эллипсов поляризации ориентируются вдоль радиальных и азимутальных направлений.

Таким образом, при $R \rightarrow 0$ поляризация стремится к циркулярной, при $R \rightarrow \infty$ поляризация стремится к линейной радиальной. При $m = 0$ везде имеем строго линейную радиальную поляризацию.

3 Продольные и поперечные потоки энергии ТМ пучков Бесселя – Гаусса

Усредненные по времени плотности энергии w и продольного S_z потоков энергии светового поля для векторных ТМ пучков Бесселя – Гаусса можно представить как

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} (|E_R|^2 + |E_{\phi}|^2); \quad S_z = \frac{c}{n} w.$$

Плотность поперечного потока энергии можно записать в виде [9]

$$S_{\perp} = -\frac{c}{8\pi n} \operatorname{Re} (\varepsilon \mathbf{E}_{\perp}^* \cdot E_z + \mu \mathbf{H}_{\perp}^* \cdot H_z).$$

Для ТМ-мод $H_z = 0$ и поэтому

$$S_{\perp} = -\frac{c\varepsilon}{8\pi n} \operatorname{Re} \{ (E_R^* \cdot \mathbf{e}_R + E_{\phi}^* \cdot \mathbf{e}_{\phi}) \cdot E_z \}.$$

Целесообразно далее, следуя формализму [12]–[14], в выражении для $\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$ выделить явно плотность орбитального \mathbf{S}_o и спинового \mathbf{S}_s потоков энергии. Для параксиальных векторных полей получаем

$$\mathbf{S}_o = \frac{c\varepsilon}{8\pi nK} \text{Im} \left\{ (E_R^* \cdot \partial_R E_R + E_\varphi^* \cdot \partial_R E_\varphi) \mathbf{e}_R + (E_R^* \cdot \partial_\varphi E_R + E_\varphi^* \partial_\varphi E_\varphi) \mathbf{e}_\varphi / R \right\};$$

$$\mathbf{S}_s = -\frac{c\varepsilon}{8\pi nK} \text{Im} \left\{ -\partial_R (E_R^* E_\varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi + \partial_\varphi (E_R^* E_\varphi) \cdot \mathbf{e}_R / R \right\}.$$

Так как зависимость векторной амплитуды \mathbf{E} от азимута φ мы взяли простейшей экспоненциальной, то

$$\mathbf{S}_s = -\frac{c\varepsilon}{8\pi nK} \cdot \mathbf{e}_\varphi \text{Im} \left\{ \partial_R (E_R^* E_\varphi) \right\},$$

т. е. спиновые \mathbf{S}_s потоки энергии ТМ мод направлены строго азимутально. При этом орбитальные потоки энергии

$$\mathbf{S}_o = \frac{c\varepsilon}{8\pi nK} \left\{ \text{Im} (E_R^* \cdot \partial_R E_R + E_\varphi^* \cdot \partial_R E_\varphi) \cdot \mathbf{e}_R + m \left(|E_R|^2 + |E_\varphi|^2 \right) \mathbf{e}_\varphi / R \right\}.$$

При удалении от оси пучка OZ орбитальные потоки энергии стремятся к радиальным направлениям. При $m = 0$ – строго $\mathbf{S}_o \parallel \mathbf{e}_R$.

Проводилось аналитическое и графическое исследование поперечных \mathbf{S}_\perp потоков энергии векторных ТМ пучков Бесселя – Гаусса. На всех рисунках масштаб интенсивности условный. Мы рассматриваем азимутальную зависимость $E \propto \exp(im\varphi)$. Поэтому плотности энергии w , плотности поперечного потока энергии \mathbf{S}_\perp не зависят от азимута φ . В итоге, для исследования интенсивности и потоков энергии ТМ пучков Бесселя – Гаусса можно ограничиться продольным сечением пучка. Поэтому гауссовоподобные картины интенсивности в поперечном сечении

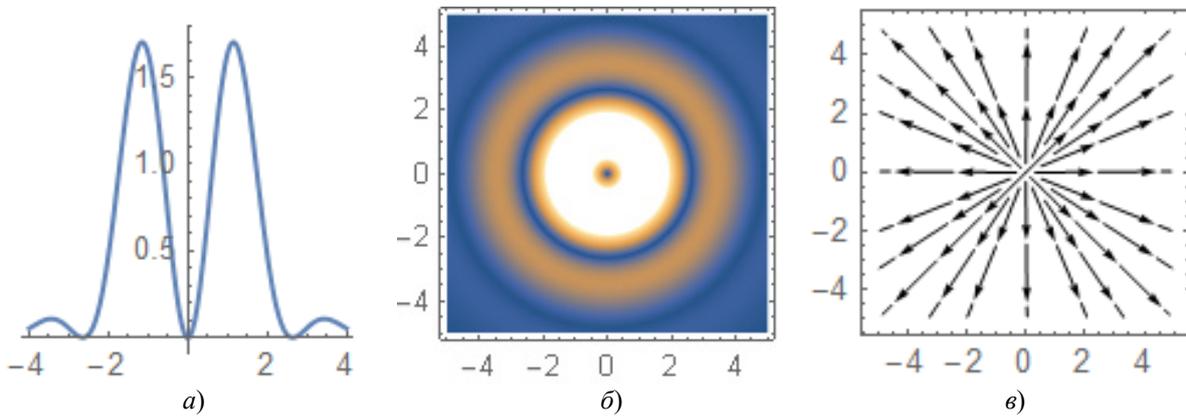


Рисунок 3.1 – Интенсивность и поперечные потоки энергии векторных пучков Бесселя – Гаусса (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(im\varphi)$: а) интенсивность в продольном сечении XOZ ; б) 2D интенсивность в поперечном сечении XOY ; в) линии поперечного потока. Используемые параметры: $Q_0'' = 12$; $K_\perp = 5.9$; $K_\perp = 16$; $m = 0$; $Q_0 = 12$; $Z = 0,05$.

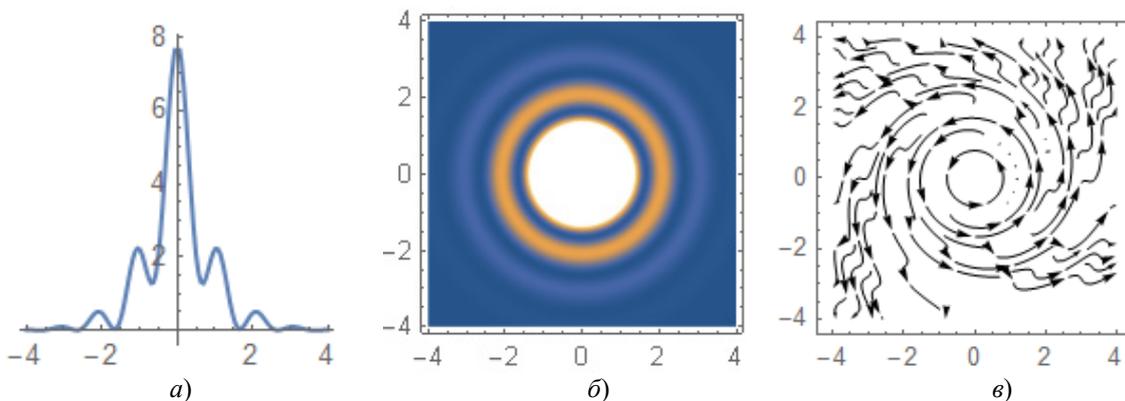


Рисунок 3.2 – Интенсивность и поперечные потоки энергии векторных пучков Бесселя – Гаусса (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(im\varphi)$: а) интенсивность в продольном сечении XOZ ; б) 2D интенсивность в поперечном сечении XOY ; в) линии поперечного потока. Используемые параметры: $Q_0'' = 12$; $K_\perp = 5.9$; $K_\perp = 25$; $m = 1$; $Q_0 = 8$; $Z = 0,0115$.

пучков представляют собой концентрические кольца. Обычно видны наиболее яркие центральный пик и/или одно или несколько колец (рисунки 3.1 и 3.2).

Поперечные потоки энергии значительно меньше продольных, однако вносят качественный вклад в общую динамику потоков энергии.

Направления потоков энергии зависят только от R и не зависят от азимута φ . Проанализируем характерные особенности поперечных потоков энергии векторных параксиальных пучков Бесселя – Гаусса (ТМ-моды) от свободных параметров Q_0'' , m , K , K_{\perp} и расстояния Z вдоль оси пучка. Эти зависимости являются достаточно сложными.

При $m = 0$ имеем строго радиальные потоки и несколько колец интенсивности. Вблизи оси пучка поперечные потоки энергии направлены азимутально, т. е. $S_{\perp} \propto e_{\varphi}$. На радиальные потоки энергии накладываются периодические, постепенно убывающие азимутальные осцилляции.

С увеличением параметров K_{\perp} и Q_0'' или расстояния Z спирали поперечных потоков энергии постепенно раскручиваются, число видимых колец интенсивности возрастает. При убывании параметра Q_0'' азимутальные потоки энергии постепенно превращаются в радиальные.

Если рассматривать трехмерные потоки энергии, то вблизи оси пучка линии полных потоков энергии закручены спирально вокруг оси пучка. С возрастанием R спирали постепенно раскручиваются. Для пучков с азимутальной зависимостью пучка в форме $f_2 = \cos(m\varphi)$ картины интенсивности и потоков энергии модулируются функцией $f_2 = \cos(m\varphi)$ являются более сложными и здесь не анализируются.

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие новые типы пучков – векторные параксиальные световые ТМ пучки Бесселя – Гаусса, переносящие конечную мощность. Они характеризуются следующими свободными параметрами: двумя вещественными – (K , m) и двумя комплексными параметрами (Q_0 , K_{\perp}). Представлены явные выражения для поляризации и плотностей полного S , орбитального S_o и спинового S_s потоков энергии.

Выполнено графическое моделирование их поперечных потоков энергии и интенсивности. Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим картинам интенсивности и потоков энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Durnin, J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // *JOSA A.* – 1987. – Vol. 4, iss. 4. – P. 651–654.
2. *Gori, F.* Bessel – Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // *Opt. Commun.* – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.
3. *Greene, P.L.* Properties and diffraction of vector Bessel – Gauss beams / P.L. Greene, D.G. Hall // *JOSA. A.* – 1998. – Vol. 15, iss.12. – P. 3020–3027.
4. *Seshadri, S.R.* Electromagnetic Gaussian beam / S. R. Seshadri // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1987. – Vol. 15, № 22. – P. 2712–2719.
5. *Гиргель, С.С.* Поляризационные свойства бessel-гауссовых пучков света / С.С. Гиргель // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины.* – 2001. – № 6 (9). – С. 150–154.
6. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных бessel-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины.* – 2006. – № 6 (39). – Ч. 1. – С. 49–52.
7. *Гиргель, С.С.* Обобщенные асимметричные волновые пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2017. – № 2 (31). – С. 10–14.
8. *Гиргель, С.С.* Обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2015. – № 4 (25). – С. 11–15.
9. *Миллер, У.* Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – Москва: Мир, 1981. – 342 с.
10. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация // С.С. Гиргель / *Проблемы физики, математики и техники.* – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.
11. *Гиргель, С.С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2023. – № 1 (54). – С. 1–5.
12. *Berry, M.V.* Optical currents / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics.* – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.
13. *Bekshaev, A.Y.* Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // *Optics Communications.* – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.
14. *Bekshaev, A.* Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // *Journal of Optics.* – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 09.03.2023.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

ЭЛЕКТРЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ В НАНОКОМПОЗИТАХ НА ОСНОВЕ ПОЛИЛАКТИДА

М.А. Коваленко¹, С.В. Зотов¹, В.А. Гольдаде^{1,2},
А.А. Павлов³, А.М. Камалов³, М.Э. Борисова³

¹Институт механики металлополимерных систем имени В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

³Высшая школа высоковольтной энергетики, Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

ELECTRET STATE IN NANOCOMPOSITES BASED ON POLYLACTIDE

M.A. Kovalenko¹, S.V. Zotov¹, V.A. Goldade^{1,2},
A.A. Pavlov³, A.M. Kamalov³, M.E. Borisova³

¹V.A. Belyi Metal-Polymer Institute of NAS of Belarus, Gomel

²Francisk Skorina Gomel State University

³Higher School of High-Voltage Power Engineering, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

Аннотация. Исследованы электретные свойства композитов на основе полилактида (ПЛА), наполненного монтмориллонитом (ММЛ). С ростом содержания наполнителя возрастает стабильность электретного состояния, растут заряд и амплитуды токов ТСД. Спектры токов проанализированы на основе представлений о суперпозиции дискретных элементарных дебаевских максимумов, описываемых кинетикой первого порядка. Показано совпадение экспериментальных и расчетных значений плотности тока, рассчитаны заряд и энергия активации. Низкотемпературные максимумы могут быть обусловлены либо высвобождением носителей заряда с ловушек, локализованных на границе раздела ПЛА и ММЛ (поляризация Максвелла – Вагнера), либо релаксацией заряда с ловушек вследствие размораживания сегментальной подвижности.

Ключевые слова: полилактид, монтмориллонит, биоразлагаемый, электрет, токи термодеполяризации, энергия активации.

Для цитирования: Электретное состояние в нанокompозитах на основе полилактида / М.А. Коваленко, С.В. Зотов, В.А. Гольдаде, А.А. Павлов, А.М. Камалов, М.Э. Борисова // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 20–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_20. – EDN: GETVXH

Abstract. The electret properties of composites based on polylactide (PLA) filled with montmorillonite (MML) have been studied. With an increase of filler content, the stability of the electret state increases, as well as the charge and amplitudes of the TSD currents. The current spectra are analyzed based on the concept of a superposition of discrete elementary Debye maxima described by first-order kinetics. The coincidence of experimental and calculated values of the current density is shown, the charge and activation energy are calculated. Low temperature maxima can be caused either by the release of charge carriers from traps localized at the interface between PLA and MML (Maxwell – Wagner polarization), or charge relaxation from traps caused by unfreezing of PLA segmental mobility.

Keywords: polylactide, montmorillonite, biodegradable, electret, thermal depolarization currents, activation energy.

For citation: Electret state in nanocomposites based on polylactide / M.A. Kovalenko, S.V. Zotov, V.A. Goldade, A.A. Pavlov, A.M. Kamalov, M.E. Borisova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 20–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_20 (in Russian). – EDN: GETVXH

Введение

Привлекательным биополимером, который в настоящее время используется в упаковочной промышленности, является полилактид (ПЛА). Его мономером является молочная кислота, которая производится из возобновляемых растительных источников. Полилактид подвергается биоразложению, как в аэробных, так и в анаэробных условиях, при этом скорость разложения зависит от температуры.

Одним из подходов к созданию биологически активной биоразлагаемой упаковки является использование полимерных нанокompозитов в электретном состоянии. При этом используют наноразмерные наполнители, такие как слоистые силикаты, металлы, оксиды металлов, углерод-содержащие материалы, натуральные компоненты (натуральные волокна, частицы целлюлозы и лигнина) и их гибриды, которые влияют на термические, механические и барьерные свойства

биополимерных матриц [1]. Также с помощью нанонаполнителей придают антибактериальные свойства пищевым плёнкам [2], [3].

Усилить эффект биоразложения позволяет формирование устойчивого электретного состояния в полимерном упаковочном материале. Известно, что под действием электрического поля энергетические параметры микробных клеток снижаются, а следовательно, замедляются метаболические процессы. Ряд исследований подтвердил, что полимерная пленка, прошедшая предварительное электретирование (формированием стабильного во времени электретного состояния), в большей степени подвержена биодegradации при экспонировании в почве [4].

Анализируя работы [5], [6], можно сделать вывод, что чистый полилактид практически не пригоден для создания электретов. Однако при введении наполнителя в полилактидную матрицу электретные свойства пленок улучшаются [7]–[12]. Высокая стабильность электретного состояния может быть получена за счет введения титаната бария [11], диоксида титана, бентонита [13], гидроксипатита [14]. Это объясняется тем, что при наполнении полимера в его структуре возникают новые электроактивные дефекты, выступающие в качестве ловушек заряда. Адсорбция макромолекул полимера на поверхности наполнителя снижает их мобильность и замедляет релаксационные процессы.

Анализ представленных результатов свидетельствует о том, что на основе полилактида можно получать композитные материалы со стабильными электретными характеристиками, и следовательно – определить возможные пути регулирования стабильности электретного состояния. Исследование электретных свойств, механизмов релаксации заряда в полимерных пленках из ПЛА и нанокompозитов на его основе, а также определение возможных путей регулирования стабильности электретного состояния актуальны и представляют особый интерес, поскольку природа электрических процессов в таких системах до конца не изучена.

Цель работы заключается в получении и исследовании композитных пленок на основе полилактида и монтмориллонита, установлении оптимального содержания наполнителя, которое будет обеспечивать стабильное электретное состояние пленок.

1 Материалы и методы исследования

Объектом исследования служили полимерные композиты на основе полилактида марки Ingeo Biopolymer 4043D (Natureworks LLC, США). В качестве наполнителя использован монтмориллонит с массовым содержанием от 0 до 3% масс.

Поли-молочная кислота или полилактид (ПЛА) представляет собой биоразлагаемый али-

фатический полиэфир. Это термопластичный, высокопрочный, высокомодульный полимер (температура плавления 175–178° С), который изготавливают из возобновляемых ресурсов для использования либо в области промышленной упаковки, либо на рынке биосовместимых/биорезорбируемых медицинских материалов [15].

ПЛА классифицируется как общепризнанный безопасный (GRAS) полимер Управлением по санитарному надзору за качеством пищевых продуктов и медикаментов США (FDA), безопасный для всех видов упаковки пищевых продуктов. Именно одобрение ПЛА для медицинского использования дало огромный толчок в сфере исследования этого полимера.

Монтмориллонит (ММЛ) – широко распространённый глинистый минерал, который с давних пор активно используется благодаря своим адсорбирующим свойствам. Структура ММЛ отличается симметричным сложением пачек слоев. Между пачками размещаются молекулы межслоевой воды и атомы обменных оснований Са, Na и др. ММЛ имеет не постоянный химический состав, который в значительной мере зависит от процентного содержания воды (12–24%). В состав ММЛ входят также оксиды алюминия, магния и железа. Для структуры ММЛ характерно большое расстояние между пачками слоёв. При смачивании ММЛ сильно набухает по причине проникновения воды в промежутки между слоями структуры.

Актуальность использования этого материала в качестве наполнителя для получения полимерных электретов обусловлена рядом его свойств: мелкодисперсность (размер наночастиц до 100 нм), высокие, характерные для глини диэлектрические свойства, распространённость и невысокая стоимость.

Композитные материалы в виде гранул получали из смесей ПЛА и ММЛ. Смешение осуществляли на двухшнековом экструдере марки «SuPlast» (Китай), что позволяло равномерно разместить наполнитель в объеме связующего и уменьшить размеры конгломератов ММЛ. Образцы в виде пленок толщиной 150–200 мкм изготавливали методом горячего прессования.

Для определения величины эффективной поверхностной плотности технологического заряда (ЭППЗ) образцов после прессования использовали измеритель параметров электростатического поля (ИПЭП-1, изготовитель МНИПИ, г. Минск). Прибор обеспечивает измерение поверхностной плотности электрических зарядов в диапазоне от 0,02 до 10 мкКл/м².

Электреты получали в коронном разряде при потенциале коронирующего электрода +6 кВ. Величину начальной электретной разности потенциалов регулировали с помощью сетки. Зарядение проводили при комнатной температуре в течение 2 минут.

Токи термостимулированной деполяризации (ТСД) измеряли при постоянной скорости нагрева 1,5 К/мин, используя изолирующую прокладку (пленку политетрафторэтилена толщиной 30 мкм, обладающую удельным сопротивлением $\sim 10^{18}$ Ом/м) между поверхностью образца и электродом. Удельное сопротивление прокладки на несколько порядков больше сопротивления пленки ПЛА+ММЛ. При этом направление тока ТСД соответствовало движению носителей заряда через объем образца, то есть совпадало с направлением тока зарядки. Методом компенсации установлено, что в образце после зарядки в короне накапливался гомозаряд.

Стабильность электретного состояния определяли по зависимости электретной разности потенциалов от времени при комнатной температуре. Электретную разность потенциалов $U_e(t)$ измеряли методом компенсации на приборе с вибрирующим электродом [16]. Погрешность измерения $U_e(t)$ не превышала 5%. Сравнивая полученные данные, можно определить оптимальное содержание наполнителя, обеспечивающее наиболее стабильное электретное состояние.

Энергию активации рассчитывали по методу Гарлика – Гибсона [17]. Наклон прямой, получающийся при построении начального участка пика ТСТ в координатах Аррениуса, позволяет рассчитывать энергию активации по соотношению: $d \ln I(T) / d(1/kT) \approx -W$.

2 Результаты и обсуждение

На рисунке 2.1 представлены результаты измерения технологического заряда образцов с различным содержанием наполнителя после прессования. Наблюдается рост величины ЭППЗ с увеличением содержания наполнителя. Это может свидетельствовать о роли поверхностной активности наполнителя в создании энергетических ловушек носителей заряда и о возможности реализации механизма поляризации Максвелла – Вагнера.

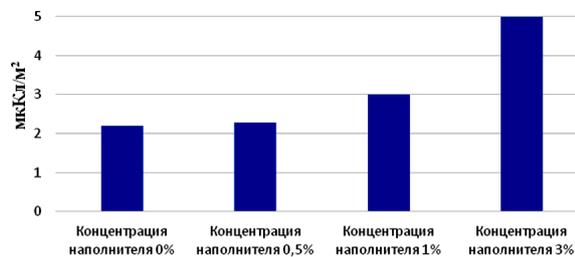


Рисунок 2.1 – Технологический заряд нанокomпозитов на основе ПЛА с различным содержанием ММЛ

На рисунке 2.2 показано относительное изменение электретной разности потенциалов во времени для образцов с различным содержанием ММЛ (0%, 1%, 1.5%, 3%). Видно, что по истечении

50–60 минут наблюдается относительная стабилизация заряда в образцах, а с увеличением содержания наполнителя стабильность электретного состояния растет. В таблице 2.1 представлен заряд, рассчитанный из зависимостей токов ТСД от температуры.

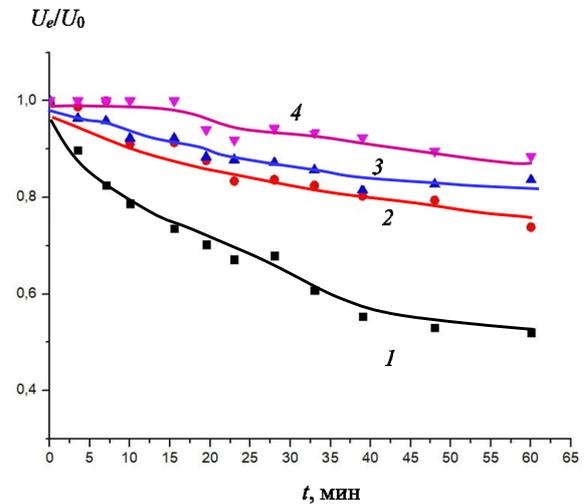


Рисунок 2.2 – Кинетика изменения электретной разности потенциалов для образцов с различным содержанием ММЛ, масс. %: 1 – 0; 2 – 1; 3 – 1,5; 4 – 3

Таблица 2.1 – Заряд в образцах с различным содержанием ММЛ

Содержание ММЛ, %	$Q, 10^{-2}$ Кл
0	0,2
1	0,8
1,5	1,1
3	1,1

Анализ спектров токов ТСД позволяет определить механизмы релаксации заряда в полимере. Как видно из рисунка 2.3, с увеличением процентного содержания наполнителя спектры токов ТСД незначительно изменяют свой характер: введение ММЛ приводит к появлению дополнительного максимума вблизи температуры стеклования (~ 326 К). Основной высокотемпературный максимум с увеличением содержания наполнителя (>1 масс. %) становится более острым и смещается в область низких температур.

Спектры токов ТСД проанализированы на основе представлений о суперпозиции дискретных элементарных дебаевских максимумов, описываемых кинетикой первого порядка [21]. В этом случае для каждого максимума величина плотности тока может быть представлена выражением:

$$J_{TSD} = J_m \exp \left[\frac{W}{k} \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T} \right) \right] \times$$

$$\times \exp \left\langle -\frac{W}{kT_m^2} \int_{T_m}^T \exp \left[\frac{W}{k} \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T'} \right) \right] dT' \right\rangle.$$

Плотность тока в максимуме J_m выражается как

$$J_m = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \varepsilon_{lay} U_{e0}}{\varepsilon h_{lay} + \varepsilon_{lay} h} \times \exp \left\{ -\frac{W}{kT_m^2} \int_{T_0}^{T_m} \exp \left[\frac{W}{k} \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T'} \right) \right] dT' \right\},$$

где $\varepsilon_{lay}, h_{lay}$ – диэлектрическая проницаемость и толщина прокладки; k – постоянная Больцмана; T_0, T' – начальная и текущая температура соответственно; T_m – температура максимума плотности тока J_m ; ε, h – диэлектрическая проницаемость и толщина испытуемой пленки; U_{e0} – начальное значение электретной разности потенциалов; W – энергия активации токового пика; τ_m – время релаксации при температуре максимума, ε_0 – диэлектрическая постоянная.

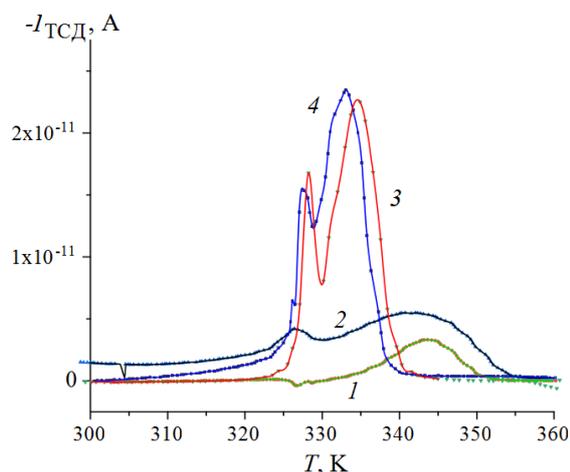


Рисунок 2.3 – Спектры токов ТСД для образцов ПЛА с различным содержанием ММЛ, % масс.: 1 – 0; 2 – 1; 3 – 1,5; 4 – 3

Расчетные значения пиков плотностей токов и их огибающая приведены на рисунке 2.4. В таблице 2.2 представлены также расчетные значения энергии активации для двух основных токовых пиков.

Высокие значения энергии активации (5–13 эВ) не характерны для собственной проводимости композиционного диэлектрика. При этом с увеличением концентрации наполнителя амплитуда токов ТСД и заряд образцов растут. Следовательно, можно предположить, что резкие низкотемпературные максимумы для композитных образцов могут быть обусловлены освобождением носителей заряда с ловушек, которые локализованы на границах раздела ПЛА и ММЛ (поляризация Максвелла – Вагнера), либо релаксацией заряда с ловушек, вызванной размораживанием

сегментальной подвижности макромолекул ПЛА. Введение наполнителя приводит к смещению высокотемпературных максимумов в область более низких температур. Характер максимумов при наличии наполнителя в композите изменяется. Максимумы становятся более узкими, а энергия активации возрастает. Такой эффект также может быть связан с изменением структуры материала и образованием ловушек на границах раздела ПЛА и ММЛ или непосредственно в ММЛ.

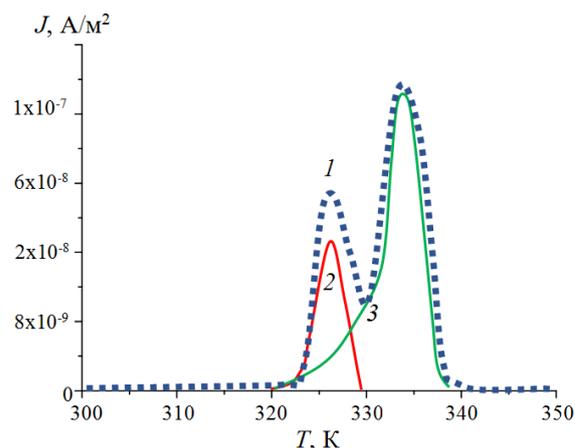


Рисунок 2.4 – Экстраполяция (1, штрихпунктирная линия) и расчетные (2 и 3, сплошные линии) значения пиков плотности тока ТСД для образцов ПЛА+3%ММЛ

Таблица 2.2 – Плотности токов, температуры в максимуме и энергии активации

Расчетные пики	$J_m, 10^{-8} \text{ A/m}^2$	$T_m, \text{ K}$	$W, \text{ эВ}$
Чистый ПЛА			
J_1	2,43	342,0	2,3
ПЛА + 1% МТТ			
J_1	1,2	326,7	5,0
J_2	2,7	342,0	1,3
ПЛА + 1,5% МТТ			
J_1	6,5	328,5	13,0
J_2	13,0	334,7	3,2
ПЛА + 3% МТТ			
J_1	3,0	327,5	13,0
J_2	11,6	333,0	3,2

Заключение

Установлено, что с увеличением содержания наполнителя возрастает стабильность электретного состояния композита на основе биоразлагаемого полимера – полилактида, наполненного монтмориллонитом, а также растут амплитуды токов ТСД и заряд образцов. Основной высокотемпературный максимум тока ТСД с увеличением содержания наполнителя становится более острым и смещается в область низких температур.

Спектры токов ТСД проанализированы на основе представлений о суперпозиции дискретных элементарных дебаевских максимумов, описываемых кинетикой первого порядка. Показано соответствие экспериментальных и расчетных значений пиков плотности тока ТСД для образцов ПЛА, наполненных монтмориллонитом. Рассчитаны заряд и энергии активации пиков токов ТСД. Высказано предположение, что резкие низкотемпературные максимумы тока ТСД для композитных образцов могут быть обусловлены поляризацией Максвелла – Вагнера. Перспективным направлением исследований является изучение электретного состояния биоразлагаемых материалов на основе смесей полимеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Natural antioxidants-based edible active food packaging: An overview of current advancements* / V.M. Rangaraj, K. Rambabu, F. Banat, V. Mittal // *Food Bioscience*. – 2021. – Vol. 43. – P. 101251.
2. *Bioactive and functional biodegradable packaging films reinforced with nanoparticles* / C. Wang, Ch. Gong, Ya Qin, Yao Hu. // *Journal of Food Engineering*. – 2022. – Vol. 312. – P. 110752.
3. *PLA-ZnO nanocomposite films: Water vapor barrier properties and specific end-use characteristics* / R. Pantani, G. Gorrasi, G. Vigliotta, M. Murariu, Ph. Dubois // *European Polymer Journal*, 2013. – Vol. 49, № 11. – P. 3471–3482.
4. *Formation and biodegradation of polyethylene-based electret films* / V.A. Goldade, L.S Pinchuk, O.A. Ermolovich, V.E. Sytsko // *International Polymer Processing*. – 2011. – Vol. 26, № 2. – P. 205–211.
5. *Formation and Investigation of Corona Charged Films from Poly(lactic acid)* / E. Gencheva, T. Yovcheva, M. Marudova, A. Viraneva, I. Bodurov, G. Mekishev, S. Sainov // *AIP Conference proceedings*. – 2010. – Vol. 1203, № 1. – P. 495–500.
6. *Urbaniak-Domagala, W.* Electrical properties of poly(lactides) / W. Urbaniak-Domagala // *Journal of Electrostatics*. – 2013. – Vol. 71, № 3. – P. 456–461.
7. *Galikhanov, M.F.* Changes of polyethylene electrets properties when filled with barium titanate / M.F. Galikhanov, I.A. Zhigaeva // *Proceedings of 14th International Symposium on Electrets*. – Montpellier, France, 2011. – P. 161–162.
8. *Галиханов, М.Ф.* Изучение короноэлектретов на основе композиций полиэтилена и диоксида кремния / М.Ф. Галиханов, Д.А. Еремеев, Р.Я. Дебердеев // *Материаловедение*. – 2003. – № 9. – С. 24–29.
9. *Гороховатский, И.Ю.* Исследование стабильности электретного состояния в композитных пленках на основе полиэтилена высокого

давления с наноразмерными включениями двуокиси кремния: дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук: 01.04.07. / И.Ю. Гороховатский. – С.Пб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2009. – 137 с.

10. *Guzhova, A.* Study of poly(lactic acid) corona electrets / A. Guzhova, T. Yovcheva, A. Viraneva // *Bulgarian Chemical Communications*. – 2015. – Vol. 47, Special Issue B. – P. 115–120.

11. *Improvement of poly(lactic acid) electret properties by addition of fine barium titanate* / A.A. Guzhova, M.F. Galikhanov, Yu.A. Gorokhovatsky, D.E. Temnov, E.E. Fomicheva, E.A. Karulina, T.A. Yovcheva // *J. Electrostat.* – 2016. – № 79. – P. 1–6.

12. *Изучение электретных свойств короноэлектретов на основе полилактида* / А.А. Мусслимова, А.П. Виранева, Т.А. Йовчева, М.Ф. Галиханов // *Вестник Казанского технологического университета*. – 2012. – Т. 15, № 10. – С. 128–130.

13. *Studying properties of corona electret based on compositions of poly(lactic acid) and bentonite* / I.A. Zagidullina, R.I. Kamalova, M.F. Galikhanov, A.A. Guzhova // *Physics of Complex Systems*. – 2021. – Vol. 2, № 2. – P. 68–73.

14. *The Effect of Hydroxyapatite on the Electrical Properties of a Poly(lactide)-Based Composite* / A. Pavlov, M. Borisova, A. Kamalov, K. Malafeev, V. Yudin // 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, St. Petersburg Electrotechnical University “LETI”. – 2020. – P. 1042–1044. – DOI: 10.1109/EIConRus49466.2020.9039381.

15. *Garlotta, D.A.* Literature review of poly(lactic acid) / D.A. Garlotta // *Journal of Polymers and the Environment*. – 2001. – Vol. 9, № 2. – P. 63–84.

16. *Луцейкин, Г.А.* Методы исследования электрических свойств полимеров / Г.А. Луцейкин. – Москва: Химия, 1988.

17. *Garlick, G.F.J.* The Electron Trap Mechanism of Luminescence in Sulphide and Silicate Phosphors / G.F.J. Garlick, A.F. Gibson // *Proc. Phys. Soc.* – 1948. – Vol. 60, № 6. – P. 574. – DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0959-5309/60/6/308>.

18. *Борисова, М.Э.* Физика диэлектрических материалов. Электроперенос и накопление заряда в диэлектриках: учебное пособие / М.Э. Борисова, О.В. Галюков, П.В. Цацынкин. – С.-Пб.: СПбГПУ, 2004. – 106 с.

Поступила в редакцию 26.03.2023.

Информация об авторах

Коваленко Михаил Анатольевич – мл.н.с.
Зотов Сергей Валентинович – к.т.н., доцент
Гольдаде Виктор Антонович – д.т.н., профессор
Павлов Андрей Александрович – ассистент
Камалов Алмаз Маратович – к.т.н.
Борисова Маргарита Эдуардовна – д.т.н., профессор

УДК 539.3:621.74.037:681.3:519.6

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_25

EDN: JHWYWX

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЯ СИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТОКА ГОРЯЧЕГО ВОЗДУХА И ХЛАДАГЕНТА

Ю.В. Никитюк¹, А.Ф. Иванов², И.П. Ситдикова²,
З.Ф. Зарипова², К.Л. Горшкова², И.Ю. Аушев³

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Альметьевский государственный нефтяной институт

³Университет гражданской защиты, Минск

OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS OF THE PROCESS OF CONTROLLED THERMAL CRACKING OF SILICATE GLASSES UNDER THE ACTION OF A HOT AIRFLOW

Y.V. Nikitjuk¹, A.F. Ivanov², I.P. Sitdikova²,
Z.F. Zaripova², K.L. Gorshkova², I.Y. Aushev³

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Almetyevsk State Oil Institute

³University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk

Аннотация. Проведена оптимизация параметров резки силикатного стекла потоком горячего воздуха с использованием генетического алгоритма MOGA в модуле DesignXplorer программы Ansys. С использованием языка программирования APDL были выполнены расчеты температур и термоупругих напряжений, которые возникают при термораскалывании силикатных стекол. С помощью центрального композиционного плана численного эксперимента были построены соответствующие регрессионные модели, в которых скорость резки, диаметр сопла устройства подачи горячего воздуха и температура горячего воздуха в центре пятна нагрева использовались в качестве варьируемых факторов, а значения максимальных температур и термоупругих напряжений в зоне обработки использовались в качестве откликов. Была проведена оценка влияния варьируемых факторов на отклики. Оптимизация управляемого термораскалывания под действием потока горячего воздуха по критерию максимума термоупругих напряжений и максимума скорости обработки позволила определить технологические параметры, которые позволяют повысить надежность и производительность процесса резки силикатных стекол.

Ключевые слова: лазерная резка, поток горячего воздуха, хладагент, MOGA, ANSYS.

Для цитирования: Оптимизация параметров процесса управляемого термораскалывания силикатных стекол под действием потока горячего воздуха и хладагента / Ю.В. Никитюк, А.Ф. Иванов, И.П. Ситдикова, З.Ф. Зарипова, К.Л. Горшкова, И.Ю. Аушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 25–30. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_25. – EDN: JHWYWX

Abstract. The optimization of the parameters of sharpening silicate glass with a hot airflow was carried out using the MOGA genetic algorithm in the DesignXplorer module of the Ansys program. Using the APDL programming language, the calculations of the temperature and thermoelastic stresses, which are typical for thermal cracking of silicate glasses were made. With the help of the central compositional plan of the numerical experiment, regression models were built in which the sharpness speed, hot air nozzle diameter and hot air temperature at the center of the heat spot were used as variable factors, and the maximum temperatures and thermoelastic stresses in the treatment zone were used as responses. The impact of variable factors on responses was assessed. Optimization of controlled thermal splitting under the consumption of air heat according to the criterion of maximum thermoelastic losses and maximum processing speed made it possible to determine the technological parameters that improve the reliability and productivity of the process of sharpening silicate glasses.

Keywords: laser cutting, hot airflow, coolant, MOGA, ANSYS.

For citation: Optimization of the parameters of the process of controlled thermal cracking of silicate glasses under the action of a hot airflow / Y.V. Nikitjuk, A.F. Ivanov, I.P. Sitdikova, Z.F. Zaripova, K.L. Gorshkova, I.Y. Aushev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 25–30. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_25 (in Russian). – EDN: JHWYWX

Введение

В настоящее время методы лазерной резки хрупких неметаллических материалов получили широкое распространение, и наиболее

эффективным среди них является управляемое лазерное термораскалывание (УЛТ). УЛТ обладает недостатком – высокой стоимостью используемого лазерного оборудования. В связи с этим

вызывают интерес исследования процесса термораскалывания силикатных стекол под действием потока горячего воздуха [10]–[12]. Эффективность технологий обработки материалов, в том числе методами термораскалывания, может быть повышена путем оптимизации соответствующих технологических параметров при помощи генетического алгоритма MOGA [13]–[16]. В данной работе выполнена оптимизация параметров резки силикатного стекла методом управляемого термораскалывания под действием потока горячего воздуха и хладагента с использованием генетического алгоритма MOGA модуля DesignXplorer программы ANSYS. Такой подход позволяет повысить эффективность использования технологии резки и найти наиболее оптимальные условия процесса термораскалывания хрупких неметаллических материалов.

