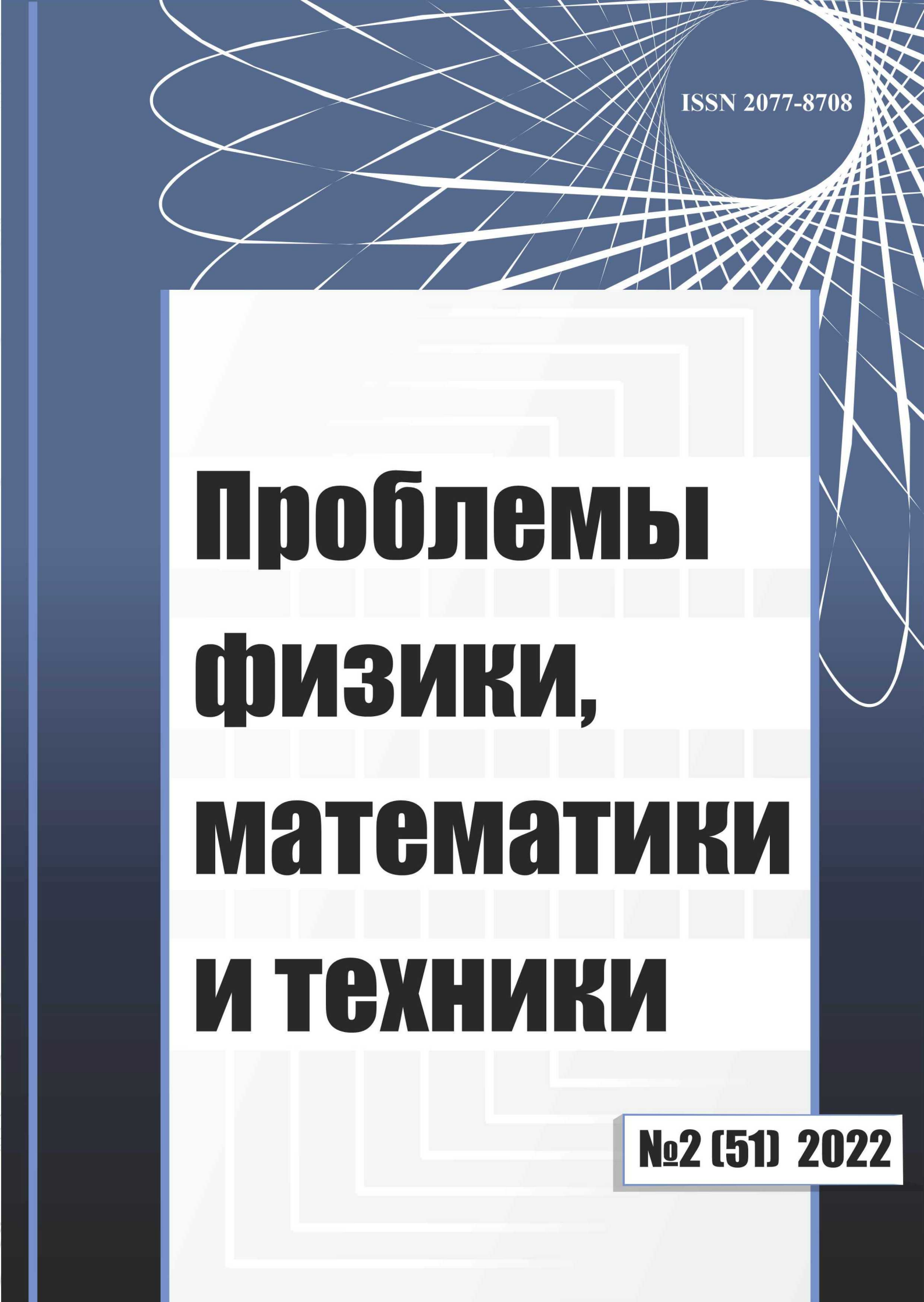




ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№2 (51) 2022

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (51) 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Аль-Камали М.Ф.С.Х., Зализный Д.И., Бойко А.А., Федосенко Н.Н. Электрические свойства тонких пленок $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$, нанесенных методом импульсного лазерного испарения	7
Васькевич В.В., Коваленко Д.Л., Гайшун В.Е., Сидский В.В., Косенок Я.А., Жигулин Д.В. Электрофизические свойства диэлектрических золь-гель покрытий на основе диоксида кремния	12
Гиргель С.С. 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью	18
Гришечкин Ю.А., Капшай В.Н. Приближённое аналитическое решение уравнения Логунова – Тавхелидзе с линейным потенциалом в релятивистском конфигурационном представлении	22
Емельянов В.А., Шершнев Е.Б., Никитюк Ю.В., Соколов С.И., Аушев И.Ю. Оптимизация лазерной полировки кварцевого стекла с использованием метода планирования вычислительных экспериментов	26
Козел А.Г. Термоупругий изгиб круговой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака	31
Кулак Г.В., Навныко В.Н., Николаенко Т.В. Анизотропная брэгговская дифракция света на голографических фазовых решетках в условиях френелевского отражения	38
Можаровский В.В., Киргинцева С.В. Скорость волны при гидроударе и напряженно-деформированное состояние слоистых футерованных труб из ортотропных материалов	44
Руденков А.С., Рогачев А.В., Завадский С.М., Купо А.Н. Структура и механические свойства кремний-углеродных покрытий, легированных хромом	52

МАТЕМАТИКА

Васильев А.Ф. О конечных группах с полусубнормальными корадикалами силовских нормализаторов	58
Гальмак А.М. Идемпотенты в полиадических группоидах специального вида	63
Кузьмина Е.В. Обобщенные решения второго уравнения иерархии Риккати	68
Ланцетова Е.Д. О парах Локетта и гипотезе Локетта для σ -локальных классов Фиттинга	76
Налигама Ч.А., Цехан О.Б. Границы валидности асимптотических аппроксимаций для расщепляющего преобразования трехтемповых линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием	83
Старовойтов А.П., Ковалькова А.Д. О полиортогональных функциях первого типа	94

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- **технические;**
- **физико-математические.**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 13.06.22. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,86. Уч.-изд. л. 10,33. Тираж 100 экз. Заказ № 313.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2022
© Проблемы физики, математики и техники, 2022
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2022

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 2 (51) 2022

CONTENTS

PHYSICS

Al-Kamali M.F.S.H., Zalizny D.I., Boika A.A., Fedosenko N.N. Electrical properties of $\text{SiO}_2\text{:Cu}^0$ thin films produced by pulse laser deposition	7
Vaskevich V.V., Kovalenko D.L., Gaishun V.E., Sidski V.V., Kosenok Y.A., Zhyhulin D.V. Electrophysical properties of dielectric sol-gel coatings based on silica dioxide	12
Girgel S.S. Kummer 3D light beams without the Gaussian apodization with transferable terminating power	18
Grishechkin Yu.A., Kapshai V.N. Approximate analytical solution of the Logunov – Tavkhelidze equation with a linear potential in the relativistic configurational representation	22
Emelyanov V.A., Shershnev E.B., Nikitjuk Y.V., Sokolov S.I., Aushev I.Y. Optimization of laser polishing of quartz glass using the method of planning computational experiments	26
Kozel A.G. Thermal elastic bending of a circular three-layer plate, associated with the Pasternak foundation	31
Kulak G.V., Naunya V.N., Nikolaenko T.V. Anisotropic Bragg diffraction of light on holographic phase gratings under Fresnel reflection conditions	38
Mozharovsky V.V., Kirhintsava S.V. The wave velocity during a water hammer and the stress-strain state of layered lined pipes made of orthotropic materials	44
Rudnikov A.S., Rogachev A.V., Zavadski S.M., Kupo A.N. Structure and mechanical properties of silicon-carbon coatings alloyed with chromium	52

MATHEMATICS

Vasil'ev A.F. On finite groups with semisubnormal residuals of Sylow normalizers	58
Gal'mak A.M. Idempotents in polyadic groupoids of special form	63
Kuzmina E.V. Generalized solutions of the second equation of the Rickati hierarchy	68
Lantsetova E.D. On Lockett pairs and Lockett conjecture for σ -local Fitting classes	76
Naligama C.A., Tsekhan O.B. Asymptotic approximations validity boundaries for decoupling transformation of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed systems with delay	83
Starovoitov A.P., Kovalkova A.D. On polyorthogonal functions of the first type	94

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- Technics;**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Data-bases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$, НАНЕСЕННЫХ МЕТОДОМ ИМПУЛЬСНОГО ЛАЗЕРНОГО ИСПАРЕНИЯ

М.Ф.С.Х. Аль-Камали¹, Д.И. Зализный¹, А.А. Бойко¹, Н.Н. Федосенко²

¹Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого

²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ELECTRICAL PROPERTIES OF $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$ THIN FILMS PRODUCED BY PULSE LASER DEPOSITION

M.F.S.H. Al-Kamali¹, D.I. Zalizny¹, A.A. Boika¹, N.N. Fedosenko²

¹Sukhoi State Technical University of Gomel

²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В статье представлены результаты исследования электрических свойств плёнок $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$. Исследована зависимость напряжения от величины солнечного излучения. Установлено, что при росте концентрации ионов меди в тонких плёнках $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$, электропроводимость снижается за счет роста расстояния между наночастицами меди, которые находятся в диэлектрической матрице SiO_2 . Плёнки имеют нелинейную вольт-амперную характеристику, имеющую участки ограничения напряжений на уровне 7...10 В, при этом фотоэлектрические свойства обусловлены генерированием напряжения порядка температурного потенциала с явной зависимостью от солнечного излучения, что позволяет применять эти плёнки как датчики излучения.

Ключевые слова: тонкие плёнки, ионы меди, кремнезем, импульсное лазерное испарение, вольт-амперные характеристики, фотоэлектрический, солнечное излучение.

Для цитирования: Электрические свойства тонких пленок $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$, нанесенных методом импульсного лазерного испарения / М.Ф.С.Х. Аль-Камали, Д.И. Зализный, А.А. Бойко, Н.Н. Федосенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_7 – EDN: AWNUID

Abstract. The data on the electrical properties of $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$ films are presented. The dependence of voltage on the solar irradiation intensity is presented. It was revealed that at increase in copper ions concentration in the thin films of $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$ their electrical conductivity is decreasing due to the increase of the distance between the nanoparticles of copper distributed in the dielectric matrix of SiO_2 . The films have the non-linear VA characteristic with the parts of voltage limits at the range of 7...10 V. At the same time, the photoelectric response was caused by generation of voltage of the order of temperature potential with the evident dependence on the solar irradiation. That means the possibility of the films application as the irradiation sensors.

Keywords: thin films, copper ions, silica, pulsed laser evaporation, volt-ampere characteristics, photoelectric, solar radiation.

