



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№1 (54) 2023

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (54) 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Богуш Н.В., Кузьмар И.И., Кушнер Л.К., Хмыль А.А.** Кинетика электрохимического формирования покрытий «серебро-вольфрам» из сульфатно-аммониевого электролита 7
- Воронин С.Т.** Ионизация горячих газовых потоков высокой плотности рентгеновским излучением при фотолюминесценции анода трансмиссионного типа 13
- Гиргель С.С.** Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация 20
- Капшай В.Н., Гришечкина А.А.** Решение релятивистских парциальных уравнений для d -состояний рассеяния 25
- Можаровский В.В., Киргинцева С.В.** Расчет напряженно-деформированного состояния зубьев зубчатых колес из композиционных и функционально-градиентных материалов 31
- Осмоловская Т.Н., Фещенко А.А., Станчик А.В.** Формирование, структурные и морфологические свойства тонких пленок прекурсоров Cu-Sn-Ni 38
- Остриков В.О., Остриков О.М.** Статическая и динамическая задача для единичной мартенситной прослойки в ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в магнитном поле в жесткой заделке 43
- Пилипцов Д.Г., Джоу Бин, Рогачёв А.В., Федосенко Н.Н., Кулеш Е.А.** Структура и механические свойства легированных азотом и алюминием углеродных покрытий 47
- Руденков А.С., Ярмоленко М.А., Фролов С.А.** Влияние термообработки на морфологию и структуру нанокomпозиционных покрытий на основе крахмала и ацетата меди 54
- Ян Гаопэн, Ву Тяньтянь, Цао Цзиньсин, Цзян Сяохун.** Получение полых сфер CuS, легированных Zn^{2+} , путем одностадийного синтеза и его фотокаталитические свойства в видимом свете 60

МАТЕМАТИКА

- Васильева Т.И., Коранчук А.Г.** О π -сверхразрешимости конечных групп 69
- Воробьев Н.Т., Волкова Е.Д.** Инъекторы конечных σ -разрешимых групп 75
- Гальмак А.М.** О единицах и их обобщениях в полиадических группоидах специального вида. II 85
- Оснач Т.М., Рябченко Н.В., Старовойтов А.П.** Аналог теоремы Якоби для одновременной Эрмитовской интерполяции нескольких функций 89

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- технические;
- физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферирован в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 15.03.23. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 9,72. Тираж 100 экз. Заказ № 126.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2023
© Проблемы физики, математики и техники, 2023
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2023

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 1 (54) 2023

CONTENTS

PHYSICS

Bogush N.V., Kyzmar I.I., Kushner L.K., Khmyl A.A. Kinetics of electrochemical formation silver-tungsten coatings from the ammonium sulfate electrolyte	7
Voronin S.T. Ionization of hot gas flows of high density by X-ray radiation during photoluminescence of the transmission-type anode	13
Girgel S.S. Energy properties of the vector circular Kummer beams with terminating power. II. The nonhomogeneous polarization	20
Kapshai V.N., Grisechekina A.A. Solution of relativistic partial equations for scattering d -states	25
Mozharovsky V.V., Kirhintsava S.V. Calculation of the stress-strain state of gear teeth made of composite and functional gradient materials	31
Osmolovskaya T.N., Feshchenko A.A., Stanchik A.V. Formation, structural and morphological properties of thin films of Cu-Sn-Ni precursors	38
Ostrikov V.O., Ostrikov O.M. A static and dynamic problem for a single martensitic layer in a ferromagnetic single crystal with a shape memory effect in a magnetic field in a rigid embodiment	43
Piliptsov D.G., Zhou Bing, Rogachev A.V., Fedosenko N.N., Kulesh E.A. Structure and mechanical properties of carbon coatings alloyed with nitrogen and aluminum	47
Rudnikov A.S., Yarmolenko M.A., Frolov S.A. Effect of heat treatment on the morphology and structure of nanocomposite coatings based on starch and copper acetate	54
Yang Gaopeng, Wu Tiantian, Cao Jinxing, Jiang Xiaohong. Preparation of Zn ²⁺ -doped CuS hollow spheres by one-step synthesis and its photocatalytic performance in visible light	60

MATHEMATICS

Vasilyeva T.I., Koranchuk A.G. On π -supersolvability of finite groups	69
Vorob'ev N.T., Volkova E.D. Injectors of finite σ -soluble groups	75
Gal'mak A.M. On identities and their generalizations in polyadic groupoids of special form. II	85
Osnach T.M., Ryabchenko N.V., Starovoitov A.P. The analogue of Jacobi's theorem for simultaneous Hermitian interpolation of several functions	89

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- **Technics;**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 544.6

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_7

EDN: BLQMAA

КИНЕТИКА ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМИРОВАНИЯ ПОКРЫТИЙ «СЕРЕБРО-ВОЛЬФРАМ» ИЗ СУЛЬФАТНО-АММОНИЕВОГО ЭЛЕКТРОЛИТА

Н.В. Богуш, И.И. Кузьмар, Л.К. Кушнер, А.А. Хмыль

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

KINETICS OF ELECTROCHEMICAL FORMATION SILVER-TUNGSTEN COATINGS FROM THE AMMONIUM SULFATE ELECTROLYTE

N.V. Bogush, I.I. Kyzmar, L.K. Kushner, A.A. Khmyl

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Аннотация. Изучен механизм электрохимического осаждения покрытий «серебро-вольфрам» из сульфатно-аммониевого электролита. Установлены зависимости параметров процессов формирования покрытий (ток обмена, коэффициент переноса и параметры зародышеобразования) от концентрации вольфрамата натрия в электролите и условий осаждения. Показано, что введение вольфрама снижает перенапряжение кристаллизации и радиус критического зародыша, а также средний размер кристаллического зерна в покрытии при увеличении скорости зародышеобразования. С использованием энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии проведен элементный анализ и рассчитана плотность распределения размеров зерен в покрытии «серебро-вольфрам».

Ключевые слова: серебро, вольфрам, композиционные электрохимические покрытия, зародышеобразование, кристаллизация.

Для цитирования: Кинетика электрохимического формирования покрытий «серебро-вольфрам» из сульфатно-аммониевого электролита / Н.В. Богуш, И.И. Кузьмар, Л.К. Кушнер, А.А. Хмыль // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 7–12. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_7. – EDN: BLQMAA

Abstract. The mechanism of electrochemical deposition of silver-tungsten thin films from the ammonium sulfate solution has been studied. The dependencies of the coating formation parameters (exchange current, transfer coefficient and nucleation parameters) on a sodium tungstate concentration in the electrolyte and deposition conditions have been defined. It was shown that the introduction of tungsten reduces the crystallization overvoltage and critical nucleus radius as well as reduces the average crystal grain size in the coating with the increase in the rate of nucleation. Coating structure has been researched, the elemental analysis has been done and grain size distribution density in a silver-tungsten coating has been calculated using energy dispersive X-ray spectroscopy.

Keywords: silver, tungsten, composite electrochemical coatings, nucleation, crystallization.

For citation: Kinetics of electrochemical formation silver-tungsten coatings from the ammonium sulfate electrolyte / N.V. Bogush, I.I. Kyzmar, L.K. Kushner, A.A. Khmyl // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 7–12. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_7 (in Russian). – EDN: BLQMAA

Введение

Электрохимическое осаждение серебра применяют для формирования покрытий различного назначения: декоративных, электропроводящих и коррозионностойких покрытий с различными свойствами в радиоэлектронной, приборостроительной и авиационной промышленности в качестве защитных покрытий для применения их при низких температурах [1], [2]. Спектр применения покрытий из серебра и, соответственно, спрос на него в последнее время растет [3]. Покрытия на основе серебра широко используются благодаря высоким электропроводящим и защитным свойствам, способности отражать электромагнитное излучение в широком диапазоне частот. Однако их механические свойства не всегда соответствуют эксплуатационным требованиям [4]. Поэтому для увеличения

прочностных характеристик и износостойкости в серебряные покрытия включают добавки, что приводит к изменению механизма осаждения и оказывает влияние на состав и структуру покрытия [5].

Исследование кинетики осаждения позволяет установить закономерности протекания химических и электрохимических реакций от времени, плотности тока, концентрации добавок и иных факторов, влияющих на скорость, как суммарного процесса, так и промежуточных стадий [6]. Такие исследования необходимы для рассмотрения закономерностей изменения скорости электродных процессов, на которые влияют прохождение электрического тока через границу «электрод – ионная система», заряджение двойного электрического слоя, распределение ионов в объеме электролита. Плотность тока служит

мерой скорости электрохимической реакции. Если скорость тока равна нулю, тогда система рассматривается в равновесии и снимается равновесный потенциал необходимого электрода. При пропускании электрического тока через систему потенциал рабочего электрода отклоняется от равновесного значения. Это отклонение называется поляризацией электрода [6]. Зависимости поляризации от тока и поляризации от времени необходимы для определения лимитирующих стадий, которые определяют скорость процессов осаждения. Зная эти параметры, можно управлять процессом осаждения и качеством покрытия, а, следовательно, и свойствами покрытий.

В данной статье приводятся полученные впервые результаты кинетических исследований стационарного потенциала, потенциодинамических поляризационных кривых, хронопотенциограмм покрытий серебро-вольфрам, получаемых из сульфатно-аммониевого электролита [5]. Приводятся результаты расчетов токов обмена, коэффициентов переноса, параметров зародышеобразования и подсчет плотности распределения зерен в покрытии серебро-вольфрам, представленные в виде гистограмм. Кроме того, приводятся результаты анализа распределения Ag, O, W в электрохимических покрытиях серебро-вольфрам, проведенного методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии.

1 Методика проведения эксперимента

Для электрохимического получения покрытий использовался сульфатно-аммониевый электролит, представленный в работе [5]. Исследования стационарного потенциала, потенциодинамических кривых и хронопотенциограмм проводили в трехэлектродной электрохимической ячейке с использованием потенциостата ПИ-50-1.1, хлорсеребряного электрода сравнения (пересчет на водородный потенциал +0,201 В) и двухкоординатного самопишущего ПДС-021 потенциометра [7]. Измерения стационарного потенциала покрытий серебро и серебро-вольфрам в электролите регистрировали после 0,5 часа пребывания образца (Ag и Ag-W покрытия) в ячейке при соответствующих условиях [7]. Перемешивание электролита осуществляли с помощью электрической магнитной мешалки со скоростью 120 об/мин.

С помощью потенциодинамических кривых рассчитали ток обмена и коэффициент переноса [8], а с помощью хронопотенциограмм рассчитали параметры зародышеобразования [9]. Микроскопический анализ покрытий на основе серебра и вольфрама проводился с помощью сканирующего электронного микроскопа. Путем анализа участка поверхности образца размером 10·10 мкм были построены гистограммы влияния концентрации вольфрамата натрия в электролите и плотности тока осаждения на распределение зерен по размеру в покрытии на основе серебра.

С помощью метода энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (растровый электронный микроскоп РЭМ S-4800) проведен элементный анализ покрытий серебро-вольфрам и распределение основных элементов (Ag, O, W) на поверхности образцов [10].

2 Результаты и их обсуждение

Результаты исследований стационарного потенциала. Величина равновесного электродного потенциала зависит от природы и активности компонентов электролита, материала электрода, температуры [11]. Внесение соли вольфрамата натрия меняет проводимость электролита и, соответственно, приводит к изменению стационарного потенциала и его смещению в отрицательную сторону, таблица 2.1. В частности, при осаждении серебряного покрытия стационарный потенциал равен 0,373 В, однако при добавлении в электролит 3,5 г/л вольфрамата натрия он смещается в отрицательную сторону и составляет 0,323 В.

Применение перемешивания электролита позволяет улучшить процесс осаждения и сместить стационарный потенциал к еще более отрицательным значениям.

Результаты исследований потенциодинамических поляризационных кривых. По результатам исследований поляризационных кривых наблюдаются два предельных тока. Первый предельный ток 0,03–0,05 А/дм² соответствует активационной поляризации, второй предельный ток 1,7–1,8 А/дм² соответствует концентрационной поляризации.

Таблица 2.1 – Зависимость величины стационарного потенциала ($U_{ст}$, В) от концентрации вольфрамата натрия в электролите и от условий приготовления.

$C_{Na_2WO_4 \cdot 2H_2O}$, г/л	без перемешивания	с перемешиванием
0	0,373	0,316
3,5	0,323	0,299
9	0,323	0,296
18	0,316	0,281
35	0,307	0,265

Сравнительный анализ поляризационных кривых, полученных в различных режимах осаждения (без и с перемешиванием), позволяет сделать вывод, что второй предельный ток вызывает диффузионное перенапряжение (рисунок 2.1).

При дополнительном механическом перемешивании с помощью магнитной мешалки наблюдается небольшое снижение поляризации на катоде (рисунок 2.1). При этом количество включенного в покрытие вольфрама практически не изменяется.

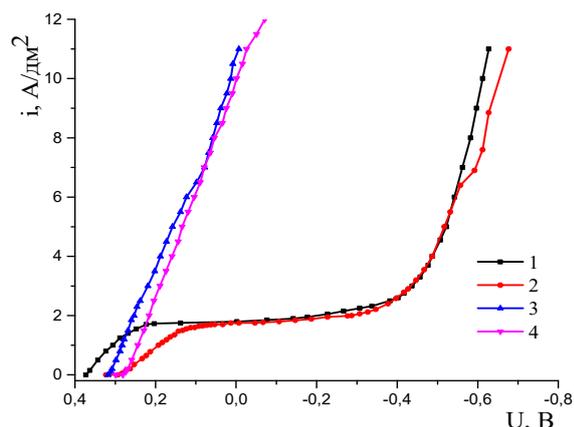


Рисунок 2.1 – Катодные поляризационные кривые в зависимости от концентрации $\text{Na}_2\text{WO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ в электролите (1,3–0 г/л, 2,4–3,5 г/л) и условий приготовления (1, 2 – без перемешивания, 3, 4 – с перемешиванием)

Первый предельный ток соответствует активационной поляризации. Если предположить, что смещение потенциала электрода от равновесного значения обусловлено замедленностью протекания стадии присоединения или отдачи электрона, то можно предположить, что первый предельный ток относится к электрохимическому перенапряжению. Тогда через экстраполяцию поляризационной кривой можно получить тафелевскую кривую $\varphi - \lg i$, благодаря которой можно рассчитать ток обмена i_0 и коэффициент переноса α , таблица 2.2 [8]. Причиной малой скорости электрохимической реакции является ее высокая энергия активации.

Внесение соли вольфрамата натрия в электролит уменьшает значение тока обмена, что приводит к снижению результирующей плотности тока. Применение же механического перемешивания, наоборот, способствует увеличению тока обмена и скорости реакции при незначительном изменении перенапряжения. Коэффициент переноса равен 0,2, это значит, что доля влияния электрического поля электрода (энергии двойного слоя) на энергию активации мало [8].

Таблица 2.2 – Значения величин кинетических параметров электроосаждения покрытий серебро-вольфрам

$C_{\text{Na}_2\text{WO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}}$, г/л	Постоянные Тафеля		Ток обмена A/cm^2	Кoeff. переноса	Постоянные Тафеля		Ток обмена A/cm^2	Кoeff. переноса
	a	b	I_0	α	a	b	I_0	α
	<i>без перемешивания</i>				<i>с перемешиванием</i>			
0	0,21	0,111	0,0110	0,542	0,112	0,248	0,035	0,234
3,5	0,20	0,082	0,0036	0,71	0,133	0,258	0,256	0,225
9	0,31	0,161	0,0120	0,36	0,175	0,258	0,210	0,225
18	0,26	0,104	0,0031	0,56	0,217	0,266	0,152	0,219
35	0,24	0,107	0,0057	0,543	0,267	0,336	0,160	0,173

Результаты хронопотенциометрии. Хронопотенциометрию осаждения серебра и серебра-вольфрама проводили по стандартной методике [12]. Значения потенциала переводили по водородной шкале. С помощью хронопотенциогаммы определили максимальный потенциал, который соответствует потенциалу зародышеобразования при соответствующем токе осаждения [9]. Показано, что при изменении плотности тока осаждения в диапазоне от 0,3 до 1,5 A/dm^2 значение потенциала зародышеобразования находится в диапазоне от 8,03 до 5,51 В для электролита без соли вольфрама, и в диапазоне от 6,4 до 3,6–4 В при концентрации двухводного вольфрамата натрия от 3,5 до 35 г/л.

Согласно Эрдей – Грузу и Фольмеру мы рассчитали энергию зародышеобразования, радиус зародыша, скорость образования зародышей [13]. Установлено, что с увеличением плотности тока и концентрации вольфрамата натрия в электролите возрастает перенапряжение катода, что приводит к увеличению скорости зародышеобразования и уменьшению радиуса зародыша и, соответственно, формированию более плотного и устойчивого к внешним воздействиям осадка (таблица 2.3). При этом зависимость снижения энергии зародышеобразования и радиуса зародыша при увеличении плотности тока осаждения является практически линейной (таблица 2.3).

Результаты исследования структуры покрытий «серебро-вольфрам». Покрытия «серебро-вольфрам» имеют ярко выраженную кристаллическую структуру с максимальной концентрацией вольфрама до 2,28 масс % [5]. Влияние изменения концентрации вольфрамата натрия в электролите и плотности тока при осаждении покрытий серебро-вольфрам на плотность распределения зерен представлено на гистограммах, приведённых ниже (рисунок 2.2).

На гистограммах показано, что внесение соли вольфрамата натрия в электролит приводит к уменьшению размера зерен. Также при неизменной концентрации вольфрамата натрия (3,5 г/л) в электролите при повышении плотности тока осаждения наблюдается уменьшение размера зерна и рост количества зерен в структуре покрытий (рисунок 2.3).

Таблица 2.3 – Параметры зародышеобразования при электроосаждении покрытий «серебро» и «серебро-вольфрам»

$C_{Na_2WO_4 \cdot 2H_2O}, \text{г/л}$	$i, \text{А/дм}^2$	$\eta_m, \text{В}$	$E_3, \text{В}$	$\bar{\sigma}, \text{Н/м}$	$R_3 \cdot 10^{-9}, \text{м}$	$V_3 \cdot 10^{-27}, \text{м}^3$	$N \cdot 10^{80}, \text{1/м}^2\text{с}$
0	0,3	0,234	8,030	1,112	1,012	13,012	$1,696 \cdot 10^{-15}$
	0,5	0,251	7,486	1,061	0,900	9,164	$5,793 \cdot 10^{14}$
	0,7	0,266	7,064	1,021	0,817	6,855	$4,508 \cdot 10^{33}$
	1,0	0,287	6,547	0,970	0,720	4,688	$5,017 \cdot 10^{52}$
	1,5	0,341	5,510	0,865	0,540	1,980	$5,774 \cdot 10^{78}$
3,5	0,3	0,294	6,391	0,956	0,691	4,151	$4,145 \cdot 10^{47}$
	0,5	0,311	6,042	0,920	0,629	3,134	$5,082 \cdot 10^{60}$
	0,7	0,332	5,660	0,881	0,564	2,260	$2,796 \cdot 10^{71}$
	1,0	0,366	5,134	0,826	0,480	1,388	$5,931 \cdot 10^{82}$
	1,5	0,473	3,973	0,696	0,313	0,385	$1,294 \cdot 10^{97}$
9	0,3	0,296	6,348	0,952	0,683	4,009	$7,335 \cdot 10^{48}$
	0,5	0,319	5,89	0,906	0,603	2,757	$2,069 \cdot 10^{64}$
	0,7	0,341	5,510	0,866	0,540	1,975	$2,465 \cdot 10^{74}$
	1,0	0,376	4,997	0,812	0,459	1,212	$6,316 \cdot 10^{84}$
	1,5	0,521	3,607	0,653	0,266	0,237	$2,097 \cdot 10^{99}$
18	0,3	0,2935	6,391	0,956	0,691	4,145	$4,145 \cdot 10^{47}$
	0,5	0,320	5,872	0,904	0,600	2,713	$5,494 \cdot 10^{64}$
	0,7	0,344	5,462	0,861	0,532	1,890	$1,993 \cdot 10^{75}$
	1,0	0,371	5,065	0,819	0,469	1,295	$6,576 \cdot 10^{83}$
	1,5	0,446	4,213	0,724	0,345	0,516	$1,824 \cdot 10^{95}$
35	0,3	0,289	6,502	0,968	0,711	4,516	$2,169 \cdot 10^{44}$
	0,5	0,311	6,042	0,921	0,629	3,129	$5,082 \cdot 10^{60}$
	0,7	0,331	5,677	0,884	0,567	2,291	$1,251 \cdot 10^{71}$
	1,0	0,366	5,134	0,827	0,480	1,386	$5,931 \cdot 10^{82}$
	1,5	0,462	4,067	0,708	0,325	0,433	$2,652 \cdot 10^{96}$

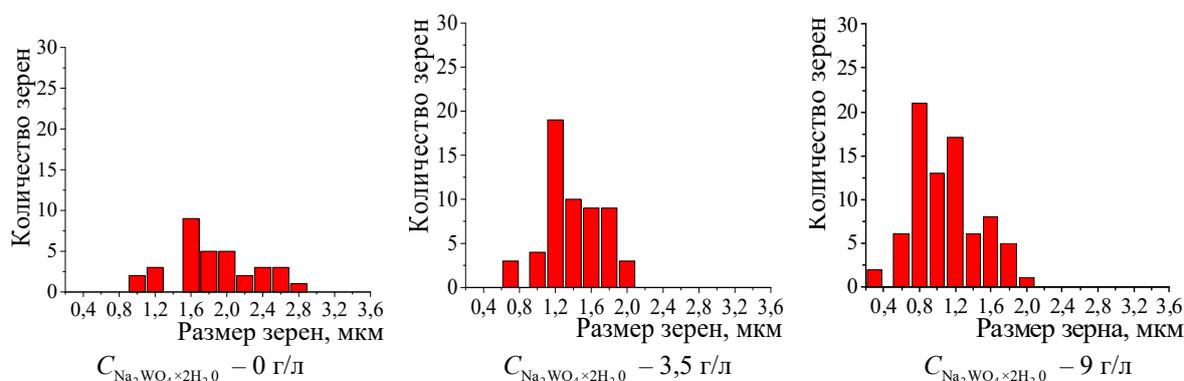


Рисунок 2.2 – Гистограммы распределения зерен в покрытии по их размеру и количеству при различной концентрации $Na_2WO_4 \cdot 2H_2O$ в электролите, $i = 0,7 \text{ А/дм}^2$

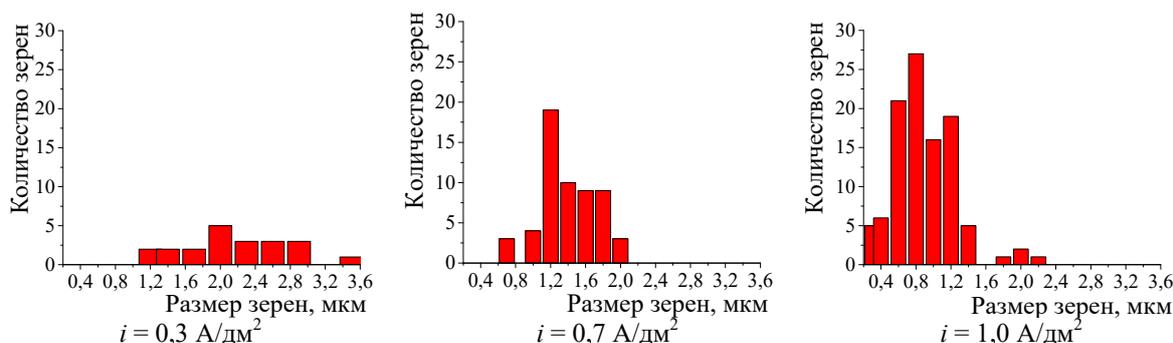
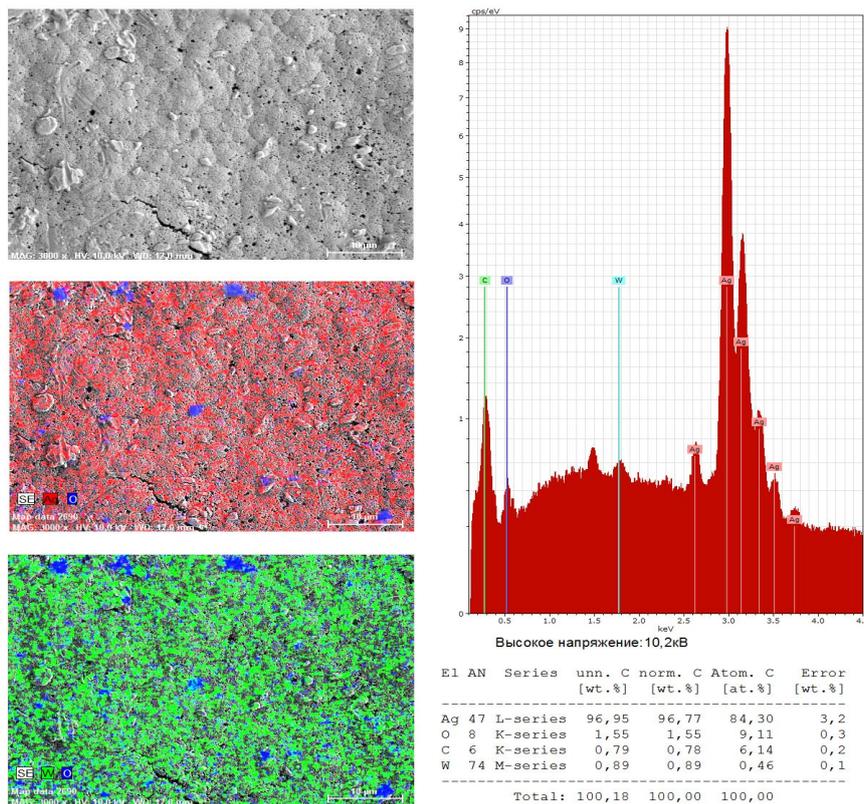
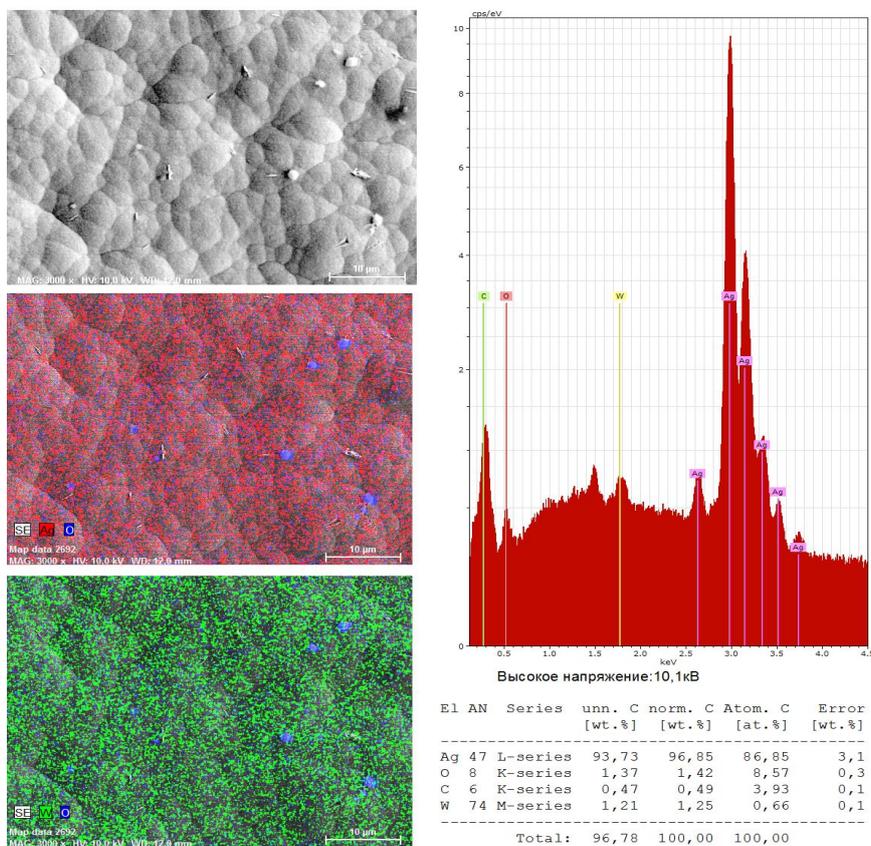


Рисунок 2.3 – Гистограммы распределения зерен в покрытии по их размеру и количеству при различной плотности тока $C_{Na_2WO_4 \cdot 2H_2O} = 3,5 \text{ г/л}$



$$C_{\text{Na}_2\text{WO}_4 \times 2\text{H}_2\text{O}} = 3,5 \text{ г/л}, i = 0,7 \text{ А/дм}^2$$



$$C_{\text{Na}_2\text{WO}_4 \times 2\text{H}_2\text{O}} = 9 \text{ г/л}, i = 0,3 \text{ А/дм}^2$$

Рисунок 2.4 – Структура, результаты анализа элементного состава и поверхностное распределение элементов Ag, W, O в покрытии «серебро-вольфрам»

Для исследования элементного анализа покрытий «серебро-вольфрам» было выбрано два образца. Первый образец получен при рабочем режиме осаждения (постоянный ток $i = 0,7 \text{ А/дм}^2$) и составе электролита ($C_{\text{Na}_2\text{WO}_4 \times 2\text{H}_2\text{O}} = 3,5 \text{ г/л}$). Второй образец был выбран для анализа с максимальным содержанием вольфрама в покрытии (постоянный ток $i = 0,3 \text{ А/дм}^2$, $C_{\text{Na}_2\text{WO}_4 \times 2\text{H}_2\text{O}} = 9,0 \text{ г/л}$), (рисунок 2.4). Показано, что с увеличением содержания вольфрама увеличивается равномерность его распределения в покрытии, что связано со снижением размера зародышей при осаждении и более плотной структурой формирующихся кристаллитов (рисунок 2.4). Установлена корреляция внешнего вида кристаллической структуры, (изображение получено методом сканирующей электронной микроскопии), с поверхностным распределением основных элементов, формирующих покрытие (серебро и вольфрам). Наблюдается повышенная сегрегация кислородосодержащих соединений на границах зерен (рисунок 2.4).

Заключение

В результате анализа потенциодинамических поляризационных кривых, полученных при различных режимах осаждения (с применением перемешивания и без перемешивания) установлено, что механизм электрохимического осаждения покрытий «серебро-вольфрам» из сульфатно-аммониевого электролита характеризуется тем, что второй предельный ток лимитируется диффузионным перенапряжением. Посредством экстраполяции поляризационных кривых проведены расчеты тока обмена и коэффициентов переноса. Показано, что при внесении соли вольфрамата натрия и увеличении ее концентрации в электролите значение тока обмена уменьшается, что приводит к снижению результирующей плотности тока.

Методом анализа хронопотенциограмм проведены расчеты параметров зародышеобразования. Установлено, что увеличение концентрации вольфрамата натрия в электролите приводит к увеличению количества центров зародышеобразования: это проявляется как снижение радиуса зерна и увеличение количества зерен на поверхности подложки. Такая же зависимость особенностей структуры покрытия в зависимости от содержания вольфрамата натрия прослеживается при анализе методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии [5]. Установлен равномерный характер распределения основных элементов в покрытии, а также показано, что увеличение плотности тока при осаждении приводит к формированию более плотной структуры покрытий, что позволяет использовать покрытия на основе серебра с вольфрамом в электронике и электротехнике в качестве электропроводящих, защитных, отражающих слоев, контактных соединений с повышенной износостойкостью и иных применений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коррозионные проблемы электронного оборудования*. Обзор / Р.Дж. Ратиш [и др.] // Коррозия: Материалы, защита. – 2021. – № 4. – С. 33–43.
2. *Разработка антикоррозионных покрытий, эксплуатируемых в условиях арктики* / И.Г. Жихарева [и др.] // Вестник технологического университета. – 2022. – Т. 25, № 9. – С. 31–35.
3. Щедрова, Д.А. Формирование спроса на серебро на рынке драгоценных металлов / Д.А. Щедрова, В.Т. Борисович, Ю.А. Леонидова // Экономика и управление инновациями. – 2018. – № 2. – С. 37–44.
4. Грилихес, С.Я. Электролитические и химические покрытия. Теория и практика / С.Я. Грилихес, К.И. Тихонов. – Ленинград: Химия, 1990. – 288 с.
5. Богуш, Н.В. Структура и физико-механические свойства композиционных покрытий серебро-вольфрам, полученных электрохимическим методом / Н.В. Богуш, А.А. Хмыль, Л.К. Кушнер // Доклады БГУИР. – 2017. – № 5 (107). – С. 54–61.
6. Фрумкин, А.Н. Избранные труды: Электродные процессы / А.Н. Фрумкин. – Москва: Наука, 1987. – 336 с.
7. *Влияние ультразвуковых колебаний на кинетику процесса электроосаждения и структуру покрытий сплавом олово-висмут* / В.К. Василец [и др.] // Доклады БГУИР. – 2015. – № 5. – С. 12–18.
8. Антропов, Л.И. Теоретическая электрохимия / Л.И. Антропов. – 4-е изд. – Москва: Высш. шк., 1984. – 519 с.
9. *О применении метода гальваностатического включения при исследовании электрокристаллизации на чужеродной подложке* / В.М. Рудой [и др.] // Электрохимия. – 1975. – Т. 11, № 4. – С. 566–570.
10. Рогачев, Е.А. Физические основы современных методов исследования материалов: учеб. пособие / Е.А. Рогачев; Минобрнауки России, Омский государственный технический университет. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2021. – 88 с.
11. Слесаренко, О.А. Прикладная электрохимия: методические указания к лабораторным работам и контрольные задания для студентов специальности 1-47 02 01 «Технология полиграфических производств» заочной формы обучения / О.А. Слесаренко. – Минск: БГТУ. – 2014. – 78 с.
12. Захаров, М.С. Хронопотенциометрия / М.С. Захаров, В.И. Баканов, В.В. Пнев. – Москва: Химия, 1978. – 200 с.
13. Феттер, К. Электрохимическая кинетика / К. Феттер. – Москва: Химия, 1967. – 856 с.

Поступила в редакцию 31.01.2023.

Информация об авторах

Богуш Наталья Валерьевна – науч. сотр.
Кузьмар Инна Иосифовна – к.т.н., доцент
Кушнер Лариса Константиновна – ст. науч. сотр.
Хмыль Александр Александрович – д.т.н., профессор

УДК 537.533.9

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_13
EDN: EIPASY

ИОНИЗАЦИЯ ГОРЯЧИХ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ РЕНТГЕНОВСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ ПРИ ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ АНОДА ТРАНСМИССИОННОГО ТИПА

С.Т. Воронин*ООО «Аника М», Новосибирск*

IONIZATION OF HOT GAS FLOWS OF HIGH DENSITY BY X-RAY RADIATION DURING PHOTOLUMINESCENCE OF THE TRANSMISSION-TYPE ANODE

S.T. Voronin*LLC "Anika M", Novosibirsk*

Аннотация. Предложена модель и сделан расчёт импульсного ионизатора плотных газовых потоков, на основе поглощения интенсивного, характеристического, рентгеновского излучения от медного анода трансмиссионного типа, покрытого слоем вольфрама или молибдена. Импульсная мощность ионизатора составляет от 250 до 1000 кВт, что позволяет ионизировать до высокой степени ионизации близкой ~100% плотный газовый поток атомов и молекул в камере сгорания малогабаритного, жидкостного, реактивного двигателя или использовать его для иного применения в науке и технике.

Ключевые слова: экстраполированный пробег, флуоресценция первичных рентгеновских лучей, фотолюминесценция вторичных рентгеновских лучей.

Для цитирования: Воронин, С.Т. Ионизация горячих газовых потоков высокой плотности рентгеновским излучением при фотолюминесценции анода трансмиссионного типа / С.Т. Воронин // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 13–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_13. – EDN: EIPASY

Abstract. A model is proposed and the calculation of a pulsed ionizer of dense gas fluxes is made, based on the absorption of intense, characteristic, X-ray radiation from a copper anode of the transmission type, covered with a layer of tungsten or molybdenum. The pulse power of the ionizer is from 250 to 1000 kW, which makes it possible to ionize to a high degree of ionization close to ~100% the dense gas flow of atoms and molecules in the combustion chamber of a small-sized, liquid, jet engine or for other applications in science and technology.

Keywords: extrapolated mileage, fluorescence of primary X-rays, photoluminescence of secondary X-rays.

For citation: Voronin, S.T. Ionization of hot gas flows of high density by X-ray radiation during photoluminescence of the transmission-type anode / S.T. Voronin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 13–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_13 (in Russian). – EDN: EIPASY

Введение

Ионизаторы различных веществ, по типу рентгеновской трубки [1], широко используются в промышленности, медицине, науке и технике, но могут быть использованы и в ракетостроении для создания высокой степени ионизации атомов и молекул в камере сгорания перспективных, жидкостных, реактивных двигателей (ЖРД). Данный ионизатор имеет свои особенности, которые необходимо учитывать при расчёте и конструировании. Например, он должен иметь небольшие габариты и вес при высокой эффективности и мощности, выдерживать тряску, высокие температуру и давление в камере сгорания ЖРД, допускать быструю замену при неисправности, обладать высокой прочностью и достаточно длительным сроком службы. Предлагается металло-керамическая конструкция с пористым катодом косвенного накала, обладающего высокой

надёжностью и долговечностью, а также относительно толстым, охлаждаемым анодом, содержащего тонкий, поверхностный слой молибдена или вольфрама. Особенностью данной работы по ионизации горячего газового потока высокой плотности, более 10 МПа, является использование явления фотолюминесценции в аноде от первичных рентгеновских квантов достаточно высоких энергий. Это позволяет индуцированному вторичному излучению проходить через относительно толстый слой металла охлаждаемого анода в рабочий газовый объём. Расчёты проводились для трансмиссионного медного анода толщиной 2 мм, покрытого слоем молибдена или вольфрама. В литературе отсутствует описание подобных ионизаторов, работающих на просвет с двухслойным трансмиссионным анодом, обладающим повышенной эффективностью, которые использовались бы для активации процессов

горения топлива в том числе. В данной работе приводятся основные результаты, описывающие упрощённую конструкцию ионизатора, предназначенного для встраивания в малогабаритные ЖРД, а также основные положения теории для происходящих физических процессов. Расчёты производились с использованием программы MathCAD2001 Professional.

1 Постановка задачи. Исходные данные

Известно, что дополнительная ионизация газов в процессе горения благоприятно влияет на воспламенение топлива из-за появления свободных радикалов и электронов, проявляющих более высокую реакционную способность, чем нейтральные атомы и молекулы [2]. Это приводит к снижению доли не сгоревшего топлива и повышению коэффициента полезного действия всего теплового процесса и удельного импульса ЖРД в частности. В настоящее время наибольшее применение имеют следующие виды топлива: жидкий водород H_2 , керосин $\sim C_{12}H_{26}$ и жидкий метан CH_4 . Окислителем обычно служит жидкий кислород O_2 или концентрированная (100%) азотная кислота HNO_3 . В результате сгорания топлива и окислителя в химическом процессе выделяется значительная энергия с образованием H_2O , CO_2 и N_2 . Далее, для примера, мы будем рассматривать топливную пару азотная кислота и керосин для их стехиометрического соотношения 5,5 с небольшим избытком горючего. Для случая подогрева плазмой сверхзвукового потока газов в коническом сопле перспективного ЖРД, его размеры должны иметь оптимальные размеры с точки зрения использования медных соленоидов из трубок для индукторов и быть согласованной нагрузкой для генераторов электромагнитной ВЧ энергии. Камера сгорания малогабаритного ЖРД, в нашем расчётном случае, имеет следующие размеры: диаметр 60 мм, длину 100 мм, диаметр критического сечения $D_{cr} \sim 10$ мм, длина простого конического сопла $L_c = 150$ мм. В таком случае, оптимальный диаметр на выходе конического сопла составляет $D_c = 60$ мм. Хаотическое движение горячих газов в камере сгорания с температурой $\sim 3178^\circ K$ имеет среднюю скорость для потока в критическом сечении $W_{cr} \sim 1026$ м/с при давлении в камере сгорания ~ 15 МПа и плотности газов $\sim 0,0187$ г/см³ [3, Т. 5]. При данной температуре и давлении концентрация атомов и молекул в камере сгорания $\sim 3 \cdot 10^{26}$ м⁻³, поэтому концентрация рентгеновских квантов должна составлять соизмеримую величину для эффективной ионизации атомов и молекул газа, учитывая, что один гамма-квант может ионизировать значительное количество молекул газов. Количество не полностью сгоревшего топлива на выходе из критического сечения составляет около 13% и постепенно догорает при движении через коническое

сопло [3, Т. 5]. Для температуры в сопле около критического сечения $T_c = 2674^\circ K$ удельная проводимость $\sigma_0 < 10$ 1/Ω·м, что явно недостаточно для эффективного поглощения электромагнитной ВЧ энергии плотным газовым потоком даже при использовании добавок щелочных металлов. Поэтому необходимо обязательно увеличить удельную проводимость до оптимальной величины $\sigma_0 \sim 200$ 1/Ω·м, для приведённых выше геометрических размеров области конического сопла под витками индуктора. Это и обуславливает необходимость дополнительной ионизации атомов (молекул) в камере сгорания и в коническом сопле под витками индуктора посредством специального прибора – ионизатора газового потока. Упрощённая схема ионизатора представлена на рисунке 1.1, где 1 – керамический корпус; 2 – вольфрамовая спираль; 3 – пористый подогреваемый катод; 4 – поток электронов; 5 – фокусирующая катушка; 6 – анод; 7 – медная охлаждаемая основа.

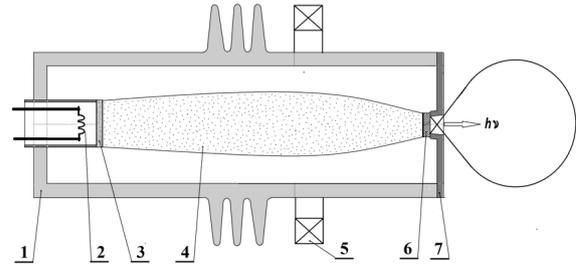


Рисунок 1.1 – Упрощённая конструкция ионизатора для плотных потоков газов в камере сгорания малогабаритного ЖРД

Многослойный, трансмиссионный анод имеет диаметр $D_a \sim 6$ мм. На выходе из ионизатора выходит пучок рентгеновских квантов с энергией $E_{Cu} = 8.04$ кэВ, для которых распределение по углу в диапазоне ускоряющего напряжения $U_a = 100-400$ кВ, имеет косинусный вид. Постоянный ток анода составляет типичное значение $i_a = 2,5$ А, что соответствует величине импульсной мощности ионизатора $P_{imp} = 250-1000$ кВт и скважности импульсов $Q = 500-2000$, если среднюю мощность ионизатора принять равной не более $P_i = 500$ Вт, чтобы избежать сильного разогрева охлаждаемого анода. Пучок электронов 4, рисунок 1.1, в ионизаторе движется со скоростью 0,55 – 0,83 от скорости света и при ударе о поверхность анода глубоко проникает в анод, частично отражаясь от поверхности и диффузно рассеиваясь на керамических стенках. Величина такого отражения зависит от атомного номера Z для поверхностного слоя на аноде в соответствии с экспериментальными результатами, обозначенными точками на рисунке 1.2 по данным Шонланда и Негера из работы [10, с. 93]. Величину коэффициента

обратной диффузии $P \sim P(Z)$ можно хорошо аппроксимировать предлагаемой здесь эмпирической функцией:

$$P(Z) = 0,01 \cdot Z - 7,2 \cdot 10^{-6} (Z - 4)^{2,46},$$

которая показана на рисунке 1.2 сплошной линией. Для расчётов были выбраны поверхностные слои молибдена ($Z = 42$) и вольфрама ($Z = 74$), которые слабо расплываются электронами, являются тяжёлыми металлами и обладают высокой температурой плавления. При движении электронов через слой молибдена или вольфрама электроны тормозятся с испусканием сплошного спектра тормозного излучения, а также линий характеристического излучения.

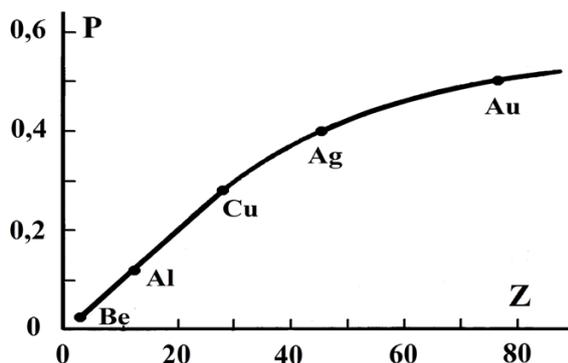


Рисунок 1.2 – Коэффициент обратной диффузии электронов $P(Z)$ от числа Z

Сплошной спектр тормозного излучения $E_{\text{тв}}$ ограничен максимальной энергией падающих электронов $E_0 = 100 - 400$ кэВ. На него наложено множество узких пиков с полушириной от 7 до 43 эВ характеристического излучения большой интенсивности. Значения средней энергии рентгеновских квантов характеристического излучения взяты из работы [4] для молибдена $E_{\text{КMo}} = 17,38 - 19,61$ кэВ и вольфрама $E_{\text{KW}} = 57,8 - 69,3$ кэВ взяты из справочников [4], [5]. Величина выхода излучательной флуоресценции P_a для K -оболочки электронов также зависит от числа Z , составляя величину $P_{a1} = 0,764$ для молибдена и $P_{a2} = 0,957$ для вольфрама, согласно Приложению 9 из работы [6]. Величина излучательной флуоресценции для L -оболочки электронов (средняя энергия $E_{\text{LMo}} = 2,29$ кэВ) для молибдена составляет 8,8% от интенсивности K -оболочки, тогда как для L -оболочки электронов (средняя энергия $E_{\text{LW}} = 8,40 - 9,96$ кэВ) для вольфрама достигает 31% от интенсивности K -оболочки. Поэтому первоначально при расчётах для вольфрама учитывались кроме четырёх линий электронных оболочек переходов $K_{\alpha 1}, K_{\alpha 2}, K_{\beta 1}, K_{\beta 2}$, также и линии для электронных оболочек переходов $L_{\alpha 1}, L_{\beta 1}$. Величина вероятности безизлучательных (Оже) переходов электронов внутри атомов также зависит от числа Z , уменьшаясь с его ростом, как показано на рисунке 1.3

[7]. Соотношение вероятностей излучательного $dE_{\text{рад}}$ и безизлучательного $dE_{\text{нерад}}$ переходов в K -оболочке электронов приближённо можно описать формулой, согласно работы [8]:

$$\frac{dE_{\text{рад}}}{dE_{\text{нерад}}} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{Z}{137} \left(\frac{U}{c}\right)^2,$$

$$U = c \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{(\alpha_0 + E_0)^2}}, \quad (1.1)$$

где U – скорость электрона; c – скорость света; $\alpha_0 = 511$ кэВ – энергия покоя электрона. С увеличением числа Z и энергии электронов E_0 происходит рост флуоресценции рентгеновского излучения и эффективности преобразования энергии потока электронов в поток рентгеновских квантов. Например, при расчёте по формулам (1.1), замена $Z = 42$ для молибдена на $Z = 74$ для вольфрама, даёт увеличение вероятности излучательных переходов в 4 раза при росте энергии электронов E_0 в 4 раза со 100 кэВ до 400 кэВ соответственно.

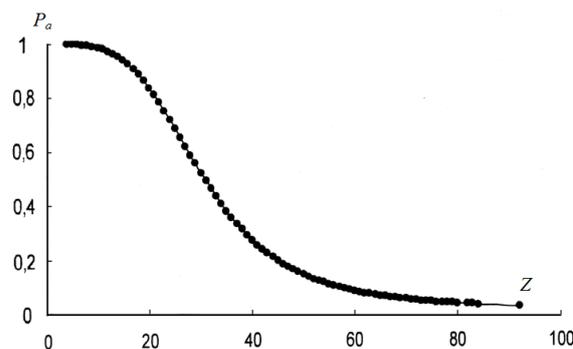


Рисунок 1.3 – Вероятность безизлучательных (Оже) переходов KLL от числа Z

Из рисунка 1.3 видно, что суммарная вероятность безизлучательных (Оже) переходов KLL резко уменьшается с ростом Z и составляет для вольфрама величину $\sim 0,05$ по сравнению $\sim 0,22$ для молибдена. При этом возрастает эффективность преобразования потока электронов в поток рентгеновских квантов от единиц до нескольких десятков процентов при высоких значениях E_0 [1]. Здесь также установлено, что для $Z > 20$ изменение эффективности излучательных переходов происходит по следующей эмпирической формуле: $P_a = 1 - 2 / \exp(Z / 20)$, используемой в расчётах.

2 Расчёт толщины анода и интенсивности тормозного излучения

Для расчёта суммарной толщины слоёв необходимо определить экстраполированный пробег электронов R_{ex} ($\text{г}/\text{см}^2$) в поверхностном слое тугоплавкого металла, который зависит от числа Z , атомной массы A и энергии электронов E_0 по известной аппроксимации Табата и Ито,

приведенной в работе [9, с. 419] с учётом процессов рассеивания и рекомбинации:

$$R_{\text{ex}} = a_1 \left[\frac{1}{a_2} \ln \left(1 + a_2 \frac{E_0}{\alpha_0} \right) - \frac{a_3 \frac{E_0}{\alpha_0}}{1 + a_4 \left(\frac{E_0}{\alpha_0} \right)^{a_5}} \right], \quad (2.1)$$

$$a_1 = (0,2335 \cdot A) / Z^{1,209};$$

$$a_2 = 1,78 \cdot 10^{-4} \cdot Z; \quad a_3 = 0,9891 - 3,01 \cdot 10^{-4} \cdot Z;$$

$$a_4 = 1,468 - 1,180 \cdot 10^{-2} \cdot Z; \quad a_5 = 1,232 / Z^{0,109}.$$

Расчёт по формуле (2.1) для вольфрама даёт следующие значения для соответствующих энергий: $R_{\text{ex}} = 0,0079 \text{ г/см}^2$ для $E_0 = 100 \text{ кэВ}$; $R_{\text{ex}} = 0,0228 \text{ г/см}^2$ для $E_0 = 200 \text{ кэВ}$; $R_{\text{ex}} = 0,0419 \text{ г/см}^2$ для $E_0 = 300 \text{ кэВ}$; $R_{\text{ex}} = 0,0641 \text{ г/см}^2$ для $E_0 = 400 \text{ кэВ}$. Погрешность вычислений составляет менее 8,4% для $E_0 \leq 1 \text{ МэВ}$. Результаты расчётов по формуле (2.1) для величины экстраполированного пробега R_{ex} (г/см²) в молибдене и вольфраме приведены на рисунке 2.1 для интервала энергий электронов E_0 от 100 до 400 кэВ. При пробеге быстрых электронов через слой молибдена или вольфрама возникает сильное флуоресцентное, рентгеновское излучение, которое изотропно рассеивается по всем направлениям и частично поглощается.