1 Определение оптимальных параметров управляемого термораскалывания силикатных стекол под действием потока горячего воздуха и хладагента

Конечно-элементные расчеты температурных полей и полей термоупругих напряжений, формируемых в силикатных стеклах при обработке потоком горячего воздуха и хладагентом, были выполнены в рамках несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке [17]. Моделирование выполнялось с использованием языка программирования APDL (ANSYS parametric design language) [18] в соответствии со схемой, приведенной в работе [12]. Для расчетов были использованы свойства силикатного стекла, приведенные в работе [12]. Расчеты были выполнены для прямоугольного образца размерами $3 \times 2 \times 0,3$ мм. Расчетная модель состояла из 61920 элементов (рисунок 1.1).

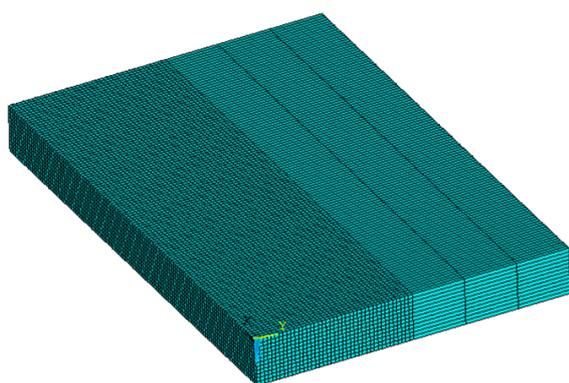


Рисунок 1.1 – Конечно-элементная модель

Для проведения моделирования технологического процесса использовались следующие параметры обработки: скорость перемещения V обрабатываемого изделия относительно действующих на образец потоков составила $0,01$ м/с, диаметр сопла D устройства подачи горячего воздуха равнялся $0,003$ м, температура горячего

воздуха T_v в центре пятна нагрева составляла 250°C , а расстояние от сопла до обрабатываемой поверхности Z было равно $0,01$ м.

Для определения коэффициентов теплоотдачи в зоне воздействия направленного потока горячего воздуха на поверхность материала использовалась эмпирическая зависимость, связывающая число Нуссельта и число Рейнольдса, которая была описана в работе [10]. Аналогично значения коэффициентов теплоотдачи в зоне воздействия хладагента были определены в соответствии с методикой, описанной в работе [19].

На рисунках 1.2–1.3 представлены значения температурных полей и полей термоупругих напряжений, полученные в результате конечно-элементного моделирования. Анализ этих данных позволяет заключить, что при использовании направленного потока горячего воздуха в качестве технологического инструмента нет существенных различий в пространственной локализации областей термоупругих напряжений сжатия и растяжения в обрабатываемом материале по сравнению с реализацией УЛТ. При этом использование направленного потока горячего воздуха приводит к более широкому нагреву обрабатываемой поверхности по сравнению с лазерным нагревом, что может снизить точность резки по сравнению с УЛТ, как показано в работе [12].

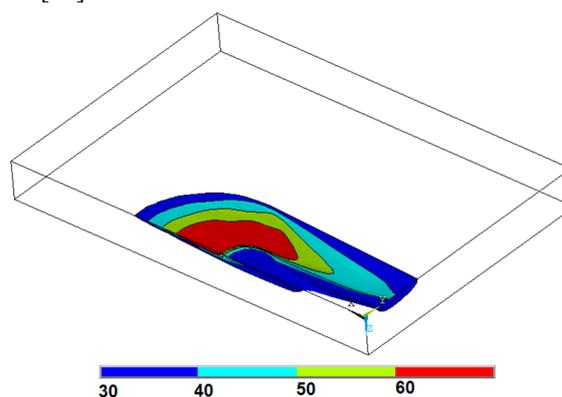


Рисунок 1.2 – Распределение температуры в объеме обрабатываемого образца, $^\circ\text{C}$

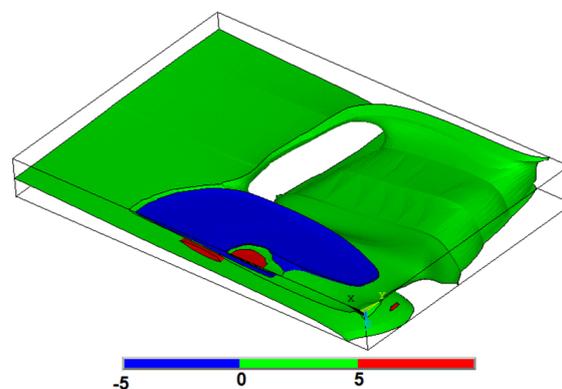


Рисунок 1.3 – Распределение напряжений σ_y в объеме обрабатываемого образца, МПа

В работе была выполнена оптимизация параметров обработки силикатных стекол потоком горячего воздуха и хладагентом с помощью модуля DesignXplorer в программе Ansys. Был применен алгоритм оптимизации, представленный в работе [14]. Поверхности отклика были сформированы с использованием трехфакторного варианта центрального композиционного плана численного эксперимента [20]. В качестве варьируемых факторов использовались скорость резки V , температура горячего воздуха T_v в центре пятна нагрева и диаметр сопла D устройства подачи горячего воздуха. Отклики были определены в виде максимальных температур T и термоупругих напряжений σ_y в зоне обработки, как указано в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – План эксперимента и результаты расчетов

№	P1 $V, \text{ м/с}$	P2 $T_v, \text{ }^\circ\text{C}$	P3 $D, \text{ м}$	P4 $T, \text{ }^\circ\text{C}$	P5 $\sigma_y, \text{ Па}$
1	0,02	250	0,003	104	$1,09 \cdot 10^7$
2	0,01	250	0,003	126	$1,83 \cdot 10^7$
3	0,03	250	0,003	92	$7,42 \cdot 10^6$
4	0,02	200	0,003	86	$8,50 \cdot 10^6$
5	0,02	300	0,003	123	$1,32 \cdot 10^7$
6	0,02	250	0,002	79	$7,18 \cdot 10^6$
7	0,02	250	0,004	124	$1,51 \cdot 10^7$
8	0,01	200	0,002	81	$9,69 \cdot 10^6$
9	0,03	200	0,002	58	$3,82 \cdot 10^6$
10	0,01	300	0,002	115	$1,51 \cdot 10^7$
11	0,03	300	0,002	80	$5,94 \cdot 10^6$
12	0,01	200	0,004	119	$1,92 \cdot 10^7$
13	0,03	200	0,004	91	$8,26 \cdot 10^6$
14	0,01	300	0,004	174	$2,99 \cdot 10^7$
15	0,03	300	0,004	130	$1,28 \cdot 10^7$

Функции отклика, связывающие выходные параметры (T, σ_y) с факторами (V, T_v, D), имеют следующий вид:

$$Y_T = 4,12 - 219 \cdot V + 0,0475 \cdot T_v + 3210 \cdot D + 4120 \cdot V^2 - 3,94 \cdot 10^{-5} \cdot T_v^2 - 4,09 \cdot 10^5 \cdot D^2 - 0,44 \cdot V \cdot T_v + 6,14 \cdot D \cdot T_v,$$

$$T = (Y_T \cdot 0,51 + 1)^{\frac{1}{0,51}} - 1,$$

$$Y_\sigma = 14,9 - 86,4 \cdot V + 9,87 \cdot 10^{-3} \cdot T_v + 621 \cdot D + 784 \cdot V^2 - 1,02 \cdot 10^{-5} \cdot T_v^2 - 4,49 \cdot 10^4 \cdot D^2 + 2250 \cdot V \cdot D,$$

$$\sigma_y = (Y_\sigma \cdot 0,005 + 1)^{\frac{1}{0,005}} - 1.$$

Для оценки полученных регрессионных уравнений были использованы следующие критерии:

– коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2},$$

– средняя квадратичная ошибка (англ. Root Mean Square error, $RMSE$)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2},$$

где d_i – значения, определенные методом конечных элементов, y_i – значения, определенные с использованием регрессионных моделей.

Коэффициенты детерминации для выходных параметров T и σ_y составляют 0,9998 и 0,9999 соответственно, а значения $RMSE$ для T и σ_y равны $0,3^\circ\text{C}$ и 49070 Па соответственно. Это свидетельствует о необходимом соответствии регрессионных моделей данным конечно-элементного анализа.

Представленные на рисунке 1.4 данные также подтверждают адекватность полученных регрессионных уравнений. На графике отображены нормализованные значения, полученные при конечно-элементном моделировании по оси абсцисс, и соответствующие нормализованные значения, полученные с помощью регрессионных уравнений по оси ординат. Точность регрессионной модели выше, когда точки находятся ближе к диагонали графика.

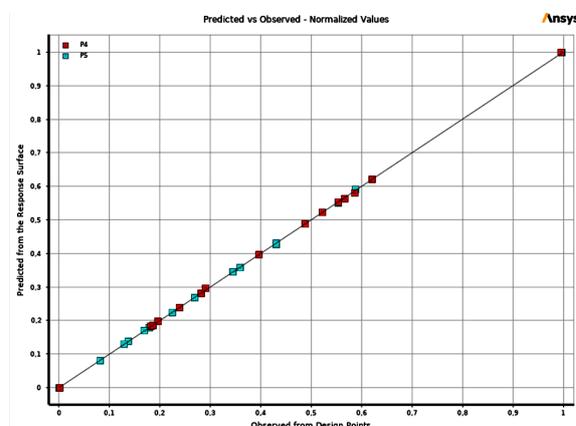


Рисунок 1.4 – Проверка адекватности регрессионных уравнений P4 – T , P5 – σ_y

Исследование воздействия входных параметров на выходные параметры показало, что диаметр сопла устройства подачи горячего воздуха является наиболее важным фактором, влияющим на максимальные температуры T в зоне обработки, а скорость обработки оказывает наибольшее воздействие на максимальные термоупругие напряжения σ_y (рисунок 1.5).

Диаграммы, показывающие зависимость максимальной температуры в зоне обработки T и максимальных напряжений растяжения σ_y в

зоне обработки от скорости обработки V , температуры горячего воздуха T_v в центре пятна на-

грева и диаметра сопла D устройства подачи горячего воздуха, представлены на рисунках 1.6, 1.7.

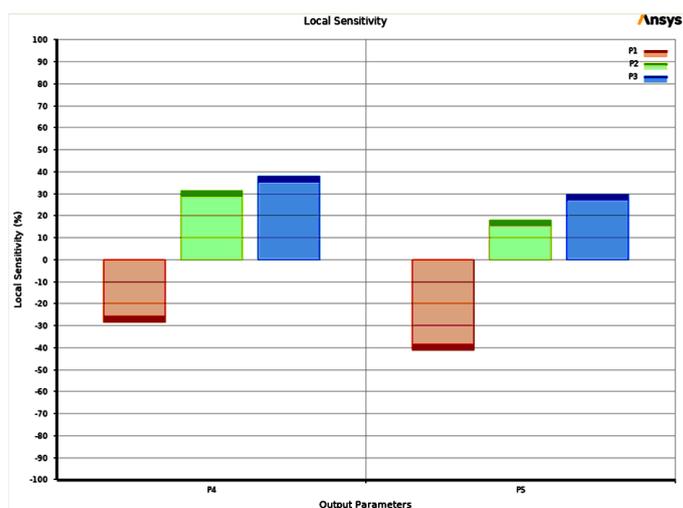


Рисунок 1.5 – Диаграмма чувствительности оптимизируемых параметров P1 – V , P2 – T_v , P3 – D , P4 – T , P5 – σ_y

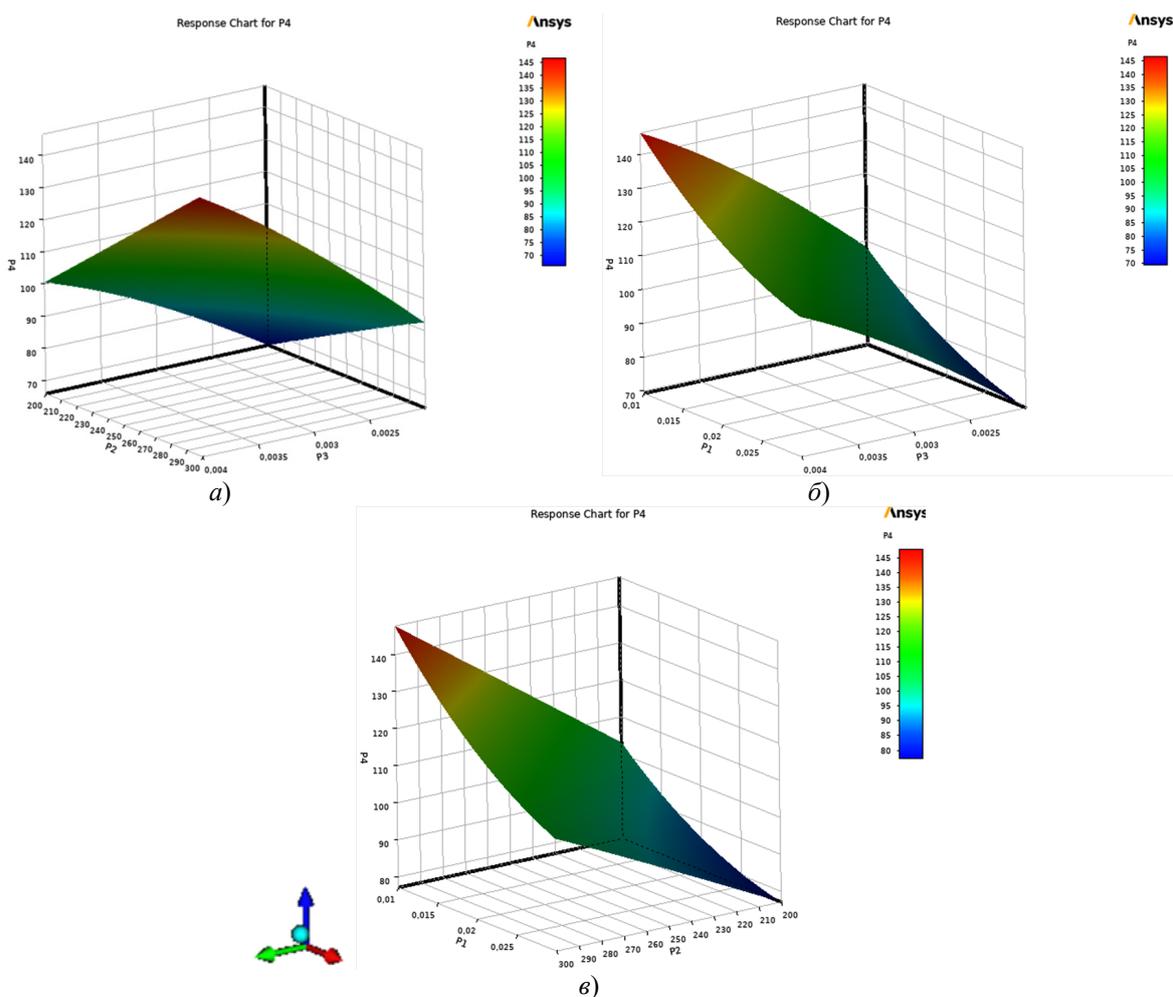


Рисунок 1.6 – Зависимость максимальной температуры T от параметров обработки а) V – const; б) T_v – const; в) D – const

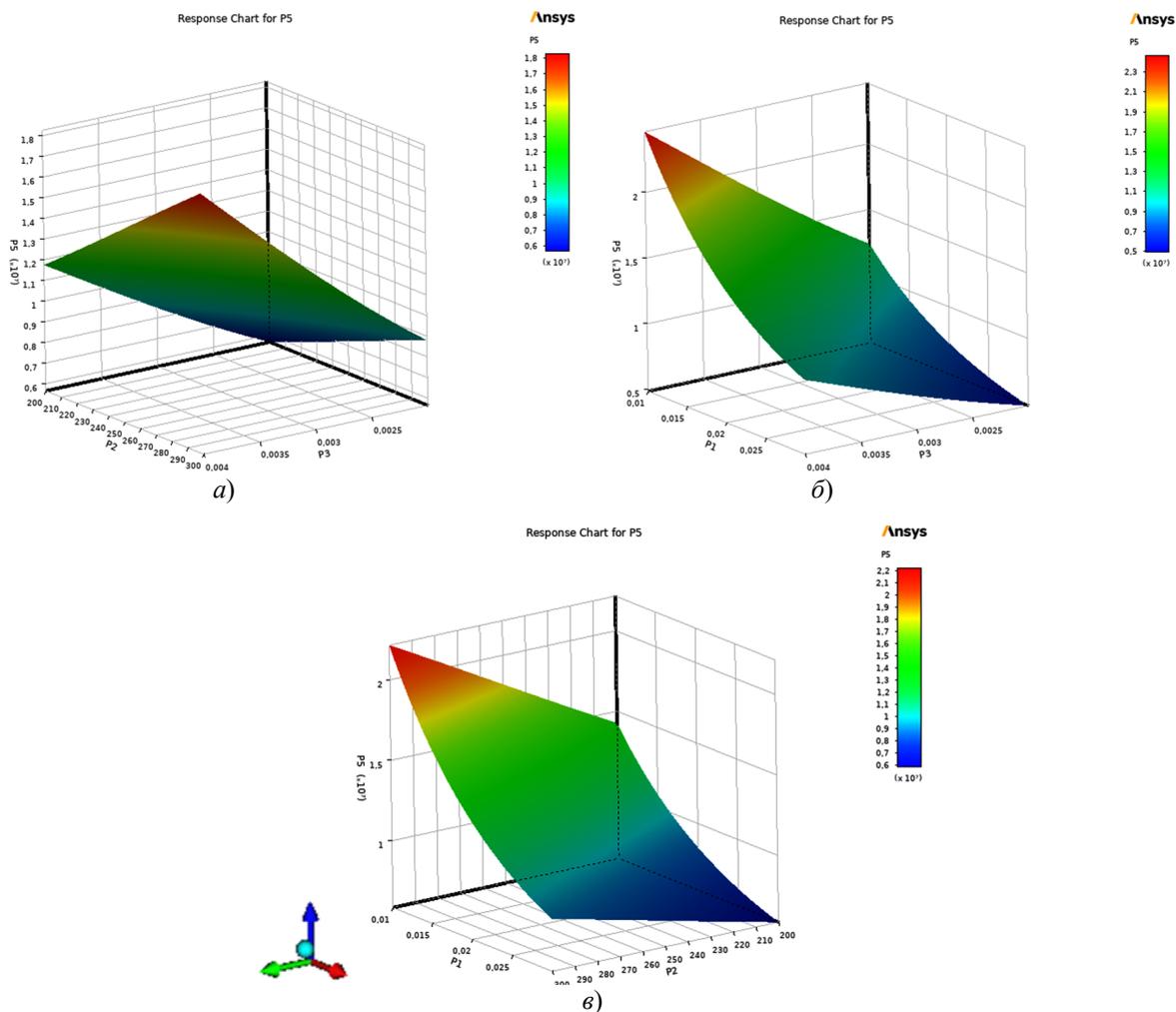


Рисунок 1.7 – Зависимость максимальных напряжений σ_y от параметров обработки
 а) $V = \text{const}$; б) $T_v = \text{const}$; в) $D = \text{const}$

2 Оптимизация процесса обработки силикатного стекла

С использованием многокритериального генетического алгоритма MOGA модуля DesignXplorer с начальной популяцией из 500 индивидуумов и числом индивидуумов за итерацию, также равным 500, была проведена оптимизация процесса обработки силикатного стекла при использовании потока горячего воздуха и хладагента. Оптимизация проводилась по критериям максимума термоупругих напряжений

$$\sigma_y \rightarrow \max$$

и максимума скорости обработки

$$V \rightarrow \max.$$

Результаты оптимизации приведены в таблице 2.1, где в скобках указаны значения параметров, полученные в результате конечно-элементного моделирования. При этом максимальная относительная погрешность результатов, полученных при использовании алгоритма MOGA, не превысила 1% при определении температур и термоупругих напряжений.

Таблица 2.1 – Результаты оптимизации

P1 $V, \text{ м/с}$	P2 $T_v, \text{ }^\circ\text{C}$	P3 $D, \text{ м}$	P4 $T, \text{ }^\circ\text{C}$	P5 $\sigma_y, \text{ Па}$
0,03	296	0,004	129 (128)	$1,26 \cdot 10^7$ $(1,27) \cdot 10^7$

Заключение

В данной работе была продемонстрирована возможность оптимизации параметров обработки силикатного стекла при помощи потока горячего воздуха и хладагента с использованием многокритериального генетического алгоритма MOGA модуля DesignXplorer. Для получения регрессионных моделей термораскалывания стекла был применен центральный композиционный план эксперимента. Также было установлено соответствие между регрессионной моделью и результатами конечно-элементного анализа. В результате численных экспериментов были определены оптимальные параметры термораскалывания силикатного стекла под воздействием потока горячего воздуха и хладагента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nisar, S. Laser glass cutting techniques – A review / S. Nisar // Journal of laser applications. – 2013. – Vol. 25, № 4. – P. 042010-1–11.
2. Laser cutting of ceramic materials with a metallized surface / S.V. Shalupaev, A.V. Maksimenko, V.N. Myshkovets, Y.V. Nikityuk // Journal of Optical Technology. – 2001. – Vol. 68, № 10. – P. 758–760. – DOI: 10.1364/JOT.68.000758.
3. Two-beam laser thermal cleavage of brittle nonmetallic materials / S.V. Shalupaev, E.B. Shershnev, Y.V. Nikityuk, A.A. Sereda // Journal of Optical Technology. – 2006. – Vol. 73, № 5. – P. 356–359. – DOI: 10.1364/JOT.73.000356.
4. Shalupaev, S.V. Laser thermal cleavage of brittle nonmetallic materials along closed curvilinear contours / S.V. Shalupaev, Y.V. Nikityuk, A.A. Sereda // Journal of Optical Technology. – 2008. – Vol. 75, № 2. – P. 75–78. – DOI: 10.1364/JOT.75.000075.
5. Serdyukov, A.N. Features of controlled laser thermal cleavage of crystalline silicon / A.N. Serdyukov, S.V. Shalupaev, Y.V. Nikityuk // Crystallography Reports. – 2010. – Vol. 55, № 6. – P. 933–937. – DOI: 10.1134/S1063774510060064.
6. The analysis of laser thermosplitting of fragile materials by using of special geometry beams / S.V. Shalupaev, Y.V. Nikitjuk, A.A. Sereda, M. Aleksiejuk // Archives of Metallurgy and Materials. – 2011. – Vol. 56, № 4. – P. 1149–1155. – DOI: 10.2478/v10172-011-0128-3.
7. Features of controlled laser thermal cleavage of crystal quartz / A.N. Serdyukov, E.B. Shershnev, Y.V. Nikityuk [et al.] // Crystallography Reports. – 2012. – Vol. 57, № 6. – P. 792–797. – DOI: 10.1134/S1063774512060120.
8. Modeling of mechanical influence of double-beam laser on single-crystalline silicon / S.V. Shalupaev, A.N. Serdyukov, Y.V. Nikitjuk [et al.] // Archives of Metallurgy and Materials. – 2013. – Vol. 58, № 4. – P. 1381–1385. – DOI: 10.2478/amm-2013-0179.
9. Nikitjuk, Y.V. Laser splitting of bilayer structures made of silicon wafers and glass substrates / Y.V. Nikitjuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Proceedings of Francisk Scorina Gomel State University. – 2021. – № 6 (129). – P. 178–183.
10. A study of thermal cutting of glass / S. Muralidhar [et al.] // Journal of American Ceramic Society. – 1999. – Vol. 82. – P. 2166–2176.
11. Shahani, A.R. Simulation of glass cutting with an impinging hot air jet / A.R. Shahani, M. Seyyedean // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 1313–1329.
12. Никитюк, Ю.В. Исследование процесса управляемого термораскалывания хрупких неметаллических материалов под действием потока горячего воздуха / Ю.В. Никитюк, В.Ф. Шолох // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 36–39.
13. Fonseca, C. Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation discussion and generalization / C. Fonseca, P. Flemingz // In Proceedings of The 5th International Conference on Genetic Algorithms. CA, USA. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc. – 1993. – P. 416–423.
14. Никитюк, Ю.В. Оптимизация параметров лазерного раскалывания кварцевого стекла / Ю.В. Никитюк, А.Н. Сердюков, И.Ю. Аушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 21–28. – DOI: 10.54341/20778708_2021_4_49_21.
15. Nikityuk, Y.V. Optimization of two-beam laser cleavage of silicate glass / Y.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of Optical Technology. – 2022. – Vol. 89, № 2. – P. 121–125. – DOI: 10.1364/JOT.89.000121.
16. Nikitjuk, Yu.V. Determination of the parameters of two-beam laser splitting of silicate glasses using regression and neural network models / Yu.V. Nikitjuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of the Belarusian State University. Physics. – 2022. – № 1. – P. 35–43. – DOI: 10.33581/2520-2243-2022-1-35-43.
17. Коваленко, Л.Д. Основы термоупругости / Л.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.
18. Официальный сайт компании ANSYS [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.ansys.com>. – Дата доступа: 03.03.2023.
19. Богуславский, И.А. Высокопрочные закаленные стекла / И.А. Богуславский. – Москва: Издательство литературы по строительству, 1969. – 208 с.
20. Планирование и анализ результатов эксперимента: учебное пособие / А.П. Моргунов, И.В. Ревина; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2014. – 343 с.

Поступила в редакцию 07.03.2023.

Информация об авторах

Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
 Иванов Алексей Федорович – к.пед.н., доцент
 Ситдикова Ирина Петровна – к.т.н., доцент
 Зарипова Зульфия Филаритовна – к.пед.н., доцент
 Горшкова Кристина Леонидовна – к.т.н., доцент
 Аушев Игорь Юрьевич – к.т.н., доцент

УДК 533.9-115+613.163+621.311.6

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_31

EDN: KBEWMH

ПРИМЕНЕНИЕ СИГНАЛОВ С ШИМ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ АТМОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ

А.Н. Осипов, Е.Н. Каленкович, В.А. Рокач, Т. Ма

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

APPLICATION OF PWM SIGNALS TO GENERATE LOW-TEMPERATURE ATMOSPHERIC PLASMA

A.N. Osipov, Y.N. Kalenkovich, V.A. Rokach, T. Ma

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Аннотация. Рассматривается применение сигналов с широтно-импульсной модуляцией для генерации низкотемпературной плазмы при атмосферном давлении в среде инертного газа. Представлены результаты исследований энергопотребления системы генерации низкотемпературной плазмы в зависимости от коэффициента заполнения, а также частоты следования импульсов. Установлены режимы функционирования системы, при которых достигается минимум потребления энергии, а также определены возможные способы управления генератором низкотемпературной плазмы.

Ключевые слова: *низкотемпературная плазма атмосферного давления, параметры управляющих сигналов для генерации плазмы, энергопотребление устройств формирования низкотемпературной плазмы атмосферного давления.*

Для цитирования: *Применение сигналов с ШИМ для генерации низкотемпературной атмосферной плазмы / А.Н. Осипов, Е.Н. Каленкович, В.А. Рокач, Т. Ма // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 31–38. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_31. – EDN: KBEWMH*

Abstract. The use of pulse-width modulated signals for generating low-temperature atmospheric plasma in an inert gas environment is studied. The results of studies of the energy consumption of a low-temperature plasma generation system depending on the fill factor, as well as the pulse repetition rate, are presented. The system operating modes are identified, in which the minimum energy consumption is achieved, and possible ways to control the low-temperature plasma generation system to obtain the necessary plasma properties are determined.

Keywords: *low-temperature atmospheric pressure plasma, parameters of control signals for plasma generation, energy consumption of devices for generating low-temperature atmospheric pressure plasma.*

For citation: *Application of PWM signals to generate low-temperature atmospheric plasma / A.N. Osipov, Y.N. Kalenkovich, V.A. Rokach, T. Ma // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 31–38. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_31 (in Russian). – EDN: KBEWMH*

Введение

Современный этап развития общества характеризуется быстрым внедрением новых перспективных технологий, которые позволяют решать широкий круг задач в различных областях науки и техники. Одной из таких технологий является технология, основанная на использовании низкотемпературной атмосферной плазмы [1]–[3]. Сфера применения данной технологии достаточно обширна, основными наиболее важными областями являются микроэлектроника (производство изделий), оптика (обработка и нанесение покрытий), химическая промышленность и получение новых материалов (изменение свойств поверхности различных материалов неразрушающим способом), охрана окружающей среды (технологии очистки воды, воздуха и др.), биология и здравоохранение (аппаратура и технологии стерилизации и терапии) и другие. Преимуществами обработки в низкотемпературной плазме при атмосферном давлении являются

отсутствие необходимости в громоздких системах создания и поддержания вакуума, возможность работы с различного рода материалами, в том числе низкотемпературными полимерами и биологическими объектами, низкая стоимость оборудования в сравнении с вакуумно-плазменным оборудованием, мобильность и универсальность применения.

Одним из направлений совершенствования генераторов низкотемпературной атмосферной плазмы является применение специальных конструктивно-технологических и схемотехнических решений, позволяющих уменьшить габаритные размеры, потребляемую мощность, обеспечить стабильность режимов работы генераторов и др. В выпускаемых в настоящее время устройствах для генерации плазмы на разрядную систему подается высоковольтное синусоидальное напряжение. Вопросы применения для этих целей сигналов другой формы являются малоизученными. В современной электронной

аппаратуре для управления мощностью, поступающей в нагрузку, находят широкое применение сигналы с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) [4]. В связи с этим в данной статье исследуются вопросы применения сигналов, формируемых на основе ШИМ для генерации низкотемпературной атмосферной плазмы.

1 Материалы и методика проведения исследования

Для проведения экспериментальных исследований использовался лабораторный макет, структурная схема которого показана на рисунке 1.1.

В состав макета входят следующие блоки: источник питания постоянного напряжения, высоковольтный преобразователь, генератор сигналов, разрядная система, регулятор расхода газа, баллон с инертным газом, регистратор параметров напряжения и тока с соответствующих измерителей для определения потребляемой мощности и осциллограф. Система формирования высоковольтного переменного напряжения (до 4 кВ) включает в себя источник питания постоянного тока с возможностью регулировки напряжения и тока соответственно в пределах от 0 до 30 В и от 0 до 10 А соответственно, высоковольтный преобразователь и генератор сигналов, способный

формировать сигнал с широтно-импульсной модуляцией с заданными параметрами.

Высоковольтный преобразователь построен на основе обратногоходового импульсного преобразователя [5] и состоит из высоковольтного импульсного трансформатора, транзисторного ключа, элементов защиты. Принципиальная схема преобразователя показана на рисунке 1.2.

Для контроля и регистрации режимов работы используются регистратор параметров тока и напряжения питания схемы, а также цифровой осциллограф. Так как один канал осциллографа подключается к высоковольтной части схемы, то для регистрации высоковольтного сигнала используется высоковольтный щуп-делитель напряжения 1 : 1000.

Непосредственное формирование плазмы осуществляется в разрядной системе коаксиального типа, через которую пропускается газ и на выходе формируется плазменный факел [6]. В качестве плазмообразующего газа используется аргон (^{18}Ar). Регулировка количества поступающего газа в разрядную систему осуществляется при помощи регулятора расхода газа. Для всех проводимых экспериментов выполнялось условие постоянства объема расхода инертного газа 25–26 л/ч.

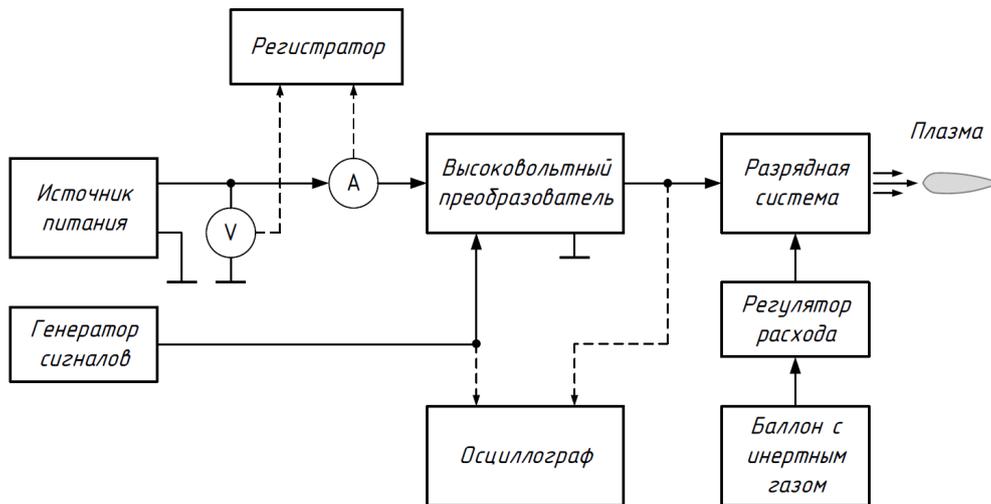


Рисунок 1.1 – Структурная схема лабораторного макета

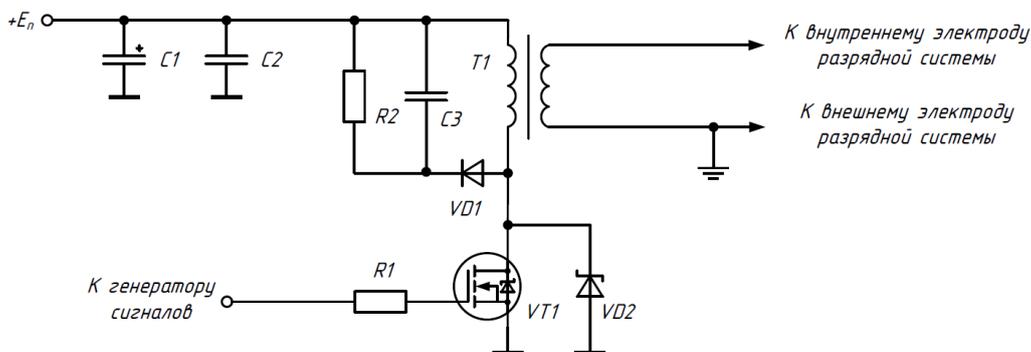


Рисунок 1.2 – Принципиальная схема высоковольтного преобразователя

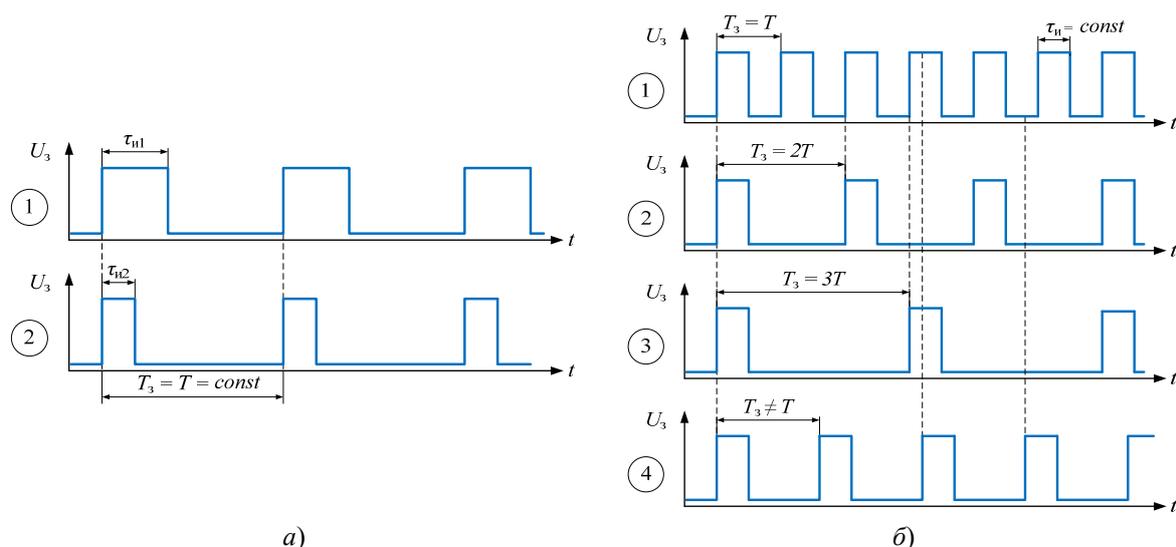
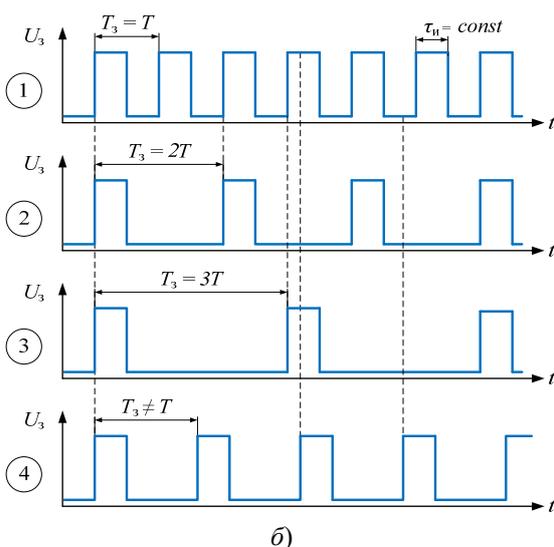


Рисунок 1.3 – Последовательность задающих импульсов, подаваемых на высоковольтный преобразователь

Известно [7], что повышающий трансформатор, электроды и другие элементы разрядной системы совместно с генерируемой плазмой образуют колебательный контур, который обладает резонансными свойствами. В связи с этим, в данной работе проведены исследования генерации плазмы в зависимости от частотно-временных параметров сигнала с ШИМ, подаваемого на разрядную систему. При этом эксперименты выполнялись в условиях обязательного горения плазмы без учёта её количественных и качественных характеристик и свойств (яркости свечения, габаритов и температуры факела и т. д.).

Так, на первом этапе экспериментов проводилось исследование влияния скважности задающих импульсов с ШИМ на энергопотребление устройства формирования плазмы на резонансной частоте $f_p = 1/T$. На высоковольтный преобразователь с генератора сигналов подавались задающие импульсы прямоугольной формы фиксированной амплитуды напряжения (рисунок 1.3, а). Коэффициент заполнения D сигнала с ШИМ (отношение длительности импульса к периоду следования импульсов, $D = (\tau_n / T_3) \cdot 100\%$) уменьшался от 50% (половина периода колебаний на частоте резонанса) до значения, при котором прекращалось видимое горение плазмы.