For citation: Electrical properties of $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$ thin films produced by pulse laser deposition / M.F.S.H. Al-Kamali, D.I. Za-lizny, A.A. Boika, N.N. Fedosenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_7 (in Russian). – EDN: AWNUID

Введение

Покрывают оптические элементы, содержащие прозрачную матрицу с введенными в ее состав наночастицами металлов, находят применение в преобразовании солнечной энергии [1], [2], электронике [3] и катализе [4]. В настоящей работе выбор пленок состава $\text{SiO}_2 : \text{Cu}^0$ обусловлен тем фактом, что при окислении меди образуются оксиды Cu_2O и CuO [4]. При этом оксиды меди Cu_2O , CuO обладают не только способностью увеличивать поглощение в определенном, заданном оптическом диапазоне, но и характеризуются фотоэлектрическими свойствами [5], что делает такие покрытия, особенно при сверхмалых толщинах (не более 100 нм) перспективными для применения в солнечных элементах. Также, как

показано в работе [6], регулируя размеры наночастиц CuO и Cu_2O , а также изменяя соотношение между частицами Cu и Cu_2O позволяет управлять шириной запрещенной зоны. Преимуществами оксидов меди является их низкая стоимость и химическая стойкость. Кроме того, пленки оксидов меди зарекомендовали себя в качестве чувствительного слоя газовых сенсоров для датчиков аммиака NH_3 , оксида азота NO_2 и сероводорода H_2S [7].

Целью настоящей работы было установление влияния солнечного излучения на вольт-амперные характеристики тонких пленок, сформированных импульсным лазерным испарением мишеней $\text{SiO}_2 : \text{CuO}$, $\text{SiO}_2 : \text{NiO}$, $\text{SiO}_2 : \text{Cu}^0$, $\text{SiO}_2 : \text{Cu}^0 : \text{Zn}^0$.

1 Материалы и методы проведения эксперимента

Для получения покрытий использовался метод импульсного лазерного испарения, а в качестве источника лазерного излучения применялся лазер L-2137U+HG-5 (Лотисс-ТИИ, Беларусь). Диаметр пятна лазерного излучения на мишени составлял ~ 7 мм. Мишень испаряли импульсным излучением с длиной волны $\lambda = 532$ нм, длительностью 6 нс, частотой следования импульсов 10 Гц и энергией в импульсе 448 мДж. Время испарения составляло 40 минут.

Покрывают осаждали на подложки из высоколегированного монокристаллического кремния ЭКЭС 0,01 (100).

Мишени для формирования пленок были синтезированы с использованием золь-гель метода. Исходными компонентами служили – пироогенный кремнезём марки А-380 (техническое название – аэросил), нитрата меди ХЧ тип: ТУ 6-09-3757-74 ($\text{Cu}(\text{NO}_3)_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$), нитрат цинка ЧДА тип: ГОСТ 5106-77 ($\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$), сернокислый никель ЧДА тип: ГОСТ 4465-74 ($\text{Ni}_2\text{SO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$).

Получение мишеней включало проведение следующих операций.

На первом этапе исходный золь получался при ультразвуковом диспергировании ($v = 18$ кГц) кремнезема марки А-380, что приводило к его однородному перемешиванию.

После УЗ-обработки в полученный золь добавлялись соли легирующих элементов с различным массовым отношением относительно 1 моля SiO_2 . После полного растворения нитрата меди проводилась его стабилизация: при нормальных условиях путём гелирования в пластиковых литевых формах.

Последующая сушка получившегося геля осуществлялась в электрическом термощафу при $T = 50\text{--}80^\circ\text{C}$ (до образования состояния ксерогеля). Отжиг ксерогелей до формирования жёсткого кремний-кислородного каркаса проводился в муфельной электропечи на воздухе при $T = 800^\circ\text{C}$ (время выдержки на указанной температуре составляло 1 ч.). При этом получались ксерогельные заготовки структурно-фазового состава $\text{SiO}_2 : \text{MeO}$ ($\text{Me} = \text{Cu}, \text{Ni}, \text{Zn}$) [8]. Далее ксерогели размалывались в фарфоровой ступке до состояния микропорошков и методом одноосного прессования формировались в мишени диаметром 20 мм, толщиной 10 мм.

Отжиг полученных мишеней проводили в потоке осушенного водорода при $T = 800^\circ\text{C}$ (время выдержки – 1 ч, степень химической чистоты H_2 соответствовала марке «осч») в результате чего формировались композиционные мишени состава $\text{SiO}_2 : \text{Me}^\circ$ [9].

Измерения вольт-амперных характеристик проводили по схеме, приведенной на рисунке 1.1, а. Для этого предварительно формировались

метал-оксид-полупроводник (МОП) структуры. На нанесенную пленку оксида кремния методом ионно-лучевого распыления через маску наносился верхний электрод из Ni (рисунок 1.1, б).

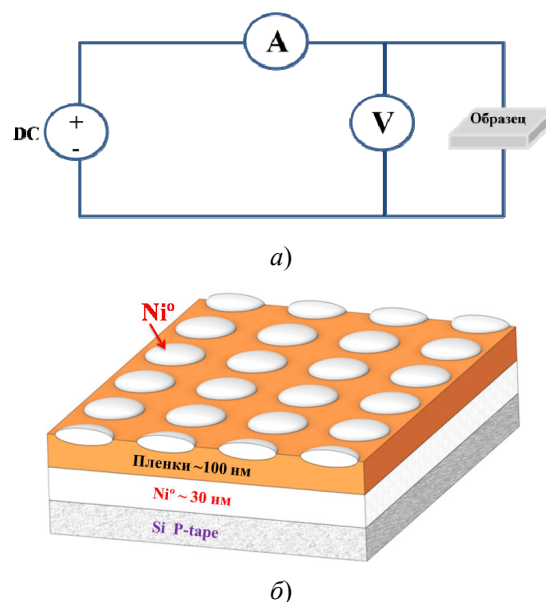


Рисунок 1.1 – Принципиальная схема измерения ВАХ образцов (а), схема структуры Si / SiO_2 : Cu° / Ni (б) [10], [11]

Для изучения влияния солнечного излучения на электрические свойства плёнок использовали устройство, схема которого изображена на рисунке 1.2.

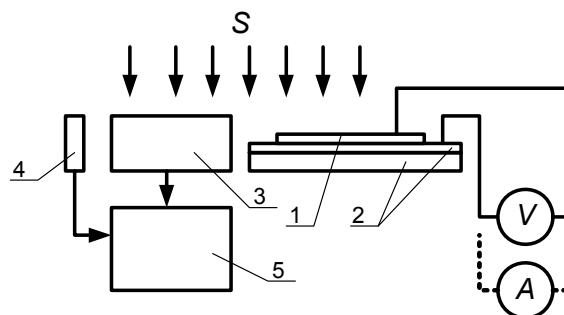


Рисунок 1.2 – Схема установки для изучения влияния солнечного излучения:

- 1 – испытуемый образец;
- 2 – фольгированный стеклотекстолит;
- 3 – датчик солнечного излучения;
- 4 – датчик температуры;
- 5 – прибор Solar I-V

Испытуемый образец плёнки 1 размещался на предварительно очищенной медной поверхности фольгированного стеклотекстолита 2 и подвергался воздействию солнечного излучения S . В непосредственной близости от плёнки располагался датчик солнечного излучения 3, подключенный к прибору Solar I-V 5 фирмы HT Italia. Разность потенциалов между верхним и нижним

слоями плёнки измерялась мультиметром VIC-TORVC830L. Также выполнялись измерения тока, выдаваемого плёнкой в режиме короткого замыкания.

Рамановские (КР) спектры регистрировали на спектрометре Renishaw inVia Reflex при комнатной температуре. Образец (в виде порошка) помещали в конфокальную плоскость микроскопа, куда в пятно диаметром порядка 1 мм фокусировалось непрерывное излучение Ag-лазера с длиной волны возбуждения 514 нм и мощностью 20 мВт. Измерения спектров проводили в геометрии обратного рассеяния. В качестве детектора использовали CCD-камеру (576×384 пикселей).

2 Результаты и их обсуждение

Исследования вольт-амперных характеристик (ВАХ) $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$ -покрытий (с различной концентрацией Cu^0 в плёнке) показали, что для осажденных пленок наблюдается различие в поведении ВАХ на прямой и обратной ветвях (рисунок 2.1). Данное поведение ВАХ характерно для всех полученных покрытий, при этом установлено, что происходит снижение проводимости пленки с ростом концентрации меди в покрытии.

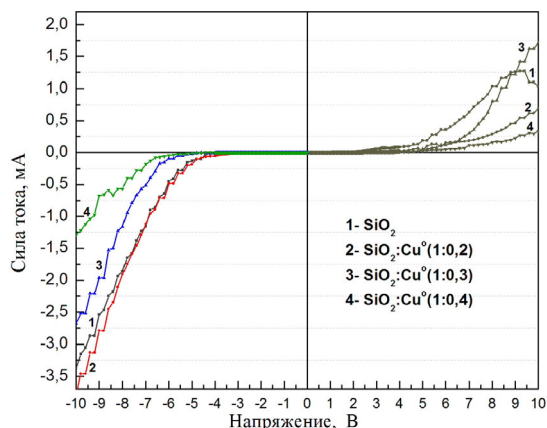


Рисунок 2.1 – ВАХ для SiO_2 , $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$ пленок

Такой характер зависимости проводимости возможно связано с ростом расстояния между наночастицами меди, которые находятся в диэлектрической матрице SiO_2 . Мы предполагаем, что при малых концентрациях медь распределяется по поверхности глобул кремнезема [12], а при увеличении концентрации ионы меди кластеризуются, образуя отдельные частицы. Косвенным подтверждением такого предположения является появление интенсивной и широкой полосы в области 1560–1630 cm^{-1} на рамановском спектре (рисунок 2.2), обусловленной увеличением концентрации адсорбированной воды [13]. Это напрямую связано с появлением пористости пленки, связанной с гетерогенностью ее структуры. Поскольку при малых концентрациях этого пика не наблюдается. Пик поглощения,

наблюдаемый при 960 cm^{-1} для $\text{SiO}_2:\text{Cu}^0$, возможно, обусловлен перекрытием связи $\text{Si}-\text{OH}$ [13] с колебаниями связи $\text{Si}-\text{O}$. Эта полоса является признаком неоднородности (присутствия частиц металла) в структуре SiO_2 -матрицы [14]. Полоса в области 470–505 cm^{-1} связана с колебаниями $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$ [15].

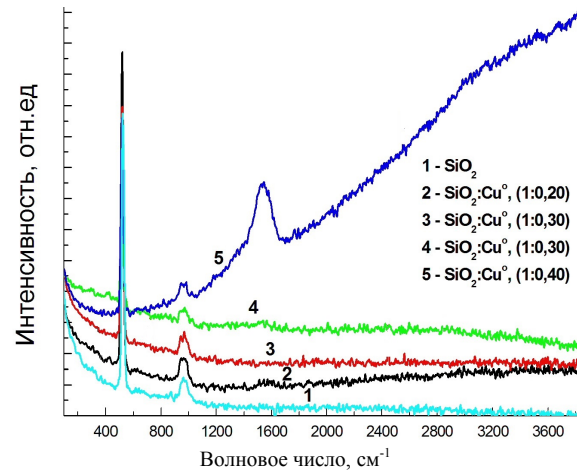


Рисунок 2.2 – Рамановские спектры тонких плёнок

Таким образом, из ВАХ образцов можно сделать вывод, что они обладают свойствами ограничения напряжения, то есть могут быть использованы как элементы защиты от перенапряжений в микросхемах. Также исследуемые плёнки можно применить для наружных слоёв затворов полевых транзисторов (типа MOSFET) с целью улучшения отдачи заряда затвора на его электрод.