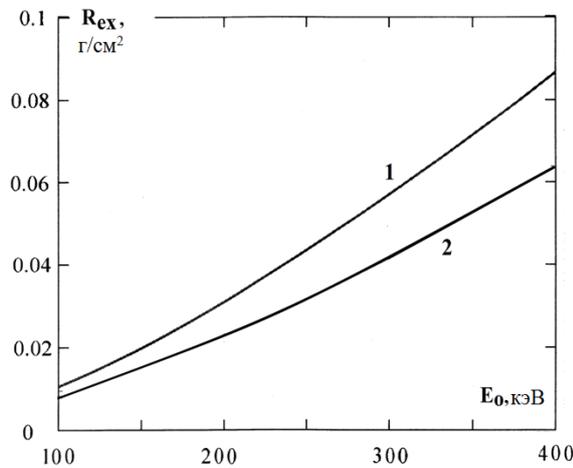


Рисунок 2.1 – Экстраполированный пробег электронов R_{ex} (г/см²) в молибдене (1) и вольфраме (2)

Величина полного поглощения зависит от энергии первичных электронов по экспоненциальной зависимости Y / Y_0 , где Y, Y_0 интенсивности рентгеновского излучения в глубине слоя и на поверхности соответственно, что показано на рисунке 2.2. Видно, что глубина поглощения $R_L = R_{\text{ex}} / \rho_w$, (ρ_w – удельный вес, г/см³) в вольфраме составляет величину от 7,5 до 40 мкм для соответствующих энергий ускоренных электронов E_0 . Для молибдена расчётная глубина поглощения примерно в 2 раза больше. Следовательно, толщина поверхностного слоя тяжёлого, тугоплавкого металла должна соответствовать

указанным диапазонам расчётных величин для соответствующих энергий электронов E_0 .

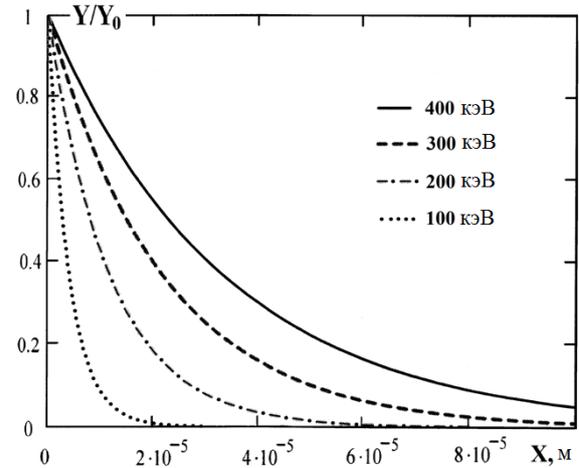


Рисунок 2.2 – Поглощение флуоресцентного, рентгеновского излучения в вольфраме при различной энергии первичных электронов E_0

Следующей задачей является определение величины интенсивности образующегося флуоресцентного излучения рентгеновских квантов, от решения которой зависят дальнейшие выводы. Данная задача решается здесь на основе исходного количества падающих за 1 секунду на поверхность анода электронов, пропорционального значению анодного тока $\sim i_a / q_e = 2,5 / 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ А / Кулон}$, где q_e – заряд электрона. Тогда интенсивность тормозного излучения, описываемая функцией $N_{\text{hv}}(E, Z)$ можно представить следующей формулой:

$$N_{\text{hv}}(E, Z) = N_0(Z) \cdot \left(\frac{E_0 - E}{E} \right)^{1,4} \cdot \left(\frac{E^{1,67}}{E_L^{1,67}} - 1 \right),$$

$$N_0(Z) = \frac{i_a}{q_e S_a R_L} \cdot \frac{T_i}{Q} k_1 P(Z) P_a(Z), \quad (2.2)$$

где S_a – площадь анода, м²; T_i – длительность импульсов тока, с; Q – скважность импульсов тока; $k_1 = 0,064$ – эмпирический коэффициент [5]; $E_L = 8,0 \text{ кэВ}$ – минимальная энергия переходов KLL , используемая для расчётов. Произведение $S_a \cdot R_L$ представляет объём, в котором происходит эффективное возбуждение тормозного рентгеновского излучения. Показатели степенных функций, равные величинам 1,4 и 1,67, выбраны на основе экспериментальных данных [6]–[8], которые согласуются с теориями Крамерса и Вентцеля, изложенными в работе Блохина [10]. Функция $N_0(Z)$ имеет размерность концентрации пропорциональной интенсивности рентгеновского излучения $N_{\text{hv}}(E, Z) \sim 1/\text{м}^3$, а толщина слоя молибдена или вольфрама равна здесь величине глубины поглощения R_L для максимальной энергии электронов E_0 , падающих на поверхность анода. Расчёт для вольфрама соотношения $N_{\text{hv}}(E, Z) / N_0(Z)$ в виде соответствующей

шей функции в зависимости от отношения E/E_L по формуле (2.2) представлен на рисунке 2.3 в линейных координатах для значения $R_L = 40$ мкм, $N_0(Z) = 3,8 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$.

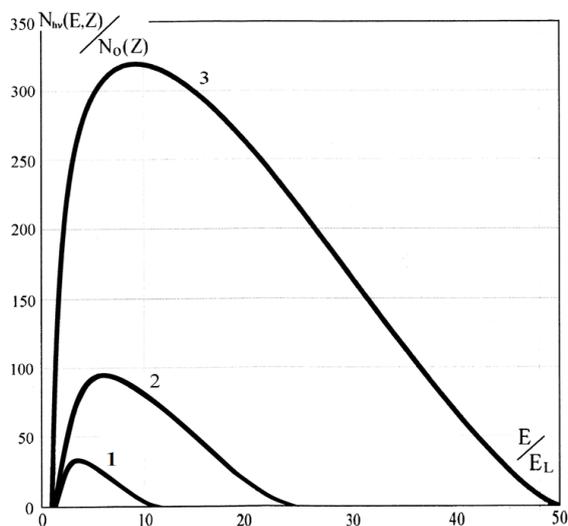


Рисунок 2.3 – Зависимость безразмерной, расчётной функции $N_{hv}(E, Z) / N_0(Z)$ от величины отношения E/E_L для максимального значения энергии электронов $E_{01} = 100$ кэВ (кривая 1), $E_{02} = 200$ кэВ (кривая 2), $E_{03} = 400$ кэВ (кривая 3) для вольфрама

На длине экстраполированного пробега электроны, обладающие значительной кинетической энергией, претерпевают столкновения и передают часть своей энергии атомам решётки металла при столкновении с электронами K, L уровней посредством их излучательных и безизлучательных (Оже) переходов. Кроме внутренних электронов в атомной оболочке имеются также и свободные электроны в зоне проводимости, концентрация которых в металлах молибдена и вольфрама значительна и составляет величину $N_e \sim 10^{22} \text{ м}^{-3}$. Следовательно, можно предположить, что при интенсивностях потока падающих на анод электронов, сопоставимых с N_e , возникает их лавинное размножение, зависящее от энергии первичного пучка E_0 и атомного номера Z . На это указывают многочисленные опыты по измерению интенсивности тормозного рентгеновского излучения, обладающего сверхлинейной зависимостью с показателем в степени $\sim 1,4 - 1,68$ при энергиях, падающих на анод электронов $E \gg E_L$ [6]–[8]. Тогда полная расчётная интенсивность I_{hv} тормозного излучения для интервала $E_L \div E_0 = 400$ кэВ равна определённому интегралу от функции $N_{hv}(E, Z)$, что примерно соответствует величине концентрации свободных электронов N_e в вольфраме по следующей формуле, (м^{-3}):

$$I_{hv}(E, Z) = \frac{1}{E_L} \int_{E_L}^{E_0} N_{hv}(E, Z) dE = 3,4 \cdot 10^{21}. \quad (2.3)$$

Экстремальный вид расчётной функции $N_{hv}(E, Z)$ в зависимости от E хорошо согласуется с экспериментальными данными [1], [4], поэтому может использоваться в расчётах и для тонких трансмиссионных анодов.

3 Расчёт интенсивности характеристического рентгеновского излучения

Образование сложного спектра линий характеристического излучения вольфрама изучено во многих работах [4]–[7]. В работе Маренкова и Комяк [11] приведены расчётные данные для коэффициентов поглощения μ_{ql} множества элементов с учётом описания вероятностей элементарных процессов – ослабления, поглощения и рассеяния квантов рентгеновского излучения для основных K, L линий (525 линий). Эти данные были использованы здесь для всех расчётов, включая газовые потоки большой плотности. Линии спектра характеристического излучения описываются, преимущественно, вероятностной функцией Гаусса:

$$\Psi_{ql} = \frac{p_{ql} E_{ql} \omega_q}{\Delta E_{ql} \sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{E - E_{ql}}{\Delta E_{ql}} \right)^2 \right] \exp(-\tau_{ql} d), \quad (3.1)$$

где q – нумерует серию, к которой относится линия ($q = K, L$); l – нумерует линию внутри серии ($l = \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$); p_{ql} – вероятность излучения l -линии q -серии (табличные данные); ω_q – средний выход флуоресценции (табличные данные) для q -уровня; E_{ql} – энергия связи (ионизации) для соответствующего уровня, кэВ; ΔE_{ql} – полуширина линии спектра для соответствующего уровня, кэВ; τ_{ql} – коэффициент поглощения для рентгеновского излучения, см^{-1} (табличные данные); d – толщина молибденового или вольфрамового слоя, м. Интенсивность одной линии спектра определяется определённым интегралом:

$$I_{ql} = F_q \int_{E_{ql-}}^{E_{ql+}} \Psi_{ql}(E) dE, \quad (3.2)$$

где E_{ql-} и E_{ql+} – верхний и нижний пределы интегрирования на уровне $\pm 0,25$ кэВ от соответствующей энергии ql -серии. Здесь функция

$$F_q = [(E_0 / E_q) \ln(E_0 / E_q) - E_0 / E_q + 1] (1 + \Delta_q)$$

– это доля возбуждаемого вторичного излучения за счёт тормозного излучения по формулам Грина – Косслета [4] при $\Delta_K = 1,06 \cdot 10^{-7} \cdot Z^4$ и $\Delta_L = 0,072 \cdot 10^{-7} \times Z^2 \cdot (Z - 20)^2$. Соответствующие расчётные величины для вольфрама здесь равны $F_K = 22,34$ и $F_L = 12,15$ при $E_0 = 400$ кэВ. График полной расчётной функции для интенсивности рентгеновского излучения вольфрама равной сумме всех спектральных линий с учётом тормозного и характеристического излучения в логарифмическом масштабе, представлен на рисунке 3.1, в

зависимости от соотношения E/E_L . На вставке рисунка 3.1 показана расчётная функция для интенсивности в линейном масштабе всех составляющих характеристического рентгеновского излучения для интервала $E = 57 - 70$ кэВ без учёта тормозного излучения при энергии падающих электронов $E_0 = 200$ кэВ. Из расчётов установлено, что интенсивность L -линий спектра незначительна и в дальнейшем она не учитывалась. Полная интегральная интенсивность характеристических линий рентгеновского излучения превосходит на несколько порядков тормозное излучение, поэтому при его прохождении через массивный медный анод толщиной 2 мм, это излучение и даёт основной вклад во вторичную фотолюминесценцию.

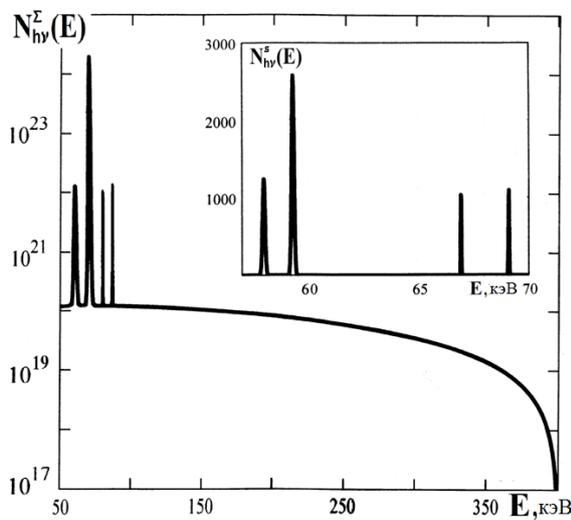


Рисунок 3.1 – Расчётная зависимость интенсивности для полной суммы характеристического и тормозного рентгеновского излучения вольфрамового слоя анода толщиной 40 мкм при $E_0 = 400$ кэВ

Максимумом по интегральной интенсивности $I_{K\alpha 1} = 1,3 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$ обладает основное характеристическое излучение вольфрама с энергией $E_{K\alpha 1} = 59,318$ кэВ. Поглощение тормозного и интенсивного характеристического рентгеновского излучения от вольфрама в медном аноде происходит в его толщине по экспоненте с коэффициентами поглощения μ_{qt} в интервале от 1,16 до 1,74 ($\text{см}^2/\text{г}$) для каждой из четырёх расчётных KLL -линий, однако интегральная интенсивность их весьма различна, согласно рисунка 3.1. Тормозное и характеристическое излучение для всего спектра вольфрама будет возбуждать вторичное фотолюминесцентное рентгеновское излучение в медном аноде с энергией $E_{Cu} = 8,04$ кэВ для основного, интенсивного, излучательного перепада электронов $K_{\alpha 1}$. Можно представить расчётный, определённый интеграл интенсивности этого излучения для $E_0 = 400$ кэВ на выходе из

медного трансмиссионного анода в камеру с плотными газовыми потоками без учёта его пространственного распределения с концентрацией (м^{-3}) в следующем виде:

$$\sum_l^4 N_{hv}^{\Sigma}(E) \left(E_{qt} / E_{Cu} \right) F_q \exp(-\mu_{qt} \rho_{Cu} h) \times \int_{E_{qt-}}^{E_{qt+}} \Psi_{qt}(E) dE = 2 \cdot 10^{27}, \quad (3.3)$$

где ρ_{Cu} – удельный вес меди, $\text{г}/\text{см}^3$. Следовательно, расчётная интенсивность (концентрация) рентгеновских квантов превышает концентрацию атомов и молекул для плотного потока газов, а учитывая, что один квант рентгеновского излучения обладает энергией намного превышающей тепловую энергию атомов и молекул в указанном объёме, то коэффициент ионизации будет близок к ~ 1 . Но это будет соответствовать нашему случаю для выбранного давления и состава газов. В других случаях эффективность ионизации может быть значительно ниже. Можно рассчитать коэффициент суммарного поглощения k_g для интенсивного, характеристического, рентгеновского излучения $E_{Cu} = 8,04$ кэВ в плотном газовом потоке с давлением газов 15 МПа по известному закону Бугера – Ламберта с атомами: С, N, O, H. Коэффициенты поглощения $\mu_C, \mu_N, \mu_O, \mu_H$ были взяты из работы [11]. Расчётная величина для удельного веса газов ρ_{cr} в камере сгорания по формулам из работы [12] составила величину $\rho_{cr} = 0,0187 \text{ г}/\text{см}^3$ для расхода топлива 0,754 кг/с при давлении 15 МПа и с расчётными долями С; N; O; H равными 0,15585; 0,18181; 0,62338; 0,03896 соответственно. Тогда коэффициент поглощения газов составляет $k_g = 0,82$ для нашей малогабаритной камеры сгорания ЖРД.

Заключение

Для принятой модели экстраполированного пробега электронов R_{ex} с максимальной энергией в интервале $E_0 = 100 - 400$ кэВ, с учётом их рассеивания и рекомбинации по аппроксимации Табата и Ито [9], получаются следующие величины глубины поглощения R_L от 7,5 до 40 мкм для вольфрама и от 15 до 80 мкм для молибдена. Был рассчитан спектр и интенсивность тормозного и характеристического излучения для вольфрама по предложенным формулам, которые качественно соответствуют экспериментальным результатам. Полученное аналитическое значение для функции интенсивности в виде суммы тормозного и характеристического излучения, в соответствии с аппроксимацией Гаусса, позволило решить определённый интеграл и получить численное значение полной интенсивности (концентрации) рентгеновского излучения, возбуждаемого фотолюминесценцией в медном

трансмиссионном аноде толщиной 2 мм. На основании вычисленной интегральной интенсивности $\sim 2 \cdot 10^{27} \text{ м}^3$ возбуждаемого рентгеновского характеристического излучения в меди с энергией квантов $E_{\text{Cu}} = 8,04 \text{ кэВ}$ был определён коэффициент суммарного поглощения газов $k_g = 0,82$ для интенсивного, характеристического, рентгеновского излучения в плотном газовом потоке с давлением 15 МПа в малогабаритной камере сгорания ЖРД длиной 100 мм по известному закону Бугера – Ламберта.

Таким образом, предложенная модель и расчёт указывают на возможность создания импульсного, высокоэффективного ионизатора плотных газовых потоков на основе поглощения интенсивного, характеристического, рентгеновского излучения от медного анода трансмиссионного типа, покрытого слоем вольфрама или молибдена. Импульсная мощность ионизатора составляет от 250 до 1000 кВт, поэтому он сможет ионизировать до высокой степени ионизации, близкой $\sim 100\%$, плотный (15 МПа) газовый поток атомов – водорода, углерода, азота, кислорода и молекул – воды, углекислого газа и азота в камере сгорания малогабаритного ЖРД или найти применение в соответствующих областях науки и техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов, С.А. Рентгеновские трубки технического назначения / С.А. Иванов. – Ленинград: Энергоатомиздат, 1989. – 200 с.
2. Степанов, Е.М. Ионизация в пламени и электрическое поле / Е.М. Степанов, Б.Г. Дьячков. – Москва: Металлургия, 1968. – 312 с.
3. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: справочник в 10 томах под редакцией академика В.П. Глушко. – Москва: ВИНТИ АН СССР, 1979.
4. Блохин, М.А. Рентгеноспектральный справочник / М.А. Блохин, И.Г. Швейцер. – Москва: Наука, 1982. – 376 с.
5. Рентгенотехника. Справочник в двух книгах; ред. Клюев В.В. – Москва: Машиностроение, 1992. – 480 с.
6. Feldman, L.C. Fundamentals of Surface and Thin Film Analysis / L.C. Feldman, J.W. Mayer. – Elsevier Science Publishing, New York, Amsterdam, London, 1986. – 342 p.
7. Чупрунов, Е.В. Рентгеновские методы исследования твёрдых тел / Е.В. Чупрунов, М.А. Фадеев, Е.В. Алексеев. – Н. Новгород: Нижегородский государственный университет, 2007. – 194 с.
8. Evans R.D. The atomic Nucleus / R.D. Evans. – New York: McGraw-Hill, 1955. – 243 p.
9. Машкович, В.П. Защита от ионизирующих излучений. Справочник / В.П. Машкович, А.В. Кудрявцева; 4-е издание. – Москва: Энергоатомиздат, 1995. – 496 с.
10. Блохин, М.А. Физика рентгеновских лучей / М.А. Блохин. – Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. – 518 с.
11. Маренков, О.С. Фотонные коэффициенты взаимодействия в рентгенорадиометрическом анализе: справочник / О.С. Маренков, Н.И. Комяк. – Ленинград: Энергоатомиздат, 1988. – 223 с.
12. Abramovich G.N. Applied Gas Dynamics. Vol. 1. / Abramovich G.N. – Moskva: Nauka. – 1991. – 597 p.

Поступила в редакцию 14.08.2022.

Работа выполнена при финансовой поддержке ООО «Аника М», г. Новосибирск.

Информация об авторах

Воронин Сергей Тимофеевич – к.ф.-м.н., доцент

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ ЦИРКУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ КУММЕРА КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ. II. НЕОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ENERGY PROPERTIES OF THE VECTOR CIRCULAR KUMMER BEAMS WITH TERMINATING POWER. II. THE NONHOMOGENEOUS POLARIZATION

S.S. Girdel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для векторных циркулярных 3D световых пучков Куммера с неоднородной поляризацией (ТМ-моды). При определенных ограничениях на свободные параметры такие пучки Куммера переносят конечную мощность. Вычислены и графически исследуются картины интенсивности и поперечные потоки энергии таких пучков.

Ключевые слова: параксиальные пучки, векторные циркулярные пучки, пучки Куммера, неоднородная поляризация, ТМ-моды.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_20. – EDN: DVBYBL

Abstract. The analytical expressions in the closed form for vector circular 3D light Kummer beams with nonhomogeneous polarization (TM-modes) are offered and investigated. At certain restrictions on free parameters such Kummer beams transfer terminating power. The pictures of intensity and crossflows of energy of such beams are calculated and are graphically investigated.

Keywords: paraxial beams, vector circular beams, Kummer beams, nonhomogeneous polarization, TM-modes.

For citation: Girdel, S.S. Energy properties of the vector circular Kummer beams with terminating power. II. The nonhomogeneous polarization / S.S. Girdel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 20–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_20 (in Russian). – EDN: DVBYBL

Введение

Чтобы охарактеризовать параксиальные световые пучки, как правило, [1]–[3] применяют аподизацию соответствующей амплитуды пучка функцией Гаусса. Тогда амплитудная функция, описывающая такой пучок, будет квадратично интегрируемой и поэтому такой параксиальный пучок будет обладать конечной мощностью. Таковы, например, хорошо изученные пучки Гаусса, Бесселя – Гаусса, Эрмита – Гаусса, Лагерра – Гаусса и т. д. Однако наличие гауссиана в комплексной амплитуде параксиального пучка совсем не обязательно. Нами в работе [4] было найдено новое решение параксиального волнового уравнения в декартовой системе координат. Это решение содержит функцию Куммера и не имеет гауссиана. Однако такие декартовы пучки Куммера обладают конечной переносимой мощностью при определенных найденных ограничениях, накладываемых на их свободные параметры. В [5] этот формализм был распространен на скалярные решения 3D параксиального волнового

уравнения в цилиндрических координатах и получены решения, описывающие скалярные циркулярные пучки Куммера. Установлены также условия их физической реализуемости. В [6] этот подход был распространен на векторные пучки Куммера в декартовой системе координат.

В настоящей работе этот формализм распространяется на новые векторные решения параболического уравнения в цилиндрической системе координат. Получены выражения, описывающие векторные циркулярные, неоднородно поляризованные 3D световые пучки Куммера с непрерывным комплексным индексом ν и конечной мощностью. Обсуждаются поляризационные и энергетические свойства таких пучков.

1 Циркулярные 3D пучки Куммера

Возьмем скалярное параксиальное уравнение

$$\left(\partial_{RR}^2 + \frac{1}{R} \partial_R + \frac{1}{R^2} \partial_{\varphi\varphi}^2 + 4i \partial_Z \right) f(R, \varphi, Z) = 0, \quad (1.1)$$

записанное в безразмерной форме в цилиндрической

системе координат (R, φ, Z) . Решения (1.1) описывают парааксиальные циркулярные световые пучки, см., например [7]. Пусть функция f – некоторое решение параболического уравнения (1.1), которое возьмем в безразмерном виде [8]

$$f = R^m \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^v M \left(-v, m+1; i \frac{R^2}{Q} \right) \cdot f_2(\varphi) = \tag{1.2}$$

$$= f_1(R) \cdot f_2(\varphi).$$

Здесь $\varphi = \text{arctg}(Y/X)$, $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$. x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные размеры пучка в направлениях вдоль осей OX и OY соответственно. M – функция Куммера. Q – безразмерный комплексный параметр пучка: $Q = Z - Q_0$, причем $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$. Азимутальную функцию $f_2(\varphi)$ возьмем в форме $f_2(\varphi) = \cos(m\varphi) + ib \sin(m\varphi)$, где m – параметр азимутальной модуляции; $b \in [-1, 1]$.

Функция f характеризует скалярные пучки Куммера. В [8] обсуждались векторные циркулярные пучки Куммера с однородной поляризацией. Чтобы перейти к неоднородно поляризованным пучкам Куммера, достаточно выбрать поперечную часть E_{\perp} векторной амплитуды $E = E_{\perp} + E_z e_z$ электрического поля светового пучка в виде $E_{\perp} = \nabla_{\perp} f$, где $\nabla_{\perp} = +\partial_R e_R + \frac{1}{R} \partial_{\varphi} e_{\varphi}$ – поперечный оператор набла.

Учитывая (1.2) находим выражения для поперечных и продольных частей векторных амплитуд циркулярного пучка Куммера с неоднородной поляризацией (для ТМ-мод)

$$E_{\perp} = f_2 \partial_R f_1 \cdot e_R + \frac{f_1}{R} \partial_{\varphi} f_2 \cdot e_{\varphi};$$

$$E_z = i\theta \left(\partial_{RR}^2 f_1 + \frac{\partial_R f_1}{R} - \frac{m^2 f_1}{R^2} \right) f_2;$$

$$H = \frac{\varepsilon}{n} \left(f_2 \partial_R f_1 \cdot e_{\varphi} - \frac{f_1}{R} \partial_{\varphi} f_2 \cdot e_R \right).$$

Здесь $\theta = 1/(kx_0) \cong 10^{-4}$ – безразмерный параметр парааксиальности пучка.

$$\partial_R f_1 = \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^v \cdot \left(m M \left(-v, m+1; i \frac{R^2}{Q} \right) - \frac{2ivR^2}{(m+1)Q} M \left(1-v, m+2; i \frac{R^2}{Q} \right) \right) R^{m-1};$$

$$\dots$$

$$\partial_{RR}^2 f_1 = \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^v \cdot \left(m(m-1) M \left(-v, m+1; i \frac{R^2}{Q} \right) - \frac{2iv(2m+1)R^2}{Q(m+1)} M \left(1-v, m+2; i \frac{R^2}{Q} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4v(1-v)R^4}{(m+1)(m+2)Q^2} M \left(2-v, m+3; i \frac{R^2}{Q} \right) \right) R^{m-2}.$$

Эти ТМ-моды зависят от комплексных параметров v, Q_0 и вещественного параметра m .

Чтобы векторные циркулярные пучки Куммера (ТЕ-моды) (1.2) переносили конечную мощность, необходимо, чтобы для векторной амплитуды E_{\perp} выполнялись условия её квадратичной интегрируемости (КИ). Несложно показать, что кратко условия КИ для ТМ-мод следующие: $Q''_0 > 0 \cup v' < -m/2$, где $v' = \text{Re}(v)$ – вещественная часть свободного комплексного параметра $v = v' + iv''$. Они, как видим, отличаются от условий КИ для циркулярных пучков Куммера с однородной поляризацией [8].

Таблица 1.1 – Условия КИ для 3D векторных циркулярных световых пучков Куммера (ТМ-моды) с непрерывным комплексным индексом v .

№	Ограничения на индекс $v = v' + iv''$ ($m = 0, 1, 2, \dots$; $Q''_0 > 0$);	Предел $ E_{\perp} $ при $R \rightarrow \infty$	Выполнение условий КИ
1	$v' = (1-m)/2$	$ E_{\perp} \rightarrow \text{const}$	нет
2	$-m/2 \leq v' < (1-m)/2$	$ E_{\perp} \rightarrow 0$	нет
3	$v' < -m/2$	$ E_{\perp} \rightarrow 0$	да

2 Вычисление характеристик

Для вычисления характеристик поляризации векторных циркулярных ТМ-мод Куммера введем отношение

$$\eta_c = E_{\varphi} / E_R = \text{tg}(\psi'_c + i\psi''_c) = \frac{f_1 \partial_{\varphi} f_2}{R f_2 \cdot \partial_R f_1},$$

тогда азимут главной оси эллипса поляризации световой волны равен

$$\varphi + \psi'_c = \varphi + \text{Re}(\text{arctg}(\eta_c)),$$

а ее эллиптичность γ будет

$$\gamma = \text{th} \psi''_c = \text{th}(\text{Im}(\text{arctg}(\eta_c))).$$

Усредненные по времени плотности энергии w и продольного S_z потоков энергии светового поля для векторных пучков Куммера с неоднородной поляризацией можно представить как [8]:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left(|f_2 \partial_R f_1|^2 + \frac{1}{R^2} |f_1 \partial_{\varphi} f_2|^2 \right); S_z = \frac{c}{n} w;$$

Плотность поперечного (по отношению к оси парааксиального пучка) потока энергии можно записать в виде [9]

$$S_{\perp} = -\frac{c}{8\pi n} \text{Re}(\varepsilon E_{\perp}^* \cdot E_z + \mu H_{\perp}^* \cdot H_z).$$

Для ТМ-мод $H_z = 0$ и поэтому

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} \theta \operatorname{Im} \left\{ \left(|f_2|^2 \partial_R f_1^* \cdot \mathbf{e}_R + \frac{f_2 f_1^*}{R} \partial_\varphi f_2^* \cdot \mathbf{e}_\varphi \right) \times \left(\partial_{RR}^2 f_1 + \frac{\partial_R f_1}{R} - \frac{m^2 f_1}{R^2} \right) \right\}.$$

Для функций Куммера M при расчетах использовались преобразования Куммера [10]

$$\partial_u M(a, b, u) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, u).$$

Следуя схеме Берри и Бекшаева [11]–[13], в выражении для $\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$ выделим явно плотность орбитального \mathbf{S}_o и спинового \mathbf{S}_s потоков энергии. После несложных, но громоздких преобразований находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_o &= \frac{c\varepsilon}{8\pi n R^3} \theta \times \\ &\times \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{e}_R \cdot R \partial_R f_1^* \left(|f_2|^2 R^2 \partial_{RR}^2 f_1 - f_1 |\partial_\varphi f_2|^2 \right) + \right. \\ &+ \left. \mathbf{e}_\varphi f_2 \partial_\varphi f_2^* \left(2f_1 R \partial_R f_1^* - m^2 |f_1|^2 - |R \partial_R f_1|^2 \right) \right\}; \\ \mathbf{S}_s &= \frac{c\varepsilon}{8\pi n R^3} \theta \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{e}_R \cdot f_1 R \partial_R f_1^* \left(|\partial_\varphi f_2|^2 - m^2 |f_2|^2 \right) + \right. \\ &+ \left. \mathbf{e}_\varphi \cdot f_2 \partial_\varphi f_2^* \left(f_1^* \cdot \partial_{RR}^2 f + |R \partial_R f_1|^2 - f_1^* R \partial_R f_1 \right) \right\}; \end{aligned}$$

Как видим, орбитальный и спиновый потоки энергии имеют, в общем случае, радиальные и азимутальные компоненты.

Физические свойства векторных циркулярных ТМ пучков Куммера в значительной степени зависят от азимутальной функции $f_2(\varphi)$.

А) Пусть $f_2(\varphi) = \exp(im\varphi)$. Тогда плотности энергии w , плотности поперечного потока энергии \mathbf{S}_\perp не зависят от азимута φ , поэтому для исследования интенсивности пучка Куммера можно ограничиться продольным сечением пучка. Картины интенсивности будут представлять собой гауссовоподобные пики и/или кольца.

Сначала обсудим поляризацию. Неоднородная поляризация и поперечные потоки энергии для гауссовых ТМ мод обсуждались в [14]. В общем случае поляризация циркулярных ТМ пучков Куммера является эллиптической. На оси пучка поляризация – строго циркулярная (рисунок 2.1). Затем при возрастании R эллиптичность у эллипсов поляризации быстро уменьшается до нуля. При дальнейшем увеличении R направления вращения у эллипсов поляризации постепенно изменяются на противоположные (при переходе через линейную азимутальную поляризацию). Потом снова поляризация постепенно становится круговой. После этого главные оси эллипсов поляризации поворачиваются на 90° . При дальнейшем возрастании расстояния R от оси пучка эллиптическая поляризация постепенно

стремится к линейной радиальной (рисунок 2.1). Итак, при возрастании расстояния R от оси пучка неоднородная поляризация ТМ пучков Куммера претерпевает следующую трансформацию: поляризация круговая – линейная азимутальная – круговая – линейная радиальная.

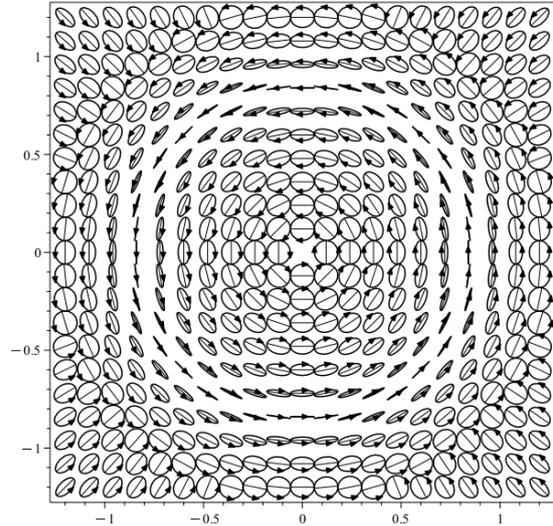


Рисунок 2.1 – Эллипсы поляризации векторных ТМ-мод Куммера. Параметры пучка: $\nu' = -1,5$; $\nu'' = 0$; $m = 1$; $Q_0 = 1$; $Z = 1$

Таким образом, при $R \rightarrow 0$ поляризация стремится к циркулярной, при $R \rightarrow \infty$ поляризация стремится к линейной радиальной. При $m = 0$ почти везде имеем строго линейную радиальную поляризацию. Так как параметр η_c не зависит от азимута φ , то главные оси эллипсов поляризации располагаются вдоль спиральных кривых относительно оси Z . Направления эллипсов поляризации образуют спирали. Эти спирали постепенно, с увеличением расстояния Z , раскручиваются. Ранее возможность спиральной поляризации обсуждал Гори [3]. Здесь – более общий случай. В пучках Куммера (ТМ-моды) вдоль спиральных кривых ориентируются не линии, а главные оси эллипсов поляризации.

Спиральные поперечные потоки энергии для векторных пучков Лапласа – Гаусса обсуждались в [15]. Для циркулярных ТМ мод Куммера общие поперечные потоки энергии \mathbf{S}_\perp также сначала направлены вдоль спиралей, которые постепенно раскручиваются. Поэтому векторные циркулярные пучки Куммера – это спиральные пучки по интенсивности. При малых значениях параметра Q_0'' четко видно множество колец интенсивности.

Направления потоков энергии зависят только от R и не зависят от азимута φ . Проанализируем характерные особенности поперечных потоков энергии циркулярных пучков Куммера

(ТМ-моды) от свободных параметров Z , Q_0'' , m , ν' , ν'' . Эти зависимости являются нелинейными и достаточно сложными.

С возрастанием расстояния Z поперечные потоки энергии расширяются и качественно спирали изменяются.

С увеличением параметра Q_0'' спирали поперечных потоков энергии постепенно раскручиваются.

При изменении параметра ν'' условия КИ не изменяются и картины качественно изменяются слабо.

При $m = 0$ имеем строго радиальные потоки. С увеличением m радиальные потоки постепенно превращаются в спиральные, так что вблизи оси пучка $S_{\perp} \propto e_{\varphi}$, т. е. поперечные потоки энергии становятся строго азимутальными.

При убывании параметра ν' азимутальный поток энергии постепенно превращается в

радиальный. При этом спирали поперечного потока энергии постепенно раскручиваются. Область азимутального характера потоков энергии постепенно возрастает, а сам процесс перехода от азимутальным к радиальным потокам энергии происходит более плавно.

Б) Пусть имеем явную азимутальную зависимость пучка в форме $f_2 = \cos(m\varphi)$. Тогда картины интенсивности и потоков энергии модулируются функцией $f_2 = \cos(m\varphi)$ и являются более сложными.

Нами проводилось аналитическое и графическое исследование поперечных S_{\perp} потоков энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды). Во всех случаях $\nu'' = 0$. Взяв, для простоты, азимутальный параметр модуляции $b = 1$. На всех рисунках масштаб интенсивности условный.

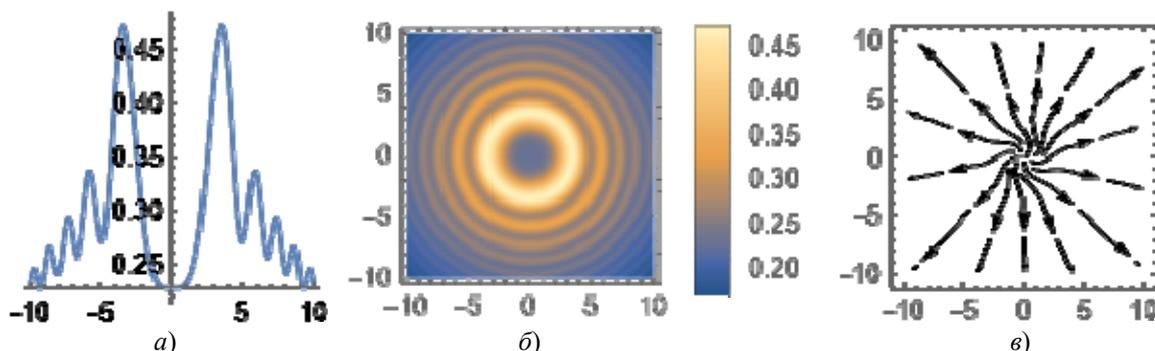


Рисунок 2.2 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$:

- а) интенсивность в продольном сечении XOZ ;
- б) интенсивность в поперечном сечении XOY ; линии потока вместе с его интенсивностью;
- в) линии поперечного потока. Используемые параметры: $\nu' = -0,94$; $m = 1$; $Q_0 = 0,01$; $Z = 3,18$

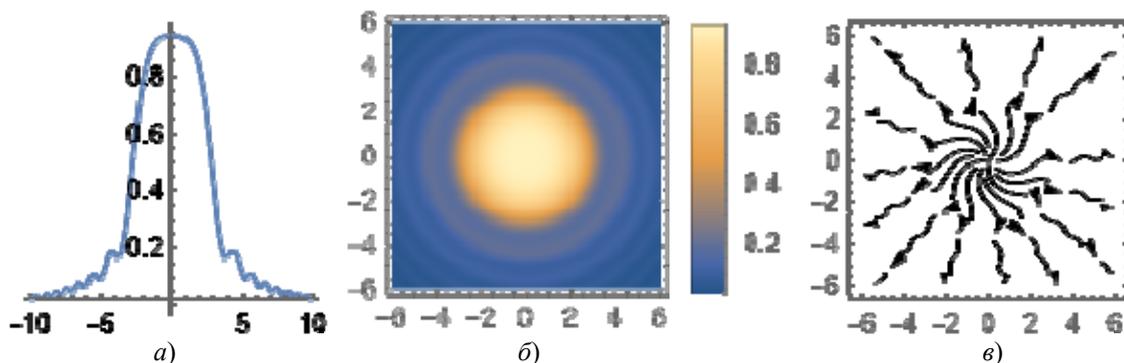


Рисунок 2.3 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$:

- а) интенсивность в продольном сечении XOZ ;
- б) интенсивность в поперечном сечении XOY ; линии потока вместе с его интенсивностью;
- в) линии поперечного потока.

Используемые параметры: $\nu' = -0,6$; $m = 1$; $Q_0 = 0,01$; $Z = 1,88$

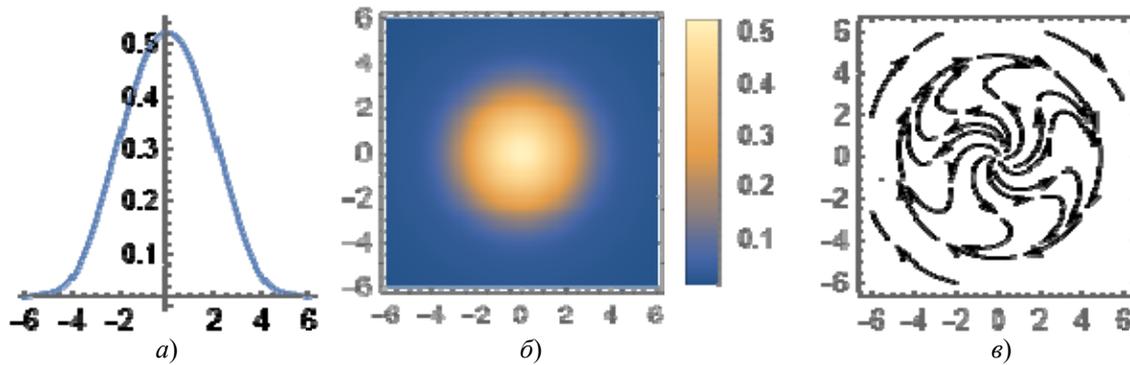


Рисунок 2.4 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$: а) интенсивность в продольном сечении XOZ ; б) интенсивность в поперечном сечении XOY ; линии потока вместе с его интенсивностью; в) линии поперечного потока. Используемые параметры: $\nu' = -0,6$; $m = 1$; $Q_0 = 0,9$; $Z = 2,93$

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие новые типы пучков – векторные параксиальные циркулярные световые ТМ пучки Куммера с непрерывным комплексным индексом ν , переносящие конечную мощность и поэтому физически реализуемые. Они характеризуются четырьмя свободными параметрами: двумя вещественными – (b , m) и двумя комплексными параметрами (Q_0 , ν). Найдены явные выражения для плотностей орбитального S_o и спинового S_s потоков энергии.

Сформулированы условия физической реализуемости циркулярных векторных ТМ пучков Куммера с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Выполнено графическое моделирование их поперечных потоков энергии и интенсивности. Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим следствиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
2. Абрамочкин, Е.Г. Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников // Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.
3. Gori, F. Bessel – Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Opt. Commun. – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.
4. Гиргель, С.С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.
5. Гиргель, С.С. 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (52). – С. 18–21.

6. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 13–16.

7. Bandres, Miguel A. Circular beams / Miguel A. Bandres, Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.

8. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера с переносимой конечной мощностью. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 16–20.

9. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных бessel-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 1. – С. 49–52.

10. Справочник по специальным функциям; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

11. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.

12. Bekshaev, A.Y. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Optics Communications. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

13. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

14. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация // С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.

15. Гиргель, С.С. Энергетические свойства векторных вихревых пучков Лапласа – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 13–17.

Поступила в редакцию 05.10.2022.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

УДК 539.12.01

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_25

EDN: GOLFMT

РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПАРЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ d -СОСТОЯНИЙ РАССЕЙЯНИЯ

В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

SOLUTION OF RELATIVISTIC PARTIAL EQUATIONS FOR SCATTERING d -STATES

V.N. Kapshai, A.A. Grishechkina*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Определены в релятивистском конфигурационном представлении и выражены через элементарные функции парциальные функции Грина для d -состояний рассеяния. Для полученных функций Грина найдены асимптотики при больших значениях координаты, а также определен их нерелятивистский предел. Точно решены четыре квазипотенциальных парциальных уравнения в релятивистском конфигурационном представлении для состояний рассеяния при моделировании взаимодействия потенциалами «дельта-сфера» и «суперпозиция двух дельта-сфер». Определены парциальные амплитуды и сечения рассеяния.

Ключевые слова: квазипотенциальный подход, релятивистское конфигурационное представление, функции Грина, состояние рассеяния, d -состояние, дельта-потенциал.

Для цитирования: Капшай, В.Н. Решение релятивистских парциальных уравнений для d -состояний рассеяния / В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 25–30. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_25. – EDN: GOLFMT

Abstract. Partial Green's functions for d -states are defined in the relativistic configurational representation and expressed in terms of elementary functions. For the Green's functions obtained the asymptotics are found for large values of the coordinate, and their nonrelativistic limit is determined. Four quasipotential partial equations in the relativistic configuration representation for scattering states are solved exactly in cases of “delta-sphere potential” and “superposition of two delta-sphere potentials”. The partial amplitudes and the scattering cross sections are determined.

Keywords: quasipotential approach, relativistic configurational representation, Green's functions, scattering state, d -state, delta function potential.

For citation: Kapshai, V.N. Solution of relativistic partial equations for scattering d -states / V.N. Kapshai, A.A. Grishechkina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 25–30. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_25 (in Russian). – EDN: GOLFMT

Введение

Для описания составных систем релятивистских частиц в квантовой теории поля было выведено уравнение Бете – Солпитера. Его решение затруднено наличием параметра относительного времени. С целью преодоления этой проблемы Логуновым и Тавхелидзе был предложен ковариантный одновременный подход в квантовой теории поля, интегральные уравнения которого трёхмерны. Иной вариант 3D-редукции четырехмерных полевых уравнений на основе гамильтоновой формулировки теории поля был осуществлён Кадышевским. Аналогичность полученных этими авторами уравнений квантовомеханическому уравнению Липпмана – Швингера (интегральной форме уравнения Шрёдингера для состояний рассеяния) нашла своё отражение в терминах «квазипотенциальные уравнения» и «квазипотенциальный подход».

Первоначально квазипотенциальные уравнения были сформулированы в импульсном представлении (ИП). При переходе в координатное представление с использованием преобразования Фурье получают более сложные интегродифференциальные уравнения. Чтобы избежать этого усложнения, в работах Кадышевского, Мир-Касимова и Скачкова была предложена альтернативная возможность: для перехода в дуальное импульсному представлению использовать разложение по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы Лоренца – была сформулирована концепция релятивистского конфигурационного представления (РКП).

Преимущество интегральных уравнений в РКП по сравнению с уравнениями в ИП заключается в их наглядности. Например, в РКП уже на основе вида потенциала ясно, возможны ли в соответствующем ему поле состояния рассеяния, связанные состояния, резонансные состояния

рассматриваемой системы. Для ряда потенциалов, заданных в РКП, были найдены точные решения интегральных уравнений. Уравнения, сформулированные в конфигурационном представлении при использовании других потенциалов, могут служить важной и полезной альтернативой уравнениям, записанным в импульсном представлении, при численном исследовании их решений.

Разумеется, что как аналитическое, так и численное решение трехмерных уравнений радикально упрощается при возможности сведения их к одномерным уравнениям. Такая возможность реализуется с помощью парциального разложения всех функций теории (волновых функций, функций Грина (ФГ), потенциалов) по сферическим гармоникам. В результате этой операции получают уравнения, которые соответствуют состояниям, характеризующимся определённым орбитальным квантовым числом l . В большинстве работ ранее рассматривались сферически-симметричные s -состояния ($l = 0$). Уравнения для p -состояний ($l = 1$) были получены в [1]. В настоящей работе мы выделяем из трёхмерного уравнения парциальное уравнение для d -состояний ($l = 2$).

Для формулировки и последующего решения парциальных уравнений в РКП необходим явный вид соответствующих функций Грина. Для его определения необходимо осуществить переход из ИП в РКП при помощи соответствующего интегрального преобразования. Для состояний, характеризующихся орбитальными квантовыми числами $l = 0$ и $l = 1$ ФГ найдены ранее в [1], [2]. В настоящей статье описана процедура нахождения явного вида ФГ в РКП для состояний с $l = 2$. Произведено также точное решение четырех парциальных уравнений (уравнений Кадышевского, Логунова – Тавхелидзе и их модифицированных версий) с использованием модельного потенциала «дельта-сфера» и суперпозиции двух таких потенциалов. На основании полученных волновых функций определены амплитуды и сечения рассеяния, характеризующие процесс взаимодействия двух частиц.

1 Нахождение явного вида парциальных функций Грина для орбитального квантового числа $l = 2$

Для описания состояний рассеяния системы двух частиц равной массы ($m_1 = m_2 = m$) в импульсном представлении используем ФГ $G_{(j)}(E_q, k)$, имеющие вид [3]:

$$G_{(1)}(E_q, k) = \frac{1/m}{2E_q - 2E_k + i\epsilon};$$

$$G_{(2)}(E_q, k) = \frac{1}{E_q^2 - E_k^2 + i\epsilon};$$

$$G_{(3)}(E_q, k) = \frac{E_k/m}{E_q^2 - E_k^2 + i\epsilon}; \tag{1.1}$$

$$G_{(4)}(E_q, k) = \frac{1}{2E_k(E_q - E_k + i\epsilon)};$$

где индекс j соответствует определенному уравнению ($j = 1$ – модифицированное уравнение Кадышевского (МК), $j = 2$ – уравнение Логунова-Тавхелидзе (LT), $j = 3$ – модифицированное уравнение Логунова – Тавхелидзе (MLT), $j = 4$ – уравнение Кадышевского (K)), $E_k = \sqrt{m^2 + k^2}$, k – релятивистский импульс, $2E_q = 2mch\chi_q$ – энергия системы двух частиц.

Осуществляя переход из импульсного представления в РКП, можно выразить парциальные ФГ через функции (1.1). Явный вид парциальных ФГ в РКП для s - и p -состояний (орбитальное квантовое число $l = 0; 1$ соответственно) определен ранее в [2], [1]. Для описания d -состояний рассеяния выразим парциальные ФГ в РКП следующим образом [3]:

$$G_{2(j)}(\chi_q, r, r') = \tag{1.2}$$

$$= \frac{2m}{\pi} \int_0^\infty s_2(\chi_k, r) G_{(j)}(mch\chi_q, msh\chi_k) s_2^*(\chi_k, r') d\chi_k,$$

где функция $s_2(\chi_k, r)$ имеет вид:

$$s_2(\chi_k, r) = \left((1 + m^2 r^2) \sin \chi_k mr + 3mr \operatorname{cth} \chi_k \cos \chi_k mr - 3 \operatorname{cth}^2 \chi_k \sin \chi_k mr \right) / \left((1 - imr)(2 - imr) \right), \tag{1.3}$$

χ_k – быстрота, связанная с импульсом k выражением $k = msh\chi_k$, r – релятивистская координата.

Опишем подробно процедуру нахождения явного вида ФГ модифицированного уравнения Кадышевского. После подстановки (1.3) в (1.2) функцию $G_{2(1)}(\chi_q, r, r')$ можно представить в виде:

$$G_{2(1)}(\chi_q, r, r') = \frac{-\left(g_{2(1)}^{(-)}(\chi_q, r, r') + g_{2(1)}^{(+)}(\chi_q, r, r') \right)}{2\pi(mr' - i)(mr' - 2i)(mr + i)(mr' + 2i)},$$

где введено обозначение

$$g_{2(1)}^{(\pm)}(\chi_q, r, r') = \mp \left(\frac{1}{m} + m(r^2 + r'^2 + m^2 r^2 r'^2) \right) I_0(r \pm r') \pm 3(r \pm r')(1 \pm m^2 r r') I_1(r \pm r') \pm \left(\frac{6}{m} + 3m(r'^2 \pm 3r r' + r^2) \right) I_2(r \pm r') \mp 9(r \pm r') I_3(r \pm r') \mp \frac{9}{m} I_4(r \pm r'). \tag{1.4}$$

Величины $I_n(\rho)$ в выражении (1.4) определяются в соответствии с соотношениями

$$I_n(\rho) = \begin{cases} \int_0^\infty \left(\frac{\text{ch } \chi_k}{\text{sh}(\chi_k + i\gamma)} \right)^n \frac{\cos \chi_k mr}{\text{ch } \chi_k - \text{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k, \\ n = 0, 2, 4; \\ \int_0^\infty \left(\frac{\text{ch } \chi_k}{\text{sh}(\chi_k + i\gamma)} \right)^n \frac{\sin \chi_k mr}{\text{ch } \chi_k - \text{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k, \\ n = 1, 3. \end{cases} \quad (1.5)$$

Мы добавили бесконечно малую мнимую часть γ аргумента функции $\text{sh}(\chi_k + i\gamma)$, чтобы осуществить сдвиг особых точек подынтегральных функций с вещественной оси в комплексную плоскость. Эти особые точки в исходных выражениях представляют собой устранимые особенности, поэтому знак вспомогательной величины γ может быть произвольным.