На втором этапе проводилось исследование работы устройства формирования плазмы, когда частота следования задающих импульсов не совпадала с частотой собственного резонанса образованного контура (рисунок 1.3, б). При этом длительность задающего импульса оставалась неизменной и равной $\tau_n = 1/(2f_p)$, т. е. половине периода колебаний на резонансной частоте. Частота следования задающих импульсов ШИМ сигнала изменялась от значения резонансной частоты ($\approx 48,8$ кГц) в сторону уменьшения.



При помощи регистратора фиксировались параметры напряжения и потребляемого тока, а также осуществлялось наблюдение формируемых сигналов на электродах разрядной системы при помощи цифрового осциллографа.

2 Исследование зависимости энергопотребления устройства формирования плазмы от коэффициента заполнения ШИМ сигнала на частоте резонанса

При подаче на затвор полевого транзистора VT1 задающих импульсов с генератора сигналов с коэффициентом заполнения 50% (меандра) на вторичной обмотке высоковольтного трансформатора (на электродах разрядной системы) будут наблюдаться незатухающие колебания синусоидальной формы (рисунок 2.1, а). Уменьшение коэффициента заполнения ШИМ сигнала приводит к уменьшению напряжения наблюдаемого сигнала U_c на электродах, как показано на рисунке 2.1, б. Для приведенных на рисунке осциллограмм при снижении коэффициента заполнения до 25% амплитуда сигнала уменьшилась на 40%.

На рисунке 2.2 показаны графики зависимости потребляемой генератором мощности от коэффициента заполнения задающего ШИМ сигнала на частоте резонанса при различных напряжениях питания.

Как видно из представленных графиков, уменьшение коэффициента заполнения приводит к уменьшению потребляемой мощности. При достижении определенного коэффициента заполнения ШИМ сигнала происходило погасание факела плазмы, и свечение разряда в разрядной системе не наблюдалось. Для напряжений питания 18, 15 и 12 В минимальный коэффициент заполнения, при котором ещё наблюдалось свечение плазмы, составил соответственно 7, 9 и 14%.

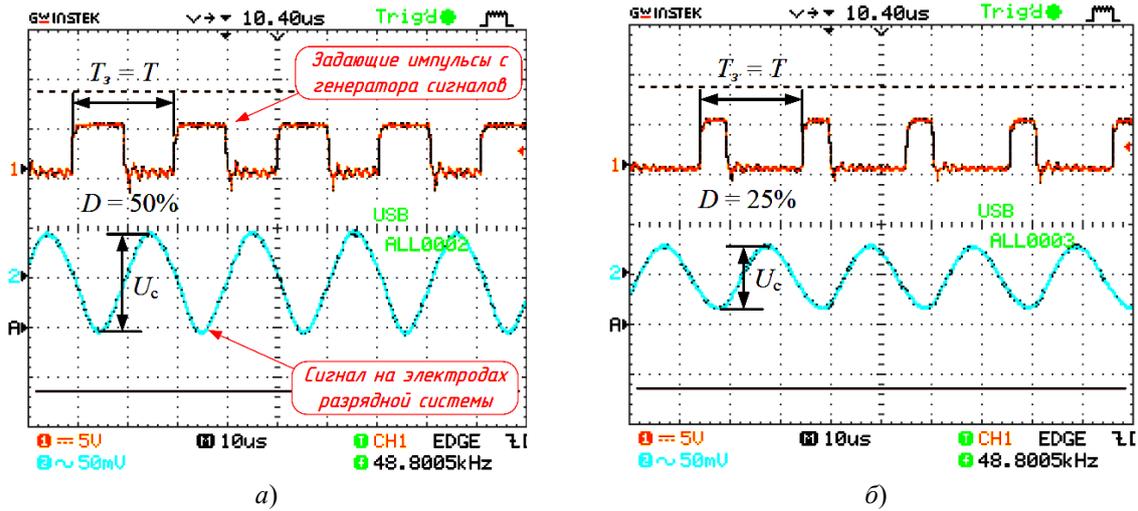


Рисунок 2.1 – Осциллограммы напряжений на выходе генератора сигналов и на электродах разрядной системы при различных значениях коэффициента заполнения задающего ШИМ сигнала

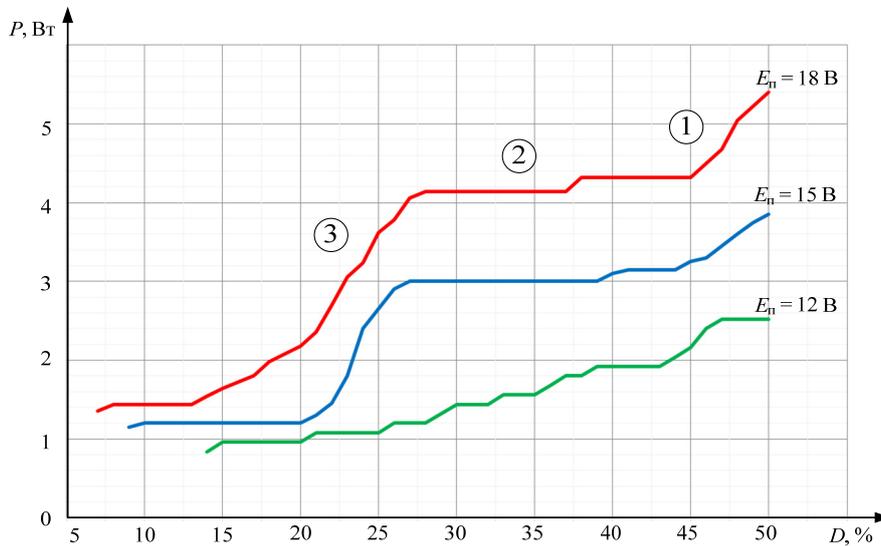


Рисунок 2.2 – Зависимость потребляемой мощности генератором от коэффициента заполнения задающего ШИМ сигнала

На графиках следует выделить три участка, характеризующих различные, с точки зрения энергопотребления, режимы работы устройства. На участке 1 мощность, потребляемая генератором, уменьшается с уменьшением коэффициента заполнения D . На втором участке мощность практически не изменяется. На третьем участке также происходит снижение потребляемой мощности при уменьшении коэффициента заполнения D .

Таким образом, изменение длительности импульса на резонансной частоте, подаваемого на высоковольтный преобразователь, позволяет обеспечить возможность работы генератора в различных режимах энергопотребления.

Длительность импульса ШИМ сигнала определяет энергию, передаваемую атомам инертного газа для перехода в ионизированное состояние,

и определяется параметрами выходного колебательного контура (коэффициента трансформации высоковольтного трансформатора, параметров магнитной проницаемости сердечника, добротности колебательного контура и др.).

3 Исследование периодически затухающих сигналов для генерации атмосферной холодной плазмы

Известно, что при подаче на вход колебательного контура одиночного прямоугольного импульса в резонансной системе возникают затухающие колебания с частотой, равной резонансной частоте f_p [8]. При подаче периодической последовательности задающих импульсов (рисунок 1.3, б) с коэффициентом заполнения меньше 50% на электродах разрядной системы возникают периодически затухающие колебания

(рисунок 3.1). Длительность периодически затухающего колебания зависит от добротности резонансной системы Q и может быть определена через логарифмический декремент затухания λ [8].

Для исследуемой системы измеренный логарифмический декремент затухания составил $\lambda \approx 0,65$.

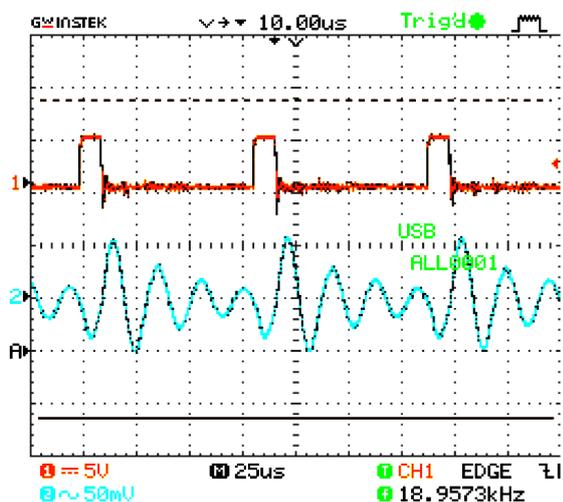


Рисунок 3.1 – Затухающие колебания на электродах разрядной системы

Соотношение длительности задающего импульса τ_n и его периода следования T_3 , определяющее момент поступления энергии импульса в контур при наличии свободно затухающих колебаний, в значительной степени влияет на эффективность использования сигналов с ШИМ для генерации плазмы. Так, на рисунке 3.2 представлены осциллограммы задающих импульсов с различными значениями периода следования и соответствующие им осциллограммы напряжений на электродах разрядной системы. Длительность задающего импульса оставалась постоянной и равной $\tau_n = 1/(2f_p) = const$. На рисунках 3.2, а, б и в периоды следования задающих импульсов соответственно равны $T_{31} = \frac{1}{f_p}$, $T_{32} = \frac{2}{f_p}$

и $T_{33} = \frac{4}{f_p}$. Количество периодов свободно затухающих колебаний для этих случаев равно 0, 1 и 3 соответственно. При этом амплитуда напряжения затухающего колебания в момент прихода нового импульса равна нулю. То есть, конечная фаза затухающих колебаний и начальная фаза задающих импульсов совпадает. Это обеспечивает максимальную начальную амплитуду напряжения возбужденных затухающих колебаний.

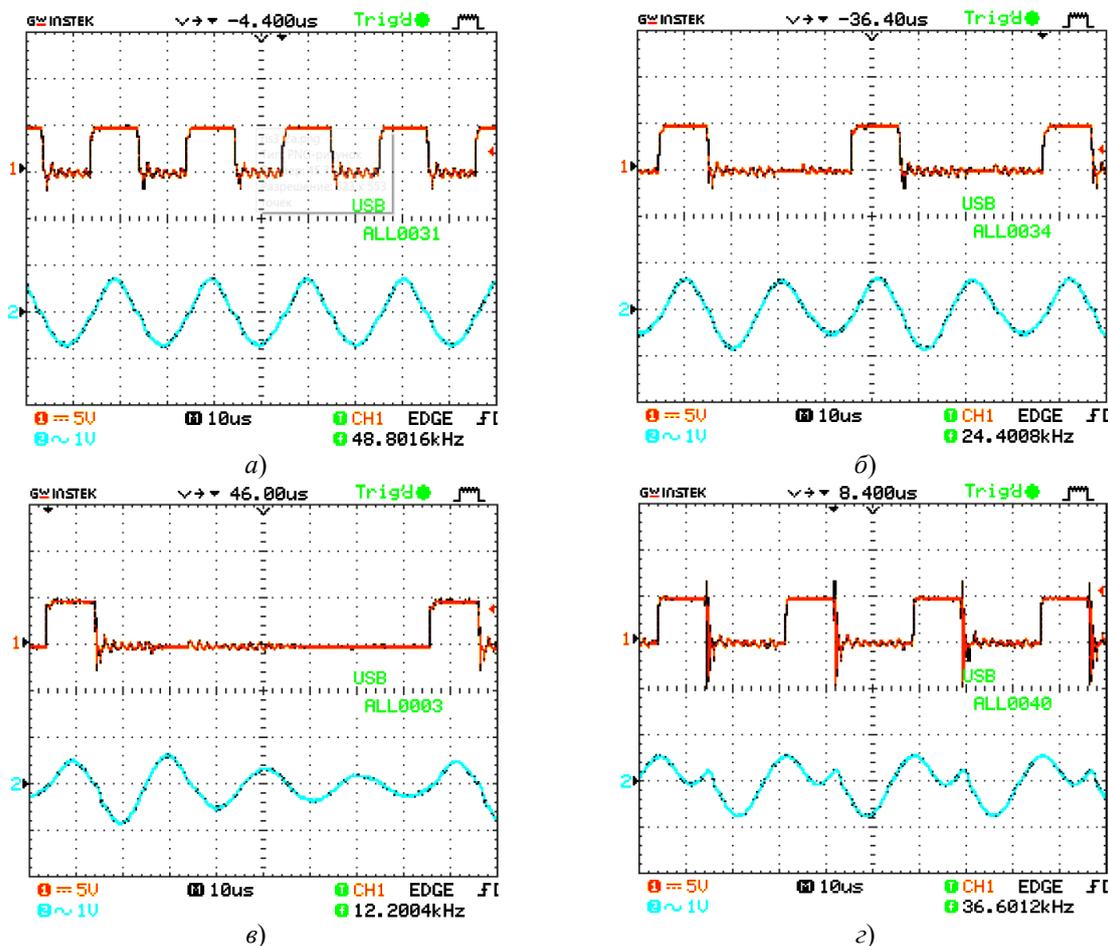


Рисунок 3.2 – Осциллограммы сигналов

Из приведенной на рисунке 3.2, z временной диаграммы следует, что в зависимости от частоты задающих импульсов начальная фаза нового колебания может не совпадать с конечной фазой свободно затухающего колебания. Это приводит к тому, что часть энергии поступающих импульсов тратится на перезаряд реактивных элементов выходного колебательного контура и ведет к дополнительным затратам энергии.

Следовательно, применение сигналов ШИМ с параметрами $\tau_n = 1/(2f_p)$ также может обеспечить уменьшение затрат энергии на генерацию плазмы при работе с периодом следования задающих импульсов большим, чем при работе на частоте резонанса выходного контура разрядной системы. Кроме того, следует отметить, что устойчивое горение плазмы обеспечивается при увеличении периода следования импульсов до некоторого значения $T_3 = T_{3max}$ (рисунок 3.3). Этот критический (максимальный) период задающих импульсов определяется максимальной амплитудой (уровнем) U_{cmin} последнего периода

затухающих колебаний, при котором энергии достаточно для возбуждения плазмы, и зависит от декремента затухания. Чем больше декремент затухания λ , тем быстрее расходуется энергия, запасенная в контуре и, следовательно, меньше T_{3max} .

На рисунке 3.4 представлена зависимость потребляемой мощности от частоты следования задающих импульсов ШИМ сигнала при $E_{II} = 18В$ и $\tau_n = 1/(2f_p) = const$. Частота сигнала с ШИМ изменялась от 1 (коэффициент заполнения равен 1,02%) до 60 кГц (коэффициент заполнения – 61,5%).

Как видно из графика, представленная зависимость имеет несколько локальных минимумов потребляемой мощности. Они наблюдаются на резонансной частоте $f_p = 48,8$ кГц и на частотах, равных $f_{1min} = f_p / 2 = 24,4$ кГц, $f_{2min} = f_p / 3 = 16,3$ кГц, $f_{3min} = f_p / 4 = 12,2$ кГц и $f_{4min} = f_p / 5 = 9,76$ кГц. На данных частотах локальных минимумов потребляемой мощности f_{imin} начальная фаза

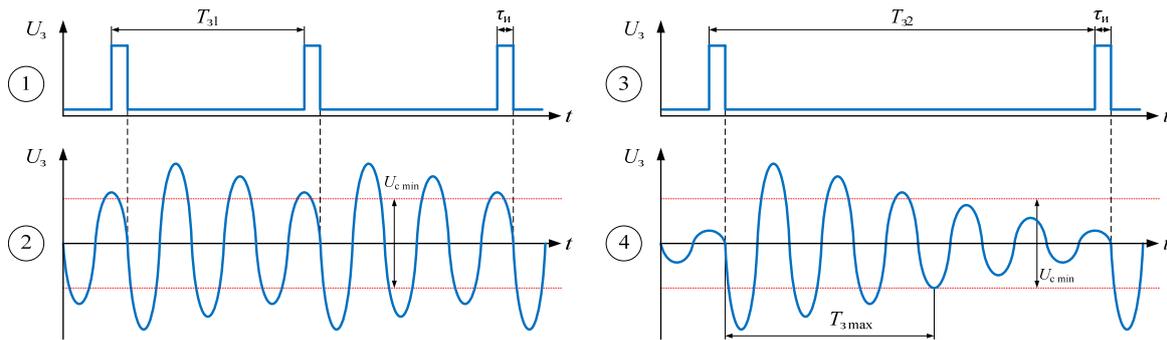


Рисунок 3.3 – Временные диаграммы для периодических затухающих сигналов

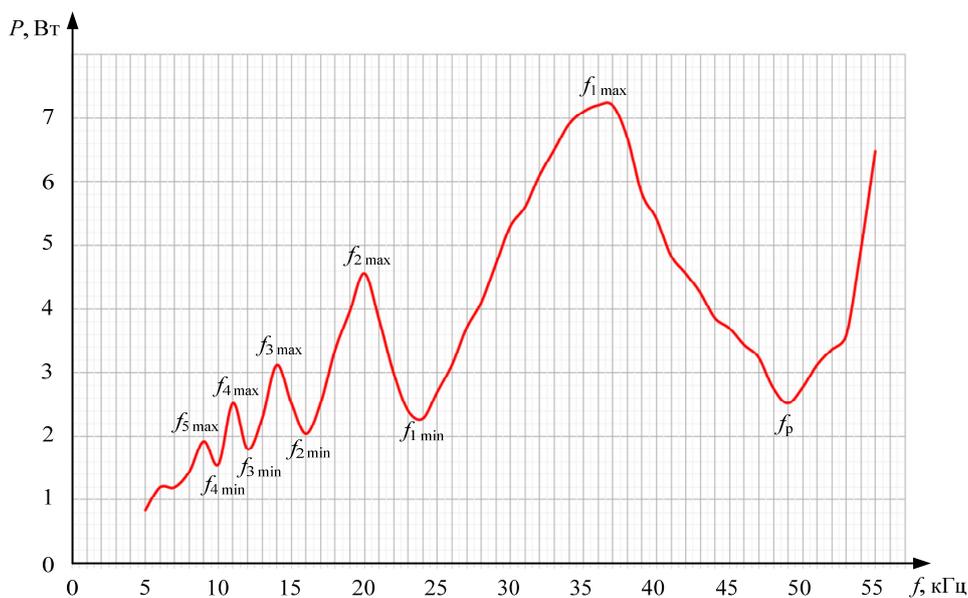


Рисунок 3.4 – Зависимость потребляемой мощности от частоты сигнала с ШИМ

задающих импульсов совпадает с конечной фазой периодически затухающих колебаний. Количество периодов свободно затухающих колебаний (без учёта первого периода вынужденного колебания) соответствует $f_p / f_i - 1 = n - 1$.

Частоты f_i могут использоваться в качестве рабочих частот генератора плазмы. Максимальное число n определяется из условия наличия горения плазмы. Как следует из графика, генерация плазмы на частотах f_i приводит к уменьшению потребляемой мощности, при этом с уменьшением значений частот f_i наблюдается уменьшение значений потребляемой мощности. Так, использование для генерации плазмы частоты $f_{3\min} = 12,2$ кГц вместо частоты резонанса $f_p = 48,8$ кГц привело к снижению потребляемой мощности на 29%.

Помимо локальных минимумов потребляемой мощности имеются и локальные максимумы потребляемой энергии на частотах $f_{1\max} = 36,6$ кГц, $f_{2\max} = 20,3$ кГц, $f_{3\max} = 14,2$ кГц, $f_{4\max} = 10,98$ кГц и $f_{5\max} = 9$ кГц. Это объясняется тем, что на данных частотах разность фаз между свободно затухающим колебанием и началом вынужденного составляет π . Несовпадение фаз колебаний приводит к дополнительным потерям в выходном контуре и возрастанию энергопотребления генератором. Генерация плазмы на частотах выше частоты резонанса f_p характеризуется увеличением коэффициента заполнения D более 50% и, соответственно, приводит к увеличению потребляемой мощности.

Для определения эффективной полосы частот следования задающих импульсов с ШИМ, обеспечивающих энергоэффективные режимы работы вблизи основной частоты резонанса f_p , и для частот локальных минимумов потребляемой мощности $f_{i\min}$ воспользуемся известным определением полосы пропускания колебательного контура [8] (3.1):

$$\Delta f_{i\min} = \frac{f_p \cdot \lambda}{2\pi n}. \quad (3.1)$$

Тогда условия выбора частоты сигнала с ШИМ определяются из (3.2):

$$f_i = \frac{f_p}{n}, n = 1, 2, \dots; \\ f_i - \frac{f_p \cdot \lambda}{4\pi n} \leq f \leq f_i + \frac{f_p \cdot \lambda}{4\pi n}. \quad (3.2)$$

При выборе частоты $f_{i\min}$ локального минимума потребляемой мощности с увеличением числа периодов свободно затухающих колебаний (с ростом n) наблюдается уменьшение соответствующей эффективной полосы частот.

Таким образом, применение затухающего напряжения на электродах разрядной системы, сформированных на основе сигналов с ШИМ, позволяет производить управление режимами работы генератора плазмы.

Заключение и выводы

Таким образом, в данной работе исследовано применение сигналов с ШИМ для возбуждения низкотемпературной атмосферной плазмы.

Потребляемая генератором плазмы мощность на резонансной частоте в значительной степени зависит от выбора значения коэффициента заполнения. Имеется диапазон значений коэффициента заполнения D , для которого характерно постоянство потребляемой мощности. Остальные диапазоны характеризуются уменьшением потребляемой мощности с уменьшением D .

При использовании сигналов с ШИМ при коэффициенте заполнения меньше 50% и частотой меньше резонансной на электродах разрядной системы возникают периодические затухающие колебания. Зависимость потребляемой мощности от частоты сигнала с ШИМ характеризуется наличием локальных минимумов и максимумов.

Предложены и обоснованы соотношения для выбора частоты следования сигналов с ШИМ, которые обеспечивают энергоэффективные режимы работы генератора плазмы.

Полученные результаты могут быть использованы для управления режимами работы генератора низкотемпературной атмосферной плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Review of the cold atmospheric plasma technology application in food, disinfection, and textiles: A way forward for achieving circular economy* / Reema, R.R. Khanikar, H.K. Bailung, K. Sankaranarayanan // *Front. Phys.* 10:942952. – 2022. – Vol. 10. – DOI: <https://doi.org/10.3389/fphy.2022.942952>.
2. *Th. Von Woedtke. Clinical plasma medicine: State and perspectives of in vivo application of cold atmospheric plasma* / H.-R. Metelmann // *Contrib. Plasma Phys.* / K.D. Weltmann. – UK: *British Medical Journal*, 2014. – P. 104–117.
3. *Cold atmospheric plasma technology for removal of organic micropollutants from wastewater – a review* / A. Kumar [et al.] // *The European Physical Journal. D.* – 2021. – Vol. 75. – Article number: 283. – DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/s10053-021-00283-5>.
4. *Иццоки, Я.С. Импульсные и цифровые устройства* / Я.С. Иццоки, Н.И. Овчиников. – Москва: «Советское радио», 1972. – 592 с.
5. *Мэк, Р. Импульсные источники питания. Теоретические основы проектирования и руководство по практическому применению* / Р. Мэк; пер. с англ. – Москва: Издательский дом «Додэка-XXI», 2008. – 272 с.

6. *Effects of Dielectric Tube Shape and Pin-Electrode Diameter on the Plasma Plume in Atmospheric Pressure Helium Plasma Jet* / H.R. Kang [et al.] // *IEEE Trans. Plasma Sci.* – 2017. – № 45. – P. 691–697.

7. *Development of a High-Power-Factor Power Supply for an Atmospheric-Pressure Plasma Jet* / C.-F. Su [et al.] // *Electronics.* – 2021. – № 10. – P. 2119. – DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics10172119>.

8. *Гоноровский, И.С. Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях* / И.С. Гоноровский. – Москва: Связьиздат, 1954. – 326 с.

Поступила в редакцию 03.05.2023.

Информация об авторах

Осипов Анатолий Николаевич – к.т.н, доцент
Каленкович Евгений Николаевич – ст. преподаватель
Рокач Валерий Александрович – магистрант
Ма Тяньбао – аспирант

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ПОТОКОВ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ В УЗЛАХ

Н.Н. Бородин¹, Ю.В. Малинковский²

¹Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EXPONENTIAL QUEUEING NETWORKS WITH COUNTABLE SET OF FLOWS OF NEGATIVE CUSTOMERS AND LIMITED SOJOURN TIME

N.N. Borodin¹, Yu.V. Malinkovsky²

¹Sukhoi State Technical University of Gomel

²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания с N однолинейными узлами. В сеть поступает пуассоновский поток запросов с параметром Λ и счетное число пуассоновских потоков отрицательных заявок с параметрами λ_l , $(l = \overline{1, \infty})$ соответственно. Входящий запрос с вероятностью p_i , а отрицательная заявка l -го потока с вероятностью q_{il} направляются в i -й узел $\left(\sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N q_{il} = 1, l = \overline{1, \infty}\right)$. Отрицательные заявки не обслуживаются. Заявка l -го потока при поступлении в i -й узел сразу удаляет ровно l запросов (при их наличии), и удаляет все запросы, если их число меньше l , $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$. Время пребывания запросов в узлах сети является случайной величиной, условное распределение которого при фиксированном числе запросов является показательным. Запросы, обслуженные в узлах, и запросы, покидающие узлы из-за завершения времени пребывания, могут оставаться запросами, становиться заявками l -го потока или покидать сеть.

Ключевые слова: сеть, отрицательная заявка, ограниченное время пребывания, стационарное распределение.

Для цитирования: Бородин, Н.Н. Экспоненциальные сети обслуживания со счетным числом потоков отрицательных заявок и ограничением на время пребывания в узлах / Н.Н. Бородин, Ю.В. Малинковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 39–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_39. – EDN: LHIIYJ

Abstract. An exponential queueing network with one-line nodes is considered. The network receives a Poisson flow of requests with a parameter Λ and a countable number of Poisson flows of negative customers with parameters λ_l , $(l = \overline{1, \infty})$, respectively. The incoming request with probability p_i and the negative customer of the l -th flow with probability q_{il} are sent to the i -th node $\left(\sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N q_{il} = 1, l = \overline{1, \infty}\right)$. Negative customers are not served. The customer of the l -th flow arriving at the i -th node, immediately deletes exactly l requests (if there are any), and deletes all the requests if their number is less than l , $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$. The sojourn time of requests in network nodes is a random variable with exponential conditional distribution for a fixed number of requests. The requests served at nodes and the requests leaving nodes for the sojourn time is over can remain requests, become customers of the i -th flow, or leave the network.

Keywords: network, negative customer, limited sojourn time, stationary distribution.

For citation: Borodin, N.N. Exponential queueing networks with countable set of flows of negative customers and limited sojourn time / N.N. Borodin, Yu.V. Malinkovskii // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 39–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_39 (in Russian). – EDN: LHIIYJ

1 Постановка задачи

Сеть массового обслуживания (СеМО) с конечным числом потоков отрицательных заявок исследована в статье [1]. В данной работе результаты [1] обобщаются на случай счетного числа потоков отрицательных заявок.

Исследуется СеМО, состоящая из N экспоненциальных узлов с единственным прибором обслуживания. Интенсивность обслуживания

прибором i -го узла равна μ_i , $i = \overline{1, N}$. В сеть извне поступают независимые пуассоновские потоки запросов и отрицательных заявок. При этом в i -й узел поступает поток запросов (запросы требуют обслуживания) с параметром Λp_i и счетное число потоков отрицательных заявок с параметрами $\lambda_l q_{il}$ соответственно

$$\sum_{k=1}^N p_k = \sum_{k=1}^N q_{kl} = 1, \quad l = \overline{1, \infty}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Заявки не требуют обслуживания. При поступлении заявки l -го потока в i -й узел она удаляет ровно l запросов (если таковые имеются) и удаляет все запросы, если их количество меньше l , $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$. После чего она исчезает не оказывая дальнейшего влияния. Время пребывания запроса в i -ом узле является случайной величиной. Условное распределение времени пребывания показательное с параметром $\frac{v_i}{n_i}$ (n_i – число запросов в узле). При поступлении в пустой узел запрос сразу начинает обслуживаться. Заметим, что с интенсивностью v_i покидает узел даже не закончив обслуживание. Число мест в очереди для запросов в узлах сети бесконечно. Предполагается, что запросы обслуживаются в узлах в порядке их поступления (FCFS). Запрос после обслуживания в i -ом узле попадает в j -й узел не меняя своего статуса запроса с вероятностью p_{ij}^+ , с вероятностью p_{ijl}^- становится заявкой l -го потока отрицательных заявок и с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($i, j = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$). Требуем выполнения условий:

$$\sum_{j=1}^N \left(p_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{\infty} p_{ijl}^- \right) + p_{i0} = 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Запрос не получивший обслуживание из за окончания времени пребывания в i -ом узле, направляется в j -й узел не меняя своего статуса запроса с вероятностью r_{ij}^+ , с вероятностью r_{ijl}^- становится заявкой l -го потока отрицательных заявок и с вероятностью r_{i0} покидает сеть ($i, j = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$). Требуем выполнения условий:

$$\sum_{j=1}^N \left(r_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{\infty} r_{ijl}^- \right) + r_{i0} = 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим случайный вектор

$$\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)),$$

где $n_i(t)$ – число запросов в i -ом узле в момент времени t . Исходя из всех предположений, $\vec{n}(t)$ – многомерная цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $X = Z_+^N$, где $Z_+ = \{0, 1, \dots\}$.

Цель данной работы – установить условия эргодичности процесса $\vec{n}(t)$ и определить его финальное распределение.

2 Основной результат

Рассмотрим i -ый узел сети. Поместим его в фиктивную среду с пуассоновскими входящими потоками запросов и отрицательных заявок и теми же интенсивностями, что и потоки сети,

входящие в i -ый узел. Пусть λ_i^+ – интенсивность потока запросов, λ_{il}^- – интенсивности потоков отрицательных заявок ($l = \overline{1, \infty}$), $\tilde{n}_i(t)$ – число запросов в системе в момент времени t . Процесс $\tilde{n}_i(t)$ является Марковским с пространством состояний Z_+ . Найдем стационарное распределение процесса $\tilde{n}_i(t)$. Составим систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \lambda_i^+ p_i(n_i) &= \\ &= (\mu_i + v_i) p_i(n_i + 1) + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- p_i(n_i + l) \right), \quad (2.1) \\ n_i &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Подставим $p_i(n_i) = z_i^{n_i}$ в (2.1). Получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} g(z_i) &= (\mu_i + v_i) z_i + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- z_i^l \right) - \lambda_i^+ = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^s \lambda_{is}^- z_i^l \right) + (\mu_i + v_i) z_i - \lambda_i^+ = 0. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Будем предполагать, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^- < \infty, \quad i = \overline{1, N}.$$

Докажем, что при выполнении условия

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + v_i + \sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^-} < 1, \quad (2.3)$$

процесс $\tilde{n}_i(t)$ будет эргодическим. Действительно, $g(0) = -\lambda_i^+ < 0$ и, в силу (2.3),

$$g(1) = \sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^- + (\mu_i + v_i) - \lambda_i^+ > 0.$$

Так как функция $g(z_i)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то для уравнения (2.2) существует корень $z_{i0} \in (0, 1)$. Следовательно, уравнение равновесия (2.1) имеет решение $p_i(n_i) = z_{i0}^{n_i}$. Учитывая нормировку $\sum_{n_i=0}^{\infty} p_i(n_i) = 1$, получаем:

$$p_i(n_i) = (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i}, \quad n_i = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

Далее воспользуемся эргодической теоремой Фостера [2]. При выполнении условия (2.3) уравнение (2.2) имеет корень $z_{i0} \in (0, 1)$, при этом (2.4) – частное решение системы уравнений равновесия (2.1). Сумма ряда равна единице:

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} |p_i(n_i)| = \sum_{n_i=0}^{\infty} (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = 1.$$

Значит, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Для эргодичности цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} s\lambda_{is}^-} < 1.$$

В этом случае стационарное распределение цепи имеет форму геометрического распределения $p_i(n_i) = (1 - z_{i0})z_{i0}^{n_i}$, $n_i = 0, 1, \dots$.

Всюду далее предполагается, что средняя интенсивность «вычеркивания» заявок во всех узлах конечна, т.е. выполняется условие

$$\sum_{s=1}^{\infty} s\lambda_{is}^- < \infty, \quad i = \overline{1, N}.$$

Уравнение (2.2) при $z = z_{i0}$ принимает форму тождества

$$(\mu_i + \nu_i)z_{i0} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{is}^- z_{i0}^l \right) - \lambda_i^+ = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5)$$

При выполнении условий эргодичности

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} s\lambda_{is}^-} < 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.6)$$

стационарное распределение изолированного узла имеет форму

$$p_i(n_i) = (1 - z_{i0})z_{i0}^{n_i}, \quad n_i = 0, 1, \dots, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.7)$$

Составим для сети систему уравнений трафика. Вероятность занятости прибора в i -м узле в стационарном режиме будет равна $1 - p_i(0) = z_{i0}$.

Поэтому:

$$\lambda_i^+ = \Lambda p_i + \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.8)$$

$$\lambda_{il}^- = \lambda_i q_{il} + \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jil}^- + \nu_j r_{jil}^-), \quad (2.9)$$

$$i = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, \infty},$$

Можно доказать, что система (2.8)–(2.9) имеет строго положительное решение.

Составим уравнения глобального равновесия для сети:

$$\begin{aligned} p(\bar{n}) \sum_{i=1}^N \left[\Lambda p_i + \left(\mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_i q_{il} \right) I_{\{n_i \neq 0\}} \right] &= \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ p(\bar{n} - \bar{e}_i) \Lambda p_i I_{\{n_i \neq 0\}} + \right. \quad (2.10) \\ &+ p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} + \lambda_{i1} + (\lambda_{i2} + \lambda_{i3} + \dots) I_{\{n_i=0\}}] + \\ &+ \sum_{l=2}^{\infty} p(\bar{n} + l\bar{e}_i) [\lambda_i q_{il} + (\lambda_i q_{il+1} + \lambda_i q_{il+2} + \dots) I_{\{n_i=0\}}] + \\ &+ \sum_{j=1}^N \left[p(\bar{n} + \bar{e}_j - \bar{e}_i) (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) I_{\{n_i \neq 0\}} + \right. \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i) \times \\ &\times \left(\mu_j (p_{jil}^- + (p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \dots) I_{\{n_i=0\}}) + \right. \\ &+ \nu_j (r_{jil}^- + (r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \dots) I_{\{n_i=0\}}) + \\ &+ \left. \left. p(\bar{n} + \bar{e}_j) (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots) \right) I_{\{n_i=0\}} \right], \quad \bar{n} \in Z_+^N.$$

Здесь $\bar{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где i -я компонента равна единице, I_A – индикатор события A :

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ произошло;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что вероятности, задаваемые формулой

$$p(\bar{n}) = \prod_{i=1}^N p_i(n_i), \quad \bar{n} \in Z_+^N, \quad (2.11)$$

где $p_i(n_i)$ определяются формулой (2.7) при выполнении (2.6) удовлетворяют уравнениям (2.10).

Разобьем (2.10) на уравнения локального равновесия. Учтывая, что $I_{\{n_i=0\}} = 1 - I_{\{n_i \neq 0\}}$, приравняем слагаемые, содержащие множитель $I_{\{n_i \neq 0\}}$. Получим первое уравнение. Приравнявая слагаемые не содержащие множитель $I_{\{n_i \neq 0\}}$, получим второе уравнение

$$\begin{aligned} p(\bar{n}) \sum_{i=1}^N \left[\mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_i q_{il} \right] &= \\ = \sum_{i=1}^N \left\{ p(\bar{n} - \bar{e}_i) \Lambda p_i - p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\lambda_i q_{i1} + \lambda_i q_{i2} + \dots] - \right. \\ &- \sum_{l=2}^{\infty} p(\bar{n} + l\bar{e}_i) [\lambda_i q_{il+1} + \lambda_i q_{il+2} + \dots] + \quad (2.12) \\ &+ \sum_{j=1}^N \left[p(\bar{n} + \bar{e}_j - \bar{e}_i) (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) - \right. \\ &- \sum_{l=1}^{\infty} p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i) (\mu_j (p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \dots) + \\ &+ \nu_j (r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \dots)) - \\ &- p(\bar{n} + \bar{e}_j) (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \\ &+ \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots))] \left. \right\}, \quad \bar{n} \in Z_+^N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\bar{n}) \sum_{i=1}^N \Lambda p_i &= \\ = \sum_{i=1}^N \left\{ p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} + \lambda_i q_{i1} + \lambda_i q_{i2} + \dots] + \right. \\ &+ \sum_{l=2}^{\infty} p(\bar{n} + l\bar{e}_i) [\lambda_i q_{il} + \lambda_i q_{il+1} + \dots] + \quad (2.13) \\ &+ \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^{\infty} p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i) (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \right. \\ &+ \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) + p(\bar{n} + \bar{e}_j) (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \\ &+ \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots))] \left. \right\}, \quad \bar{n} \in Z_+^N. \end{aligned}$$

В (2.12) приравняем соответствующие слагаемые в суммах слева и справа:

$$\begin{aligned} p(\bar{n}) \left(\mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_i q_{il} \right) &= \\ = p(\bar{n} - \bar{e}_i) \Lambda p_i - p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\lambda_i q_{i2} + \lambda_i q_{i3} + \dots] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{l=2}^{\infty} p(\bar{n} + l\bar{e}_i)[\lambda_i q_{il+1} + \lambda_i q_{il+2} + \dots] + \quad (2.14) \\
 & + \sum_{j=1}^N \left[p(\bar{n} + \bar{e}_j - \bar{e}_i)(\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) - \right. \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i)(\mu_j (p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \dots) + \\
 & + \nu_j (r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \dots)) - p(\bar{n} + \bar{e}_j)(\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \\
 & \left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) \right], \quad \bar{n} \in Z_+^N, \quad i = \overline{1, N}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что из (2.13), (2.14) следует (2.10).

Разделим (2.14) на $p(\bar{n})$. Подставим (2.11) и используя (2.5), (2.8)–(2.9), получим:

$$\begin{aligned}
 & \mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_i q_{il} = \\
 & = \frac{\Lambda p_i}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} + \frac{1}{z_{i0}} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) - \\
 & - \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^{\infty} z_{j0} z_{i0}^l (\mu_j (p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \dots) + \right. \\
 & \left. + \nu_j (r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \dots)) + z_{j0} (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \right. \\
 & \left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) \right] = \\
 & = \frac{\Lambda p_i}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} + \frac{\lambda_i^+ - \Lambda p_i}{z_{i0}} - \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{j=1}^N z_{j0} \left(\mu_j \sum_{s=l+1}^{\infty} p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=l+1}^{\infty} r_{jis}^- \right) - \\
 & - \sum_{j=1}^N z_{j0} \left(\mu_j \sum_{s=1}^{\infty} p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=1}^{\infty} r_{jis}^- \right) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} - \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) - \\
 & - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} - \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) - \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} - \\
 & - \frac{1}{z_{i0}} \sum_{l=2}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^{\infty} \lambda_i q_{is} - \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \frac{1}{z_{i0}} \left(\lambda_i^+ - (\mu_i + \nu_i) z_{i0} - z_{i0} \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{is}^- \right) - \\
 & - \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) = \mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_i q_{is},
 \end{aligned}$$

т. е. (2.14) выполняется.