Для изучения фотоэлектрических свойств были использованы плёнки: $\text{Si}/\text{Ni}/\text{SiO}_2:\text{Cu}^0/\text{Ni}$, $\text{Si}/\text{Ni}/\text{SiO}_2:\text{Cu}^0:\text{Zn}^0/\text{Ni}$, $\text{Si}/\text{Ni}/\text{SiO}_2:\text{NiO}/\text{Ni}$ и $\text{Si}/\text{Ni}/\text{SiO}_2:\text{CuO}/\text{Ni}$.

На рисунке 2.3 приведены зависимости напряжения U между поверхностями некоторых исследуемых плёнок от величины уровня солнечного излучения S , попадающего на поверхность плёнки со стороны полупроводника, полученные на основе схемы на рисунке 1.2.

В процессе исследований для всех образцов были получены отрицательные значения напряжения по отношению к их никелевой поверхности, явно изменявшиеся в зависимости от интенсивности солнечного излучения. Это свидетельствует о фотоэлектрической чувствительности изучаемых плёнок. Однако измеренные значения напряжения не превысили –60 мВ, что близко к температурному потенциалу для полупроводников:

$$\phi_T = \frac{k \cdot T}{q},$$

где k – постоянная Больцмана; T – температура; q – заряд электрона.

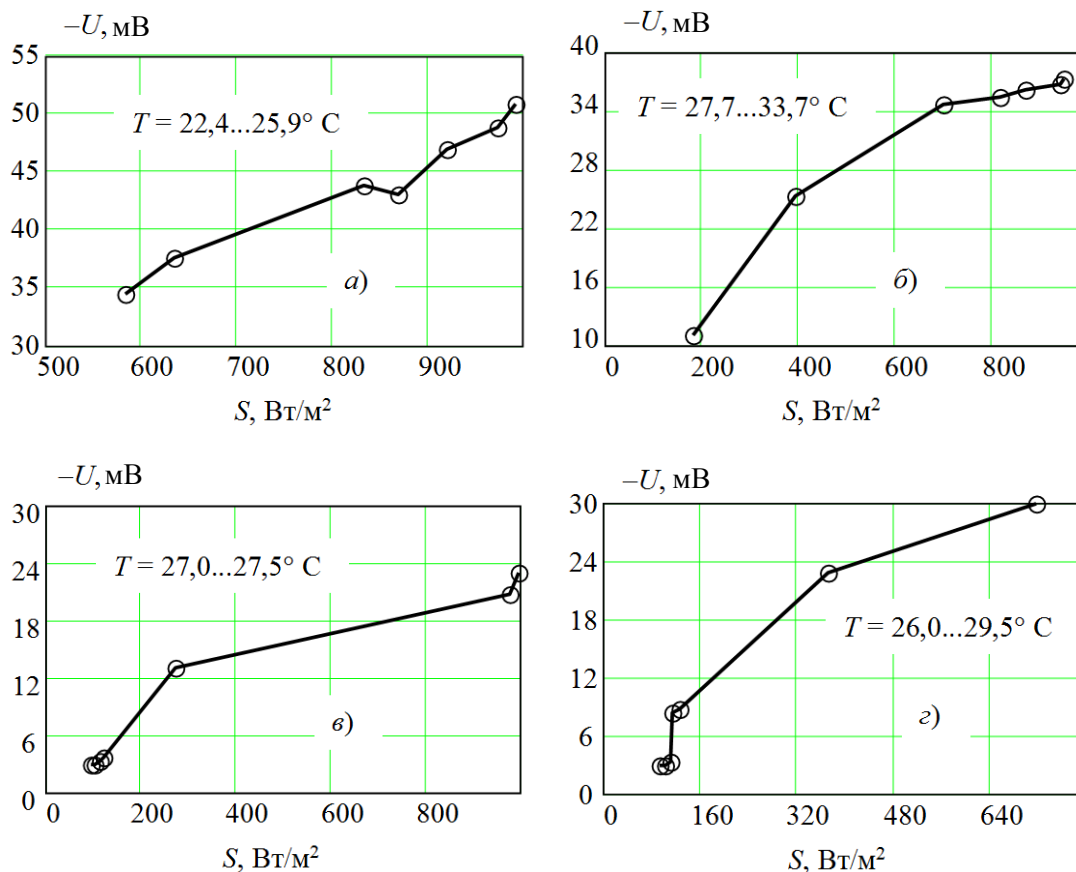


Рисунок 2.3 – Зависимости напряжения от солнечного излучения для плёнок:
 а) $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{Cu}^0 / \text{Ni}$; б) $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{Cu}^0 : \text{Zn}^0 / \text{Ni}$; в) $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{NiO} / \text{Ni}$;
 г) $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{CuO} / \text{Ni}$

При $T = 300^\circ \text{K}$, $\varphi_T = 25,9 \text{ мВ}$. Таким образом, полученные значения напряжения на исследуемых плёнках можно объяснить изменением энергии заряженных частиц (электронов или дырок) полупроводника, преодолевающих его запрещённую зону при тепловых колебаниях.

Максимальные значения напряжения были получены на плёнках $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{Cu}^0 / \text{Ni}$ и $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{Cu}^0 : \text{Zn}^0 / \text{Ni}$. При этом для образца $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{Cu}^0 / \text{Ni}$ зависимость имеет достаточно линейный характер, что потенциально позволяет использовать эту плёнку как датчик солнечного излучения.

На основе схемы (рисунок 1.2) были также измерены значения токов короткого замыкания изучаемых образцов плёнок. В результате при солнечном излучении порядка $1000 \text{ Вт} / \text{м}^2$ максимальный ток для образца $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{Cu}^0 / \text{Ni}$ составил $2,4 \text{ мкА}$. Остальные образцы показали значительно меньшие токи.

Для оценки фотогенерирующей способности плёнки $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{Cu}^0 / \text{Ni}$ рассчитана максимально отдаваемая ею мощность на 1 см^2 . Зная, что для фотоэлементов в точке максимальной мощности напряжение и ток снижаются приблизительно на 20% от своих максимальных

значений, для образца плёнки $\text{Si} / \text{Ni} / \text{SiO}_2 : \text{Cu}^0 / \text{Ni}$, имеющего площадь $F = 3 \text{ см}^2$ и максимальные значения напряжения 52 мВ (рисунок 2.3, а) и тока $2,4 \text{ мкА}$, получим значение мощности $P = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / \text{см}^2$. Для среднего фотоэлемента, применяемого в фотоэлектрических модулях, значение P составляет около $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} / \text{см}^2$. Следовательно, исследуемые образцы плёнок не могут использоваться как фотогенерирующие элементы. Главная причина этого – отсутствие p - n перехода в плёнках.

Заключение

Установлено, что рост концентрации ионов меди в тонких пленках $\text{SiO}_2 : \text{Cu}^0$ приводит к их кластеризации и образованию отдельных частиц.

Исследуемые образцы плёнок характеризуются нелинейностью вольт-амперных характеристик и имеют участки ограничения напряжений на уровне $7...10 \text{ В}$, что позволяет их применять как ограничители перенапряжений в кристаллах интегральных микросхем.

Фотоэлектрические свойства исследуемых образцов плёнок обусловлены генерированием напряжения порядка температурного потенциала с явной зависимостью от солнечного излучения,

что позволяет применять эти плёнки как датчики излучения, а также в качестве фотоусиливающих покрытий для фотоэлементов.

Исследуемые образцы плёнок не могут быть использованы в качестве фотогенерирующих элементов, так как имеют мощность фотогенерации, не превышающую $2,7 \cdot 10^{-8}$ Вт/см².

ЛИТЕРАТУРА

1. *An Overview of Stretchable Strain Sensors from Conductive Polymer Nanocomposites* / J. Chen [et. al.] // J. Mater. Chem. C. – 2019. – Vol. 38, № 7. – P. 11710–11730.

2. *Synthesis and optical characterization of copper oxide nanoparticles* / A.S. Lanje [et. al.] // Adv. Appl. Sci. Res. – 2010. – № 1. – P. 36–40.

3. *The elastic moduli of oriented tin oxide nanowires* / S. Barth, C. Harnagea, S. Mathur, F. Rosei // Nanotechnology. – 2009. – Vol. 20, № 11. – P. 115705 – DOI: 10.1088/0957-4484/20/11/115705

4. Коршунов, А.В. Влияние состояния оксидно-гидроксидной оболочки на реакционную способность наночастиц алюминия / А.В. Коршунов, А.П. Ильин // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312, № 3. – С. 11–15.

5. Naddaf, M. Characterization of nanostructured CuO-porous silicon matrix formed on copper-coated silicon substrate via electrochemical etching / M. Naddaf, O. Mrad, A. Al-Zier // Appl. Phys. A: Materials Science & Processing. – 2014. – Vol. 115, № 4. – P. 1345. – DOI: 10.1007/s00339-013-8008-5.

6. Кыдыр, А. Разработка технологий получения тонких пленок оксида меди и исследование их свойств / А. Кыдыр, Ф.А. Аюелбекова // Наука, техника и образование. – 2017. – № 6 (36). – С. 64–68.

7. *Морфология, оптические и адсорбционные свойства слоев оксидов меди, осажденных из растворов комплексных соединений* / Л.Б. Матюшкин [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2017. – Т. 51, вып. 5. – С. 615–619.

8. Аль-Камали, М.Ф.С.Х. Структурообразование SiO_2 -ксерогелей, содержащих соединения меди различного фазового состава / М.Ф.С.Х. Аль-Камали, А.А. Алексеенко, О.А. Титенков // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 7–12.

9. Алексеенко, А.А. Синтез и свойства ксерогелей состава $\text{SiO}_2:\text{Cu}^\circ$, предназначенных для применения в биомедицинских исследованиях / А.А. Алексеенко, М.Ф.С.Х. Аль-Камали, О.А. Титенков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2020. – № 3/4. – С. 40–47.

10. Вилья, Н. Формирование пленок оксида титана методом реактивного магнетронного распыления / Н. Вилья, Д.А. Голосов, Т.Д. Нгуен // Доклады БГУИР. – 2019. – № 5 (123). – С. 87–93.

11. *Электрические и оптические свойства пленок оксида цинка, нанесенных методом ионно-лучевого распыления оксидной мишени* / А.П. Достанко [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2014. – Т. 48, вып. 9. – С. 1274–1279.

12. *Structural properties of micropowders composition $\text{SiO}_2:\text{CuO}$ & $\text{SiO}_2:\text{Cu}^\circ$ prepared by sol-gel method* / M.F.S.H. AL-Kamali [et al.] // Al-Andalus J. Appl. Scien. – 2021. – № 13 (January – June). – P. 99–117.

13. Neumann, R. Metal oxide (TiO_2 , MoO_3 , WO_3) substituted silicate xerogels as catalysts for the oxidation of hydrocarbons with hydrogen peroxide / R. Neumann, M. Levin-Elad // J. Catal. – 1997. – Vol. 166. – P. 206–217.

14. *Investigation of sol-gel processed CuO / SiO_2 nanocomposite as a potential photoanode material* / T. Tenkyong, [et. al.] // Mater. Science-Poland. – 2015. – Vol. 33 (4). – P. 826–834.