Интегралы $I_0(\rho)$, $I_1(\rho)$ и $I_2(\rho)$ вычислены нами ранее в работе [1], где при их записи использованы несколько иные обозначения. Для вычисления интегралов $I_3(\rho)$ и $I_4(\rho)$ применим метод, описанный в работе [1], основанный на сведении исходных интегралов к интегралам по замкнутому контуру в комплексной плоскости и последующем применении теоремы Коши о вычетах [4], [5]. Выпишем результаты вычисления всех четырех интегралов:

$$\begin{aligned} I_0(\rho) &= \frac{i\pi}{\text{sh}(\pi m\rho)} \frac{\text{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho)}{\text{sh } \chi_q}, \\ I_1(\rho) &= \frac{\pi}{2\text{sh}(\pi m\rho)} \left[2 \frac{\text{ch } \chi_q}{\text{sh}^2 \chi_q} \text{ch}((i\chi_q + \pi)m\rho) + \frac{\text{ch}(\pi m\rho)}{1 - \text{ch } \chi_q} - \frac{1}{1 + \text{ch } \chi_q} \right], \\ I_2(\rho) &= \frac{i\pi}{2\text{sh}(\pi m\rho)} \left[2 \frac{\text{ch}^2 \chi_q}{\text{sh}^3 \chi_q} \text{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho) + \frac{\text{im}\rho \text{ch}(\pi m\rho)}{1 - \text{ch } \chi_q} - \frac{\text{im}\rho}{1 + \text{ch } \chi_q} \right], \\ I_3(\rho) &= \frac{\pi}{2\text{sh}(\pi m\rho)} \left[2 \frac{\text{ch}^3 \chi_q}{\text{sh}^4 \chi_q} \text{ch}((i\chi_q + \pi)m\rho) + \frac{\text{ch}(\pi m\rho)}{2(1 - \text{ch } \chi_q)} \left(2 - m^2 \rho^2 - \frac{1}{1 - \text{ch } \chi_q} \right) - \frac{1}{2(1 + \text{ch } \chi_q)} \left(2 - m^2 \rho^2 - \frac{1}{1 + \text{ch } \chi_q} \right) \right], \\ I_4(\rho) &= \frac{i\pi}{2\text{sh}(\pi m\rho)} \left[2 \frac{\text{ch}^4 \chi_q}{\text{sh}^5 \chi_q} \text{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\text{im}\rho \text{ch}(\pi m\rho)}{6(1 - \text{ch } \chi_q)} \left(8 - m^2 \rho^2 - \frac{3}{1 - \text{ch } \chi_q} \right) - \\ &\left. - \frac{\text{im}\rho}{6(1 + \text{ch } \chi_q)} \left(8 - m^2 \rho^2 - \frac{3}{1 + \text{ch } \chi_q} \right) \right]. \end{aligned}$$

Воспользуемся полученными выражениями (1.6) и запишем явный вид функции $G_{2(1)}(\chi_q, r, r')$ и аналогично – ФГ остальных уравнений, представляя их в виде:

$$G_{2(j)} = \frac{K_{q(j)}}{2i} \frac{G_{2(j)}^{(-)}(\chi_q, r, r') + G_{2(j)}^{(+)}(\chi_q, r, r')}{(mr' - i)(mr' - 2i)(mr + i)(mr + 2i)}, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} G_{2(1)}^{(\pm)}(\chi_q, r, r') &= \frac{1}{\text{sh}(\pi m(r \pm r'))} \times \\ &\times \left[\mp m^2 (r^2 + r'^2 + (mrr')^2) \times \right. \\ &\times \text{sh}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \mp \\ &\mp 3im(r \pm r')(1 \pm m^2 rr') \text{cth } \chi_q \times \\ &\times \text{ch}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \pm \\ &\pm 3m^2 (r^2 \pm 3rr' + r'^2) \text{cth}^2 \chi_q \times \\ &\times \text{sh}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \pm \\ &\pm 9im(r \pm r') \text{cth}^3 \chi_q \text{ch}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \mp \\ &\left. \mp (1 - 3 \text{cth}^2 \chi_q)^2 \text{sh}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2(2)}^{(\pm)}(\chi_q, r, r') &= \frac{1}{\text{sh}(\pi m(r \pm r')/2)} \times \\ &\times \left[\mp m^2 (r^2 + r'^2 + (mrr')^2) \times \right. \\ &\times \text{sh}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \mp \\ &\mp 3im(r \pm r')(1 \pm m^2 rr') \text{cth } \chi_q \times \\ &\times \text{ch}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \pm \\ &\pm 3m^2 (r^2 \pm 3rr' + r'^2) \text{cth}^2 \chi_q \times \\ &\times \text{sh}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \pm \\ &\pm 9im(r \pm r') \text{cth}^3 \chi_q \text{ch}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \mp \\ &\left. \mp (1 - 3 \text{cth}^2 \chi_q)^2 \text{sh}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2(3)}^{(\pm)}(\chi_q, r, r') &= \frac{1}{\text{ch}(\pi m(r \pm r')/2)} \times \\ &\times \left[\mp m^2 (r^2 + r'^2 + (mrr')^2) \times \right. \\ &\times \text{ch}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \mp \\ &\mp 3im(r \pm r')(1 \pm m^2 rr') \text{cth } \chi_q \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \pm \\ & \pm 3m^2\left(r^2 \pm 3rr' + r'^2\right) \operatorname{cth}^2 \chi_q \times \\ & \times \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \pm \\ & \pm 9im\left(r \pm r'\right) \operatorname{cth}^3 \chi_q \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \mp \\ & \mp \left(1 - 3 \operatorname{cth}^2 \chi_q\right)^2 \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \Big], \\ & G_{2(4)}^{(\pm)}\left(\chi_q, r, r'\right) = \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\pi m\left(r \pm r'\right)\right)} \times \\ & \times \left[\mp im^2\left(r^2 + r'^2 + \left(mrr'\right)^2\right) \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \mp \right. \\ & \mp 3im\left(r \pm r'\right)\left(1 \pm m^2 rr'\right) \operatorname{cth} \chi_q \times \\ & \times \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \pm \\ & \pm 3m^2\left(r^2 \pm 3rr' + r'^2\right) \operatorname{cth}^2 \chi_q \times \\ & \times \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \pm \\ & \pm 9im\left(r \pm r'\right) \operatorname{cth}^3 \chi_q \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \mp \\ & \mp \left(1 - 3 \operatorname{cth}^2 \chi_q\right)^2 \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \mp \\ & \left. \mp \left(1 + m^2 r^2\right)\left(1 + m^2 r'^2\right) i \operatorname{sh} \chi_q \operatorname{sh}\left(\pi m\left(r \pm r'\right) / 2\right) \right]. \end{aligned}$$

В выражении (1.7) введен коэффициент $K_{q(j)}$, который для каждой из ФГ определен следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{q(1)} &= K_{q(3)} = \frac{1}{m \operatorname{sh} \chi_q}, \\ K_{q(2)} &= K_{q(4)} = \frac{2}{m \operatorname{sh} 2\chi_q}. \end{aligned}$$

Проанализируем полученные ФГ. При $r \gg 1$ функциям Грина (1.7) соответствуют асимптотические выражения:

$$\lim_{r \gg 1} G_{2(j)}\left(\chi_q, r, r'\right) = K_{q(j)} e^{im\chi_q r} R\left(\chi_q, r'\right), \quad (1.8)$$

в которых введено обозначение

$$\begin{aligned} R\left(\chi_q, r'\right) &= -\frac{\left(1 + m^2 r'^2 - 3 \operatorname{cth}^2 \chi_q\right) \sin\left(\chi_q m r'\right)}{\left(m r' - 2i\right)\left(m r' - i\right)} - \\ & - \frac{3m r' \operatorname{cth} \chi_q \cos\left(\chi_q m r'\right)}{\left(m r' - 2i\right)\left(m r' - i\right)}. \end{aligned}$$

Асимптотическое поведение (1.8) ФГ (1.7) легко прослеживается при помощи графиков зависимости действительной и мнимой частей ФГ от r , построенных при $\chi_q = 1$, $r' = 1$ и $m = 1$ (рисунки 1.1, 1.2).

ФГ уравнения Кадышевского и Логунова – Тавхелидзе при $r \gg 1$ ведут себя одинаково. В указанном пределе ФГ модифицированных версий уравнений также изменяются одинаково. Кроме того, при $m \rightarrow \infty$ и $\chi_q \rightarrow 0$ все четыре ФГ преобразуются в функцию

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \chi_q \rightarrow 0}} G_{2(j)}\left(\chi_q r, r'\right) &= G_0\left(q, r, r'\right) = \\ & \left\{ \begin{aligned} & \frac{e^{iqr}}{q^4 r^2 r'} \left(\frac{\left(3 - q^2 r'^2\right)\left(q^2 r'^2 + 3iqr - 3\right)}{qr'} \sin qr' + \right. \\ & \left. + 3\left(3 - 3iqr - q^2 r'^2\right) \cos qr' \right), r > r'; \\ & \frac{e^{iqr'}}{q^4 r r'^2} \left(\frac{\left(3 - q^2 r^2\right)\left(q^2 r'^2 + 3iqr' - 3\right)}{qr} \sin qr + \right. \\ & \left. + 3\left(3 - 3iqr' - q^2 r^2\right) \cos qr \right), r < r', \end{aligned} \right. \quad (1.9) \end{aligned}$$

которая является ФГ трехмерного УШ для d -состояний, записанной в координатном представлении [6]. Таким образом, выражение (1.9) – нерелятивистский предел ФГ (1.7).

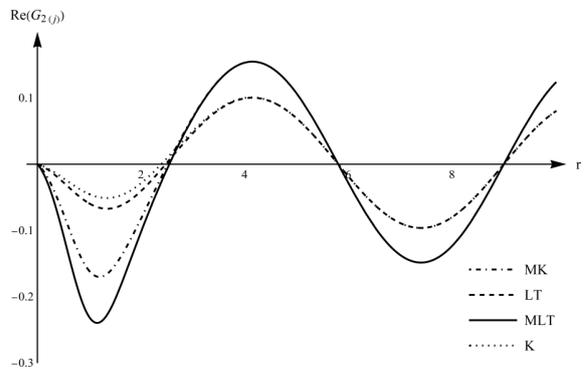


Рисунок 1.1 – Зависимость действительной части функций Грина (1.7) от координаты r

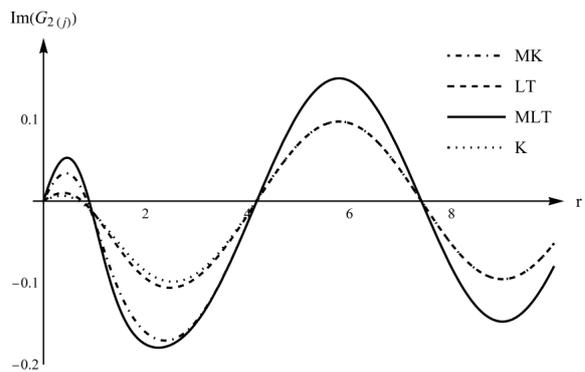


Рисунок 1.2 – Зависимость мнимой части функций Грина (1.7) от координаты r

2 Решение парциальных релятивистских уравнений для состояний рассеяния в случае дельта-потенциала

Уравнение для d -состояний рассеяния имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \Psi_{(j)}(r) &= s_2\left(\chi_q, r\right) + \\ & + \int_0^\infty G_{2(j)}\left(\chi_q, r, r'\right) V\left(r'\right) \Psi_{(j)}\left(r'\right) dr', \quad (2.1) \end{aligned}$$

где каждое из значений индекса $j = 1, 2, 3, 4$, как и ранее, соответствует определенному варианту квазипотенциального подхода.

Решение уравнения (2.1) для модельного потенциала « δ -сфера»

$$V^{(l)}(r) = V_0 \delta(r - a),$$

как нетрудно убедиться, можно представить в форме

$$\Psi_{(j)}^{(l)}(r) = s_2(\chi_q, r) + \frac{s_2(\chi_q, a) V_0 G_{2(j)}(\chi_q, r, a)}{1 - V_0 G_{2(j)}(\chi_q, a, a)}. \quad (2.2)$$

При больших значениях переменной r волновые функции $\Psi_{(j)}^{(l)}(r)$, задаваемые выражением (2.2), преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \Psi_{(j)}^{(l)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} &= \\ &= s_2(\chi_q, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} - f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q) e^{im\chi_q r} m \operatorname{sh} \chi_q. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В выражении (2.3) $f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$ – релятивистская амплитуда рассеяния:

$$f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q) = \frac{-V_0 K_{q(j)} R(\chi_q, a) s_2(\chi_q, a)}{m \operatorname{sh} \chi_q (1 - V_0 G_{2(j)}(\chi_q, a, a))}. \quad (2.4)$$

Парциальное сечение рассеяния $\sigma_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$ для орбитального квантового числа $l = 2$ выражается через амплитуду рассеяния $f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$ следующим образом:

$$\sigma_{2(j)}^{(l)}(\chi_q) = 20\pi \left| f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q) \right|^2. \quad (2.5)$$

На рисунке 2.1 иллюстрированы зависимости парциальных сечений рассеяния $\sigma_{i(j)}^{(l)}$ от быстроты χ_q при $a = 5$, $V_0 = 2$ и $m = 1$, рассчитанных на основе всех четырех рассматриваемых в работе уравнений для орбитального квантового числа $l = 2$, а также найденных ранее при $l = 0; 1$ [7], [1].

Парциальные сечения $\sigma_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$, полученные в данной работе, так же как и полученные в работах [7], [1] $\sigma_{0(j)}^{(l)}(\chi_q)$ и $\sigma_{1(j)}^{(l)}(\chi_q)$, обладают следующими особенностями:

- при увеличении массы частиц m графики сечений рассеяния всех четырех уравнений сближаются и локализуются в области малых χ_q ;

- при увеличении параметра V_0 максимальные значения сечений рассеяния увеличиваются;
- при увеличении параметра a максимальные значения сечений рассеяния увеличиваются, а вблизи нулей функции $\sigma_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$ появляются дополнительные пики.

На рисунке 2.1 прослеживается тенденция, отмеченная в [1] при сравнении поведения

сечений рассеяния $\sigma_{0(j)}^{(l)}(\chi_q)$ и $\sigma_{1(j)}^{(l)}(\chi_q)$: локальные максимумы сечений рассеяния с увеличением l смещаются в область больших значений χ_q , что является следствием наличия центростремительного барьера.

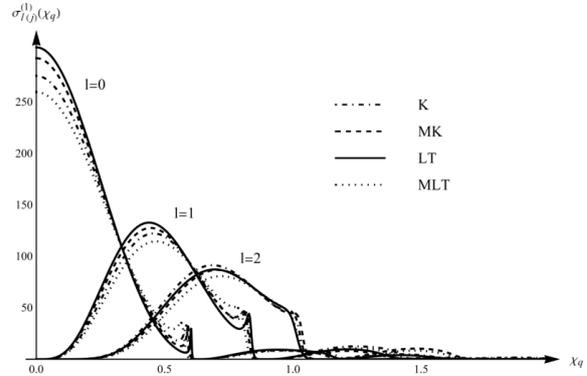


Рисунок 2.1 – Зависимость парциальных сечений $\sigma_{0,1,2(j)}^{(l)}$ от χ_q

3 Решение парциальных уравнений при моделировании взаимодействия суперпозицией двух дельта-потенциалов

Перейдем к рассмотрению потенциала, являющегося суперпозицией двух потенциалов « δ -сфера»:

$$V^{(2)}(r) = V_1 \delta(r - a_1) + V_2 \delta(r - a_2), \quad (3.1)$$

при котором уравнение (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{(j)}^{(2)}(r) &= s_2(\chi_q, r) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 G_{2(j)}(\chi_q, r, a_i) V_i \Psi_{(j)}^{(2)}(a_i). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выражение для функции $\Psi_{(j)}^{(2)}(a_i)$ из (3.2) можно записать в компактной форме

$$\Psi_{(j)}^{(2)}(a_i) = \frac{\Delta_{i(j)}(\chi_q)}{\Delta_{(j)}(\chi_q)},$$

используя обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{(j)}(\chi_q) &= \prod_{n=1}^2 \left[1 - V_n G_{2(j)}(\chi_q, a_n, a_n) \right] - \\ &- V_1 V_2 \left(G_{2(j)}(\chi_q, a_1, a_2) \right)^2; \\ \Delta_{1(j)}(\chi_q) &= s_2(\chi_q, a_1) \left[1 - V_2 G_{2(j)}(\chi_q, a_2, a_2) \right] + \\ &+ V_2 s_2(\chi_q, a_2) G_{2(j)}(\chi_q, a_1, a_2); \\ \Delta_{2(j)}(\chi_q) &= s_2(\chi_q, a_2) \left[1 - V_1 G_{2(j)}(\chi_q, a_1, a_1) \right] + \\ &+ V_1 s_2(\chi_q, a_1) G_{2(j)}(\chi_q, a_2, a_1). \end{aligned}$$

Соотношение (3.2) при $r \rightarrow \infty$ упрощается:

$$\Psi_{(j)}^{(2)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} = s_2(\chi_q, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} - f_{2(j)}^{(2)}(\chi_q) e^{im\chi_q r} m \operatorname{sh} \chi_q,$$

и для определения релятивистской амплитуды рассеяния получаем формулу

$$f_{2(j)}^{(2)}(\chi_q) = \frac{-K_{q(j)}}{m \operatorname{sh} \chi_q} \sum_{i=1}^2 V_i R(\chi_q, a_i) \Psi_{(j)}^{(2)}(a_i).$$

Парциальное сечение рассеяния $\sigma_{2(j)}^{(2)}(\chi_q)$ выражается через амплитуду рассеяния $f_{2(j)}^{(2)}(\chi_q)$ по формуле, аналогичной (2.5). При этом его поведение легко проследить при помощи графиков, изображенных на рисунке 3.1: при значениях параметров $a_1 = 3$, $V_1 = 1$, $a_2 = 4$, $V_2 = 2$, $m = 1$ – для состояния с орбитальным квантовым числом $l = 2$, рассмотренным в работе, а так же для состояний с орбитальными квантовыми числами $l = 0, 1$, рассмотренными ранее.

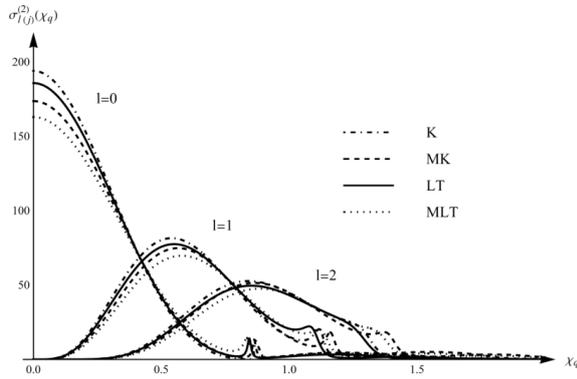


Рисунок 3.1 – Зависимость парциальных сечений $\sigma_{0,1,2(j)}^{(2)}$ от χ_q

На рисунке 3.1 видно, что и при использовании модельного потенциала (3.1) происходит сдвиг максимумов парциального сечения рассеяния в сторону больших значений χ_q с увеличением значения орбитального квантового числа.

Заключение

Таким образом, в настоящей статье были рассмотрены состояния рассеяния двух релятивистских бесспиновых частиц. Найден явный вид парциальных функций Грина в состояниях с $l = 2$, проведен анализ их поведения; показано, что найденные функции в нерелятивистском пределе представляют не что иное, как ФГ трехмерного уравнения Шредингера для d -состояний.

Парциальные релятивистские уравнения, соответствующие четырём квазипотенциальным моделям, решены с использованием двух вариантов потенциалов, выраженных через дельта-функции; вычислены амплитуды и сечения рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капшай, В.Н. Релятивистские парциальные функции Грина состояний рассеяния, характеризующихся орбитальным квантовым числом $l = 1$ / В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 7–13.
2. Капшай, В.Н. Разложение по матричным элементам УНП группы Лоренца и интегральные уравнения для релятивистских волновых функций / В.Н. Капшай, Т.А. Алфёрова // Ковариантные методы в теоретической физике: сб. ст. – Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 1997. – Вып. 4. – С. 88–95.
3. Капшай, В.Н. Парциальные квазипотенциальные уравнения в релятивистском конфигурационном представлении / В.Н. Капшай, С.И. Фиалка // Известия ВУЗов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 10. – С. 44–50.
4. Arfken, G.B. Mathematical methods for physicists / G.B. Arfken, H.J. Weber, F.E. Harris. – 7th ed. – New York: Elsevier, 2013. – 1205 p.
5. Гельфонд, А.О. Вычеты и их приложения / А.О. Гельфонд. – Москва: Ленанд, 2018. – 114 с.
6. Taylor, J.R. Scattering theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions / J.R. Taylor // USA: Dover Publications, 2006. – 512 p.
7. Капшай, В.Н. Релятивистская задача о s -состояниях рассеяния для суперпозиции двух потенциалов « δ -сфера» / В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 7–12.

Поступила в редакцию 09.01.2023.

Информация об авторах

Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Гришечкина Анастасия Александровна – аспирантка

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_31

EDN: GTXFSB

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF GEAR TEETH MADE OF COMPOSITE AND FUNCTIONAL GRADIENT MATERIALS

V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе представлена методика определения зоны контакта, напряжений и перемещений при взаимодействии зубьев зубчатых колес из композиционных и функционально-градиентных материалов (ФГМ), основанная на анизотропной теории упругости [1]. Представлены графики зависимости напряжений по глубине от поверхности контакта для различных материалов, показано хорошее соответствие для предельного случая – изотропии материала.

Ключевые слова: *зубчатые колеса, контактное напряжение, контактное перемещение, зона контакта, функционально-градиентный материал, композит.*

Для цитирования: *Можаровский, В.В.* Расчет напряженно-деформированного состояния зубьев зубчатых колес из композиционных и функционально-градиентных материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 31–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_31. – EDN: GTXFSB

Abstract. A method for determining the contact zone, stresses and displacements during the interaction of gear teeth made of composite and functionally gradient materials (FGM), based on the theory of anisotropic elasticity theory is presented. The graphs of the depth dependence of stresses on the contact surface for various materials are presented, and a good correspondence is shown for the limiting case – the isotropy of the material.

Keywords: *gears, contact tension, contact displacement, contact zone, functional gradient material, composite.*

For citation: *Mozharovsky, V.V.* Calculation of the stress-strain state of gear teeth made of composite and functional gradient materials / V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 31–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_31 (in Russian). – EDN: GTXFSB

Введение

В применяемой практике машиностроения одной из актуальных задач является создание и использование материалов, которые отличались бы своей износостойкостью и долговечностью, что значительно влияет на экономическую составляющую изготовления и эксплуатацию деталей элементов конструкций. Это, в свою очередь, требует разработки более детального подхода к новым алгоритмам расчета, базирующимся на современном программном обеспечении, которое позволит выбрать оптимальные свойства композиционных материалов.

В данной работе рассмотрено ряд контактных задач применительно к инженерному расчету цилиндрических тел, которые моделируют взаимодействие зубьев зубчатых колес и элементов фрикционных передач [1]–[5]. Расчет зубчатых колес из композитов является многопрофильным, включая расчеты, связанные с напряжениями зубьев и трибологическими отказами,

такими как износ. Несмотря на важность контактных напряжений в зубчатых колесах из композитов, всесторонний анализ этих напряжений не был широко представлен в литературе.

1 Постановка задачи

При работе зубчатой передачи, состоящей из контактирующего жесткого колеса и колеса из композита, возникает контактное взаимодействие зубьев двух колес. Представим разрабатываемый подход к реализации расчета напряжений и перемещений как на поверхности, так и по глубине зуба из композита. Считаем, что модуль упругости металлического колеса значительно превышает модуль упругости композита, следовательно, можно рассматривать контактную задачу о вдавлении жесткого цилиндра в полуплоскость из композита, приняв определенный закон распределения давления в зоне контакта. Задавая закон распределенного поверхностного давления при взаимодействии зубьев зубчатых

колес (жесткого и из композита), а также размеры площади контакта, можно определять напряжения и перемещения в изотропной, ортотропной или в полуплоскости, моделирующей свойства материала из ФГМ. Так как зона контакта достаточно мала по сравнению с контактирующим зубом, то легко составить математическую модель расчета параметров контакта, используя методику расчета напряжений в полубесконечном упругом теле рассматриваемой среды при плоской деформации. Для дальнейшего создания алгоритма расчета напряженного состояния при взаимодействии зубьев зубчатых колес из вышеуказанных материалов построим механико-математическую модель контакта зубьев зубчатых колес из композиционных материалов (рисунок 1.1).

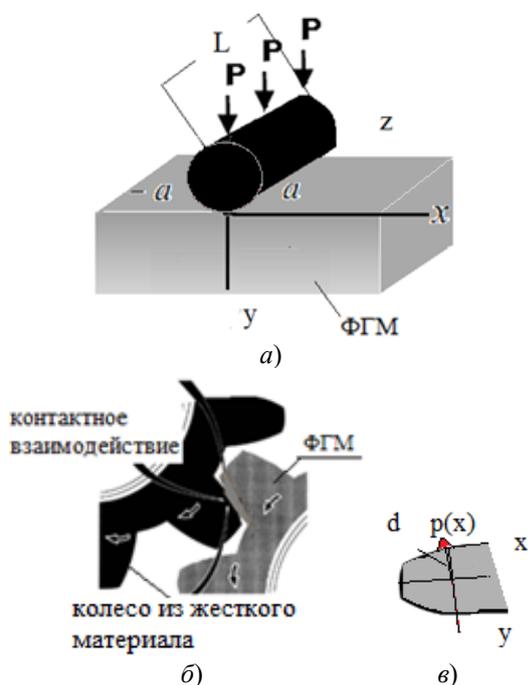


Рисунок 1.1 – Схема контакта зубьев шестерни из ФГМ:
 а) механико-математическая модель;
 б) схема реальной передачи;
 в) схема расчета напряжений в зубе из ФГМ

2 Методика расчета

Рассмотрим композиционный материал, армированный волокнами, которые ориентированы в направлении одной из осей X или Y (координатные оси совпадают с основными направлениями материала). С позиций макромеханики расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) такого материала при действии граничной нагрузки необходимо рассматривать на основе закономерностей ортотропии.

Представим расчет напряженного состояния полубесконечного ортотропного тела, при взаимодействии зубьев зубчатых колес из композита, подверженного воздействию поверхностно-

го давления p , распределенного в соответствии с законом

$$p(x) = p_0 \sqrt{a^2 - x^2}, \quad p_0 = \frac{2P}{L\pi a^2}; \quad (2.1)$$

или согласно [1]

$$p(x) = m \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (2.2)$$

где R_1 и R_2 – радиусы двух взаимодействующих цилиндров (мм); P и L – действующее усилие и длина цилиндра, параметр

$$m = [((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(1)} + ((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(2)}]^{-1},$$

индексы (1) и (2) – характеризуют материалы двух цилиндров, величины $\beta_{1,2}$ для каждого цилиндра вычисляются по формулам [1]

$$\beta_{1,2} = \left(\frac{\sqrt{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}}{2S_{11}} \right)^{-1},$$

где постоянные $S_{i,j}$ при плоской деформации определяются из [1] следующим образом:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31}}{E_1},$$

$$S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}},$$

индексы i, j технических постоянных материалов цилиндров (модуля упругости E (МПа), коэффициента Пуассона ν и модуля сдвига G (МПа)) характеризуют различные направления и вычисляются по зависимостям по правилу смесей:

$$E_1 = VE_f + (1-V)E_m, \quad E_2 = \frac{E_m(1+\eta V)}{1-\eta V},$$

$$G_{12} = G_m \frac{G_f(1+V) + G_m(1-V)}{G_f(1-V) + G_m(1+V)},$$

$$\eta = (E_f - E_m) / (E_f + E_m);$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = V\nu_f + (1-V)\nu_m,$$

$$\nu_{21} = \nu_{31} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}, \quad \nu_{23} = \nu_{32} = 1 - \nu_{21} - \frac{E_2}{3K},$$

$$K = \frac{K_f K_m}{VK_m + (1-V)K_f},$$

$$K_f = \frac{E_f}{3 - 6\nu_f}, \quad K_m = \frac{E_m}{3 - 6\nu_m};$$

индексы f и m обозначают волокно и матрицу соответственно; V – объемное содержание волокна в матрице материала; K_f, K_m – объемные модули упругости волокна и матрицы. Здесь, для упрощения, заменяем действие металлического (жесткого) цилиндра на границу ортотропной полуплоскости распределенным давлением согласно закону (2.1).

Напряжения и перемещения в ортотропном теле для рассматриваемого случая могут быть

определены по соотношениям, приведенным в работе [1]:

$$\sigma_y = \frac{1}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \frac{-y}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \int_{-a}^a p(s) \left[\frac{1}{(x-s)^2 + y^2 / \beta_1^2} - \frac{1}{(x-s)^2 + y^2 / \beta_2^2} \right] ds,$$

$$\tau_{xy} = - \int_{-a}^a p(s) \frac{x-s}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \left[\frac{1}{(x-s)^2 + y^2 / \beta_1^2} - \frac{1}{(x-s)^2 + y^2 / \beta_2^2} \right] ds. \quad (2.3)$$

$$\sigma_x = \frac{y}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \int_{-a}^a p(s) \left(\frac{1}{\beta_1^2 (x-s)^2 + y^2} - \frac{1}{\beta_2^2 (x-s)^2 + y^2} \right) ds,$$

$$u = \frac{1}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \int_{-a}^a p(s) \left(\beta_1 R_1 \arctg \frac{(x-s)\beta_1}{y} - \beta_2 R_2 \arctg \frac{(x-s)\beta_2}{y} \right) ds + C; \quad (2.4)$$

$$R_i = \frac{S_{11}}{\beta_1^2} - S_{12}, \quad i = 1, 2.$$

В предельном случае при $\beta_1 = \beta_2 \rightarrow 1$ получим напряжения и перемещения для изотропной полуплоскости [1], [5]:

$$\sigma_y = \frac{-2y^3}{\pi} \int_{-a}^a p(s) \frac{1}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds,$$

$$\sigma_x = \frac{-2y}{\pi} \int_{-a}^a p(s) \frac{(x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds,$$

$$\tau_{xy} = \frac{-2y^2}{\pi} \int_{-a}^a p(s) \frac{x-s}{((x-s)^2 + y^2)^2} ds, \quad (2.5)$$

$$u = \frac{1}{\pi E} \left[\frac{(1+\nu)xy}{x^2 + y^2} - (1-\nu) \arctg \frac{x}{y} \right] + C_1 y + C_0.$$

Максимальное касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (2.6)$$

Далее рассмотрим решение контактной задачи для двух гладких ортотропных цилиндров с параллельными осями, прижатыми друг к другу постоянной в направлении оси z линейной силой P . Считаем, что каждый из них можно заменить упругой ортотропной полуплоскостью с неизвестным законом распределения, удовлетворяющим условиям равновесия $\int_{-a}^a p(t) dt = P$.

Величину зоны контакта определим по уравнению

$$a = \sqrt{\frac{2PR_1 R_2}{\pi m(R_1 + R_2)}}. \quad (2.7)$$

Зная закон распределения давления в области контакта, нетрудно найти максимальное перемещение ортотропной полуплоскости при вдавливании жесткого цилиндрического штампа. Действительно, используя зависимости для перемещений при $x = 0$, получаем [1]:

$$v_1 = - \frac{1}{\pi} \left[S_{22}(\beta_1 + \beta_2) \int_{-a}^a p(t) \ln |t| dt - k_0 P \right]^{(1)}, \quad (2.8)$$

где

$$k_0 = \left[S_{22}(\beta_1 + \beta_2) \ln h - \frac{S_{22}}{\beta_1 - \beta_2} (\beta_1^2 \ln \beta_1 - \beta_2^2 \ln \beta_2) - \frac{S_{12}}{\beta_1 - \beta_2} \ln \frac{\beta_1}{\beta_2} \right]^{(1)}.$$

В случае расчета напряжений для полубесконечного тела из функционально-градиентного материала, считая, что модуль Юнга E зависит от глубины y и изменяется по простому степенному закону $E = E_0(y)^k$, следует отметить, что при $y=0$ можно записать модуль упругости $E = E_0 H^k$ или, в общем случае, $E = E_0(y + H)^k$ [7], где E_0 – начальный модуль упругости материала, $H \geq 0$, а также модули упругости могут изменяться послойно [6] или по экспоненте, k – коэффициент, принимающий значения $0 \leq k < 1$, подверженного воздействию поверхностного давления p , распределенного в соответствии с законом

$$p(x) = \gamma(k) \frac{P}{2a} \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)^{(1+k)/2},$$

$$\gamma(k) = \frac{\Gamma(3+k)}{2^{(1+k)} \Gamma^2\left(\frac{3+k}{2}\right)}, \quad (2.9)$$

то напряжения могут быть определены по соотношениям, приведенным в работе [7]–[9]

$$\sigma_y = -y^{k+2} F_{k\beta} \int_{-a}^a \frac{p(s) \cos \left[\beta \arctan \left(\frac{x-s}{y} \right) \right]}{[(x-s)^2 + y^2]^{(3+k)/2}} ds, \quad (2.10)$$

$$\sigma_x = -y^k F_{k\beta} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s)^2 \cos \left[\beta \arctan \left(\frac{x-s}{y} \right) \right]}{[(x-s)^2 + y^2]^{(3+k)/2}} ds,$$

$$\tau_{xy} = -y^{k+1} F_{k\beta} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s) \cos \left[\beta \arctan \left(\frac{x-s}{y} \right) \right]}{[(x-s)^2 + y^2]^{(3+k)/2}} ds,$$

$$\text{где } F_{k\beta} = \frac{2^{(k+1)}(k+2)\Gamma\left(\frac{3+k+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+k-\beta}{2}\right)}{\pi\Gamma(3+k)},$$

$$\beta = \sqrt{(k+1)\left(1 - \frac{kv}{1-v}\right)}, \quad v - \text{коэффициент Пуассона}$$

на материала ФГМ, $\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} dt$ – Гамма-функция, y изменяется $0 < y \leq d$, d – расстояние до середины зуба (рисунок 1.1, в).

Максимальные касательные напряжения τ_{\max} определяются как и для ортотропного случая по зависимости (2.6).

Перемещение u_y и величина зоны контакта a определяются по зависимостям [7]–[9]

$$u_y(x) = \frac{1-v^2}{E_0} \frac{P}{2I_k} \frac{\beta}{k+1} \frac{\sin(\beta\pi/2)}{k|x|^k}, \quad (2.11)$$

$$a^{(2+k)} = \frac{(1-v^2)2R\beta(k+2)\sin(\beta\pi/2)}{E_0(1-k^2)\pi} \times (2.12)$$

$$\times \Gamma\left(\frac{3+k+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right),$$

где

$$I_k = \frac{\pi\Gamma(3+k)}{2^{(k+2)}(k+2)\Gamma\left(\frac{3+k+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+k-\beta}{2}\right)}.$$

В частном случае при $k = 0$ получим такие же напряжения и перемещения, как и в изотропной полуплоскости.

Для определения максимальных контактных напряжений при вдавливании жесткого цилиндра в полуплоскость из ФГМ используем зависимость (2.9) при $x = 0$:

$$\sigma_c = -\gamma(k) \frac{P}{2a}. \quad (2.13)$$

Для построения инженерного расчета на контактную прочность зубьев зубчатого колеса из ФГМ при контакте с жестким колесом вместо формулы, применяющейся при расчете на контактную выносливость, принятой на основе теории Герца [10], используем зависимость (2.13). Действительно, в предельном случае для (2.9), когда $k \rightarrow 0$, получается формула Герца

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Дальше преобразуем полученную зависимость (2.13) в виде формулы по определению максимальных контактных напряжений, используя методику, предложенную в работах [11], [12], с учетом применения и использования существующих геометрических и других коэффициентов, уточняющих инженерный расчет зубьев зубчатых колес на контактную прочность.

3 Результаты вычислений и анализ результатов

На основании разработанной методики построен расчет НДС зубьев зубчатых колес со следующими физико-механическими характеристиками [11]–[13]: шестерня из композита, состоящего из полиамидной матрицы и стеклянных волокон с модулями упругости $E_m = 3500$ МПа, $E_f = 85000$ МПа, коэффициентами Пуассона $\nu_m = 0,35$, $\nu_f = 0,2$, модулями сдвига $G_m = 1300$ МПа, $G_f = 35420$ МПа, процентным содержанием волокон $V = 20\%$; зубчатое колесо с модулем упругости $E = 207000$ МПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$, модулем сдвига $G = 79615$ МПа. По приведенным зависимостям сделан расчет физических постоянных материала (ортотропного) для шестерни из композита: $E_1 = 19800$ МПа; $\eta = 0,92$; $E_2 = 5080,33$ МПа; $G_{12} = 1893,47$ МПа; $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,32$; $\nu_{21} = \nu_{31} = 0,08$; $K_f = 47222,22$ МПа; $K_m = 3888,89$ МПа; $K = 4763,05$ МПа; $\nu_{23} = \nu_{32} = 0,56$. Тогда для шестерни материал будет иметь следующие постоянные: $S_{11} = 4,92 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $S_{12} = -1,75 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $S_{22} = 13 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $S_{66} = 53 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $\beta_1 = 0,32$, $\beta_2 = 1,89$, а для материала зубчатого колеса – $S_{11} = 4,40 \cdot 10^{-6}$ МПа $^{-1}$; $S_{12} = -1,88 \cdot 10^{-6}$ МПа $^{-1}$; $S_{22} = 4,40 \cdot 10^{-6}$ МПа $^{-1}$; $S_{66} = 1,26 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$; $\beta_1 = 0,998$, $\beta_2 = 1,002$. Параметр $m = 3269,06$ МПа.

Для расчета напряженного состояния зубьев зубчатых колес заменим тело зуба, контактирующего с жестким зубом, в виде полуплоскости (изотропной, ортотропной, функционально-градиентной) с заданным действующим давлением на границе по закону $p(x) = p_0 \sqrt{a^2 - x^2}$. Далее сделаем расчет напряженного состояния в полуплоскостях с указанными выше свойствами материалов. Так, на рисунках 3.1 и 3.2 показаны кривые изменения напряжений σ_y / p_0 , σ_x / p_0 , τ_{\max} / p_0 по глубине от поверхности контакта для различных материалов: для ортотропной полуплоскости, которая переходит в изотропную полуплоскость при $\beta_i \rightarrow 1$ ($\beta_1 = 0,999$, $\beta_2 = 1,001$), ортотропной ($\beta_1 = 0,32$, $\beta_2 = 1,89$) и функционально-градиентной ($k = 0$; 0,5; 0,99). Полученные результаты всех напряжений для изотропного случая ($k = 0$ для функционально-градиентного материала, $\beta_i \approx 1$ для ортотропного материала) хорошо согласуются с данными из [1], [5].

Из рисунков 3.1 (а, б) и 3.2 (в) видно, что свойства материала могут значительно влиять на изменение напряжений по глубине тела зуба от поверхности контакта. Значения напряжений σ_y / p_0 , σ_x / p_0 , τ_{\max} / p_0 для ФГМ при $k = 0$ и изотропного материала совпадают с результатами, представленными в литературе [1], [5].

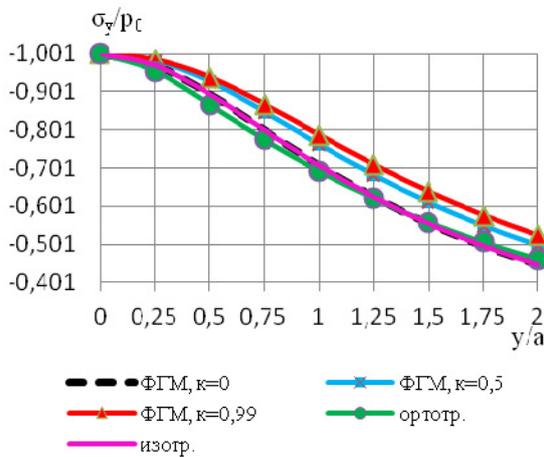
Следует отметить, что напряжения σ_y / p_0 , в функционально-градиентном материале увеличиваются с возрастанием k , а напряжения σ_x практически не изменяются.

Для ортотропного случая на поверхности напряжения σ_x / p_0 и σ_y / p_0 принимают максимальные значения: $\sigma_x / p_0 = -1,6528$, $\sigma_y / p_0 = -1$ и постепенно убывают с глубиной. Значения напряжений σ_x / p_0 связаны со значениями σ_y / p_0 на поверхности зависимостью [1]

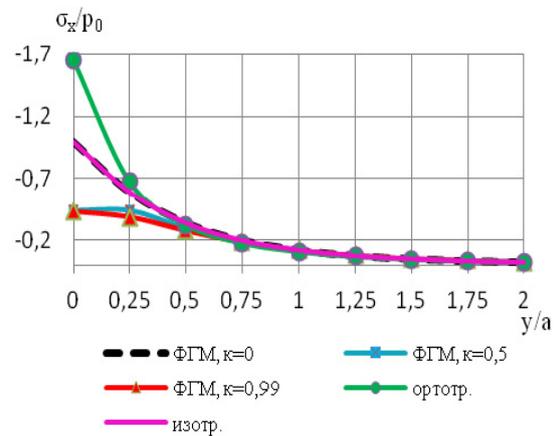
$$\frac{\sigma_x}{p_0} = \frac{\sigma_y}{p_0 \beta_1 \beta_2} = -\frac{1}{0,32 \cdot 1,89} = -1,6534,$$

что подтверждается расчетом, изображенным на графиках 3.1 (а, б). На поверхности

$$\frac{\tau_{max}}{p_0} = 0,32642$$

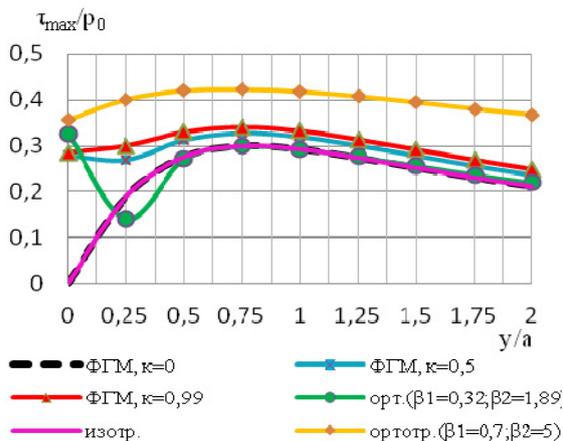


а)

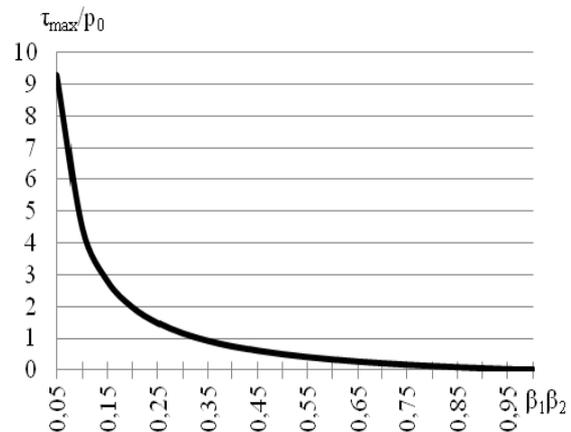


б)

Рисунок 3.1 – Графики зависимости напряжений по глубине тела зуба от поверхности контакта: а) σ_y / p_0 , б) σ_x / p_0 , для различных материалов



а)



б)

Рисунок 3.2 – Графики зависимости напряжений τ_{max} / p_0 по глубине тела зуба от поверхности контакта (а).

График изменения напряжений τ_{max} / p_0 на поверхности контакта в зависимости от произведения $\beta_1 \beta_2$ (б)

для ортотропного материала (рисунок 3.2, а), что совпадает с расчетами по формулам (2.6) и

$$\frac{\tau_{max}}{p_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta_1 \beta_2} - 1 \right)$$

(рисунок 3.2, б).

На рисунке 3.3 приведены линии уровня максимального касательного напряжения τ_{max} / p_0 , которые для изотропного материала хорошо согласуются с результатами, представленными в монографии [5].

На рисунке 3.4 показаны линии уровня максимальных касательных напряжений τ_{max} / p_0 для функционально-градиентного материала с заданным действующим давлением на границе по закону (2.9).

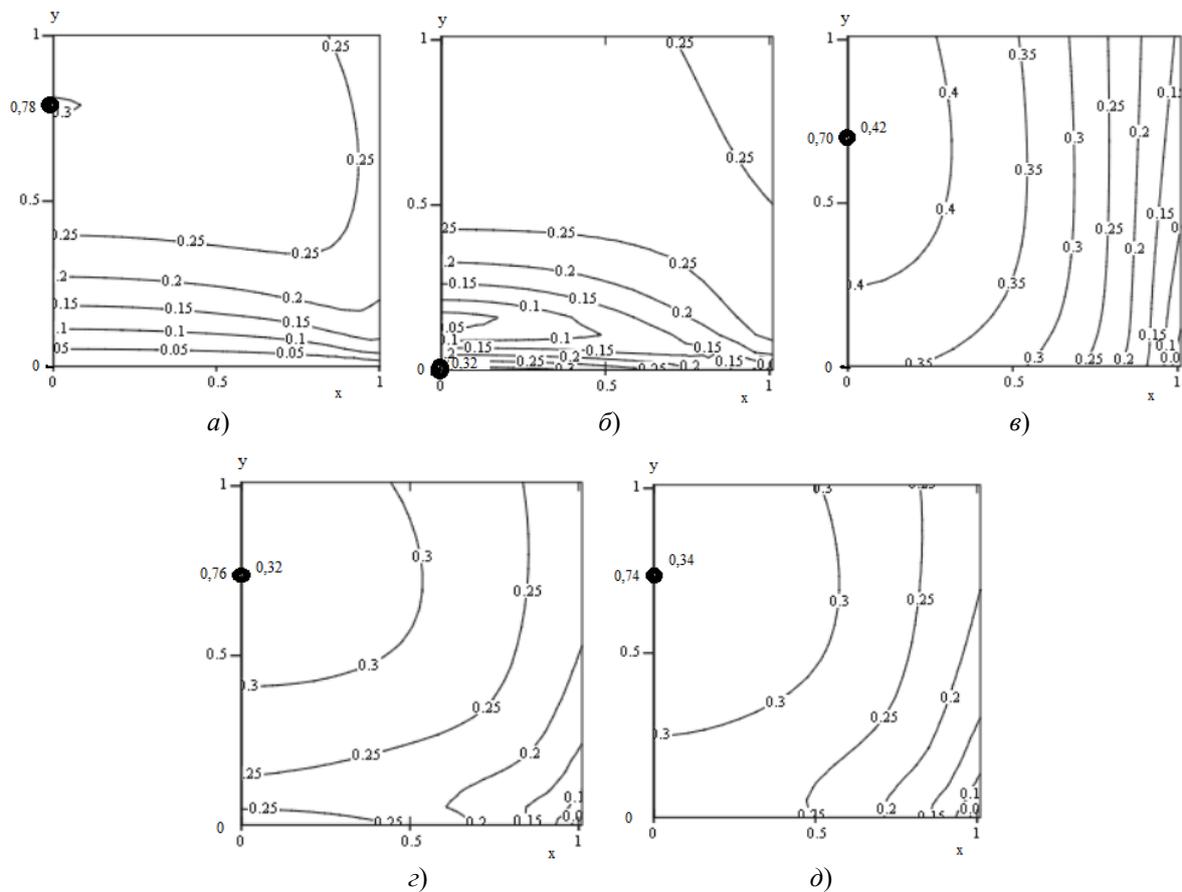


Рисунок 3.3 – Линии уровня максимальных касательных напряжений τ_{max} / p_0 для изотропного материала, ортотропного для $\beta_1 = \beta_2 \approx 1$ (случай изотропии) и ФГМ при $k = 0$ (а); ортотропного ($\beta_1 = 0,32, \beta_2 = 1,89$) (б); ортотропного ($\beta_1 = 0,7, \beta_2 = 5$) (в); ФГМ при $k = 0,5$ (г); ФГМ при $k = 0,99$ (д)

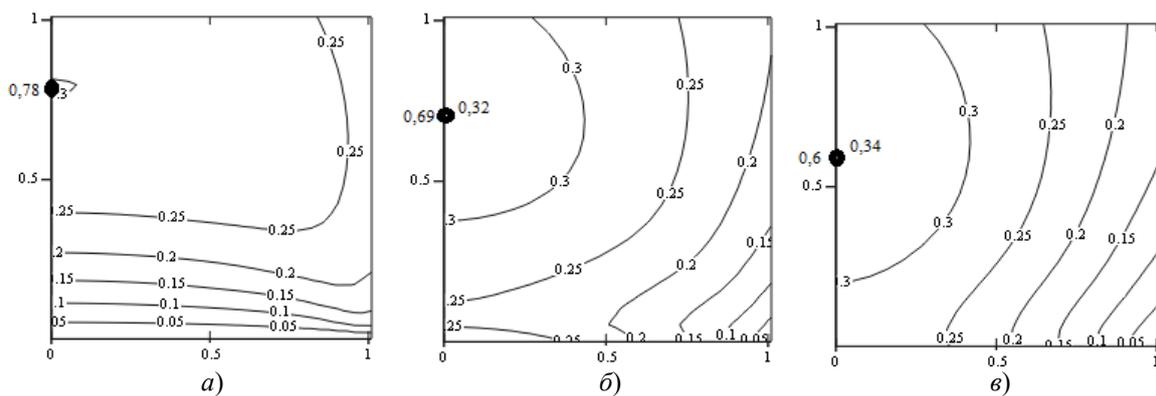


Рисунок 3.4 – Линии уровня максимальных касательных напряжений τ_{max} / p_0 для ФГМ при $k = 0$ (а); $k = 0,5$ (б); $k = 0,99$ (в)

Заключение

В статье представлена методика расчета напряженно-деформированного состояния зубьев зубчатых колес из современных композиционных материалов на основе имеющейся теории о математических моделях ортотропных и функционально-градиентных материалов. Расчет

напряжений в упругом теле зубьев зубчатых колес из композита показал совпадение с известными данными расчета для зубьев из изотропных материалов, в частном случае, при выбранных определенных параметрах. По приведенным зависимостям и графическим иллюстрациям можно легко определить возникающие максимальные

напряжения при контакте жесткого цилиндрического тела с упругой полуплоскостью из вышеуказанных материалов, то есть для ортотропии и ФГМ. Анализ вычисленных напряжений τ_{max} / p_0 показал, что изменение закона распределения давления (2.9) на (2.1), действующего на поверхности полуплоскости из ФГМ, незначительно влияет на окончательный результат, поэтому для оценки возникающих напряжений можно принять более простую зависимость (2.1). Результаты работы могут найти применение в инженерных расчетах элементов конструкций из современных материалов, а именно напряженного состояния и деформативности зубьев зубчатых колес из композитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Можаровский, В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.
2. *Autear, K.K.* Mechanics of Composite Materials / K.K. Autear. – Taylor & Francis Group Second edition, Boca Raton, Florida, 2006. – 473 p.
3. *Белый, В.А.* Металло-полимерные зубчатые передачи / В.А. Белый, В.Е. Старжинский, С.В. Щербаков. – Минск: Наука и техника, 1981. – 352 с.
4. *Bhandari, V.B.* Design of machine elements / V.B. Bhandari. – Tata McGraw-Hill Education, 2010. – 903 p.
5. *Джонсон, К.* Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
6. *Optimum weight design of functionally graded material gears* / Jing Shikai, Zhang He, Zhou Jingtao, Song Guohu // Chinese journal of mechanical engineering. – 2015. – Vol. 28, № 6. – P. 1186–1193.
7. *Giannakopoulos, A.E.* Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials /

A.E. Giannakopoulos, P. Pallot // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – № 48. – P. 1597–1631.