Лемма 2.1. Для решений уравнений трафика (2.8)–(2.9) будет справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N z_{i0} (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left(\Lambda p_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_i q_{il} - \lambda_{il}^-) + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) \right). \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Действительно. Просуммируем (2.9) по $l = \overline{1, \infty}$, после чего полученное уравнение вместе с уравнением глобального равновесия (2.10) суммируем по $i = \overline{1, N}$. Учитываем, что

$$\begin{aligned}
 p_{i0} & = 1 - \sum_{j=1}^N \left(p_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{\infty} p_{ijl}^- \right), \\
 r_{i0} & = 1 - \sum_{j=1}^N \left(r_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{\infty} r_{ijl}^- \right), \quad i = \overline{1, N}.
 \end{aligned}$$

В итоге получаем (2.15).

Далее разделим (2.13) на $p(\bar{n})$. Подставим в полученное равенство (2.11) и используя (2.5), (2.8)–(2.9), а также (2.15) получим:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \Lambda p_i & = \sum_{i=1}^N \left\{ z_{i0} [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} + \lambda_i q_{i1} + \lambda_i q_{i2} + \dots] + \right. \\
 & + \sum_{l=2}^{\infty} z_{i0}^l [\lambda_i q_{il} + \lambda_i q_{il+1} + \dots] + \\
 & + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^{\infty} z_{j0} z_{i0}^l (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \right. \\
 & \left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) + \right. \\
 & \left. + z_{j0} (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) \right] \Big\} = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ z_{i0} [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}] + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_i q_{is} + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^{\infty} z_{j0} z_{i0}^l \left(\mu_j \sum_{s=l}^{\infty} p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=l}^{\infty} r_{jis}^- \right) + \right. \\
 & \left. + z_{j0} \left(\mu_j \sum_{s=1}^{\infty} p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=1}^{\infty} r_{jis}^- \right) \right] \Big\} = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda p_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_i q_{il} - \lambda_{il}^-) + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) + \right. \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_i q_{is} + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) + \\
 & \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) \right\} = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda p_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_i q_{il} - \lambda_{il}^-) + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) + \right. \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_i q_{is} + \\
 & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) + \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) \right\} =
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda p_i - \lambda_i^+ + z_{i0}(\mu_i + \nu_i) + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- \right\} = \begin{cases} \lambda_i^+ = \Lambda_i + \sum_{j=1}^N z_{j0}(\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+), & i = \overline{1, N}; \\ \lambda_{il}^- = \lambda_{il} + \sum_{j=1}^N z_{j0}(\mu_j p_{jil}^- + \nu_j r_{jil}^-), & i = \overline{1, N}, l = \overline{1, \infty}. \end{cases}$$

т.е. (2.13) также выполняется.

Очевидно, что многомерная цепь Маркова $\vec{n}(t)$ является неприводимой и консервативной. Так как интенсивности выхода из состояний ограничены сверху

$$q(\vec{n}) \leq \sum_{i=1}^N \left[\Lambda_i + \mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{il} \right],$$

то цепь регулярна. Доказано, что (2.11) является решением (2.10). При выполнении условий эргодичности (2.6) ряд

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{n} \in X} p(\vec{n}) &= \sum_{\vec{n} \in X} \prod_{i=1}^N p_i(n_i) = \\ &= \sum_{\vec{n} \in X} \prod_{i=1}^N (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_N=1}^{\infty} \prod_{i=1}^N (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = \\ &= \prod_{i=1}^N \sum_{n_i=0}^{\infty} (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = 1. \end{aligned}$$

Значит, вероятности, задаваемые формулой (2.11) будут эргодическим распределением многомерного процесса $\vec{n}(t)$. Тем самым имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. При выполнении условий

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^-} < 1, \quad i = \overline{1, N}$$

цепь Маркова $\vec{n}(t)$ эргодическая, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения $p(\vec{n}) = \prod_{i=1}^N p_i(n_i)$, $\vec{n} \in Z_+^N$ с множителями $p_i(n_i) = (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i}$, $n_i = 0, 1, \dots$, $i = \overline{1, N}$, где $z_{i0} \in (0, 1)$, $i = \overline{1, N}$ – корни уравнений

$$(\mu_i + \nu_i) z_{i0} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- z_{i0}^s \right) - \lambda_i^+ = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

а $\{ \lambda_i^+, \lambda_{il}^-, i = \overline{1, N}, l = \overline{1, \infty} \}$ – решение системы уравнений трафика

Заключение

В работе исследована открытая сеть массового обслуживания со счетным числом экспоненциальных потоков отрицательных заявок, поступающих в узлы сети. Матрицы маршрутизации обслуженных запросов и запросов, не дожидавшихся обработки, различны. Предполагается, что средняя интенсивность потоков отрицательных заявок поступающих в узлы конечна. Найдены условия эргодичности случайного Марковского процесса, описывающего функционирование сети. Получено стационарное распределение этого процесса, имеющее форму произведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский, Ю.В.* Сети массового обслуживания с конечным числом потоков отрицательных заявок и с ограниченным временем пребывания / Ю.В. Малинковский, Н.Н. Бородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 64–68.
2. *Бочаров, П.П.* Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – Москва: РУДН, 1995. – 529 с.
3. *Гихман, И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Москва: Наука, 1977. – 568 с.
4. *Gelenbe, E.* Product-form Queueing Networks with Negative and Positive Customers. / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol .28. – P. 656–663.

Поступила в редакцию 11.05.2023.

Информация об авторах

Бородин Николай Николаевич – старший преподаватель
Малинковский Юрий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор

СИММЕТРИЧНАЯ МАРКЕРНАЯ КОЛЬЦЕВАЯ ЛОКАЛЬНАЯ СЕТЬ С РАЗНОТИПНЫМИ СООБЩЕНИЯМИ И ВЕНТИЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

В.В. Бураковский

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

SYMMETRICAL TOKEN RING LAN WITH MESSAGES OF DIFFERENT TYPES AND GATED SERVICE

V.V. Burakovski

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Исследуется локальная сеть с симметричной кольцевой топологией с маркерным протоколом доступа, с конечным числом N станций, каждая из которых имеет n буферов емкостью 1 для каждого типа входящих сообщений. После прибытия маркера на любую станцию все сообщения в буферах обслуживаются в соответствии с дисциплиной обслуживания вентильной. Входящие сообщения n типов являются простейшими, независимыми по интенсивности $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$, потоками для произвольной станции. Представлена система векторно-матричных уравнений, позволяющая рассчитать вероятности стационарных состояний, а также основные характеристики исследуемой кольцевой сети.

Ключевые слова: маркер, локальная сеть, станция, сообщения n типов, одиночный буфер, вентильная дисциплина, вероятности состояний.

Для цитирования: Бураковский, В.В. Симметричная маркерная кольцевая локальная сеть с разнотипными сообщениями и вентильным обслуживанием / В.В. Бураковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 44–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_44. – EDN: OBVDGQ

Abstract. We study a symmetrical ring topology local network with a token access protocol with number N of stations, each of them has n buffers of capacity 1 for each type of incoming messages. After the token arrives at any station, all the messages in the buffers are serviced in accordance with the gated service discipline. Incoming messages of n types are Poisson, independent intensity flows $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$, for an arbitrary station. A system of vector-matrix equations is presented, which makes it possible to calculate the probabilities of stationary states, as well as the main characteristics of the studied ring network.

Keywords: token, local network (LAN), station, messages of n types, single buffer, gated discipline, state probabilities.

For citation: Burakovski, V.V. Symmetrical token ring lan with different types messages and gated service / V.V. Burakovski // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 44–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_44 (in Russian). – EDN: OBVDGQ

Введение

Проектирование и разработка компьютерных систем и сетей, в том числе промышленных, инженерных, аэрокосмических и технологических, а также использование протоколов доступа к среде передачи предполагают построение математических моделей, описывающих средства передачи и обработки данных. Локальные сети с кольцевой топологией (КЛВС) в настоящее время используются очень широко, так как являются дешевым, несложным и стабильным средством передачи данных.

Все КЛВС по своей технической структуре могут быть представлены в виде конечного числа информационных ресурсов – абонентских станций (АС), связанных передающим каналом или моноканалом. В сетях передачи маркера небольшой служебный кадр (token) передается в заданном порядке между АС. Передача токена

предоставляет доступ к станциям в сети. Было разработано множество протоколов для этой передачи. В КЛВС «маркерное кольцо» [1, с.123], используется кольцевая топология перехода с использованием токена (маркера).

Схемы токенов широко используются в коммуникациях с множественным доступом. Кольцо маркерное [2, с. 131] служит иллюстрацией практического применения таких схем там, где есть критичные приложения (необходима защита информации) при высоких уровнях трафика. Поэтому стоит задача повысить эффективность этой технологии в практическом применении.

Сеть работает по стандарту «token ring» [3, с. 32]. В момент прибытия токена на станцию активируется дисциплина обслуживания gated [4, с. 12] стоящих там сообщений. Моделями «маркерного кольца» являются циклические системы обслуживания с очередями [5, с. 63].

Математические модели, описывающие сеть «маркерное кольцо» с gated сервисом, показали свою адекватность [6, с. 22]. Базовые характеристики КЛВС и вероятности состояний сети важны для оптимизации ее работы [7, с. 10].

1 Математическая модель сети

Изучается симметричная КЛВС с маркерным протоколом доступа (IEEE 802.5), состоящая из N АС и канала связи. Каждая из них имеет n одиночных буферов для приема по одной заявке каждого типа. АС пронумерованы по направлению движения токена по сети. Токен, поступающий в АС, немедленно активизирует вентиляционную (gated) для сообщений в буферах станции дисциплину. Она включает обработку всех находящихся в n буферах заявок на момент поступления токена.

Сообщения всех типов, поступающие на любую АС, независимо от ее номера, соответственно формируют интенсивности $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$, простейшие потоки. Мы будем изучать процесс передачи заявок для произвольной АС, так как существует симметрия таких процессов во всех АС кольца. Назовем буфер для заявок j -го типа свободным, если сообщений соответствующего типа на АС нет, и занятым в противном случае. Когда приходит свободный токен, станция может находиться в любом из 2^n состояний. Состояния помечены таким образом, что 1 или 0 на k -м месте означают, что АС имеет или не имеет сообщения k -го типа, $1 \leq k \leq n$. После поступления токена на станцию идет обслуживание всех сообщений, имеющихся в данный момент в буферах. После поступления токена буферы АС блокируются и новые заявки теряются.

Будем обозначать δ длительность временного интервала передачи заявки или токена между соседними станциями. Заявки любого типа принимаются в адресате на время a . Длина временного интервала обслуживания заявок для произвольной станции $\Delta = a + N\delta$.

Рассмотрим состояния сети в моменты прибытия токена на АС. Состоянием станции является вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\beta_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, где β_i – количество заявок i -го типа в буфере станции. Пронумеруем состояния АС через j , $j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. Пусть π_j – вероятность нахождения АС в состоянии j , вектор

$$\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{2^n - 1}).$$

Процессы передачи заявок в КЛВС симметричны, поэтому можно использовать способ декомпозиции, предполагая, что исследуется одна станция кольца. Если анализировать сеть в моменты получения токена, тогда поведение сети можно описать с помощью цепи Маркова. Она неприводима и не периодична.

2 Характеристики кольцевой сети

В стационарном режиме [8, с. 39] и [11, с. 133] составлена система уравнений, для вероятностей состояний:

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\Theta, \vec{\pi}E = 1,$$

где E – столбец из единиц, Θ – матрица, составленная из транзитных вероятностей, с дисциплиной gated, $\Theta = \{q_{ij}, 0 \leq i, j \leq 2^n - 1\}$, элементы которой могут быть рассчитаны по формулам:

$$q_{ij} = \sum_{k=0}^{(N-1)n} \prod_{l=1}^n [\pi_{ol}(t_{il})I_{jlo} + \pi_{li}(t_{il})I_{jli}] P\{T = N\delta + m\Delta\},$$

где $\pi_{ol}(t) = e^{-\lambda_l t}$, $\pi_{li}(t) = 1 - \pi_{ol}(t)$, I_{jlk} – индикатор события $\{$ в j -м состоянии на l -м месте $k\}$, $k \in \{0, 1\}$; $P\{T = N\delta + m\Delta\}$ – вероятность того, что интервал между моментами выхода токена с рассматриваемой станции и прибытия на эту же станцию равен $N\delta + m\Delta$, где $0 \leq m \leq n(N-1)$, $t_{il} = \{N\delta + m\Delta$, если $i = 0, i = 2^n - 1, 1 \leq l \leq n$, либо $i \neq 0, i \neq 2^n - 1$, в состоянии i на l -ом месте 1; $N\delta + (m+1)\Delta$, если $i \neq 0, i \neq 2^n - 1$, в состоянии i на l -ом месте 0}.

Ключевыми характеристиками работы сети [10, с. 83], определяющими ее эффективность, являются:

1. Показатель производительности для заявки i -го типа для произвольной АС

$$KZ_i = \sum_{k=1}^{2^n - 1} \pi_k I_{ik},$$

где $1 \leq i \leq n$, I_{ik} – индикатор события $\{$ на i -м месте в k -м состоянии единица}.

2. Вероятность того, что сообщений в сети нет

$$P_0 = \pi_0^N.$$

3. Вероятность того, что все станции заняты

$$PZ = (1 - \pi_0)^N.$$

4. Вероятность того, что все АС полностью заполнены

$$PBZ = \pi_{2^n - 1}^N.$$

5. Вероятность передачи k сообщений за цикл обращения токена

$$g_k = \frac{k!}{r_0! r_1! \dots r_n!} P_0^{r_0} P_1^{r_1} \dots P_n^{r_n},$$

где

$$P_i = \sum_{m=0}^{2^n - 1} \pi_m I_{\left\{ \sum_{j=1}^n I_{mj1} = i \right\}}, \sum_{i=0}^n P_i = 1, 0 \leq k \leq nN,$$

$$\sum_{i=0}^n r_i = k;$$

I_{mj1} – индикатор того, что в состоянии m j -й буфер занят.

6. Математическое ожидание цикла обращения токена по кольцу

$$ETC = N\delta + \Delta \times \sum_{k=1}^{nN} kg_k.$$

7. Среднее количество сообщений произвольного i -го типа в КЛВС

$$MN_i = N \times KZ_i.$$

8. Математическое ожидание времени передачи сообщений на АС

$$EST = \Delta \sum_{i=1}^n iP_i.$$

9. Пропускная способность всей сети

$$PRS = N \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

10. Математическое ожидание количества заявок в буферах АС

$$LL = \sum_{k=1}^{2^n-1} \left[\pi_k \sum_{j=1}^n I_{jk} \right].$$

11. Математическое ожидание количества заявок, переданных за цикл

$$EMC = \sum_{k=0}^{nN} g_k k.$$

12. Среднее число заявок, полученных в течение цикла

$$EMA = \lambda \cdot ETC.$$

Заключение

В статье описана модель сети кольцевой топологии, на каждой из станций есть несколько буферов емкостью один. Входящие сообщения различных типов могут быть загружены в буферы соответствующих классов. Сообщения обслуживаются в соответствии с дисциплиной gated на каждой станции. Математическая модель предполагает, что процессы передачи заявок на станциях независимы друг от друга [9, с. 110]. Расчет ключевых характеристик работы сети можно осуществить с помощью компьютерных программ. Актуальны задачи оптимизации используемых и разрабатываемых КЛВС. Разработаны математические процедуры, позволяющие рассчитать характеристики работы исследуемой сети, построить графики их зависимости от технических параметров для КЛВС с определенным протоколом доступа. Приведенные формулы позволяют анализировать корреляцию всех свойств сети и ее нагрузки, а также свойств передающей среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Takagi, H. Analysis of polling systems / H. Takagi. – Cambridge, M.A.: MIT Press, 1986. – 198 p.
2. Бакс, В. Кольцевые локальные сети с маркерным доступом и их производительность / В. Бакс // ТИИЭР. – 1989. – № 2. – С. 121–142.

3. ANSI / IEEE 802.5 Standard-1985. Token-passing ring access method and physical layer specification // IEEE Press. – 1985. – 89 p.

4. Бураковский, В.В. Локальные вычислительные сети: курс лекций / В.В. Бураковский, В.О. Родченко. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2008. – 78 с.

5. Бураковский, В.В. Маркерная кольцевая локальная сеть с конечными буферами и ординарным обслуживанием сообщений / В.В. Бураковский // Сборник научных трудов. – 1998. – Вып. 1: Аэрокосмическое приборостроение России. Сер. 2. Авионика. – С. 63–67.

6. Бураковский, В.В. Имитационная модель КЛВС с бесконечными буферами и вентиляльным обслуживанием / В.В. Бураковский // Efektivní nástroje moderních věd – 2013: materiály IX mezinárodní vědecko-praktická conference, Praha, 27 dubna – 05 květn 2013 roku. – Díl 40: Matematika. – Praha : Publishing House «Education and Science» s.r.o., 2013. – P. 19–22.

7. Бураковский, В.В. Кольцевая локальная сеть с протоколом маркерного доступа / В.В. Бураковский, Г.А. Медведев // Техника средств связи. Сер. Системы связи. – 1990. – Вып. 7. – С. 9–16.

8. Бураковский, В.В. Симметричная маркерная кольцевая локальная сеть со случайным выбором дисциплины обслуживания / В.В. Бураковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 39–41.

9. Бураковский, В.В. Маркерная кольцевая локальная сеть со случайным выбором дисциплины обслуживания с сокращением / В.В. Бураковский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2017. – № 3 (102). – С. 109–113.

10. Бураковский, В.В. Симметричная маркерная локальная сеть с разнотипными сообщениями и вентиляльным обслуживанием / В.В. Бураковский // Массовое обслуживание. Поток, системы, сети: Материалы международной конференции «Современные математические методы исследования телекоммуникационных сетей» 22-24 июня 1999 г., Минск. Вып. 15 – Минск: БГУ, 1999. – С. 81–84.

11. Бураковский, В.В. Симметричная маркерная кольцевая локальная сеть с конечными буферами и дисциплиной Бернулли обслуживания сообщений / В.В. Бураковский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2020. – № 3 (120). – С. 131–134.

Поступила в редакцию 18.01.2023.

Информация об авторах

Бураковский Владимир Викторович – к.ф.-м.н., доцент

СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В l -АРНЫХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

А.М. Гальмак

*Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв*POWERS IN l -ARY GROUPS OF A SPECIAL FORM. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. Изучаются степени элементов в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арная группа, степень элемента.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Степени элементов в l -арных группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 47–51. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_47. – EDN: OEPOEU

Abstract. The article deals with powers in polyadic groups of a special form, that is in polyadic groups with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is called polyadic operation of a special form and is defined on Cartesian power of A^k n -ary group $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, n -ary group, power.

For citation: Gal'mak, A.M. Powers in l -ary groups of a special form. I / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 47–51. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_47 (in Russian). – EDN: OEPOEU

Введение

Полиадическим группоидом специального вида называют [1] универсальную алгебру $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с одной l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s(n-1) + 1$, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $k \geq 2$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$.

Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l,$$

то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ может быть определена следующим образом:

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

где для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{(n-1)}(j)}) = \\ = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Частными случаями ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ являются l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -ой декартовой степени A^k полу-группы A , а также две полиадические операции Э. Поста [3], которые являются частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$.

В [4] было доказано, что если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является l -арной группой.

В данной статье доказываются результаты, позволяющие для каждого элемента \mathbf{a} l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ специального вида находить его степени $\mathbf{a}^{[l]}$, компоненты которых выражаются через компоненты элемента \mathbf{a} с помощью n -арной операции η n -арной группы, на декартовой степени которой построена указанная l -арная группа.

1 Предварительные сведения

Информацию, приведённую в этом разделе, можно найти в книгах [5]–[8].

Согласно Э. Посту [3], последовательность $e_1 \dots e_{s(n-1)}$, где $s \geq 1$, элементов n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется *нейтральной*, если

$$\eta(e_1 \dots e_{s(n-1)} x) = \eta(x e_1 \dots e_{s(n-1)}) = x$$

для любого $x \in A$.

Это определение обобщает на n -арный случай определение единицы группы A как элемента $e \in A$ такого, что

$$ex = xe = x$$

для любого $x \in A$. Существуют и другие обобщения единицы группы (см., например, [7]).

Согласно Э. Посту [3], последовательность β элементов n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется *обратной* к последовательности α элементов этой же n -арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Одноэлементную обратную последовательность $b \in A$ для последовательности α естественно называть обратным элементом для этой последовательности.

Согласно В. Дёрнте [9], элемент b n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если для любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{i-1} \underbrace{b a \dots a}_{n-i}) = a.$$

Если b косой элемент для элемента a , то употребляют обозначение $b = \bar{a}$. Таким образом, по определению

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{i-1} \underbrace{\bar{a} a \dots a}_{n-i}) = a, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Замечание 1.1. Можно показать (см., например, [6]), что:

1) для того, чтобы последовательность $e_1 \dots e_{s(n-1)}$ являлась нейтральной в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$, достаточно выполнения для некоторого $a \in A$ одного из следующих равенств

$$\eta(e_1 \dots e_{s(n-1)} a) = a, \quad \eta(a e_1 \dots e_{s(n-1)}) = a;$$

2) для того, чтобы последовательность β являлась обратной к последовательности α в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$, достаточно нейтральности одной из последовательностей $\alpha\beta, \beta\alpha$;

3) для того, чтобы элемент b n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ являлся косым для $a \in A$, достаточно выполнения равенства из определения косого элемента только для некоторого $i = 1, 2, \dots, n$.

4) для любого элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ его косой элемент \bar{a} является обратным для последовательности $\underbrace{a \dots a}_{n-2}$, а последовательности $\bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-2}$ и $\underbrace{a \dots a}_{n-2} \bar{a}$ являются нейтральными.

5) если $n \geq 3$, то для любого элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ и любого $i = 0, 1, \dots, n-3$ последовательность

$$\underbrace{a \dots a}_i \bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-i-3}$$

является обратной для a . В частности, обратными для a являются последовательности $\bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-3}$ и $\underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a}$.

6) любой элемент a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ перестановочен со своим косым элементом \bar{a} .

Лемма 1.1. [6, предложение 1.2.20]. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – последовательности, составленные из элементов n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, и пусть β_1, \dots, β_r – последовательности, обратные

соответственно данным. Тогда $\beta_r \dots \beta_1$ – обратная последовательность для последовательности $\alpha_1 \dots \alpha_r$.

Согласно Э. Посту [3], v -ой n -адической степенью элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется элемент этой же n -арной группы, обозначаемый символом $a^{[v]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[v]} = a, \quad \text{если } v = 0;$$

$$a^{[v]} = \eta(\underbrace{a \dots a}_{v(n-1)+1}), \quad \text{если } v > 0;$$

$a^{[v]}$ – решение уравнения $\eta(\underbrace{x a \dots a}_{-v(n-1)}) = a$, если $v < 0$.

Таким образом, если $v < 0$, то

$$\eta(\underbrace{a^{[v]} a \dots a}_{-v(n-1)}) = a.$$

Используя нейтральность последовательности $\underbrace{a^{[v]} a \dots a}_{-v(n-1)-1}$ и сформулированное выше утверждение 2), можно убедиться в том, что в случае $v < 0$ верно не только предыдущее равенство, но и равенство

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{i-1} \underbrace{a^{[v]} a \dots a}_{-v(n-1)-i+1}) = a$$

для любого $i = 1, 2, \dots, -v(n-1) + 1$. Отсюда в силу однозначной разрешимости в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ уравнения

$$\eta(\underbrace{a \dots a x a \dots a}_{i-1} \underbrace{\dots a}_{-v(n-1)-i+1}) = a,$$

следует, что если $v < 0$, то n -адическую степень $a^{[v]}$ элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ можно определить как решение последнего уравнения. В частности, как решение уравнения

$$\eta(\underbrace{a \dots a x}_{-v(n-1)}) = a.$$

Ясно, что $a^{[-1]} = \bar{a}$.

В статье существенно используется следующая теорема.

Теорема 1.1 [4]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

2 Основной результат

Согласно теореме 1.1, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. Укажем для каждого элемента этой l -арной группы его v -ую l -адическую степень, предварительно сделав

Замечание 2.1. Так как для l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ верно равенство

$$l - 2 = s(n - 1) - 1,$$

то всякая обратная последовательность в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности α_j длины $l - 2$ эквивалентна в смысле Поста одному и тому же элементу α_j^{-1} этой же n -арной группы,

который естественно называть обратным элементом для последовательности a_j . Ясно также, что любая обратная последовательность a_j^{-1} в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ для элемента a_j эквивалентна в смысле Поста некоторой последовательности длины $n - 2$.

Теорема 2.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle - n$ -арная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) -$ произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}, j = 1, \dots, k, \quad (2.1)$$

a_j^{-1} и $\alpha_j^{-1} -$ любая обратная последовательность и обратный элемент в $\langle A, \eta \rangle$ для элемента a_j и последовательности α_j соответственно. Тогда v -ая l -адическая степень $\mathbf{a}^{[v]}$ элемента \mathbf{a} имеет вид (b_1, \dots, b_k) , где

$$b_j = a_j, \text{ если } v = 0; \\ b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_v), \text{ если } v > 0; \quad (2.2)$$

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-v-1}), \text{ если } v < -1, \quad (2.3)$$

$$b_j = \alpha_j^{-1}, \text{ если } v = -1, \quad (2.4)$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0; \\ \mathbf{a}^{[v]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_v), \dots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_v)), \text{ если } v > 0;$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1} \alpha_1^{-1} \dots a_1^{-1} \alpha_1^{-1}}_{-v-1}), \dots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1} \alpha_k^{-1} \dots a_k^{-1} \alpha_k^{-1}}_{-v-1})), \text{ если } v < -1.$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_k^{-1}). \text{ если } v = -1.$$

Доказательство. Для $v = 0$ доказывать нечего.

Если $v > 0$, то положим

$$\mathbf{a}^{[v]} = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{v(l-1)+1}) = (b_1, \dots, b_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, тождественность подстановки σ^{l-1} и равенство (2.1), получим

$$b_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}) \\ = \underbrace{\eta(a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)})}_{v-1} = \\ = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j) = \\ = \underbrace{\eta(a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j)}_{v-1} = \\ = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_v) = \\ = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_v),$$

то есть верно (2.2) для любого $j \in \{1, \dots, k\}$.

Пусть теперь $v < -1$ и положим

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{-v(l-1)}(b_1, \dots, b_k)) = (c_1, \dots, c_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, тождественность подстановки σ^{l-1} , равенства (2.1) и (2.3) и нейтральность последовательностей $a_j a_j^{-1}$ и $\alpha_j \alpha_j^{-1}$, получим

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{-v-1} \\ a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_{\sigma^{l-1}(j)}) = \\ = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{-v-1} \\ a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_j) = \\ = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{-v-1} \alpha_j \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-v-1})) = \\ = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{-v-1} \alpha_j \alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-v-1}) = \\ = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{-v-1} \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-v-1}) = \dots \\ \dots = \eta(a_j \alpha_j^{-1} \alpha_j^{-1}) = a_j,$$

то есть $c_j = a_j$ для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. Следовательно,

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{-v(l-1)}(b_1, \dots, b_k)) = \mathbf{a},$$

то есть $(b_1, \dots, b_k) = \mathbf{a}^{[v]}$.

Случай $v = -1$ доказывается также как и случай $v < -1$, при этом вместо (2.3) применяется (2.4) и учитывается пустота последовательностей

$$\underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{-v-1} \text{ и } \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-v-1}. \quad \square$$

Замечание 2.2. Понятно, что равенства (2.2) и (2.3) могут быть переписаны следующим образом

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \dots a_j \alpha_j}_v a_j), \text{ если } v > 0,$$

$$b_j = \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1} a_j^{-1} \dots \alpha_j^{-1} a_j^{-1}}_{-v-1} \alpha_j^{-1}), \text{ если } v < 0.$$

Замечание 2.3. Так как

$$\eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-v-1}) \sim \alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-v-1} \sim \\ \sim (\underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{-v-1} \alpha_j)^{-1},$$

где символом \sim обозначено отношение эквивалентности Поста, то элемент b_j в (2.3) является обратным в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности

$$\underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{-v-1} \alpha_j.$$

Так как $\mathbf{a}^{[-1]} = \bar{\mathbf{a}}$, то из теоремы 2.1 при $v = -1$ вытекает следующий результат из [10] о косых элементах.

Следствие 2.1 [10]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ элемент (b_1, \dots, b_k) , где b_j – обратный элемент в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности

$$a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

является косым для \mathbf{a} , то есть $\bar{\mathbf{a}} = (b_1, \dots, b_k)$.

Если в теореме 2.1 $n \geq 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ для её элемента a_j можно взять последовательность

$$a_j^{-1} = \overline{a_j} \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}.$$

Кроме того, в силу леммы 2.1, обратный элемент в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности α_j имеет вид

$$\alpha_j^{-1} = \eta \left(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}} \dots \dots \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}} \right).$$

В этом случае формулировка теоремы 2.1 для $v < -1$ принимает следующий вид.

Теорема 2.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $v < -1$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$u_j = \eta \left(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}} \dots \dots \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}} \right), j = 1, \dots, k.$$

Тогда элемент (b_1, \dots, b_k) , где

$$b_j = \eta \left(\underbrace{u_j \overline{a_j} \overline{a_j} \dots \overline{a_j} u_j}_{n-3} \dots \underbrace{\overline{a_j} \overline{a_j} \dots \overline{a_j} u_j}_{n-3} \right),$$

является v -ой l -адической степенью элемента \mathbf{a} , то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \left(\eta \left(\underbrace{u_1 \overline{a_1} \overline{a_1} \dots \overline{a_1} u_1}_{n-3} \dots \underbrace{\overline{a_1} \overline{a_1} \dots \overline{a_1} u_1}_{n-3} \right), \dots, \eta \left(\underbrace{u_k \overline{a_k} \overline{a_k} \dots \overline{a_k} u_k}_{n-3} \dots \underbrace{\overline{a_k} \overline{a_k} \dots \overline{a_k} u_k}_{n-3} \right) \right).$$

Если в теореме 2.1 $n \geq 3$, $v = -1$, то элемент b_j в (2.4) совпадает с элементом u_j из теоремы 2.2. Поэтому ввиду равенства $a^{[-1]} = \bar{\mathbf{a}}$, из теоремы 2.1 вытекает следующий результат из [10] о косых элементах.

Следствие 2.2 [10]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ элемент (b_1, \dots, b_k) , где

$$b_j = \eta \left(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}} \dots \dots \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}} \right), j = 1, \dots, k,$$

является косым для \mathbf{a} , то есть

$$\bar{\mathbf{a}} = \left(\eta \left(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(1)} \dots a_{\sigma^{l-2}(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(1)}} \dots \dots \underbrace{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(1)}} \right), \dots, \eta \left(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(k)} \dots a_{\sigma^{l-2}(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(k)}} \dots \dots \underbrace{a_{\sigma(k)} \dots a_{\sigma(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(k)}} \right) \right).$$

Замечание 2.4. В [10] отмечено, что формулы в следствии 2.2 корректны, так как

$$(l-2)(n-2) = (s(n-2)-1)(n-1) + 1.$$

Замечание 2.5. В теоремах 2.1 и 2.2 и в следствиях 2.1 и 2.2 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка $l-1$.

Тернарный случай. Если в теореме 2.1 положить $n = 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в тернарной группе $\langle A, \eta \rangle$ для её элемента a_j можно взять его косой элемент $\overline{a_j}$. В результате получим следствие для $v < 0$, которое вытекает также и из теоремы 2.2.

Следствие 2.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, $v < -1$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s+1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{2s+1}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

α_j^{-1} – обратный элемент в $\langle A, \eta \rangle$ для последовательности α_j . Тогда элемент (b_1, \dots, b_k) , где

$$b_j = \eta \left(\alpha_j^{-1} \underbrace{\overline{a_j} \alpha_j^{-1} \dots \overline{a_j} \alpha_j^{-1}}_{-v-1} \right),$$

является v -ой $(2s+1)$ -адической степенью элемента \mathbf{a} , то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \left(\eta \left(\alpha_1^{-1} \underbrace{\overline{a_1} \alpha_1^{-1} \dots \overline{a_1} \alpha_1^{-1}}_{-v-1} \right), \dots, \eta \left(\alpha_k^{-1} \underbrace{\overline{a_k} \alpha_k^{-1} \dots \overline{a_k} \alpha_k^{-1}}_{-v-1} \right) \right).$$

Замечание 2.6. Если $s \geq 2$, то в тернарной группе $\langle A, \eta \rangle$ последовательность α_j в следствии 2.3 эквивалентна в смысле Поста элементу $\eta(a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{2s+1}(j)})$. Поэтому можно считать

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{2s+1}(j)}),$$

соответственно

$$\alpha_j^{-1} = \overline{\alpha_j} = \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{2s+1}(j)})}.$$

Поэтому следствие 2.3 можно переформулировать следующим образом, включив в неё случаи $v \geq 0$ и $v = -1$.

Следствие 2.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, $s \geq 2$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(2s+1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{2s-1}(j)}), j = 1, \dots, k.$$

Тогда v -ая $(2s+1)$ -адическая степень $\mathbf{a}^{[v]}$ элемента \mathbf{a} имеет вид (b_1, \dots, b_k) , где

$$b_j = a_j, \text{ если } v = 0;$$

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_v), \text{ если } v > 0;$$

$$b_j = \eta(\overline{\alpha_j \alpha_j \dots \alpha_j}_{-v-1}), \text{ если } v < -1;$$

$$b_j = \overline{\alpha_j}, \text{ если } v = -1,$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_v), \dots,$$

$$\dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_v)), \text{ если } v > 0;$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\overline{\alpha_1 \alpha_1 \dots \alpha_1}_{-v-1}), \dots,$$

$$\dots, \eta(\overline{\alpha_k \alpha_k \dots \alpha_k}_{-v-1})), \text{ если } v < -1;$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_k}). \text{ если } v = -1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков / Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.

2. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208–350.

4. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

5. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

6. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

7. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

8. Щучкин, Н.А. Введение в теорию n -групп / Н.А. Щучкин. – Волгоград: Принт, 2019. – 236 с.

9. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

10. Гальмак, А.М. Косые элементы в полиадических группах специального вида / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко, М.В. Селькин / Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2020. – № 2 (56). – С. 13–20.

Поступила в редакцию 16.05.2023.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

О $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -НИЛЬПОТЕНТНЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХИ.М. Дергачева¹, И.П. Шабалина¹, Е.А. Задорожнюк¹, И.А. Соболев²¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель²Гомельский государственный университет имени Франциска СкориныON $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -NILPOTENT FINITE GROUPSI.M. Dergacheva¹, I.P. Shabalina¹, E.A. Zadorozhnyuk¹, I.A. Sobol²¹Belarusian State University of Transport, Gomel²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; \mathbb{P} – множество всех простых чисел и \mathfrak{Z} – некоторый класс групп, замкнутый относительно расширений, гомоморфных образов и подгрупп. В данной работе $\sigma_{\mathfrak{Z}} = \{\sigma_0\} \cup \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} , т. е. $\mathbb{P} = \sigma_0 \cup \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех индексов $i \neq j$ из $\{0\} \cup I$, для которого \mathfrak{Z} является классом σ_0 -групп с $\pi(\mathfrak{Z}) = \sigma_0$. Группа G называется: $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -*примарной*, если G является либо \mathfrak{Z} -группой, либо σ_i -группой для некоторого $i \neq 0$; $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -*нильпотентной*, если G – прямое произведение некоторых $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -примарных групп. В данной работе мы даем характеристики конечных $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -нильпотентных групп.

Ключевые слова: конечная группа, $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -субнормальная подгруппа, $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -разрешимая группа, $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -нильпотентная группа, холлова подгруппа.

Для цитирования: О $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -нильпотентных конечных группах / И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк, И.А. Соболев // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 52–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_52. – EDN: SDSTAN

Abstract. Throughout the article all groups are finite and G always denotes finite group; \mathbb{P} is the set of all prime numbers and \mathfrak{Z} is some class of groups, closed under extensions, homomorphic images and subgroups. In this paper, $\sigma_{\mathfrak{Z}} = \{\sigma_0\} \cup \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is a partition of the set \mathbb{P} , i. e. $\mathbb{P} = \sigma_0 \cup \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all indices $i \neq j$ from $\{0\} \cup I$, for which \mathfrak{Z} is a class of σ_0 -groups with $\pi(\mathfrak{Z}) = \sigma_0$. The group G is called: $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -*primary* if G is either an \mathfrak{Z} -group or a σ_i -group for some $i \neq 0$; $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -*nilpotent* if G is the direct product of some $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -primary groups. Finite $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -nilpotent groups are characterized.

Keywords: finite group, $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -subnormal subgroup, $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -soluble group, $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -nilpotent group, Hall subgroup.

For citation: On $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ -nilpotent finite groups / I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk, I.A. Sobol // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 52–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_52 (in Russian). – EDN: SDSTAN

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, \mathbb{P} – множество всех простых чисел и \mathfrak{Z} – некоторый класс групп, замкнутый относительно расширений, гомоморфных образов и подгрупп.

В дальнейшем, $\sigma_{\mathfrak{Z}} = \{\sigma_0\} \cup \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} , т. е.

$$\mathbb{P} = \sigma_0 \cup \bigcup_{i \in I} \sigma_i$$

и

$$\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$$

для всех индексов $i \neq j$ из $\{0\} \cup I$, для которого \mathfrak{Z} – некоторый класс σ_0 -групп с $\pi(\mathfrak{Z}) = \sigma_0$. В случае, когда \mathfrak{Z} – класс всех σ_0 -групп, мы пишем σ вместо $\sigma_{\mathfrak{Z}}$ и мы будем в этом случае убирать символ \mathfrak{Z} во всех последующих определениях и обозначениях.

σ -Свойством группы [1]–[3] называют любое ее свойство, зависящее от выбора разбиения σ множества \mathbb{P} и которое не предполагает каких либо ограничений на σ .

Напомним некоторые базисные понятия теории σ -свойств группы, восходящие к работам [1]–[9].

Группа G называется σ_3 -примарной при условии, что G является либо \mathfrak{Z} -группой, либо σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, где $i \neq 0$.

Пусть H/K – главный фактор группы G . Тогда мы говорим, что H/K является σ_3 -центральным (в G), если полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ σ_3 -примарно.

Мы говорим, что группа G : σ_3 -разрешима, если каждый главный фактор группы G является σ_3 -примарным; σ_3 -нильпотентна, если G – прямое произведение некоторых σ_3 -примарных групп.

Ясно, что всякая σ_3 -нильпотентная группа является σ_3 -разрешимой.

Пусть теперь \mathcal{H} – полное холлово σ -множество группы G . Тогда мы говорим, что \mathcal{H} является полным холловым σ_3 -множеством группы G , если элемент множества \mathcal{H} , являющийся σ_0 -группой, принадлежит классу \mathfrak{Z} .

Определение 0.1. Мы говорим, следуя [4], что подгруппа A группы G является σ_3 -субнормальной в G , если в G существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо секция $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ σ_3 -примарна для всех $i = 1, \dots, t$.