15. *Copper Containing Silicates as Catalysts for Liquid Phase Cyclohexane Oxidation* / R.S. da Cruza [et. al.] // J. Braz. Chem. Soc. – 2002. – Vol. 13, № 2. – P. 170–176.

Поступила в редакцию 04.04.2022.

Информация об авторах

Аль-Камали Марван Фархан Саиф Хассан – мл. научный сотрудник

Зализный Дмитрий Иванович – к.т.н., доцент

Бойко Андрей Андреевич – д.т.н., доцент

Федосенко Николай Николаевич – к.т.н., доцент

ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ

В.В. Васькевич¹, Д.Л. Коваленко¹, В.Е. Гайшун¹,
В.В. Сидский¹, Я.А. Косенок¹, Д.В. Жигулин²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²ОАО «ИНТЕГРАЛ», Минск

ELECTROPHYSICAL PROPERTIES OF DIELECTRIC SOL-GEL COATINGS BASED ON SILICA DIOXIDE

V.V. Vaskevich¹, D.L. Kovalenko¹, V.E. Gaishun¹,
V.V. Sidski¹, Y.A. Kosenok¹, D.V. Zhyhulin²

¹Francisk Skorina Gomel State University

²JSC "INTEGRAL", Minsk

Аннотация. Определены составы и приготовлена серия пленкообразующих растворов для исследования влияния концентрации метилтриэтоксисилана в растворах на основе тетраэтилортосиликата на электрофизические свойства. Экспериментальным путем подобраны оптимальные режимы нанесения и термообработки пленкообразующих растворов для синтеза диэлектрических золь-гель покрытий. Проведены исследования вязкости полученных растворов с использованием капиллярного вискозиметра. Для анализа толщины и однородности структуры полученных материалов проведены исследования сколов с использованием растрового электронного микроскопа. Установлены вольт-фарадные и вольт-амперные зависимости и произведены расчеты диэлектрической проницаемости, величины сдвига напряжения плоских зон и емкости плоских зон.

Ключевые слова: пленкообразующий раствор, золь-гель, термообработка, толщина покрытия по РЭМ сколу, вольт-фарадные характеристики, ток утечки, диэлектрическая проницаемость.

Для цитирования: Электрофизические свойства диэлектрических золь-гель покрытий на основе диоксида кремния / В.В. Васькевич, Д.Л. Коваленко, В.Е. Гайшун, В.В. Сидский, Я.А. Косенок, Д.В. Жигулин // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 12–17. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_12 – EDN: DVGXHB

Abstract. The compositions have been determined and a series of film-forming solutions has been prepared to study the effect of the methyltriethoxysilane concentration in tetraethylorthosilicate-based solutions on the electrical properties. The optimal modes of deposition and heat treatment of film-forming solutions for the synthesis of dielectric sol-gel coatings have been selected experimentally. The viscosity of the resulting solutions has been studied using a capillary viscometer. The studies of cleavage were carried out using a scanning electron microscope to analyze the thickness and homogeneity of the structure of the obtained materials. The capacitance-voltage and current-voltage dependences have been established. The calculations of the dielectric constant, the value of the voltage shift of the flat zones and the capacitance of the flat zones have been performed.

Keywords: film-forming solution, sol-gel, heat treatment, coating thickness according to SEM cleavage, capacitance-voltage characteristics, leakage current, dielectric constant.

For citation: Electrophysical properties of dielectric sol-gel coatings based on silica dioxide / V.V. Vaskevich, D.L. Kovalenko, V.E. Gaishun, V.V. Sidski, Y.A. Kosenok, D.V. Zhyhulin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 12–17. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_12 (in Russian). – EDN: DVGXHB

Введение

В настоящее время широкое применение в микроэлектронике находят гибридные органо-неорганические диэлектрические слои. Это обусловлено тем, что они обладают комплексом ценных физико-химических и технологических свойств. В качестве органо-неорганических диэлектриков наибольшее распространение получили стекловидные материалы. Характерными для этих материалов являются малые электропроводность и диэлектрические потери, высокие теплостойкость, прочность, твердость, термостабильность и

радиационная устойчивость, а также отсутствие старения [1], [2].

Из-за простоты и дешевизны большой интерес представляют золь-гель материалы, синтезируемые химическим методом на основе комплекса различных исходных соединений кремния, например метилтриэтоксисилана, фенилтриэтоксисилана, винилтриэтоксисилана и др. Введение в структуру SiO_2 добавок позволяет создавать материал с комплексом заранее заданных свойств: термических, пластических, электрофизических, механических и т. д. Кроме того,

фактор многокомпонентности приводит к снижению кристаллизационной способности получаемых материалов [3]–[5].

Получаемые комплексные наноструктурированные покрытия должны быть не только устойчивые к термическому расширению композиционной поверхности слоев металлизированной микросхемы, но и обладать необходимыми химическими и электрофизическими свойствами для применения их в производстве интегральных микросхем [6].

В связи с вышеизложенным, весьма перспективным является применение низкотемпературных жидкофазных методов синтеза стекловидных материалов, обеспечивающих получение особо чистых пленок на их основе, с высокой однородностью химического состава и структуры при температурах до 500° С. С помощью этих методов возможен синтез новых перспективных гибридных органо-неорганических диэлектрических слоев, составы находятся за пределами классических областей стеклообразования, которые невозможно получить по традиционной технологии – плавлением шихты.

Использование разрабатываемых наноструктурированных золь-гель пленок позволит уменьшить зависимость от поставок импортных материалов и снизить затраты на производство интегральных микросхем более чем в 5 раз.

1 Синтез золь-гель покрытий

Для установления влияния концентрации метилтриэтоксисилана (МТЭС) в растворе на основе тетраэтилортосиликата (ТЭОС) на электрофизические свойства была приготовлена серия пленкообразующих растворов с различным массовым соотношением МТЭС : ТЭОС (2 : 1, 5 : 3, 4 : 3, 1 : 1) и классический раствор на основе ТЭОС. Гидролиз полученных растворов проводили в кислой среде, в качестве растворителей использовали изопропиловый спирт и изобутиловый спирт. Для полного созревания растворы выдерживали при температуре окружающей среды (22 ± 2)° С в течение 2–3 суток.

Известно, что растворы пленкообразующих веществ, используемых для формирования однородных покрытий, должны обладать определенной вязкостью, оптимальное значение которой находится в интервале от 3 сСт (мм²/с) до 9 сСт (мм²/с). При большей вязкости затрудняется растекание раствора, что приводит к образованию неоднородной по толщине пленки, а при меньшей формируется тонкое покрытие, недостаточное для использования в качестве планаризирующего и межслойного диэлектрика. Для изучения влияния состава пленкообразующего раствора и времени его хранения на пригодность полученных растворов провели исследования вязкости с использованием капиллярного вискозиметра ВПЖ-2 (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Результаты измерения вязкости полученных пленкообразующих растворов на основе металлоорганических соединений кремния.

Массовое соотношение (МТЭС : ТЭОС)	Время хранения, суток	Вязкость, сСт (мм ² /с)
2 : 1	3	5,01
	30	5,25
5 : 3	3	4,92
	30	4,99
4 : 3	3	4,70
	30	4,76
1 : 1	3	4,72
	30	4,77
без МТЭС	3	4,69
	30	4,80

Результаты исследования показывают, что полученные пленкообразующие растворы имеют вязкость в диапазоне от 4,5 сСт до 5,5 сСт, что делает их пригодными для формирования однородных покрытий на поверхности кремниевых пластин в интегральной микроэлектронике.

Готовые пленкообразующие раствора наносили на кремниевые пластины марки КДБ-4 и КДБ-12 диаметром 100 мм методом центрифугирования, так как он является основным на предприятиях электронной промышленности для формирования тонких пленок и фоторезиста жидкофазным методом. Обычно процесс центробежного формования подразделяют на четыре стадии: нанесение раствора, растекание, удаление лишнего раствора и испарение растворителей. Пленкообразующий раствор попадает на подложку на стадии нанесения, жидкость радиальным потоком растекается по подложке под действием центробежной силы, и в процессе испаряется растворитель с последующим образованием геля на поверхности подложки. Подбор режимов нанесения проводили на центрифуге для нанесения тонких пленок Arogee See 200X.

Для исследования электрофизических свойств полученных покрытий и сравнения их толщины был выбран следующий режим нанесения, позволяющий из полученных растворов формировать слои толщиной от 400 до 800 нм:

- пластина укладывается на вакуумный столик центрифуги и центрируется, включается вакуумный насос. Под пластиной создается вакуум $\sim 10^{-1}$ Па, который удерживает ее при нанесении;
- вакуумный столик вместе с закрепленной на нем пластиной приводится во вращение с помощью электродвигателя. Скорость вращения составляет 50 об/мин. Данная скорость вращения является достаточной для равномерного распределения пленкообразующего раствора по поверхности пластины;
- в пластиковую пипетку Пастера набирается 2 мл пленкообразующего раствора и аккуратно

выливается на вращающуюся пластину, от центра к краю;

– после разливания раствора происходит ускорение вращения вакуумного столика с закрепленной пластиной до скорости 1500 об/мин в течении 40 секунд (данного времени достаточно чтобы подсушить формируемое покрытие для его дальнейшего перемещения в печь).

После нанесения пластины помещают в муфельную печь и производят отжиг на воздухе. Пластины в печи разогревают до 400°C в течении 120 минут (скорость нагрева $\approx 3,3^{\circ}\text{C}$ в мин.) и выдерживают при данной температуре в течении 60 минут, после чего подложка с покрытием остывает в течении 60–80 минут вместе с печкой. После термообработки и остывания пластины извлекают из печи и помещают в специальные пластиковые контейнеры для дальнейшего перемещения и исследования их свойств.

2 Результаты и их обсуждение

Толщины и однородность получаемых золь-гель покрытий определяли по сколу кремниевой пластины с сформированным золь-гель покрытием с использованием растрового электронного микроскопа S-4800 (Hitachi, Япония).

На полученных РЭМ изображениях отчетливо просматриваются полученные слои золь-гель покрытий, которые имеют однородную структуру по всей толщине без видимых включений и дефектов (рисунок 2.1). Толщина полученных покрытий варьируется от 400 нм (для покрытия на основе ТЭОС) до 980 нм (для покрытия с соотношением МТЭС : ТЭОС – 2 : 1).

Полученные значения толщин диэлектрического слоя необходимы при расчете электрофизических значений получаемых золь-гель покрытий.

Экспериментальное исследование электрофизических свойств: вольт-фарадных (ВФХ) и вольт-амперных (ВАХ) характеристик проводили на стенде с зондовой станцией с помощью параметрического анализатора Keithley 4200A-SCS 3.

На рисунке 2.2 представлены ВФХ пластин с полученными диэлектрическими золь-гель покрытиями. Дополнительно для определения емкости плоских зон и напряжения плоских зон мы использовали широко представленные в литературе апробированные формулы и подходы [7], [8]. Стоит отметить, что результаты оценки емкости плоских зон и напряжения плоских зон из полученных графиков, через расчет среднего арифметического значения, незначительно отличаются от расчета по формулам, что может быть связано с усреднением результатов на основе серии из четырех измерений.