8. *Giannakopoulos, A.E.* Indentation of solids with gradients in elastic properties / A.E. Giannakopoulos, S. Suresh // Point force. Int. J. Solids Struct. – 1977. – № 34. – P. 2357–2392.

9. *Giannakopoulos, A.E.* Indentation of solids with gradients in elastic properties / A.E. Giannakopoulos, S. Suresh // Axisymmetric indentors. Int. J. Solids Struct. – 1977. – № 34. – P. 2393–2428.

10. *Иосилевич, Г.Б.* Детали машин: учебник для студентов машиностроительных спец. ВУЗов / Г.Б. Иосилевич. – Москва: Машиностроение, 1988. – 368 с.

11. *Можаровский, В.В.* Компьютерная реализация методики расчета контактного взаимодействия зубьев зубчатых колес из изотропного и композиционного материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2021. – № 6 (129). – С. 171–177.

12. *Mozharovsky, V.V.* Calculation of the contact interaction of gear teeth from composite materials / V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, S.V. Kirhintsava // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology, February 2022. – Vol. 9, iss. 2. – P. 18921–18928.

13. *Hossan, M.R.* Strength evaluation of polymer composite spur gear by finite element analysis / M.R. Hossan, Z. Hu // International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Boston. – 2008. – P. 1–8.

Поступила в редакцию 16.12.2022.

Информация об авторах

Можаровский Валентин Васильевич – д.т.н., профессор
Киргинцева Светлана Викторовна – ассистент

ФОРМИРОВАНИЕ, СТРУКТУРНЫЕ И МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК ПРЕКУРСОРОВ Cu-Sn-Ni

Т.Н. Осмоловская¹, А.А. Фещенко¹, А.В. Станчик^{1,2}

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

²Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению, Минск

FORMATION, STRUCTURAL AND MORPHOLOGICAL PROPERTIES OF THIN FILMS OF Cu-Sn-Ni PRECURSORS

T.N. Osmolovskaya¹, A.A. Feschenko¹, A.V. Stanchik^{1,2}

¹Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

²Scientific and Practical Materials Research Centre of NAS Belarus, Minsk

Аннотация. Представлены результаты формирования прекурсоров Cu-Sn-Ni методом электрохимического осаждения на стеклянные подложки с подслоем молибдена. Проведены исследования структурных, морфологических свойств прекурсоров. Рентгенограммы показали характерные для гексагональной фазы CuSn, кубической фазы CuNi, кубической фазы Ni₃Sn и кубической фазы Ni. На рентгенограмме прекурсоров также обнаружены пики, соответствующие материалу подложки молибдену.

Ключевые слова: тонкие пленки, Cu₂NiSn(S,Se)₄, морфология поверхности, рентгенофазовый анализ.

Для цитирования: Осмоловская, Т.Н. Формирование, структурные и морфологические свойства тонких пленок прекурсоров Cu-Sn-Ni / Т.Н. Осмоловская, А.А. Фещенко, А.В. Станчик // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 38–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_38. – EDN: GYQICK

Abstract. The results of the formation of Cu-Sn-Ni precursors by electrochemical deposition on glass substrates with a molybdenum sublayer are presented. The structural and morphological properties of precursors have been studied. The X-ray diffraction patterns showed characteristics of CuSn hexagonal phase, CuNi cubic phase, Ni₃Sn cubic phase, and Ni cubic phase. The peaks corresponding to the substrate material, molybdenum, were also found on the X-ray diffraction pattern of the precursors.

Keywords: thin films, Cu₂NiSn(S,Se)₄, surface morphology, X-ray phase analysis.

For citation: Osmolovskaya, T.N. Formation, structural and morphological properties of thin films of Cu-Sn-Ni precursors / T.N. Osmolovskaya, A.A. Feschenko, A.V. Stanchik // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 38–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_38 (in Russian). – EDN: GYQICK

Введение

Солнечные элементы (СЭ) на протяжении нескольких десятилетий прочно заняли свое место среди различных вариантов возобновляемых источников энергии. Наиболее распространенными являются СЭ на основе моно- и поликристаллического кремния, тонких пленок CuIn_xGa_{1-x}Se₂ (CIGS) и CdTe. Определенные сложности для вышеуказанных материалов представляют в случае кремния большие энергозатраты на его получение, а в случае тонких пленок наличие дорогостоящих или токсичных компонентов в полупроводниковых материалах.

В последнее время привлекают к себе внимание соединения с общей химической формулой Cu₂A^{II}B^{IV}X₄^{VI}, где A = Zn, Cd; B^{IV} = Si, Ge, Sn и X^{VI} = S, Se, Te. Исследование таких материалов является новым перспективным направлением в полупроводниковом материаловедении. На сегодняшний момент на основе Cu₂ZnSn(S,Se)₄

(CZT(S,Se)), являющегося представителем группы вышеуказанных соединений, созданы СЭ промышленных типоразмеров с КПД 13%, что существенно ниже теоретически достижимого (~30%).

Одним из перспективных материалов вышеуказанной группы является Cu₂NiSn(S,Se)₄, что обусловлено значениями ширины запрещенной зоны и коэффициента оптического поглощения, удовлетворяющими требованиям для создания высокоэффективных солнечных элементов. В 2016 году было сообщено об эффективности лабораторного СЭ на основе пленок Cu₂NiSnS₄ (CNTS) равной 0,09% [1], а в 2017 году – 2,71% (ITO / ZnO / ZnS / CNTS) [2], что пока ниже теоретически возможной (~33%). В 2018 году [3] с помощью модульного имитатора солнечных элементов (SCAPS) при спектре освещения 1,5 AM было сообщено об эффективности СЭ на основе пленок CNTS со структурой CNTS / ZnS / Zn(O,S) / FTO равной 17,06%.

Публикации по физическим и физико-химическим свойствам системы твердых растворов $\text{Cu}_2\text{NiSn}(\text{S,Se})_4$ присутствуют в научной литературе, однако в незначительном количестве, при этом сами параметры для различных публикаций различаются друг от друга. В данной работе приведены исследования по формированию прекурсоров Cu-Sn-Ni методом электрохимического осаждения с целью получения в дальнейшем тонких пленок $\text{Cu}_2\text{NiSn}(\text{S,Se})_4$.

1 Экспериментальная часть

Электрохимическое осаждение металлических слоев (Cu, Sn и Ni) прекурсоров Cu-Sn-Ni осуществлялось в классической двухэлектродной ячейке в гальваностатическом режиме с планарно расположенными электродами с последовательностью Ni, Cu, Sn и Ni (рисунок 1.1). В качестве подложек, которые выступали как катод, в данной работе использовались коммерчески доступные подложки из стекла с подслоем молибдена толщиной 400–800 нм (стекло / Mo). Подложки перед использованием были обработаны чистящим порошком из венской извести и выдержаны в течение 1 мин в муравьиной кислоте. Затем были промыты в дистиллированной воде и просушены горячим воздухом.

В качестве анодов были использованы пластины из Cu, Sn и Ni чистотой 99,999% и размером $10 \times 5 \times 1$ см с активной поверхностью $5,5 \times 5 \times 1$ см. Растворы электролитов во время осаждения перемешивались с помощью магнитной мешалки, а их температура измерялась с помощью термостата.

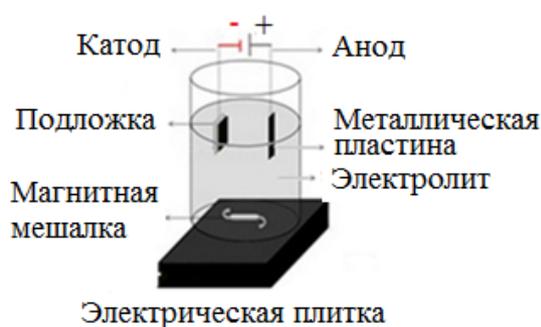


Рисунок 1 – Электрохимическая ячейка для осаждения прекурсоров Cu-Sn-Ni

Время осаждения каждого из слоев было выбрано исходя из скорости осаждения соответствующих металлов и необходимой толщины прекурсора Cu-Sn-Ni, которая составляла 700 нм. Дальнейшаястройка атомов серы и селена в процессе температурной обработки прекурсоров в парах халькогена приведет к увеличению их толщины примерно в 3 раза. Прекурсоры Cu-Sn-Ni осаждались с последовательностью слоев – никель, медь, олово и, затем, никель, как отмечалось ранее. Медь является самым неактивным

металлом из осаждаемых, но быстро окисляемых. Поэтому целесообразно на подложки первым осаждают именно этот металл во избежание его дальнейшего растворения в растворе следующего электролита и окисления на воздухе. Однако в ходе выполнения работы было обнаружено, что электроосаждаемая медь имеет плохую адгезию к подслою молибдена, нанесенного на стеклянные подложки. Аналогичное поведение меди при электрохимическом осаждении на слой молибдена наблюдалось в [4]. Поэтому в качестве подслоя для меди использовался никель [5]. Также никель использовался в качестве верхнего слоя с целью предотвращения испарения олова, как легко летучего элемента, при высокотемпературной обработке для получения пленок $\text{Cu}_2\text{NiSn}(\text{S,Se})_4$.

Электролиты были приготовлены из дистиллированной воды путем добавления сначала фонового реактива, затем комплексобразующего агента, добавок и, наконец, pH агента.

Электрохимическое осаждение меди. Для осаждения меди использован пиррофосфатный электролит меднения. Данный электролит приготовлен на водной основе с добавлением CuSO_4 , $\text{K}_4\text{P}_2\text{O}_7$, Na_2HPO_4 и $\text{KNaCuH}_2\text{O}_6$ (pH = 8,2–8,5). Были протестированы различные режимы осаждения (катодная плотность тока, температура электролита). Установлено, что формирование пленок приемлемого качества возможно при перемешивании электролита, катодной плотности тока 8 mA/cm^2 , температуре электролита $\sim 30^\circ\text{C}$, расстоянии между электродами 5 см. При более высоких значениях температуры и плотности тока формируется медная пленка темного цвета с плохой адгезией (это может быть связано с отравлением электролита ионами Cu^+ , которые при повышенных плотностях тока и температурах образуются на аноде наряду с ионами Cu^{2+}). Расчетная скорость осаждения составляет 135 nm/s . В этом режиме формируются однородные, хорошо сцепленные с подслоем никеля медные пленки с ярким металлическим блеском и зеркальной поверхностью.

Электрохимическое осаждение олова. Для осаждения олова применен водный электролит, содержащий SnSO_4 и H_2SO_4 . Поиск оптимального режима осаждения олова из данного электролита проводился путем тестирования различных режимов осаждения с использованием в качестве подложек фольгированного медью стеклотекстолита, медной фольги, а также подложек стекло/Мо с осажденным подслоем меди. Оптимальный режим электрохимического осаждения олова из указанного электролита – катодная плотность тока 10 mA/cm^2 , комнатная температура, расстояние между подложкой и анодом 5 см, без перемешивания. Расчетная скорость осаждения составляет 63 nm/s . В таких условиях пленка олова формируется однородной и хорошо

сцепленной с подложкой. Было обнаружено, что в то время как медь осаждается в виде блестящей металлической пленки, олово осаждается покрытым белым гидроксидным налетом. Это связано с тем, что олово, в отличие от меди, в ряду электрохимической активности находится до водорода, и свежесозаженный металл активно реагирует с водой, несмотря на приложенный к нему отрицательный потенциал.

Электрохимическое осаждение никеля. Подслой и верхний слой никеля осаждались из электролита, содержащего NiSO_4 , NiCl_2 , H_3BO_3 и органические добавки, который применялся в [6] для получения прекурсоров Cu / Sn / Ni. Оптимальный режим электрохимического осаждения олова из указанного электролита – катодная плотность тока 20 и 25 mA/cm^2 , для подслоя и верхнего слоя соответственно, температура электролита $\sim 50^\circ\text{C}$, расстояние между подложкой и анодом 5 см, без перемешивания. Данные режимы позволяют получить однородные, хорошо сцепленные с молибденом и оловом никелевые пленки с ярким металлическим блеском и зеркальной поверхностью. Расчетная скорость осаждения для подслоя и верхнего слоя – 18 nm/s и 12–16 nm/s . Прекурсоры Cu-Sn-Ni были получены с различной толщиной никеля для изучения влияния изменения его концентрации в системе Cu / Sn.

Кристаллическую структуру прекурсоров определяли при помощи рентгенофазового анализа (РФА). Морфологию поверхности определяли с использованием сканирующей электронной микроскопии (СЭМ), а элементный состав с помощью рентгеноспектрального анализа (РСА).

2 Результаты и их обсуждение

В ходе рентгенофазового анализа (РФА) прекурсоров Cu-Sn-Ni на подложке стекло / Мо были получены следующие результаты. Представленные рентгенограммы прекурсоров Cu-Sn-Ni (рисунок 2.1) для всех серий (А и В, для серии В рентгенограмма аналогична серии А) демонстрируют пики, характерные для гексагональной фазы CuSn (COD#96-900-8893, пространственная группа $P63mc$, параметры решетки $a = 4,19 \text{ \AA}$, $c = 5,086 \text{ \AA}$), кубической фазы CuNi (COD#96-152-4263, пространственная группа $Fm-3m$, параметры решетки $a = 3,5636 \text{ \AA}$), кубической фазы Ni_3Sn (COD#96-152-2849, пространственная группа $Fm-3m$, параметры решетки $a = 5,98 \text{ \AA}$) и кубической фазы Ni (COD#00-087-0712, пространственная группа $Fm-3m$, параметры решетки $a = 3,5238 \text{ \AA}$). На рентгенограмме прекурсоров также обнаружены пики, соответствующие материалу подложки молибдену (COD#00-089-5156, пространственная группа $Im-3m$, параметры решетки $a = 3,1474 \text{ \AA}$). Диффузия атомов меди, олова, никеля в слой молибдена не приводит к образованию фаз, отличных от Cu-Sn, Cu-Ni,

Sn-Ni или Мо, что указывает на химическую инертность Мо к наносимым металлам.

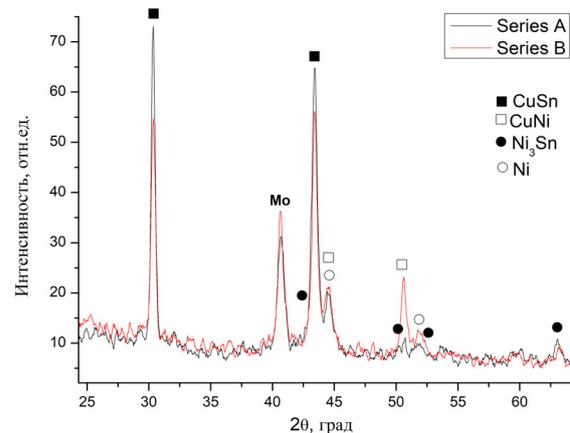


Рисунок 2.1 – Типичные рентгенограммы прекурсоров Cu-Sn-Ni на подложке стекло / Мо

Наличие в составе прекурсоров Cu-Sn-Ni чистой фазы Ni обусловлено его меньшей способностью реагирования с другими осаждаемыми металлами по сравнению с медью и оловом. Более интенсивные пики от никеля на рентгенограммах прекурсоров серии В связаны с его большим содержанием в составе данных прекурсоров согласно результатам РСМ, представленным в таблице 2.1. Как видно из представленных рентгенограмм доминирующие пики, соответствующие фазе CuSn, более интенсивны для серии А, что связано с большим содержанием меди и олова в составе данной серии прекурсоров (таблица 2.1). При этом пики, принадлежащие фазам CuNi и Ni более интенсивны для прекурсоров серии В, что также обусловлено большим содержанием никеля в данной серии прекурсоров.

Таблица 2.1 – Состав в атомных и весовых процентах прекурсоров Cu-Sn-Ni, полученных на подложке Мо / стекло

Серия	Cu		Ni		Sn	
	at%	wt%	at%	wt%	at%	wt%
А	30,1	23,0	31,8	22,5	38,1	54,4
Б	32,1	25,4	34,5	25,2	33,5	49,4
В	15,9	14,1	63,6	52,0	20,5	33,9

Суммарная толщина осажденных прекурсоров Ni / Cu / Sn / Ni во всех случаях составляет 700–900 nm (рисунок 2.2), что практически соответствует технологически задаваемой (700 nm).

На рисунке 2.3 представлены типичные СЭМ-изображения поверхности прекурсоров Cu-Sn-Ni на подложке стекло / Мо. Как видно из представленных микрофотографий, морфология полученных прекурсоров во всех случаях схожа и характеризуется однородной структурой.

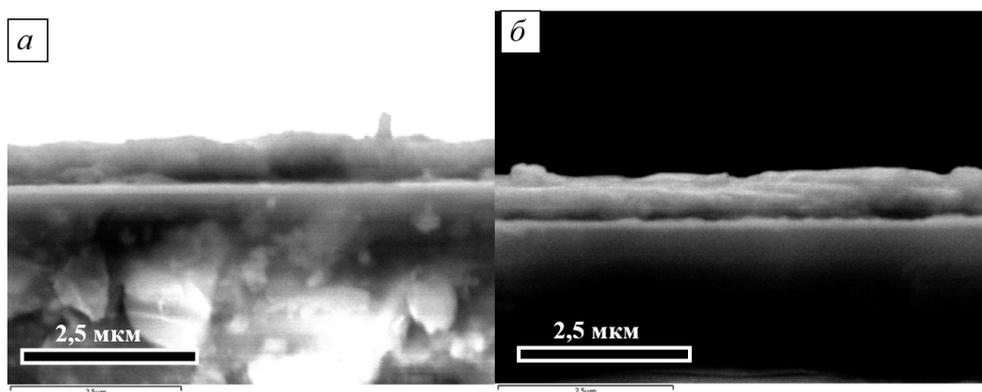


Рисунок 2.2 – Скол прекурсора Ni / Cu / Sn / Ni серии А (а) и В (б)

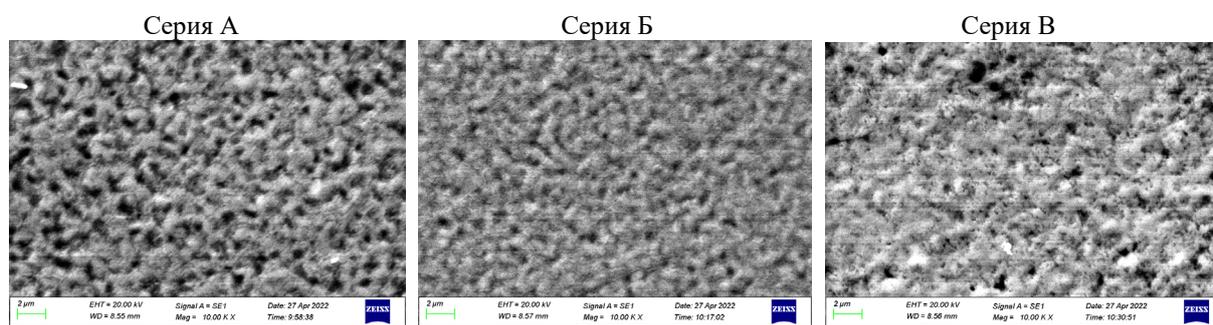


Рисунок 2.3 – Типичные СЭМ-изображения поверхности прекурсоров Cu-Sn-Ni на подложке стекло/Мо

Как видно из микрофотографии прекурсоров серии В, на их поверхности присутствуют нанометровые поры большей поверхностной плотности, которые обусловлены технологией электрохимического осаждения олова из водных электролитов. Как известно, побочным процессом при электрохимическом осаждении металлов с отрицательным стандартным электродным потенциалом из водных электролитов является выделение водорода на катоде.

При этом локальное повышение концентрации ионов OH^- (повышение рН) вблизи катода препятствует осаждению металлов, блокируя участки поверхности и, тем самым, предотвращает зарождение и рост их зерен. Для уменьшения выделения водорода и контроля морфологии при осаждении олова использовались добавки. Тем не менее, это не полностью препятствовало образованию пористых участков.

Заключение

Методом электрохимического осаждения сформированы тонкие пленки прекурсоров Ni / Cu / Sn / Ni на подложках структуры стекло / Мо. Показано, что прекурсоры Cu-Sn-Ni с подслоем никеля (Ni / Cu / Sn / Ni) обладают лучшей адгезией к токопроводящему подслою молибдена, нанесенного на стеклянные подложки, чем прекурсоры, в которых осаждается первым слоем медь. Были отобраны оптимальные условия (температура электролита, плотность тока,

время осаждения и др.) последовательного электрохимического осаждения металлических слоев прекурсоров Cu-Sn-Ni, позволяющие получить их с необходимым качеством для дальнейшего синтеза пленок $\text{Cu}_2\text{NiSn}(\text{S},\text{Se})_4$. Суммарная толщина осажденных прекурсоров Cu-Sn-Ni во всех случаях составляет 700–900 нм, что практически соответствует технологически задаваемой (800 нм). Морфология поверхности полученных прекурсоров Cu-Sn-Ni во всех случаях схожа и характеризуется однородной структурой. Установлено, что фазовый состав базовых слоев формируется смесью фаз, состоящих из CuSn, кубической фазы CuNi, кубической фазы Ni_3Sn и кубической фазы Ni, а также обнаружены пики, соответствующие материалу подложки молибдену. Обнаружено, что с увеличением содержания меди и олова интенсивность дифракционных пиков, соответствующих фазам CuSn и CuNi, увеличивается, в то время как с увеличением содержания никеля в составе прекурсоров увеличивается интенсивность пиков только от элементарного Ni. В результате работы получены качественные прекурсоры Cu-Sn-Ni для дальнейшего синтеза светопоглощающих тонких пленок $\text{Cu}_2\text{NiSn}(\text{S},\text{Se})_4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Structural, Electronic, and Optical Properties of $\text{Cu}_2\text{NiSnS}_4$: A Combined Experimental and Theoretical Study toward Photovoltaic Applications /*

S. Rondiya [et al.] // Chem. Mater. – 2017. – Vol. 29. – P. 3133–3142.

2. *Solution-processed* Cu_2XSnS_4 (X = Fe, Co, Ni) photo-electrochemical and thin film solar cells on vertically grown ZnO nanorod arrays / A. Ghosh [et al.] // RSC Adv. – 2016. – Vol. 6. – P. 115204–115212.

3. *Efficiency enhancement of novel* CNTS / ZnS / Zn(O,S) thin film solar cell / Yousaf Hameed Khattak [et al.] // Optik. – 2018. – Vol. 171. – P. 453–462.

4. *Kondrotas, R.* Electrochemical deposition of Cu-Zn-Sn precursor and formation of $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ solar cell: diss. doctoral physical sciences and chemistry : 03P / R. Kondrotas. – Vilnius, 2015. – 153 p.

5. *Hansen, R.M.* Adherent Electroplating on molybdenum / R.M. Hansen // PhD thesis, Newark College of Engineering. – New Jersey. – 1952.

6. *Chia, P.Y.* Reactions in Electrodeposited Cu / Sn and Cu / Ni / Sn Nanoscale Multilayers for Interconnects / P.Y. Chia, A.S.M.A. Haseeb, S.H. Mannan // Materials. – 2016. – Vol. 9. – P. 430 (1–14).

Исследования выполнены в рамках проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (№ T21PM-033).

Поступила в редакцию 01.11.2022.

Информация об авторах

Осмоловская Татьяна Николаевна – магистрантка

Феценко Артём Александрович

Станчик Алёна Викторовна – к.ф.-м.н

УДК 539.4

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_43

EDN: MJNIAY

СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕДИНИЧНОЙ МАРТЕНСИТНОЙ ПРОСЛОЙКИ В ФЕРРОМАГНИТНОМ МОНОКРИСТАЛЛЕ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ, НАХОДЯЩЕМСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКЕ

В.О. Остриков¹, О.М. Остриков²¹Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

A STATIC AND DYNAMIC PROBLEM FOR A SINGLE MARTENSITIC LAYER IN A FERROMAGNETIC SINGLE CRYSTAL WITH A SHAPE MEMORY EFFECT IN A MAGNETIC FIELD IN A RIGID EMBODIMENT

V.O. Ostrikov¹, O.M. Ostrikov²¹Sukhoi State Technical University of Gomel²Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. Решена статическая и динамическая задача для границ мартенситной прослойки в находящемся в магнитном поле механически не нагруженном ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, закрепленном в жесткой заделке. Показано, что для обеспечения статического равновесия необходимо наличие на границах раздела компенсационных сил, уравновешивающих действие магнитного поля.

Ключевые слова: мартенситная прослойка, ферромагнитный монокристалл с памятью формы, межфазная граница раздела.

Для цитирования: Остриков, В.О. Статическая и динамическая задача для единичной мартенситной прослойки в ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в магнитном поле в жесткой заделке / В.О. Остриков, О.М. Остриков // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 43–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_43. – EDN: MJNIAY

Abstract. A static and dynamic problem is solved for the boundaries of a martensitic layer in a mechanically unloaded ferromagnetic single crystal with a shape memory effect located in a magnetic field and fixed in a rigid embodiment. It is shown that to ensure static equilibrium, it is necessary to have compensatory at the interfaces that balance the action of the magnetic field.

Keywords: martensitic layer, ferromagnetic single crystal with shape memory, interface.

For citation: Ostrikov, V.O. A static and dynamic problem for a single martensite layer in a ferromagnetic single crystal with a shape memory effect in a magnetic field in a rigid embodiment / V.O. Ostrikov, O.M. Ostrikov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 43–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_43 (in Russian). – EDN: MJNIAY

Введение

Интерес к активным исследованиям ферромагнитных материалов с эффектом запоминания формы вызван перспективами практического применения данных материалов в электротехнических системах нового поколения [1]–[8]. При этом растет актуальность разработки и применения инженерных расчетов для технических задач, связанных с уникальными физико-механическими свойствами материалов с памятью формы, восстанавливающих ее под действием магнитного поля [2].

Целью данной работы стало решение статической и динамической задачи для мартенситной прослойки, находящейся в призматическом ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке.

1 Постановка задачи

На рисунке 1.1 схематически представлен призматический монокристаллический ферромагнитный образец с памятью формы, находящийся в жесткой заделке. Пусть в монокристалле имеется единичная мартенситная прослойка длиной l_m . Длины аустенитных частей кристалла обозначим l_{a1} и l_{a2} (рисунок 1.1). Величины l_m , l_{a1} и l_{a2} примем за известные параметры.

В общем случае магнитное поле, в которое помещен кристалл, будем считать неоднородным, а силовое воздействие данного поля на границах раздела аустенит/мартенсит будем рассматривать посредством сил \vec{F}_{Bmag} и \vec{F}_{Cmag} . В общем случае *неоднородного* магнитного поля

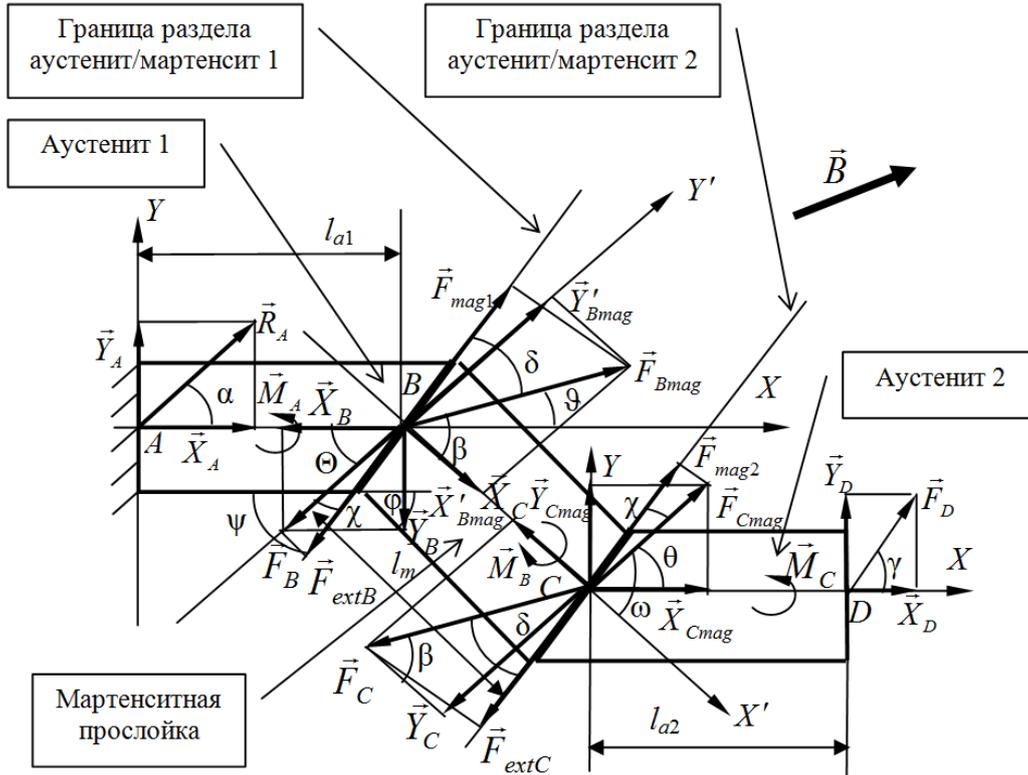


Рисунок 1.1 – Ферромагнитный призматический монокристаллический образец с эффектом памяти формы с мартенситной прослойкой, находящийся в жесткой заделке в магнитном поле

\vec{B} данные силы не параллельны и величины этих сил не равны друг другу (т. е. $F_{Bmag} \neq F_{Cmag}$).

Силы \vec{F}_{Bmag} и \vec{F}_{Cmag} будем считать заданными.

Действие магнитного поля на ферромагнитный призматический монокристалл с памятью формы смоделируем действующей на свободном торце образца силой \vec{F}_D (рисунок 1.1). Величину этой силы и ее направление нужно определить.

Также необходимо рассчитать все моменты сил, действующие на мартенситный и аустенитные объемы ферромагнитного призматического монокристалла с памятью формы, и величину и направление реакции \vec{R}_A заделки.

2 Решение статической задачи

1. Решение статической задачи удобно начинать с рассмотрения сил, действующих на второй аустенитный объем (рисунок 1.1), для которого в состоянии равновесия будем иметь:

$$\sum_i F_{ix} = X_D + F_{Cmag} \cos\theta - F_C \cos\vartheta = 0, \quad (2.1)$$

$$\sum_i F_{iy} = Y_D + F_{Cmag} \sin\theta - F_C \sin\vartheta = 0, \quad (2.2)$$

$$\sum_i M_C(F_i) = F_D l_{a2} \sin\gamma + M_C = 0, \quad (2.3)$$

где выполнена замена

$$X_D = F_D \cos\gamma, \quad Y_D = F_D \sin\gamma. \quad (2.4)$$

В (2.1)–(2.4) γ , θ и ϑ – углы, показанные на рисунке 1.1; сила \vec{F}_D уравнивает действие силы \vec{F}_{Cmag} , инициированной магнитным полем; сила \vec{F}_C уравнивает действие силы \vec{F}_{Bmag} , также возникшую при включении магнитного поля; M_C – момент сил (рисунок 1.1). Предполагалось, что \vec{F}_{Bmag} параллельна \vec{F}_C .

Тогда в условии статического равновесия из (2.1)–(2.3) получим

$$X_D = F_C \cos\vartheta - F_{Cmag} \cos\theta, \quad (2.5)$$

$$Y_D = F_C \sin\vartheta - F_{Cmag} \sin\theta, \quad (2.6)$$

$$M_C = -F_D l_{a2} \sin\gamma.$$

Следует учесть, что

$$\vec{F}_D = X_D \vec{i} + Y_D \vec{j}; \quad F_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2};$$

$$\text{tg}\gamma = Y_D / X_D. \quad (2.7)$$

2. Рассмотрение равновесия мартенситного объема приводит к системе уравнений:

$$\sum_i F_{ix'} = F_{Cmag} \cos\omega - F_C \cos\beta +$$

$$+ F_{Bmag} \cos\beta - F_B \cos\omega = 0, \quad (2.8)$$

$$\sum_i F_{iy'} = F_{Cmag} \sin\omega - F_C \sin\beta +$$

$$+ F_{Bmag} \sin\beta - F_B \sin\omega = 0, \quad (2.9)$$

$$\sum_i M_B(F_i) = F_{Cmag} l_m \sin\omega - F_C l_m \sin\beta - M_B + M_C = 0, \quad (2.10)$$

$$\sum_i M_C(F_i) = -F_{Bmag} l_m \sin\beta + F_B l_m \sin\omega + M_B - M_C = 0. \quad (2.11)$$

Здесь β и ω – углы, показанные на рисунке 1.1; \vec{F}_B – сила, действующая на границе раздела аустенит/мартенсит и уравновешивающая действие силы \vec{F}_{Cmag} на другой границе мартенситного объема; M_B – момент сил.

Из (2.10) и (2.11) получаем:

$$(F_{Cmag} + F_B) \sin\omega = (F_{Bmag} + F_C) \sin\beta. \quad (2.12)$$

3. Для первого аустенитного объема (рисунок 1.1) получим:

$$\sum_i F_{iX} = F_{Bmag} \cos\vartheta - F_B \cos\theta + X_A = 0,$$

$$\sum_i F_{iY} = F_{Bmag} \sin\vartheta - F_B \sin\theta + Y_A = 0,$$

$$\sum_i M_A(F_i) = F_{Bmag} l_{a1} \sin\vartheta - F_B l_{a1} \sin\theta + M_A - M_B + M_C = 0.$$

Отсюда

$$X_A = F_B \cos\theta - F_{Bmag} \cos\vartheta,$$

$$Y_A = F_B \sin\theta - F_{Bmag} \sin\vartheta,$$

$$M_A = -F_{Bmag} l_{a1} \sin\vartheta + F_B l_{a1} \sin\theta + F_{Cmag} l_m \sin\omega - F_C l_m \sin\beta.$$

Причем

$$\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}; \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad \text{tg}\alpha = Y_A / X_A.$$

4. В приведенных выше системах уравнений число неизвестных превышает число уравнений. Поэтому перейдем к частному случаю и примем допущение:

$$F_{Bmag} = F_{Cmag}. \quad (2.13)$$

Правомерность такого допущения обусловлена тем, что величина l_m , как правило, достаточно мала, чтобы в рассматриваемой области мартенситной прослойки магнитное поле с высокой степенью точности можно считать *однородным*. Тогда из (2.8) получим

$$F_B \cos\omega = F_{Cmag} (\cos\omega + \cos\beta) - F_C \cos\beta, \quad (2.14)$$

а из (2.9) –

$$F_B \sin\omega = F_{Cmag} (\sin\omega + \sin\beta) - F_C \sin\beta. \quad (2.15)$$

Поделив (2.15) на (2.14), получим

$$\text{tg}\omega = \frac{F_{Cmag} (\sin\omega + \sin\beta) - F_C \sin\beta}{F_{Cmag} (\cos\omega + \cos\beta) - F_C \cos\beta}. \quad (2.16)$$

Далее, преобразовывая (2.16) в

$$F_{Cmag} \text{tg}\omega (\cos\omega + \cos\beta) - F_C \cos\beta \text{tg}\omega = F_{Cmag} (\sin\omega + \sin\beta) - F_C \sin\beta,$$

окончательно получим

$$F_C = F_{Cmag} \frac{\sin\omega + \sin\beta - \text{tg}\omega (\cos\omega + \cos\beta)}{\sin\beta - \cos\beta \text{tg}\omega}. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.5) и (2.6) будем иметь:

$$X_D = F_{Cmag} \times \quad (2.18)$$

$$\times \left(\frac{\sin\omega + \sin\beta - \text{tg}\omega (\cos\omega + \cos\beta)}{\sin\beta - \cos\beta \text{tg}\omega} \cos\vartheta - \cos\theta \right),$$

$$Y_D = F_{Cmag} \times \quad (2.19)$$

$$\times \left(\frac{\sin\omega + \sin\beta - \text{tg}\omega (\cos\omega + \cos\beta)}{\sin\beta - \cos\beta \text{tg}\omega} \sin\vartheta - \sin\theta \right).$$

Ввиду параллельности векторов и \vec{F}_{Bmag} и \vec{F}_{Cmag} в однородном магнитном поле из данных рисунка 1.1 будем иметь: $\vartheta = \theta$ и $\beta = \omega$. Это позволяет (2.18) и (2.19) преобразовать к виду:

$$X_D = F_{Cmag} \cos\theta, \quad (2.20)$$

$$Y_D = F_{Cmag} \sin\theta. \quad (2.21)$$

Подстановка (2.20) и (2.21) в (2.7) дает:

$$F_D = |F_{Cmag}|; \quad \gamma = \theta. \quad (2.22)$$

5. Учитывая (2.13) и то, что в *однородном* магнитном поле $\beta = \omega$, из (2.8) и (2.9) получим

$$2F_{Cmag} - F_C - F_B = 0, \quad (2.23)$$

а из (2.12) –

$$F_B = F_C. \quad (2.24)$$

Тогда из (2.23) и (2.24) следует

$$F_{Cmag} = F_C. \quad (2.25)$$

А из (2.13), (2.22), (2.24) и (2.25) получаем:

$$F_{Bmag} = F_{Cmag} = F_B = F_C = |F_D|.$$

Следует отметить, что для обеспечения статического равновесия рассматриваемого механически ненагруженного ферромагнитного монокристалла с мартенситной прослойкой, находящегося в магнитном поле (рисунок 1.1), необходимо наличие сил \vec{F}_B и \vec{F}_C , обеспечивающих это равновесие. Эти силы впервые были обнаружены и описаны в работе [9], где были названы *компенсационными* силами.

3 Решение динамической задачи

Для решения динамической задачи воспользуемся уравнением типа, приведенного в [3]:

$$\frac{\rho A_0 \left(\frac{dL}{dt} \right)^2}{k_0} + \frac{m_0 + \rho A_0 (L - L_0)}{k_0} \frac{d^2 L}{dt^2} = \Delta F_{ext}, \quad (3.1)$$

где ρ – объемная массовая плотность материала; A_0 – площадь поперечного сечения призматического образца; k_0 – коэффициент, связывающий скорость движения границы раздела аустенит / мартенсит (V_b) со скоростью плоскопараллельного перемещения мартенситной части монокристалла (V_m), причем $k_0 = V_b / V_m$ [27]; m_0 – начальная масса мартенситной части образца;

L_0 – начальное положение границы раздела аустенит/мартенсит; L – текущее положение границы; ΔF_{ext} – разность сил на границе раздела аустенит/мартенсит.

Как было показано в [2], решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$L(t) = \frac{1}{a} \left(\frac{D_1 t - 1}{D_2} \pm \sqrt{a \Delta F_{ext} t - b} \right). \quad (3.2)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{\pm \sqrt{a \Delta F_{ext}} - a V_b}{a L_0 + b}, \quad D_2 = -\frac{1}{a L_0 + b}, \quad a = \frac{\rho A_0}{k_0},$$

$$b = \frac{m_0}{k_0} - a L_0.$$

Не трудно показать, что из (3.2) следует

$$\frac{dL(t)}{dt} = V_b = \frac{1}{a} \left(\frac{D_1}{D_2} \pm \sqrt{a \Delta F_{ext}} \right), \quad (3.3)$$

а из (3.2) и (3.3) – $L(t) = V_b t + L_0$.

Отсюда для границ мартенситной прослойки очевидно следует

$$L_1(t) = V_{b1} t + L_{01}, \quad (3.4)$$

$$L_2(t) = V_{b2} t + L_{02}, \quad (3.5)$$

где индексы 1 и 2 указывают соответственно на первую или вторую границу мартенситной прослойки. Тогда из (3.4) и (3.5) получим

$$l_m(t) = L_2(t) - L_1(t).$$

Следует отметить, что для каждой из границ справедливо

$$\Delta F_{ext1} = F_{mag1} - F_{extB}, \quad (3.6)$$

$$\Delta F_{ext2} = F_{mag2} - F_{extC}. \quad (3.7)$$

Это указывает на то, что с точки зрения механики движущей силой бездиффузионных фазовых превращений в ферромагнитном монокристалле с памятью формы является разница в действии сил, инициированных на границах раздела аустенит / мартенсит, магнитным полем и компенсационных сил. Согласно (3.3), чем больше эта разница, тем выше скорость перемещения межфазных границ.

Следует отметить, что в (3.6) и (3.7)

$$F_{mag1} = F_{Bmag} \cos \delta, \quad F_{extB} = F_B \cos \chi,$$

$$F_{mag2} = F_{Cmag} \cos \chi, \quad F_{extC} = F_C \cos \delta.$$

Заключение

Таким образом, предложены варианты решения статической и динамической задачи для единичной мартенситной прослойки, находящейся в механически не нагруженном ферромагнитном материале с памятью формы, закрепленном в жесткой заделке. Показано, что для нахождения ферромагнитного образца в статическом равновесии в магнитном поле на межфазных границах должны действовать силы, компенсирующие воздействие магнитного поля. Скорость

перемещения границ раздела определяется разницей сил, действующих со стороны магнитного поля, и компенсационных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Laitinen, V.* Giant 5.8% magnetic-field-induced strain in additive manufactured Ni-Mn-Ga magnetic shape memory alloy / V. Laitinen, A. Saren, A. Sozinov, K. Ullakko // *Scripta Materialia*. – 2022. – Vol. 208. – P. 114324.

2. *Остриков, В.О.* Статика и динамика границы раздела аустенит / мартенсит в нагруженном призматическом монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке / В.О. Остриков, О.М. Остриков // *Машиностроение: республиканский межведомственный сборник научных трудов / Белорусский национальный технический университет*; гл. ред. В.К. Шелег. – Минск: БНТУ, 2021. – Вып. 33. – С. 139–147.

3. *Saren, A.* Dynamic twinning stress and viscous-like damping of twin boundary motion in magnetic shape memory alloy Ni-Mn-Ga / A. Saren, K. Ullakko // *Scripta Materialia*. – 2017. – Vol. 139. – P. 126–129.

4. *Phenomenology of giant magnetic-field induced strain in ferromagnetic shape-memory materials* / R.C. O’Handley, S.J. Murrey, M. Marioni, H. Nembach, S.M. Allen // *J. Appl. Phys.* – 2000. – Vol. 87. – P. 4712–4717.

5. *6% magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni-Mn-Ga* / S.J. Murrey, M. Marioni, S.M. Allen, R.C. O’Handley // *Appl. Phys. Lett.* – 2000. – Vol. 77. – P. 886–888.

6. *Ullakko, K.* Magnetically controlled shape memory alloys: a new class of actuator materials / K. Ullakko // *J. Mater. Eng. Perform.* – 1996. – Vol. 5. – P. 405–409.

7. *James, R.D.* Large field-induced strains in ferromagnetic shape memory materials / R.D. James, R. Tickle, M. Wuttig // *Mater. Sci. Eng.* – 1999. – Vol. A273–275. – P. 320–325.

8. *Ferromagnetic shape memory in the NiMnGa system* / R. Tickle, R.D. James, T. Shield, M. Wuttig, V.V. Kokorin // *IEEE Trans. Magn.* – 1999. – Vol. 35. – P. 4301–4310.

9. *Остриков, В.О.* Компенсационные силы на границах раздела аустенит / мартенсит единичной мартенситной прослойки в ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в магнитном поле в жесткой заделке / В.О. Остриков, О.М. Остриков // *Актуальные проблемы прочности: сборник тезисов LXIV Международной конференции (Екатеринбург, 4 апреля 2022 г.)*. – Екатеринбург, 2022. – С. 366–367.

Поступила в редакцию 04.11.2022.

Информация об авторах

Остриков Владимир Олегович – магистрант
Остриков Олег Михайлович – к.ф.-м.н., доцент

СТРУКТУРА И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛЕГИРОВАННЫХ АЗОТОМ И АЛЮМИНИЕМ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ

Д.Г. Пилипцов¹, Бин Джоу², А.В. Рогачёв¹, Н.Н. Федосенко¹, Е.А. Кулеш¹

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Институт материаловедения и инженерии Тайюаньского технологического университета

STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF CARBON COATINGS ALLOYED WITH NITROGEN AND ALUMINUM

D.G. Piliptsov¹, Bing Zhou², A.V. Rogachev¹, N.N. Fedosenko¹, E.A. Kulesh¹

¹Francisk Skorina Gomel State University

²College of Materials Science and Engineering, Taiyuan University of Technology

Аннотация. Легированные азотом и алюминием углеродные покрытия осаждались из совмещенных потоков импульсной углеродной плазмы и генерируемых дуговым разрядом постоянного тока ионов алюминия при парциальном давлении азота $6 \cdot 10^{-2}$ Па. Определены закономерности влияния условий и режимов осаждения на фазовый состав углеродной матрицы и механические свойства покрытий. При режиме осаждения (6 Гц, 60 А) покрытия характеризуются наименьшим размером Csp^2 кластеров, их высокой концентрацией, что и определило их максимальную микротвердость, высокие упруго-пластические и триботехнические свойства.

Ключевые слова: углеродное покрытие, алюминий, азот, структура, механические свойства, легирование, метод вакуумного импульсного катодно-дугового испарения.

Для цитирования: Структура и механические свойства легированных азотом и алюминием углеродных покрытий / Д.Г. Пилипцов, Бин Джоу, А.В. Рогачёв, Н.Н. Федосенко, Е.А. Кулеш // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 47–53. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_47. – EDN: OCMFGB

Abstract. Carbon coatings doped with nitrogen and aluminum were deposited from combined flows of pulsed carbon plasma and aluminum ions generated by a DC arc discharge at a nitrogen partial pressure of $6 \cdot 10^{-2}$ Pa. The regularities of the influence of conditions and modes of deposition on the phase composition of the carbon matrix and the mechanical properties of the coatings are determined. In the deposition mode (6 Hz, 60 A), the coatings are characterized by the smallest size of Csp^2 clusters and their high concentration, which determined their maximum microhardness, high plastic and tribological properties.

Keywords: carbon coating, aluminum, nitrogen, structure, mechanical properties, alloying, vacuum pulsed cathode-arc evaporation method.

For citation: Structure and mechanical properties of carbon coatings alloyed with nitrogen and aluminum / D.G. Piliptsov, Bing Zhou, A.V. Rogachev, N.N. Fedosenko, E.A. Kulesh // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 47–53. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_47 (in Russian). – EDN: OCMFGB

Введение

Благодаря широкому диапазону механических свойств, а также биосовместимости и химической инертности а-С покрытия эффективно используются в машиностроении, медицине, оптике [1], [2]. Наряду с этим для них характерен ряд недостатков, в частности высокие внутренние напряжения, хрупкость, низкие термостойкость и ударная вязкость, ограничивающих их применение [3]. С целью позитивного изменения этих свойств формируют легированные различными элементами углеродные покрытия, многослойные конструкции на их основе, а также проводят ионную или термическую обработку в различных средах [1], [3]. При этом основным технологическим направлением достижения более высоких физико-механических свойств а-С покрытий легированием является повышение плотности

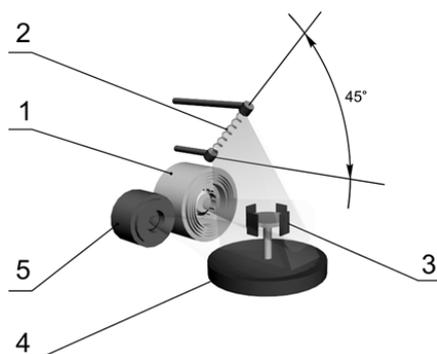
sp^3 -кластеров углерода за счет каталитического влияния легирующих элементов, а также образование в объеме слоя карбидов или других химических соединений. При формировании ряда композиционных углеродных покрытий повышение их свойств, например, снижение внутренних напряжений, повышение пластичности обусловлено образованием равновесных твердых растворов, выделением легирующих элементов в виде самостоятельной фазы [4]. Широкие возможности в реализации данных направлений открываются при использовании многокомпонентного легирования, в частности химически активными металлами и азотом. В таких системах формируется широкий набор фаз, обусловленный не только взаимодействием легирующих элементов с углеродом, но и взаимодействием элементов между собой и образовавшихся

соединений с углеродом. Так, в работах [3], [5] показано, что в углеродных покрытиях, легированных титаном и азотом, содержатся кластеры карбидов и карбонитридов титана, определивших высокие триботехнические свойства покрытий, снижение внутренних напряжений. При легировании а-С покрытий хромом и никелем установлено образование дисперсных фаз сложных легирующих структур на основе карбида хрома и интерметаллических соединений, являющихся причиной немонотонного изменения фазового состава углеродной матрицы, свойств покрытий при повышении концентрации металлов [6].

Высокая химическая активность алюминия, способность формировать твердые растворы с высокой предельной концентрацией определяют перспективность его использования при легировании углеродных материалов. Основной целью настоящей работы является представляющее особый практический и научный интерес изучение фазового состава, структуры и механических свойств углеродных покрытий, бинарнолегированных алюминием и азотом, проявляющих по отношению друг к другу высокую химическую активность.

1 Оборудование и методы исследования

Углеродные покрытия, легированные алюминием и азотом (а-С:Al:N покрытия), получены методом вакуумного импульсного катодно-дугового испарения графитового катода и испарения металлического катода (Al) дугой постоянного тока с магнитной сепарацией плазменного потока в среде азота с парциальным давлением $6 \cdot 10^{-2}$ Па. Ток дугового испарителя алюминия регулировали в диапазоне 50–80 А. Частоту следования импульсов разряда изменяли в диапазоне от 3 до 15 Гц. Количество импульсов разряда составляло 3000. Схема нанесения покрытий приведена на рисунке 1.1.



- 1 – импульсный источник углеродной плазмы с катодом из графита; 2 – ионный источник типа АИДА; 3 – подложки; 4 – вращающаяся технологическая оснастка с образцами; 5 – электродуговой испаритель с магнитной сепарацией плазменного потока с катодом из алюминия

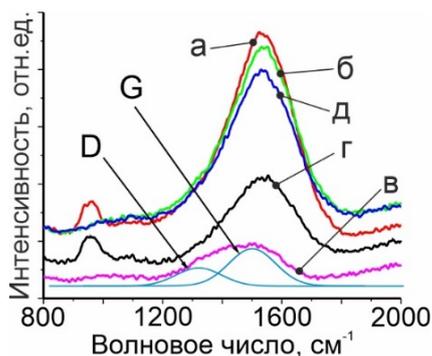
Рисунок 1.1 – Схема осаждения покрытий

Для удаления поверхностных загрязнений подложки промывали в ультразвуковой ванне в течение 20 минут в ацетоне, этаноле и дистиллированной воде. После размещения подложек в вакуумной камере и ее откачки до давления $6 \cdot 10^{-4}$ Па, в камеру напускали аргон до давления $4 \cdot 10^{-2}$ Па и обрабатывали поверхность подложки ионами аргона в течение 15 мин с плотность тока 25 А/м^2 .