Мы говорим, что G $\sigma_\mathfrak{F}$ -совершенна, если $G = G^\mathfrak{F}$ и $O^{\sigma_i}(G) = G$ для всех $i \neq 0$.

В данной работе мы докажем следующие две новые теоремы σ -свойствах группы, первая из которых лежит в основе доказательства второй из них.

Теорема 0.2. Пусть A , K и N – подгруппы группы G . Предположим, что A σ_3 -субнормальна в G , а N нормальна в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $A \cap K$ является σ_3 -субнормальным в K .
- (2) Если K является σ_3 -субнормальной подгруппой группы A , то K является σ_3 -субнормальной в G .
- (3) Если $N \leq K$ и K/N σ_3 -субнормальна в G/N , то K σ_3 -субнормальна в G .
- (4) Если $K \leq E \leq G$, где K является σ_3 -субнормальным в E , то KN/N σ_3 -субнормальна в NE/N .
- (5) Если $K \leq A$ и A σ_3 -примарна, то K σ -субнормальна в G .

(6) Если A σ_3 -совершенна, то A субнормальна в G .

Отметим, что теорема 0.2 обобщает многие известные свойства субнормальных подгрупп (см. главу А книги [10]).

(7) Если A является холловой σ_i -подгруппой в G для некоторого i , то A нормальна в G .

Теорема 0.3. Любые два из следующих условий эквивалентны:

- (i) G σ_3 -нильпотентна.
- (ii) Каждый главный фактор G является σ_3 -центральным в G .
- (iii) G имеет полное холловское σ_3 -множество \mathcal{H} такое, что каждый член \mathcal{H} является σ_3 -субнормальной подгруппой в G .
- (iv) Каждая подгруппа группы G σ_3 -субнормальна в G .
- (v) Каждая максимальная подгруппа группы G σ_3 -субнормальна в G .

Отметим, что следствиями теоремы 0.3 являются некоторые известные результаты о конечных nilпотентных группах.

1 Доказательство теоремы 0.2

Доказательство теоремы 0.2. Предположим, что это утверждение неверно, и пусть G – контрпример минимального порядка. По условию существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$$

такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ σ_3 -примарна для всех $i = 1, \dots, r$.

Пусть $M = A_{r-1}$. Без ограничения общности можно считать, что $M \neq G$.

(1) Рассмотрим цепь подгрупп

$$K_0 = K \cap A_0 \leq K \cap A_1 \leq \dots \leq K \cap A_r = K.$$

Если A_{i-1} нормальна в A_i , то очевидно, $K \cap A_{i-1}$ нормальна в $K \cap A_i$. Предположим, что $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является \mathfrak{Z} -группой. Тогда

$$(A_i \cap K)(A_{i-1})_{A_i} / (A_{i-1})_{A_i} \cong A_i \cap K / (A_{i-1})_{A_i} \cap K$$

– \mathfrak{Z} -группа, где $(A_{i-1})_{A_i} \cap K$ нормальна в $A_i \cap K$, поэтому $(A_{i-1})_{A_i} \cap K \leq (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$.

Следовательно, $(K \cap A_i) / (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ является \mathfrak{Z} -группой. Наконец, если $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ_j -группой для некоторого $j \neq 0$, то аналогично получаем, что $(K \cap A_i) / (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ является σ_j -группой. Следовательно, $A \cap K$ σ_3 -субнормальна в K .

(2) Это утверждение очевидно.

(3) Пусть

$$K/N = K_0/N \leq K_1/N \leq \dots \leq K_n/N = G/N$$

– цепь подгрупп такая, что либо K_{i-1}/N нормальна в K_i/N , либо $(K_i/N)/(K_{i-1}/N)_{K_i/N}$ является σ_3 -примарной группой для всех $i = 1, \dots, n$. Предположим, что K_{i-1} не является нормальной в K_i . Тогда K_{i-1}/N не является нормальной в K_i/N , поэтому

$$(K_i/N)/(K_{i-1}/N)_{K_i/N} = (K_i/N)/((K_{i-1})_{K_i}/N) \simeq K_i/(K_{i-1})_{K_i}$$

является σ_3 -примарной группой. Следовательно, K σ_3 -субнормальна в G .

(4) По условию существует цепь подгрупп

$$K = K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_n = E$$

такая, что либо K_{i-1} нормальна в K_i , либо $K_i/(K_{i-1})_{K_i}$ является σ_3 -примарной группой для всех $i = 1, \dots, n$.

Теперь рассмотрим цепь

$$KN/N = K_0N/N \leq \dots \leq K_nN/N = EN/N.$$

Предположим, что $K_{i-1}N/N$ не является нормальной в K_iN/N . Тогда $L = K_{i-1}$ не является нормальной в $T = K_i$ и поэтому T/L_T является σ_3 -примарна. Тогда

$$(T/L_T)/(L_T(T \cap N)/L_T) = (T/L_T)/((T \cap NL_T)/L_T) \simeq$$

$$T/(T \cap NL_T) \simeq TN/L_TN \simeq (TN/N)/(L_TN/N)$$

является σ_3 -примарной группой. Но

$$L_TN/N \leq (LN/N)_{TN/N}.$$

Следовательно, $(TN/N)/(LN/N)_{TN/N}$ σ_3 -примарна. Следовательно, подгруппа KN/N является σ_3 -субнормальной в NE/N .

(5) Поскольку A σ_3 -примарна, то каждая подгруппа группы A является σ_3 -субнормальной в A . Таким образом, это утверждение является следствием утверждения (2).

(6) Сначала покажем, что $A \leq M_G$. В самом деле, если M нормальна в G , то это очевидно. Теперь предположим, что G/M_G является \mathfrak{S} -группой. Тогда из изоморфизма

$$AM_G/M_G \simeq A/A \cap M_G$$

получаем, что $A = A^{\mathfrak{S}} \leq A \cap M_G$, поэтому $A \leq M_G$. Наконец, если G/M_G является σ_j -группой для некоторых $j \neq 0$ и $\sigma_j \in \sigma$, то аналогичным образом получаем, что $A = O^{\sigma_j}(A) \leq A \cap M_G$, поэтому $A \leq M_G$.

Выбор G означает, что A субнормальна в M , поэтому A субнормальна в M_G в силу утверждения (1). Поэтому A субнормальна в G .

(7) Поскольку всякая σ_3 -субнормальная подгруппа является σ -субнормальной в G , где $\sigma = \{\sigma_0\} \cup \{\sigma_i \mid i \in I\}$, то это утверждение является следствием леммы 2.6 (10) работы [5]. \square

Лемма 1.1. Если группа G σ_3 -разрешима, то G имеет полное холлово σ_3 -множество.

Доказательство. Предположим, что эта лемма неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Понятно, что G σ -разрешима, где

$$\sigma = \{\sigma_0\} \cup \{\sigma_i \mid i \in I\},$$

и поэтому G имеет полное холловское σ -множество $\mathcal{H} = \{H_0, H_1, \dots, H_t\}$ ввиду теоремы В работы [11]. Не теряя общности, мы можем предполагать, что H_i – σ_i -группа для всех $i = 0, 1, \dots, t$. Таким образом, нам необходимо лишь доказать, что $H_0 \in \mathfrak{S}$.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G и R является σ_k -группой. По теореме 0.2 (4) условие выполнено для G/R , поэтому

$$H_0R/R \simeq H_0/(H_0 \cap R) \in \mathfrak{S}$$

и $H_0 \cap R \neq 1$ ввиду выбора группы G . Но главный фактор $R/1$ группы G является σ_3 -примарным, поскольку G σ_3 -разрешима. Значит, $R, H_0 \cap R \in \mathfrak{S}$ и поэтому $H_0 \in \mathfrak{S}$, так как класс \mathfrak{S} наследственен и замкнут относительно расширений. \square

2 Доказательство теоремы 0.3

Доказательство теоремы 0.3. Так как импликации (i) \Rightarrow (iii) и (iv) \Rightarrow (v) очевидны, то достаточно доказать импликации (i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (v), (iii) \Rightarrow (i), (i) \Rightarrow (iv) и (v) \Rightarrow (i).

(i) \Rightarrow (ii) Для группы G имеет место разложение $G = H_0 \times H_1 \times \dots \times H_t$, где H_i – σ_3 -примарная группа для всех i .

Пусть H/K – произвольный главный фактор группы G , лежащий ниже подгруппы H_i . Тогда

$$H_0 \times H_1 \times \dots \times H_{i-1} \times H_{i+1} \times \dots \times H_t \leq C_G(H/K)$$

и поэтому $G/C_G(H/K)$ является фактор группой группы H_i . Таким образом, группа $(H/K) \times (G/C_G(H/K))$ является σ_3 -примарной. Теперь, применяя теорему 3.2 из [10, гл. А], мы получаем, что каждый главный фактор группы G является σ_3 -центральным в G .

(ii) \Rightarrow (v) Пусть M – максимальная подгруппа в G . Предположим, что $M_G \neq 1$. Ясно, что условие (ii) верно для G/M_G , поэтому M/M_G σ_3 -субнормальна в G/M_G по индукции. Следовательно, M σ_3 -субнормальна в G по теореме 0.2 (3).

Теперь предположим, что $M_G = 1$. Тогда, согласно [10, А, 15.2], либо G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу R , либо G имеет ровно две минимальные нормальные подгруппы R и N и выполняются следующие условия: R и N – изоморфные неабелевы группы, $R \cap M = 1 = N \cap M$ и $C_G(R) = N$. Пусть $C = C_G(R)$.

Предположим, что R – абелева группа. Тогда, ввиду [10, А, 15.2], $C = R$ и поэтому в этом случае группа

$$G = G/M_G \cong R \rtimes (G/C_G(R))$$

σ_3 -примарна. Следовательно, для некоторых $\sigma_i \in \sigma$, G является σ_i -группой и, кроме того, в случае $i = 0$ мы имеем $G \in \mathfrak{S}$. Но тогда M σ_3 -субнормальна в G . Аналогично получаем, что M σ_3 -субнормальна в G и в случае, когда $C = 1$. Наконец, если $C = N$, то

$$G/N \cong M \cong G/R$$

σ_3 -примарна. Отсюда следует, что M σ_3 -субнормальна в G .

(iii) \Rightarrow (i) Это следует из теоремы 0.2 (7), поскольку каждый член множества \mathcal{H} σ_3 -субнормален G по условию.

(i) \Rightarrow (iv) Это следует из импликаций (i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (v) и того очевидного факта, что каждая подгруппа σ_3 -нильпотентной группы σ -нильпотентна.

(v) \Rightarrow (i) Предположим, что это неверно, и пусть G – контрпример минимального порядка.

Прежде всего заметим, что G σ_3 -разрешима. Действительно, для любой максимальной подгруппы M группы G группа G/M_G является σ_3 -примарной, а значит, G/M_G σ_3 -разрешима. Но тогда $G/\Phi(G)$ является подпрямым произведением некоторых σ_3 -разрешимых групп, откуда следует, что $G/\Phi(G)$ σ_3 -разрешима. Следовательно, G – σ_3 -разрешимая группа, и поэтому G – σ -разрешимая группа.

Ввиду леммы 1.1, G имеет полное холловское σ_3 -множество $\mathcal{H} = \{H_0, H_1, \dots, H_t\}$. Не теряя общности, мы можем предполагать, что H_i – σ_i -группа для всех $i = 0, 1, \dots, t$.

Пусть $H = H_i$ и R – минимальная нормальная подгруппа группы G . Покажем, что H нормальна в G . Предположим, что это неверно. Тогда $H \neq 1$. По теореме 0.2(4) условие выполнено для G/R , поэтому HR/R нормальна в G/R в силу выбора G . Значит, можно считать, что $R \not\leq H$, поэтому $R \cap H = 1$, так как G σ_3 -разрешима. Если G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$, то, как и выше, получаем, что HN нормальна в G , а значит,

$$RH \cap NH = H(R \cap NH) = H(R \cap N) = H$$

нормальна в G . Следовательно, R является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G . Более того, имеем $R \not\leq \Phi(G)$, так как группа $HR/R \cong H$ σ_3 -нильпотентна и HR нормальна в G . Пусть M – максимальная подгруппа в G такая, что $G = RM$. Тогда $M_G = 1$. Но M σ_3 -субнормальна в G по условию и поэтому $G \cong G/M_G$ σ_3 -примарна, откуда следует, что $H = G$ поскольку $H \neq 1$. Это противоречие показывает, что (v) \Rightarrow (i). \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.
2. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Вопросы физики, математики и техники. – 2015. – Т. 3, № 24. – Р. 67–81.
3. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп III / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 52–62.
4. Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – Р. 281–309.
5. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – Р. 1–16.
6. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – Р. 114–129.
7. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – Р. 69–85.
8. G -covering subgroup systems for some classes of σ -soluble groups / A-Ming Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2021. – Vol. 585. – Р. 280–293.
9. A Robinson description of finite $P\sigma T$ -groups / Xin-Fang Zhang, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2023. – DOI: doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.04.023.
10. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.
11. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Application. – 2016. – Vol. 15, № 5. – DOI: 10.1142/S0219498816500857.

Поступила в редакцию 28.04.2023.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент
Соболь Ирина Александровна – ст. преподаватель

О РАЦИОНАЛЬНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ СУММАХ ФЕЙЕРА НА ОТРЕЗКЕ И АППРОКСИМАЦИЯХ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ

П.Г. Поцейко

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ON RATIONAL CONJUGATE FEJÉR SUMS ON AN INTERVAL AND APPROXIMATIONS OF THE CONJUGATE FUNCTION

P.G. Patseika

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Исследуются аппроксимации сопряженной функции на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Устанавливается интегральное представление соответствующих приближений. Для сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2, 1)$ получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлено ее асимптотическое выражение при $n \rightarrow \infty$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты. В качестве следствия найдены оценки приближений на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Ключевые слова: сопряженная функция, ряд Фурье – Чебышёва, суммы Фейера, функция со степенной особенностью, поточечные и равномерные приближения, наилучшие приближения, асимптотические оценки.

Для цитирования: Поцейко, П.Г. О рациональных сопряженных суммах Фейера на отрезке и аппроксимациях сопряженной функции / П.Г. Поцейко // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 56–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_56. – EDN: VGNTRP

Abstract. The approximations of the conjugate function on the segment $[-1, 1]$ by Fejér sums of conjugate rational integral Fourier – Chebyshev operators with restrictions on the number of geometrically different poles are investigated. An integral representation of the corresponding approximations is established. An integral representation of approximations, estimation of pointwise approximations and uniform approximations with a certain majorant are obtained for a conjugate function with density $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2, 1)$. Its asymptotic expression for $n \rightarrow \infty$, depending on the parameters of the approximating function is established. In the final part, the optimal values of parameters at which the highest rate of decreasing majorant is provided are found. As a corollary, the estimates of approximations of conjugate function on the segment $[-1, 1]$ by Fejér sums conjugate polynomial Fourier – Chebyshev series are found.

Keywords: conjugate function, Fourier – Chebyshev series, Fejér sums, function with power singularity, pointwise and uniform approximations, best approximations, asymptotic estimates.

For citation: Patseika, P.G. On rational conjugate Fejér sums on an interval and approximations of the conjugate function / P.G. Patseika // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 56–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_56 (in Russian). – EDN: VGNTRP

Введение

При решении различных задач математики и ее приложений возникают интегралы с ядром типа Коши, взятые вдоль отрезка действительной оси, которые при помощи различных преобразований приводятся к виду:

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t-x\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1], \quad (0.1)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши и для его существования достаточно потребовать, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица любого порядка [1], [2].

Преобразование $\hat{f}(x)$ можно рассматривать также как один из вариантов определения сопряженной функции с функцией f , заданной на отрезке $[-1, 1]$. При этом суперпозиция $\hat{f}(\cos \theta)$ определенным образом выражается через функцию, тригонометрически сопряженную с индуцированной функцией $f(\cos \theta)$, а именно

$$\hat{f}(\cos \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau, \quad x = \cos \theta.$$

Последнее выражение является хорошо известным [3], [4] представлением сопряженной функции с ядром Гильберта 2π -периодической функции f .

Задачи, связанные с изучением 2π -периодических сопряженных функций, имеют богатую историю и затронули интересы большого числа выдающихся математиков, среди которых И.И. Привалов [5], [6], А.Н. Колмогоров [7], М. Рисс [8], [9]. Полиномиальные приближения сингулярного интеграла вида (0.1) с плотностью $f(t)$, принадлежащей различным функциональным классам, изучались в работах В.П. Моторного [10], [11]. Отметим классическую задачу Н.К. Бари [12] и С.Б. Стечкина [13] о взаимосвязях между наилучшими приближениями функций и им сопряженных. Математики белорусской математической школы В.Р. Мисюк и А.А. Пекарский [14] изучили её алгебраический аналог на отрезке $[-1, 1]$.

Исследование рациональной аппроксимации сопряженной функции носит эпизодический характер. В.Н. Русак и И.В. Рыбаченко [15] нашли сравнительные порядковые оценки для рациональных приближений взаимно сопряженных в смысле Гильберта функций действительной переменной в пространстве непрерывных 2π -периодических функций. А.А. Пекарским и Т.С. Мардвилко [16] установлены тесные взаимосвязи между наилучшими равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными аппроксимациями функций и им сопряженных на отрезке. В [17] изучены рациональные аппроксимации на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции вида (0.1) частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе ортогональных рациональных функций Чебышёва – Маркова. В частности, найдены оценки равномерных приближений, когда плотность $f(t)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность. Установлено, что в этом случае рациональные приближения имеют большую скорость убывания в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

В рациональной аппроксимации нашли применение операторы, являющиеся аналогами известных полиномиальных периодических операторов Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена [18], [19]. В 1979 году Е.А. Ровба [20] ввел интегральный оператор на отрезке на основании системы рациональных функций Чебышёва – Мааркова, который является обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [20]:

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv, \quad x = \cos u, \quad (0.2)$$

где

$$\lambda_n(v, u) = \int_u^v \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(y) \right) dy,$$

$$\lambda_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 + 2|\alpha_k| \cos(y - \arg \alpha_k) + |\alpha_k|^2}, \quad (0.3)$$

$$\alpha_k = \frac{a_k}{1 + \sqrt{1 - a_k^2}}, \quad |\alpha_k| < 1.$$

Оператор $s_n : f \rightarrow \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)},$$

A – множество параметров (a_1, a_2, \dots, a_n) , $p_n(x) \in \mathbb{P}_n$, и $s_n(1, x) \equiv 1$. Если положить $a_k = 0, k = 1, \dots, n$, то $s_n(f, x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье – Чебышева. Вместе с интегральным представлением (0.2), в работе [20] получены оценки сверху приближений на отрезке оператором $s_n(\cdot, \cdot)$ на ряде функциональных классов. Установлено, что оператор $s_n(\cdot, \cdot)$ при специальном выборе параметров $a_k, k = 1, \dots, n$, совпадает с частичной суммой рядов Фурье функции $f(\cos u)$ по системе рациональных функций, введенных С. Такенакой [21] и Ф. Мальмквистом [22]. Из результатов работы [23] в этом случае следуют признаки сходимости последовательности $\{s_n(\cdot, \cdot)\}_{n=0}^{+\infty}$. Новый метод рациональной аппроксимации на отрезке впоследствии нашел широкое применение в решении практических задач [24]–[26].

В работе [27] построен рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, сопряженный с (0.2), образом которого является рациональная функция вида

$$\frac{\sqrt{1-x^2} p_{n-1}(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)}, \quad p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1},$$

и изучены его аппроксимационные свойства. В частности, установлено интегральное представление

$$\hat{s}_n(f, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\cos \frac{v-u}{2} - \cos \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv,$$

$$x = \cos u, \quad (0.4)$$

где $\lambda_n(v, u)$ определена в (0.3), и получены оценки рациональных приближений на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma > 1/2$, в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. В том числе найдены

значения параметров аппроксимирующей функции, при которых обеспечивается скорость убывания равномерных рациональных приближений большая в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Метод приближений средними арифметическими рядов Фурье 2π -периодических функций уходит своими корнями в работы Л. Фейера [28], А. Лебега [29] и к настоящему времени достаточно хорошо изучен, найдя широкое применение в полиномиальной аппроксимации (см., напр., [30]–[33]).

Изучению приближений сопряженных 2π -периодических функций суммами Фейера сопряженных тригонометрических рядов Фурье посвящены работы С.М. Никольского [34], Г. Алексича [35], А.В. Ефимова [36], [37], С.Б. Стечкина [38].

В [39] были введены суммы Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье – Чебышёва на отрезке $[-1, 1]$ с двумя геометрически различными полюсами и в продолжении работы [17] найдены оценки приближений сопряженной функции с плотностью, имеющей на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность. Так же установлено, что специальным выбором параметра аппроксимирующей функции можно добиться увеличения скорости рациональных приближений в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Целью настоящей работы является изучение аппроксимационных свойств сумм Фейера рационального интегрального оператора (0.4) в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов. В работе устанавливается интегральное представление соответствующих приближений, и исследуются приближения на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma \in (1/2, 1)$. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров аппроксимирующей функции, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты рациональных приближений изучаемым аппаратом.

1 Сопряженные суммы Фейера интегральных операторов Фурье – Чебышёва

Пусть q – произвольное натуральное число. A_q есть подмножество A параметров таких, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_n , ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m, n = mq, n > q$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости.

Составим сумму:

$$\hat{\sigma}_{n,q}(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \hat{s}_{kq}(f, x), \quad (1.1)$$

$$x \in [-1, 1], \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\hat{s}_{kq}(f, x)$ определена в (0.4).

Выражение (1.1) естественно назвать суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с q геометрически различными полюсами.

Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К.Н. Лунгу [40], [41].

Введем следующие обозначения

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f, x, A_q) = \hat{f}(x) - \hat{\sigma}_{n,q}(f, x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f, A_q) = \left\| \hat{f}(x) - \hat{\sigma}_{n,q}(f, x) \right\|_{C[-1,1]}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 1.1. Для приближений сопряженной функции (0.1) на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера (1.1) имеет место интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) K_n(v, u) dv, \quad x = \cos u, \quad (1.2)$$

$$\text{где } K_n(v, u) = \left(\cos \frac{v-u}{2} - \cos \left(\frac{v-u}{2} - \lambda_q^* \right) + \right. \\ \left. + \cos \left(\frac{v-u}{2} + m\lambda_q^* \right) - \cos \left(\frac{v-u}{2} + (m+1)\lambda_q^* \right) \right) \times \\ \times \frac{1}{8\pi(m+1) \sin \frac{v-u}{2} \sin^2 \frac{\lambda_q^*}{2}}, \quad n = mq, \\ \lambda_q^* = \lambda_q^*(v, u) = \\ = \int_u^v \sum_{k=1}^q \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 + 2|\alpha_k| \cos(y - \arg \alpha_k) + |\alpha_k|^2} dy. \quad (1.3)$$

Доказательство. Рассмотрим приближения на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции (0.1) сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (0.4) в случае q геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции:

$$\hat{\delta}_{kq}(f, x) = \hat{f}(x) - \hat{s}_{kq}(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots$$

Просуммируем правую и левую части последнего равенства по k от 0 до m и разделим на $m+1$. Тогда

$$\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \hat{\delta}_{kq}(f, x) = \quad (1.4)$$

$$= \hat{f}(x) - \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \hat{s}_{kq}(f, x) = \hat{\varepsilon}_{n,q}(f, x), \quad x \in [-1, 1].$$

С другой стороны, известно [27], что в рассматриваемом нами случае имеет место интегральное представление

$$\hat{\delta}_{kq}(f, x) = \\ = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \left(\zeta \left(\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)} \right)^k + \xi \left(\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)} \right)^k \right) \frac{dv}{\zeta - \xi}, \\ k = 0, 1, \dots,$$

где $\omega_q(\zeta) = \prod_{k=1}^q \frac{\zeta + \alpha_k}{1 + \alpha_k \zeta}$, $\xi = e^{iu}$, $\zeta = e^{iv}$, $x = \cos u$.

Подставим последнее соотношение в (1.4) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f, x) = \frac{i}{2\pi(m+1)} \times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\cos v)}{\zeta - \xi} \left[\zeta \sum_{k=0}^m \left(\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)} \right)^k + \xi \sum_{k=0}^m \left(\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)} \right)^k \right] dv, \quad x = \cos u.$$

Суммы в квадратных скобках представляют собой суммы геометрических прогрессий с соответствующими знаменателями. Следовательно,

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f, x) = \frac{i}{2\pi(m+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\cos v)}{\zeta - \xi} \times \left[\zeta \frac{1 - (\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)})^{m+1}}{1 - \omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)}} + \xi \frac{1 - (\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)})^{m+1}}{1 - \omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}} \right] dv, \quad x = \cos u.$$

Отсюда находим

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}(f, x) = \frac{i}{2\pi(m+1)} \times \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\Phi_n(v, u)}{(\zeta - \xi)(2 - [\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)} + \omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}])} dv, \quad x = \cos u.$$

$$\Phi_n(v, u) = \zeta + \xi - \left[\zeta \frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)} + \xi \frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)} \right] + \left[\zeta \frac{\omega_q^m(\zeta)}{\omega_q^m(\xi)} + \xi \frac{\omega_q^m(\xi)}{\omega_q^m(\zeta)} \right] - \left[\zeta \frac{\omega_q^{m+1}(\zeta)}{\omega_q^{m+1}(\xi)} + \xi \frac{\omega_q^{m+1}(\xi)}{\omega_q^{m+1}(\zeta)} \right].$$

Умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $2\sqrt{\xi\zeta}$ и заметив, что

$$\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)} = e^{i\lambda_q^*(v, u)}, \quad \xi = e^{iu}, \quad \zeta = e^{iv},$$

где $\lambda_q^*(v, u)$ из (1.3), приходим к (1.2). \square

В теореме 1.1 положим значения параметров $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, q$. Тогда величина $\hat{\varepsilon}_{n,1}(f, x, O) = \hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f, x)$ – приближения сопряженной функции (0.1) суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Из теоремы 1.1 получаем

Следствие 1.1. *Имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f, x) = \frac{1}{4\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\sin(n+1)(v-u)dv}{\sin^2 \frac{v-u}{2}}, \quad x = \cos u, n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства последнего интегрального представления достаточно в (1.2) положить параметры $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, q$.

2 Приближения сопряженной функции с плотностью, имеющей степенную особенность

Изучим приближения суммами Фейера (1.1) сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2, 1)$. Для простоты изложения сделаем следующую замену параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^q$:

$$\alpha_k \mapsto -\alpha_k, \quad \alpha_k \in [0, 1), \quad k = 1, \dots, q.$$

Теорема 2.1. *Для приближений сопряженной функции (0.1) с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера (1.2) имеют место:*

1) *интегральное представление:*

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, A_q) = -\frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} \times \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2t \cos u + t^2}} \Omega_n(t, x) \sin \psi_n(x, t) dt, \quad (2.1)$$

где

$$\Omega_n(t, x) = \sqrt{\frac{1 - 2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x) + \omega_q^{2(m+1)}(t)}{1 - 2\omega_q(t)M_q(x) + \omega_q^2(t)}},$$

$$\psi_n(x, t) = \arg \frac{\xi}{1-t\xi} + \arg \frac{1 - (\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(t)})^{m+1}}{1 - \omega_q(\xi)\overline{\omega_q(t)}},$$

$$\omega_q(t) = \prod_{k=1}^q \frac{t - \alpha_k}{1 - \alpha_k t}, \quad \xi = e^{iu},$$

$$M_q(x) = \frac{1}{2}(\omega_q(\xi) + \overline{\omega_q(\xi)}),$$

– рациональная функция Чебышёва – Маркова порядка q ;

2) *поточечная оценка приближений*

$$|\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, A_q)| \leq \frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma \sqrt{1-x^2}}{\pi} \times$$

$$\left[\frac{1}{m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{1-2tx+t^2} \Omega_n(t, x) dt + \right. \quad (2.2)$$

$$+ \frac{\lambda_q(u)}{m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} |\omega_q(t)| (1-|\omega_q(t)|^{m+1})}{\sqrt{1-2tx+t^2} (1-|\omega_q(t)|)^2} dt -$$

$$\left. - \lambda_q(u) \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} |\omega_q(t)|^{m+1}}{\sqrt{1-2tx+t^2} (1-|\omega_q(t)|)} dt \right], \quad x = \cos u,$$

где $\lambda_q(u)$ из (0.3);

3) *равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ неравенство*

$$|\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, A_q)| \leq \sqrt{1-x^2} \hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi} \times \left[\frac{1}{m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-2} t^{-\gamma}}{1-|\omega_q(t)|} dt + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^q \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-1} t^{-\gamma}}{(1-|\omega_q(t)|)^2} dt - \right.$$

$$-\sum_{k=1}^q \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma-1} t^{-\gamma} \frac{|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|} dt \quad (2.4)$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (1.4). Известно [26], что

$$\hat{\delta}_{kq}(f_\gamma, x, A_q) = \frac{-\sin \pi\gamma}{2^\gamma \pi i} \times \int_0^1 (1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} \left[\frac{\xi \omega_q^k(\xi)}{1-t\xi} - \frac{\omega_q^k(\xi)}{\xi-t} \right] \omega_q^k(t) dt, \\ \xi = e^{iu}, x = \cos u,$$

где $\omega_q(\xi)$ определена в формулировке настоящей теоремы.

Просуммируем правую и левую части последнего равенства по k от 0 до m и разделим на $m+1$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, A_q) = \frac{-\sin \pi\gamma}{2^\gamma \pi i(m+1)} \times \int_0^1 (1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} \left[\frac{\xi(1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1})}{(1-t\xi)(1-\omega_q(\xi)\omega_q(t))} - \frac{1-(\overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)})^{m+1}}{(\xi-t)(1-\overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)})} \right] dt, \quad x = \cos u.$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках интеграла, стоящего справа, являются взаимно комплексно-сопряженными, чтобы прийти к (2.1) достаточно выполнить соответствующие преобразования.

Докажем второе утверждение теоремы 2.1. Из (2.1) следует, что при $x \in [-1, 1]$

$$|\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, A_q)| \leq \frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} \times \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2t \cos u + t^2}} \Omega_n(t, x) |\sin \psi_n(x, t)| dt. \quad (2.5)$$

где $\Omega_n(t, x)$ определена в формулировке настоящей теоремы.

Оценим величину $|\sin \psi_n(x, t)|$. Имеем

$$|\sin \psi_n(x, t)| \leq \left| \sin \arg \frac{\xi}{1-\xi t} \right| + \left| \sin \arg \frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)} \right| = \quad (2.6) \\ = \frac{|\sin u|}{\sqrt{1-2t \cos u + t^2}} + \left| \sin \arg \frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)} \right|, \\ t \in [0, 1], x = \cos u, \xi = e^{iu}.$$

Оценим второе слагаемое.

$$\sin \arg \frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)} = \\ = \frac{1}{2i\Omega_n(t, x)} \left(\frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-(\overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)})^{m+1}}{1-\overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)}} \right) = \\ = \frac{1}{2i\Omega_n(t, x)} \left(\sum_{k=0}^m (\omega_q(\xi)\omega_q(t))^k - \sum_{k=0}^m (\overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)})^k \right) = \\ = \frac{1}{\Omega_n(t, x)} \sum_{k=0}^m \omega_q^k(t) N_{qk}(x),$$

где

$$N_{kq}(x) = \frac{1}{2i} (\omega_q^k(\xi) - \overline{\omega_q^k(\xi)}), \xi = e^{iu}, x \in [-1, 1],$$

– рациональная синус-дробь Чебышёва – Маркова порядка $kq, k = 0, 1, 2, \dots, m$. Известно [42, с. 50], что

$$|N_q(x)| \leq |\sin u| \lambda_q(u), x = \cos u,$$

где $\lambda_q(u)$ из (0.3). Учитывая также, что

$|\sin nt| \leq n |\sin t|$, находим

$$\left| \sin \arg \frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)} \right| \leq \\ \leq \frac{|\sin u| \lambda_q(u)}{\Omega_n(t, x)} \sum_{k=0}^m k |\omega_q^k(t)|.$$

Воспользовавшись известным соотношением

$$\sum_{k=0}^m k r^k = \frac{r(1-r^{m+1})}{(1-r)^2} - \frac{(m+1)r^{m+1}}{1-r}, |r| < 1,$$

придем к оценке

$$\left| \sin \arg \frac{1-(\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1-\omega_q(\xi)\omega_q(t)} \right| \leq \\ \leq \frac{|\sin u| \lambda_q(u)}{\Omega_n(t, x)} \left[\frac{|\omega_q(t)| (1-|\omega_q(t)|^{m+1})}{(1-|\omega_q(t)|)^2} - \frac{(m+1)|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|} \right].$$

Из (2.5), (2.6) и последней оценки следует (2.2).

Для доказательства третьего утверждения теоремы 2.1 в (2.2) воспользуемся оценкой

$$\sqrt{1-2t \cos u + t^2} \geq 1-t, t \in [0, 1], u \in \mathbb{R}$$

а также оценкой

$$\Omega_n(t, x) = \sqrt{\frac{1-2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x) + \omega_q^{2(m+1)}(t)}{1-2\omega_q(t)M_q(x) + \omega_q^2(t)}} \leq \\ \leq \frac{1-|\omega_q(t)|^{m+1}}{1-|\omega_q(t)|}, t \in [0, 1], m \in \mathbb{N}. \quad \square$$

В теореме 2.2 положим значение параметров $\alpha_k = 0, k = 1, 2, \dots, q$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}(f_\gamma, x, O) = \hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma, x)$$

есть приближения сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Отсюда получаем

Следствие 2.1. Для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва имеют место:

1) интегральное представление:

$$\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma, x) = -\frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi(n+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{(1-2tx+t^2)^2} p_n(t, x) dt, \\ x \in [-1, 1];$$

где

$$p_n(t, x) = (1-t^2) \sin u + 2t^{n+2} \sin(n+1)u - \\ - t^{n+1} \sin(n+2)u - t^{n+3} \sin nu, \quad x = \cos u;$$

2) равномерно по $x \in [-1, 1]$ оценка:

$$|\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma, x)| \leq \frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma \sqrt{1-x^2}}{\pi(n+1)} \times \\ \times \int_0^1 (1-t)^{2\gamma-2} t^{-\gamma} \frac{1+t-(n+2)t^{n+1}+nt^{n+2}}{1-t} dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Утверждения последнего следствия легко получить, если положить в теореме 2.1 значения всех параметров равными нулю.

3 Асимптотическое выражение мажоранты приближений

Исследуем асимптотическое поведение величины (2.4) при $m \rightarrow \infty$. Для решения этой задачи в правой части (2.4) выполним замену переменного по формуле $t = (1-u)/(1+u)$, $dt = -2du/(1+u)^2$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} \left[I_n^{(1)} + 2 \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) I_n^{(2)} - \right. \\ \left. - 2(m+1) \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) I_n^{(3)} \right], \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \quad (3.1)$$

где

$$I_n^{(1)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^\gamma} \frac{1-|\chi_q(u)|^{m+1}}{1-|\chi_q(u)|} du, \\ I_n^{(2)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} \frac{1-|\chi_q(u)|^{m+1}}{(1-|\chi_q(u)|)^2} du, \\ I_n^{(3)} = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} \frac{|\chi_q(u)|^{m+1}}{1-|\chi_q(u)|} du, \\ \chi_q(u) = \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$. То есть, вообще говоря, $\beta_k = \beta_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, q$. При этом будем полагать, что выполнено следующее условие

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_k = \infty, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (3.2)$$

и учитывать его в дальнейших рассуждениях. Положим, что параметры β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, упорядочены следующим образом:

$$0 < \beta_q \leq \beta_{q-1} \leq \dots \leq \beta_1 \leq 1.$$

Теорема 3.1. Имеет место асимптотическое равенство

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q) \sim \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} [\Psi_n(A_q) + \Phi_n(A_q)], \\ \gamma \in (1/2, 1), \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

где

$$\Psi_n(A_q) = \frac{2^\gamma \Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)} + 2 \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) \times \\ \times \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^2} + \\ + 2 \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^2}; \\ \Phi_n(A_q) = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^2} + \\ + \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^2}.$$

Доказательство. Задача сводится к изучению асимптотического поведения интегралов $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$ и $I_n^{(3)}$ в (3.1) при $m \rightarrow \infty$. Рассмотрим интеграл $I_n^{(1)}$. Представим его в виде

$$I_n^{(1)} = I_n^{(4)} + I_n^{(5)} + I_n^{(6)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

где

$$I_n^{(4)} = \int_0^{\beta_q} f_\gamma(u) \frac{1 - \left(\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \right)^{m+1}}{1 - \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}} du, \\ I_n^{(5)} = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} f_\gamma(u) \frac{1 - \left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^{m+1}}{1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}} du, \\ I_n^{(6)} = \int_{\beta_1}^1 f_\gamma(u) \frac{1 - \left(\prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^{m+1}}{1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}} du, \quad f_\gamma(u) = \frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^\gamma}.$$

Изучим асимптотическое поведение при $m \rightarrow \infty$ каждой из трех величин по отдельности.