Для расчета основных характеристик полученных диэлектрических покрытий использовали табличные значения некоторых величин и констант (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Табличные значения величин, используемых для расчетов

Данные для расчета	Обозначение	Значение
Диэлектрическая проницаемость вакуума	ϵ_0	8,854 пФ/м
Площадь контакта металл-полупроводник	S	$0,72 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2$
Диэлектрическая проницаемость Si	ϵ_{Si}	11,7
Емкость SiO_2	C_{SiO_2}	425,81 пФ

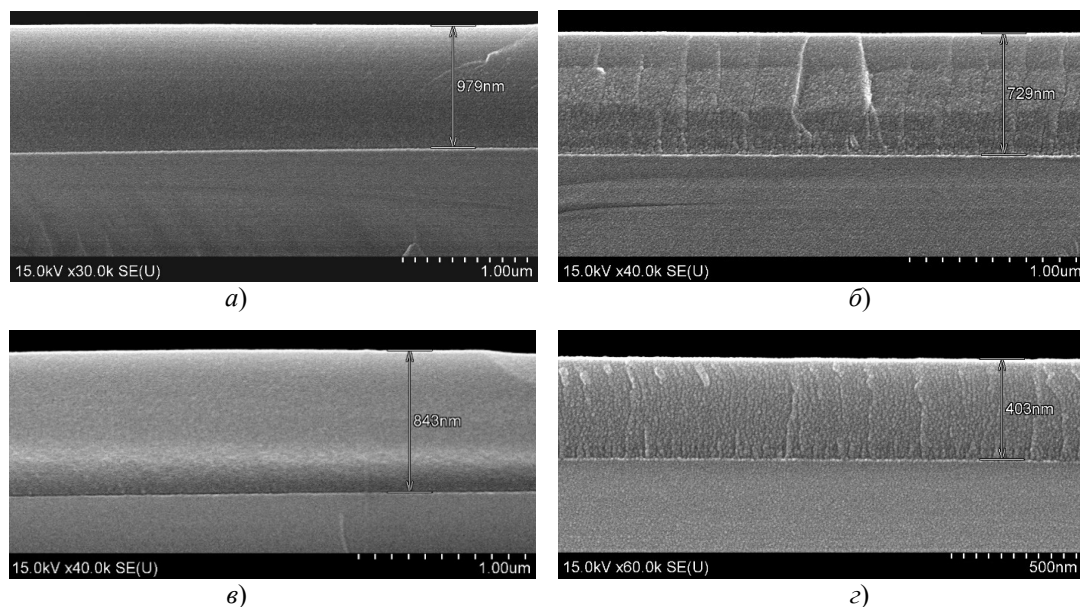
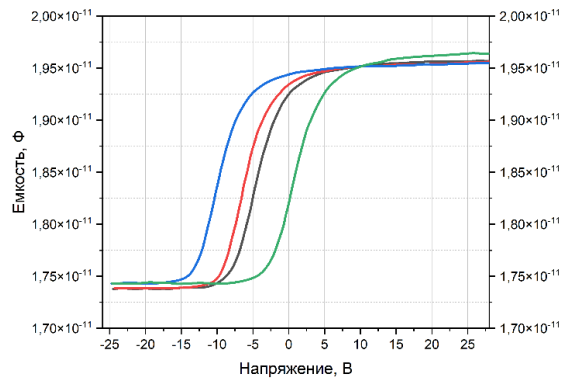
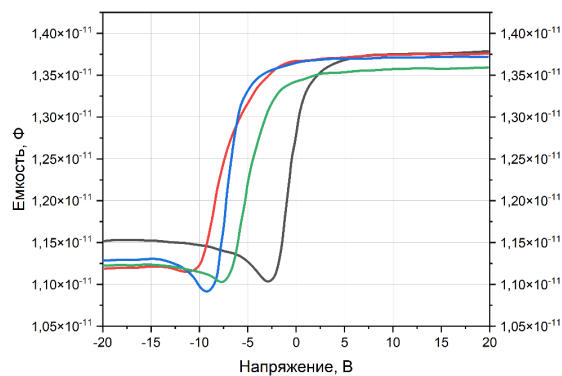


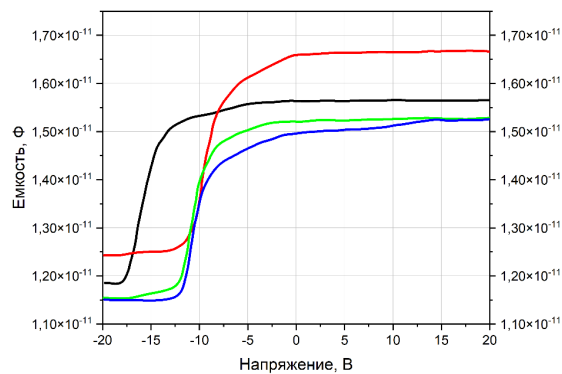
Рисунок 2.1 – Изображения продольных сколов исследуемых образцов с соотношением МТЭС : ТЭОС: а) 2 : 1; б) 4 : 3; в) 1 : 1; з) без МТЭС



ВФХ покрытий с соотношением
МТЭС : ТЭОС – 2 : 1



ВФХ покрытий с соотношением
МТЭС : ТЭОС – 4 : 3



ВФХ покрытий с соотношением
МТЭС : ТЭОС – 1 : 1

Рисунок 2.2 – ВФХ диэлектрических золь-гель покрытий (по 4 измерения)

Для расчета диэлектрической проницаемости SiO_2 слоя использована формула:

$$\varepsilon = \frac{C_{\max} d}{\varepsilon_0 S},$$

где $C_{\max}$ – емкость диэлектрика, ε – эффективная диэлектрическая проницаемость полученного покрытия, d – толщина диэлектрического слоя, S – площадь контакта металл-полупроводник, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Формула расчета емкости SiO_2 диэлектрика:

$$C_d = \frac{C_{\text{SiO}_2} C_{\max}}{C_{\text{SiO}_2} - C_{\max}}.$$

Формула расчета максимального значения области пространственного заряда (ОПЗ):

$$W = \left(\frac{C_{\max}}{C_{\min}} - 1 \right) \frac{\varepsilon_{\text{Si}}}{\varepsilon} d.$$

Основные электрофизические характеристики полученных диэлектрических золь-гель покрытий представлены в таблице 2.2.

Диэлектрическая проницаемость полученных покрытий варьируется от 1,53 до 2,51, что является хорошим результатом для органо-неорганических стекловидных диэлектриков толщиной до 1 мкм. Повышение концентрации МТЭС приводит к увеличению диэлектрической проницаемости получаемых покрытий, что может быть обусловлено формированием органо-неорганических соединений, имеющих более высокую диэлектрическую проницаемость по сравнению со стандартным оксидом на основе SiO_2 .

Результаты исследования вольт-фарадных характеристик показывают, что величина сдвига напряжения плоских зон отрицательна и в максимальном значении составляет около минус 9,6 В, что соответствует изменению плотности эффективного заряда на границе раздела $7,2 \times 10^{-8} \text{ м}^2$ и является небольшой и допустимой величиной для данной толщины диэлектрического слоя.

С использованием измеренных характеристик (таблица 2.2) произведены теоретические расчеты величины сдвига напряжения плоских зон. Для всех образцов эта величина меньше полученной в эксперименте и не превышает 7 В, что является оптимальной величиной для диэлектрика толщиной (0,7–1,0) мкм.

Для определения токов утечки были построены ВАХ характеристики полученных покрытий (рисунок 2.3).

Для покрытий из гибридных растворов на основе ТЭОС+МТЭС максимальные величины токов на порядок меньше, по сравнению с покрытием на основе ТЭОС. При этом рост тока утечки хорошо виден при $U > 75 \text{ В}$ (рисунок 2.3, а).

Так как рабочие напряжения микросхем, для которых разрабатываются данные покрытия, не превышают 50 В, приведём вольт-амперные характеристики в масштабе от 0 до 100 В (рисунок 2.3, б).

Усредненные величины токов утечки для исследуемых покрытий представлены в таблице 2.3.

Результаты исследования показывают, что в покрытии на основе ТЭОС наблюдается большая величина тока утечки, которая составляет 20 нА при $U = 50 \text{ В}$. Для остальных образцов величина тока утечки значительно меньше и составляет менее 1 нА для напряжения плюс 5 В и менее 3 нА для напряжения плюс 50 В.

Таблица 2.2 – Результаты обработки экспериментальных данных ВФХ золь-гель покрытий

Рассчитанные величины	Обозначение	Результат		
		Соотношение 2 : 1	Соотношение 4 : 3	Соотношение 1 : 1
Емкость диэлектрика (максимальное значение по ВФХ) ¹	$C_{\max}$	19,59 пФ	13,56 пФ	15,87 пФ
Емкость диэлектрика (минимальное значение по ВФХ) ¹	$C_{\min}$	17,39 пФ	10,45 пФ	11,89 пФ
Толщина диэлектрика ²	d	979 нм	729 нм	843 нм
Диэлектрическая проницаемость покрытия	ε	2,51	1,85	1,53
Емкость диэлектрика (расчетная)	C_d	19,64 пФ	13,73 пФ	15,88 пФ
Емкость плоских зон (расчетная)	C_{fb}	19,345 пФ	13,585 пФ	15,68 пФ
Емкость плоских зон (из графика) ¹	$C_{fb\text{-график}}$	18,49 пФ	11,83 пФ	13,89 пФ
Напряжение сдвига плоских зон (расчетная)	V_{fb}	–6 В	–0,5 В	–6,7 В
Напряжение сдвига плоских зон (из графика) ¹	$V_{fb\text{-график}}$	–9,6 В	–6,0 В	–11,7 В
Максимальное значение ОПЗ	W	0,58 мкм	1,372 мкм	2,157 мкм

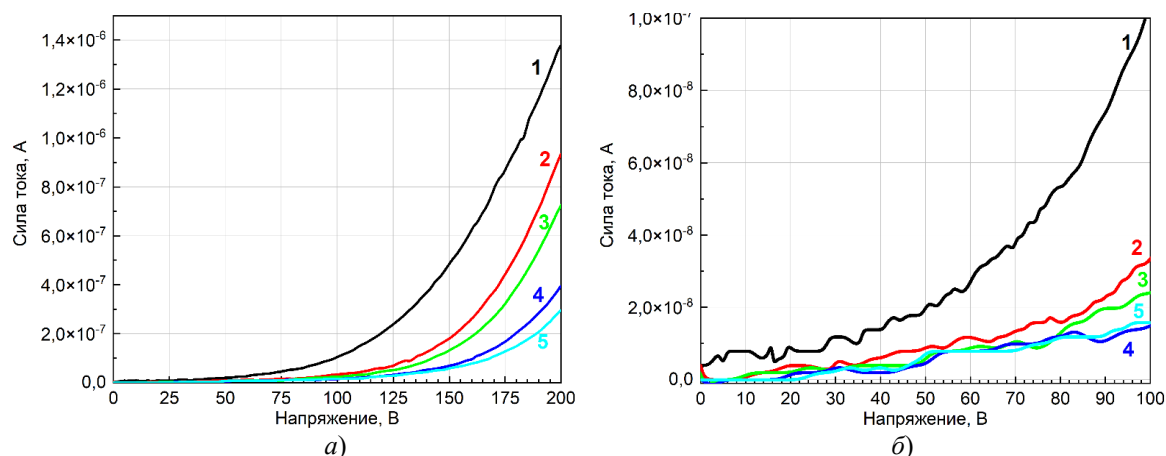
¹ среднее значение для 4 измерений, точность измерений составляет $\pm 0,04\%$ ² значение по РЭМ сколу

Рисунок 2.3 – Вольт-амперные характеристики полученных золь-гель покрытий: а) в масштабе до 200 В; б) – в масштабе до 100 В

Таблица 2.3 – Обобщенные данные по величине тока утечки

Соотношение (МТЭС : ТЭОС)	Номер кривой на графике (рисунок 2.3)	Усредненная величина тока утечки при напряжении + 5 В, нА	Усредненная величина тока утечки при напряжении + 50 В, нА
2 : 1	4	0,9	2,0
5 : 3	5	0,9	2,1
4 : 3	3	0,9	1,9
1 : 1	2	1,0	2,7
без МТЭС	1	6,0	20

Рост тока утечки при повышении напряжения, начиная с $U \approx 150$ В (за исключением 1 кривой), соответствует начальному участку пробоя диэлектрического слоя пластины. Видимые на графиках флуктуации и скачки на начальном

участке вольт-амперной характеристики имеют крайне малую изменяемую величину тока (порядка $0,1 \div 0,3$ нА) и могут быть связаны с погрешностью измерений.