Микроструктуру покрытий изучали с использованием спектроскопии комбинационного рассеяния (КР микроскоп Senterra, Bruker), возбуждение спектров осуществлялось излучением с длиной волны 532 нм и мощностью 20 мВт. Химический анализ покрытий определяли методом РФЭС (PHI Quantera II) с использованием источника AlK_α ($h\nu = 1486,7 \text{ эВ}$) и мощностью 25 Вт. Морфологию поверхности исследовали с использованием атомно-силового микроскопа Solver-PRO P47 (NT-MDT, РФ). Измерение механических параметров (твердость H , модуль упругости E , коэффициент упругого восстановления η_{IT}) покрытий проводили с использованием наноиндентора «НаноСкан 4D» (ФГБНУ «ТИСНУМ», г. Троицк, РФ). Склерометрические испытания покрытий, осажденных на полированные стальные подложки (марка 304), проводили на скретч-тестере J1st 022 (J&L Tech, Корея). Прибор оснащён датчиком акустической эмиссии для определения нагрузки трещинообразования, а также оптической системой панорамной съёмки поверхности трека движения алмазного индентора. Для оценки ударной вязкости покрытия использовали характеристику CPR_3 (сопротивление распространению царапины), которая характеризует прочность и определяет сопротивление хрупкому разрушению [7], [8]. Триботехнические испытания проводили по схеме «сфера-плоскость» при возвратно-поступательном перемещении индентора при нормальной нагрузке 1 Н. В качестве контртела использовали шарик диаметром 5 мм, изготовленный из стали ШХ15. После проведения триботехнических испытаний с использованием оптического микроскопа измеряли диаметр пятна контакта и рассчитывали коэффициент изнашивания контртела j ($\text{м}^3/(\text{Н}\cdot\text{м})$).

2 Полученные результаты и их анализ

Характеризующие фазовый состав углеродной матрицы спектры КР а-С:Al:N покрытий имеют типичный для углеродных покрытий вид и представлены на рисунке 2.1. Видно, что с увеличением тока дугового разряда и частоты импульсов генератора углеродной плазмы наблюдается нелинейное изменение их интенсивности, свидетельствующее о сложном характере протекающих процессов.



a – а-С_{3Гц}:Al_{50А}:N, *б* – а-С_{3Гц}:Al_{80А}:N,
в – а-С_{6Гц}:Al_{60А}:N, *г* – а-С_{15Гц}:Al_{50А}:N,
д – а-С_{15Гц}:Al_{80А}:N

Рисунок 2.1 – Спектры КР для а-С:Al:N покрытий

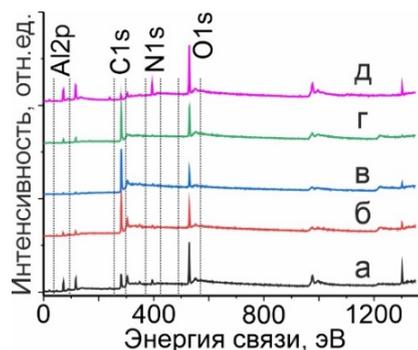
Наблюдаемый в спектрах КР а-С_{3Гц}:Al_{50А}:N и а-С_{15Гц}:Al_{50А}:N покрытий пик при 950 см⁻¹ связан с их оптической прозрачностью, которая определяется высоким содержанием sp³ гибридных атомов углерода. Анализ КР спектров (таблица 2.1) показал, что для а-С_{3Гц}:Al_{80А}:N покрытия характерно более высокое значение I_D/I_G отношения в сравнении с а-С_{3Гц}:Al_{50А}:N покрытием, что определяется уменьшением размера Csp² кластеров [1], [2], [5]. Значение отношения I_D/I_G а-С_{15Гц}:Al_{80А} покрытия равно 1,9 и совместно с уменьшением ширины G-пика при одновременном смещении его положения в область низких волновых чисел свидетельствует об увеличении содержания Csp² кластеров и их среднего размера [9], [10]. При режиме осаждения (6 Гц, 60 А) отношение I_D/I_G достигает максимальных значений, что указывает на наименьший размер Csp² кластеров и их высокую концентрацию [10].

Изменение условий и режима испарения алюминия и углерода позволяет регулировать элементный состав покрытий в широких пределах (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Параметры спектров КР и элементный состав а-С:Al:N покрытий

Покрытие	I _D /I _G	Положение G-пика, см ⁻¹	Ширина G-пика, см ⁻¹	Концентрация элементов, ат. %		
				С	N	Al
а-С _{3Гц} :Al _{50А} :N	1,4	1383,9	315,5	80	7	11
а-С _{3Гц} :Al _{80А} :N	2,2	1368,7	308,6	76	11	9
а-С _{6Гц} :Al _{60А} :N	2,5	1381,9	329,5	88	6	4
а-С _{15Гц} :Al _{50А} :N	1,3	1374,2	358,7	61	13	24
а-С _{15Гц} :Al _{80А} :N	1,9	1386,8	345,2	41	21	32

Процессы химического взаимодействия оценены на основании анализа РФЭ спектров покрытий (рисунок 2.2).



a – а-С_{3Гц}:Al_{50А}:N, *б* – а-С_{3Гц}:Al_{80А}:N,
в – а-С_{6Гц}:Al_{60А}:N, *г* – а-С_{15Гц}:Al_{50А}:N,
д – а-С_{15Гц}:Al_{80А}:N

Рисунок 2.2 – Обзорные РФЭС спектры а-С:Al:N покрытий

Установлено, что интенсивность Al2p пика значительно зависит от параметров осаждения и определяется концентрацией атомов Al в покрытиях. Более выраженный пик Al2p, как ожидалось, характерен для а-С_{15Гц}:Al_{80А}:N покрытия. Пик O1s проявляется за счет адсорбции кислорода из воздуха, т. к. до проведения исследований образцы хранились в его атмосфере, что приводит к поверхностным загрязнениям.

Природа и концентрация образующихся в покрытии химических соединений определены на основании результатов изучения спектров высокого разрешения атомов C1s углерода, N1s азота и Al2p алюминия. Согласно рекомендациям работы [6], для дальнейшего анализа особенностей взаимодействия между элементами в покрытии использовали n_N/n_C отношение, которое рассчитывали как отношение площадей пиков, ответственных за C – C и C – N взаимодействие атомов углерода и азота в а-С:Al:N покрытиях [13], [14]. Установлено (таблица 2), что n_N/n_C отношение а-С:Al:N покрытий принимает максимальное значение при более высоком токе дугового испарителя, что объясняется высокой плотностью потока высокоэнергетических ионов / атомов Al, способных к образованию AlN, и ростом растворения азота в углеродной матрице. Этот механизм отличается от процесса взаимодействия ионов / атомов при формировании а-С:Ti:N покрытия, так как из-за высоких значений энергии атомы Ti преимущественно образуют TiC связи и ограничивают взаимодействие атомов N с углеродной матрицей. Al является относительно инертным по отношению к углероду и преимущественно образует нитрид алюминия. Для активации процесса взаимодействия между атомами азота и углерода необходимо увеличить степень ионизации азота. Однако, при высоких токе дугового разряда и частоте генератора углеродной плазмы атомы углерода рассеиваются на плотном ионном потоке алюминия, что

приводит к снижению содержание атомов углерода в объёме покрытия.

Согласно данным таблицы 2.1 при частоте импульсов генерации углеродной плазмы 15 Гц концентрация углерода в покрытии выше, чем при 6 Гц и 3 Гц, что определяется высокой мгновенной (импульсной) плотностью потока испаренных с поверхности графитового катода атомов/ионов углерода и, следовательно, увеличением количества углерода, поступающего на подложку. Однако, если легирование осуществляется из потоков алюминия, испаренного с использованием более высоких значений тока дуги, то в покрытии происходит значительное увеличение концентрации алюминия. Также фактором, увеличивающим концентрацию алюминия в покрытии, является возрастание капельной фазы алюминия в ионном потоке, особенно при высоких значениях тока дуги.

Изменение значений n_N/n_C отношения может зависеть от плотности энергии ионов углерода, полученных из импульсного разряда с высокой частотой следования импульсов в условиях обработки растущего покрытия ионами алюминия. Особенности механизма формирования химических связей, в этом случае, определяются балансом между ионами / атомами углерода, азота и алюминия, а также отношением их энергий, и при превышении определенного значения энергии ионов азота происходит увеличение количества связей между углеродом и азотом.

Анализ РФЭ спектров N1s состояния для а-С:Al:N покрытий показал, что отношение $N-Csp^3 / N-Csp^2$ а-С:Al:N покрытий первоначально уменьшается с увеличением частоты импульсов и тока мишени, а затем возрастает (таблица 2.2). При частоте импульсов 6 Гц и токе дугового испарителя 60 А отношение $N-Csp^3 / N-Csp^2$ принимает наименьшее, а при частоте импульса 3 Гц и токе дугового испарителя 50 А – наибольшее значение.

Таблица 2.2 – Параметры спектров C1s и N1s состояния а-С:Al:N покрытий

Покрытие	n_N/n_C	Отношение ($N-Csp^3$) / ($N-Csp^2$)
а-С _{3Гц} :Al _{50А} :N	0,10	1,29
а-С _{3Гц} :Al _{80А} :N	0,16	0,70
а-С _{6Гц} :Al _{60А} :N	0,05	0,25
а-С _{15Гц} :Al _{50А} :N	0,23	0,72
а-С _{15Гц} :Al _{80А} :N	0,56	0,29

Немонотонное изменение отношения n_N/n_C указывает на особенности формирования химических связей в покрытии, вызванных взаимодействием в потоках ионов углерода и алюминия с различной энергией.

Установлено, что при одинаковой частоте импульсов генератора углеродной плазмы, концентрация $N-Csp^2$ связей зависит от тока дугового испарителя. С ростом тока дугового испарителя происходит формирование потока ионов алюминия высокой плотности, что приводит к образованию $N-Csp^3$ и пиридиноподобных N – С связей в а-С:Al:N покрытии [14].

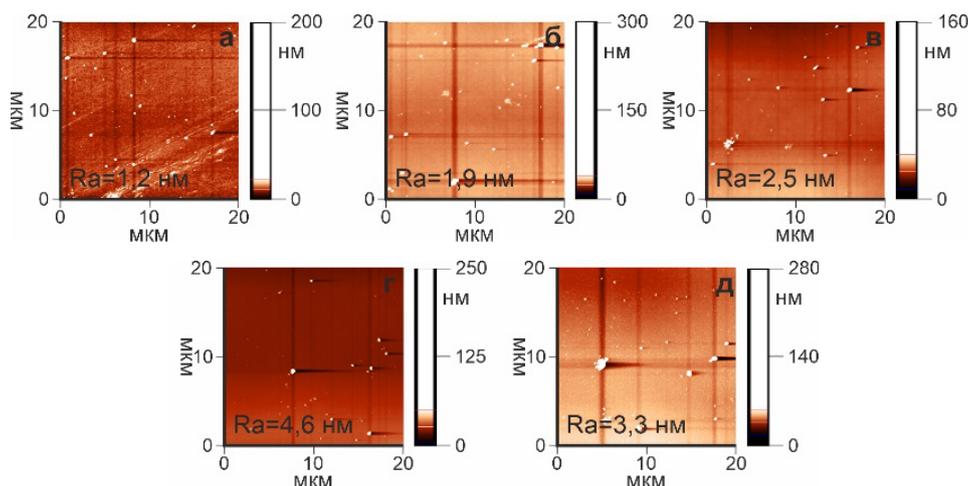
Проведенный анализ РФЭ спектров Al2р состояния атомов алюминия показал, что в покрытиях в зависимости от режимов осаждения присутствуют химические связи, относящиеся к металлическому алюминию, нитриду алюминия и оксиду алюминия. Согласно полученным данным, содержание нитрида алюминия в покрытии определяется током дугового испарителя, и при одинаковой концентрации алюминия в покрытии, содержание нитрида выше для покрытия, полученного при высоком токе дугового испарителя. Это связано с высокой степенью вторичной ионизации азота при взаимодействии с высокоионизированной плазмой углерода и алюминия, полученной на высоких частотах импульсов (15 Гц) и больших токах дугового испарителя (80 А). Результатом этого взаимодействия является повышение химического взаимодействия N и Al. В покрытии присутствует также незначительное количество металлического алюминия и оксида алюминия, образование которого связано с окислением алюминия при взаимодействии с кислородом воздуха.

Анализ АСМ изображений показал, что поверхность покрытий характеризуется неоднородным распределением структурных элементов: на поверхности покрытий обнаружено множество мелких частиц. Частицы большого размера, находящиеся на поверхности а-С_{3Гц}:Al_{80А}:N и а-С_{15Гц}:Al_{80А}:N покрытий, образуются за счет капельной фазы, присутствующей в потоке металлической или углеродной плазмы (рисунок 2.3).

Методом наноиндентирования установлено, что с ростом глубины внедрения индентора в а-С:Al:N покрытие происходит немонотонное изменение микротвердости (рисунок 2.4).

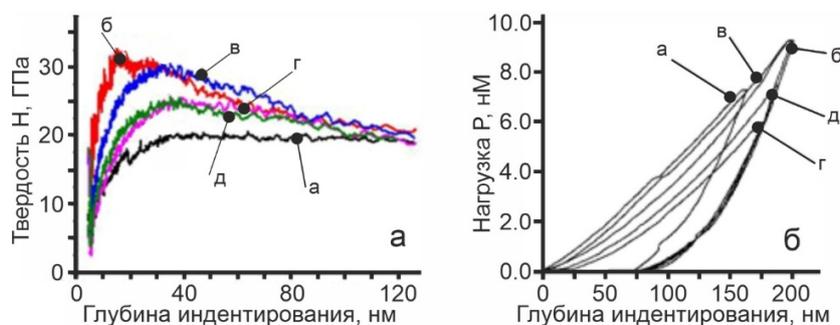
Максимальное значение твердости, равное 31 ГПа при глубине индентирования 25 нм, характерно для а-С_{6Гц}:Al_{60А}:N покрытия, что связано с высокой концентрацией атомов углерода с sp^3 гибридизированными связями, а также минимальным размером Csp^2 кластеров, что в комплексе приводит к увеличению твердости а-С_{6Гц}:Al_{60А}:N покрытий [18], [19].

В таблице 2.3 приведены значения твердости H , модуля упругости E и параметра H/E , характеризующего сопротивление пластической деформации. Известно [18]–[20], что значения H/E позволяют оценить износостойкость покрытий: она возрастает с ростом отношения H/E . Однако для покрытий с высоким содержанием sp^3 фазы характерна хрупкость, вызванная



a – a-C_{3Гц}:Al_{50А}:N, *б* – a-C_{3Гц}:Al_{80А}:N, *в* – a-C_{6Гц}:Al_{60А}:N, *з* – a-C_{15Гц}:Al_{50А}:N, *д* – a-C_{15Гц}:Al_{80А}:N

Рисунок 2.3 – АСМ-изображения поверхности а-С:Al:N покрытий



a – a-C_{3Гц}:Al_{50А}:N, *б* – a-C_{3Гц}:Al_{80А}:N, *в* – a-C_{6Гц}:Al_{60А}:N, *з* – a-C_{15Гц}:Al_{50А}:N, *д* – a-C_{15Гц}:Al_{80А}:N

Рисунок 2.4 – Зависимость твердости *H* покрытий (*a*) и нагрузки *P* (*б*) от глубины внедрения индентора а-С:Al:N покрытий

высокой твердостью и наличием в покрытии значительных внутренних напряжений, которые при воздействии высоких контактных нагрузок приводят к разрушению покрытия за счет его выкрашивания и откалывания от подложки. Установлено (таблица 2.3), что при низких и высоких значениях тока дугового испарителя происходит увеличение прочности покрытия, что связано, в первую очередь, с ростом пластичности за счет наличия в покрытии алюминия. С ростом содержания алюминия в покрытии коэффициент η_{IT} , характеризующий упруго-пластические свойства, возрастает (таблица 2.3), что обусловлено взаимодействием между элементами покрытия, а именно образованием нитридных фаз алюминия, роста C – N связей и графитизации.

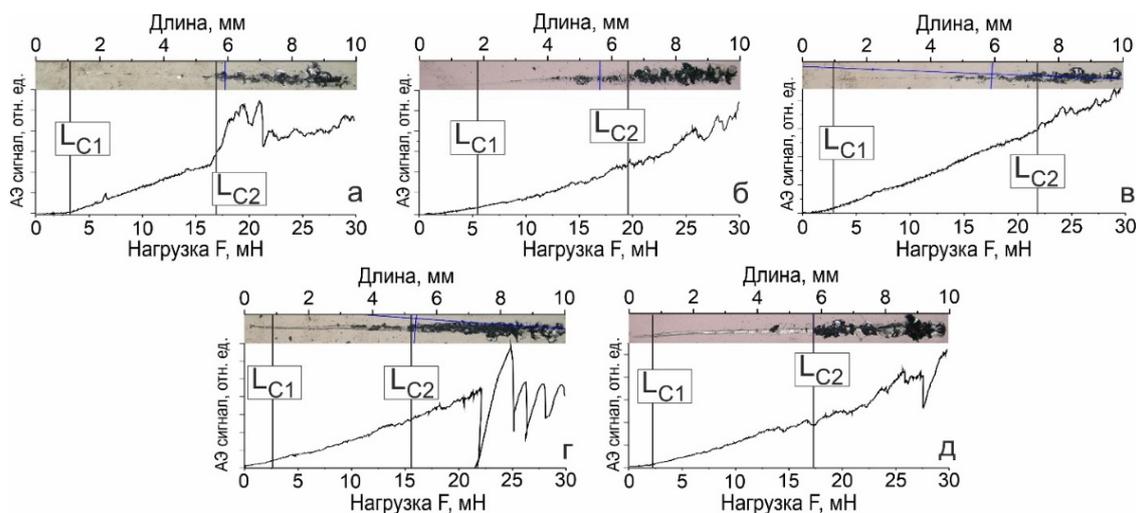
Значения L_c , характеризующие различные стадии разрушения покрытий, и значение CPR_S определяли по изменениям сигнала акустической эмиссии [7], [8], [18] и оптическим изображениям царапины (рисунок 2.5, таблица 2.3).

Установлено (рисунок 2.5 и таблица 2.3), что минимальное значение CPR_S характерно для a-C_{6Гц}:Al_{60А}:N покрытия, что совместно со

снижением η_{IT} указывает на рост пластичности покрытия. При минимальных значениях частоты следования импульсов генератора углеродной плазмы (3 Гц) прочность а-С:Al:N покрытия выше, чем для покрытий, полученных при 6 Гц и 15 Гц. Это показывает, что параметры процесса осаждения, а также наличие азота, влияют на механические параметры покрытия, которые, в свою очередь, зависят от формируемой микроструктуры (значения отношения sp^2/sp^3 , размера и упорядоченности Csp²-кластеров).

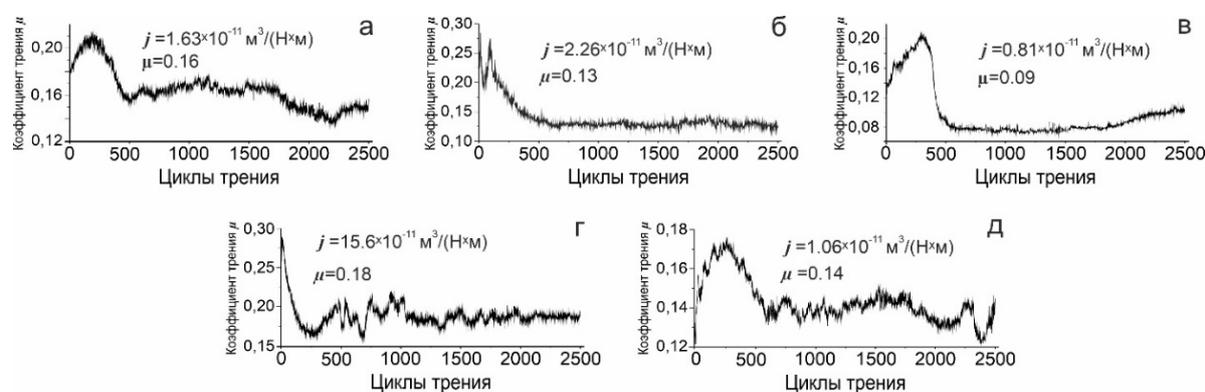
Таблица 2.3 – Механические свойства а-С:Al:N покрытий

Покрытие	<i>H</i> , ГПа	<i>E</i> , ГПа	<i>H</i> / <i>E</i>	η_{IT} , %	CPR_S
a-C _{3Гц} :Al _{50А} :N	19,5	225	0,092	48,1	54,9
a-C _{3Гц} :Al _{80А} :N	28,9	345	0,084	58,7	48,8
a-C _{6Гц} :Al _{60А} :N	31,4	484	0,065	56,9	45,5
a-C _{15Гц} :Al _{50А} :N	23,6	295	0,080	56,2	46,0
a-C _{15Гц} :Al _{80А} :N	24,8	339	0,073	52,8	47,2



a – а-С_{3Гц}:Al_{50А}:N, *б* – а-С_{3Гц}:Al_{80А}:N, *в* – а-С_{6Гц}:Al_{60А}:N, *г* – а-С_{15Гц}:Al_{50А}:N, *д* – а-С_{15Гц}:Al_{80А}:N

Рисунок 2.5 – Оптическое изображение царапины, спектр АЭ сигнала при различной нагрузке



a – а-С_{3Гц}:Al_{50А}:N, *б* – а-С_{3Гц}:Al_{80А}:N, *в* – а-С_{6Гц}:Al_{60А}:N, *г* – а-С_{15Гц}:Al_{50А}:N, *д* – а-С_{15Гц}:Al_{80А}:N

Рисунок 2.6 – Кинетические кривые трения а-С:Al:N покрытий

Триботехнические параметры осажденных покрытий также определяются условиями и режимом их формирования (рисунок 2.6). Установлено, что для всех покрытий период приработки составляет порядка 500 циклов трения. При этом для а-С_{3Гц}:Al_{80А}:N и а-С_{6Гц}:Al_{60А}:N покрытий кинетика трения характеризуется более высокой стабильностью, что указывает на отсутствие схватывания контактных поверхностей. Для покрытий с высоким содержанием Al характерен относительно нестационарный режим трения (рисунок 2.6 *a*, *г*, *д*). Высокие значения H/E отношения для а-С_{3Гц}:Al_{50А}:N и а-С_{15Гц}:Al_{50А}:N покрытий характеризуют снижение влияния пластической деформации, и, следовательно, кинетика трения и разрушения будет протекать по механизму, характерному для однокомпонентного а-С покрытия, сопровождающегося выкрашиванием твердых областей, что приводит к возникновению и развитию узлов (мостиков) схватывания, что определяет рост коэффициента трения и износ контртела.

Заключение

Определены фазовый состав и механические свойства углеродных покрытий, бинарнолегированных алюминием и азотом. Установлены особенности влияния на них условий и режимов нанесения (частоты генерации углеродной плазмы и тока испарителя алюминия). Наиболее высокие механические свойства демонстрируют покрытия, полученные при 6 Гц генерации углеродной плазмы и тока испарителя алюминия 60 А. Показано, что а-С_{6Гц}:Al_{60А}:N покрытие характеризуется минимальным размером Csp² кластеров, что определяет их максимальную твердость. Установлено, что для такого покрытия характерны высокие упруго-пластические и триботехнические свойства. С ростом тока дугового испарителя в покрытии возрастает концентрация азота, более интенсивно протекают процессы образования нитридных фаз алюминия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lifshitz, Y. Diamond like carbon – present status / Y. Lifshitz // Diam. Relat. Mater. – 1999. – Vol. 8. – P. 1659–1676.

2. Vetter, J. 60 years of DLC coatings: Historical highlights and technical review of cathodic arc processes to synthesize various DLC types, and their evolution for industrial applications / J. Vetter // Surf. Coat. Technol. – 2014. – Vol. 257. – P. 213–240.
 3. Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы / Д.Г. Пилипцов [и др.]; под ред. А.В. Рогачева. – Москва: Радиотехника, 2020. – 283 с.
 4. Structure and optical properties of Cu-DLC composite films deposited by cathode arc with double-excitation source / B. Zhou [et al.] // Diam. Relat. Mater. – 2016. – Vol. 69. – P. 191–197.
 5. The Structure and Properties of a-C:Ti and a-C:Ti:N Coatings Deposited on a Titanium and Titanium Nitride Sublayer / X. Jiang [et al.] // Lecture Notes in Mechanical Engineering. – 2022. – Vol. 422. – P. 373–382.
 6. Structure and mechanical properties of Ni and Cr binary doped amorphous carbon coatings deposited by magnetron sputtering and pulse cathodic arc / B. Zhou [et al.] // Thin Solid Films. – 2020. – Vol. 701. – P. 137942.
 7. Zhang, S. Toughness evaluation of hard coatings and thin films / S. Zhang, X. Zhang // Thin Solid Films. – 2012. – Vol. 520. – P. 2375–2389. Toughness measurement of thin films: a critical review / S. Zhang [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2005. – Vol. 198. – P. 74–84.
 8. Stress reduction and bond stability during thermal annealing of tetrahedral amorphous carbon / A.C. Ferrari [et al.] // J. Appl. Phys. – 1999. – Vol. 85. – P. 7191–7197.
 9. Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon / A.C. Ferrari [et al.] // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 61. – P. 14095–14107.
 10. Synthesis and characterization of Ti and N binary-doped a-C films deposited by pulse cathode arc with ionic source assistant / B. Zhou [et al.] // Surf. Inter. Anal. – 2018. – Vol. 50. – P. 1–10.
 11. XPS, AES and EELS study of the bonding character in CN_x films / G. Soto [et al.] // Superf. y Vacio. – 2002. – Vol. 15. – P. 34–39.
 12. Spectroscopic studies of nitrogenated amorphous carbon films prepared by ion beam sputtering / D. Das [et al.] // J. Appl. Phys. – 2002. – Vol. 91. – P. 4944–4955.
 13. Experimental comparison of N(1s) X-ray photoelectron spectroscopy binding energies of hard and elastic amorphous carbon nitride films with reference organic compounds / W.J. Gammon [et al.] // Carbon. – 2003. – Vol. 41. – P. 1917–1923.
 14. Maruyama, B. Catalytic carbide formation at aluminium-carbon interfaces / B. Maruyama, F.S. Ohuchi, L. Rabenberg // J. Mater. Sci. Lett. – 1990. – Vol. 9. – P. 864–866.
 15. Elastic constants of tetrahedral amorphous carbon films by surface brillouin scattering / A.C. Ferrari [et al.] // Applied Physics Letters. – 1999. – Vol. 75. – P. 1893–1895.
 16. Characterization of diamond-like carbon coatings prepared by pulsed bias cathodic vacuum arc deposition / J.B. Wu [et al.] // Thin Solid Films. – 2007. – Vol. 516. – P. 243–247.
 17. Charitidis, C.A. Nanomechanical and nanotribological properties of carbon-based thin films: a review / C.A. Charitidis // International Journal of Refractory Metals and Hard Materials. – 2010. – Vol. 28. – P. 51–70.
 18. Hansen, N. Hall–Petch relation and boundary strengthening / N. Hansen // Scripta Materialia. – 2004. – Vol. 51, № 8. – P. 801–806.
 19. A study of microindentation hardness test by mechanism-based strain gradient plasticity / Y.A. Huang [et al.] // J. Mater. Res. – 2000. – Vol. 15. – P. 1786–1796.
 20. Рогачев, А.В. Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект № 20212076).*
- Поступила в редакцию 03.02.2023.*

Информация об авторах

Пилипцов Дмитрий Геннадьевич – к.т.н., доцент
Джоу Бин – к.т.н., доцент
Рогачёв Александр Александрович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.т.н., профессор
Федосенко Николай Николаевич – к.т.н., доцент
Кулеш Екатерина Александровна – м.л.н.с.

ВЛИЯНИЕ ТЕРМООБРАБОТКИ НА МОРФОЛОГИЮ И СТРУКТУРУ НАНОКОМПОЗИЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ КРАХМАЛА И АЦЕТАТА МЕДИ

А.С. Руденков, М.А. Ярмоленко, С.А. Фролов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EFFECT OF HEAT TREATMENT ON THE MORPHOLOGY AND STRUCTURE OF NANOCOMPOSITE COATINGS BASED ON STARCH AND COPPER ACETATE

A.S. Rudenkov, M.A. Yarmolenko, S.A. Frolov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Определены особенности влияния режимов формирования и термообработки покрытий на основе крахмала и ацетата меди на их морфологию и молекулярный состав. Установлено влияние интенсивности лазерного излучения и термообработки на распределение отдельных структурных образований. Показано, что нагрев покрытий на основе крахмала и ацетата меди способствует повышению степени дисперсности отдельных структурных образований.

Ключевые слова: крахмал, ацетат, медь, лазер, морфология, структура.

Для цитирования: Руденков, А.С. Влияние термообработки на морфологию и структуру нанокomпозиционных покрытий на основе крахмала и ацетата меди / А.С. Руденков, М.А. Ярмоленко, С.А. Фролов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 54–59. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_54. – EDN: OMDUPR

Abstract. The features of the influence of the modes of formation and heat treatment of coatings based on starch and copper acetate on their morphology and molecular composition are determined. The influence of the intensity of laser radiation and heat treatment on the distribution of individual structural formations has been established. It is shown that heat treatment of coatings based on starch and copper acetate promotes an increase in the degree of dispersion of individual structural formations.

Keywords: starch, acetate, copper, laser, morphology, structure.

For citation: Rudenkov, A.S. Effect of heat treatment on the morphology and structure of nanocomposite coatings based on starch and copper acetate / A.S. Rudenkov, M.A. Yarmolenko, S.A. Frolov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 54–59. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_54 (in Russian). – EDN: OMDUPR

Введение

Наноструктурированные системы на основе полисахаридов и наночастиц металлов активно используются в медицинской практике для лечения ран [1]–[9]. Это связано с тем, что наночастицы Ag и Cu ингибируют процессы синтеза белка, инициируют процессы перекисного окисления клеточной мембраны и разрушения нуклеиновых кислот бактерий и вирусов [1]. Медь участвует во всех стадиях процесса заживления ран. Использование наночастиц меди позволяет реализовывать высокоэффективную фототермическую антибактериальную терапию [2]. Синергетический эффект определяется нагревом частиц под действием лазерного ИК-излучения и быстрым высвобождением ионов меди. В настоящее время фототермическая антибактериальная терапия реализуется при использовании гидрогелей с наночастицами меди. При создании гидрогелей активно используются полисахариды, в частности крахмал [3]. Гидрогели обеспечивают низкую адгезию раневой поверхности к перевязочному материалу, позволяют реализовать пролонгированное высвобождение

лекарственного компонента. Повысить механические свойства гидрогелевых материалов позволяет введение углеродных наночастиц [4]. При этом углеродные наноматериалы характеризуются широкой антимикробной активностью в отношении инвазивных бактерий, грибов и вирусов [5]. Крахмал может быть использован в качестве прекурсора для получения углеродных наночастиц [6]. Лазерное воздействие на композиционную мишень на основе крахмала и ацетата меди может приводить к осаждению наноструктурированного слоя на основе полисахарида, содержащего наночастицы меди и углерода.

Целью настоящей работы является определение влияния режимов лазерного диспергирования исходной мишени и последующей термообработки на морфологические особенности и молекулярную структуру нанокomпозиционных покрытий на основе крахмала и ацетата меди.

1 Методика эксперимента

Экспериментальные образцы покрытий на основе ацетата меди $(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{Cu}$ и покрытий на основе кукурузного крахмала и ацетата меди

были сформированы на кремниевой подложке в результате лазерного диспергирования однокомпонентной и композиционной мишени соответственно. Массовое соотношение компонентов в композиционной мишени (крахмал – ацетат меди) – 4 : 1. Для осаждения покрытий использовался лазер L-2137U+HG-5 со следующими параметрами: длина волны – 532 нм; длительность импульса накачки в режиме модулированной добротности – 6 нс; энергия импульса накачки – 42 мДж. Было выбрано два режима диспергирования с различной интенсивностью лазерного излучения: $1,6 \cdot 10^{12}$ Вт и $9 \cdot 10^{12}$ Вт.

Термообработка проводилась на воздухе в течение 1 часа при температуре 300° С.

Морфологические особенности поверхности полученных покрытий определены при помощи атомно-силовой микроскопии (АСМ) средствами микроскопа Solver Pro (NT-MDT, Москва, Россия), работающего в полуконтактном режиме (область сканирования – 4×4 мкм). В качестве основных параметров, характеризующих морфологию, были выбраны: Rms – параметр оценки рельефа поверхности, вычисляемый как корень квадратный из среднего квадрата расстояний вершин неровностей профиля до его средней линии; Ra – среднее арифметическое отклонение всех точек профиля шероховатости от средней линии на длине оценки; средняя высота; распределение по размеру; количество и диаметр отдельных структурных образований – зерен.

Молекулярная структура покрытий определялась средствами инфракрасного (ИК) Фурье спектрофотометра Vertex-70 (Bruker) (диапазон сканирования 4000 – 300 см^{-1} , разрешение 4 см^{-1}). В качестве внутреннего стандарта были приняты спектры углеводородных покрытий по полосе С – Н при 1465 см^{-1} .

Фазовый состав покрытий устанавливался методом спектроскопии комбинационного рассеяния с использованием спектрометра Senterra (Bruker, Германия) с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм, мощностью 5 мВт.

2 Результаты и их обсуждение

Анализ результатов АСМ (рисунок 2.1) свидетельствует о том, что наименьшей

субшероховатостью, наибольшим количеством отдельных образований (зерен) с наименьшими размерами из рассматриваемых образцов обладают покрытия на основе крахмала и ацетата меди, сформированные при интенсивности лазерного излучения $9,0 \cdot 10^{12}$ Вт. По всей видимости, данный факт обусловлен более интенсивными процессами деструкции ацетата меди и карбонизации крахмала.

Термообработка полученных покрытий, независимо от их состава и режимов работы источника лазерного излучения, способствует увеличению количества отдельных структурных образований, уменьшению их размеров (таблица 2.1) и субшероховатости Rms , что объясняется дальнейшим разрушением ацетата меди и полисахаридов.

Статистический анализ распределения отдельных структурных образований по размерам (модель эквивалентного диска) подтверждает приведенные ранее выводы (рисунок 2.2). Практически 90% зерен покрытий на основе крахмала и ацетата меди, сформированных при интенсивности лазерного излучения равной $9,0 \cdot 10^{12}$ Вт, характеризуется радиусом менее 100 нм. В общем случае термообработка покрытий на основе крахмала и ацетата меди приводит к более равномерному распределению зерен по размерам.

В ИК-спектрах покрытий на основе ацетата меди, сформированных лазерным излучением с различным значением плотности мощности, присутствуют одни и те же полосы поглощения (рисунок 2.3). Наиболее высокие значения оптической плотности характерны для полос поглощения при 1560 и 1417 см^{-1} . Отмеченные полосы обусловлены асимметричными и симметричными валентными колебаниями С – О группы – СОО-. Таким образом, в осаждаемых покрытиях присутствует определенная доля неразложившейся соли. Помимо отмеченных полос поглощения для ИК-спектра покрытий характерно поглощение в области волновых чисел (3600 – 3000) см^{-1} – валентные колебания ОН-групп, (3000 – 2800) см^{-1} – валентные колебания С – Н связей, 1340 см^{-1} – деформационные колебания С – Н связей, 1260, 1050, 1030 см^{-1} – валентные колебания С – О связей [10].

Таблица 2.1 – Влияние термообработки на морфологию покрытий на основе ацетата меди и покрытий на основе кукурузного крахмала и ацетата меди

Покрытие	Интенсивность лазера, $\cdot 10^{12}$ Вт	Средняя высота, нм	Ra , нм	Rms , Нм	Плотность зерен, шт.	Средний диаметр зерен, нм
$(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{Cu}$	1,6	127,4 / 114,1	23,6 / 12,4	35,2 / 20,5	77 / 51,0	166 / 142
	9,0	274,3 / 118,5	62,5 / 23,2	80,0 / 31,8	37 / 45	313 / 307
крахмал $(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{Cu}$	1,6	101,0 / 54,5	12,5 / 8,4	17,2 / 12,6	43 / 73	232 / 143
	9,0	92,0 / 36,5	11,5 / 5,5	20,7 / 7,9	80 / 129	113 / 95

*до / после термообработки

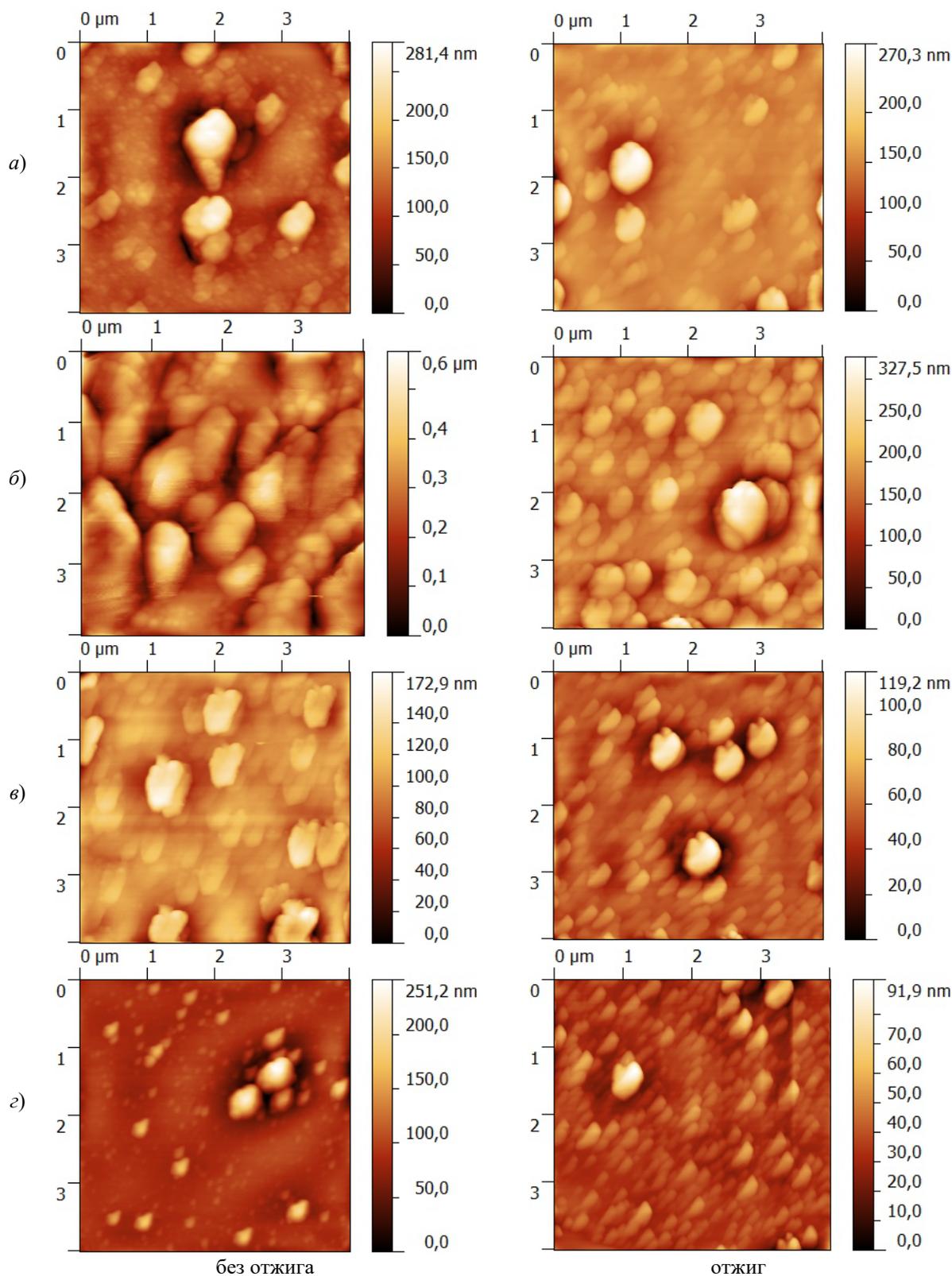


Рисунок 2.1 – АСМ изображения покрытий:
 а) на основе ацетата меди ($1,6 \cdot 10^{12}$ Вт);
 б) на основе ацетата меди ($9,0 \cdot 10^{12}$ Вт);
 в) на основе крахмала и ацетата меди ($1,6 \cdot 10^{12}$ Вт);
 г) на основе крахмала и ацетата меди ($9,0 \cdot 10^{12}$ Вт)

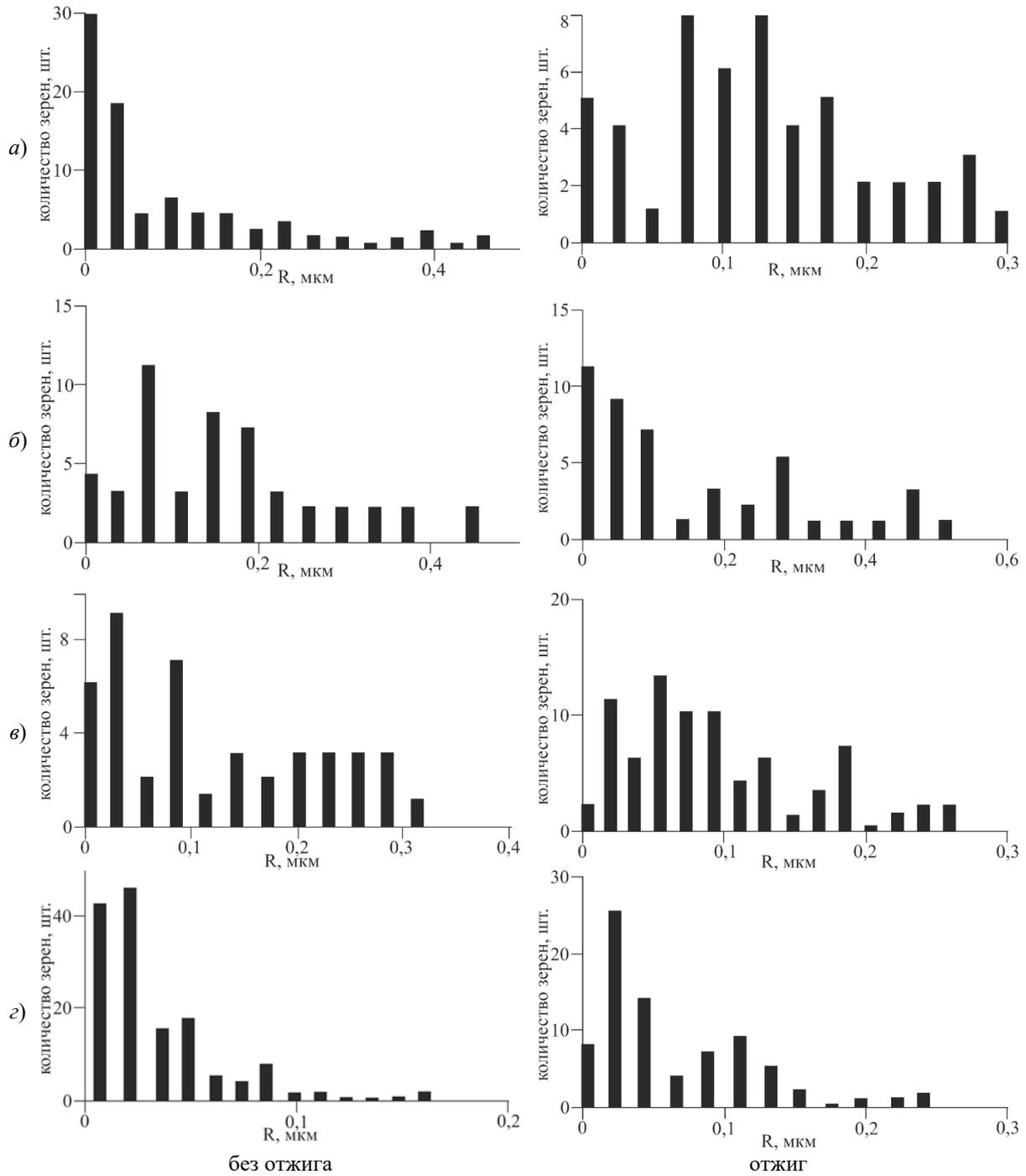


Рисунок 2.2 – Распределение отдельных структурных образований покрытий:

- а) на основе ацетата меди ($1,6 \cdot 10^{12}$ Вт);
- б) на основе ацетата меди ($9,0 \cdot 10^{12}$ Вт);
- в) на основе крахмала и ацетата меди ($1,6 \cdot 10^{12}$ Вт);
- г) на основе крахмала и ацетата меди ($9,0 \cdot 10^{12}$ Вт)

ИК-спектры покрытий отличаются только значениями оптической плотности полос поглощения. Для покрытия, сформированного с применением более интенсивного лазерного излучения, характерны более низкие значения оптической плотности полос поглощения карбоксилатов и более высокие значения полос поглощения

C – H связей. При этом эффективная толщина сформированных покрытий, определяемая с помощью кварцевого измерителя толщины, одинакова. Таким образом, рост интенсивности лазерного излучения повышает степень деструкции соли меди. Это способствует обогащению генерируемого потока продуктов разрушения соли

углеводородными фрагментами. Термообработка покрытий способствует разложению соли. В ИК-спектре исчезают полосы поглощения углеводородных фрагментов и заметно снижается оптическая плотность полос кислородсодержащих связей.

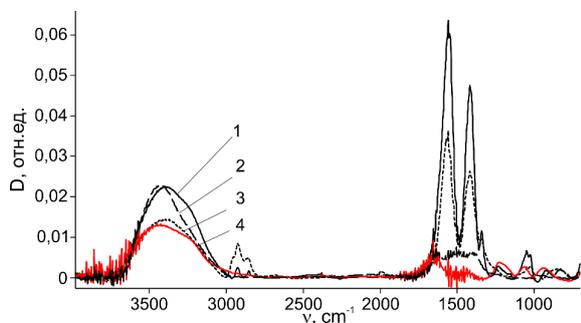


Рисунок 2.3 – ИК-спектры покрытий на основе ацетата меди:

- 1 – без отжига ($1,6 \cdot 10^{12}$ Вт);
- 2 – после отжига ($1,6 \cdot 10^{12}$ Вт);
- 3 – без отжига ($9,0 \cdot 10^{12}$ Вт);
- 4 – после отжига ($9,0 \cdot 10^{12}$ Вт)

Воздействие лазерного излучения на спресованный порошок крахмала не сопровождается генерацией газовой фазы и осаждением покрытия. Отмеченное может являться результатом низкого поглощения оптического лазерного излучения полисахаридом.

В ИК-спектрах покрытий, сформированных воздействием наносекундного лазерного излучения на механическую смесь порошков ацетата меди и крахмала, помимо полос поглощения ацетата, присутствуют полосы поглощения полисахарида: валентные колебания С–О, С–О–С, С–С, С–ОН связей в области волновых чисел ($1200 - 900$) см^{-1} (рисунок 2.4) [10]. Соль меди интенсивно поглощая лазерное излучение, способствует нагреву и разрушению молекул полисахарида. Низкомолекулярные фрагменты разрушения крахмала принимают участие в формировании потока летучих соединений. После термообработки композиционного покрытия в ИК-спектре исчезают полосы поглощения, характерные для полисахарида. Результат является следствием термодеструкции фрагментов полисахарида.

В КР-спектрах покрытий на основе крахмала и ацетата меди присутствуют пики вблизи 1545 см^{-1} , которые можно соотнести с G-пиком, соответствующим упорядоченным кластерам графита [12], образующимся в результате карбонизации. Однако вблизи 1550 см^{-1} существует пик, обусловленный асимметричными валентными колебаниями С–О группы, что не позволяет однозначно утверждать, что пик 1545 см^{-1} соответствует колебаниям пары sp^2 -гибридизованных атомов.

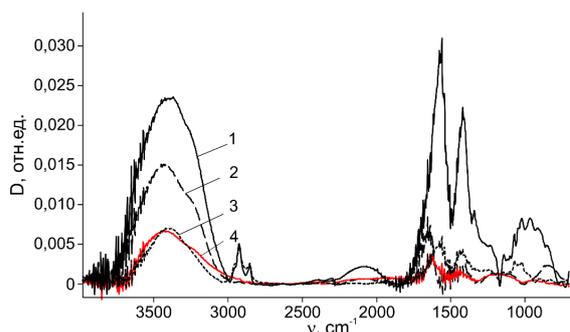


Рисунок 2.4 – ИК-спектры покрытий на основе ацетата меди и кукурузного крахмала:

- 1 – без отжига ($1,6 \cdot 10^{12}$ Вт);
- 2 – после отжига ($1,6 \cdot 10^{12}$ Вт);
- 3 – без отжига ($9,0 \cdot 10^{12}$ Вт);
- 4 – после отжига ($9,0 \cdot 10^{12}$ Вт)

Выводы

Показано, что степень деструкции ацетата меди и полисахаридов определяется интенсивностью лазерного излучения. При ее увеличении осаждаемые композиционные слои характеризуются наименьшей микрошероховатостью, более высокой плотностью структурных образований. Для покрытия, сформированного с применением более интенсивного лазерного излучения, характерны более низкие значения оптической плотности полос поглощения карбоксилатов и более высокие значения поглощения С–Н связей.

Установлено, что термообработка покрытий на основе крахмала и ацетата меди, независимо от интенсивности лазерного излучения, способствует увеличению количества отдельных структурных образований, уменьшению их размеров и субшероховатости, что объясняется разрушением ацетата меди и полисахаридов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Salvo, J. Role of copper nanoparticles in wound healing for chronic wounds: literature review / J. Salvo, C. Sandoval // *Burns & Trauma*. – 2022. – Vol. 10. – Article tkab047.
2. Copper-nanoparticle-embedded hydrogel for killing bacteria and promoting wound healing with photothermal therapy / В. Tao [et al.] // *Journal of Materials Chemistry B*. – 2019. – Vol. 7. – P. 2534–2548.
3. The production and application of hydrogels for wound management: A review / A. Gupta [et al.] // *European Polymer Journal*. – 2019. – Vol. 111. – P. 134–151.
4. Low-drug resistance carbon quantum dots decorated injectable self-healing hydrogel with potent antibiofilm property and cutaneous wound healing / P. Lia [et al.] // *Chemical Engineering Journal*. – 2021. – Vol. 403. – Article 126387.
5. Carbon-based Nanomaterials: Carbon Nanotubes, Graphene, and Fullerenes for the Control

of Burn Infections and Wound Healing / M.A. Rahman, H.A. Barkat, R.K. Harwansh, R. Deshmukh // *Current Pharmaceutical Biotechnology*. – 2022. – Vol. 23. – P. 1483–1496.

6. *A review of recent advances in starch-based materials: Bionanocomposites, pH sensitive films, aerogels and carbon dots* / S.K. Mary [et al.] // *Carbohydrate Polymer Technologies and Applications*. – 2022. – Vol. 3. – Article 100190.

7. *Molecular structure, optical, electrical and sensing properties of PANI-based coatings with silver nanoparticles deposited from the active gas phase* / A.A. Rogachev [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2015. – Vol. 351. – P. 811–818.

8. *Features of the formation of nanoparticles based on copper in thin-layer systems* / A.V. Rogachev [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2014. – Vol. 317. – P. 449–456.