Так для $I_n^{(4)}$ воспользуемся методами изучения асимптотического поведения интегралов, изложенными в [43, с. 375]. Продифференцируем интеграл по параметру m . Тогда

$$\frac{\partial I_n^{(4)}}{\partial m} = - \int_0^{\beta_q} f_\gamma(u) \frac{\ln \chi_q(u)}{1 - \chi_q(u)} e^{(m+1)S(u)} du,$$

$$S(u) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Теперь для исследования асимптотического поведения последнего интеграла при $m \rightarrow \infty$ воспользуемся методом Лапласа [44], [45]. Функция $S(u)$ убывает на отрезке $[0, \beta_q]$, следовательно достигает своего максимального значения при $u = 0$. Раскладывая функцию $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = 0$, а также учитывая, что

$$f_\gamma(u) \frac{\ln \chi_q(u)}{1 - \chi_q(u)} \sim -u^{2\gamma-2}, u \rightarrow 0,$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$ и $m \rightarrow \infty$ находим

$$\frac{\partial I_n^{(4)}}{\partial m} \sim \int_0^\varepsilon u^{2\gamma-2} \exp \left[-2u(m+1) \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right] du.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменного

$$2u(m+1) \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) \mapsto t,$$

получим

$$\frac{\partial I_n^{(4)}}{\partial m} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\left(2(m+1) \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma-1}}, m \rightarrow \infty.$$

Проинтегрировав правую и левую части последнего асимптотического равенства по параметру m , получим

$$I_n^{(4)} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma) \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma-1}}, m \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Займемся изучением величины $I_n^{(5)}$. Разобьем каждый из $q-1$ интегралов, входящих в ее определение на два интеграла

$$I_n^{(5)} = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} f_\gamma(u) \frac{du}{1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}} + \delta_m, \quad (3.6)$$

где

$$\delta_m = - \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} f_\gamma(u) \frac{\left(\prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^{m+1}}{1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}} du.$$

Интегралы в сумме (3.6) существуют при $\beta_k \in (0, 1], k = 1, 2, \dots, q$, и не зависят от m . Интегралы в δ_m зависят от m и поскольку

$$\left| \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right| < 1, u \in (\beta_{j+1}, \beta_j),$$

то очевидно, что стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$. Поэтому второе слагаемое в (3.6) имеет больший порядок малости при $m \rightarrow \infty$ в сравнении с первым и справедливо асимптотическое равенство

$$I_n^{(5)} \sim \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Аналогичным образом устанавливается справедливость асимптотического равенства

$$I_n^{(6)} \sim \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)}, m \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Подставив (3.5), (3.7) и (3.8) в (3.4), получим

$$I_n^{(1)} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma) \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma-1}} + \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)} + \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-2} du}{(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)}, m \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Действуя таким же образом в отношении величин $I_n^{(2)}$ и $I_n^{(3)}$, находим, что

$$I_n^{(2)} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma+1}(1-\gamma) \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma}} + \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^2} + \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)^2}, m \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

$$I_n^{(3)} \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{1-2\gamma}}{2^{2\gamma} \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma}}, m \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Теперь из равенства (3.1) на основании асимптотических соотношений (3.9) и (3.10), (3.11) получим асимптотическое равенство (3.3). \square

Положив в теореме 3.1 значения параметров $\beta_k = 1, k = 1, 2, \dots, q$, величина

$$\varepsilon_{n,q}^* \left((1-x)^\gamma, O \right) = \varepsilon_n^{(0)} \left((1-x)^\gamma \right)$$

– есть мажоранта равномерных приближений сопряженной функции (0.1) суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. В этом случае получим

Следствие 3.1. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_n^{(0)}(f_\gamma) \sim \frac{2^{1-\gamma} \gamma \Gamma(2\gamma-1) \sin \pi\gamma}{\pi(1-\gamma)(n+1)^{2\gamma-1}}, \gamma \in (1/2, 1), n \rightarrow \infty.$$

В теореме 3.1 положим значение $q=1$. То есть, аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости. В этом случае из теоремы 3.1 получим

Следствие 3.2. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_{n,1}^*(f_\gamma, A_1) \sim \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi(n+1)} \left[\frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)(n+1)^{2-2\gamma} \beta^{2\gamma-1}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)} + \frac{1}{2\beta^3} \int_\beta^1 \frac{u^{2\gamma-2}(u+\beta)(u^2+u\beta(1+\beta)+\beta^2) du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} \right], n \rightarrow \infty.$$

Из последнего представления следует, что в случае одного полюса у аппроксимирующей функции, правая часть асимптотического равенства состоит из двух слагаемых и содержит один параметр β . Причем, если $\beta = \beta(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то первое слагаемое будет уменьшаться, в то время как второе будет увеличиваться.

4 Наилучшая мажоранта приближений суммами Фейера

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (3.3) посредством выбора оптимального для этой задачи набора $A_q^* = \{\alpha_1^*, \dots, \alpha_q^*\}$. Будем искать наилучшую оценку приближений сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma \in (1/2, 1)$ суммами Фейера (1.1). Положим

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma) = \inf_{A_q} \hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q),$$

где $\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q)$ мажоранта приближений сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma \in (1/2, 1)$ суммами Фейера (1.1), определенные в (3.3).

Теорема 4.1. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*((1-x)^\gamma) \sim \frac{\mu(q, \gamma)}{(n+1)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma} \left(1 - \frac{(1-\gamma)^\gamma}{1+\gamma}\right)}}, \quad (4.1)$$

$$\gamma \in (1/2, 1), n \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \mu(q, \gamma) &= \frac{2^{1-\gamma+\frac{4\gamma^3-4\gamma^2-5\gamma+6}{2\gamma(1+\gamma)}}}{\pi\gamma(1-\gamma)} \frac{4\gamma+1}{q^{1+\gamma}} \frac{2\gamma-1}{(1+\gamma) \sin \pi\gamma [c_1(\gamma)]^{2(1+\gamma)}} \times \\ &\times \frac{1}{2\gamma} \left(q+(2\gamma-1) \frac{1-(1-\gamma)^\gamma}{\gamma(1+\gamma)} \right) \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{\gamma^2 \Gamma(2\gamma-1)}{2^{3-2\gamma} q^2} \right)^{\frac{1}{2\gamma} \left(1+(2\gamma-1) \frac{(1-\gamma)^{\gamma-1}}{1+\gamma} \right)},$$

$$\begin{aligned} c_1(\gamma) &= \int_0^1 \frac{u^{2\gamma+1} du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} = \\ &= \frac{\Gamma(1-\gamma)}{2\pi\gamma} \left(2\sqrt{\pi} \Gamma(3/2+\gamma) - \pi \Gamma(1+\gamma) \right), \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$\gamma \in (1/2, 1).$$

Доказательство. Исследуем асимптотическое равенство (3.3). При постоянных значениях параметров $\beta_k, k=1, 2, \dots, q$, порядок в указанном соотношении, очевидно, не отличается от полиномиального, найденного в следствии 3.1. Вместе с условием (3.2) будем полагать, что $\beta_k = \beta_k(m) \rightarrow 0$ и $\beta_{k+1} = o(\beta_k)$ при $m \rightarrow \infty$. В этом случае нетрудно получить, что при $m \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} &\sim \frac{1}{\beta_q}, \\ 1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} &\sim \frac{2u}{\beta_j}, \\ j &= 1, 2, \dots, q, u \in [\beta_{j+1}, \beta_j], \\ 1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} &\sim \frac{2\beta_1}{u}, u \in [\beta_1, 1]. \end{aligned}$$

При этом (3.3) примет вид

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^\gamma \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)\beta_q} \Psi_n(A_q) + \Phi_n(A_q), \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_n(A_q) &\sim \frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma} \beta_q^{2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)} + \\ &+ \frac{1}{4(1-\gamma)} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2}, \end{aligned}$$

$c_1(\gamma)$ определена в (4.2),

$$\begin{aligned} \Phi_n(A_q) &= \\ &= \frac{1}{m+1} O \left(\frac{1}{4(1-\gamma)} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{1}{2\beta_1} \int_0^1 \frac{u^{2\gamma-1} du}{(1-u^2)^\gamma} \right), \\ & \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ввиду очевидного асимптотического соотношения

$$\Phi_n(A_q) = o \left(\frac{1}{(m+1)\beta_q} \left(\frac{1}{4(1-\gamma)} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} \right) \right),$$

$$m \rightarrow \infty,$$

при варьировании параметров $\beta_k, k=1, 2, \dots, q$, слагаемые в $\Phi_n(A_q)$ не влияют на асимптотическое поведение величины $\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(f_\gamma, A_q)$. Следовательно, нахождение наилучшего набора параметров необходимо осуществлять, исследуя выражение $\Psi_n(A_q)$. При каждом фиксированном

$\gamma \in (1/2, 1)$ оно представляет собой функцию переменных $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$, непрерывную в каждой точке q -мерного куба $[\delta, 1]^q$, где $\delta = \delta(n) > 0$ – некоторая величина, зависящая от n , и при любом n ограничивающая множество параметров $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ слева. Согласно теореме Вейерштрасса функция $\Psi_n(A_q)$ имеет строгий минимум при некотором $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_q^*)$. Причем поскольку $\beta_k = 1, k = 1, \dots, q$, соответствует полиномиальному случаю, а при $\beta_k = \beta_k(m) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, достаточно большой скоростью величина $\Psi_n(A_q)$ неограниченно растет, то можно предположить, что β^* – внутренняя точка куба $[\delta, 1]^q$. Для того, чтобы найти оптимальный набор β^* для соответствующего асимптотического равенства, решим экстремальную задачу

$$\Psi_n(A_q) = c_q \beta_q^{2\gamma} + \frac{1}{4(1-\gamma)} \frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{2-2\gamma}} + \frac{1}{4(1-\gamma)} \frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{4(1-\gamma)} \frac{\beta_1^2}{\beta_2^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} \rightarrow \min,$$

где для краткости положено

$$c_q = \frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)(m+1)^{2-2\gamma}}{2^{2\gamma}(1-\gamma)}.$$

Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума: $\partial\Psi_n(A_q)/\partial\beta_k = 0, k = 1, 2, \dots, q$. Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} 2\gamma c_q \beta_q^{2\gamma-1} - \frac{1}{2} \frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{3-2\gamma}} = 0, \\ \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-2\gamma}} - (1-\gamma) \frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{3-2\gamma}} = 0, \\ \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} - (1-\gamma) \frac{\beta_{q-3}^2}{\beta_{q-2}^{3-2\gamma}} = 0, \\ \dots \\ \frac{\beta_2}{\beta_3^{2-2\gamma}} - (1-\gamma) \frac{\beta_1^2}{\beta_2^{3-2\gamma}} = 0, \\ \frac{\beta_1}{2(1-\gamma)\beta_2^{2-2\gamma}} - \frac{c_1(\gamma)}{\beta_1^3} = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

из которой последовательно находим:

$$\frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{2-2\gamma}} = 4\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}, \quad \frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} = \frac{4\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}}{1-\gamma}, \dots,$$

$$\frac{\beta_1^2}{\beta_2^{2-2\gamma}} = \frac{4\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-2}}, \quad \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} = \frac{4\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}}{4(1-\gamma)^{q-1}}.$$

Таким образом, с оптимальным набором параметров функция $\Psi_n(A_q)$ имеет вид

$$\Psi_n(A_q^*) = c_q \beta_q^{*2\gamma} + \frac{\gamma c_q \beta_q^{*2\gamma}}{1-\gamma} + \frac{\gamma c_q \beta_q^{*2\gamma}}{(1-\gamma)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{\gamma c_q \beta_q^{*2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}} + \frac{\gamma c_q \beta_q^{*2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}} = \frac{c_q (1+\gamma) \beta_q^{*2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}}. \quad (4.5)$$

Осталось найти параметр β_q^* . С этой целью преобразуем систему (4.4) следующим образом

$$\begin{cases} \left(\frac{\beta_{q-1}^*}{\beta_q^*}\right)^2 = 4\gamma c_q, \\ \left(\frac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*}\right)^2 = \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\beta_{q-1}^*}{\beta_q^*}\right)^{2(1-\gamma)} = \frac{(4\gamma c_q)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \\ \left(\frac{\beta_{q-3}^*}{\beta_{q-2}^*}\right)^2 = \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*}\right)^{2(1-\gamma)} = \frac{(4\gamma c_q)^{(1-\gamma)^2}}{(1-\gamma)(1-\gamma)^{1-\gamma}}, \\ \dots \\ \left(\frac{\beta_1^*}{\beta_2^*}\right)^2 = \frac{(4\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}{(1-\gamma)^\gamma}. \end{cases} \quad (4.6)$$

С другой стороны, из последнего уравнения в (4.4) получим

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 = \left(\frac{2(1-\gamma)c_1(\gamma)}{\beta_1^{2(1+\gamma)}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Отсюда и из последнего уравнения системы (4.6) будем иметь

$$\beta_1^2 = (2c_1(\gamma))^{\frac{1}{1+\gamma}} \left(\frac{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-1)}}{\gamma(1-\gamma)}}}{(4\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}\right)^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}, \quad \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Учитывая, что $\frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} = \frac{\gamma c_q \beta_q^{2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}}$, найдем

$$\beta_q = (2c_1(\gamma))^{\frac{1}{2(1+\gamma)}} \left(\frac{(1-\gamma)^{\frac{q-1-(1-\gamma)^{q-1}}{\gamma(1+\gamma)}}}{(4\gamma c_q)^{\frac{1-(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}}\right)^{\frac{1}{2\gamma}}.$$

Подставив полученное представление параметра β_q в (4.5), выполнив необходимые алгебраические преобразования, и учитывая, что $n = mq$ придем к (4.1). \square

Из теоремы 4.1 следует, что параметры аппроксимирующей рациональной функции (1.1) можно подобрать так, что для приближений сопряженной функции (0.1) с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma \in (1/2, 1)$, на отрезке $[-1, 1]$ справедлива оценка

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{\sigma}_{n,q}(f_\gamma, x)| \leq \frac{\sqrt{1-x^2} \mu(q, \gamma)}{(n+1)^\gamma \left(1 - \frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}} + \delta_n^*, \quad n \rightarrow \infty,$$

где величина $\mu(q, \gamma)$ определена в формулировке теоремы 4.1, а величина $\delta_n^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и имеет заведомо больший порядок малости в сравнении с главным членом асимптотического выражения справа.

В теореме 4.1 положим значение $q = 1$. То есть аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости. Тогда

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{\sigma}_{n,1}(f_\gamma, x)| \leq \frac{\sqrt{1-x^2} \mu(1, \gamma)}{(n+1)^{\frac{2}{1+\gamma}(2\gamma-1)}} + \delta_n^*, n \rightarrow \infty,$$

Поскольку величина $2/(1+\gamma) > 1$, то полученная скорость приближений является большей в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом (см. следствие 3.1).

Известно [46, с. 96], что наилучшие равномерные полиномиальные приближения функции $(1-x)^\gamma$ обладают следующим свойством:

$$E_{2n}(|x|^{2\gamma}; [-1, 1]) = \frac{1}{2^\gamma} E_n((1-x)^\gamma; [0, 1]).$$

Используя аналогичные рассуждения, после некоторых преобразований из (4.1) находим, что

$$\hat{\varepsilon}_{n,q}^*(|x|^s) \sim \frac{\mu(q, s)}{(n+1)^{\frac{2}{s} \left(1 - \frac{(2-s)^\gamma}{2^{\gamma-1}(s+2)}\right) (s-1)}}, n \rightarrow \infty, s \in (1, 2),$$

где

$$\begin{aligned} \mu(q, s) &= \frac{2^{1-s + \frac{s^3 - 2s^2 - 5s + 12}{s(2+s)} + \frac{1}{s} \left(q+4(s-1) \frac{2^\gamma - (2-s)^\gamma}{2^\gamma s(2+s)} \right)}}{\pi s(2-s)^{\frac{1}{s} \left(q+4(s-1) \frac{2^\gamma - (2-s)^\gamma}{2^\gamma s(2+s)} \right)}} \times \\ &\times q^{\frac{2^{1+s}}{2+s}} (2+s) [c_1(s)]^{\frac{s-1}{2(1+\gamma)}} \times \\ &\times \sin \frac{\pi s}{2} \left(\frac{s^2 \Gamma(s-1)}{2^{5-s} q^2} \right)^{\frac{1}{s} \left(1 + (s-1) \frac{(2-s)^{\gamma-1}}{2^{\gamma-2}(2+s)} \right)}, \\ c_1(s) &= \int_0^1 \frac{u^{s+1} du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}, s \in (1, 2). \end{aligned}$$

Заключение

В работе исследованы рациональные аппроксимации сопряженной функции на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Установлено интегральное представление приближений сопряженной функции.

Изучены рациональные аппроксимации на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2, 1)$, введенными суммами Фейера. Получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлено ее асимптотическое

выражение при $n \rightarrow \infty$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты.

Следствием полученных результатов являются оценки поточечных и равномерных приближений и асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений сопряженной функции на отрезке суммами Фейера сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при специальном выборе параметров аппроксимирующей функции возможно добиться скорости приближений большей в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. Этот результат справедлив даже в случае одного полюса у аппроксимирующей функции.

Автор выражает глубокую признательность профессору Е.А. Ровбе за ряд полезных советов и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. – 543 с.
2. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – 3-е изд. / Н.И. Мухелишвили. – Москва: Наука, 1968. – 513 с.
3. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – Москва: Физматлит, 1961. – 936 с.
4. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. В 2-х томах. Том 1 / А. Зигмунд. – Москва: Мир, 1965. – 616 с.
5. Привалов, И.И. Sur les fonctions conjuguées / И.И. Привалов // Bulletin de la Société Mathématique de France. – 1916. – Vol. 44. – P. 100–103.
6. Привалов, И.И. К теории сопряженных тригонометрических рядов / И.И. Привалов // Математический сборник. – 1923. – № 2. – С. 224–228.
7. Колмогоров, А.Н. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier / А.Н. Колмогоров // Fundamenta Mathematicae. – 1925. – Vol. 7. – P. 24–29.
8. Riesz, M. Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier / M. Riesz // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. – 1924. – Vol. 178. – P. 1464–1467.
9. Riesz, M. Sur les fonctions conjuguées / M. Riesz // Mathematische Zeitschrift. – 1927. – Vol. 27. – P. 218–244.
10. Моторный, В.П. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами / В.П. Моторный // Украинский математический журнал. – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 331–345.
11. Моторный, В.П. Приближение одного класса сингулярных интегралов алгебраическими

многочленами с учетом положения точки на отрезке / В.П. Моторный // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2001. – Т. 232. – С. 268–285.

12. *Бари, Н.К.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций / Н.К. Бари // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1955. – Т. 19, № 5. – С. 285–302.

13. *Стечкин, С.Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами / С.Б. Стечкин // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 197–206.

14. *Мисюк, В.Р.* Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений / В.Р. Мисюк, А.А. Пекарский // Известия НАН Беларуси, Сер. физико-математических наук. – 2015. – № 2. – С. 37–40.

15. *Русак, В.Н.* Равномерная рациональная аппроксимация сопряженных функций / В.Н. Русак, И.В. Рыбаченко // Вестник БГУ. Сер. 1. Математика и информатика. – 2013. – Т. 3. – С. 83–86.

16. *Mardvilko, T.S.* Conjugate Functions on the Closed Interval and Their Relationship with Uniform Rational and Piecewise Polynomial Approximations / T.S. Mardvilko, A.A. Pekarskii // Math. Notes. – 2016. – Vol. 99, iss. 3. – P. 272–283.

17. *Ровба, Е.А.* Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышёва – Маркова / Е.А. Ровба, П.Г. Поцейко // Известия вузов. Математика. – 2020. – № 9. – С. 68–84.

18. *Русак, В.Н.* Об одном методе приближения рациональными функциями / В.Н. Русак // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1978. – Т. 3. – С. 15–20.

19. *Ровба, Е.А.* Рациональные интегральные операторы на отрезке / Е.А. Ровба // Вестник БГУ. Сер. 1. Мат. и инф. – 1996. – Т. 1, № 1. – С. 34–39.

20. *Ровба, Е.А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е.А. Ровба // Доклады АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 968–971.

21. *Takenaka, S.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolations / S. Takenaka // Japanese Journal of Mathematics. – 1925. – Vol. 2. – P. 129–145.

22. *Malmquist, F.* Sur la détermination d'une classe fonctions analytiques par leurs dans un ensemble donné de points / F. Malmquist // Compte Rendus Sixième Congrès math. scand. Kopenhagen, Denmark. – 1925. – Vol. 2, iss. 1. – P. 253–259.

23. *Джрбашян, М.М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М.М. Джрбашян // Известия Академии наук Армянской ССР. Сер. Физико-математическая. – 1956. – Т. 9, № 7. – С. 3–28.

24. *Смотрицкий, К.А.* О приближении дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля функций / К.А. Смотрицкий // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2002. – Т. 4. – С. 42–47.

25. *Patseika, P.G.* On one rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and approximation of Markov functions / P.G. Patseika, Y.A. Rouba, K.A. Smatrytski // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2020. – Vol. 2. – P. 6–27.

26. *Поцейко, П.Г.* Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 2. – С. 362–386.

27. *Поцейко, П.Г.* Сопряженный рациональный оператор Фурье – Чебышёва и его аппроксимационные свойства / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 3. – С. 44–60.

28. *Fejér, L.* Untersuchungen über Fouriersche Reihen / L. Fejér // Mathematische Annalen. – 1904. – Vol. 58. – P. 51–69.

29. *Lebesgue, H.* Sur les intégrales singulières / H. Lebesgue // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série. – 1909. – Tome 1. – P. 25–117.

30. *Bernstein, S.* Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné / S. Bernstein, Hayez, imprimeur des académies royales. – Bruxelles, 1912. – 104 p.

31. *Никольский, С.М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера / С.М. Никольский // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4, № 6. – С. 501–508.

32. *Zygmund, A.* On the degree of approximation of functions by Fejér means / A. Zygmund // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1945. – Vol. 51. – P. 274–278.

33. *Новиков, О.А.* Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера / О.А. Новиков, О.Г. Ровенская // Донбасский гос. пед. ун-т, Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 813–819.

34. *Никольский, С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами / С.М. Никольский // Труды математического ин-та им. В.А. Стеклова. – 1945. – Т. 15. – С. 3–76.

35. *Alexits, G.* Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction p'ériodique par les sommes de Fejér / G. Alexits // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. – 1952. – Vol. 3, iss. 1-2. – P. 29–42. – DOI: 10.1007/bf02146066.

36. *Ефимов, А.В.* О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера / А.В. Ефимов // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22, № 1. – С. 81–116.

37. Ефимов, А.В. Приближение сопряженных функций суммами Фейера / А.В. Ефимов // Успехи математических наук. – 1959. – Т. 14, № 1 (85). – С. 183–188.
38. Стечкин, С.Б. О приближении периодических функций суммами Фейера / С.Б. Стечкин // Тр. МИАН СССР. – 1961. – Т. 62. – С. 48–60.
39. Поцейко, П.Г. О суммах Фейера сопряженных рациональных рядов Фурье – Чебышёва и приближениях некоторых функций / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXII междунар. науч. конф., Смоленск, 28–29 мая 2021 г. – Смоленск, 2021. – С. 300–321.
40. Лунгу, К.Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К.Н. Лунгу // Математический сборник. – 1971. – Т. 86 (128), № 2 (10). – С. 314–324.
41. Лунгу, К.Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К.Н. Лунгу // Сибирский математический журнал. – 1984. – Т. 15, № 2. – С. 151–160.
42. Русак, В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. – Минск: БГУ, 1979. – 153 с.
43. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1989. – 480 с.
44. Евграфов, М.А. Асимптотические оценки и целые функции / М.А. Евграфов. – Москва: Наука, 1979. – 320 с.
45. Федорюк, М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды / М.В. Федорюк. – Москва: Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1987. – 544 с.
46. Бернштейн, С.Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть 1. / С.Н. Бернштейн. – Москва; Ленинград: Главная редакция общетехнической литературы, 1937. – 200 с.

Поступила в редакцию 14.02.2023.

Информация об авторах

Поцейко Павел Геннадьевич – к.ф.-м.н.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СОВМЕСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ФУРЬЕ

А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF CONSISTENT HERMITE – FOURIER APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, E.P. Kechko, T.M. Osnach

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Определены тригонометрические аналоги алгебраических аппроксимаций Эрмита – Паде – аппроксимации Эрмита – Фурье. В частности, доказана теорема о существовании аппроксимаций Эрмита – Фурье, получено достаточное условие их единственности, а также установлен критерий существования и единственности многочленов Эрмита – Фурье, являющихся числителем и знаменателем аппроксимаций Эрмита – Фурье, ассоциированных с произвольным набором из k тригонометрических рядов. При выполнении условий критерия установлен явный вид указанных многочленов.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, суммы Фурье, тригонометрические аппроксимации Паде, многочлены Эрмита – Паде, аппроксимации Эрмита – Паде.

Для цитирования: Старовойтов, А.П. Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита – Фурье / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 68–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_68. – EDN: VYPYFH

Abstract. The trigonometric analogues of algebraic Hermite – Padé approximations were defined, these are Hermite – Fourier approximations. In particular, the theorem of existence of Hermite – Fourier approximations was proved, the sufficient condition of their uniqueness was obtained, and the criterion of the existence and uniqueness of Hermite – Fourier polynomials, which are the numerator and denominator of Hermite – Fourier approximations associated with an arbitrary set of trigonometric series k . When the conditions of the criterion were met, the explicit type of the specified polynomials was established.

Keywords: trigonometric series, Fourier sums, trigonometric Padé approximants, Hermite – Padé polynomials, Hermite – Padé approximations.

For citation: Starovoitov, A.P. Existence and uniqueness of consistent Hermite – Fourier approximations / A.P. Starovoitov, E.P. Kechko, T.M. Osnach // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 68–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_68 (in Russian). – EDN: VYPYFH

Введение

В своей знаменитой работе [1], посвященной доказательству трансцендентности числа e , Ш. Эрмит впервые определил многочлены и рациональные дроби, ассоциированные с системой экспонент, которые в сложившейся терминологии принято называть многочленами и аппроксимациями Эрмита – Паде. В дальнейшем развитие эрмитовского направления в теории чисел существенный вклад внёс К. Малер [2]–[4]. Именно с появлением работ К. Малера началось интенсивное и систематическое изучение свойств многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде в связи с приложениями их в теории диофантовых приближений. В настоящее время теория аппроксимаций Эрмита – Паде превратилась в полне самостоятельный раздел комплексного анализа, а сами аппроксимации нашли разнообразные применения в различных областях теоретической

и прикладной математики, математической физики (см., например, [5]–[13]).

Многочлены Эрмита – Паде, ассоциированные с произвольной системой функций, определяются как решение следующей задачи [6, гл. 4; § 3, задача А]. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$ – набор, вообще говоря, формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (0.1)$$

с комплексными коэффициентами. Множество k -мерных мультииндексов, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ – это сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$.

Задача А. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_{n, \vec{m}}(z; \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leq m$ и

такие многочлены $P_{n_j}^j(z) = P_{n,\bar{m}}^j(z; \mathbf{f})$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$,
 $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$
 $R_{n,\bar{m}}^j(z) := Q_m(z)f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = l_j z^{n+m+1} + \dots$ (0.2)

Многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_1}^1(z), \dots, P_{n_k}^k(z)$, являющиеся решением задачи **A** (решение задачи **A** всегда существует), принято называть *многочленами Эрмита – Паде*, а рациональные дроби $\pi^j(z) = P_{n_j}^j(z)/Q_m(z)$, $j = 1, \dots, k$ – *аппроксимациями Эрмита – Паде* для набора **f**.

Для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные не равные нулю комплексные числа, явный вид решений задачи **A** найден Эрмитом [1] (см. также [6, гл. 4; § 2]). При $k=1$ (в этом случае **f** состоит из одной функции $f(z) = f_1(z)$) решение поставленной задачи было получено Паде [5], который нашел явный вид многочленов $Q_m(z)$, $P_n(z) := P_{n,m}^1(z; f)$ (их принято называть многочленами Паде, а дроби $\pi_{n,m}(z) = P_n(z)/Q_m(z)$ – аппроксимациями Паде для f): если $f_i := f_i^1$, $i = 0, 1, \dots$, то [5, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1]

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix}. \quad (0.3)$$

В общем случае решение задачи **A** получено в работах [14], [15], где, в частности, найдены необходимые и достаточные условия, при которых задача **A** имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) решение, и при выполнении этих условий получены явные детерминантные представления многочленов, при $k=1$ совпадающие с представлениями Паде (0.3).

В данной работе рассмотрим аналогичную задачу в тригонометрическом случае. Нашей целью является обобщение таких хорошо известных понятий, как частная сумма тригонометрического ряда, многочлен Паде – Фурье и аппроксимация Паде – Фурье функции, представленной тригонометрическим рядом, а также нахождение необходимых и достаточных условий, при которых соответствующие тригонометрические многочлены и аппроксимации существуют и единственны, получение для них детерминантных представлений, аналогичных алгебраическому случаю.

1 Многочлены и аппроксимации Эрмита – Фурье

Пусть $\mathbf{f}^t = (f_1^t, \dots, f_k^t)$ – набор, вообще говоря, формальных тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx), \quad (1.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

с действительными коэффициентами. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+$ и мультииндекс

$$\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$$

и рассмотрим следующую задачу:

Задача \mathbf{A}^t . Для набора тригонометрических рядов (1.1) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен

$$Q_m^t(x) = Q_{n,\bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t), \quad \deg Q_m^t \leq m$$

и такие тригонометрические многочлены $P_j^t(x) = P_{n_j, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg P_j^t \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$R_j^t(x) = R_{j, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) := Q_m^t(x)f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (1.2)$$

где \tilde{a}_l^j , \tilde{b}_l^j , как и коэффициенты тригонометрических многочленов $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ являются, вообще говоря, комплексными числами.

Очевидно, что многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ условиями (1.2) определяются не однозначно: если пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t := (P_1^t, \dots, P_k^t)$, удовлетворяет условиям (1.2), то для любого отличного от нуля комплексного числа λ новая пара $(\lambda Q_m^t, \lambda P^t)$, где $\lambda P^t := (\lambda P_1^t, \dots, \lambda P_k^t)$, также им удовлетворяет. На самом деле неединственность может быть и более существенной. Приведем подтверждающий пример.

Пример 1.1. Пусть $k=1$, $n=2$, $m=1$, а

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos lx,$$

где

$$a_l = \begin{cases} 2, & \text{если } l = 1, 2, 3; \\ 4, & \text{если } l = 4; \\ \frac{1}{l!}, & \text{если } l > 4. \end{cases}$$

Тогда любое решение задачи \mathbf{A}^t представимо в виде: $(\lambda Q_1^t, \lambda P_1^t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, где полиномы $Q_1^t(x)$, $P_1^t(x)$ в комплексной форме записи определяются равенствами

$$Q_1^t(x) = ae^{-ix} - \frac{a+b}{2} + be^{ix},$$

$$P_1^t(x) = \frac{a+3b}{2}e^{-i2x} + \frac{b-a}{2}e^{-ix} + a+b + \frac{a-b}{2}e^{ix} + \frac{3a+b}{2}e^{i2x},$$

в которых a и b – произвольные действительные числа не равные нулю одновременно, $i = \sqrt{-1}$.

Определение 1.1. Будем говорить, что задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя, т.е. для любых двух решений $(\overline{Q}_m, \overline{P}^t)$ и $(\widehat{Q}_m, \widehat{P}^t)$ задачи \mathbf{A}^t найдется такое комплексное число λ , что

$$(\overline{Q}_m, \overline{P}^t) = (\lambda \widehat{Q}_m, \lambda \widehat{P}^t).$$

Определение 1.2. Если пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t = (P_1^t, \dots, P_k^t)$, является решением задачи \mathbf{A}^t с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндексом

$$\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k,$$

то многочлены $Q_m^t(x), P_1^t(x), \dots, P_k^t(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^t(x) = \pi_{j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

будем называть, соответственно, многочленами Эрмита – Фурье и аппроксимациями Эрмита – Фурье (совместными аппроксимациями Эрмита – Фурье) для набора \mathbf{f}^t формальных степенных рядов (1.1).

Если задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение, то условиями (1.2) аппроксимации Эрмита – Фурье $\{\pi_j^t(x)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. В частности, при $k=1$ достаточное условие единственности решения задачи \mathbf{A}^t найдено в работе [16]: для единственности достаточно, чтобы определитель $\Delta^1(n, m) \neq 0$ (определение $\Delta^1(n, m)$ см. далее). При этом условии в [16] найдены явные детерминантные формулы для многочленов $Q_m^t(x), P_1^t(x)$, аналогичные формулам Паде (0.3). В случае $k=1$ определенные нами аппроксимации Эрмита – Фурье называют также *тригонометрическими аппроксимациями Паде* или *аппроксимациями Паде – Фурье* (см. [5], [16]).

Укажем на одно важное отличие тригонометрических $\pi_{n, m}^t(x) := P_1^t(x)/Q_m^t(x)$ и алгебраических $\pi_{n, m}(z)$ аппроксимаций Паде. Известно [6, гл. 2; § 1], что для любой пары индексов (n, m) , $n, m \in \mathbb{N}$, алгебраические аппроксимации Паде $\pi_{n, m}(z)$ определяются однозначно. В тригонометрическом случае это не так. Такое заключение можно сделать, опираясь на пример 1.1. Обозначим через $\pi_{2, 1}^{t, 1}(x)$ тригонометрическую аппроксимацию Паде из примера 1.1, которая соответствует параметрам $a = b = 1$, а через $\pi_{2, 1}^{t, 2}(x)$ – тригонометрическую аппроксимацию Паде, которая соответствует параметрам $a = 2$, $b = 0$. Тогда получим

$$\pi_{2, 1}^{t, 1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \neq \frac{-2 - 6i}{5} = \pi_{2, 1}^{t, 2}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий, при выполнении которых для набора \mathbf{f}^t и фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекса

$$\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k,$$

задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение и, следовательно, аппроксимации Эрмита – Фурье определяются однозначно.

2 Критерий единственности решения задачи \mathbf{A}^t

Запишем ряды (1.1) и полиномы $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ в комплексной форме

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, \quad j = 1, \dots, k; \quad (2.1)$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx}, \quad (2.2)$$

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx},$$

где $u_p, v_p^j \in \mathbb{C}$, а $c_0^j = \frac{a_0^j}{2}$, $c_l^j = \frac{a_l^j - b_l^j}{2}$, $c_{-l}^j = \overline{c_l^j}$, $j = 1, \dots, k$; $l = 1, 2, \dots$

Тогда равенства (1.2) примут вид

$$R_j^t(x) = \sum_{l=-n+m+1}^{+\infty} (\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx}). \quad (2.3)$$

Введём в рассмотрение матрицы и определители, элементами которых являются коэффициенты тригонометрических рядов $f_j^t(x)$, считая, без ограничения общности, что ряды (2.1) сходятся при любом $x \in \mathbb{R}$ и, тем самым, определяют систему $\mathbf{f}^t = \{f_1^t(x), \dots, f_k^t(x)\}$, состоящую из 2π -периодических функций, определенных на всей действительной прямой.

Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки

$$\mathbb{C}_l^j = (c_{l+m}^j \quad c_{l+m-1}^j \quad \dots \quad c_{l+1}^j \quad c_l^j \quad c_{l-1}^j \quad \dots \quad c_{l-m+1}^j \quad c_{l-m}^j),$$

$$j = 1, \dots, k;$$

а действительному числу x – матрицу-строку

$$E_m^t(x) = (e^{-imx} \quad e^{-i(m-1)x} \quad \dots \quad e^{-ix} \quad 1 \quad e^{ix} \quad \dots \quad e^{i(m-1)x} \quad e^{imx}).$$

Для заданного $j \in \{1, \dots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса

$$\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$$

в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m + 1)$

$$F_+^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \\ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{n_j+1}^j \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{n_j+m_j}^j & c_{n_j+m_j-1}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ c_{n_j+m_j-1}^j & c_{n_j+m_j-2}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \dots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{-n_j-1}^j \\ \mathbb{C}_{-n_j-2}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{-n_j-m_j}^j \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{-n_j+m-1}^j & c_{-n_j+m-2}^j & \dots & c_{-n_j-m-1}^j \\ c_{-n_j+m-2}^j & c_{-n_j+m-3}^j & \dots & c_{-n_j-m-2}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n_j+m-m_j}^j & c_{-n_j+m-m_j-1}^j & \dots & c_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение определитель порядка $2m+1$

$$D(n, \bar{m}; x) =$$

$$= \det \left[F_+^k \dots F_+^2 \ F_+^1 \ E_m^t(x) \ F_-^1 \ F_-^2 \ \dots \ F_-^k \right]^T :=$$

$$:= \det \begin{bmatrix} F_+^k \\ \vdots \\ F_+^1 \\ E_m^t(x) \\ F_-^1 \\ \vdots \\ F_-^k \end{bmatrix}.$$

В случае, если $m_j = 0$, считаем, что определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не содержит блок-матрицы F_{\pm}^j . Обозначим через $H_{n, \bar{m}}^t$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \bar{m}; x)$ после удаления в нём $(m+1)$ -ой строки $E_m^t(x)$. Если в определителе $D(n, \bar{m}; x)$ строку $E_m^t(x)$ заменить на строку \mathbb{C}_l^j , получим новый определитель $d_l^j(n, \bar{m})$. Обозначим через $\Delta^k(n, \bar{m})$ определитель порядка $2m$, полученный в результате вычёркивания в определителе $D(n, \bar{m}; x)$ $(m+1)$ -ой строки и $(m+1)$ -го столбца.

Определение 2.1. Индекс $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ будем называть слабо нормальным для системы \mathbf{f}^t , если ранг матрицы $H_{n, \bar{m}}^t$ максимальный, т. е. равен $2m$.

Определение 2.2. Систему \mathbf{f}^t назовём слабо совершенной, если все индексы $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ являются слабо нормальными для \mathbf{f}^t .

Теорема 2.1. Для того, чтобы для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ и системы \mathbf{f}^t

задача \mathbf{A}^t имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс (n, \bar{m}) был слабо нормальным для \mathbf{f}^t , т. е. $\text{rank } H_{n, \bar{m}}^t = 2m$.

Если $\text{rank } H_{n, \bar{m}}^t = 2m$, то при определенном выборе нормирующего числового множителя для решений задачи \mathbf{A}^t справедливы представления: для $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^t(x) = Q_{n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = D(n, \bar{m}; x), \quad (2.4)$$

$$P_j^t(x) = P_{n_j, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx}, \quad (2.5)$$

$$R_j^t(x) = R_{j, n, \bar{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) =$$

$$= \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \bar{m}) e^{-ipx}). \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть искомым многочлен $Q_m^t(x)$ имеет вид (2.2). После преобразований получаем

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=-m}^m u_p c_{l-p}^j \right) e^{ilx} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_l^j e^{ilx},$$

где

$$\tilde{c}_l^j = \sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Выберем коэффициенты u_p , $p = \overline{-m, m}$, многочлена $Q_m^t(x)$ так, чтобы

$$\tilde{c}_l^j = 0, \quad l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), \quad j = 1, \dots, k;$$

и положим

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} \tilde{c}_p^j e^{ipx}.$$

Очевидно, выбранные таким образом многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ удовлетворяют условиям (1.2) и (2.3). Остается исследовать совместность системы уравнений

$$\sum_{p=-m}^m c_{l-p}^j u_p = 0, \quad (2.8)$$

$$l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), \quad j = 1, \dots, k.$$

Систему (2.8) можно записать в матричной форме

$$H_{n, \bar{m}}^t \cdot u^T = \theta^T,$$

где $u = (u_m, \dots, u_1, u_0, u_{-1}, \dots, u_{-m})$ – матрица-строка неизвестных коэффициентов, а θ – матрица-строка порядка $1 \times (2m+1)$, все элементы которой нулевые. Поскольку система (2.8) является однородной и в ней число неизвестных $2m+1$ на единицу больше числа уравнений $2m$, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что у системы (2.8) имеется ненулевое решение. Более того, множество всех линейно независимых решений системы (2.8) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда

$\text{rank } H_{n, \bar{m}}^t = 2m$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Тем самым первая часть теоремы 2.1 доказана.