Заключение

Разработаны составы пленкообразующих растворов с различным соотношением метилтриэтоксисилана к тетраэтилортосиликату. Проведены исследования вязкости полученных растворов с использованием капиллярного вискозиметра. Установлено, что вязкость полученных растворов изменяется в диапазоне от 4,6 сСт до 5,1 сСт, в зависимости от исходного состава, при этом за время хранения в течении 30 суток вязкость растворов изменилась не более чем на 4%, что делает их пригодными для формирования однородных покрытий на поверхности кремниевых пластин в интегральной микроэлектронике при заданных режимах нанесения.

Для расчета электрофизических значений установили толщину получаемых золь-гель покрытий по РЭМ сколу. Толщина полученных покрытий содержащих МТЭС варьируется от 729 нм до 980 нм, толщина покрытия на основе ТЭОС составляет 403 нм.

Диэлектрическая проницаемость полученных покрытий варьируется от 1,53 до 2,51, что является хорошим результатом для органико-неорганических стекловидных диэлектриков толщиной до 1 мкм.

Результаты исследования ВАХ показывают, что в покрытии на основе ТЭОС наблюдается большая величина тока утечки, которая составляет 20 нА при $U = 50$ В. Для остальных образцов величина тока утечки значительно меньше и составляет менее 1 нА для напряжения плюс 5 В и менее 3 нА для напряжения плюс 50 В.

С использованием измеренных характеристик произведены расчеты величины сдвига напряжения плоских зон. Для всех образцов эта величина не превышает 7 В, что является оптимальной величиной для использования полученных покрытий в технологии многоуровневых интегральных микросхем непосредственно в качестве межслойного диэлектрика.

Авторы работы выражают благодарность филиалу «Белмикроанализ» НТЦ «Белмикросистемы» ОАО «ИНТЕГРАЛ» за проведение исследований сколов тестовых пластин на растровом электронном микроскопе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Redzheb, M. Enabling bottom-up nanoelectronics fabrication by selective sol-gel dielectric-on-dielectric deposition / M. Redzheb, S. Armini // Materials Science and Engineering. – 2021. – Vol. 263. – P. 114808.

2. Термостимулированное течение легковлажных стекол при планаризации рельефа поверхности микроэлектронных структур / С.П. Жвавый, Г.Д. Ивлев, В.А. Пилипенко, В.Н. Пономарь // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68, № 11. – С. 135–137.

3. Планаризация межуровневого диэлектрика с использованием жидкого стекла / В.А. Пилипенко, В.Н. Пономарь, В.В. Горушко, В.В. Понарядов, Н.С. Кукова, А.В. Демьянович // Вестник БГУ. – 2005. – № 3. – С. 32–36.

4. Диэлектрические золь-гель покрытия на основе диоксида кремния для планаризации поверхности интегральных микросхем / В.В. Васильевич, В.Е. Гайшун, Д.Л. Коваленко, Сунгвок Мин, М.И. Москвичёв, А.Н. Петлицкий, Д.В. Жигулин // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 7–14.

5. Синтез и исследование силикатных золь-гель покрытий для микро- и нанoeлектроники / В.В. Васильевич, Д.Л. Коваленко, В.Е. Гайшун // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии. – 2014. – Т. 12, № 2. – С. 279–293.

6. Материалы современной электроники: учеб. пособие / В.Ф. Марков, Х.Н. Мухамедзянов, Л.Н. Маскаева; [под общ. ред. В. Ф. Маркова]; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 272 с.

7. Гуртов, В. Твердотельная электроника / В. Гуртов. – Москва: Техносфера, 2008. – 512 с.

8. Изучение электрооптических свойств структуры металл-диэлектрик-полупроводник методов вольт-фарадных характеристик / Н.А. Поклонский, Н.И. Горбачук, Д.А. Кириленко. – Минск: Белгосуниверситет, 1997. – 62 с.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (№Т21АРМГ-004) и Государственной программы научных исследований Республики Беларусь 2.16 «Наноструктура».

Поступила в редакцию 24.02.2022.

Информация об авторах

Васильевич Василий Васильевич – ст. преподаватель
Коваленко Дмитрий Леонидович – к.ф.-м. н., доцент
Гайшун Владимир Евгеньевич – к.ф.-м. н., доцент
Сидский Виталий Валерьевич – к.т. н., доцент
Косенок Янина Александровна – к.т. н., доцент
Жигулин Дмитрий Владимирович

3D СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА БЕЗ ГАУССОВОЙ АПОДИЗАЦИИ С ПЕРЕНОСИМОЙ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТЬЮ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

KUMMER 3D LIGHT BEAMS WITHOUT THE GAUSSIAN APODIZATION WITH TRANSFERABLE TERMINATING POWER

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Получены аналитические выражения для циркулярных 3D световых пучков Куммера без гауссовой аподизации с непрерывным комплексным индексом ν . Найдены ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков, чтобы они обладали конечной мощностью и были физически реализуемыми. Графическое моделирование таких 3D пучков Куммера подтвердило, что, действительно, существуют определенные непрерывные значения свободного комплексного параметра ν , для которых пучки Куммера переносят конечную мощность.

Ключевые слова: параксиальные пучки, циркулярные пучки, пучки Куммера.

Для цитирования: Гиргель, С.С. 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 18–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_18 – EDN: GMTCSS

Abstract. The analytical expressions for Kummer circular 3D light beams without the Gaussian apodization with the continuous complex coefficient ν are obtained. The restrictions on possible values of the free parameters of such beams provided that they possess transferred power, have been discovered and physically realised. The pictorial modelling of such Kummer 3D beams has confirmed, that, indeed, there are certain continuous values of the free complex parametre ν for which Kummer beams transfer terminating power.

Keywords: paraxial beams, circular beams, Kummer beams.

For citation: Girgel, S.S. Kummer 3D light beams without the Gaussian apodization with transferable terminating power / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 18–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_18 (in Russian). – EDN: GMTCSS

Введение

Обычно [1], [2] при описании параксиальных световых пучков используют аподизацию соответствующей функции в форме гауссиана, чтобы функция, описывающая такой пучок, была квадратично интегрируемой и поэтому пучок переносил конечную мощность. Так, например, хорошо известны пучки Эрмита – Гаусса, Бесселя – Гаусса, Лагерра – Гаусса и т.д. Однако присутствие гауссиана в комплексной амплитуде параксиального пучка вовсе не обязательно. В [3] нами было предложено новое решение скалярного 2D параболического волнового уравнения. Это решение не содержит аподизацию гауссианом, но, тем не менее, описывает 2D световые пучки Куммера, которые переносят конечную мощность при определённых значениях свободных параметров.

В данной работе этот формализм применяется для нахождения новых решений параболического уравнения. Получены выражения, описывающие циркулярные 3D световые пучки

Куммера с непрерывным комплексным индексом ν без гауссиана и обсуждаются ограничения на значения их свободных параметров.

1 Циркулярные 3D пучки Куммера

Для гармонических волн вида $f(\mathbf{r}, t) = \psi \exp(-i\omega t)$ скалярное параксиальное уравнение, описывающее амплитуду ψ скалярных световых пучков, имеет вид [2]

$$(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 2ik\partial_z)\psi = 0, \quad (1.1)$$

где $k = k_0 n$, $k_0 = \omega/c$. В настоящей работе примененный нами формализм [3] обобщается на 3D скалярные пучки с цилиндрической симметрией. Полезно предварительно перейти к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Y = y/x_0, \quad Z = z/z_0. \quad (1.2)$$

Здесь x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – определенные характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OY соответственно.

Кроме того, осуществим дополнительный переход $Z \rightarrow Q$, где $Q = Z - Q_0$ – введенный безразмерный комплексный параметр пучка: причем $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$. Здесь и далее штрихами будем помечать вещественные и мнимые части комплексных величин.

При этом параксиальное уравнение (1.1) в цилиндрической системе координат (R, φ, Z) , где безразмерный радиус $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, можно представить в форме

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4i \frac{\partial}{\partial Q} \right] \psi(R, \varphi, Q), \quad (1.3)$$

Обычно [4]–[5] решения параболического уравнения типа (1.3) ищут в виде функции, содержащей гауссиан [1], [3]

$$G(R, Z) = \frac{1}{Q} \exp\left(i \frac{R^2}{Q}\right),$$

который является фундаментальным решением параксиального уравнения (1.3). В итоге получают [6], [7] решения, описывающие 3D пучки Куммера – Гаусса, содержащие гауссиан Г. Бэндрес [7] называет такие пучки циркулярными.

Однако искать решение уравнения (1.3), включающее гауссиан, вовсе не обязательно. Можно получить решение уравнения (1.3), не содержащее гауссиан явно, но, тем не менее, обладающее квадратичной интегрируемостью (КИ). Такие пучки переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми.