9. *Влияние лазерного ассистирования на процессы генерации летучих продуктов диспергирования композиционных мишеней на основе ПЭ, их реакционную активность* / М.А. Ярмоленко [и др.] // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2022. – № 4 (53). – С. 64–72.

10. *Беллами, А. Инфракрасные спектры сложных молекул* / А. Беллами. – Москва: Мир, 1963. – 592 с.

11. *Ferrari, A.C. Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon* / A.C. Ferrari, J. Robertson // *Physical Review B*. – 2000. – Vol. 61. – P. 4095–4107.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «Разработка основ комбинированной технологии формирования планарно-структурированных углеродных покрытий из импульсной катодной углеродной плазмы и продуктов лазерного диспергирования полимерных материалов», комплексное 1.12 задание «Синтез нанокomпозиционных пленочных структур, формирование материалов с высокими функциональными свойствами с использованием электронно-лучевых, ионных, лазерных методов обработки» ГПНИ «Фотоника и электроника для инновации», подпрограмма «Фотоника и ее применения».

Поступила в редакцию 11.01.2023.

Информация об авторах

Руденков Александр Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент
Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., доцент
Фролов Сергей Анатольевич – стажер мл.н.с.

ПОЛУЧЕНИЕ ПОЛЫХ СФЕР CuS, ЛЕГИРОВАННЫХ Zn²⁺, ПУТЕМ ОДНОСТАДИЙНОГО СИНТЕЗА И ЕГО ФОТОКАТАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА В ВИДИМОМ СВЕТЕ

Гаопэн Ян¹, Тяньтянь Ву¹, Цзиньсин Цао², Сяохун Цзян¹

¹Нанкинский университет науки и технологий

²Нанкинский университет Сяочжуан

PREPARATION OF Zn²⁺-DOPED CuS HOLLOW SPHERES BY ONE-STEP SYNTHESIS AND ITS PHOTOCATALYTIC PERFORMANCE IN VISIBLE LIGHT

Gaopeng Yang¹, Tiantian Wu¹, Jinxing Cao², Xiaohong Jiang¹

¹Nanjing University of Science and Technology

²Nanjing Xiaozhuang University

Аннотация. В настоящее время фотокаталитические технологии очистки воды широко используются в зеленой энергетике и характеризуются высоким прикладным значением. Актуальным направлением в этой области является получение эффективных фотокатализаторов с помощью простых и экологически чистых способов. В этом исследовании предложен технологически простой, недорогой и экологически чистый метод получения CuS сфер легированных Zn²⁺. Отличительной чертой данного метода является его одностадийность и низкая температура синтеза, позволяющая получить фотокатализатор на основе CuS сфер с равномерно распределенными Zn²⁺ ионами. Морфология, структура и химический состав полученных продуктов исследованы растровой электронной и просвечивающей микроскопией, а также методами рентгеноструктурного анализа. Установлено, что введение Zn²⁺ в CuS приводит к образованию ловушек носителей заряда, которые ускоряют перенос электронов на поверхность катализатора, что значительно увеличивает скорость отклика на облучение видимым светом, но при этом снижается скорость рекомбинации электронно-дырочных пар. С учетом большой удельной поверхности CuS сфер происходит рост количества поверхностно-активных адсорбирующих центров, что увеличивает эффективность фотокатализа. Установлено, что введение Zn²⁺ в CuS приводит к увеличению скорости катализа до 0,04736 мин⁻¹, что в 12 раз больше, в сравнении с нелегированным CuS.

Ключевые слова: фотокатализ, CuS, полые сферы, видимое излучение, Zn²⁺ ионы.

Для цитирования: Получение полых сфер CuS, легированных Zn²⁺, путем одностадийного синтеза и его фотокаталитические свойства в видимом свете / Гаопэн Ян, Тяньтянь Ву, Цзиньсин Цао, Сяохун Цзян // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 60–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_60. – EDN: PYOQLH

Abstract. At present, photocatalytic water treatment technology has important potential application value in the field of green energy. It is very attractive to prepare efficient photocatalysts by simple and green methods. In this study, a simple, low temperature, low cost and green low temperature water bath stirring method was designed to synthesize the well-dispersed Zn²⁺-doped CuS hollow sphere photocatalyst in one step. The morphology, structure and composition of the obtained products were examined by field emission scanning electron microscopy, transmission electron microscopy and X-ray diffraction. Zn²⁺ doping forms carrier traps, which improve the transfer rate of electrons to the surface of the catalyst, significantly enhance its visible light response, and reduce the recombination rate of electron holes. Combined with the special interconnection channel and large specific surface area of the hollow sphere structure, it provides more surface active sites for adsorption and makes photocatalysis more efficient. The reaction rate of the prepared hollow spherical Zn²⁺-doped CuS catalyst reached 0,04736 min⁻¹, which was 12 times that of pure CuS.

Keywords: photocatalysis, CuS, hollow sphere, visible light, Zn²⁺ doped.

For citation: Preparation of Zn²⁺-doped CuS hollow spheres by one-step synthesis and its photocatalytic performance in visible light / Gaopeng Yang, Tiantian Wu, Jinxing Cao, Xiaohong Jiang // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 60–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_60. – EDN: PYOQLH

Introduction

Due to the energy crisis and environmental pollution problems, photocatalytic treatment has attracted great interest as one of the most efficient and promising methods to eliminate organic and toxic pollutants in water [1]. To date, much attention has been paid to the development of novel, non-toxic

and visible-light driven photocatalysts with high photocatalytic efficiency and stability [2]. Metal sulfide semiconductor is a promising candidate material for photocatalytic reactions. CuS is a very important metal sulfide semiconductor material with excellent photoelectric properties and is also considered as a typical P-type semiconductor material [3].

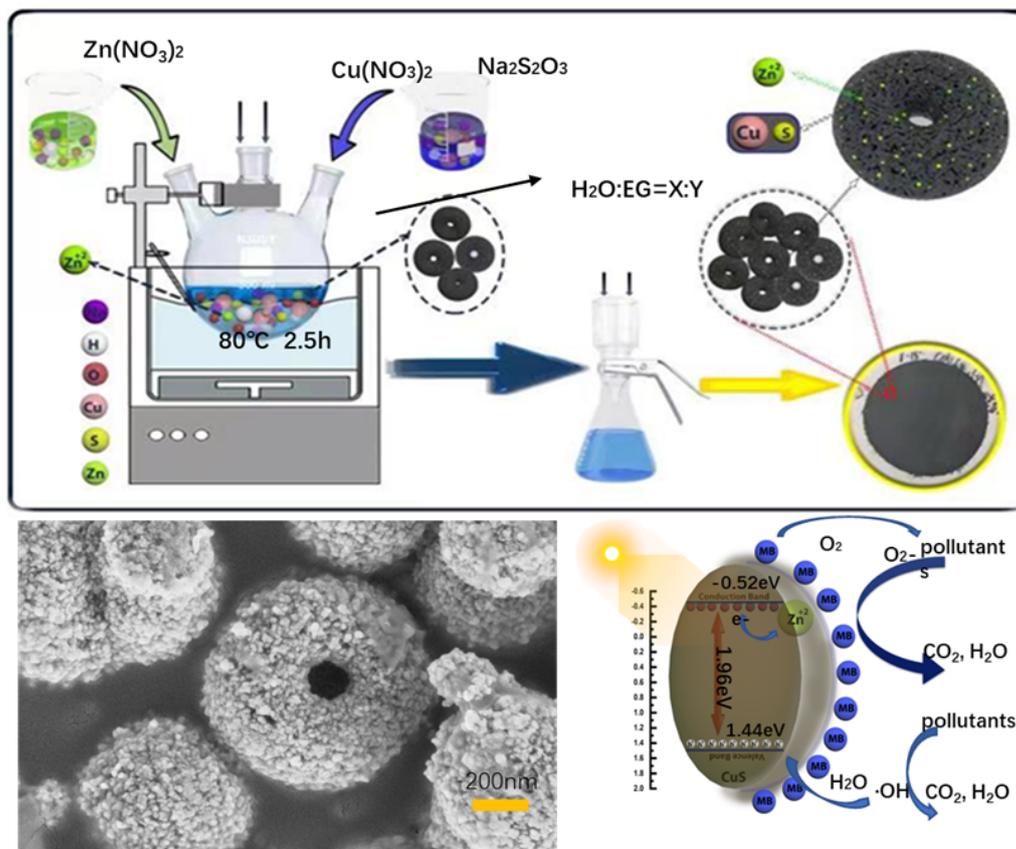


Figure 0.1

CuS is a narrow band gap semiconductor with a 2.2 eV forbidden bandwidth that exhibits many excellent physical and chemical characteristics and has great potential for applications such as solar cells, lithium battery electrodes, photothermal conversion, and photocatalysis [4]. CuS the forbidden band width of the narrow and has good visible light absorption, when the absorbed energy of the photons is right, CuS materials can produce light of electrons and holes, migration to the material surface, and the adsorption on the surface of the material, water or oxygen molecules reaction material, with high catalytic activity for degradation of material surface adsorption of organic matter [5]–[10]. However, CuS has the fatal disadvantages of poor electron hole pair generation ability and poor photocorrosion resistance, which also hinder its development in the field of photocatalysis [11]. Therefore, improving the photoactivity and photostability of CuS is a key problem and a major challenge in a wide range of practical applications [12].

1 Materials and method

In this work, we reported for the first time the one-step preparation of Zn²⁺-doped CuS photocatalyst by using low-temperature water bath agitation instead of hydrothermal method. By adjusting the solvent ratio (water: Ethylene glycol = $x : y$), the effect of solvent on the morphology and photocatalytic

performance of Zn²⁺-doped CuS was studied. The performance of hollow spherical Zn²⁺-doped CuS with solvent ratio of 3:1 (water: Ethylene glycol) was 12 times higher than that of plain pure CuS.

The Zn²⁺-doped CuS photocatalyst was prepared by one-step low temperature water bath stirring method instead of complex and complicated hydrothermal method. Sodium thiosulfate as a sulfur source, copper nitrate as copper source, and 1 mmol zinc nitrate together into 40 ml of a certain ratio of water and ethylene glycol mixture to form a yellow-green liquid, were put into a constant temperature water bath pot at a constant temperature of 80° C and stirred vigorously for 2,5 h. After the solution was cooled to room temperature, the black solid product was collected by filtration and then washed with absolute ethanol and deionized water and dried at 70° C for 6 hours for further characterization.

2 Results

2.1 Morphological structure and phase

The classical SEM (Zn²⁺-doped CuS with the strongest catalytic activity) is shown in Figure 2.1, *b*. It can be clearly seen that we have synthesized the classical hollow spherical photocatalyst with a size of about 700 nm and formed by a large number of nanoparticles. The spherical surface also has pores (Figure 2.1, *c*), which makes it have a much higher specific surface area than the ordinary shape

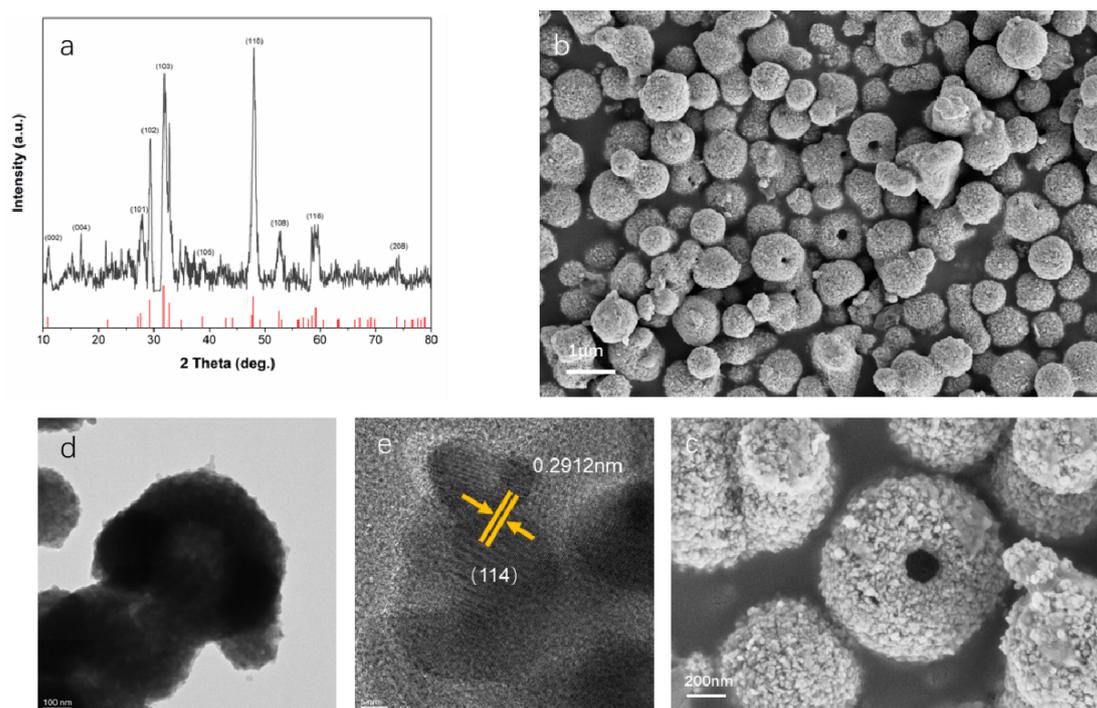


Figure 2.1 – XRD pattern of hollow sphere sample (a), SEM image (b, c), TEM (d), and HRTEM image (e) of hollow sphere sample

photocatalyst. The contact between the photocatalyst and the degradation material in the photocatalytic reaction is increased, and the photocatalytic performance is greatly improved. EDS spectra also confirmed that Zn^{2+} was doped into CuS. In addition, in transmission electron microscope Figure 2.1, d, we can see that the prepared Zn^{2+} -doped CuS photocatalysts are regular hollow spheres with hollow interior. From Figure 2.1, e we can observe clear lattice fringes, and the fringes with lattice spacing of 0,2913 nm correspond to the (114) crystal plane of CuS. The crystal structure and phase of the generated products were determined by XRD. The standard PDF card of CuS of hexagonal crystal was calibrated by red vertical line. It can be observed from Figure 2.1, a that the X-ray diffraction peak of the obtained product corresponded one to the peak of the standard PDF card of CuS of hexagonal crystal, and the diffraction peak of ZnS crystal was not observed. Therefore, combined with XPS and EDS test results, it can be verified that Zn^{2+} is successfully doped into the lattice defects of CuS in the form of ion doping.

2.2 Chemical composition analysis

The surface chemical state and elemental composition of Zn^{2+} -doped CuS were studied by XPS. The spectra were analyzed by Origin, as shown in Figure 2.2, a. The full spectrum of XPS binding energy indicates that the composite contains Cu, S, Zn and C elements and no other impurity signals are observed. The two peaks of 932,57 eV and 952,47 eV shown in the high-resolution spectrum of

Cu2p in Figure 2.2, b are attributed to the binding energy of $\text{Cu}2p_{2/3}$ and $\text{Cu}2p_{1/2}$, respectively. According to the binding energy table of X-ray photoelectron spectrometer, the binding energy here represents the formation of CuS. Compared with the $\text{Cu}2p_{2/3}$ peak of pure CuS, the $\text{Cu}2p_{2/3}$ peak of Zn^{2+} -doped CuS has a slight blue shift (Figure 2.2, b). Combined with XRD, no diffraction peak of Zn metal compound can be found, indicating that Zn has been successfully doped into the surface of hexagonal CuS lattice. The S2p spectrum in Figure 2.2, c shows two peaks fitted at 163,3 eV and 162,3 eV, which belong to the sulfide in the CuS phase. The relative atomic content of Zn measured by MultiPak software is 1,9%, which is consistent with the results obtained by EDS spectroscopy. And a small amount of C element is the pollution carbon from the vacuum pump in the vacuum system of the XPS equipment [2], [13].

2.3 Photocatalytic activity

A xenon lamp with a power of 500 W was used as the light source, and a UV filter ($K > 420$ nm) was installed to simulate visible light. The photocatalytic performance of Zn^{2+} -doped CuS was evaluated at a room temperature. Methylene blue (MB) solution with a concentration of 30 mg/L was taken as the degradation object, and the 20 mg sample was dispersed in 50 ml MB solution. First, the adsorption was achieved in anamorphic chamber for 0,5 h to reach the balance of adsorption and desorption, and then the xenon lamp light source equipped with UV filter was irradiated for 2 hours to observe

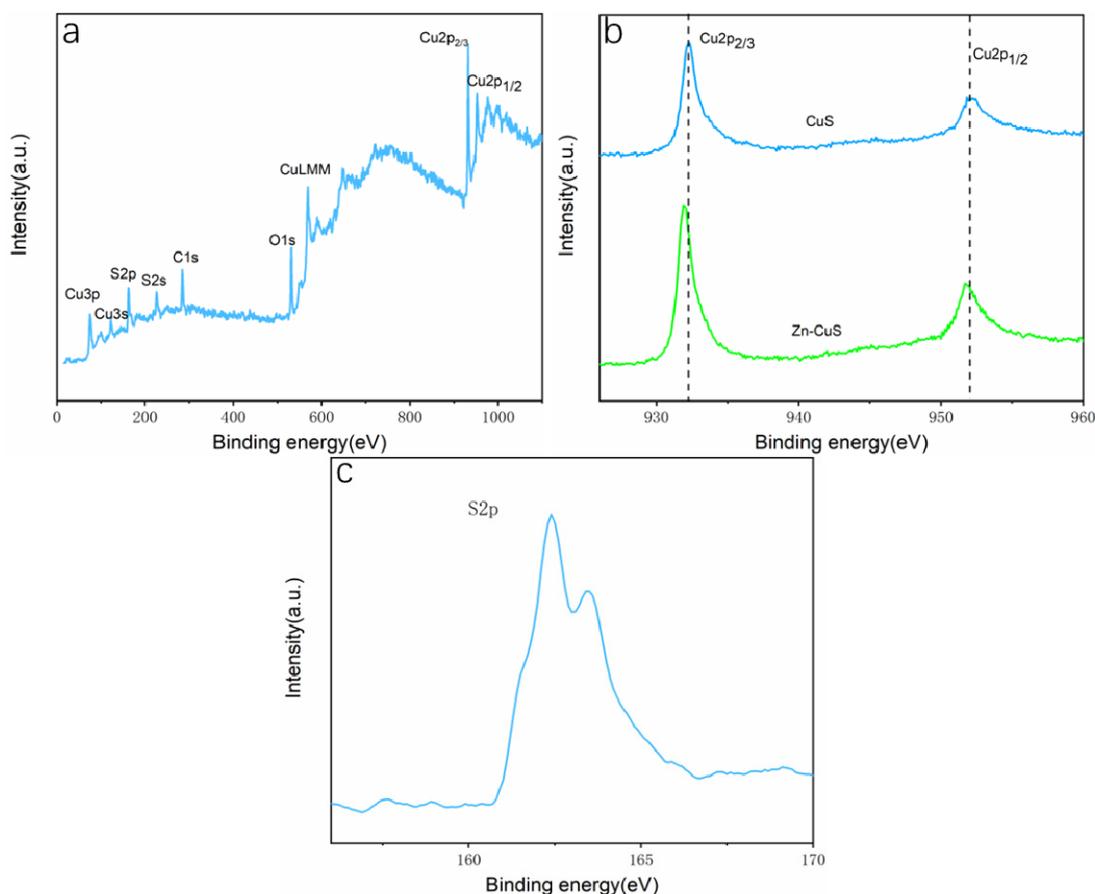


Figure 2.2 – XPS spectra of Zn²⁺-doped CuS composites: (a) Survey; (b) Cu2p; (c) S2p

the degradation. It can be seen from Figure 2.3, *a* that the Zn²⁺-doped CuS hollow sphere sample with solvent ratio of 3:1 has the best degradation effect, and the degradation efficiency reaches 100% after 1,5 hours of illumination. The photocatalytic rate reaction constant (Kapp) was obtained from the pseudo-first-order kinetic model: $-\ln(C/C_0) = K_{app} \cdot t$ [14]. As can be seen from Figure 2.3, *b*, the solvent ratio is 0:4, 1:3, 2:2, 3:1, 4 in the order of solvent ratio: The Kapp values of 0 and pure CuS were 0,00974 min⁻¹, 0,00157 min⁻¹, 0,0014 min⁻¹, 0,04581 min⁻¹, 0,0043 min⁻¹ and 0,00421 min⁻¹, respectively. The hollow spherical sample is 12 times larger than the pure CuS sample. It is also superior to most reported CuS catalysts and has the potential to expand its application [15]–[17]. Photocatalysis is a heterogeneous reaction, so not only to refer to its energy band structure, morphology and specific surface area also have a profound impact on its photocatalytic effect [14], [18]. The large surface area and special multistage channels of Zn²⁺-doped CuS hollow spheres are one of the reasons for their excellent photocatalytic performance. Moreover, the graded pores may reflect the incident light, which can make full use of light energy and enhance their photocatalytic performance. Considering that the stability of the photocatalytic material will affect the application, we

conducted a cycle test on the sample. Figure 2.3, *c* shows that the photodegradation efficiency of the hollow spheres was 65,6% after five cycles (Figure 2.3, *c*). This is attributed to the consumption of photocatalyst during the recovery process. On the other hand, CuS has the problem of photocorrosion. We conducted XPS test on the cyclically degraded samples as shown in Figure 2.3, *d*. The peaks at 932,59 eV and 952,51 eV prove that the cyclically degraded samples are stable and still CuS.

2.4 Adsorptive property, Energy band structure and Photocatalytic mechanism

The surface area (Figure 2.4, *a*) and pore size (Figure 2.4, *b*) distribution of Zn²⁺-doped CuS hollow sphere were studied by nitrogen sorption-desorption isotherm. The data of the hollow sphere is type IV isotherms, indicating that the sample has a mesoporous structure (2 – 50 nm). The sample has an H3 lag loop, which is related to the aggregation of nanoparticles (corresponding to SEM images). The aperture distribution maps obtained by the Barrett – Joyner – Halenda (BJH) method show only a single peak. The average pore sizes of the samples with the proportion of water in the solvent from 0 to 4 were 13,86 nm, 13,66 nm, 16,24 nm, 12,42 nm (hollow spherical sample) and 18,59 nm in Table 2.1, respectively.

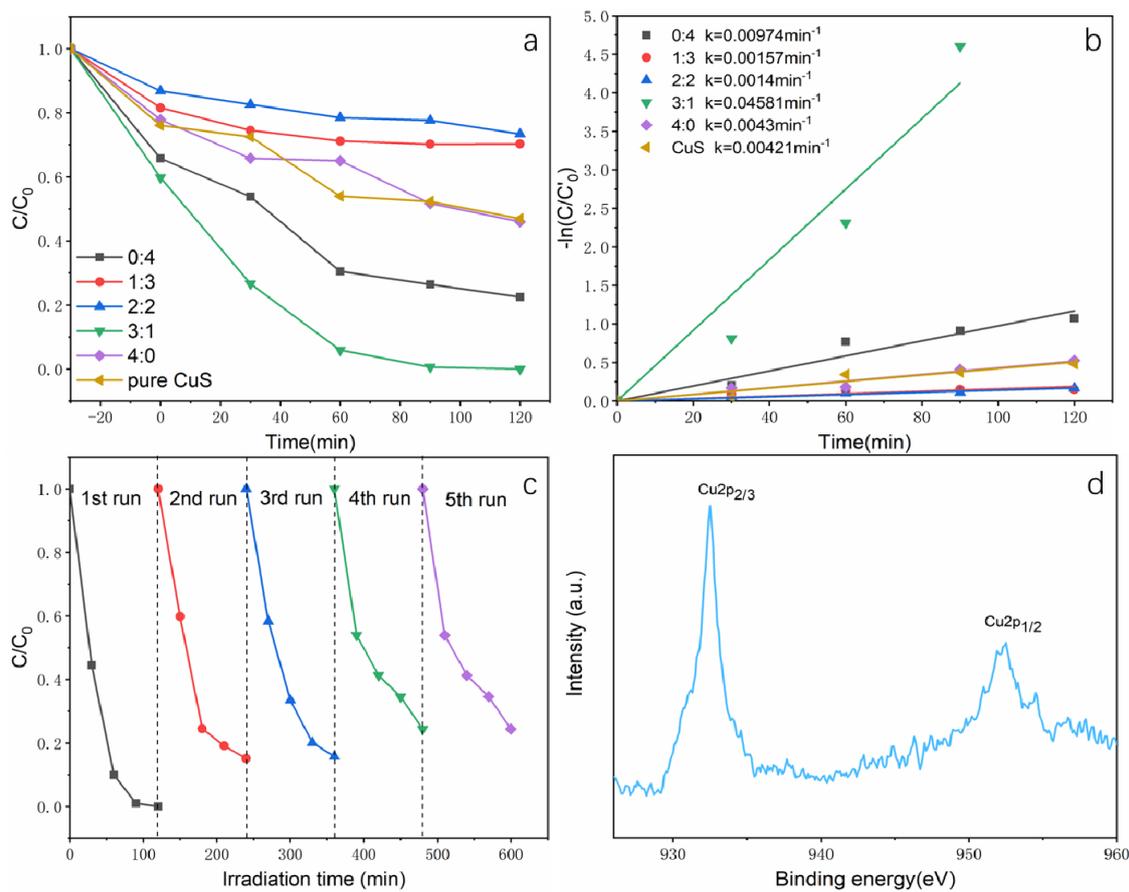


Figure 2.3 – (a) Photodegradation of MB (30 mg/L) by Zn^{2+} -doped CuS with different solvent ratio; (b) The corresponding kinetic curves of MB degradation by Zn^{2+} -doped CuS with different solvent ratio; (c) Cycling experiments of MB (30 mg/L) degradation by Zn^{2+} -doped CuS; (d) The high-resolution XPS spectrum of Zn^{2+} -doped CuS after the fourth photocycle

The corresponding specific surface areas were $7,85\text{ m}^2/\text{g}$, $5,71\text{ m}^2/\text{g}$, $7,28\text{ m}^2/\text{g}$, $20,2\text{ m}^2/\text{g}$ (hollow spherical sample) and $2,9\text{ m}^2/\text{g}$, respectively (Table 2.1). The specific surface area of the hollow spherical sample is 2.5 times, 3.5 times, 2.5 times and 7 times of the other samples in solvent ratio order, which may be due to the special interconnecting channels and graded pores of the hollow spherical structure.

Table 2.1

Medium	Morphology	Surface area (m^2g^{-1})	Pore volume (m^3g^{-1})	E_g (eV)
0:4	nano particles	7,85	0,04	1,85
1:3	nano particles	5,71	0,61	2,2
2:2	irregular shape	7,28	0,83	2,27
3:1	hollow sphere	20,2	0,94	1,96
4:0	sphere	2,9	0,12	1,76

Figure 2.4, c is the solid state ultraviolet (DRS) spectrum of the sample, showing the electronic states of Zn^{2+} -doped CuS samples generated by different solvents. Zn^{2+} -doped CuS samples have excellent absorption in the visible region, and the absorption curve has a red-shift trend compared with pure CuS samples. This is attributed to the doping of Zn^{2+} ions, which leads to an increase in the concentration of the hole-electron pair, making it easier to absorb the photon transition to the excited state, thus leading to a significant enhancement of its photoresponsive activity. The absorption spectra calculated by Kubelka-Munk theory show that the hollow spherical Zn^{2+} -doped CuS (water: glycol 3:1) with the best catalytic effect has the strongest absorption peak at 744 nm , and the strongest absorption peak of pure water and pure glycol as solvent are 662 nm and 738 nm , respectively. Both of them have good absorption of visible light. The absorption peaks of solvent ratio 1:3 and 2:2 have a significant red shift, and the wider absorption peaks are located in the near infrared (NIR) and infrared (IR) regions. According to the Kubelka-Munk function formula: $ah\nu = A(h\nu - E_g)^n$, the band gap [18], [19]. Where

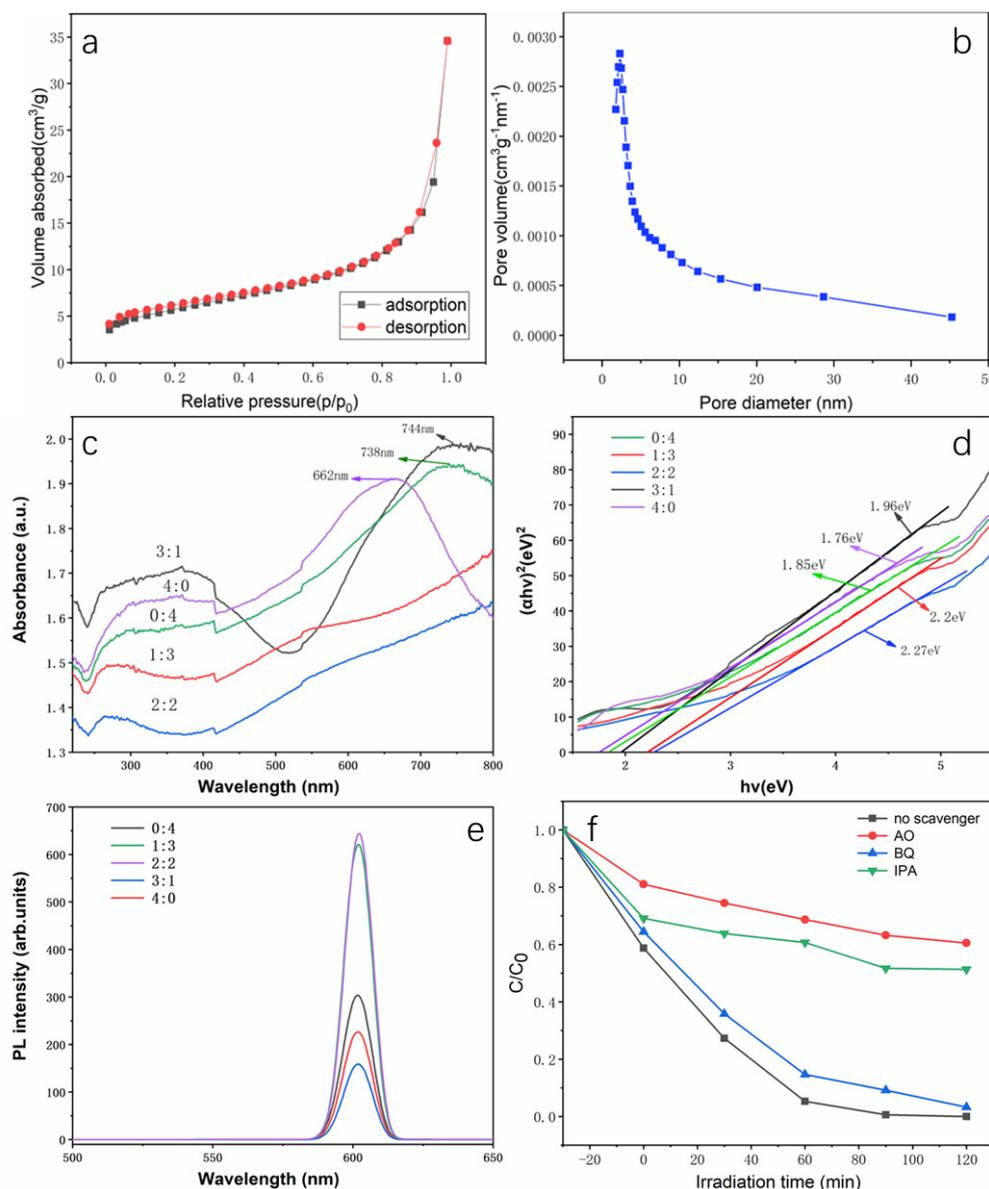


Figure 2.4 – (a) N₂ adsorption-desorption isotherm of Zn²⁺-doped CuS
 (b) Pore size distribution curve of Zn²⁺-doped CuS,
 (c) The DRS spectra of Zn²⁺-doped CuS with different solvent ratio;
 (d) The corresponding Tauc plots of Zn²⁺-doped CuS with different solvent ratio,
 (e) The PL spectra of Zn²⁺-doped CuS with different solvent ratio,
 (f) Effect of different scavengers on the degradation of MB (30 mg/L) by the hollow spheres Zn²⁺-doped CuS under visible light conditions

E_g is the optical bandgap, A is A constant, and $n = 1/2, 3/2, 2,$ or 3 depending on the nature of the electronic transition ($1/2$ for allowed direct transition, 2 for allowed indirect transition, $3/2$ for forbidden direct transition, and 3 for forbidden indirect transition) [20]. Figure 2.4, *d* shows that the band gaps of the five gradient samples obtained by calculation are 1,85 eV, 2,2 eV, 2,27 eV, 1,96 eV and 1,76 eV (Table 2.1). The five different band gaps may be attributed to the quantum size effect of CuS and the Zn²⁺ doping concentration.

PL photoluminescence spectrum is also an important indicator to evaluate the photocatalytic performance of a material. PL is usually used to characterize material defects, including structural defects, inherent defects and non-inherent defects [21]. After the semiconductor absorbs light energy, when the energy absorbed is enough to change it from the ground state to the excited state, the electron will jump from the valence band to the conduction band. This creates an electron-hole pair [22]. And electrons and holes in the compound can make the photocatalytic properties, PL photoluminescence

spectrometer can through the electronic collection – hole in composite materials for electronic fluorescent information – hole pair recombination rate, peak intensity is proportional to the recombination rate, the lower the peak strength, material of electrons and holes, the lower the recombination rate, photocatalytic performance is better. It can be observed from Figure 2.4, *e* that the hollow sphere Zn^{2+} -doped CuS sample with the best performance has the lowest recombination rate, which may be attributed to its 1,9% Zn^{2+} doping concentration. Zn^{2+} -doped into the lattice of CuS forms lattice defects, which can be used as carrier traps, thus reducing the recombination rate of electron – hole pairs [23].

The conduction band and the valence band of a semiconductor are of great significance for the study of a photocatalytic mechanism. The band gap has been calculated by DRS, and the conduction band potential (ECB) and valence band potential (EVB) have been calculated by the following equation [24]

$$E_{VB} = \chi - E^e + 0,5E_g,$$

$$E_{CB} = E_{VB} - E_g.$$

Where E_g is the band gap energy of the semiconductor, E^e refers to the energy of the free electron on the hydrogen scale (about 4,5 eV), and χ is the geometric mean of the electronegativities of the constituent atoms, and the value of χ can be obtained from the following equation [25], [26]:

$$\chi = (x(A)^a \cdot x(B)^b \cdot x(C)^c)^{\frac{1}{a+b+c}},$$

where a , b , and c represent the number of atoms in the compound, $\chi(A)$, $\chi(B)$, and $\chi(C)$ refer to the absolute electronegativity of the corresponding atoms [27]. The calculated conduction band and valence band of Zn^{2+} -doped CuS are $-0,52$ eV and $1,44$ eV, respectively.

According to the band gap, the conduction band and the valence band calculated above, we further analyzed the photocatalytic mechanism by a capture experiment. In the process of photocatalytic degradation, the main oxides involved in the

reaction are hole (H^+), hydroxyl radical (OH) and superoxide anion radical (O_2^-). 2 mL ammonium oxalate monohydrate $((COONH_4)_2 \cdot H_2O, AO)$, benzoquinone ($C_6H_4O_2, BQ$) and isopropanol (C_3H_8O) were used as scavengers of H^+ , O_2^- , OH in the degradation process, respectively [28]. Figure 2.4, *f* shows the photocatalytic efficiency of Zn^{2+} -doped CuS hollow spherical catalyst in the presence of various scavengers. Compared with Zn^{2+} -doped CuS without scavenger, the degradation efficiency of Zn^{2+} -doped CuS with BQ scavenger has no significant effect, indicating that O_2^- does not play a key role in the photocatalytic process, which may be attributed to the doping of Zn ions providing more positions for charge recombination. The degradation efficiency of Zn^{2+} -doped CuS with AO and IPA decreased to 40% and 50%. These results indicate that h^+ and OH play crucial roles in the photocatalytic process of Zn^{2+} -doped CuS. This may be attributed to the fact that Zn^{2+} ions doped on the lattice surface of CuS form carrier traps, which can promote the transfer of electrons to the interface of Zn^{2+} -doped CuS photocatalyst, thus improving the efficiency of hole extraction and greatly increasing the hole concentration, which plays a dominant role in the photocatalytic reaction process [23].

Through a series of characterization such as morphology, structure, band gap and photoluminescence, the differences of photocatalytic performance of Zn^{2+} -doped CuS were comprehensively discussed. Under a visible light irradiation, the photocatalytic efficiency of hollow spherical Zn^{2+} doped CuS samples is the best. After reaching adsorption equilibrium, the degradation efficiency reaches 100% in 90 min under light conditions. First of all, the hollow sphere has a special interconnecting channel and a hierarchical pore structure. The special structure makes it have the largest specific surface area among the five groups of samples, which can provide more surface active sites for adsorption, and the adsorption performance is particularly outstanding.

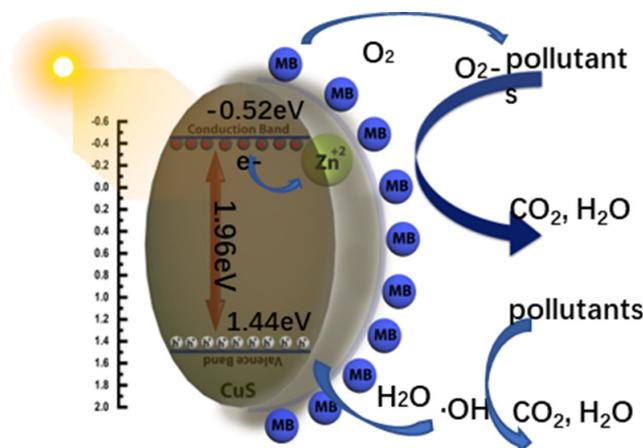


Figure 2.5 – Photocatalytic mechanism of Zn^{2+} -doped CuS hollow spheres under visible light

The light utilization efficiency of the catalyst is improved by scattering the incident light with special structure. The large specific surface area also makes the contact area between catalyst and pollutant in the process of photocatalytic reaction so as to improve the catalytic rate. The Zn²⁺ doping concentration of 1.9% in the hollow sphere is also crucial, which is the highest concentration sample. The Zn²⁺ doping is on the surface of CuS lattice, because CuS is a typical P-type semiconductor, and Zn²⁺ forms a carrier trap on the surface, which can attract electrons to the interface of catalyst through charge recombination due to its positive potential. This results in a reduction in the energy required for electron-hole separation of the catalyst, which corresponds to our DRS results that the hollow spheres have a lower band gap (1.96 eV) than the normal pure CuS. The electron transfer increases the hole concentration of the hollow sphere catalyst, so in our capture experiment, the sample with AO (H⁺ + scavenger) has the most obvious reduction in catalytic efficiency. Hole h⁺ plays a leading role in the catalytic process of Zn²⁺-doped CuS catalyst.

Conclusions

In conclusion, a green, simple and convenient photocatalyst synthesis process was designed in this study. CuS photocatalyst doped with Zn²⁺ ions was synthesized by one-step stirring in a low temperature water bath using green, non-toxic sodium thiosulfate as a sulfur source. The hollow spherical Zn²⁺-doped CuS catalyst was prepared by adjusting the solvent ratio. Due to its large specific surface area and special fractional pores, the hollow spherical morphology provided more surface active sites for the adsorption of the catalyst and greatly improved the utilization efficiency of incident light. By doping Zn²⁺ ions to its lattice surface, the carrier trap is formed, which catalyzes hole extraction, promotes electron transition to the catalyst interface, reduces the activation energy of electron hole pairs, and significantly enhances the visible light response activity. Compared with the previously reported CuS series photocatalytic compounds, the photocatalytic activity of visible light is better, the reaction rate is 0.04736 min⁻¹, which is 12 times of that of common pure CuS, and the degradation efficiency can reach 65.6% after 5 cycles. It provides a more simple, green and efficient photocatalyst synthesis strategy compared with other reports, which has great application prospects in the field of photocatalysis.

REFERENCES

1. *Core-shell structure of sulphur vacancies-CdS@CuS: Enhanced photocatalytic hydrogen generation activity based on photoinduced interfacial charge transfer* / J. Guo, Y. Liang, L. Liu, J. Hu, H. Wang, W. An, W. Cui // *J. Colloid Interface Sci.* – 2021. – № 600. – P. 138–149.

2. *Preparation of flower-like CuS/reduced graphene oxide (RGO) photocatalysts for enhanced photocatalytic activity* / X.-S. Hu, Y. Shen, Y.-T. Zhang, J.-J. Nie // *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* – 2017. – № 103. – P. 201–208.

3. *Flower-like CuS/graphene oxide with photo-thermal and enhanced photocatalytic effect for rapid bacteria-killing using visible light* / R. Lv, Y.-Q. Liang, Z.-Y. Li, S.-L. Zhu, Z.-D. Cui, S.-L. Wu // *Rare Metals.* – 2021. – Vol. 41, № 2. – P. 639–649.

4. *Rose-like CuS microflowers and their enhanced visible-light photocatalytic performance* / L. Zhao, L. Zhou, C. Sun, Y. Gu, W. Wen, X. Fang // *CrystEngComm.* – 2018. – Vol. 20, № 41. – P. 6529–6537.

5. *Efficient Self-Assembly Synthesis of Uniform CdS Spherical Nanoparticles-Au Nanoparticles Hybrids with Enhanced Photoactivity* / S. Han, L. Hu, N. Gao, A.A. Al-Ghamdi, X. Fang // *Advanced Functional Materials.* – 2014. – Vol. 24, № 24. – P. 3725–3733.

6. *Synthesis and optical properties of CuS nanoplate-based architectures by a solvothermal method* / F. Li, T. Kong, W. Bi, D. Li, Z. Li, X. Huang // *Applied Surface Science.* – 2009. – Vol. 255, № 12. – P. 6285–6289.

7. *In₂S₃/CuS nanosheet composite: An excellent visible light photocatalyst for H₂ production from H₂S* / A. Prakash, M. Dan, S. Yu, S. Wei, Y. Li, F. Wang, Y. Zhou // *Solar Energy Materials and Solar Cells.* – 2018. – № 180. – P. 205–212.

8. *Nanoporous CuS with excellent photocatalytic property* / W. Xu, S. Zhu, Y. Liang, Z. Li, Z. Cui, X. Yang, A. Inoue // *Sci Rep.* – 2015. – № 5. – P. 18125.

9. *Creating Carbon-Oxygen Bonds over TiO₂ Nanofibers for Synergistic Benefits of Visible-Light Response and Charge Separation toward Photocatalysis* / X. Xu, Y. Wang, R. Wang, J. Pan, J. Hu, H. Zeng // *Advanced Materials Interfaces.* – 2017. – Vol. 4, № 4.

10. *Uniform Zinc Oxide Nanowire Arrays Grown on Nonepitaxial Surface with General Orientation Control* / R. Zhu, W. Zhang, C. Li, R. Yang // *Nano Lett.* – 2013. – Vol. 13, № 11. – P. 5171–6.

11. *Zeinodin, R. In-doped CuS nanostructures: Ultrasonic synthesis, physical properties, and enhanced photocatalytic behavior* / R. Zeinodin, F. Jamali-Sheini // *Physica B: Condensed Matter.* – 2019. – № 570. – P. 148–156.

12. *Synthesis of CuS and CuS/ZnS core/shell nanocrystals for photocatalytic degradation of dyes under visible light* / U.T.D. Thuy, N.Q. Liem, C.M.A. Parlett, G.M. Lalev, K. Wilson // *Catalysis Communications.* – 2014. – № 44. – P. 62–67.

13. *Facile preparation and high capacitance performance of copper sulfide microspheres as supercapacitor electrode material* / T. Zhao, X. Peng, X. Zhao, J. Hu, W. Yang, T. Li, I. Ahmad // *Composites Part B: Engineering.* – 2019. – № 163. – P. 26–35.

14. Ding, H. Transformation of phase and heterojunction type by using HAc-adsorbed $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ as a Bi source / H. Ding, H. Yu, Q. Han // *J Colloid Interface Sci.* – 2021. – № 604. – P. 429–440.
15. Adhikari, S. Hierarchical Design of CuS Architectures for Visible Light Photocatalysis of 4-Chlorophenol / S. Adhikari, D. Sarkar, G. Madras // *ACS Omega.* – 2017. – Vol. 2, № 7. – P. 4009–4021.
16. Microwave-assisted controllable synthesis of hierarchical CuS nanospheres displaying fast and efficient photocatalytic activities / H. Hu, J. Wang, C. Deng, C. Niu, H. Le // *Journal of Materials Science.* – 2018. – Vol. 53, № 20. – P. 14250–14261.
17. Preparation and characterization of CuS hollow spheres / Y. Huang, H. Xiao, S. Chen, C. Wang // *Ceramics International.* – 2009. – Vol. 35, № 2. – P. 905–907.
18. Simmons, E.L. Reflectance spectroscopy: application of the Kubelka-Munk theory to the rates of photoprocesses of powders / E.L. Simmons // *Applied optics.* – 1976. – Vol. 15, № 4. – P. 951–4.
19. Tolvaj, L. Validity limits of Kubelka–Munk theory for DRIFT spectra of photodegraded solid wood / L. Tolvaj, K. Mitsui, D. Varga // *Wood Science and Technology.* – 2010. – Vol. 45, № 1. – P. 135–146.
20. Fast and simple approach for production of antibacterial nanocellulose/cuprous oxide hybrid films / O.L. Evdokimova, M.E. Belousova, A.V. Evdokimova, T.V. Kusova, A.E. Baranchikov, K.S. Antonets, A.A. Nizhnikov, A.V. Agafonov // *Cellulose.* – 2021. – Vol. 28, № 5. – P. 2931–2945.
21. Rapid toxicity elimination of organic pollutants by the photocatalysis of environment-friendly and magnetically recoverable step-scheme $\text{SnFe}_2\text{O}_4/\text{ZnFe}_2\text{O}_4$ nano-heterojunctions / J. Wang, Q. Zhang, F. Deng, X. Luo, D.D. Dionysiou // *Chemical Engineering Journal.* – 2020. – № 379.
22. Visible Light Photocatalytic H_2 -Production Activity of CuS/ZnS Porous Nanosheets Based on Photoinduced Interfacial Charge Transfer / J. Zhang, J. Yu, Y. Zhang, Q. Li, J.R. Gong // *Nano Lett.* – 2011. – Vol. 11, № 11. – P. 4774–9.
23. Yang, D. Revealing the role of surface elementary doping in photocatalysis / D. Yang, Z. Wang, J. Chen // *Catalysis Science & Technology.* – 2022. – Vol. 12, № 11. – P. 3634–3638.
24. Effect of the counter ions on composition and morphology of bismuth oxyhalides and their photocatalytic performance / Q. Han, K. Zhang, J. Zhang, S. Gong, X. Wang, J. Zhu // *Chemical Engineering Journal.* – 2016. – № 299. – P. 217–226.
25. Mousavi, M. Fabrication of novel magnetically separable nanocomposites using graphitic carbon nitride, silver phosphate and silver chloride and their applications in photocatalytic removal of different pollutants using visible-light irradiation / M. Mousavi, A. Habibi-Yangjeh, M. Abitorabi // *J. Colloid Interface Sci.* – 2016. – № 480. – P. 218–231.
26. Origin of Photocatalytic Activation of Silver Orthophosphate from First-Principles / X. Ma, B. Lu, D. Li, R. Shi, C. Pan, Y. Zhu // *The Journal of Physical Chemistry C.* – 2011. – Vol. 115, № 11. – P. 4680–4687.
27. Zahid, A.H. Highly stable 3D multilayered nanoparticles-based $\beta\text{-Bi}_2\text{O}_3$ hierarchitectures with enhanced photocatalytic activity / A.H. Zahid, Q. Han, X. Jia, S. Li, H. Hangjia, H. Liu // *Optical Materials.* – 2020. – № 109.
28. In situ co-pyrolysis fabrication of $\text{CeO}_2/\text{g-C}_3\text{N}_4$ n-n type heterojunction for synchronously promoting photo-induced oxidation and reduction properties / N. Tian, H. Huang, C. Liu, F. Dong, T. Zhang, X. Du, S. Yu, Y. Zhang // *Journal of Materials Chemistry A.* – 2015. – Vol. 3, № 33. – P. 17120–17129.

This study was supported by the Intergovernmental Cooperation Projects in the National Key Research and Development Plan of the Ministry of Science and Technology of PRC (No. 2022YFE0196800).

The article was submitted 14.11.2022.

Information about the authors

Gaopeng Yang – Master's Student of School of Chemical Engineering

Tiantian Wu – Master's Student of School of Chemical Engineering

Jingqing Cao – Ph. D., Lecturer

Xiaohong Jiang – Professor

О π -СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУППТ.И. Васильева¹, А.Г. Коранчук²¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель
²Гомельский государственный университет имени Франциска СкориныON π -SUPERSOLVABILITY OF FINITE GROUPST.I. Vasilyeva¹, A.G. Koranchuk²¹Belarusian State University of Transport, Gomel²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Подгруппа H группы G называется \mathbb{P}_π -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо от H до G существует цепь подгрупп, каждый индекс которой является или простым числом из π , или π' -числом (π – некоторое множество простых чисел). Для конечной π -замкнутой группы G с заданными \mathbb{P}_π -субнормальными подгруппами получены необходимые и достаточные условия π -сверхразрешимости G .

Ключевые слова: π -разрешимая группа, π -сверхразрешимая группа, \mathbb{P}_π -субнормальная подгруппа, нормализаторы силовских подгрупп.

Для цитирования: Васильева, Т.И. О π -сверхразрешимости конечных групп / Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 69–74. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_69. – EDN: QVPXWQ

Abstract. A subgroup H of a group G is called \mathbb{P}_π -subnormal in G if either $H = G$ or from H to G there exists a chain of subgroups, whose every index is either a prime in π or a π' -number (π is some set of primes). For a finite π -closed group with given \mathbb{P}_π -subnormal subgroups, the necessary and sufficient conditions of π -supersolvability are obtained.

Keywords: π -soluble group, π -supersoluble group, \mathbb{P}_π -subnormal subgroup, normalizers of Sylow subgroups.

For citation: Vasilyeva, T.I. On π -supersolvability of finite groups / T.I. Vasilyeva, A.G. Koranchuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 69–74. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_69 (in Russian). – EDN: QVPXWQ

Введение

В работе используются стандартные обозначения и определения, при необходимости см. монографии [1], [2], под словом группа понимается только конечная группа. Имеется много насыщенных формаций \mathfrak{F} , обладающих тем свойством, что группа G принадлежит \mathfrak{F} в случае, когда в G все нормализаторы силовских подгрупп являются \mathfrak{F} -подгруппами (см., например, [3]–[8]). Формация всех сверхразрешимых групп этого свойства не имеет. Некоторые критерии сверхразрешимости группы со сверхразрешимыми нормализаторами силовских подгрупп были получены в [9]. В [10] была доказана сверхразрешимость группы, в которой все нормализаторы силовских подгрупп являются \mathbb{P} -субнормальными в смысле определения 1 из [11]. Настоящая работа относится к отмеченному направлению исследования групп.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Ввиду теоремы Хупперта [12, гл. VI,

теорема 9.2.], если G – π -сверхразрешимая группа и M – ее максимальная подгруппа, то индекс M в G является либо простым числом из π , либо π' -числом. На основании этого введем следующее

Определение 0.1. Подгруппу H группы G будем называть \mathbb{P}_π -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ есть или простое число из π , или π' -число для любого $i = 1, \dots, n$.