Докажем теперь равенства (2.4)–(2.6). Так как по предположению ранг матрицы $H_{n, \bar{m}}^t$ равен $2m$, то при некотором $s \in \{1, \dots, 2m+1\}$ определитель, полученный из элементов матрицы $H_{n, \bar{m}}^t$ в результате вычеркивания в ней s -го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $s = m+1$. Тогда, зафиксировав неизвестное u_0 , получим квадратную неоднородную систему

$$\sum_{p=-m}^{-1} c_{l-p}^j u_p + \sum_{p=1}^m c_{l-p}^j u_p = -c_l^j u_0, \quad l = \pm(n_j + 1), \dots, \pm(n_j + m_j), \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.9)$$

главный определитель которой $\Delta^k(n, \bar{m}) \neq 0$. Заметим, что $u_0 \neq 0$. В противном случае система (2.9), а значит и система (2.8) имела бы только нулевое решение. Поскольку определитель $\Delta^k(n, \bar{m}) \neq 0$, то система (2.9) имеет единственное ненулевое решение, и найти его можно по формулам Крамера:

$$u_p = \frac{\Delta_p^k(n, \bar{m})}{\Delta^k(n, \bar{m})}, \quad p = -m, \dots, m, \quad p \neq 0,$$

где $\Delta_p^k(n, \bar{m})$ – определитель, полученный из определителя $\Delta^k(n, \bar{m})$ заменой в нём p -го столбца на столбец свободных членов. Если положить $\Delta_0^k(n, \bar{m}) := u_0 \Delta^k(n, \bar{m})$, то

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx} = \sum_{p=-m}^m \frac{\Delta_p^k(n, \bar{m})}{\Delta^k(n, \bar{m})} e^{ipx}. \quad (2.10)$$

Разлагая определитель $D(n, \bar{m}; x)$ по элементам $(m+1)$ -ой строки и сравнивая с (2.10), делаем вывод, что

$$Q_m^t(x) = u_0 \frac{D(n, \bar{m}; x)}{\Delta^k(n, \bar{m})}. \quad (2.11)$$

Сопоставив (2.7) и (2.10), замечаем, что для отыскания \tilde{c}_p^j следует только в (2.10) e^{ipx} заменить на c_{l-p}^j . Учитывая введенные обозначения, получаем, что

$$\tilde{c}_p^j = u_0 \frac{d_p^j(n, \bar{m}; x)}{\Delta^k(n, \bar{m})}.$$

Следовательно, полином $P_j^t(x)$ и остаточный член $R_j^t(x)$ можно представить в виде

$$P_j^t(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n, \bar{m})} \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx}, \quad (2.12)$$

$$R_j^t(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n, \bar{m})} \times$$

$$\times \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \bar{m}) e^{-ipx}). \quad (2.13)$$

Умножая равенства (2.11)–(2.13) на нормирующий множитель $\Delta^k(n, \bar{m})/u_0$, получим (2.4)–(2.6). В случае, если бы вычеркивая в матрице $H_{n, \bar{m}}^t$ столбец с номером $s \neq m+1$ получили определитель отличный от нуля, то рассуждая аналогично, также пришли бы к представлениям (2.4)–(2.6). Теорема 2.1 доказана. \square

3 Замечания и следствия

Из представления (2.4) для многочлена $Q_m^t(x)$ следует, что компонента m_j мультииндекса \bar{m} определяет число коэффициентов тригонометрического ряда $f_j^t(x)$, которые учитываются при построении многочлена $Q_m^t(x)$. В частности, если $m_j = 0$, то определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не содержит блоки F_{\pm}^j и, следовательно, при построении многочлена $Q_m^t(x)$ тригонометрический ряд $f_j^t(x)$ не учитывается, а порядок мультииндекса \bar{m} определяется остальными ненулевыми компонентами.

Например, если $\bar{m} = (m_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то $m = m_1$ и тогда, как и в случае $k = 1$, при нахождении $Q_m^t(x)$ учитываются только коэффициенты ряда $f_1^t(x)$. Для такого мультииндекса формула (2.4) совпадает с формулой для знаменателя тригонометрической аппроксимации Паде $\pi_{n,m}^t(x)$ функции $f_1^t(x)$, которая доказана в [16] при более ограничительном условии $\Delta^1(n, \bar{m}) \neq 0$. В [16] также установлено, что при $k = 1$ и выполнении условия $\Delta^1(n, \bar{m}) \neq 0$ задача A^t имеет единственное решение.

До сих пор предполагалось, что мультииндекс \bar{m} является ненулевым. В случае, если $\bar{m} = (0, \dots, 0)$ – нулевой мультииндекс, решение задачи A^t очевидно: с точностью до числового множителя $Q_m^t(x) \equiv 1$, а $P_j^t(x)$ – n -ая частная сумма тригонометрического ряда $f_j^t(x)$.

При доказательстве теоремы 2.1 никак не учитывалось наше предположение о сходимости рядов (1.1). Поэтому все утверждения теоремы остаются в силе, если ряды (1.1) являются формальными. Отметим, что в этом случае тригонометрические ряды, содержащиеся в формулировке теоремы 2.1 (см. равенства (2.6)), также являются формальными.

Следует также сказать, что если индекс (n, \bar{m}) не является слабо нормальным для \mathbf{f}^t , то многочлены $Q_m^t(x), P_1^t(x), \dots, P_k^t(x)$, определяемые формулами (2.4) и (2.5), не являются решениями задачи \mathbf{A}^t . В частности, в примере 1.1 индекс $(2, 1)$ не является слабо нормальным, и если вычислять, например, многочлен $Q_1^t(x)$ по формуле (2.4), то получим $Q_1^t(x) \equiv 0$. Этот пример также показывает, что для мультииндекса (n, \bar{m}) , который не является слабо нормальным, коэффициенты многочленов $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ могут быть комплексными числами. Для слабо нормального мультииндекса это не так.

Следствие 3.1. Пусть мультииндекс (n, \bar{m}) является слабо нормальным для системы \mathbf{f}^t . Тогда многочлены $Q_m^t(x), P_1^t(x), \dots, P_k^t(x)$ являются действительными тригонометрическими многочленами.

Доказательство. По предположению коэффициенты тригонометрических рядов (1.1) являются действительными числами. Поэтому $c_{-p}^j = \bar{c}_p^j, j = 1, \dots, k; p = 1, 2, \dots$. В этом случае справедливы равенства

$$\overline{D(n, \bar{m}; x)} = D(n, \bar{m}; x), \quad \overline{d_p^j(n, \bar{m})} = d_{-p}^j(n, \bar{m}).$$

Чтобы убедиться в этом достаточно поменять местами равноотстоящие от краев строки и столбцы соответствующих определителей. Из предыдущих равенств и формул (2.4), (2.5) следует утверждение следствия 3.1. \square

Следствие 3.2. Для того, чтобы задача \mathbf{A}^t имела единственное решение для любого мультииндекса (n, \bar{m}) , необходимо и достаточно, чтобы система \mathbf{f}^t была слабо совершенной.

Доказательство. Для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}, \bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ следствие вытекает из теоремы 2.1, а для мультииндекса $(n, \bar{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}, \bar{m} = (0, \dots, 0)$ – из сделанного ранее замечания. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
2. *Mahler, K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I / K. Mahler // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1932. – Vol. 166, № 2. – P. 118–136.
3. *Mahler, K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, II / K. Mahler // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1932. – Vol. 166, № 3. – P. 137–150.
4. *Mahler, K.* Perfect systems / K. Mahler // Compositio Mathematica. – 1968. – Vol. 19, № 2. – P. 95–166.

5. *Бейкер, Дж. мл.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.

6. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988. – 256 с.

7. *Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены* / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66, вып. 6 (402). – С. 37–122.

8. *Artekarev, A.I.* Large n limit of Gaussian random matrices with external source, II / A.I. Artekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Communications in Mathematical Physics. – 2005. – Vol. 259, № 2. – P. 367–389.

9. *Beckermann, V.* How well does the Hermite – Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon? / V. Beckermann, V. Kalyagin, A.C. Matos, F. Wielonsky // Mathematics of Computation. – 2011. – Vol. 80, № 274. – P. 931–958.

10. *Аптекарев, А.И.* Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.

11. *Суетин, С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57, вып. 1 (343). – С. 45–142.

12. *Суетин, С.П.* Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2015. – Т. 70, вып. 5 (425). – С. 121–174.

13. *Chudnovsky, G.* On the method of Thue-Siegel / G. Chudnovsky // Ann. of Math. – 1983. – Vol. 117, № 2. – P. 325–382.

14. *Старовойтов, А.П.* О существовании и единственности многочленов Эрмита – Паде второго рода / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, Д.А. Волков // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 2 (39). – С. 92–96.

15. *Старовойтов, А.П.* О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Труды Московского математического общества. – 2022. – Т. 83, № 1. – С. 17–36.

16. *Лабыч, Ю.А.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

Поступила в редакцию 22.01.2023.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Кечко Елена Петровна – к.ф.-м.н., доцент
Оснач Татьяна Михайловна – аспирантка

ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ ЛЕГИРОВАНИЯ АЛЮМИНИЕМ НА СВОЙСТВА ПЛЕНОК ОКСИДА ТИТАНА-АЛЮМИНИЯ

Х.Т. Доан¹, Д.А. Голосов¹, Дж. Джанг², Н.А. Кананович³,
С.М. Завадский¹, С.Н. Мельников¹

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

²Сианьский политехнический университет

³Физико-технический институт НАН Беларуси, Минск

INFLUENCE OF ALUMINUM DOPING DEGREE ON THE PROPERTIES OF TITANIUM-ALUMINUM OXIDE FILMS

H.T. Doan¹, D.A. Golosov¹, J. Zhang², N.A. Kananovich³,
S.M. Zavadski¹, S.N. Melnikov¹

¹Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

²Xi'an Technological University

³Physico-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Проведены исследования характеристик пленок оксида титана-алюминия, нанесенных методом реактивного магнетронного распыления Ti-Al составных мишеней. Получены зависимости диэлектрической проницаемости, тангенса угла диэлектрических потерь, ширины запрещенной зоны, плотности тока утечки и напряженности поля пробоя от степени легирования пленок алюминием C_{Al} и концентрации кислорода в Ar/O₂ смеси газов в процессе нанесения Γ_{O_2} . Установлено, что увеличение C_{Al} приводит к снижению диэлектрических потерь и тока утечки, увеличению ширины запрещенной зоны и напряженности поля пробоя пленок. Однако при этом диэлектрическая проницаемость пленок снижается до значений менее 10.

Ключевые слова: реактивное магнетронное распыление, составная мишень, тонкие пленки, оксид титана-алюминия, элементный состав, диэлектрическая проницаемость, тангенс угла диэлектрических потерь, ток утечки, ширина запрещенной зоны.

Для цитирования: Влияние степени легирования алюминием на свойства пленок оксида титана-алюминия / Х.Т. Доан, Д.А. Голосов, Дж. Джанг, Н.А. Кананович, С.М. Завадский, С.Н. Мельников // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 74–82. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_74. – EDN: XACNAE

Abstract. The characteristics of titanium-aluminum oxide films deposited by reactive magnetron sputtering of Ti-Al compound targets have been studied. The dependences of the permittivity, dielectric loss tangent, band gap, leakage current density, and breakdown field strength on the degree of film doping with aluminum C_{Al} and the oxygen concentration in the Ar/O₂ gas mixture during the deposition of Γ_{O_2} are obtained. It has been established that an increase in C_{Al} leads to a decrease in dielectric losses and leakage current, an increase in the band gap and the strength of the breakdown field of the films. However, in this case, the dielectric constant of the films decreases to values less than 10.

Keywords: reactive magnetron sputtering, composite target, thin films, titanium-aluminum oxide, elemental composition, dielectric permittivity, dielectric loss tangent, leakage current, band gap.

For citation: Influence of aluminum doping degree on the properties of titanium-aluminum oxide films / H.T. Doan, D.A. Golosov, J. Zhang, N.A. Kananovich, S.M. Zavadski, S.N. Melnikov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 74–82. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_74 (in Russian). – EDN: XACNAE

Введение

На протяжении всего развития микроэлектроники в качестве основного диэлектрика кремниевых интегральных схем использовался оксид кремния SiO₂. Однако дальнейшее использование SiO₂ имеет ряд ограничений, которые связаны с низкой диэлектрической проницаемостью этого материала ($\epsilon \approx 3,9$) [1]. При уменьшении топологических размеров элементов (масштабировании) уменьшение длины канала комплементарных металл – оксид – полупроводник (КМОП)

транзисторов сопровождается уменьшением толщины подзатворного диэлектрика и при технологических нормах 60 нм толщину SiO₂ необходимо уменьшать до 1,2 нм [2]. При дальнейшем уменьшении толщины SiO₂ его изоляционные свойства значительно ухудшаются вследствие резкого увеличения туннельных токов утечки. Поэтому для перехода к меньшим технологическим нормам необходимо использовать материалы с более высокой диэлектрической проницаемостью (*high-k* диэлектрики), которые

позволяют увеличить толщину диэлектрика без ухудшения характеристик транзистора [3]. Большие значения диэлектрической проницаемости позволяют увеличивать толщину подзатворного диэлектрика без ухудшения характеристик КМОП транзистора.

В качестве основных материалов для замены диоксида кремния в КМОП приборах первоначально рассматривались простые оксиды металлов, такие как оксиды гафния HfO_2 , циркония ZrO_2 , титана TiO_2 , алюминия Al_2O_3 , тантала Ta_2O_5 [4]. Диэлектрическая проницаемость этой группы материалов обычно составляет $\epsilon = 8\text{--}50$ [4]. Из этих оксидов особое внимание привлекает оксид титана TiO_2 , поскольку имеет наибольшие значения диэлектрической проницаемости ($\epsilon = 30\text{--}80$). Однако оксид титана имеет малую ширину запрещенной зоны ($E_g = 3,3\text{--}3,4 \text{ эВ}$), обладает близким к нулю смещением зоны проводимости по отношению к Si, что приводит к высоким токам утечки. Кроме того, TiO_2 не обладает достаточной термической стабильностью и кристаллизуется при температурах $400\text{--}450^\circ \text{C}$, что в свою очередь приводит к увеличению тока утечки по границам зерен [5]. Это значительно ограничивает применимость TiO_2 в качестве подзатворного диэлектрика. С целью улучшения электрофизических свойств оксида титана было предложено легировать пленки TiO_2 другими *high-k* диэлектриками, обладающими высокой температурной стабильностью, большими шириной запрещенной зоны и смещением зоны проводимости [6]. Так, например, среди *high-k* диэлектриков Al_2O_3 обладает самой большой шириной запрещенной зоны ($E_g = 8,9 \text{ эВ}$) и большим смещением зоны проводимости по отношению к Si, высокой температурной стабильностью (кристаллизуется при температурах более 900°C). Поэтому было сделано предположение, что добавка оксида алюминия к оксиду титана может улучшить многие диэлектрические и структурные свойства пленок TiO_2 . Исследованию характеристик пленок оксида титана-алюминия $\text{Ti}_{1-x}\text{Al}_x\text{O}_y$ в последние годы посвящено ряд работ [7]–[11]. Для нанесения таких многокомпонентных тонких пленок применялись методы ВЧ магнетронного распыления [7], [8], атомно-слоевого осаждения [9], [10], золь-гель метод [11]. В этих статьях было показано, что легирование алюминием позволяет в 2–3 раза снизить токи утечки, увеличить ширину запрещенной зоны и повысить термостойкость пленок до $600\text{--}700^\circ \text{C}$. При этом диэлектрическая проницаемость поддерживалась на относительно высоком уровне ($\epsilon > 20$). Однако чаще всего в этих статьях рассматриваются свойства пленок при определенной концентрации алюминия. При этом не анализируется влияние степени легирования

алюминием на характеристики пленок $\text{Ti}_{1-x}\text{Al}_x\text{O}_y$. Так, например, оксид алюминия имеет сравнительно низкое значение диэлектрической проницаемости ($\epsilon = 7\text{--}10$) [12] и его большие концентрации в пленке могут привести к значительному снижению ϵ , что не позволит использовать пленки $\text{Ti}_{1-x}\text{Al}_x\text{O}_y$ в качестве диэлектрика с высокой диэлектрической проницаемостью.

Одним из перспективных способов формирования пленок многокомпонентных оксидов является метод реактивного магнетронного распыления составных мишеней, т. е. мишеней, состоящих из матрицы одного металла со вставками других металлов [13], [14]. Метод позволяет получать многокомпонентные пленки с произвольным количеством и содержанием элементов при использовании одного магнетрона. При этом практически отсутствуют публикации, в которых бы анализировались диэлектрические характеристики сложных оксидов, формируемых реактивным магнетронным распылением составных мишеней. Поэтому исследование диэлектрических свойств тонких пленок сложных оксидов, формируемых реактивным магнетронным распылением составных мишеней и, в частности, оксида титана-алюминия, является актуальной задачей.

Таким образом, целью работы было исследование влияния параметров процесса реактивного магнетронного распыления составной Ti-Al мишени и степени легирования алюминием на электрофизические характеристики пленок оксида титана-алюминия для определения оптимальной степени легирования с точки зрения использования пленок $\text{Ti}_{1-x}\text{Al}_x\text{O}_y$ в качестве подзатворного диэлектрика КМОП структур.

1 Эксперимент

Нанесение пленок оксида титана-алюминия производилось методом импульсного реактивного магнетронного распыления на установке магнетронного нанесения тонких пленок FERO-001 (рисунок 1.1). Установка выполнена на базе вакуумного поста ВУ-1Б. Камера вакуумной установки оборудована магнетронной распылительной системой МАРС.011-80 с мишенью $\varnothing 80 \text{ мм}$, ионным источником на основе торцевого холловского ускорителя ЕНРМ.100.005 и вращаемым подложкодержателем.

Для нанесения пленок оксида титана и оксида алюминия в качестве мишеней использовались диски из Al (99,9% чистоты), Ti (99,5% чистоты) $\varnothing 80 \text{ мм}$ и толщиной 5 мм. Для нанесения пленок оксида титана-алюминия использовались составные (мозаичные) мишени, состоящие из Ti основы и Al вставок (рисунок 1.2). Размеры Al вставок подбирались так, чтобы атомное содержание Al в наносимых пленках при магнетронном распылении в среде Ag составляло 10% для мишени TiAl-10, 20% для мишени TiAl-20, 40%

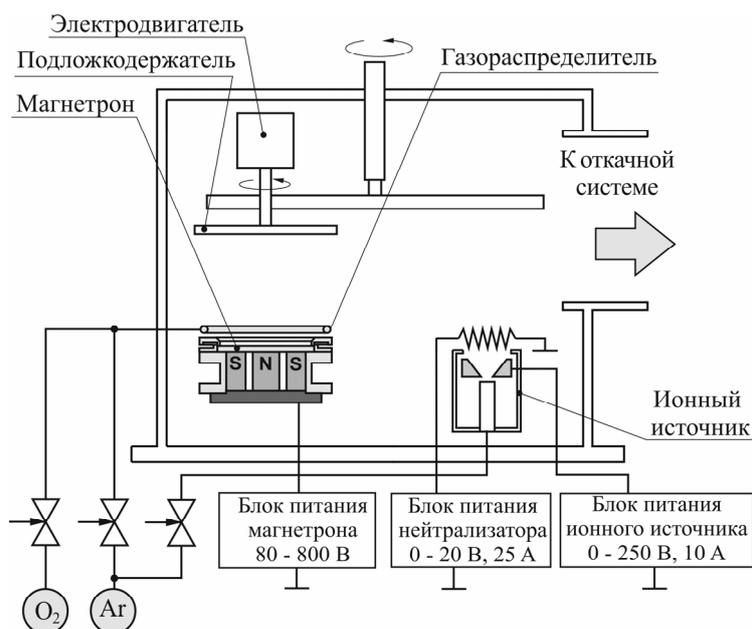


Рисунок 1.1 – Схема установки магнетронного нанесения тонких пленок FER0-001

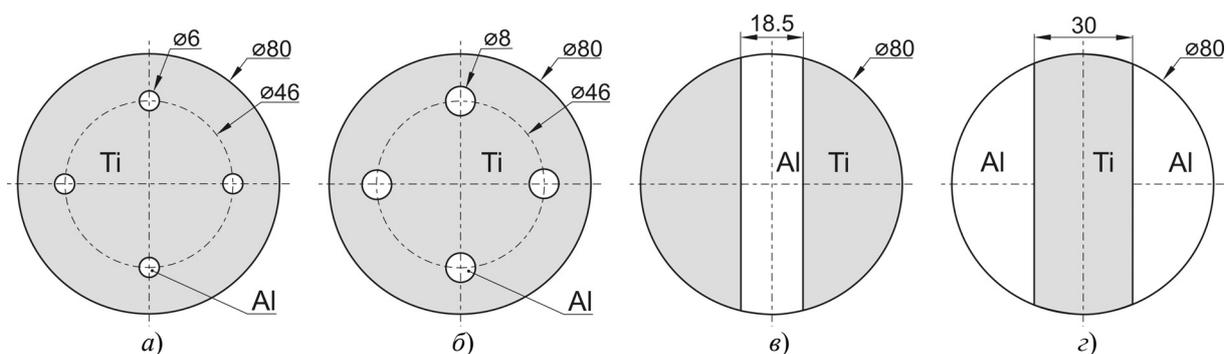


Рисунок 1.2 – Схема Ti-Al составных мишеней для реактивного магнетронного нанесения пленок оксида титана-алюминия: а) TiAl-10, б) TiAl-20, в) TiAl-40, г) TiAl-70

для мишени TiAl-40 и 70% для мишени TiAl-70. Расчет размеров Al вставок производился по методике, предложенной в статье [13], где описана модель расчета концентрации металлов в пленке при магнетронном распылении составной мишени. Поэтому далее в статье цифра в обозначении мишеней указывает на расчетное атомное содержание Al в пленке при распылении составной мишени в среде Ar. Составные мозаичные мишени TiAl-10 и TiAl-20 представляли собой Ti основу (99,5% чистоты) \varnothing 80 мм и толщиной 5 мм, в которую впрессованы четыре цилиндрические Al вставки (99,9% чистоты). Вставки \varnothing 6 мм или \varnothing 8 мм соответственно, были равномерно распределены по диаметру 46 мм (рисунок 1.2, а, б). Мишень TiAl-40 состояла из трех частей: центральной Al вставки шириной 18,5 мм и двух боковых Ti сегментов (рисунок 1.2, в). Мишень TiAl-70 также состояла из трех частей: центральной Ti вставки шириной 30 мм и двух боковых Al сегментов (рисунок 1.2, г).

В ходе экспериментов подложки из высоколегированного монокристаллического кремния *n*-типа ЭКЭС 0.01 (100) и полированного оптического кварца КУ-1 устанавливались на подложкодержатель на расстоянии 120 мм от поверхности мишени магнетрона. Смещение оси подложкодержателя относительно оси магнетрона составляло 100 мм. Скорость вращения подложки 24,5 об/мин. Камера вакуумной установки откачивалась до давления 10^{-3} Па и производилась ионная очистка подложек. Для этого в ионный источник подавался Ar. Поток аргона составлял 20 мл/мин. Время очистки, напряжение и ток разряда во всех экспериментах были постоянными и составляли $t = 2$ мин, $U_d = 90$ В, $I_d = 6,0$ А соответственно. Затем производилось нанесение пленок. Распыление Ti-Al мишени осуществлялось в Ar/O₂ смеси газов при общем расходе газов 60 мл/мин и содержании кислорода в смеси газов (Γ_{O_2}) от 0 до 46%. Во всех экспериментах использовался режим стабилизации тока разряда

магнетрона $I_t = 1,5$ А (частота следования импульсов $F = 10$ кГц, коэффициент заполнения 80%). Толщина нанесенных пленок составляла около 100 нм и регулировалась временем нанесения.

Толщина нанесенных пленок определялась с помощью оптического интерферометрического профилометра ПОИ-08. Исследования распределения элементного состава покрытий по толщине проводились методом атомной эмиссионной спектроскопии (AES) на оптико-эмиссионном спектрометре тлеющего разряда *GD Profiler 2 (HORIBA Jobin Yvon S.A.S.)*. Диэлектрические характеристики пленок измерялись на тестовых МОП структурах. Для этого на оксидную пленку методом ионно-лучевого распыления через маску наносился верхний Ni электрод. Площадь верхней обкладки конденсатора составляла $0,096$ мм². Емкость и тангенс угла диэлектрических потерь в диапазоне частот от 25 Гц до 1,0 МГц получены с использованием измерителя иммитанса E7-20. Значения диэлектрической проницаемости рассчитывались исходя из толщины слоя диэлектрика и емкости конденсаторной структуры. Пробивное напряжение МОП структур регистрировалось с использованием характеристикографа транзисторов TR-4805. При изменениях постоянное положительное напряжение прикладывалось к верхней обкладке конденсатора и повышалось от 0 до 50 В со скоростью 0,2 В/с. Напряжение пробоя U_{np} регистрировалось по резкому увеличению тока через конденсатор при ограничении тока 10 мА. Спектры оптического пропускания в диапазоне 200–900 нм получены с помощью спектрофотометра Проскан МС-121. Ширина запрещенной зоны пленок определялась по краю собственного оптического поглощения. Для этого пленки наносились на подложки из оптического кварца.

2 Результаты и обсуждение

Для установления соответствия между содержанием алюминия в пленках и их электрофизическими свойствами первоначально были проведены исследования элементного состава пленок, нанесенных при распылении Ti, Al и Ti-Al составных мишеней в среде Ar и Ar / O₂ рабочих газов. Данные о содержании алюминия в пленках C_{Al} при магнетронном распылении мишеней в среде Ar приведены в таблице 2.1. Как видно из

таблицы, C_{Al} в нанесенных пленках имело более низкие значения по сравнению с расчетными данными. Данное отклонение, по-видимому, связано с тем, что при расчетах принимались различные данные коэффициентов распыления титана и алюминия при энергии бомбардирующих ионов 300 эВ ($Y_{Al} = 0,65$, $Y_{Ti} = 0,33$) [15], [16]. В магнетронном разряде средняя энергия бомбардирующих мишень ионов составляет порядка 0,6 от напряжения разряда [17]. При распылении Ti, Al и Ti-Al составных мишеней напряжение разряда магнетрона изменялось от 296 до 348 В, что соответствует средней энергии ионов порядка $E_i = 180–210$ эВ. При таких энергиях ионов коэффициенты распыления алюминия и титана составляют соответственно $Y_{Al} = 0,35$ и $Y_{Ti} = 0,2$. При этом соотношение коэффициентов распыления алюминия и титана составляет $Y_{Al} / Y_{Ti} = 1,96$ при $E_i = 300$ эВ и $Y_{Al} / Y_{Ti} = 1,75$ при $E_i = 200$ эВ.

Исследования элементного состава пленок $Ti_{1-x}Al_xO_y$, нанесенных при реактивном распылении составных мишеней в среде Ar / O₂ рабочих газов [18], [19], показали, что соотношение алюминия и титана в пленках также зависело от содержания кислорода в камере. Так, для мишени TiAl-40 отношение атомного содержания алюминия и титана в пленках C_{Al} / C_{Ti} при увеличении Γ_{O_2} от 0 до 30% изменялось от 0,36 до 0,52 (рисунок 2.1) и данные процессы связаны с различием их скоростей окисления поверхности титановых и алюминиевых частей мишени. Однако далее в статье для упрощения мы будем обозначать пленки оксида титана-алюминия в соответствии с содержанием металлов при распылении в среде Ar.

Проведены исследования влияния параметров процесса реактивного магнетронного распыления и степени легирования алюминием на диэлектрические характеристики (диэлектрическую проницаемость ϵ , тангенс угла диэлектрических потерь $tg\phi$, ширину запрещенной зоны E_g , напряженность поля пробоя E_{np}) пленок оксида титана-алюминия. На рисунке 2.2 представлены частотные зависимости диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь пленок оксида титана, нанесенных при различной концентрации кислорода в Ar / O₂ смеси

Таблица 2.1 – Содержание алюминия в пленках и электрофизические характеристики пленок $Ti_{1-x}Al_xO_y$, нанесенных при реактивном распылении различных мишеней

Мишень	C_{Al} , ат. %	ϵ		$tg\phi$		J_d при $E = 5 \cdot 10^7$ В/м, А/м ²	$E_{np}, \cdot 10^8$ В/м	$E_g, эВ$
		1 кГц	1 МГц	1 кГц	1 МГц			
Ti	0	35–70	27–30	0,047–0,11	0,36–0,64	0,15–0,5	0,15–0,7	3,745–3,86
TiAl-10	10,2	30–42	17–30	0,03–0,095	0,3–0,63	$8 \cdot 10^{-4}$ –0,15	0,6–1,4	3,84–3,87
TiAl-20	16,1	25–40	20–23	0,03–0,09	0,22–0,63	$2 \cdot 10^{-4}$ –0,01	0,7–2,0	3,87–3,94
TiAl-40	35,6	8–36	6,2–11,8	0,028–0,085	0,08–0,125	$8 \cdot 10^{-5}$ – $2 \cdot 10^{-3}$	1,5–2,2	4,08–4,12
TiAl-70	65,3	7–28	6,6–12,6	0,015–0,06	0,08–0,1	$7 \cdot 10^{-5}$ – 10^{-3}	1,7–3,2	4,87–4,95
Al	100	7–12	5–8	0,0125–0,03	0,066–0,076	$6 \cdot 10^{-5}$ – $8 \cdot 10^{-4}$	2,5–8,0	8,9 [12]

газов. Формирование диэлектрических пленок оксида титана наблюдалось при Γ_{O_2} более 12,5%. Пленки характеризовались высокими значениями диэлектрической проницаемости, особенно на низких частотах (ϵ достигало 88). При этом наблюдалась сильная частотная дисперсия диэлектрической проницаемости. Для некоторых образцов при изменении частоты от 25 Гц до 1.0 МГц диэлектрическая проницаемость уменьшалась более чем в три раза. Пленки, нанесенные при низких концентрациях кислорода (до 20%), имели высокие значения тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg}\phi > 0,5$ (рисунок 2.2, б). При увеличении Γ_{O_2} отмечалось снижение диэлектрических потерь на средних частотах (100 Гц – 10 кГц) до 0,04–0,08, однако пленки характеризовались высокими потерями на низких (до 1 кГц) и высоких частотах (более 10 кГц). В этих диапазонах потери достигали 0,6–0,8.

При добавке алюминия наблюдалось снижение диэлектрической проницаемости и дисперсии частотных характеристик пленок. Также отмечалось снижение диэлектрических потерь, особенно на низких частотах. Так, при распылении мишени TiAl-40 и содержании кислорода в

Ag / O₂ смеси газов более 20% были получены пленки оксида титана-алюминия с $\text{tg}\phi$ менее 0,1 во всем диапазоне исследуемых частот (рисунок 2.3, б). Однако при этом диэлектрическая проницаемость не превышала 20 (рисунок 2.3, а).

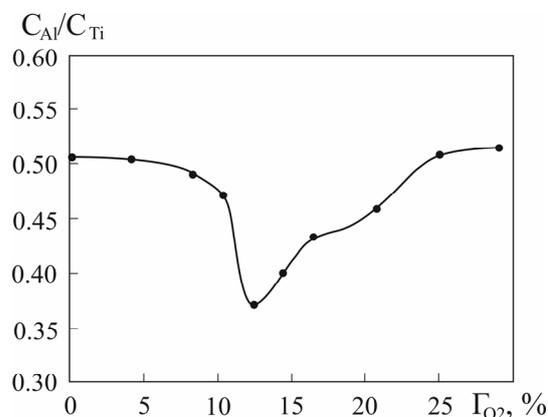


Рисунок 2.1 – Зависимость относительного атомного содержания металлов в пленках $Ti_xAl_{1-x}O_y$ от концентрации кислорода в Ag / O₂ смеси газов в процессе нанесения (мишень TiAl-40)

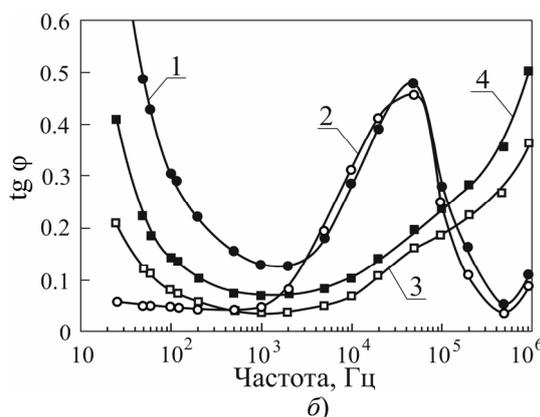
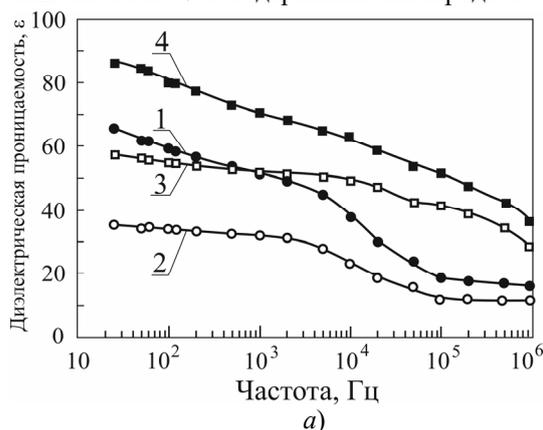


Рисунок 2.2 – Частотные зависимости диэлектрической проницаемости (а) и тангенса угла диэлектрических потерь (б) пленок оксида титана, нанесенных при различной концентрации кислорода в Ag / O₂ смеси газов: 1 – 12,5%, 2 – 16,7%, 3 – 20,8%, 4 – 33,3%

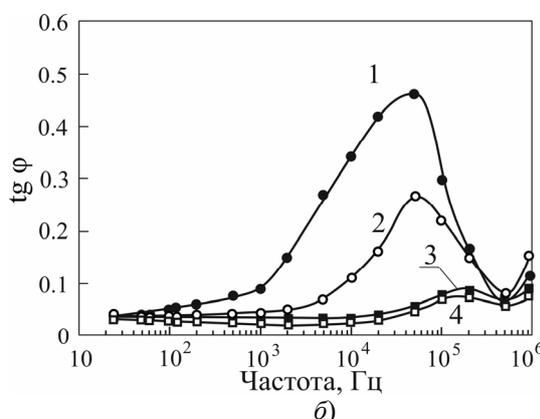
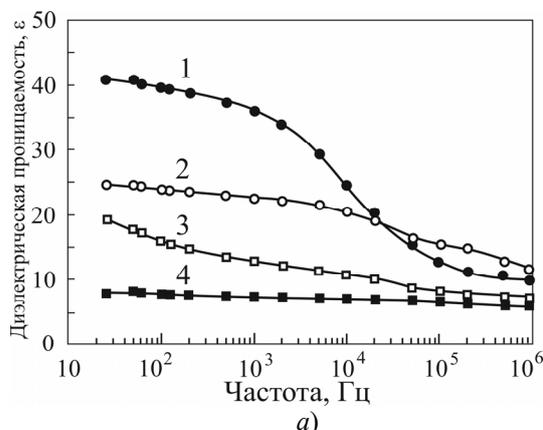


Рисунок 2.3 – Частотные зависимости диэлектрической проницаемости (а) и тангенса угла диэлектрических потерь (б) пленок $Ti_{0,64}Al_{0,36}O_y$, нанесенных при различной концентрации кислорода в Ag / O₂ смеси газов: 1 – 12,5%, 2 – 16,7%, 3 – 20,8%, 4 – 29,2%

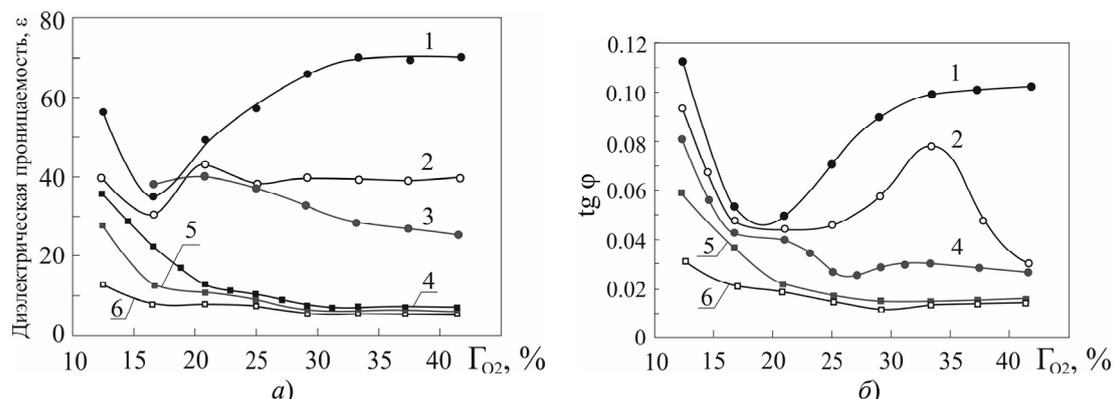


Рисунок 2.4 – Зависимости диэлектрической проницаемости (а) и тангенса угла диэлектрических потерь (б) на частоте 1 кГц от концентрации кислорода в Ag / O_2 смеси газов в процессе нанесения для пленок оксида титана-алюминия различного состава:
 1 – TiO_y , 2 – $Ti_{0,9}Al_{0,1}O_y$, 3 – $Ti_{0,84}Al_{0,16}O_y$, 4 – $Ti_{0,64}Al_{0,36}O_y$, 5 – $Ti_{0,35}Al_{0,65}O_y$, 6 – AlO_y

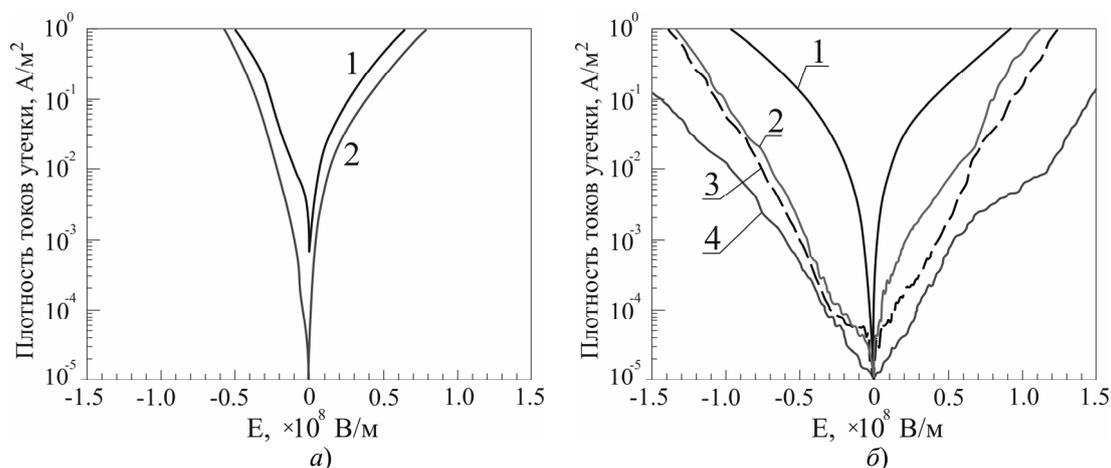


Рисунок 2.5 – Зависимость плотности токов утечки от напряженности электрического поля пленок TiO_y (а) и $Ti_{0,9}Al_{0,1}O_y$ (б), нанесенных при различной концентрации кислорода в Ag / O_2 смеси газов:
 1 – 16,7%, 2 – 20,8%, 3 – 33,3%, 4 – 41,7%

На рисунке 2.4 представлены зависимости диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь на частоте 1 кГц от концентрации кислорода в Ag / O_2 смеси газов для пленок оксида титана-алюминия, нанесенных при распылении различных мишеней. Как видно из рисунков, при увеличении содержания алюминия в пленках происходило монотонное уменьшение диэлектрических потерь. При C_{Al} более 65% тангенс угла на частоте 1 кГц был менее 0,02 (рисунок 2.4, б). Однако легирование алюминием приводило к снижению ϵ (рисунок 2.4, а). Так, при содержании алюминия в пленках более 36% и Γ_{O_2} более 20% диэлектрическая проницаемость не превышала 10.