Чтобы найти такого типа решение уравнения (1.3) через функцию Куммера, произведем замену переменных $R = R_1 \sqrt{-iQ}$ в (1.3). Тогда приходим к уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R_1^2} + \left(\frac{1}{R_1} - 2R_1 \right) \frac{\partial}{\partial R_1} + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4Q \frac{\partial}{\partial Q} \right] \times \quad (1.4)$$

$$\times \psi_1(R_1, \varphi, Q) = 0.$$

Чтобы разделить переменные, введем стандартную подстановку $\psi(R_1, \varphi, Q) = f_1(R_1) f_2(\varphi) f_3(Q)$. Получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{2Q}{f_3} \frac{df_3}{dQ} = m + 2\nu, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (1.6)$$

$$\left[\frac{d^2}{dR_1^2} + \left(\frac{1}{R_1} - 2R_1 \right) \frac{d}{dR_1} + 2(m + 2\nu) - \frac{m^2}{R_1^2} \right] f_1 = 0. \quad (1.7)$$

Здесь $(-m^2)$ и $(m + 2\nu)$ – постоянные разделения. Интегрируя (1.5), находим, что

$$f_3 = \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{\nu+m/2}. \text{ Можно считать далее, без по-}$$

тери общности, что $Q'_0 = 0$. Функцию $f_2(\varphi)$ (фазовый множитель) можно взять в форме

$f_2 = \cos m\varphi + ib \sin m\varphi$, где b – азимутальный коэффициент модуляции, $b \in [0; 1]$. В уравнении (1.7) одно независимое решение можно записать в виде: $f_1 = (R_1^2)^{m/2} M(-\nu, m+1; R_1^2)$. Теперь запишем искомое решение для функции ψ , учитывая, что $\psi = f_1 f_2 f_3$. Получаем [8]:

$$\psi = R^m M\left(-\nu, m+1; i \frac{R^2}{Q}\right) \cdot \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{\nu} \cdot f(m, \varphi). \quad (1.8)$$

Здесь M – конфлюэнтная гипергеометрическая функция Куммера 1 рода (${}_1F_1$). Выражение (1.8) не содержит явно гауссиана $G(R, Z)$ и описывает новый тип пучков – скалярные циркулярные 3D пучки Куммера. Такие пучки зависят от безразмерных переменных R, φ, Z и четырех параметров ν, m, Q_0, b и, при определенных условиях, могут переносить через свое поперечное сечение конечную мощность.

2 Условия КИ циркулярных световых 3D пучков Куммера без гауссиана

Мы нашли, что при заданных значениях переменных и параметров всегда существует решение (1.8) для амплитуд 3D световых пучков Куммера. Однако эти решения должны описывать физически реализуемые пучкам с переносимой конечной мощностью. Будем считать, как обычно, что $m = 0, 1, 2, \dots$

На практике интерес представляют пучки конечной мощности, которые можно физически реализовать. Амплитуда такого пучка должна быть конечной для всех координат R . Кроме того, при $|R| \rightarrow \infty$ амплитуда ψ пучка должна стремиться к нулю и обладать КИ, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dX dY$ должен быть конечным.

Проведем поиск условий выполнения КИ для циркулярных 3D световых пучков Куммера. Для этого достаточно исследовать свойства амплитуд функций ψ при $R \rightarrow \infty$. Асимптотическое поведение функции $M(a, b, \Phi)$ при $|\Phi| \rightarrow \infty$ описывается формулой [9], [10], [11]

$$M(a, b, \Phi) = \frac{\exp(-i\pi a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \Phi^{-a} + \frac{\exp(\Phi) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a)} \Phi^{a-b}, \quad (2.1)$$

где $a \neq 0, -1, -2, \dots$ и Γ – гамма-функция. Обсудим условия КИ функции ψ при $R \rightarrow \infty$. Получаем, после некоторых преобразований, что асимптотически

$$\psi \propto \frac{R^{2\nu+m}}{\Gamma(m+1+\nu)} + \frac{\exp(iR^2/Q) R^{-2\nu-m-2}}{\Gamma(-\nu)}$$

и исследуем условия КИ функций (1.8), следуя методике [3]. Анализ показывает, что необходимым условием КИ комплексной амплитуды циркулярных пучков Куммера является ограничение $Q_0'' > 0$. Для удобства необходимые и достаточные условия КИ представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Условия КИ для 3D скалярных циркулярных световых пучков Куммера без гауссиана с непрерывным комплексным индексом

№	Ограничения на индекс ($m = 0, 1, 2, \dots$; $Q_0'' > 0$; $N = 1, 2, 3, \dots$)	Предел $ \psi $ при $ x \rightarrow \infty$	Выполнение условий КИ
1	$v = -m - N$	$ \psi \rightarrow 0$	да
2.1	$v' > -m/2$	$ \psi \rightarrow \infty$	нет
2.2	$v' = -m/2$	$ \psi \rightarrow const$	нет
2.3	$v' < \left[\frac{1+m}{2}, -\frac{m}{2} \right)$	$ \psi \rightarrow 0$	нет
2.4	$v' < -(1+m)/2$	$ \psi \rightarrow 0$	да

Для случая № 1 выражение (1.8) принимает вид

$$\psi_1 = R^m \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{-N-m} \times \times M \left(N+m, m+1; i \frac{R^2}{Q} \right) f(m, \varphi). \quad (2.2)$$

Найденное решение (2.2) для 3D пучков Куммера можно также получить из таблицы 2.1 статьи автора [8], вариант № 3, осуществляя предельный переход $Q_0'' \rightarrow \infty$ и переобозначая $P_0'' \rightarrow Q_0''$.

Применяя далее преобразование Куммера

$$M(a, b; x) = \exp(x) M(b-a, b; -x)$$

[8] к (2.2), получаем

$$\psi_1 = R^m \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{-N-m} \exp \left(i \frac{R^2}{Q} \right) \times \times M \left(-n, m+1; -i \frac{R^2}{Q} \right) f(m, \varphi).$$

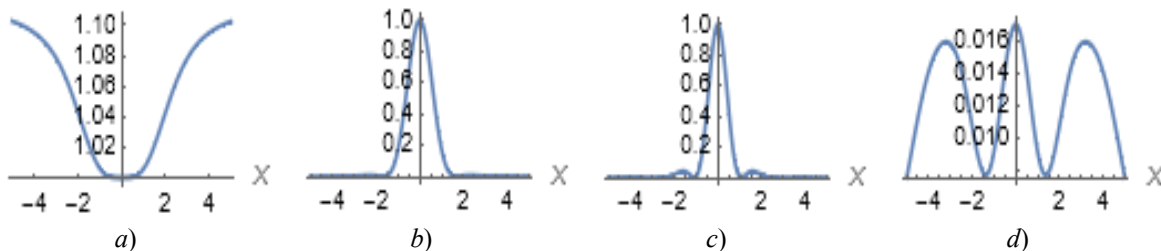


Рисунок 3.1 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка:

a) $v' = 0$; $v'' = 0,26$; $Z = 0$; $Q_0'' = 2$; b) $v' = -1,6$; $v'' = 0$; $Z = 0$; $Q_0'' = 2$;
c) $v' = -3$; $v'' = 0$; $Z = 0$; $Q_0'' = 2$; d) $v' = 0$; $v'' = -0,1$; $Z = 3,4$; $Q_0'' = 2$. Во всех случаях $m = 0$.

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$. Но, как известно [10],

$$M(-n, m+1; x) = \frac{\Gamma(m+1) n! R^2}{\Gamma(m+n+1)} L_n^m(x),$$

где $L_n^m(x)$ – присоединенный полином Лагерра. Поэтому, с точностью до постоянных несущественных множителей,

$$\psi_1 = R^m \left(\frac{Q(Z)}{Q(0)} \right)^{-n-m-1} L_n^m \left(n, -i \frac{R^2}{Q} \right) \times \times \exp \left(i \frac{R^2}{Q} \right) \cdot f(m, \varphi). \quad (2.3)$$

Отсюда видно, что последнее выражение описывает элегантные пучки Лагерра – Гаусса (eL-G) [12].

Заметим, что решения 2.1–2.4 таблицы 2.1 соответствуют случаям 5.1–5.4 из таблицы 2.1 статьи [8] после последующих переобозначений $P_0'' \rightarrow Q_0''$. Эти решения пока не исследовались и представляют значительный интерес. Несложно видеть, что пучки варианта 1 таблицы 2.1 являются частными случаями пучков варианта 2.4. Однако, поскольку условия 1 описывают пучки Куммера, эквивалентные eL-G пучкам с целыми индексами v , а ограничения 2.1–2.4 характеризуют пучки Куммера с непрерывными комплексными значениями индекса v , то мы их разделяем.

3 Графическое моделирование картин интенсивности скалярных циркулярных пучков Куммера комплексного индекса v без гауссовой аподизации

Нами проводилось аналитическое и графическое исследование пучков Куммера. На рисунках 3.1 и 3.2 представлены результаты графического моделирования картин интенсивности пучков Куммера непрерывного комплексного индекса v , где взят, для простоты, азимутальный параметр модуляции $b=1$. В последнем случае картина интенсивности пучка не зависит от азимута, поэтому на рисунках изображены только продольные сечения пучка вдоль оси Z .

Рисунок 3.1, а) иллюстрирует, что, действительно, при $v' = 0$ (вариант 2.2) при возрастании R амплитуда пучка $\psi \rightarrow const$. При этом мнимая часть v'' параметра v не влияет на условия КИ, деформируется лишь поверхность интенсивности.

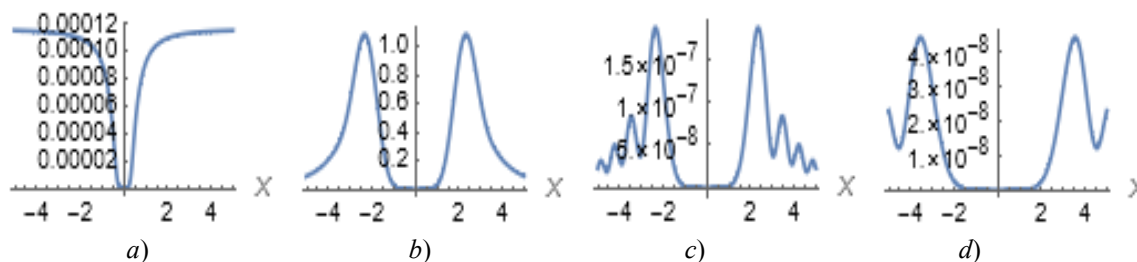


Рисунок 3.2 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка:

a) $v' = -2$; $v'' = 0$; $Z = 0,02$; $Q_0'' = 0,03$; b) $v' = -3$; $v'' = 0,1$; $Z = 0,9$; $Q_0'' = 0,7$;
c) $v' = -3$; $v'' = 0$; $Z = 0,9$; $Q_0'' = 0,03$; d) $v' = -3$; $v'' = 0$; $Z = 2$; $Q_0'' = 0,03$. Во всех случаях $m = 4$.

Для пучков Куммера с КИ всегда есть центральный пик (рисунок 3.1, b), с увеличением Z или Q_0'' появляется и растет дополнительно концентрическое кольцо (рисунок 3.1, c и d).

На Рисунке 3.2 везде параметр $m = 4$ и поэтому все пучки полые. Рисунок 3.2, a) иллюстрирует, что, действительно, при $v' = -2$ (вариант 2.2) при возрастании R амплитуда пучка $\psi \rightarrow \text{const}$. Картины интенсивности пучков Куммера с КИ всегда представляют собой кольцо (рисунок 3.2, b). При малых значениях параметра Q_0'' вокруг главного кольца появляются небольшие дополнительные кольца, которые возрастают с увеличением Z (рисунок 3.2, c и d).

Заключение

В настоящей работе получены выражения, характеризующие новые типы пучков – 3D скалярные циркулярные световые пучки Куммера с непрерывным комплексным индексом v без гауссовой аподизации. Они характеризуются тремя свободными параметрами: двумя вещественными – (b, m) и двумя комплексными параметрами (Q_0, v) . Введенные здесь пучки можно считать предельными случаями известных 3D циркулярных пучков [7]–[8].

Найдены условия физической реализуемости (конкретнее, КИ) новых типов пучков Куммера с переносимой конечной мощностью. Графическое моделирование их интенсивности подтвердило эти выводы.