Через $sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ будем обозначать множество всех \mathbb{P}_π -субнормальных подгрупп группы G .

Отметим, если π совпадает с множеством всех простых чисел \mathbb{P} , то определение 0.1 превращается в определение \mathbb{P} -субнормальной подгруппы, введенное в [11].

Нами с использованием определения 0.1 получены критерии π -сверхразрешимости группы по свойствам нормализаторов ее силовских подгрупп.

1 Предварительные сведения

Через \mathbb{P} обозначается множество всех простых чисел, π – некоторое подмножество из \mathbb{P} , $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если G – группа, то $|G|$ – порядок G , $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей $|G|$, G_p – силовская p -подгруппа из G для $p \in \mathbb{P}$, G_π – π -холлова подгруппа из G , $\text{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп из G , $\text{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп из G .

Группа G называется π -замкнутой, если G имеет π -холлову подгруппу $G_\pi \trianglelefteq G$, π -нильпотентной, если G π' -замкнута и π -холлова подгруппа из G нильпотентна, π -разрешимой, если G обладает главным рядом, у которого каждый фактор является либо абелевой π -группой, либо π' -группой, π -сверхразрешимой, если G обладает главным рядом, у которого каждый фактор является либо циклической π -группой, либо π' -группой.

Группа G , где $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ и простые числа $p_1 > \cdots > p_n$, называется дисперсивной по Оре или имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, если в G существуют нормальные подгруппы порядков $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ для любого $k = 1, \dots, n$.

Согласно теореме Холла – Чунихина (см., например, [12, гл. VI, §1]) любая π -разрешимая группа G обладает π -холловой подгруппой, все π -холловы подгруппы сопряжены в G , всякая π -подгруппа из G содержится в некоторой π -холловой подгруппе из G и в G π -холлова подгруппа разрешима.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация \mathfrak{F} называется наследственной, если из условия $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H из G ; насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Если \mathfrak{F} – формация, то \mathfrak{F} -кордикалом группы G называется подгруппа $G^\delta = \bigcap N$ для всех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Через \mathcal{U}^π обозначается класс всех π -сверхразрешимых групп. Нам потребуются некоторые известные свойства π -сверхразрешимых групп (см., например, [1, с. 35], [12, гл. VI, §8, 9]): \mathcal{U}^π – наследственная насыщенная формация; всякая p -сверхразрешимая группа имеет p -нильпотентный коммутант; всякая сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре.

2 Множество $sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и π -сверхразрешимость группы

Лемма 2.1. Пусть H – подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если G π -разрешима и H субнормальна в G , то $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$;

2) если G π -сверхразрешима, то $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Доказательство. Утверждение 1) следует из свойств π -разрешимой группы.

Утверждение 2). Если G π -сверхразрешима и H – ее подгруппа, то по теореме Хупперта H можно соединить с G максимальной цепью подгрупп, каждый индекс которой является либо простым числом из π , либо π' -числом, т. е. $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. \square

Лемма 2.2. Пусть G – группа, $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $H \cap N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N)$;

2) $HN/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$;

3) $H^g \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для любого $g \in G$.

Доказательство. Подгруппа H \mathbb{P}_π -субнормальна в G . Для $H \neq G$ рассмотрим цепь подгрупп из определения 0.1. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$.

Утверждение 1). Заметим, что

$$|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| = |(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|$$

и $H_{i-1} \leq (H_i \cap N)H_{i-1} \leq H_i$. Допустим, что

$|H_i : H_{i-1}| = p \in \pi$. Тогда H_{i-1} максимальна в H_i .

Поэтому либо $H_i \cap N = H_{i-1} \cap N$, либо

$|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| = p$. Предположим, что

$|H_i : H_{i-1}| = \pi'$ -число. Тогда либо $H_i \cap N =$

$= H_{i-1} \cap N$, либо $|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N|$ есть π' -число.

Итак, $H \cap N$ \mathbb{P}_π -субнормальна в N , т. е.

$H \cap N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N)$.

Утверждение 2). Индекс

$$|H_i N / N : H_{i-1} N / N| = \frac{|H_i : H_{i-1}|}{|(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|}$$

Если $|H_i : H_{i-1}| = p \in \pi$, то из

$$H_{i-1} \leq (H_i \cap N)H_{i-1} \leq H_i$$

следует, что либо $H_i N / N = H_{i-1} N / N$, либо

$|H_i N / N : H_{i-1} N / N| = p$. Если $|H_i : H_{i-1}| =$

π' -число, то или $|H_i N / N : H_{i-1} N / N| = 1$ или

$|H_i N / N : H_{i-1} N / N| = \pi'$ -число. Значит,

HN/N \mathbb{P}_π -субнормальна в G/N , т. е.

$$HN/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N).$$

Утверждение 3) следует из того, что

$|H_i^g : H_{i-1}^g| = |H_i : H_{i-1}|$ для любого $g \in G$. \square

Лемма 2.3. Пусть H – подгруппа группы G . Пусть выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $H/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$ для $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$;
- 2) $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K)$ и $K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$;
- 3) $G^{\text{M}\pi} \leq H$.

Тогда $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Доказательство. Пусть выполняется утверждение 1), т. е. $H/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$ для $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$. Можно считать, что $H/N \neq G/N$. Так как $H/N \in \mathbb{P}_\pi$ -субнормальна в G/N , существует цепь подгрупп

$$H/N = H_0/N < H_1/N < \dots < H_{n-1}/N < H_n/N = G/N,$$

где $|H_i/N : H_{i-1}/N|$ – есть либо простое число из π , либо π' -число. Из $|H_i/N : H_{i-1}/N| = |H_i : H_{i-1}|$ следует, что для $H \in \mathbb{P}_\pi$ -субнормальна в G и $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Если выполняется утверждение 2), то $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ по определению 0.1.

Допустим, что справедливо утверждение 3), т. е. $G^{\text{M}\pi} \leq H$. Тогда $H/G^{\text{M}\pi} \leq G/G^{\text{M}\pi}$ π -сверхразрешима. По 2) леммы 2.1 $H/G^{\text{M}\pi} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/G^{\text{M}\pi})$. Поэтому для H выполняется утверждение 1) и по доказанному выше $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. \square

Лемма 2.4. Пусть G – группа, $\text{Syl}_p(G) \subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и $N \trianglelefteq G$.

Тогда $\text{Syl}_p(N) \subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(N)$ и

$$\text{Syl}_p(G/N) \subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N).$$

Доказательство. Пусть $S \in \text{Syl}_p(N)$. По теореме Силова $S \leq H$ для некоторой $H \in \text{Syl}_p(G)$. По условию леммы $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Так как $S = H \cap N$, по 1) леммы 2.2 $S \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N)$.

Рассмотрим $R/N \in \text{Syl}_p(G/N)$. Так как $G_p N/N \in \text{Syl}_p(G/N)$ для любой $G_p \in \text{Syl}_p(G)$, по теореме Силова $R/N = (G_p N/N)^{g^N}$ для некоторого $g \in G$. Отсюда $R/N = G_p^g N/N$. Ввиду $G_p^g \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и 2) леммы 2.2 $R/N \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$. \square

Лемма 2.5. Если G – π -замкнутая группа, $P \in \text{Syl}_p(G)$ и $N_G(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$, где p – наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(G)$, то $P \trianglelefteq G$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Выберем группу G наименьшего порядка такую, что $N_G(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для наибольшего простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и $P \in \text{Syl}_p(G)$, но P не является нормальной в G .

Обозначим $H = N_G(P)$. Из $H \neq G$ следует, что в G существует цепь подгрупп из определения 0.1. Так как H_{n-1} – π -замкнутая группа, $H = N_{H_{n-1}}(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H_{n-1})$, $P \in \text{Syl}_p(H_{n-1})$ и p – наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(H_{n-1})$, заключаем, что $P \trianglelefteq H_{n-1}$ по выбору G .

Предположим, что $|H_n : H_{n-1}| = q \in \pi$. Из $H_{n-1} = N_G(P)$ по теореме Силова $|G : N_G(P)| = q \equiv 1 \pmod{p}$. Получили противоречие с $q < p$.

Пусть $|H_n : H_{n-1}| = \pi'$ -число. По условию в G существует нормальная π -холлова подгруппа G_π . Из

$$|G| = |G_\pi| \cdot |G : G_\pi| = |H_{n-1} \cap G_\pi| \cdot |H_{n-1} G_\pi / G_\pi| \cdot |H_n : H_{n-1}|$$

следует, что $G_\pi = H_{n-1} \cap G_\pi$ – π -холлова подгруппа в H_{n-1} . По теореме Силова P^x – силовская p -подгруппа из G_π для некоторого $x \in H_{n-1}$. Тогда $P \leq (G_\pi)^{x^{-1}} = G_\pi$. Из $P \trianglelefteq G_\pi \trianglelefteq G$ и характеристичности P в G_π следует, что $P \trianglelefteq G$. Полученное противоречие с выбором G завершает доказательство леммы. \square

Лемма 2.6. Если G – π -замкнутая группа, $P \in \text{Syl}_p(G)$ и $P \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$, где p – наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(G)$, то $P \trianglelefteq G$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Для $P = G$ утверждение леммы выполняется. Пусть $P \neq G$. Так как $P \in \mathbb{P}_\pi$ -субнормальна в G , имеется цепь подгрупп $P = P_0 < P_1 < \dots < P_{m-1} < P_m = G$ такая, что $|P_i : P_{i-1}|$ есть либо простое число из π , либо π' -число, $i = 1, 2, \dots, m$. Так как $P \in \text{Syl}_p(P_{m-1})$ и $P \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(P_{m-1})$, по индукции $P \trianglelefteq P_{m-1}$. Поэтому $P_{m-1} \leq N_G(P)$.

Если $P_{m-1} = N_G(P)$, то $N_G(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и по лемме 2.5 $P \trianglelefteq G$.

Предположим, что $P_{m-1} \neq N_G(P)$.

Если $|P_m : P_{m-1}| = q \in \pi$, то $N_G(P) = G$ ввиду максимальной P_{m-1} в $P_m = G$, т. е. $P \trianglelefteq G$.

Если $|P_m : P_{m-1}| = \pi'$ -число, то из $P_{m-1} < N_G(P) \leq G$ следует, что $N_G(P) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и по лемме 2.5 $P \trianglelefteq G$. \square

Лемма 2.7. Пусть G – π -замкнутая группа и $\text{Syl}_{p_i}(G) \subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для любого $p_i \in \pi \cap \pi(G) = \{p_1, \dots, p_n \mid p_1 > \dots > p_n\}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда G имеет нормальную π_k -холлову подгруппу для любого $\pi_k = \{p_1, \dots, p_k\}$, $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Так как π -холлова подгруппа G_π из G нормальна в G , G_π содержит

G_{p_i} для любого $i=1,2,\dots,n$. По лемме 2.6 $G_{p_i} \trianglelefteq G$. Из 2) леммы 2.2 следует, что $G_{p_1} G_{p_2} / G_{p_1} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/G_{p_1})$. Ввиду леммы 2.6 $G_{p_1} G_{p_2} / G_{p_1} \trianglelefteq G/G_{p_1}$. Откуда $G_{p_1} G_{p_2} \trianglelefteq G$. Применяя далее 2) леммы 2.2 и лемму 2.4, заключаем, что $G_{p_1} G_{p_2} \cdots G_{p_k} \trianglelefteq G$, $k=1,2,\dots,n$. \square

Отметим, что в леммах 2.5–2.7 π -замкнутость группы нельзя отбросить. В качестве примера возьмем группу $G = PSL(2, 7)$ и $\pi = \{7\}$. Тогда для $p=7$ из $|N_G(G_p) : G_p| = 3$ и $|G : N_G(G_p)| = 8$ заключаем, что $G_p \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и $N_G(G_p) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. При этом силовская 7-подгруппа не является нормальной в G .

Из примера 1 работы [10] следует, что в неразрешимой группе пересечение \mathbb{P}_π -субнормальных подгрупп не всегда \mathbb{P}_π -субнормальная подгруппа.

Лемма 2.8. Пусть G – π -замкнутая π -разрешимая группа, $H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ и K – подгруппа из G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $H \cap K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K)$;
- 2) если $K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$, то $H \cap K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Доказательство. Утверждение 1) докажем индукцией по $|G|$. Можно считать, что $H \neq G$. Рассмотрим цепь подгрупп из определения 0.1 и $H \cap K = H_0 \cap K \leq H_1 \cap K \leq \dots \leq H_{n-1} \cap K \leq H_n \cap K = K$.

Утверждение верно, если $H_{i-1} \cap K = H_i \cap K$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $H_{i-1} \cap K \neq H_i \cap K$ для некоторого i и пусть $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что $H_{j-1} \cap K \neq H_j \cap K$, а $H_j \cap K = K$. По индукции $H \cap K = H \cap (H_{j-1} \cap K) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H_{j-1} \cap K)$. Для $j < n$ по индукции утверждение выполняется.

Рассмотрим $j = n$.

Допустим, что $|H_n : H_{n-1}| = p \in \pi$. Так как G/C π -разрешима и H_{n-1} максимальна в G , имеем $G/C = H_{n-1}/C \cdot L/C$, где $C = \text{Core}_G(H_{n-1})$ и L/C – некоторая минимальная нормальная подгруппа из G/C . Из π -разрешимости G/C и $p \in \pi \cap \pi(L/C)$ следует, что L/C – p -группа. По теореме 15.2, гл. А из [2] L/C – единственная минимальная нормальная подгруппа в G/C , $C_{G/C}(L/C) = L/C$ и $H_{n-1}/C \cap L/C = C/C$. Поэтому $|L/C| = |G/C : H_{n-1}/C| = p$ и $H_{n-1}/C \cong G/C / C_{G/C}(L/C) \cong \text{Aut}_{G/C}(L/C)$ изоморфно вкладывается в $\text{Aut}(Z_p) \cong Z_{p-1}$. Итак, G/C сверхразрешима. Поэтому сверхразрешимой

является $K / K \cap C \cong KC / C$. По 2) леммы 2.1 $H_{n-1} \cap K / K \cap C \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K / K \cap C)$. Ввиду выполнмости 1) леммы 2.3 $H_{n-1} \cap K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K)$.

Предположим, что $|H_n : H_{n-1}| = \pi'$ -число. Из π -разрешимости G следует, что ее π -холлова подгруппа G_π содержится в H_{n-1} . Так как $G_\pi \trianglelefteq G$, $K \cap G_\pi$ – π -холлова подгруппа в K . Тогда из $K \cap G_\pi \leq H_{n-1} \cap K$ следует, что $|K : H_{n-1} \cap K| = \pi'$ -число. Значит,

$$H_{n-1} \cap K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K).$$

Так как $H \cap K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H_{n-1} \cap K)$, по лемме 2.3 $H \cap K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K)$.

Утверждение 2). По доказанному $H \cap K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(K)$.

По лемме 2.3 $H \cap K \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. \square

Лемма 2.9. Пусть G – π -замкнутая π -разрешимая группа и ее силовская p -подгруппа G_p содержится в подгруппе H из G . Если $N_G(G_p)^\mathfrak{X} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$, то $N_H(G_p)^\mathfrak{X} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H)$, где \mathfrak{X} – формация всех π -нильпотентных групп.

Доказательство. Из наследственности \mathfrak{X} заключаем, что $N_H(G_p)^\mathfrak{X} \leq N_G(G_p)^\mathfrak{X}$. Так как $N_H(G_p)^\mathfrak{X} \trianglelefteq N_H(G_p)$, имеем

$$N_H(G_p)^\mathfrak{X} \trianglelefteq N_G(G_p)^\mathfrak{X} \cap H.$$

Ввиду π -разрешимости $N_G(G_p)^\mathfrak{X} \cap H$ по 1) леммы 2.1 $N_H(G_p)^\mathfrak{X} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(N_G(G_p)^\mathfrak{X} \cap H)$. Из 1) леммы 2.8 следует, что $N_G(G_p)^\mathfrak{X} \cap H \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H)$. Поэтому $N_H(G_p)^\mathfrak{X} \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H)$ по лемме 2.3. \square

Теорема 2.1. Если $\mathfrak{F} = (G - \text{группа} \mid G_\pi \trianglelefteq G \text{ и } \text{Syl}(G) \subseteq sn_{\mathbb{P}_\pi}(G))$, то \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация.

Теорема 2.2. Пусть G – π -замкнутая группа. Тогда и только тогда G π -сверхразрешима, когда $N_G(G_p) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и $N_G(G_\pi) \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для любой π' -холловой подгруппы G_π из G .

Отметим, что в теореме 2.2 условие принадлежности $sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ нормализаторов π' -холловых подгрупп из G является существенным. В качестве примера выступает знакопеременная группа A_4 степени 4 и $\pi = \{2\}$. Если $G = A_4$ и $p = 2$, то $N_G(G_p) = G \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$, в G π' -холловы подгруппы совпадают с силовскими 3-подгруппами, которые самонормализуемы и не принадлежат $sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Группа G π -замкнута, но не является π -сверхразрешимой.

Теорема 2.3. Пусть G – π -замкнутая группа. Тогда и только тогда G π -сверхразрешима, когда G – π -разрешимая группа такая, что для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовой p -подгруппы G_p из G нормализатор $N_G(G_p)$ π -сверхразрешим и $N_G(G_p)^\chi \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$, где χ – формация всех π -нильпотентных групп.

Доказательство. Необходимость следует из наследственности формации всех π -сверхразрешимых групп и 2) леммы 2.1.

Достаточность. Допустим, что существуют группы, для которых достаточность не выполняется. Выберем среди них группу G наименьшего порядка. Тогда G – π -замкнутая π -разрешимая группа, нормализатор $N_G(G_p)$ π -сверхразрешим и $N_G(G_p)^\chi \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и $G_p \in \text{Syl}_p(G)$, а G не является π -сверхразрешимой.

Рассмотрим любую минимальную нормальную подгруппу N из G . Тогда $N \neq G$ ввиду π -разрешимости и выбора G .

Если G/N – π' -группа, то G/N π -сверхразрешима. Пусть G/N – не π' -группа. Рассмотрим $q \in \pi \cap \pi(G/N)$ и $S_1/N \in \text{Syl}_q(G/N)$. Тогда $S_1/N = SN/N$ для некоторой $S \in \text{Syl}_q(G)$ и $N_G(S_1/N) = N_G(S)N/N \cong N_G(S)/N_G(S) \cap N$ π -сверхразрешим. Обозначим $A/N = N_G(S_1/N)$. Тогда $A = N_G(S)N$ и по [1, лемма 1.2] $(A/N)^\chi = A^\chi N/N$, а также $N_G(S)^\chi N = A^\chi N$. Поэтому $N_G(S_1/N)^\chi = N_G(S)^\chi N/N$. Из $N_G(S)^\chi \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$ по 2) леммы 2.2 получаем, что $N_G(S_1/N)^\chi \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G/N)$. Значит, G/N π -сверхразрешима по выбору G .

Из свойств \mathcal{U}^π следует, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $\Phi(G) = 1$. Тогда в G имеется максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$, причем $\text{Core}_G(M) = 1$. Отметим, что G не является π' -группой. Из π -замкнутости G следует, что G имеет нормальную π -холлову подгруппу G_π . Тогда $N \leq G_\pi$. Из разрешимости G_π заключаем, что N – p -группа для некоторого $p \in \pi \cap \pi(G)$. По [2, гл. А, теорема 15.2] $N = C_G(N)$, $N \cap M = 1$. По [2, гл. А, лемма 13.6] $O_p(M) = 1$. Так как $N \leq G_p \in \text{Syl}_p(G)$ и $N_G(G_p)$ π -сверхразрешим, имеем $N \neq G_p$ и

$$1 \neq M_p \in \text{Syl}_p(M).$$

Пусть q – наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(M)$ и $M_q \in \text{Syl}_q(M)$. Из $G_\pi \trianglelefteq G$ следует,

что $M_\pi = G_\pi \cap M$ – нормальная π -холлова подгруппа в M . Так как $M \cong G/N$ и G/N π -сверхразрешима, заключаем, что M_π сверхразрешима. Поэтому $M_q \trianglelefteq M_\pi$. Из $M_q \text{ char } M_\pi$ следует, что $M_q \trianglelefteq M$. Тогда $q > p$. Это означает, что $|\pi \cap \pi(M)| > 1$.

Из $\text{Core}_G(M) = 1$ и $M \leq N_G(M_q)$ заключаем, что $M = N_G(M_q)$. Ввиду того, что $M_q \in \text{Syl}_q(G)$ и $q \in \pi \cap \pi(G)$ по условию $M^\chi \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Из выбора G следует, что $1 \neq M^\chi \neq M$.

Так как M' s -нильпотентен для любого $s \in \pi \cap \pi(M)$, M' π -нильпотентен. Из $M^\chi \leq M'$ следует, что M^χ π -нильпотентен. Тогда $M^\chi = M_1 M_2$, где M_1 – нильпотентная π -холлова подгруппа в M^χ , M_2 – нормальная π' -холлова подгруппа в M^χ .

Если $p \in \pi(M^\chi)$, то $P_1 \trianglelefteq M_1$ для $P_1 \in \text{Syl}_p(M^\chi)$. Ввиду π -замкнутости G имеем, что $M_1 \trianglelefteq M^\chi$. Но тогда $P_1 \trianglelefteq M^\chi$. Из $M^\chi \trianglelefteq M$ получаем противоречие $1 \neq P_1 \leq O_p(M) = 1$.

Итак, $p \notin \pi(M^\chi)$.

1. Пусть $|\pi \cap \pi(M)| = 2$.

(а) Предположим, что $M_1 \neq 1$. Тогда M_1 – q -группа. Рассмотрим подгруппу $H = NM_1$. Из $M^\chi \cap H = M_1$ и 1) леммы 2.8 получаем, что $M_1 \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(H)$. Отметим, что $q > p$ и $M_1 \in \text{Syl}_q(H)$. По лемме 2.6 $M_1 \trianglelefteq H$. Получили противоречие $1 \neq M_1 \leq C_H(N) \leq C_G(N) = N$.

(б) Предположим, что $M_1 = 1$. Тогда $M^\chi = M_2$ – π' -группа, причем M^χ не является π' -холловой подгруппой в M , так как $O_p(M) = 1$. Обозначим $B = G_\pi M^\chi$. Пусть $Q \in \text{Syl}(B)$ и $\pi(Q) \subseteq \{p, q\} = \pi \cap \pi(B)$. Так как $Q \in \text{Syl}(G)$, по выбору G имеем $N_G(Q)$ π -сверхразрешим и $N_G(Q)^\chi \in sn_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Но тогда $N_G(Q) \cap B = N_B(Q)$ π -сверхразрешим. По лемме 2.9 $N_B(Q)^\chi \mathbb{P}_\pi$ - sn B . Так как $|B| < |G|$, по выбору G подгруппа B π -сверхразрешима. Тогда G_π сверхразрешима. Из $q > p$ следует, что $B_q \trianglelefteq G_\pi$, где $B_q \in \text{Syl}_q(B)$. А так как $G_\pi \trianglelefteq B$, заключаем что $B_q \trianglelefteq B$. Значит,

$$1 \neq B_q \leq C_B(N) \leq C_G(N) = N.$$

Получили противоречие.

2. $|\pi \cap \pi(M)| > 2$. Заметим, что $G_p = N(G_p \cap M)$. Так как $M_q \trianglelefteq M$, $(G_p \cap M)M_q$ – подгруппа в M ,

а $N(G_p \cap M)M_q = G_p M_q$ – подгруппа в G . Рассмотрим подгруппу $K = G_p M_q$. Тогда $\pi(K) = \{p, q\} \subseteq \pi \cap \pi(G)$. Пусть $R \in \text{Syl}(K)$. Тогда $R \in \text{Syl}(G)$. По выбору G имеем $N_G(R)$ π -сверхразрешим и $N_G(R)^{\times} \in \text{sn}_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Тогда $N_K(R) = N_G(R) \cap K$ π -сверхразрешим и по лемме 2.9 $N_K(R)^{\times} \in \text{sn}_{\mathbb{P}_\pi}(K)$. Из $|K| < |G|$ следует, что K π -сверхразрешима, а значит, и сверхразрешима. Из $q > p$ следует, что $M_q \trianglelefteq K$. Поэтому $1 \neq M_q \leq C_K(N) \leq C_G(N) = N$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Отметим, что в теореме 2.3 π -замкнутость группы G нельзя отбросить. Например, пусть $G = S_4$ – симметрическая группа степени 4 и $\pi = \{2\}$. Так как $\pi \cap \pi(G) = \{2\}$, в G для $p = 2$ любая силовская p -подгруппа $G_p = N_G(G_p)$. Поэтому $N_G(G_p)$ π -сверхразрешим и $N_G(G_p)^{\times} = 1$. В G имеется цепь подгрупп $1 < H_1 < H_2 < H_3 < G$, где $|H_1| = 2$, $|H_2| = 4$, $H_3 = A_4$. Поэтому $1 \in \text{sn}_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Но группа G не является π -сверхразрешимой, хотя G π -разрешима.

Заключение

В работе найдены критерии π -сверхразрешимости π -замкнутой группы G с заданными подгруппами из $\text{sn}_{\mathbb{P}_\pi}(G)$. Из приведенных теорем можно получить как известные, так и новые результаты.

При $\pi = P$ теорема 2.1 включает теорему 2.7 из [11], теорема 2.2 – теорему 3.1 из [10].

Через \mathfrak{A} обозначается формация всех абелевых групп, \mathfrak{N} – формация всех нильпотентных групп. Так как $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, имеем

$$N_G(G_p)^{\times} \leq N_G(G_p)^{\mathfrak{N}} \leq N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}.$$

Поэтому, если $N_G(G_p)$ π -сверхразрешим, по 2) леммы 2.1 $N_G(G_p)^{\times} \in \text{sn}_{\mathbb{P}_\pi}(N_G(G_p)^{\mathfrak{N}})$ и $N_G(G_p)^{\times} \in \text{sn}_{\mathbb{P}_\pi}(N_G(G_p)^{\mathfrak{X}})$. С учетом леммы 2.3 из теоремы 2.3 вытекают следующие критерии π -сверхразрешимости группы.

Следствие 2.1. Пусть G – π -замкнутая группа. Тогда и только тогда G π -сверхразрешима, когда G – π -разрешимая группа такая, что для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p -подгруппы G_p из G нормализатор $N_G(G_p)$ π -сверхразрешим и $N_G(G_p)^{\mathfrak{N}} \in \text{sn}_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Следствие 2.2. Пусть G – π -замкнутая группа. Тогда и только тогда G π -сверхразрешима, когда G – π -разрешимая группа такая, что для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской

p -подгруппы G_p из G нормализатор $N_G(G_p)$ π -сверхразрешим и $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}} \in \text{sn}_{\mathbb{P}_\pi}(G)$.

Для $\pi = \mathbb{P}$ из теоремы 2.3 получается следствие 2.1 из [9] и следствия 3.4–3.7 из [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Glauberman, G. Prime-power factor groups of finite groups II / G. Glauberman // Math. Z. – 1970. – Vol. – 117. – P. 46–51.
4. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers / M. Bianchi, A. Gillio Berta Mauri, P. Hauck // Arch. Math. – 1986. – Vol. 47, № 3. – P. 193–197.
5. Баллестер-Болинше, А. О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах / А. Баллестер-Болинше, Л.А. Шеметков // Сиб. мат. журнал. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 3–5.
6. Монахов, В.С. Нормальные подгруппы конечных групп и формации с нормализаторными условиями / В.С. Монахов, М.В. Селькин // Мат. заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 867–870.
7. D’Aniello, A. Saturated formations and Sylow normalizers / A. D’Aniello, C. De Vivo, G. Giordano // Bull. Austral. Math. Soc. – 2004. – Vol. 69, № 1. – P. 25–33.
8. Kazarin, L. On Sylow normalizers of finite groups / L. Kazarin, A. Martinez-Pastor, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra Appl. – 2014. – Vol. 13, № 3. – P. 1350116–1–20.
9. Васильева, Т.И. Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов / Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Сиб. мат. журнал. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 805–813.
10. Kniahina, V.N. On supersolvability of finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Internal. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.
11. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
12. Huppert, B. Endliche Gruppen. I / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.
13. Васильев, А.Ф. О конечных группах с полусубнормальными корадикалами силовских нормализаторов / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 58–62.

Поступила в редакцию 28.01.2023.

Информация об авторах

Васильева Татьяна Ивановна – к.ф.-м.н., доцент
Коранчук Анастасия Геннадьевна – аспирантка

ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ σ -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Н.Т. Воробьев, Е.Д. Волкова

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова

INJECTORS OF FINITE σ -SOLUBLE GROUPS

N.T. Vorob'ev, E.D. Volkova

P.M. Masherov Vitebsk State University

Аннотация. Пусть $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} , т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Конечная группа G называется σ -разрешимой, если каждый главный фактор H/K группы G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$. Класс Фиттинга $\mathfrak{H} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ называется σ -классом Хартли. В работе доказаны существование и сопряженность \mathfrak{H} -инъекторов в G и описана их характеристика в терминах радикалов.

Ключевые слова: σ -разрешимая группа, σ -класс Хартли, инъектор.

Для цитирования: Воробьев, Н.Т. Инъекторы конечных σ -разрешимых групп / Н.Т. Воробьев, Е.Д. Волкова // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75. – EDN: RSKBWR

Abstract. Let $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ be some partition of the set of all primes \mathbb{P} , i. e. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. Finite group G is σ -soluble, if every chief factor H/K of G is a σ_i -group for some $\sigma_i \in \sigma$. Fitting class $\mathfrak{H} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ is said to be σ -class Hartley. In this paper we prove the existence and conjugacy of \mathfrak{H} -injectors of G and describe their characterization in the terminal of the radicals.

Keywords: σ -soluble group, σ -class Hartley, injector.

For citation: Vorob'ev, N.T. Injectors of finite σ -soluble groups / N.T. Vorob'ev, E.D. Volkova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75 (in Russian). – EDN: RSKBWR

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными, если не оговорено противное. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. Классом групп называют всякую совокупность групп, содержащую вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Для многих исследований в теории групп и их классов основополагающими являются теоремы Силова [2] и Холла [3]. Изящное обобщение этих теорем в терминах классов Фиттинга было получено в работе Гащюца, Фишера и Хартли [4], где доказано, что для любого класса Фиттинга разрешимых групп \mathfrak{F} в каждой разрешимой группе G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены. Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется классом Фиттинга, если \mathfrak{F} замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. При этом подгруппу V группы G называют \mathfrak{F} -инъектором, если $V \cap N$ является

максимальной из подгрупп G , принадлежащих \mathfrak{F} , для любой субнормальной подгруппы N группы G . В последующем развитие методов локализации в теории групп привело к серии результатов [5]–[13], посвященных как обобщению теоремы Гащюца – Фишера – Хартли, так и нахождению характеристик инъекторов в терминах радикалов и холловых подгрупп.

В работах А.Н. Скибы [14]–[16] был предложен оригинальный метод исследования групп при помощи наличия у них σ -свойств, который состоит в следующем.

Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n , $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей группы G . Пусть σ – некоторое разбиение \mathbb{P} , т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа G называется σ -примарной,

если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; σ -нильпотентной, если $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ для некоторых σ -примарных групп G_1, G_2, \dots, G_n ; σ -разрешимой, если каждый главный фактор G σ -примарен.

В настоящей работе мы применяем указанный метод Скибы для доказательства существования и сопряженности \mathfrak{H} -инъекторов и их характеристики в любой σ -разрешимой группе для случая, когда \mathfrak{H} – σ -класс Хартли. При этом, следуя [6], класс Фиттинга \mathfrak{H} вида

$$\bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$$

будем называть σ -классом Хартли. Следствиями полученных результатов (теорема 4.3) являются, в частности, характеристики инъекторов разрешимых групп, полученные Фишером [5], Хартли [6], Го Вэньбином и Н.Т. Воробьевым [12], Наингом, Го Вэньбином и Н.Т. Воробьевым [13].

1 Предварительные сведения

Напомним, если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа, которую называют \mathfrak{F} -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов групп \mathfrak{F} и \mathfrak{H} называют класс групп $(G : \exists N \trianglelefteq G, N \in \mathfrak{F} \text{ и } G/N \in \mathfrak{H})$; произведением $\mathfrak{F}\delta\mathfrak{H}$ классов Фиттинга \mathfrak{F} и \mathfrak{H} называют класс групп $(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что если \mathfrak{H} замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\delta\mathfrak{H}$ [1, с. 566]. Более того, произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12(a), (c)].

Лемма 1.1 [1, замечание IX.1.11]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – непустые классы Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\delta\mathfrak{H}$.

Класс групп \mathfrak{F} называется гомоморфом, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой нормальной подгруппы N группы G . Если класс групп \mathfrak{F} является одновременно гомоморфом и классом Фиттинга, то его называют радикальным гомоморфом.

Лемма 1.2 [17, лемма 4]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – непустые классы Фиттинга и \mathfrak{M} – радикальный гомоморф. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$.

Класс групп называется *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Если \mathfrak{F} – непустая формация, то любая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу, факторгруппа по которой принадлежит \mathfrak{F} . Ее называют \mathfrak{F} -кордикалом G и обозначают $G^{\mathfrak{F}}$.

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – формации. Класс групп $\mathfrak{F}^\circ\mathfrak{H} = (G : G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называют *произведением формаций* \mathfrak{F} и \mathfrak{H} .

Лемма 1.3 [1, теорема IV.1.8 (a), (b)]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – непустые формации. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{H}}$ для всех групп G ;
- 2) $G^{\mathfrak{F}^\circ\mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ для всех групп G .

Лемма 1.4 [1, IX.1.1 (a)]. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга. Если $N \trianglelefteq G$, то

$$N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}.$$

Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Подгруппу V группы G называют:

(1) \mathfrak{F} -максимальной в G , если $H \in \mathfrak{F}$ и из условий $V \leq H \leq G$ и $H \in \mathfrak{F}$ следует, что $V = H$;

(2) \mathfrak{F} -инъектором G , если $V \cap N$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G .

Лемма 1.5 [1, IX.1.3]. Пусть G – группа и \mathfrak{F} – класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $K \trianglelefteq G$ и V – \mathfrak{F} -инъектор G , то $V \cap K$ – \mathfrak{F} -инъектор K ;

2) если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга и V – \mathfrak{F} -инъектор G , то $G_{\mathfrak{F}} \leq V$ и V – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа G ;

3) если V – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа G и $V \cap M$ – \mathfrak{F} -инъектор для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G , то V – \mathfrak{F} -инъектор G ;

4) если V – \mathfrak{F} -инъектор G и $\alpha : G \rightarrow G\alpha$ – изоморфизм, то $V\alpha$ – \mathfrak{F} -инъектор $G\alpha$.

Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга. Тогда группу G называют \mathfrak{F} -скованной, если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leq G_{\mathfrak{F}}$. Известно, что если G разрешима, то группа G \mathfrak{N} -скована, т. е. $C_G(F(G)) \leq F(G)$, где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга G . Произведение всех нормальных σ -нильпотентных подгрупп группы G называется σ -фиттинговой подгруппой G и обозначается через $F_{\sigma}(G)$ [16].

Лемма 1.6 [16, лемма 3.1]. Если группа G σ -разрешима, то $C_G(F_{\sigma}(G)) \leq F_{\sigma}(G)$, т. е. группа G является \mathfrak{N}_{σ} -скованной.

Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется *наследственным*, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H группы G . Фиттинговой *формацией* называют класс групп, который одновременно является *формацией* и *классом Фиттинга* (см., например, [1, XI.1]).

Лемма 1.7 [14, лемма 2.1]. Пусть \mathfrak{S}_{σ} – класс всех σ -разрешимых групп. Тогда \mathfrak{S}_{σ} является наследственной фиттинговой *формацией*.

Лемма 1.8 [15, теорема 3.18]. Класс \mathfrak{N}_σ всех σ -нильпотентных групп является наследственным классом Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ – некоторые непустые классы групп, $t \geq 2$. Тогда класс групп $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \dots \times \mathfrak{F}_t$, состоящий из всех групп

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t,$$

где $G_i \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, называют прямым произведением (см. [18, определение 17.6]) классов $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ для всех $i \neq j$ и \mathfrak{F}_i – классы Фиттинга, то $\times_{i=1}^t \mathfrak{F}_i$ является классом Фиттинга [1, пример XI. (1.6)].

Лемма 1.9 [10]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_n$, где $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, $\cup_{i=1}^n \pi(\mathfrak{F}_i) = \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i^2$ – непустая насыщенная формация Фиттинга для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда каждая конечная группа обладает \mathfrak{F} -инъектором.

Лемма 1.10 [9, теорема 1]. Пусть

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_t,$$

где все \mathfrak{F}_i являются непустыми классами Фиттинга и $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть G – такая группа, что $C_G(G_\mathfrak{F}) \leq G_\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}_i = \times_{j \neq i} \mathfrak{F}_j$ и $C_i = C_G(G_{\mathfrak{H}_i})$. Для каждого i , $1 \leq i \leq t$ выберем \mathfrak{F}_i -подгруппу V_i в C_i , содержащую $G_{\mathfrak{F}_i}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $V_i \setminus V_j = 1$ для всех $i \neq j$;
- 2) $V_1 V_2 \dots V_t = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_t$ – \mathfrak{F} -подгруппа, содержащая $G_\mathfrak{F}$;
- 3) если V_i \mathfrak{F}_i -максимальна в C_i для любого i , то $V_1 V_2 \dots V_t$ \mathfrak{F} -максимальна в G ;
- 4) если для каждого i подгруппа V_i является \mathfrak{F}_i -инъектором в C_i , то $V_1 V_2 \dots V_t$ является \mathfrak{F} -инъектором в G ;
- 5) если S – \mathfrak{F} -инъектор группы G , то $S_{\mathfrak{F}_i}$ – \mathfrak{F}_i -инъектор в C_i для любого i ;
- 6) если для каждого i подгруппа V_i сопряжена в C_i с некоторой подгруппой U_i из C_i , то $U_1 U_2 \dots U_t$ является подгруппой, сопряженной с $V_1 V_2 \dots V_t$ в G .

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Натуральное число n называется Π -числом, если

$$\pi(n) \subseteq \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i.$$

Подгруппа H группы G называется Π -подгруппой G , если $|H|$ является Π -числом. Если $|H|$ – Π -число и индекс $|G:H|$ – Π' -число, то H называют холловой Π -подгруппой G [14].

Теорема Скибы [14, теорема В]. Группа G σ -разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\Pi \subseteq \sigma$ группа G содержит холлову Π -подгруппу E и каждая Π -подгруппа G содержится в некотором сопряжении подгруппы E .

Лемма 1.11 [19, теорема В (b)]. Если \mathfrak{F} – непустой неединичный класс Фиттинга и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то класс всех \mathfrak{F} -скованных групп является классом Фиттинга.

2 σ -Класс Хартли и его локальные задания

Пусть σ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} . Всякое отображение вида $h: \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называется σ -функцией Хартли или просто H_σ -функцией [20]. Если H – H_σ -функция, то символом $Supp(h)$ обозначают носитель h , т. е. множество всех $\sigma_i \in \sigma$ таких, что $h(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Следуя [20], пусть $LH_\sigma(h) = (G: G=1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G))$, где \mathfrak{E}_{σ_i} и \mathfrak{E}'_{σ_i} – классы всех σ_i -групп и всех σ'_i -групп соответственно.

Определение. Класс Фиттинга \mathfrak{H} назовем σ -классом Хартли, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ -функции h . В частности, если

$$\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\},$$

то \mathfrak{H} называют классом Хартли [3].

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ – σ -класс Хартли, определяемый H_σ -функцией h , и $\Pi = Supp(h)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$;
- 2) $G \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;
- 3) $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}'_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i})$.

Доказательство. 1. Если $\sigma_i \in \Pi$, то $(1) \in h(\sigma_i)$ и для любой σ_i -группы G такой, что $G \neq 1$ имеем $\sigma(G) = \{\sigma_i\}$. Поскольку $G \in \mathfrak{E}'_{\sigma_i}$, по утверждению 1) леммы 1.3 из $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} = 1$ следует $G^{\mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} = 1$. Тогда $G \in \mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и по лемме 1.1

$$G \in (1) \mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i) \mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$$

для любого $\sigma_i \in \Pi$. По определению произведения классов Фиттинга $G/G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и поэтому $G^{\mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$. Ввиду определения $h(\sigma_i)$ -радикала, $G^{\mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$ и $G \in \mathfrak{H}$. Значит, $\Pi \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$.

Если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, то для некоторой группы $G \in \mathfrak{H}$ имеем $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $G^{\mathfrak{E}'_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Значит,

$\sigma_i \in \Pi$ и $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \Pi$. Таким образом, $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$.

2. Если $\sigma_i \in \sigma(G)$ и G – \mathfrak{H} -группа, то $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Поскольку $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$ и произведение $\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – формация,

$$(G / G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}}) / (G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_i)}^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}}) \cong G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Следовательно, $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Обратно, если для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$, то $G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Тогда $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$ и, следовательно, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Значит, $G \in \mathfrak{H}$.

3. Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $|G|$ – $\sigma(\mathfrak{H})$ -число. Ввиду утверждения 1) $\sigma(\mathfrak{H}) = \Pi$ и поэтому $|G|$ – Π -число, то есть G – Π -группа. Следовательно, $G \in \mathfrak{E}_{\Pi}$. Кроме того, из $G \in \mathfrak{H}$ по утверждению 2) следует $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если $\sigma \in \Pi \setminus \sigma(G)$, то

$$G \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Таким образом, $G \in \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i})$ и

$$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}).$$

Докажем обратное включение. Действительно, если $G \in \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i})$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, по утверждению 2) леммы $G \in \mathfrak{H}$ и

$$\mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) \subseteq \mathfrak{H}. \quad \square$$

Многие известные классы групп являются σ -классами Хартли, что подтверждают следующие

Примеры 2.2. 1. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma}$ – класс всех σ -нильпотентных групп, в частности, всех нильпотентных групп, h – H_{σ} -функция такая, что $h(\sigma_i) = (1)$ – класс единичных групп для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда

$$\begin{aligned} LH_{\sigma}(h) &= \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} (1) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} = \\ &= (1) (\bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{N}_{\sigma}. \end{aligned}$$

2. Пусть \mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{H} = \mathfrak{X} \mathfrak{N}_{\sigma}$, h – H_{σ} -функция такая, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда

$$LH_{\sigma}(h) = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{X} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{X} (\bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \mathfrak{X} \mathfrak{N}_{\sigma}.$$

3. Напомним, что через \mathfrak{N}_{σ}^k обозначают произведение $\mathfrak{N}_{\sigma} \dots \mathfrak{N}_{\sigma}$, состоящей из k сомножителей \mathfrak{N}_{σ} , где $k \in \mathbb{N}$; \mathfrak{N}_{σ}^0 является классом групп порядка 1 по определению. Наименьшее n такое, что $G \in \mathfrak{N}_{\sigma}^n$ называется σ -нильпотентной длиной группы G [21, с. 959].

Если $k \in \mathbb{N}$, то \mathfrak{N}_{σ}^k – класс всех групп σ -нильпотентной длины не превосходящей k . Пусть $k \geq 1$ и H_{σ} -функция h такая, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{N}_{\sigma}^{k-1}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда с учетом примера (2) получаем, что $LH_{\sigma}(h) = \mathfrak{N}_{\sigma}^k$ является σ -классом Хартли.

4. Пусть $\Pi \subseteq \sigma$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_{\Pi}$ и h – H_{σ} -функция такая, что

$$h(\sigma_i) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \sigma_i \in \Pi', \\ \mathfrak{E}_{\Pi}, & \text{если } \sigma_i \in \Pi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } LH_{\sigma}(h) &= \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{E}_{\Pi} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \\ &= \mathfrak{E}_{\Pi} \cap \mathfrak{E}_{\Pi} (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \mathfrak{E}_{\Pi}. \end{aligned}$$

Следуя [20], [22], произведем классификацию H_{σ} -функций σ -класса Хартли.

Пусть h – H_{σ} -функция σ -класса Хартли \mathfrak{H} . Тогда h назовем:

(1) *приведенной*, если $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $i \in I$;

(2) *устойчивой* [22], если $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j) \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ для всех $i \neq j$;

(3) *устойчивой приведенной*, если h является одновременно устойчивой и приведенной H_{σ} -функцией.

Лемма 2.3. Каждый σ -класс Хартли \mathfrak{H} определяется приведенной H_{σ} -функцией.

Доказательство. Поскольку \mathfrak{H} – σ -класс Хартли, определяемый H_{σ} -функцией h , по утверждению 3) леммы 2.1

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}),$$

где $\Pi = \text{Supp}(h)$. Определим H_{σ} -функцию φ такую, что $\varphi(\sigma_i) = h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$ для всех $i \in I$. Очевидно, $\varphi(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. По лемме 1.2 $\varphi(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $LH_{\sigma}(\varphi) \subseteq \mathfrak{H}$.

Обратно, пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда по утверждению 2) леммы 2.1 $G \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. По определению произведения классов Фиттинга $G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Так как $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G$, то $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{H}$. Получаем $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H} = \varphi(\sigma_i)$. Значит, $G \in \varphi(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и

$$G \in \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \varphi(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}) = LH_{\sigma}(\varphi).$$

Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq LH_{\sigma}(\varphi)$ и $\mathfrak{H} = LH_{\sigma}(\varphi)$. \square

Напомним, что если \mathfrak{X} – некоторый класс групп, то символом $Fit \mathfrak{X}$ будем обозначать класс Фиттинга, порожденный \mathfrak{X} , т. е. пересечение всех классов Фиттинга, содержащих \mathfrak{X} .

Лемма 2.4. *Каждый σ -класс Хартли \mathfrak{H} определяется устойчивой приведенной H_σ -функцией.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{H} – σ -класс Хартли. По лемме 2.3 $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h_1)$ для некоторой приведенной H_σ -функции h_1 . Пусть $\Pi = \text{Supp}(h)$. Определим класс групп следующим образом:

$$\psi(\sigma_i) = (G : G \cong H^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \text{ для некоторой группы } H \in h_1(\sigma_i))$$

для всех $i \in I$.

Пусть группа $X \in \psi(\sigma_i)$. Тогда $X \cong Y^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ для некоторой группы $Y \in h_1(\sigma_i)$. Ввиду замкнутости классов Фиттинга относительно взятия нормальных подгрупп, $Y^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h_1(\sigma_i)$. Значит, $X \in h_1(\sigma_i)$ и $\psi(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_i)$ для всех $i \in I$. Следовательно, по лемме 1.2 $\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$.

Если $Y_1 \in h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$, то $Y_1 / (Y_1)_{h_1(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $(Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq (Y_1)_{h_1(\sigma_i)}$. Следовательно, $(Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h_1(\sigma_i)$.

Поскольку $((Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}})^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} = (Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$, имеем $(Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in \psi(\sigma_i)$. Значит, по определению произведения классов групп $Y_1 \in \psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Таким образом, справедливо равенство

$$\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} = h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}. \quad (2.1)$$

Пусть h – H_σ -функция такая, что $h(\sigma_i) = \text{Fit}(\psi(\sigma_i))$ для каждого $i \in I$. Докажем, что $LH_\sigma(h) = \mathfrak{H}$. Поскольку $\psi(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_i)$, имеем

$$h(\sigma_i) = \text{Fit}(\psi(\sigma_i)) \subseteq \text{Fit}(h_1(\sigma_i)) = h_1(\sigma_i).$$

Следовательно, по лемме 1.2

$$h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$$

для всех $i \in I$ и поэтому $LH_\sigma(h) \subseteq \mathfrak{H}$.

Докажем обратное включение. Ввиду равенства (2.1)

$$\text{Fit}(h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}) = h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \text{Fit}(\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}).$$

Так как $\psi(\sigma_i) \subseteq \text{Fit}(\psi(\sigma_i))$, то по лемме 1.2

$$\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \text{Fit}(\psi(\sigma_i))\mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} &= \text{Fit}(\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}) \subseteq \\ &\subseteq \text{Fit}(\psi(\sigma_i))\mathfrak{E}_{\sigma_i} = h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда по лемме 1.2 $h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$.

Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq LH_\sigma(h)$ и $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$.

Так как $h(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и h_1 является приведенной H_σ -функцией \mathfrak{H} , то $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$ и h – приведенная H_σ -функция.

Покажем, что для любой H_σ -функции h справедливо включение $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$ для

всех $i \neq j$. Пусть группа $L \in h_1(\sigma_i)$ и $i \neq j$. Поскольку $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$, имеем $\mathfrak{E}_{\sigma_j} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Ввиду утверждения 1) леммы 1.3 $L^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq L^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}}$. Так как h_1 – приведенная H_σ -функция σ -класса Хартли \mathfrak{H} и $L \in h_1(\sigma_i)$, то $L \in \mathfrak{H}$. По условию 2) леммы 2.1 $L \in h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Значит, $L / L_{h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно, $L^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}} \leq L_{h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}}$. Тогда $L^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}} \in h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$.

Таким образом, мы получаем, что для всех групп $G \in h_1(\sigma_i)$ \mathfrak{E}_{σ_i} -корадикал G содержится в $h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно, если $R \in \psi(\sigma_i)$, то $R \cong V^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ для некоторой группы $V \in h_1(\sigma_i)$ и $R \in h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Значит, $\psi(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} h(\sigma_i) &= \text{Fit}(\psi(\sigma_i)) \subseteq \text{Fit}(h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}) = \\ &= h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j} = h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j} \end{aligned}$$

для всех $i \neq j$. □

3 h_σ -Радикалы для σ -класса Хартли

Пусть G – группа и h – H_σ -функция с носителем Π . Подгруппу $G_h = \prod_{\sigma_i \in \Pi} G_{h(\sigma_i)}$ назовем

h_σ -радикалом G .

Свойства h_σ -радикала для σ -класса Хартли \mathfrak{H} вида $\mathfrak{H} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ с устойчивой H_σ -функцией h описывают следующие три леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{H} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -класс Хартли с устойчивой приведенной H_σ -функцией h . Если H – подгруппа группы G такая, что $H / G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$, то $H \in \mathfrak{H}$.*

Доказательство. По условию подгруппа G_h нормальна в H . Следовательно, по лемме 1.4

$$G_{h(\sigma_j)} = (G_h)_{h(\sigma_j)} = G_h \cap H_{h(\sigma_j)} \leq H_{h(\sigma_j)}$$

для всех $\sigma_j \in \sigma$. Мы вначале покажем, что $G_h / (G_h)_{h(\sigma_j)}$ – σ'_j -группа для всех $\sigma_j \in \sigma$. Заметим,

$$\begin{aligned} G_{h(\sigma_j)}G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_j)} &\cong G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_i)} \cap G_{h(\sigma_j)} = \\ &= G_{h(\sigma_j)} / (G_{h(\sigma_i)})_{h(\sigma_j)} \end{aligned}$$

для всех $i \neq j$. По лемме 2.4 $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$.