Исследование вольтамперных характеристик пленок показало, что плотность тока утечки пленок J_L также имела сильную зависимость как от концентрации кислорода в Ag / O_2 смеси газов в процессе нанесения, так и от содержания алюминия в пленках. На рисунке 2.5, а представлена

зависимость J_L от напряженности электрического поля для пленок оксида титана, нанесенных при различном содержании кислорода в Ag / O_2 смеси газов. Для пленок, нанесенных при концентрации кислорода менее 20%, плотность тока утечки при нулевом смещении составляла $10^{-3}-10^{-1} A/m^2$ и резко увеличивалась до $1-10 A/m^2$ при напряженности электрического поля $E = 5 \cdot 10^7$ В/м. При Γ_{O_2} более 20% плотность тока утечки при нулевом смещении уменьшалась до $10^{-5} A/m^2$. При $E = 5 \cdot 10^7$ В/м плотность тока утечки составляла около $10^{-1} A/m^2$ и практически не зависела от Γ_{O_2} . При легировании пленок оксида титана алюминием плотность тока утечки при нулевом смещении уменьшалась до $10^{-5} A/m^2$, а при смещении наблюдалось снижение J_L до $10^{-4}-10^{-3} A/m^2$ при $E = 5 \cdot 10^7$ В/м (рисунок 2.5, б).

На рисунке 2.6 представлена зависимость плотности тока утечки при напряженности поля $E = 5 \cdot 10^7$ В/м от содержания кислорода в Ag / O_2 смеси газов для пленок различного состава.

Как видно из рисунка, плотность тока утечки пленок оксида титана во всем диапазоне концентраций кислорода была более 10^{-1} А/м². Даже небольшое легирование пленок оксида титана алюминием (пленки $Ti_{0,9}Al_{0,1}O_y$) приводило к снижению J_L до 10^{-3} – 10^{-2} А/м² при Γ_{O_2} более 20%. При увеличении степени легирования J_L далее уменьшалось и при C_{Al} более 36% кривые $J_L(\Gamma_{O_2})$ приближались к кривой оксида алюминия, для которого плотность тока утечки составляла $6 \cdot 10^{-5}$ – 10^{-3} А/м².

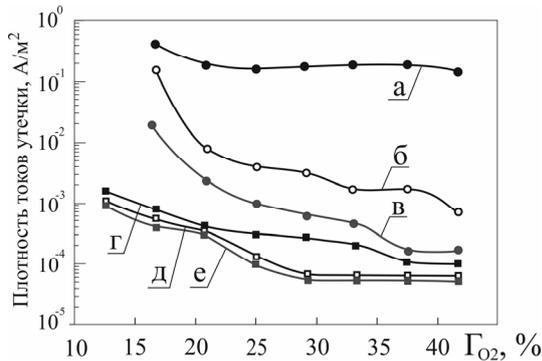


Рисунок 2.6 – Зависимость плотности токов утечки при напряженности электрического поля $5 \cdot 10^7$ В/м от содержания кислорода в Ar / O₂ смеси газов в процессе нанесения для пленок различного состава: а – TiO_y, б – Ti_{0,9}Al_{0,1}O_y, в – Ti_{0,84}Al_{0,16}O_y, г – Ti_{0,64}Al_{0,36}O_y, д – Ti_{0,35}Al_{0,65}O_y, е – AlO_y

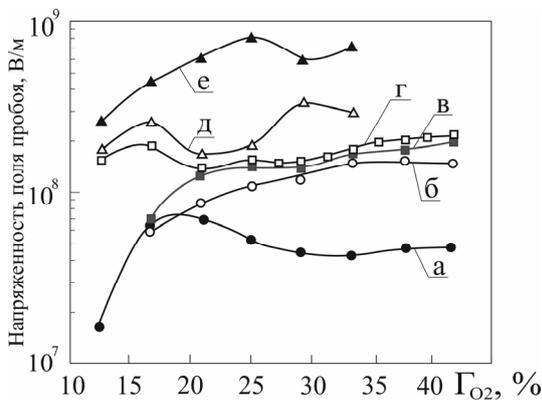


Рисунок 2.7 – Зависимость напряженности поля пробоя от концентрации кислорода в Ar / O₂ смеси газов в процессе нанесения пленок различного состава: а – TiO_y, б – Ti_{0,9}Al_{0,1}O_y, в – Ti_{0,84}Al_{0,16}O_y, г – Ti_{0,64}Al_{0,36}O_y, д – Ti_{0,35}Al_{0,65}O_y, е – AlO_y

На рисунке 2.7 представлены зависимости напряженности поля пробоя E_{np} пленок оксида титана-алюминия, нанесенных при различной концентрации кислорода в Ar / O₂ смеси газов.

Напряженность поля пробоя пленок оксида титана составляла $(0,15-1,0) \cdot 10^8$ В/м. Даже небольшое легирование пленок TiO_y алюминием (распыление мишени TiAl-10) приводило к повышению E_{np} до $(0,55-1,7) \cdot 10^8$ В/см. Однако при дальнейшем увеличении C_{Al} напряженность поля пробоя увеличивалась незначительно и составляла $(2,0-2,5) \cdot 10^8$ В/м для пленок $Ti_{0,35}Al_{0,65}O_y$. Для сравнения, E_{np} пленок оксида алюминия было в пределах от $2,5 \cdot 10^8$ до $8,0 \cdot 10^8$ В/м.

На рисунке 2.8 представлена зависимость ширины запрещенной зоны E_g от концентрации кислорода в Ar / O₂ смеси газов для пленок оксида титана-алюминия, нанесенных при распылении мишеней различного состава. Как видно из рисунка, для всех образцов ширина запрещенной зоны пленок практически не зависела от концентрации кислорода в камере при изменении Γ_{O_2} от 12,5 до 45,8%. Так, для пленок оксида титана ширина запрещенной зоны при изменении Γ_{O_2} от 12,5 до 45,8% изменялась от 3,75 до 3,86 эВ. При легировании пленок оксида титана алюминием до 36% (распыление мишеней TiAl-10, TiAl-20, TiAl-40) ширина запрещенной зоны увеличивалась незначительно и не превышала 4,1 эВ. И только при увеличении концентрации алюминия до 65% (мишень TiAl-70) наблюдалось увеличение ширины запрещенной зоны до 4,9 эВ. Определить ширину запрещенной зоны нанесенных пленок оксида алюминия по краю оптического поглощения не удалось, поскольку пленки имели низкие значения оптического поглощения в коротковолновой области спектра (на длине волны 190 нм оптическое пропускание составляло 50–60%). Однако в статьях приводятся значения E_g пленок оксида алюминия около 8,9 эВ [12].

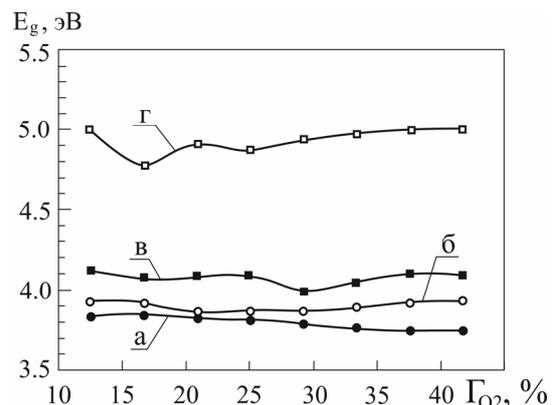


Рисунок 2.8 – Зависимость ширины запрещенной зоны от концентрации кислорода в Ar / O₂ смеси газов пленок различного состава: а – TiO_y, б – Ti_{0,84}Al_{0,16}O_y, в – Ti_{0,64}Al_{0,36}O_y, г – Ti_{0,35}Al_{0,65}O_y, е – AlO_y

В таблице 2.1 проведено сравнение электрофизических характеристик пленок оксида титана-алюминия, нанесенных при реактивном магнетронном распылении мишеней различного состава. Также в таблице приведено атомное содержание алюминия в пленках при распылении мишеней в среде Ar.

Анализ полученных результатов показывает, что легирование пленок оксида титана алюминием приводит к снижению диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь как на высоких, так и на низких частотах. При этом в диапазоне частот от 10 Гц до 1.0 МГц наблюдается уменьшение дисперсии диэлектрической проницаемости. Однако значительное снижение диэлектрических потерь ($\text{tg}\phi < 0,1$) достигается только при высоком содержании алюминия в пленках $\text{Ti}_{1-x}\text{Al}_x\text{O}_y$ ($C_{\text{Al}} > 65\%$). При таком содержании алюминия ϵ снижается до значений менее 10, что сводит на нет все преимущества оксида титана как диэлектрика с высокой диэлектрической проницаемостью. Также легирование алюминием позволяет уменьшить ток утечки, увеличить ширину запрещенной зоны и пробивное напряжение пленок. Значительное увеличение напряженности поля пробоя до 10^8 В/м наблюдается при содержании алюминия более 10%, а снижение J_L до 10^{-3} А/м² – только при $C_{\text{Al}} > 35\%$. Однако при увеличении содержания алюминия до 35% E_g увеличивается незначительно, с 3,8 до 4,1 эВ. И только при C_{Al} около 65% ширина запрещенной зоны увеличивается до 4,9 эВ. Для сравнения, ширина запрещенной зоны пленок оксида алюминия составляет $E_g = 8,9$ эВ [12]. Из данного анализа можно сделать вывод, что при выборе степени легирования алюминием пленок $\text{Ti}_{1-x}\text{Al}_x\text{O}_y$ первоначально необходимо определиться с совокупностью наиболее важных электрофизических характеристик, которые требуется получить, и выбирать степень легирования пленок, исходя из комплекса возможных характеристик.

Заключение

Проведены исследования электрофизических характеристик пленок оксида титана-алюминия при различной степени легирования алюминием. Установлено, что метод реактивного магнетронного распыления составных мишеней позволяет в широких пределах (от 0 до 100 %) изменять содержание алюминия в пленках. Увеличение содержания алюминия в пленках $\text{Ti}_{1-x}\text{Al}_x\text{O}_y$ от 0 до 65% приводит к снижению тангенса угла диэлектрических потерь с 0,11 до 0,06 на частоте 1 кГц, уменьшению тока утечки с 0,5 до 10^{-3} А/м² при $E = 5 \cdot 10^7$ В/м, увеличению напряженности поля пробоя с $0,7 \cdot 10^8$ до $3,2 \cdot 10^8$ В/м. Однако увеличение степени легирования

алюминием от 0 до 65% приводит к резкому уменьшению диэлектрической проницаемости пленок с 35–70 до 7–12 на частоте 1 кГц. При этом ширина запрещенной зоны пленок $\text{Ti}_{1-x}\text{Al}_x\text{O}_y$ увеличивается незначительно с 3,86 до 4,95 эВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gate dielectric scaling in MOSFETs device* / K.H. Jing [et al.] // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1733. – P. 020073.
2. *Review and perspective of high-k dielectrics on silicon* / S. Hall [et al.] // J. of Telecommunications and Information Technology. – 2007. – Vol. 2. – P. 33–43.
3. *Robertson, J.* High-K materials and metal gates for CMOS applications / J. Robertson, R.M. Wallace // Materials Science and Engineering R. – 2015. – Vol. 88. – P. 1–41.
4. *Wallace, R.M.* High-k gate dielectric materials / R.M. Wallace, G. Wilk // MRS Bull. – 2002. – Vol. 27, № 3. – P. 192–197.
5. *Growth of high-dielectric-constant TiO₂ films in capacitors with RuO₂ electrodes* / K. Fröhlich [et al.] // Electrochem. Solid-State Lett. – 2008. – Vol. 11, № 6. – P. G19–G21.
6. *Kim, Y.S.* Nanolaminated Al₂O₃–TiO₂ thin films grown by atomic layer deposition / Y.S. Kim, S.J. Yun // J. Cryst. Growth. – 2005. – Vol. 274, № 3–4. – P. 585–593.
7. *Sung, Y.-M.* Sputter deposition and surface treatment of TiO₂ films for dye-sensitized solar cells using reactive RF plasma / Y.-M. Sung, H.-J. Kim // Thin Solid Films. – 2007. – Vol. 515, № 12. – P. 4996–4999.
8. *Surface morphology of α -SiC coatings deposited by RF magnetron sputtering* / H. Tang [et al.] // Surface & Coatings Technology. – 2005. – Vol. 197, № 2–3. – P. 161–167.
9. *Lim, J.W.* Characteristics of Al_xTi_{1-x}O_y films grown by plasma-enhanced atomic layer deposition / J.W. Lim, S.J. Yun, H.-T. Kim // J. Electrochem. Soc. – 2007. – Vol. 154, № 11. – P. G239–G243.
10. *Структурно-химические и электрофизические свойства тонких пленок Ti_{0,3}Al_{0,7}O_y, полученных методом атомно-слоевого осаждения* / А.П. Алехин [и др.] // Труды МФТИ. – 2012. – Т. 4, № 3. – С. 64–73.
11. *High-k titanium-aluminum oxide dielectric films prepared by inorganic-organic hybrid solution* / J. Peng [et al.] // J. Sol-Gel Sci. Technol. – 2014. – Vol. 71, № 3. – P. 458–463.
12. *Avis, C.* High-performance solution processed oxide TFT with aluminum oxide gate dielectric fabricated by a sol-gel method / C. Avis, J. Jang // J. Mater. Chem. – 2011. – Vol. 21. – P. 10649–10652.

13. Голосов, Д.А. Расчет элементного состава тонкопленочных слоев при магнетронном распылении мозаичных мишеней / Д.А. Голосов, С.Н. Мельников, А.П. Достанко // Электронная обработка материалов. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 63–72.

14. *Thermal conductivity of yttria-stabilized zirconia thin films prepared by magnetron sputtering* / J. Nakano [et al.] // J. Ceram. Soc. of Jap. – 2004. – Vol. 112. – P. S908–S911.

15. *Handbook of Thin Film Deposition* / Ed. K. Seshan, D. Schepis. – Elsevier Inc., 2018. – P. 195–230.

16. *Laegreid, N.* Sputtering yields of metals for Ar^+ and Ne^+ ions with energies from 50 to 600 eV / N. Laegreid, G.K. Wehner // J. Appl. Phys. – 1961. – Vol. 32. – P. 365–369.

17. *Goeckner, M.J.* Monte Carlo simulation of ions in a magnetron plasma / M.J. Goeckner, J.A. Goree, T.E. Sheridan // IEEE Trans. Plasma. Sci. – 1991. – Vol. 19, № 2. – P. 301–308.

18. Влияние способа подачи рабочих газов в камеру на процессы реактивного магнетронного распыления Ti-Al составной мишени / Х.Т. Доан [и др.] // ЖТФ. – 2023. – Т. 93, № 3. – С. 409–416.

19. *Применение оптической эмиссионной спектроскопии для прогнозирования состава пленок при реактивном магнетронном распылении Ti-Al составных мишеней* / Х.Т. Доан [и др.] // Электронная обработка материалов. – 2023. – № 59 (1). – С. 60–69.

Исследования выполнены в рамках совместных научных проектов № T22КИТГ-023 (2022YFE0123400) и № T22КИТГ-027 (2022YFE0122900) при финансовой поддержке БРФФИ и Министерства науки и технологии КНР.

Поступила в редакцию 22.03.2023.

Информация об авторах

Доан Хоанг Тхе – аспирант

Голосов Дмитрий Анатольевич – к.т.н., доцент

Джанг Джин – к.т.н., доцент

Кананович Никита Александрович – м.л.н.с

Завадский Сергей Михайлович – к.т.н., доцент

Мельников Сергей Николаевич – к.т.н.

УДК 004.896

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_83

EDN: ZEKWIK

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ЦИКЛА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ПО УПРАВЛЕНИЮ

В.С. Смородин, В.А. Прохоренко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

STABILIZATION OF TECHNOLOGICAL CYCLE PARAMETERS WHEN CONSTRUCTING FEEDBACK CONTROL

V.S. Smorodin, V.A. Prokhorenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предлагается подход к решению задачи стабилизации параметров функционирования технологического цикла на основе использования нейросетевых методов моделирования управляемых параметров технологических операций. Рассмотрены современные подходы к реализации решений подобных задач, показана процедура создания гибридной интеллектуальной системы адаптивного управления. Предложенный подход позволяет автоматизировать процессы создания и использования гибридных интеллектуальных компьютерных систем при реализации инновационных решений в сфере управления транспортными потоками, автоматизации наиболее развитых отраслей промышленности и сельского хозяйства.

Ключевые слова: *нейросетевые методы, стабилизация параметров, адаптивное управление, модели нейрорегуляторов.*

Для цитирования: *Смородин, В.С. Стабилизация параметров технологического цикла при построении обратных связей по управлению / В.С. Смородин, В.А. Прохоренко // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 83–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_83. – EDN: ZEKWIK*

Abstract. An approach for solving problem of stabilization of technological cycle operation parameters is proposed. The approach is based on applying the methods of neural network modeling of controlled parameters of technological operations. Modern approaches for solving such problems are considered; the procedure of hybrid intellectual adaptive control system creation is demonstrated. The proposed approach allows automating processes of development and operation of hybrid intellectual computer systems when implementing innovative solutions in the field of traffic flows control, automation in the most advanced branches of industry and agriculture.

Keywords: *neural network methods, parameters stabilization, adaptive control, neuroregulator models.*

For citation: *Smorodin, V.S. Stabilization of technological cycle parameters when constructing feedback control / V.S. Smorodin, V.A. Prokhorenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 83–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_83 (in Russian). – EDN: ZEKWIK*

Введение

Интеллектуальные информационные технологии в настоящее время представляют собой одну из наиболее перспективных и быстро развивающихся научных областей прикладной математики. Основное внимание при этом уделяется вопросам дальнейшего развития прикладных научных исследований производственной направленности, которые основываются на использовании моделей искусственных нейронных сетей и разработке нейросетевых методов для решения задач оптимизации управления автоматизированными технологическими комплексами.

Необходимо подчеркнуть, что современные достижения в области цифровизации технологических процессов и цифровой трансформации производственной деятельности обеспечивает мощный импульс для интенсивного развития современных технологий, включая продвижение искусственного интеллекта и нейросетевого

моделирования в области выполнения актуальных разработок и создания интеллектуальных компьютерных систем оптимизации управления нового поколения.

На современном этапе развития автоматизированных систем управления на передний план выходит совершенствование проектирования и проектного моделирования устройств управления технологическим циклом производства, разработка гибких алгоритмов учета дестабилизирующих факторов в режиме реального времени для систем принятия управляющих решений, рекомендательных и экспертных систем.

Поэтому заслуживает особого внимания проблема разработки интеллектуальных систем управления, способных обеспечить существенное снижение чувствительности параметров технологического цикла к воздействию дестабилизирующих факторов, в том числе случайных внешних возмущений и управляющих воздействий.

Вопросы стабилизации параметров технологического процесса при управлении автоматизированным производством связаны, как известно, с проблемой адаптации управления на подобные дестабилизирующие факторы.

В связи с происходящим в настоящее время переходом от теоретических разработок к конкретному практическому применению систем с искусственным интеллектом, а также развитием фундаментальных и прикладных аспектов их использования, разработка интеллектуальных компьютерных систем адаптации управления и построение алгоритмов обратных связей, стабилизирующих параметры технологического цикла в режиме реального времени, является актуальной.

1 Стабилизация параметров функционирования технологического цикла

Одной из основных задач оперативного управления технологическим циклом (ТЦ) производства в режиме реального времени является автоматический контроль параметров технологического процесса (ТП) с целью выработки управляющих воздействий, предотвращающих переход системы в критическое состояние. Таким является выход управляемых параметров технологической операции за пределы допустимых значений, а также сбои и отказы используемого оборудования.

Одной из основных причин неустойчивости управляемых параметров технологического цикла является наличие случайных внешних возмущений и управляющих воздействий в процессе его реализации, в связи с чем возникает задача разделения множества состояний технологических операций на состояния, характеризующие нормальное течение процесса, и состояния, требующие вмешательства для стабилизации «возмущенных» состояний.

Для стабилизации переменных параметров управления, зависящих от состояния оборудования в условиях случайных возмущений, необходимо автоматизировать их регулирование, обеспечить расчет и построение оптимального графика проведения профилактических работ. В зависимости от методов стабилизации параметров и их качественных характеристик могут быть использованы различные подходы к решению задачи стабилизации состояний технологического цикла.

Основные способы стабилизации параметров технологических операций с точки зрения обеспечения эффективного решения реальных производственных задач управления широко известны [1]. Однако рост научных исследований в области использования нейронных сетей при управлении технологическим процессом производства требует новых решений, объединяющих существующие современные подходы к решению практических задач стабилизации параметров и адаптации управления.

2 Особенности стабилизации параметров функционирования технологических операций

Соблюдение заданных технологических параметров функционирования производственного процесса является основой выпуска качественно готового продукта, в связи с чем возникает задача стабилизации параметров функционирования технологических операций, то есть определения состояний, в котором характеристики технологических операций, образующих данный процесс, остаются нечувствительными к воздействию дестабилизирующих факторов.

Направление конвергенции работ в области создания интеллектуальных систем в настоящее время требует разработки соответствующего программного обеспечения с элементами когнитивных способностей на основе семантически совместимых технологий искусственного интеллекта. Концепция Industry 4.0 предполагает построение единой онтологической модели предприятия, включающей в себя описание оборудования и технологических процессов производства. Существующие интеллектуальные технологии предоставляют средства для построения таких моделей, обеспечивают возможность построения «цифрового двойника» предприятия на основе формализованного описания соответствующей предметной области. Полученная онтологическая модель, таким образом, может выступать основой интеграции востребованных интеллектуальных решений по автоматизации и информационному обеспечению производственной деятельности.

Рассматривается новый подход к построению системы адаптивного управления технологическим процессом производства в виде реализации алгоритмов соответствующих регуляторов на основе онтологии предметной области «технологические процессы производства с вероятностными характеристиками».

В основу функционирования предлагаемой системы положено применение нейрорегуляторов. Формализация контура управления и математические модели объекта исследования основываются на результатах научных разработок авторов в области имитационного моделирования сложных технических систем [2].

Такая реализация позволяет обеспечить возможность интеграции предлагаемого решения с другими разработками, программными средствами предприятия для обеспечения построения интеллектуальных систем автоматизированного управления, рекомендательных систем и систем поддержки принятия решений, систем информационного обеспечения персонала предприятия.

3 Стабилизация управляемых параметров на основе нейросетевых методов

При осуществлении процессов управления технологическим циклом производства часто

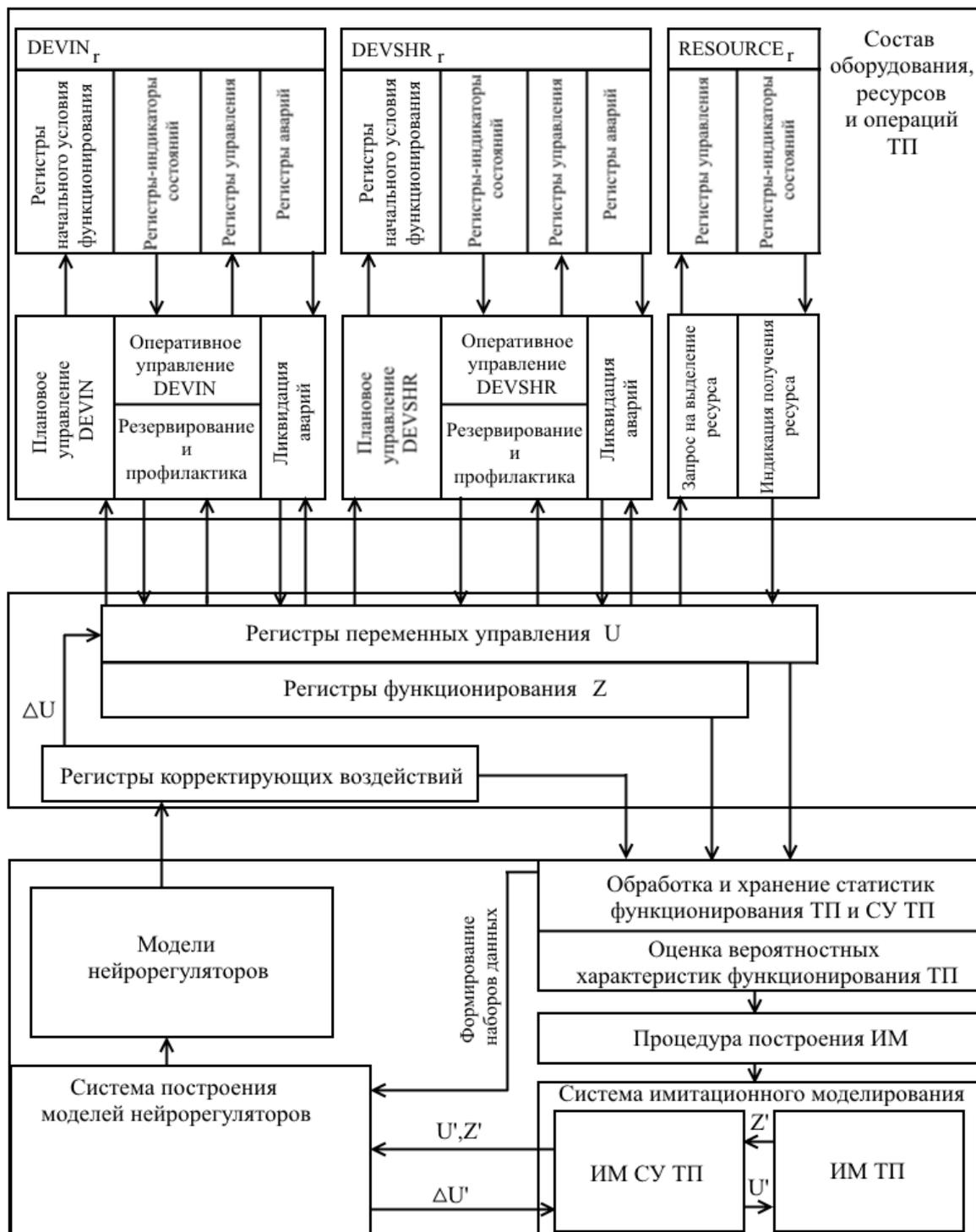


Рисунок 3.1 – Схема взаимодействия компонентов компьютерной системы адаптивного управления

возникает потребность комплексного учета многообразия факторов воздействия на технологический процесс случайных сбоев используемого оборудования, а также воздействий внешней среды, включая и человеческий фактор. В этой связи является актуальной реализация адаптивного управления процессом производства (с обратными связями по управлению) в составе технических средств управления технологическим

циклом и программного обеспечения адаптации процесса управления на случайные внешние возмущения в ходе его реализации. Адаптивное управление технологическим циклом понимается как способность системы управления адекватно реагировать на внешние возмущения и штатные управляющие воздействия изменением соответствующих параметров управления в процессе функционирования системы. Под оптимальными

управлением понимается формализованная нейронной сетью структура адаптивного управления технологическим циклом, построенная в опорных узлах вероятностной сетевой графовой структуры (СГС) или модели полумарковской сети (ПМС) в рамках заданного критерия качества.

Формализация процесса управления технологическим циклом производства с вероятностными характеристиками основана на использовании в структуре контура управления специальных сигналов и стандартных элементов, которые в дальнейшем участвуют в формировании регулирующих воздействий непосредственно на используемое оборудование либо выдачи рекомендаций по выполнению определенных действий операторами-людьми. Данные, регулирующие воздействия (исполнение данных рекомендаций) могут приводить к изменениям параметров функционирования системы. Воздействия формируются в моменты изменения состояния ТЦ. Необходимость оперативного изменения параметров функционирования системы возникает вследствие наличия внешних факторов; человеческого фактора, существования возможности возникновения отказов оборудования и аварий. Система управления ТП связана с оборудованием ТП посредством средств программно-аппаратного сопряжения и в процессе реализации ТП получает сигналы о его состоянии. Изменение состояния ТП приводит к изменению состояния системы управления. Для построения контроллера системы управления могут быть использованы статистические данные функционирования ТЦ, собранные с применением соответствующих средств аппаратно-программного сопряжения, либо может быть осуществлено использование имитационного моделирования функционирования ТЦ на базе модели ТЦ, построенной в соответствии с изложенной онтологией для технологических процессов с вероятностной природой (ВТП).

На рисунке 3.1 показана структура связей системы управления с обратными связями при наличии регуляторов, которая стабилизирует параметры управляемых переменных в заданных диапазонах значений.

Регуляторы системы адаптивного управления строятся на основе нейросетевых методов. Построение моделей нейрорегуляторов осуществляется на базе алгоритмов, использующих собранные статистики функционирования ТП и его системы управления, а также систему имитационного моделирования ТП и СУ ТП.

Современный анализ состояния разработок в области исследования управляемых производственных систем показывает, что проблема определения параметров функционирования подобных объектов исследования в режиме реального времени возникает прежде всего при необходимости производства сложных технических

изделий, требующих точности их изготовления и высокой производительности труда.

При этом в рамках решения многокритериальной задачи оптимизации управления предъявляются строгие требования к качеству и алгоритму выполнения производственного процесса, минимизации влияния человеческого фактора на качество реализации технологического цикла производства, исключению возникновения аварийных ситуаций техногенного характера. Подобная ситуация характерна для роботизированных производственных систем, работающих под управлением программно-аппаратного контроллера, который администрирует работу системы управления технологическим циклом в соответствии с заложенными программами.

4 Разработка моделей нейрорегуляторов для решения задач адаптивного управления

В области нейросетевых методов предложены различные схемы решения задач управления динамическими объектами [3]–[5]. Среди них можно отметить схемы управления с эталонной моделью, подразумевающие построение нейрорегулятора на базе существующего прототипа; схемы инверсного управления, в рамках которых нейрорегулятор обучается моделированию инверсной динамики объекта управления; адаптивно-критические схемы, в рамках которых нейрорегулятор обучается на основе некоторого функционала оценки качества управления.

Состояния объекта управления (системы управления ТП) описываются набором переменных управления $\{U\}$ и набором переменных $\{Z\}$, описывающих состояния ВТП. При рассмотрении задач адаптации управления возможен переход к геометрической интерпретации: осуществление адаптации управления приводит к построению некоторой траектории в фазовом пространстве состояний системы управления. Таким образом можно осуществить переход к задаче поиска оптимальной в некотором (геометрическом) смысле траектории [6] с целью оптимизации политики выбора адаптации управления. На рисунке 4.1 показан пример фазового пространства (фазовой плоскости) системы управления, характеризуемой сигналом управления U_1 и состоянием объекта управления Z_1 , с реализацией трех траекторий во время осуществления управления.

С целью обеспечения совместимости и возможности интеграции разработанного метода с другими средствами, может быть использована формализация контура управления на базе многоагентного подхода в рамках применения современных технологий [1].

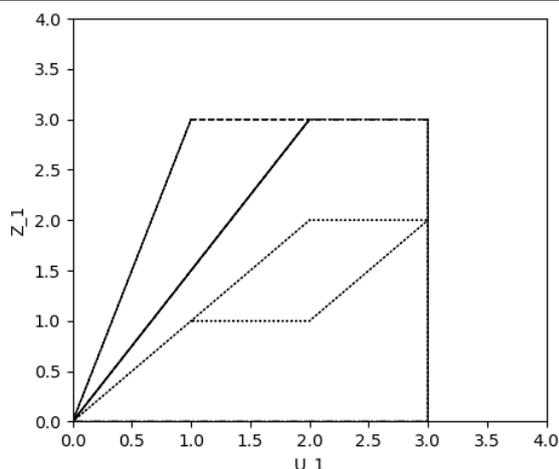


Рисунок 4.1 – Пример траекторий на фазовой плоскости состояний системы управления

5 Примеры реализации систем адаптации управления

Примером решения задачи адаптации управления технологическим процессом может служить задача поиска оптимальной стратегии обслуживания устройств оборудования ТП [7]. Построение нейрорегулятора происходит с использованием адаптивно-критической схемы.

В качестве среды для обучения модели нейрорегулятора в данном случае задействуется система имитационного моделирования, которая позволяет на основании собранных статистик функционирования ТП и его системы управления построить соответствующие имитационные модели.

Для моделирования функционирования устройств оборудования ТП используются следующие характеристики [1]:

- распределение времени $\Phi_{1r}(\tau_{Nor})$ безотказного функционирования устройства r ;
- распределение времени $\Phi_{2r}(\tau_{RO})$ восстановления работоспособности после простого отказа устройства r ;
- распределение времени $\Phi_{3r}(\tau_{em1})$ ликвидации аварии 1-го типа на устройстве r ;
- распределение времени $\Phi_{3r}(\tau_{em2})$ ликвидации аварии 2-го типа на устройстве r ;
- распределение стоимости $\Phi_{4r}(C_{em1})$ ликвидации аварии 1-го типа на устройстве r ;
- распределение стоимости $\Phi_{6r}(C_{em2})$ ликвидации аварии 2-го типа на устройстве r ;
- вероятность (P_{em1}) возникновения аварий 1-го типа при отказе устройства;
- вероятность (P_{em2}) возникновения аварий 2-го типа при отказе устройства.

Процедура построения нейрорегулятора, осуществляющего воздействия на систему управления, которые приводят к принятию решений о профилактике устройств оборудования

ТП, базируется на алгоритмах обучения с подкреплением (таких как Q-learning [8] и policy gradient [7]). Поскольку при решении задачи требуется принять во внимание динамическую природу объекта управления, в качестве регулятора используется рекуррентная нейронная сеть.

При реализации алгоритмов обучения с подкреплением на базе функционирования имитационных моделей ТП и системы управления нейрорегулятор получает доступ к наблюдению регистров функционирования ($\{Z'\}$) и регистров переменных управления ($\{U'\}$), формируя на основе их анализа корректирующие воздействия ($\{\Delta U'\}$). Целевая функция алгоритмов обучения с подкреплением (функция вознаграждения) включает в себя стабилизируемые параметры (метрики) функционирования ТП, такие как время непрерывной работы цикла (R_{nop}), суммарный объём затрат на обслуживание и ликвидацию отказов и аварий оборудования (R_{cost}), суммарное число отказов оборудования (R_f), в том числе, приведшее к аварии (R_{fe}), суммарное число профилактик за цикл (R_{rep}). В соответствии с требованиями, предъявляемыми к процессу оптимизации адаптации управления ТП, строится целевая функция на базе этих компонентов:

$$R = \alpha_1 R_{nop} + \alpha_2 R_{cost} + \alpha_3 R_f + \alpha_4 R_{fe} + \alpha_5 R_{rep}. \quad (5.1)$$

В качестве примера решения задачи адаптивного управления на базе схемы применения нейрорегуляторов можно также рассмотреть задачу стабилизации температуры в процессе функционирования пластинчатой пастеризационно-охладительной установки (ПОУ) [9]. Для решения задач управления ПОУ применяются пропорционально-интегрально-дифференцирующие (ПИД) контроллеры.

Построение нейрорегулятора при этом происходит в рамках схемы инверсного управления. В качестве архитектуры нейронной сети используется трехслойный персептрон.

Нейрорегулятор в данном случае используется в качестве настройщика ПИД и осуществляет стабилизационные корректирующие воздействия, которые в соответствии со схемой управления ПОУ представлены пропорциональным (K_p), интегральным (K_I) и дифференциальным (K_D) коэффициентами, формируемыми на основании наблюдений за сигналами управления и состояниями управляемого объекта.

Обучение может быть осуществлено на основе собранных статистик функционирования системы управления (на базе промышленного контроллера).

Заключение

В настоящей статье разработан новый подход к процедуре синтеза обратных связей по управлению технологическим циклом автоматизированного производства и представлен метод адаптации управления на основе онтологии предметной области «технологические процессы производства с вероятностными характеристиками».

Новые разработки в области прикладного системного анализа и оптимального управления являются важным этапом перехода к конкретному практическому применению систем с искусственным интеллектом в современных теоретических разработках, развитием фундаментальных и прикладных аспектов их использования.

Результаты, представленные в данной работе, позволяют обеспечивать решение широкого класса задач адаптации управления автоматизированными технологическими системами при наличии случайных внешних возмущений и управляющих воздействий на основе интеллектуальных компьютерных систем нового поколения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Автоматизация производственной деятельности в рамках Экосистемы OSTIS* / В.А. Прохоренко [и др.] // Технология комплексной поддержки жизненного цикла семантически совместимых интеллектуальных компьютерных систем нового поколения: монография; под общ. ред. В.В. Голенкова. – Минск, БГУИР. – 2023. – Гл. 7.7. – С. 805–830.

2. *Смородин, В.С.* Методы и средства имитационного моделирования технологических процессов производства: монография / В.С. Смородин, И.В. Максимей; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет имени

Франциска Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 369 с.

3. *Omidvar, O.* Neural Systems for Control / O. Omidvar, D.L. Elliott eds. // Academic Press, New York, 1997. – 358 с.

4. *White, D.A.* Handbook of Intelligent Control. Neural, Fuzzy, and Adaptive Approaches / D.A. White, D.A. Sofge. – Van Nostrand Reinhold, 1992.

5. *Hagan, M.T.* Neural networks for control / M.T. Hagan, H.B. Demuth // Proceedings of the American Control Conference. – 1999. – Vol. 3. – P. 1642–1656.

6. *Smorodin, V.* Control Of A Technological Cycle Of Production Process Based On A Neuro-Controller Model / V. Smorodin, V. Prokhorenko // Open semantic technologies for intelligent systems. – 2019. – iss. 3. – P. 251–256.

7. *Smorodin, V.* Software-Technological Complex For Adaptive Control Of A Production Cycle Of Robotic Manufacturing / V. Smorodin, V. Prokhorenko // Open semantic technologies for intelligent systems. – 2022. – iss. 6. – P. 401–404.

8. *Smorodin, V.* Adaptive Control Of Robotic Production Systems / V. Smorodin, V. Prokhorenko // Open semantic technologies for intelligent systems. – 2020. – iss. 4. – P. 161–166.

9. *Иванюк, Д.С.* Нейро-ПИД-регулятор ПОУ / Д.С. Иванюк // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2014. – № 5. – С. 35–40.

Поступила в редакцию 05.05.2023.

Информация об авторах

Смородин Виктор Сергеевич – д.т.н., профессор
Прохоренко Владислав Александрович – ст. преподаватель

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).