Значит, $G_{h(\sigma_i)} \in h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно,

$$G_{h(\sigma_i)} / (G_{h(\sigma_i)})_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j} \text{ и } G_{h(\sigma_i)}G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}$$

для всех $i \neq j$. Тогда $G_h / G_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ и ввиду изоморфизмов

$$H_{h(\sigma_j)}G_h / H_{h(\sigma_j)} \cong G_h / G_h \cap H_{h(\sigma_j)} \cong$$

$\cong (G_h / G_{h(\sigma_j)}) / ((G_h \cap H_{h(\sigma_j)}) / G_{h(\sigma_j)})$,
 заключаем, что $H_{h(\sigma_j)} G_h / H_{h(\sigma_j)}$ – σ'_j -группа.

Поскольку группа H / G_h σ -нильпотентна,

$$H / G_h \in \cap_{\sigma_j \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}.$$

Следовательно, ввиду изоморфизма

$$H / H_{h(\sigma_j)} G_h \cong (H / G_h) / (H_{h(\sigma_j)} G_h / G_h),$$

$$H / H_{h(\sigma_j)} G_h \in \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$$

для всех $\sigma_j \in \sigma$. Поскольку $G_h \leq H_{h(\sigma_j)}$ по условию, $H_{h(\sigma_j)} G_h = H_{h(\sigma_j)}$ и $H / H_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно, $H \in \cap_{\sigma_j \in \sigma} h(\sigma_j) \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ и $H \in \mathfrak{H}$. \square

Лемма 3.2. Пусть $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -класс Хартли с устойчивой приведенной H_σ -функцией h . Тогда для любой σ -разрешимой группы G справедливо равенство

$$G_{\mathfrak{H}} / G_h = F_\sigma(G / G_h).$$

Доказательство. Пусть $F_\sigma(G / G_h) = R / G_h$.

Поскольку H_σ -функция h является приведенной для σ -класса Хартли \mathfrak{H} , то

$$(G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = G_{\mathfrak{H}} \cap G_{h(\sigma_i)} = G_{h(\sigma_i)}.$$

Ввиду $G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H} = \cap_{i \in I} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$, следует $G_{\mathfrak{H}} \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Значит,

$$G_{\mathfrak{H}} / (G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Так как класс $\mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – формация, то

$$(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\sigma_i)}) / (G_h / G_{h(\sigma_i)}) \cong G_{\mathfrak{H}} / G_h$$

и $G_{\mathfrak{H}} / G_h \in \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Следовательно, $G_{\mathfrak{H}} / G_h$ – σ -нильпотентная подгруппа группы G / G_h . Таким образом, $G_{\mathfrak{H}} / G_h \leq F_\sigma(G / G_h)$ и $G_{\mathfrak{H}} \leq R$.

Докажем обратное включение. Так как подгруппа R / G_h σ -нильпотентна, то по лемме 3.1 $R \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $R \leq G_{\mathfrak{H}}$ и

$$F_\sigma(G / G_h) = G_{\mathfrak{H}} / G_h. \quad \square$$

Лемма 3.3. Пусть $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -класс Хартли с устойчивой приведенной H_σ -функцией h и G – σ -разрешимая группа. Если H – \mathfrak{H} -подгруппа группы G такова, что $G_{\mathfrak{H}} \leq H \leq G$, то $H / G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$.

Доказательство. Так как $G_{\mathfrak{H}} \trianglelefteq H$ и H_σ -функция h является приведенной, то по лемме 1.4 $G_{h(\sigma_i)} = (G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = H_{h(\sigma_i)} \cap G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $[H_{h(\sigma_i)}, G_{\mathfrak{H}}] \leq H_{h(\sigma_i)} \cap G_{\mathfrak{H}} = G_{h(\sigma_i)}$ и

$$H_{h(\sigma_i)} \leq C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\sigma_i)}) \leq C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_h).$$

Поскольку по лемме 1.7 группа G / G_h σ -разрешима, то из леммы 1.6 следует, что

G / G_h \mathfrak{N}_σ -скована. Кроме того, по лемме 3.2 $G_{\mathfrak{H}} / G_h = F_\sigma(G / G_h)$. Следовательно,

$$C_{G/G_h}(G_{\mathfrak{H}} / G_h) \leq G_{\mathfrak{H}} / G_h$$

и поэтому $C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_h) \leq G_{\mathfrak{H}}$. Тогда $H_{h(\sigma_i)} \leq G_{\mathfrak{H}}$,

что влечет $G_{h(\sigma_i)} = (G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = H_{h(\sigma_i)} \cap G_{\mathfrak{H}} = H_{h(\sigma_i)}$

для всех $\sigma_i \in \sigma$ и поэтому $G_h = H_h$. Следовательно,

$H / G_h = H / H_h \in \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для каждого

$\sigma_i \in \sigma$ и H / G_h – σ -нильпотентная группа. \square

Ввиду лемм 3.1 и 3.3 получаем

Следствие 3.4. Пусть h – устойчивая приведенная H_σ -функция σ -класса Хартли

$$\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i},$$

G – σ -разрешимая группа и ее подгруппа H такова, что $G_{\mathfrak{H}} \leq H \leq G$. Тогда $H \in \mathfrak{H}$ в том и только том случае, если H / G_h – σ -нильпотентная группа.

4 О существовании и сопряженности \mathfrak{H} -инъекторов в σ -разрешимой группе

В данном разделе мы решаем задачу существования и сопряженности инъекторов в σ -разрешимых группах для σ -классов Хартли. Ключевым моментом в реализации такой задачи являются результаты о существовании и сопряженности инъекторов, полученные Л.А. Шеметковым в работах [9] и [10] (см. леммы 1.9 и 1.10). Возможность применения указанных результатов для σ -нильпотентных инъекторов представляют следующие две леммы.

Лемма 4.1. В любой группе существуют σ -нильпотентные инъекторы.

Доказательство. Пусть σ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} . Заметим, что группа G σ -нильпотентна, если $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t$ для некоторых σ -примарных групп. Тогда класс всех σ -нильпотентных групп представим в виде

$$\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{E}_{\sigma_1} \times \mathfrak{E}_{\sigma_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{\sigma_t},$$

где \mathfrak{E}_{σ_i} – класс Фиттинга всех σ_i -групп для каждого $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Кроме того, $\mathfrak{E}_{\sigma_i} = (\mathfrak{E}_{\sigma_i})^2$ и \mathfrak{E}_{σ_i} – насыщенная фиттингова формация. Итак, для класса Фиттинга \mathfrak{N}_σ все условия леммы 1.9 выполняются и поэтому в каждой группе существуют σ -нильпотентные инъекторы. \square

Лемма 4.2. Пусть G – σ -разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) в G существуют σ -нильпотентные инъекторы и любые два из них сопряжены;

2) подгруппа V группы G является σ -нильпотентным инъектором G тогда и только тогда, когда $F_\sigma(G) \leq V$ и V – \mathfrak{N}_σ -максимальная подгруппа группы G .

Доказательство. 1) Существование σ -нильпотентных инъекторов группы G следует по лемме 4.1. Для доказательства их сопряженности проверим выполнимость условий леммы 1.10. Заметим, что класс \mathfrak{N}_σ всех σ -нильпотентных групп является классом Фиттинга по лемме 1.8 и прямым произведением классов Фиттинга

$$\mathfrak{E}_{\sigma_1}, \mathfrak{E}_{\sigma_2}, \dots, \mathfrak{E}_{\sigma_t},$$

где все \mathfrak{E}_{σ_i} – непустые классы Фиттинга, и $\pi(\sigma_i) \cap \pi(\sigma_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Кроме того, поскольку группа G σ -разрешима, по лемме 1.6 $C_G(F_\sigma(G)) \leq F_\sigma(G)$. Теперь будем использовать обозначения, введенные в лемме 1.10. Пусть $\mathfrak{H}_i = \times_{j \neq i} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ и $C_i = C_G(G_{\mathfrak{H}_i})$. Поскольку группа G σ -разрешима, то по лемме 1.7 ее подгруппа C_i является σ -разрешимой. Следовательно, по теореме Скибы для каждого $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ в группе C_i существует холлова σ_i -подгруппа V_i , которая является \mathfrak{E}_{σ_i} -инъектором в C_i . Тогда по утверждению 4) леммы 1.10 подгруппа

$$H = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_t$$

является σ -нильпотентным инъектором группы G и по утверждению 5) леммы 1.10 каждый σ -нильпотентный инъектор строится таким образом. Сопряженность σ -нильпотентных инъекторов в группе G следует по утверждению 6) леммы 1.10, поскольку по теореме Скибы любые два σ -нильпотентных инъектора сопряжены в C_i . Утверждение 1) леммы доказано.

2) Пусть M – максимальная из σ -нильпотентных подгрупп группы G , содержащая ее σ -нильпотентный радикал $F_\sigma(G)$, и $U_i = U_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$. По теореме Скибы каждая σ_i -подгруппа содержится в некоторой холловой σ_i -подгруппе, т. е. для любого $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ существует такой элемент $x_i \in C_i$, что $U_i^{x_i} \leq V_i$. Тогда по утверждению 6) леммы 1.10 $U_1^{x_1} U_2^{x_2} \dots U_t^{x_t}$ является \mathfrak{N}_σ -подгруппой, сопряженной с $M = U_1 U_2 \dots U_t$. Следовательно, $M^x \subseteq H$ для некоторого $x \in G$. Но H – σ -нильпотентный инъектор и поэтому по утверждению 3) леммы 1.5 H – максимальная из σ -нильпотентных подгрупп G . Следовательно, $M^x = H$. \square

Напомним, что если h – некоторая H_σ -функция, то подгруппа $G_h = \prod_{\sigma_i \in \sigma} G_{h(\sigma_i)}$ – h_σ -радикал группы G .

Теорема 4.3. Пусть σ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} и $\mathfrak{H} = \bigcap_{i \in I} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ -класс Хартли с устойчивой приведенной H_σ -функцией

h . Тогда для любой σ -разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:

1) подгруппа V группы G является \mathfrak{H} -инъектором G в том и только том случае, если V / G_h является σ -нильпотентным инъектором G / G_h ;

2) в G существуют \mathfrak{H} -инъекторы и любые два из них сопряжены;

3) множество всех \mathfrak{H} -инъекторов группы G – это в точности множество всех \mathfrak{H} -максимальных подгрупп G , содержащих \mathfrak{H} -радикал G .

Доказательство. 1. Поскольку группа G σ -разрешима, то по лемме 1.7 фактор G / G_h σ -разрешим. Следовательно, в G / G_h по утверждению 1) леммы 3.2 существует σ -нильпотентный инъектор V / G_h . Докажем, что подгруппа V является \mathfrak{H} -инъектором группы G . Для этого будем использовать индукцию по порядку группы G . Если G – единичная группа, то утверждение очевидно. Пусть $G \neq 1$ – контрпример минимального порядка и M – произвольная максимальная подгруппа G . Пусть $M_h = \prod_{\sigma_i \in \sigma} M_{h(\sigma_i)}$ –

h_σ -радикал M . Покажем вначале, что $M_h = M \cap G_h$. Для этого установим, что $G_h / G_{h(\sigma_j)}$ является σ'_j -группой для всех $\sigma_j \in \sigma$. Так как по условию h – устойчивая приведенная H_σ -функция σ -класса Хартли \mathfrak{H} , то по лемме 2.4 $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j) \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ для всех $i \neq j$. Тогда ввиду изоморфизма

$$\begin{aligned} G_{h(\sigma_j)} G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_j)} &\cong G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_i)} \cap G_{h(\sigma_j)} = \\ &= G_{h(\sigma_i)} / (G_{h(\sigma_i)})_{h(\sigma_j)} \end{aligned}$$

следует, что $G_{h(\sigma_j)} G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_j)}$ является σ'_j -группой. Следовательно, по определению класса Фиттинга $G_h / G_{h(\sigma_j)}$ также является σ'_j -группой. Далее, используя лемму 1.4 и изоморфизм

$$\begin{aligned} (G_h \cap M) G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_j)} &\cong \\ &\cong (G_h \cap M) / (G_h \cap M) \cap G_{h(\sigma_j)} = \\ &= (G_h \cap M) / G_{h(\sigma_j)} \cap M = (G_h \cap M) / M_{h(\sigma_j)}, \end{aligned}$$

получаем, что $(G_h \cap M) / M_{h(\sigma_j)}$ является σ'_j -группой для любого $\sigma_j \in \sigma$. Поскольку

$$(G_h \cap M) / M_{h(\sigma_j)} / M_h / M_{h(\sigma_j)} \cong (G_h \cap M) / M_h,$$

то $(G_h \cap M) / M_h \in \bigcap_{\sigma_j \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma'_j}$. Кроме того, очевидно $\bigcap_{\sigma_j \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma'_j} = \mathfrak{E}_{\bigcap_{\sigma_j \in \sigma} \sigma'_j} = \mathfrak{E}_{(\cup_{\sigma_j \in \sigma} \sigma_j)'} = (1)$.

Следовательно, справедливо равенство

$$G_h \cap M = M_h.$$

Рассмотрим два возможных случая. Пусть $G_h \leq M$. Тогда $G_h = M_h$. Поскольку G – σ -разрешимая группа, по лемме 1.7 фактор G / G_h

σ -разрешим. Значит, по лемме 1.6 группа G/G_h \mathfrak{N}_σ -скована. Поскольку класс \mathfrak{N} всех нильпотентных групп является подклассом Фиттинга \mathfrak{N}_σ всех σ -нильпотентных групп, то по лемме 1.11 класс всех \mathfrak{N}_σ -скованных групп является классом Фиттинга. Тогда из

$$M/M_h = M/G_h \leq G/G_h$$

следует, что группа M/M_h является \mathfrak{N}_σ -скованной. Поскольку V/G_h – σ -нильпотентный инъектор G/G_h , то по утверждению 1) леммы 1.5 подгруппа $(V \cap M)/G_h$ является σ -нильпотентным инъектором группы M/G_h . Тогда ввиду равенства $G_h = M_h$, Подгруппа $(V \cap M)/M_h$ – σ -нильпотентный инъектор группы M/M_h . Следовательно, по индукции $V \cap M$ является \mathfrak{H} -инъектором M . Теперь, чтобы показать, что подгруппа V является \mathfrak{H} -инъектором G , достаточно выяснить, учитывая утверждение 3) леммы 1.5, \mathfrak{H} -максимальность V в G . Так как $V/G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$, то по лемме 2.5 V является \mathfrak{H} -подгруппой G . Предположим, $V < V_1$, где V_1 – \mathfrak{H} -максимальная подгруппа G . Тогда

$$V \cap M = V_1 \cap M,$$

так как в противном случае мы получили бы противоречие с тем, что подгруппа $V \cap M$ \mathfrak{H} -максимальна в M . Итак, в данном случае подгруппа V_1 – \mathfrak{H} -максимальна в G и $V_1 \cap M$ – \mathfrak{H} -инъектор группы M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G . Следовательно, по утверждению 3) леммы 1.5 V_1 – \mathfrak{H} -инъектор группы G . Тогда $G_{\mathfrak{H}} \leq V_1$ и по следствию 3.4 V_1/G_h – σ -нильпотентная подгруппа G/G_h . Ввиду утверждения 2) леммы 1.5 получаем противоречие с тем, что подгруппа V/G_h – \mathfrak{N}_σ -максимальна в G/G_h . Следовательно, $V/G_h = V_1/G_h$ и $V = V_1$.

Остается принять случай, когда $G_h \not\leq M$. В этом случае ввиду максимальной нормальной подгруппы M , $G = G_h M$. Следовательно, по лемме 1.7 ввиду σ -разрешимости группы G/G_h и изоморфизма $G_h M/G_h \cong M/M \cap G_h = M/M_h$, по лемме 1.6 подгруппа M/M_h \mathfrak{N}_σ -скована. Учитывая изоморфизм $G/G_h \cong M/M_h$ по утверждению 4) леммы 1.5 следует, что $(V \cap M)/M_h$ является σ -нильпотентным инъектором группы M/M_h . Теперь, применяя индукцию, получаем, что $V \cap M$ – \mathfrak{H} -инъектор группы M . По лемме 3.1 V – \mathfrak{H} -подгруппа G . Если $V < F_1$, где F_1 –

\mathfrak{H} -максимальная подгруппа G , то $V \cap M = F_1 \cap M$.

Так как $G_{\mathfrak{H}} \leq V$, то $VM = G$. Следовательно,

$$F_1 = F_1 \cap VM = V(F_1 \cap M) = V(V \cap M) = V$$

и V является \mathfrak{H} -максимальной подгруппой G . Значит, ввиду произвольности выбора максимальной нормальной подгруппы M группы G , по утверждению 3) леммы 1.5 V – \mathfrak{H} -инъектор G .

Докажем обратное утверждение. Пусть V – \mathfrak{H} -инъектор G . Покажем, что V/G_h – \mathfrak{N}_σ -инъектор G/G_h . По утверждению 2) леммы 1.5 $G_{\mathfrak{H}} \leq V$ и подгруппа V \mathfrak{H} -максимальна в G . Следовательно, по лемме 3.3 V/G_h – σ -нильпотентная группа. Покажем, что подгруппа V/G_h \mathfrak{N}_σ -максимальна в G/G_h . Предположим, что $V/G_h < V_1/G_h$ и V_1/G_h \mathfrak{N}_σ -максимальна в G/G_h . Поскольку $V_1/G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$ и $V_1 \geq G_{\mathfrak{H}}$ по следствию 3.4 $V_1 \in \mathfrak{H}$. Но подгруппа V \mathfrak{H} -максимальна в G . Следовательно, $V = V_1$ и V/G_h – \mathfrak{N}_σ -максимальная подгруппа в G/G_h .

2) Существование \mathfrak{H} -инъекторов следует из утверждения 1) теоремы ввиду существования σ -нильпотентных инъекторов в группе G/G_h . Докажем сопряженность \mathfrak{H} -инъекторов группы G . Пусть F/G_h и V/G_h – σ -нильпотентные инъекторы G/G_h . Тогда по утверждению 1) леммы 4.2 подгруппы F/G_h и V/G_h сопряжены в G/G_h . Следовательно, F и V сопряжены в G .

3) Если V – \mathfrak{H} -инъектор группы G , то по утверждению 2) леммы 1.5 V \mathfrak{H} -максимален в G и $V \geq G_{\mathfrak{H}}$. Обратно, пусть V – \mathfrak{H} -максимальная подгруппа G , содержащая \mathfrak{H} -радикал $G_{\mathfrak{H}}$. Так как h – приведенная H_σ -функция σ -класса Хартли \mathfrak{H} , то $G_h \leq G_{\mathfrak{H}}$ и, следовательно, $G_h \leq V$. Тогда по лемме 3.3 группа V/G_h σ -нильпотентна. Ввиду \mathfrak{H} -максимальности V в G , V/G_h – \mathfrak{N}_σ -максимальна в G/G_h . По лемме 3.2

$$F_\sigma(G/G_h) \leq V/G_h.$$

Следовательно, по утверждению 2) леммы 4.2 V/G_h – \mathfrak{N}_σ -инъектор G/G_h . Теперь, используя утверждение 1) теоремы, мы получаем, что V – \mathfrak{H} -инъектор G . \square

5 Приложения

Приведем применение теоремы 4.3 для описания инъекторов в некоторых известных классах групп.

Следствие 5.1. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_\sigma$, где \mathfrak{X} – любой непустой класс Фиттинга и \mathfrak{N}_σ – класс всех σ -нильпотентных групп. Тогда подгруппа V

σ -разрешимой группы G является \mathfrak{H} -инъектором G в том и только том случае, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – σ -нильпотентный инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из утверждения 1) теоремы 4.3, поскольку ввиду примера 2.2(2) \mathfrak{H} является σ -классом Хартли, который определяется устойчивой приведенной H_{σ} -функцией h такой, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ для каждого $\sigma_i \in \sigma$.

Группа G называется *мета- σ -нильпотентной*, если G содержит нормальную подгруппу N такую, что N и G/N σ -нильпотентны.

В случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_{\sigma}$, получаем

Следствие 5.2. Подгруппа V σ -разрешимой группы G является мета- σ -нильпотентным инъектором G в том и только том случае, если $V/F_{\sigma}(G)$ – σ -нильпотентный инъектор $G/F_{\sigma}(G)$.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ – минимальное разбиение множества \mathbb{P} , получаем описание \mathfrak{XN} -инъекторов, полученное Хартли [6].

Следствие 5.3 [6, с. 206]. Пусть \mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга, \mathfrak{N} – класс всех nilпотентных групп и $\mathfrak{H} = \mathfrak{XN}$. Тогда подгруппа V разрешимой группы G является \mathfrak{H} -инъектором G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – nilпотентный инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Если $\sigma = \sigma^1$ и \mathfrak{H} – класс Хартли с H -функцией h такой, что $h(p) = (1)$ для всех $p \in \mathbb{P}$ ((1) – класс всех единичных групп), то из теоремы 4.3 вытекает результат Фишера [5], описывающий множество всех nilпотентных инъекторов. Его представляет

Следствие 5.4. Множество всех nilпотентных инъекторов разрешимой группы – это множество всех nilпотентных максимальных подгрупп этой группы, содержащих ее радикал Фиттинга.

Следствие 5.5. Пусть \mathfrak{N}_{σ}^k – класс Фиттинга всех групп σ -нильпотентной длины, не превышающей k ($k \geq 1$) и G – σ -разрешимая группа. Тогда множество всех \mathfrak{N}_{σ}^k -инъекторов G в точности совпадает с множеством всех подгрупп V из G таких, что подгруппа $V/G_{\mathfrak{N}_{\sigma}^{k-1}}$ является σ -нильпотентным инъектором группы $G/G_{\mathfrak{N}_{\sigma}^{k-1}}$.

Доказательство. Ввиду примера 2.3(3) \mathfrak{N}_{σ}^k является σ -классом Хартли с устойчивой приведенной H_{σ} -функцией h такой, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{N}_{\sigma}^{k-1}$ для всех $i \in I$. Так как G σ -разрешима, то по лемме 1.6 G/G_h является \mathfrak{N}_{σ} -скованной и утверждение следует из теоремы 4.3.

Заключение

В настоящей работе нами доказано существование и сопряженность \mathfrak{H} -инъекторов и найдена их характеристика в терминах радикалов для любой σ -разрешимой группы и σ -класса Хартли \mathfrak{H} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Sylow, M.L. Theoremes sur les groupes de substitutions / M.L. Sylow // Math. Ann. – 1872. – Vol. 5. – P. 584–594.
3. Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.
4. Fisher, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fisher, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.
5. Fisher, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fisher. – Habilitationsschreft, Universität Frankfurt am Mainz, 1966.
6. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
7. Bleszenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Hauptfaktoren einfach sind / D. Bleszenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – Vol. 56, № 3. – P. 516–532.
8. Шеметков, Л.А. О подгруппах π -разрешимых групп / Л.А. Шеметков; в кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 207–212.
9. Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1 (15). – С. 5–13.
10. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Izvestija Gomeľ'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebrы. – 2000. – № 3 (16). – P. 186–187.
11. Liu, Y.F. Description of \mathfrak{F} -injectors of finite soluble groups / Y.F. Liu, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 1. – P. 17–22.
12. Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.
13. Yang, N. On \mathcal{F} -injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Communications in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.
14. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.
15. Skiba, A.N. On σ -properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics,

Mathematics and Technics. – 2015. – № 3 (24). – P. 70–83.

16. Чжан Чи. О Σ_i^σ -замкнутых классах конечных групп / Чжан Чи, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716.

17. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

18. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978.

19. Iranzo, M.J. \mathfrak{F} -constraint with respect to a Fitting class / M.J. Iranzo, P. Monasor // Arch. Math. – 1986. – Vol. 46, № 5. – P. 205–210.

20. Guo, W. On σ -local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.

21. Zhang Chi. On n-multiply σ -local formations of finite groups / Zhang Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

22. Воробьев, Н.Т. Множества Хартли и инъекторы конечной группы / Н.Т. Воробьев, Т.Б. Караулова // Математические заметки. – 2019. – Vol. 105, № 2. – С. 214–227.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» и при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф21М-030).

Поступила в редакцию 28.01.2023.

Информация об авторах

Воробьев Николай Тимофеевич – д.ф.-м.н., профессор
Волкова Екатерина Дмитриевна – аспирантка

**О ЕДИНИЦАХ И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ
В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II**

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

**ON IDENTITIES AND THEIR GENERALIZATIONS
IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM. II**

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение единиц и их обобщений в полиадических группоидах специального вида.

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арный группоид, единица, подстановка.

Для цитирования: Гальмак, А.М. О единицах и их обобщениях в полиадических группоидах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 85–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_85. – EDN: TFEFBR

Abstract. The study on the identities and their generalizations in polyadic groupoids of special form is carried on.

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, identity, substitution.

For citation: Gal'mak, A.M. On identities and their generalizations in polyadic groupoids of special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 85–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_85 (in Russian). – EDN: TFEFBR

Введение

Данная статья, посвящённая изучению единиц и их обобщений в полиадических группоидах специального вида, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в новой статье.

4 Основные результаты

Отсутствие n -полуединиц в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. В следующей теореме указано условие, гарантирующее отсутствие n -полуединиц в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 4.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in S_k$ и некоторого $i = 1, \dots, s$ подстановка $\sigma^{i(n-1)}$ не является тождественной. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет n -полуединиц.

Доказательство. Так как $\sigma^{i(n-1)}$ – нетождественная подстановка, то

$$\sigma^{i(n-1)}(j) = t \neq j \tag{4.1}$$

для некоторого индекса $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Предположим, что $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ – n -полуединица в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и для любого $a \in A$ положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_1, \dots, a_{j-1} = e_{j-1}, a_j = a, a_{j+1} = e_{j+1}, \dots, a_k = e_k).$$

Так как \mathbf{e} – n -полуединица в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\mathbf{e} = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_i),$$

откуда, применив к правой части записанного равенства равенство (1, 2), получим

$$e_j = \eta(e_j e_{\sigma(j)} \dots e_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(e_{\sigma^{n-1}(j)} \dots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots e_{\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \tag{4.2}$$

Так как \mathbf{e} – n -полуединица в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1} \mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1}) = \mathbf{a},$$

откуда, введя обозначение

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1} \mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1}) = (v_1, \dots, v_k), \tag{4.3}$$

получим

$$v_j = a_j = a. \tag{4.4}$$

Применив к левой части равенства (4.3) равенство (1, 2), а также условие (4.1), получим

$$v_j = \eta(e_j e_{\sigma(j)} \dots e_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(e_{\sigma^{n-1}(j)} \dots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots e_{\sigma^{i(n-1)-1}(j)} \dots$$

$$\begin{aligned} & \eta(e_{\sigma^{j(n-1)+1}(j)} \dots e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)} e_{\sigma^{j(n-1)+1}(j)} \dots e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)} \\ & \quad \eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)-1}(j)} \dots e_{\sigma^{s(n-1)-1}(j)} \dots)) \dots) = \\ & = \eta(e_j e_{\sigma(j)} \dots e_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(e_{\sigma^{n-1}(j)} \dots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ & \dots \eta(e_{\sigma^{(i-1)(n-1)-1}(j)} \dots e_{\sigma^{j(n-1)-1}(j)} \eta(a_t e_{\sigma^{j(n-1)+1}(j)} \dots e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)} \\ & \quad \eta(e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)} \dots e_{\sigma^{(i+2)(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ & \dots \eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)-1}(j)} \dots e_{\sigma^{s(n-1)-1}(j)} \dots)) \dots)) = \\ & = \eta(e_j e_{\sigma(j)} \dots e_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(e_{\sigma^{n-1}(j)} \dots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ & \dots \eta(e_{\sigma^{(i-1)(n-1)-1}(j)} \dots e_{\sigma^{j(n-1)-1}(j)} \\ & \quad \eta(e_{\sigma^{j(n-1)}(j)} e_{\sigma^{j(n-1)+1}(j)} \dots e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)} \\ & \quad \eta(e_{\sigma^{(i+1)(n-1)-1}(j)} \dots e_{\sigma^{(i+2)(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ & \dots \eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)-1}(j)} \dots e_{\sigma^{s(n-1)-1}(j)} \dots)) \dots)) \dots), \end{aligned}$$

то есть

$$v_j = \eta(e_j e_{\sigma(j)} \dots e_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(e_{\sigma^{n-1}(j)} \dots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)-1}(j)} \dots e_{\sigma^{s(n-1)-1}(j)} \dots))),$$

откуда и из (4.4) следует

$$a = \eta(e_j e_{\sigma(j)} \dots e_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(e_{\sigma^{n-1}(j)} \dots e_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \eta(e_{\sigma^{(s-1)(n-1)-1}(j)} \dots e_{\sigma^{s(n-1)-1}(j)} \dots))).$$

Из полученного равенства и из (4.2) вытекает $a = e_j$ для любого a из A , что возможно не всегда, так как в A имеются элементы, отличные от e_j . □

Следующая теорема получается из теорем 4.1, если в ней положить $i = 1$.

Теорема 4.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет n -полуединиц.

Замечание 4.1. Теперь мы видим, что отсутствие 3-полуединиц в 7-арной группе $\langle A^3, \eta_{3, (123), 3} \rangle$ из примера 2.2 является следствием теоремы 4.2.

Замечание 4.2. В связи с теоремой 4.2 возникает естественный вопрос; возможно ли в случае тождественности подстановки σ^{n-1} наличие в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ n -полуединиц при отсутствии единиц. Пример 2.1 даёт положительный ответ на этот вопрос.

Замечание 4.3. Так как из нетождественности подстановки $\sigma^{i(n-1)}$ для некоторого $i = 1, \dots, s$ следует нетождественность подстановки σ^{n-1} , то теорему 4.1 можно рассматривать как следствия теоремы 4.2, то есть обе эти тео-

ремы являются равносильными утверждениями.

Так как из неравенства $\sigma^{i(n-1)} \neq \sigma^{(i-1)(n-1)}$ следует нетождественность подстановки σ^{n-1} (верно и обратное), то следующая теорема равносильна теоремам 4.1 и 4.2.

Теорема 4.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in S_k$ и некоторого $i = 1, \dots, s$ подстановки $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ и $\sigma^{i(n-1)}$ не совпадают. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет n -полуединиц.

Следующее следствие получается из теоремы 4.1, если в ней положить $i = s$.

Следствие 4.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка $\sigma^{s(n-1)}$ не является тождественной. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет n -полуединиц.

Согласно замечанию 4.1, следствие 4.1 можно рассматривать как следствие теоремы 4.2.

Если в каждой из теорем 4.1–4.3 и следствия 4.1 положить $s = 1$, то получим одно и то же

Следствие 4.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной. Тогда в n -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ нет n -полуединиц.

Отсутствие единиц в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Так как единицы l -арного группоида являются и его n -полуединицами, то из теорем 4.1–4.3 и следствия 4.1 вытекают следующие четыре следствия.

Следствие 4.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in S_k$ и некоторого $i = 1, \dots, s$ подстановка $\sigma^{i(n-1)}$ не является тождественной. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет единиц.

Следствие 4.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет единиц.

Следствие 4.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in S_k$ и некоторого $i = 1, \dots, s$ подстановки $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ и $\sigma^{i(n-1)}$ не совпадают. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет единиц.

Следствие 4.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка $\sigma^{s(n-1)}$ не является тождественной. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет единиц.

Из теоремы 4.2 при $n = 2$ вытекает теорема 9 из [2] об отсутствии единиц в l -арном группоиде $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Отсутствие m -полуединиц в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Предложение 2.2 позволяет для каждой из теорем 4.1–4.3 и следствия 4.1 сформулировать формально более общие результаты.

Теорема 4.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и некоторого $i = 1, \dots, s$ подстановка $\sigma^{i(n-1)}$ не является тождественной, $m-1$ делит $n-1$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет m -полуединиц, в частности единиц.

Теорема 4.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, $m-1$ делит $n-1$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет m -полуединиц, в частности единиц.

Теорема 4.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и некоторого $i = 1, \dots, s$ подстановки $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ и $\sigma^{i(n-1)}$ не совпадают, $m-1$ делит $n-1$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет m -полуединиц, в частности единиц.

Следствие 4.7. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородный n -арный группоид, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка $\sigma^{s(n-1)}$ не является тождественной, $m-1$ делит $n-1$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет m -полуединиц, в частности единиц.

Случай n -арной полугруппы (n -арной группы). Утверждения 1) и 2) из раздела 1 позволяют для каждой из теорем 4.1–4.6, а также следствий из них сформулировать их аналоги для полиадических полугрупп (полиадических групп). Ограничимся теоремами 4.1 и 4.2.

Теорема 4.7. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа (n -арная группа), для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка $\sigma^{s(n-1)}$ является тождественной, а для некоторого $i = 1, \dots, s-1$ подстановка $\sigma^{i(n-1)}$ не является тождественной. Тогда в l -арной полугруппе (l -арной группе) $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет n -полуединиц.

Теорема 4.8. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа (n -арная группа), для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка $\sigma^{s(n-1)}$ является тождественной, а подстановка σ^{n-1} не является тождественной. Тогда в l -арной полугруппе (l -арной группе) $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет n -полуединиц.

Отсутствие m -полуединиц в неассоциативных полиадических группоидах специального вида. В [3, теорема 3.2] доказано, что если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – подстановка из \mathbf{S}_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является полугассоциативной, а значит и ассоциативной. Это утверждение и теорема 4.4 при $i = s$ (следствие 4.7) позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 4.9. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа, обладающая левой

нейтральной последовательностью; для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{l-1} не является тождественной, $m-1$ делит $n-1$. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является l -арной полугруппой и в нём нет m -полуединиц, в частности единиц.

Следствие 4.8. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левой единицей, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{l-1} не является тождественной, $m-1$ делит $n-1$. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является l -арной полугруппой и в нём нет m -полуединиц, в частности единиц.

Так как полиадические группы обладают нейтральными последовательностями, то теорема 4.9 соответствует следующий результат.

Теорема 4.10. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная группа, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{l-1} не является тождественной, $m-1$ делит $n-1$. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является l -арной полугруппой и в нём нет m -полуединиц, в частности единиц.

Полагая в последних трёх утверждениях $m = n$, получим ещё три следствия.

Следствие 4.9. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа, обладающая левой нейтральной последовательностью; для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{l-1} не является тождественной. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является l -арной полугруппой и в нём нет n -полуединиц, в частности единиц.

Следствие 4.10. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левой единицей, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{l-1} не является тождественной. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является l -арной полугруппой и в нём нет n -полуединиц, в частности единиц.

Следствие 4.11. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная группа, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{l-1} не является тождественной. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является l -арной полугруппой и в нём нет n -полуединиц, в частности единиц.

Критерий существования m -полуединиц в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Полученные результаты позволяют сформулировать критерий существования m -полуединиц в полиадических группоидах специального вида.

Теорема 4.11. Если неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает m -полуединицами, то в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет m -полуединиц тогда и только тогда, когда подстановка σ^{n-1} не является тождественной.

Доказательство. Необходимость. Пусть в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет m -полуединиц, и предположим, что подстановка σ^{n-1} является тождественной. Так как в $\langle A, \eta \rangle$ имеются m -полуединицы, то по теореме 3.2 l -арный

группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ также обладает t -полу-единицами, что противоречит условию теоремы.

Достаточность. Так как n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает t -полуединицами, то $t - 1$ делит $n - 1$. Далее применяется теорема 4.2. \square

Из теоремы 4.11 при $n = 2$ вытекает

Следствие 4.12. *Если неоднородный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицами, то в $(s + 1)$ -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет единиц тогда и только тогда, когда подстановка σ не является тождественной.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О единицах и их обобщениях в полиадических группоидах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 76–81.

2. Гальмак, А.М. Об операции $[]_{l, \sigma, k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.

3. Русаков, А.Д. О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ / А.Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 68–72.

Поступила в редакцию 26.01.2023.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЯКОБИ ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОЙ ЭРМИТОВСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИЙ

Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

THE ANALOGUE OF JACOBI'S THEOREM FOR SIMULTANEOUS HERMITIAN INTERPOLATION OF SEVERAL FUNCTIONS

T.M. Osnach, N.V. Ryabchenko, A.P. Starovoitov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Найдены достаточные условия, при которых для системы функций существуют рациональные аппроксимации Эрмита – Якоби. Показано, что при выполнении этих условий, аппроксимации Эрмита – Якоби совпадают с соответствующими аппроксимациями Эрмита – Паде. Основной результат в частном случае, когда система состоит из одной функции, является хорошо известной теоремой Якоби.

Ключевые слова: определители Адамара, совершенные системы функций, аппроксимации Эрмита – Паде, аппроксимации Эрмита – Якоби.

Для цитирования: Оснач, Т.М. Аналог теоремы Якоби для одновременной Эрмитовской интерполяции нескольких функций / Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 89–92. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_89. – EDN: ZVWNLP

Abstract. The sufficient conditions are found under which rational Hermite – Jacobi approximations exist for a system of functions. It is shown that under these conditions, the Hermite – Jacobi approximations coincide with the corresponding Hermite – Pade approximations. The main result in the particular case when the system consists of one function is well-known Jacobi's theorem.

Keywords: Hadamard determinants, perfect systems of functions, Hermite – Pade approximants, Hermite – Jacobi approximants.

For citation: Osnach, T.M. The analogue of Jacobi's theorem for simultaneous Hermitian interpolation of several functions / T.M. Osnach, N.V. Ryabchenko, A.P. Starovoitov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 89–92. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_89 (in Russian). – EDN: ZVWNLP

Введение

Пусть задан степенной ряд

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i,$$

представляющий функцию $f(z)$. Для каждой пары (n, m) целых неотрицательных чисел существуют такие многочлены $P_n(z)$, $Q_m(z)$, степени которых $\deg P_n \leq n$, $\deg Q_m \leq m$, что

$$Q_m(z)f(z) - P_n(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (0.1)$$

Здесь и далее под $O(z^p)$ понимаем степенной ряд вида $l_1 z^p + l_2 z^{p+1} + \dots$

Многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$ соотношениями (0.1) определяются не единственным образом, тем не менее, дроби

$$\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z; f) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

определяют одну и ту же рациональную функцию не зависимо от того, какие бы многочлены

$P_n(z)$, $Q_m(z)$, удовлетворяющие условию (0.1), мы не взяли [1, гл. 2, § 1]. Существование многочленов $Q_m(z)$, $P_n(z)$ для каждой пары индексов (n, m) доказано А. Паде [2, гл. 1, § 1.1]. В связи с этим в настоящее время рациональные функции $\pi_{n,m}(z)$ принято называть классическими аппроксимациями Паде или Фробениуса – Паде (Г. Фробениус в 1881 году рассматривал аналогичную задачу).

Похожие рациональные функции появились также в 1846 году в работе К. Якоби [3], который обобщил результат О. Коши о рациональной интерполяции функции, заданной в $n+m+1$ различных точках. К. Якоби рассмотрел $(n+m+1)$ -кратную рациональную интерполяцию в одной точке. Его конструкция приводит к следующему определению.

Определение 0.1. Рациональную функцию вида

$$\hat{\pi}_{n,m}(z) = \hat{\pi}_{n,m}(z; f) = \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)},$$

где многочлены $\hat{Q}_m(z), \hat{P}_n(z)$ имеют степени, соответственно, не выше m и n , будем называть аппроксимацией Паде – Якоби для пары (m, n) и функции $f(z)$, если она имеет максимально возможный порядок касания к ряду (0.1), т. е.

$$f(z) - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O(z^{n+m+1}).$$

В отличие от аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z)$, которые согласно теореме Паде [2, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1] существует для любой пары индексов (m, n) , аппроксимация Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ может и не существовать. Соответствующий пример функции $f(z)$ и пары (n, m) приведен в [2, гл. 1, § 1.4]. Подробное исследование условий на функцию, при выполнении которых $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ существует, провел Д. Бейкер [2, гл. 1, § 1.4]. Поэтому рациональную дробь $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ иногда называют аппроксимациями Паде в смысле Бейкера. Первый существенный результат в этом направлении исследований был получен К. Якоби [3]. Для его формулировки введем в рассмотрение определители Адамара

$$H_n = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+1} & \dots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}, \quad (0.2)$$

элементами которых являются коэффициенты ряда (0.1).

Теорема Якоби [3]. Если для пары индексов (m, n) определитель $H_{n,m} \neq 0$, то аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(z; f)$ существуют и совпадают с классическими аппроксимациями Паде – Фребениуса, т. е.

$$\hat{\pi}_{n,m}(z; f) = \pi_{n,m}(z; f).$$

Аналогичные конструкции рациональных функций, но соответствующие одновременной интерполяции нескольких функций, были разработаны Ш. Эрмитом [4] и легли в основу его доказательства трансцендентности числа e . В работе [4] впервые появились интерполяционные рациональные дроби, которые в настоящее время принято называть совместными аппроксимациями Паде или аппроксимациями Эрмита – Паде [1, гл. 4, § 1]. Как и в одномерном случае, когда $k=1$, при $k>1$ совместные аппроксимации могут быть двух типов. Мы их будем называть аппроксимациями Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Якоби. Изначально Ш. Эрмит рассматривал одновременную интерполяцию нескольких экспоненциальных функций. Как будет показано далее, для экспоненциальных функций обе конструкции таких рациональных функций совпадают. Для произвольного набора

из нескольких аналитических функций это не так. Соответствующий пример приведем далее.

1 Аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби

Пусть $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ – набор, состоящий из k степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, \dots, k \quad (1.1)$$

с комплексными коэффициентами. Не ограничивая общности, считаем, что все ряды в (1.1) сходятся в некоторой окрестности нуля и тем самым равенства (1.1) определяют систему \mathbf{f} , состоящую из функций аналитических в окрестности нуля.

Множество k -мерных мультииндексов, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – это сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$.

Определение 1.1. Аппроксимациями Эрмита – Паде для пары (n, \bar{m}) и системы функций (1.1) называются рациональные дроби

$$\pi_{n_j, \bar{m}}^j(z) = \pi_{n_j, \bar{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_m(z, \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leq m$ и многочлены $P_{n_j}^j(z) = P_{n_j}^j(z; \mathbf{f})$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$ при $j = 1, \dots, k$ удовлетворяют условиям

$$Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (1.2)$$

Если $k=1$, то \mathbf{f} состоит из одной функции $f(z) = f_1(z)$. В этом случае $\pi_{n, \bar{m}}^1(z; f_1)$ является аппроксимацией Паде $\pi_{n,m}(z; f)$. Введем в рассмотрение аппроксимации Эрмита – Якоби.

Определение 1.2. Аппроксимациями Эрмита – Якоби для пары (n, \bar{m}) и системы функций \mathbf{f} , определённых равенствами (1.1), будем называть рациональные дроби

$$\hat{\pi}_{n_j, \bar{m}}^j(z) = \hat{\pi}_{n_j, \bar{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)},$$

где многочлены, стоящие в числителе и знаменателе,

$$\hat{Q}_m(z) = \hat{Q}_m(z, \mathbf{f}), \quad \deg \hat{Q}_m \leq m,$$

$$\hat{P}_{n_j}^j(z) = \hat{P}_{n_j}^j(z; \mathbf{f}), \quad \deg \hat{P}_{n_j}^j \leq n_j, \quad n_j = n + m - m_j$$

при $j = 1, \dots, k$ подбираются таким образом, чтобы

$$f_j(z) - \frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)} = O(z^{n+m+1}). \quad (1.3)$$

Хорошо известно [2, гл. 4, § 1], что многочлены $Q_m(z), P_{n_j}^j(z)$, для которых справедливы равенства (1.2), всегда существуют, но определяются, вообще говоря, не однозначно. В [5] и [6] установлены необходимые и достаточные условия, при которых эти многочлены определяются (с точностью до числового множителя) единственным образом, и поэтому аппроксимации Эрмита – Паде $\{\pi_{n_j, m}^j(z)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. Для единственности существования многочленов $Q_m(z), P_{n_j}^j(z)$ необходимо и достаточно (см. [5] и [6]), чтобы ранг матрицы $F_{n, \vec{m}}$ порядка $m \times (m+1)$ был максимальный, т. е. $rank F_{n, \vec{m}} = m$. Матрица $F_{n, \vec{m}}$ определяется равенством

$$F_{n, \vec{m}} = \begin{pmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \dots & f_{n_1+1}^1 \\ f_{n-m_1+2}^1 & f_{n-m_1+3}^1 & \dots & f_{n_1+2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \dots & f_{n_k+1}^k \\ f_{n-m_k+2}^k & f_{n-m_k+3}^k & \dots & f_{n_k+2}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \dots & f_{n+m}^k \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

В отличие от многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде многочлены $\hat{Q}_m(z), \hat{P}_{n_j}^j(z)$, удовлетворяющие условиям (1.3), и рациональные дроби $\hat{\pi}_{n_j, \vec{m}}^j(z)$ могут не существовать. Приведем соответствующий пример.

Пример. Пусть $k = 2, n = 1, m_1 = m_2 = 1$,

$$f_1(z) = 2 + z + 2z^2 + z^3 + 2z^4 + z^5 + \dots$$

$$f_2(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + \dots$$

Тогда $n_1 = n_2 = 2$, многочлены $Q_2(z), P_2^1(z), P_2^2(z)$, удовлетворяющие условиям (1.3), находятся однозначно с точностью до числового множителя и при определенном выборе этого множителя имеют вид:

$$P_2^1(z) = 2z - 3z^2, P_2^2(z) = z - z^2,$$

$$Q_2(z) = z - 2z^2.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$f_1(z) - \frac{2z - 3z^2}{z - 2z^2} \neq O(z^4),$$

$$f_2(z) - \frac{z - z^2}{z - 2z^2} \neq O(z^4).$$

2 Кратный аналог теоремы Якоби

Для формулировки основного результата введем необходимые обозначения. Матрица $F_{n, \vec{m}}$ состоит из блок-матриц

$$F^j = \begin{pmatrix} f_{n-m_j+1}^j & f_{n-m_j+2}^j & \dots & f_{n_j+1}^j \\ f_{n-m_j+2}^j & f_{n-m_j+3}^j & \dots & f_{n_j+2}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^j & f_{n+1}^j & \dots & f_{n+m}^j \end{pmatrix}$$

порядка $m_j \times (m+1)$, расположенных друг над другом в порядке следования. В случае, если $m_j = 0$ матрица $F_{n, \vec{m}}$ не содержит блок-матрицу F^j . При $k = 1$ либо $\vec{m} = (m_1, 0, 0, \dots, 0)$ матрица $F_{n, \vec{m}}$ состоит из одного блока F^1 . Если в $F_{n, \vec{m}}$ удалить последний столбец, то получим квадратную матрицу порядка m . Определитель этой матрицы обозначим через $H_{n, \vec{m}}$. Тогда

$$H_{n, \vec{m}} = \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \dots & f_{n_1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \dots & f_{n_k}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \dots & f_{n+m-1}^k \end{vmatrix}.$$

Определитель $H_{n, \vec{m}}$ является кратным ($k > 1$) аналогом определителя Адамара (0.2): при $k = 1$ либо $\vec{m} = (m_1, 0, 0, \dots, 0)$ $H_{n, \vec{m}}$ совпадает с определителем (0.2) для функции $f_1(z)$.

Теорема 2.1. Если для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы функций \mathbf{f} , определенных равенствами (1.1), определитель $H_{n, \vec{m}} \neq 0$, то аппроксимации Эрмита – Якоби существуют, определяются единственным образом и каждая из них тождественно совпадает с соответствующей аппроксимацией Эрмита – Паде, т. е.

$$\hat{\pi}_{n_j, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \pi_{n_j, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}), j = 1, \dots, k. \quad (1.5)$$

Доказательство. Предположим вначале, что $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ – ненулевой мультииндекс. Тогда, если $H_{n, \vec{m}} \neq 0$, то

$$rank F_{n, \vec{m}} = m.$$

Поэтому аппроксимации Эрмита – Паде

$$\pi_{n_j, m}^j(z) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, j = 1, \dots, k$$

существуют, определяются единственным образом, а многочлены $Q_m(z), P_{n_j}^j(z)$ находятся с точностью до числового множителя единственным образом и при $j = 1, \dots, k$ удовлетворяют условиям

$$Q_m(z) \cdot f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (1.6)$$

В этом случае при подходящем выборе нормирующего множителя многочлен $Q_m(z)$ представляется (см. [5], [6]) в виде определителя

$$Q_m(z) = \det \begin{bmatrix} F_{n,\vec{m}} \\ E(z) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \dots & f_{n_1+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \dots & f_{n_k+1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \dots & f_{n+m}^k \\ z^m & z^{m-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m,$$

где $E(z) = (z^m \ z^{m-1} \ \dots \ z \ 1)$ – матрица-строка, а b_j можно найти, разложив определитель в предыдущем равенстве по элементам последней строки. В частности, $b_0 = H_{n,\vec{m}} \neq 0$. Поэтому функция $1/Q_m(z)$ является аналитической в некоторой окрестности нуля и, следовательно, представима в этой окрестности степенным рядом

$$\frac{1}{Q_m(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Разделив левую и правую часть равенств (1.6) на $Q_m(z)$, а затем перемножив соответствующие ряды в правой части нового равенства, получим, что при $j = 1, \dots, k$

$$f_j(z) - \pi_{n_j,\vec{m}}^j(z) = O(z^{n+m+1}).$$

Отсюда и определения аппроксимаций Эрмита – Якоби следует справедливость равенств (1.5).

До сих пор предполагалось, что мультииндекс \vec{m} является ненулевым. В случае, если $\vec{m} = (0, \dots, 0)$ – нулевой мультииндекс, то, очевидно, что с точностью до числового множителя $Q_m(x) \equiv 1$, а $P_n^j(z)$ – n -ая частная сумма ряда $f_j(z)$, и равенства (1.5) также сохраняются. \square

3 Замечания и следствия

Систему \mathbf{f} назовём вполне совершенной [6], если для любого мультииндекса (n, \vec{m})

$$\deg Q_m = m, \deg P_{n_j}^j = n_j, \text{НОД}(Q_m, P_{n_j}^j) = 1.$$

Вполне совершенной системой является, например, набор экспонент $\{e^{iz}\}_{j=1}^k$. Этот факт доказал Ш. Эрмит [4]. В [6] установлено, что если система функций \mathbf{f} вполне совершенна, то $H_{n,\vec{m}} \neq 0$. Следовательно справедливо следующее следствие.

Следствие 3.1. Если система \mathbf{f} вполне совершенна, то для любого мультииндекса (n, \vec{m}) существуют аппроксимации Эрмита – Якоби и справедливы равенства (1.5).

Следствие 3.2. Теорема Якоби является частным случаем теоремы 2.1.

Чтобы убедиться в этом, достаточно в теореме 2.1 положить $k = 1$ либо взять мультииндекс $\vec{m} = (m_1, 0, \dots, 0)$.

В заключении заметим, что теорема 2.1 и ее следствия остаются в силе, если вместо сходящихся рядов (1.1) рассматривать формальные степенные ряды. В этом случае ряды во всех равенствах следует понимать формально, не обращая внимания на их сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.
2. Бейкер, Дж. мл. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.
3. Jacobi, C. Über die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochne rationale Function / C. Jacobi // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1846. – № 30. – P. 127–156.
4. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
5. Старовойтов, А.П. О единственности решений задач Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фізіка-матэматычных навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 445–456.
6. Старовойтов, А.П. О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Труды Московского математического общества. – 2022. – Т. 83, № 1. – С. 17–36.

Поступила в редакцию 13.01.2023.

Информация об авторах

Оснач Татьяна Михайловна – аспирантка
Рябченко Наталья Валерьевна – к.ф.-м.н.
Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).