Переход от пучков Куммера – Гаусса к новым пучкам Куммера с комплексными значениями параметра v расширяет класс известных в настоящее время пучков с цилиндрической симметрией. Это создает дополнительные возможности для выбора пучков с наперед заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.

2. Абрамочкин, Е.Г. Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.

3. Гиргель, С.С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

4. Bandres, M.A. Vector Helmholtz – Gauss and vector Laplace – Gauss beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2157.

5. Gori, F. Bessel-Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Opt. Commun. – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.

6. Гиргель, С.С. Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19–23.

7. Bandres, M.A. Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.

8. Гиргель, С.С. Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38) – С. 16–20.

9. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – Москва: Мир, 1974. – 418 с.

10. Справочник по специальным функциям; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

11. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – Москва: Наука, 1977. – 342 с.

12. Zauderer, E. Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams / E. Zauderer // JOSA. A. – 1986. – Vol. 3, № 4. – P. 465–469.

Поступила в редакцию 11.02.2022.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ С ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION OF THE LOGUNOV – TAVKHELIDZE EQUATION WITH A LINEAR POTENTIAL IN THE RELATIVISTIC CONFIGURATIONAL REPRESENTATION

Yu.A. Grischechkin, V.N. Kapshai

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Найдены приближённые аналитические решения уравнения Логунова – Тавхелидзе в интегральной форме с линейным в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом. Полученные волновые функции выражены через функцию Макдональда, а условие квантования энергии является трансцендентным уравнением.

Ключевые слова: уравнение Логунова – Тавхелидзе, релятивистское конфигурационное представление, линейный потенциал, преобразование Лапласа, приближённое аналитическое решение, функция Макдональда, условие квантования энергии.

Для цитирования: Гришечкин, Ю.А. Приближённое аналитическое решение уравнения Логунова – Тавхелидзе с линейным потенциалом в релятивистском конфигурационном представлении / Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 22–25. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_22 – EDN: IMQFYS

Abstract. The approximate analytical solutions of the Logunov – Tavkhelidze equation in integral form with a linear potential in the relativistic configurational representation are found. The obtained wave functions are expressed in terms of the Macdonald function while the energy quantization condition is a transcendental equation.

Keywords: Logunov – Tavkhelidze equation, relativistic configurational representation, linear potential, Laplace transformation, approximate analytical solution, Macdonald function, energy quantization condition.

For citation: Grischechkin, Yu.A. Approximate analytical solution of the Logunov – Tavkhelidze equation with a linear potential in the relativistic configurational representation / Yu.A. Grischechkin, V.N. Kapshai // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 22–25. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_22 (in Russian). – EDN: IMQFYS

Введение

Уравнение Логунова – Тавхелидзе для сферически-симметричной волновой функции $\psi(2E, r)$ системы двух скалярных частиц одинаковой массы m в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) имеет вид [1], [2]

$$\psi(2E, r) = \int_0^\infty G(E, r, r') V(r') \psi(2E, r') dr', \quad (0.1)$$

где параметр $2E$ – энергия двухчастичной системы, $r \geq 0$ – координата в РКП, $V(r)$ – потенциал, $G(E, r, r')$ – функция Грина, имеющая следующую форму:

$$G(E, r, r') = G(E, r - r') - G(E, r + r'), \quad (0.2)$$

$$G(E, r) = \frac{-i}{m \operatorname{sh} 2\chi} \frac{\operatorname{sh}(\pi/2 + i\chi)mr}{\operatorname{sh}(\pi mr/2)}.$$

Величина $\chi \geq 0$ в (0.2) связана с энергией $2E$ по формуле $2E = 2m \operatorname{ch} \chi$.

В данной работе мы рассматриваем методы приближённого аналитического и численного решений уравнения (0.1) с линейным потенциалом в РКП следующего вида:

$$V(r) = \lambda r, \quad (0.3)$$

где $\lambda > 0$ – константа связи.

1 Приближённое аналитическое решение

Выполним преобразование Лапласа [3] над уравнением (0.1). В результате получим равенство

$$\varphi(2E, z) = \int_0^\infty g(E, z, r') V(r') \psi(2E, r') dr', \quad (1.1)$$

где введены обозначения для изображения волновой функции, определяемого по формуле [3]

$$\varphi(2E, z) = \int_0^\infty \exp(-zr) \psi(2E, r) dr, \quad (1.2)$$

и интеграла

$$g(E, z, r') = \int_0^\infty \exp(-zr) G(E, r, r') dr. \quad (1.3)$$

Величина z – комплексная переменная функции-изображения. Вычисление интеграла (1.3) удобно выполнять, используя представление функции Грина в форме интеграла Фурье [1], [2]

$$G(E, r, r') = \frac{-2m}{\pi} \int_0^\infty \sin(\chi_p m r) G_{MR}(E, \chi_p) \sin(\chi_p m r') d\chi_p, \quad (1.4)$$

где мы использовали обозначение для функции Грина в импульсном представлении

$$G_{MR}(E, \chi_p) = \frac{1}{m^2 \operatorname{ch}^2 \chi_p - E^2 - i0}.$$

После подстановки (1.4) в (1.3) и выполнения двойного интегрирования получим выражение:

$$g(E, z, r') = -\exp(-zr') G_{MR}(E, iz/m) + \frac{2}{\operatorname{sh} 2\chi} \sum_{s=0}^\infty \frac{\chi_s^{(-)} \exp(i\chi_s^{(-)} m r')}{z^2 + (m\chi_s^{(-)})^2} - \frac{2}{\operatorname{sh} 2\chi} \sum_{s=0}^\infty \frac{\chi_s^{(+)} \exp(i\chi_s^{(+)} m r')}{z^2 + (m\chi_s^{(+)})^2}, \quad (1.5)$$

где $\chi_s^{(+)} = \chi + i\pi s$, $\chi_s^{(-)} = -\chi + i\pi + i\pi s$ – полюса функции $G_{MR}(E, \chi_p)$. Подстановка потенциала (0.3) и выражения (1.5) в (1.1), а также учёт формулы (1.2) приводит к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \varphi(2E, z) - \lambda G_{MR}(E, iz/m) \varphi_z(2E, z) = \\ = \frac{2\lambda}{\operatorname{sh} 2\chi} \sum_{s=0}^\infty \left[\frac{\chi_s^{(+)}}{(m\chi_s^{(+)})^2 + z^2} \varphi_z(2E, -i\chi_s^{(+)} m) - \frac{\chi_s^{(-)}}{(m\chi_s^{(-)})^2 + z^2} \varphi_z(2E, -i\chi_s^{(-)} m) \right], \end{aligned} \quad (1.6)$$

где индексом z обозначена производная по соответствующей переменной.

Предположим теперь, что в равенстве (1.6) можно пренебречь суммой, стоящей в правой части, тогда это равенство упрощается до следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\varphi_z(2E, z) = \frac{1}{\lambda} G_{MR}^{-1}(E, iz/m) \varphi(2E, z). \quad (1.7)$$

Нахождение общего решения уравнения (1.7) и последующая подстановка полученной функции в формулу для обращения преобразования Лапласа [3]

$$\psi(2E, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(zr) \varphi(2E, z) dz$$

приводит к следующему интегральному выражению для волновой функции:

$$\begin{aligned} \psi(2E, r) = \\ = \frac{m}{2\pi} C \int_0^\infty \cos \left[\left(r - (E^2 - m^2/2)/\lambda \right) \frac{m}{2} t + \frac{m^3}{4\lambda} \operatorname{sh} t \right] dt, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где C – неизвестная константа, возникшая при решении уравнения (1.7).

Получим нерелятивистский предел интегральной формулы (1.8). Для этого выполним в ней замену переменной $x = mt/2$ и устремим массу m к бесконечности. В результате, после несложных преобразований, мы получим интегральное представление функции Эйри [3], т. е. решение уравнения Шрёдингера с запирающим потенциалом в координатном представлении [4]. Интеграл в формуле (1.8) может быть выражен через функцию Макдональда $K_\nu(z)$ [3], а волновая функция представлена в виде

$$\begin{aligned} \psi(2E, r) = \\ = \frac{m}{2\pi} C \exp \left(-\frac{\pi m}{4} \left(r - (E^2 - m^2/2)/\lambda \right) \right) \times \\ \times K_{i\frac{m}{2} \left(r - (E^2 - m^2/2)/\lambda \right)} \left(\frac{m^3}{4\lambda} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из уравнения (0.1) следует, что волновая функция обращается в ноль при $r = 0$. Взяв формулу (1.9) в указанной точке и приравняв её к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение:

$$K_{im/(8\lambda) \left((2E)^2 - 2m^2 \right)} \left(m^3/(4\lambda) \right) = 0, \quad (1.10)$$

которое является условием квантования энергии системы $2E^{(n)}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, выражения (1.9), (1.10) являются приближённым решением уравнения Логанова – Тавхелидзе с линейным в РКП потенциалом (0.3).

В следующем разделе мы найдём численные решения интегрального уравнения (0.1) с потенциалом (0.3) и выполним их сравнение с решениями, полученными описанным методом, с целью проверки его эффективности.

2 Численное решение интегрального уравнения

Для нахождения численного решения интегрального уравнения (0.1) был использован метод, неоднократно применявшийся для нахождения решений ковариантных двухчастичных уравнений в случае резонансных состояний [5]–[8]. Метод состоит в замене интеграла в уравнении (0.1) интегральной суммой по одной из квадратурных формул с последующим сведением полученных таким образом равенств к линейным системам однородных алгебраических уравнений [9]:

$$M\psi = 0;$$

$$M_{mn} = \delta_{mn} - w_n G(2E, r_m, r_n) V(r_n), \quad (2.1)$$

где M – основная матрица системы, ψ – вектор, составленный из значений волновой функции в узловых точках r_n квадратурной формулы, w_n – весовые коэффициенты квадратурной формулы, δ_{mn} – элементы единичной матрицы. Условие

существования ненулевых решений системы уравнений (2.1) – равенство нулю детерминанта матрицы M

$$f(2E) = \det M = 0 \quad (2.2)$$

является уравнением относительно дискретных значений величины $2E$. Таким образом, уравнение (2.2), фактически, является условием квантования энергии. Предварительный поиск корней уравнения (2.2) целесообразно представить графически на комплексной плоскости величины $2E$. На рисунке 2.1 сплошной линией изображены нули действительной части $f(2E)$, штриховой – мнимой части, кружками обведены корни уравнения (2.2).

На рисунке 2.1 видно, что корни расположены на вещественной оси. В таблице 2.1 приведены значения обезразмеренной энергии

$$2\varepsilon_{num} = \frac{2E_{num}}{m},$$

найденные численным решением интегрального уравнения, и значения энергии

$$2\varepsilon_{appr} = \frac{2E_{appr}}{m},$$

полученные численным решением приближённого трансцендентного уравнения (1.10).

Величины энергии найдены с точностью до 6 знаков после запятой и выше. Насколько полученные величины энергии оказываются близкими можно судить по приведенным в таблице 2.1 значениям величины $\Delta = |2\varepsilon_{appr} - 2\varepsilon_{num}|$. Как видно, с ростом величины константы связи λ точность значений энергии, найденных при решении уравнения (1.10), снижается, а с ростом номера состояния n – повышается.

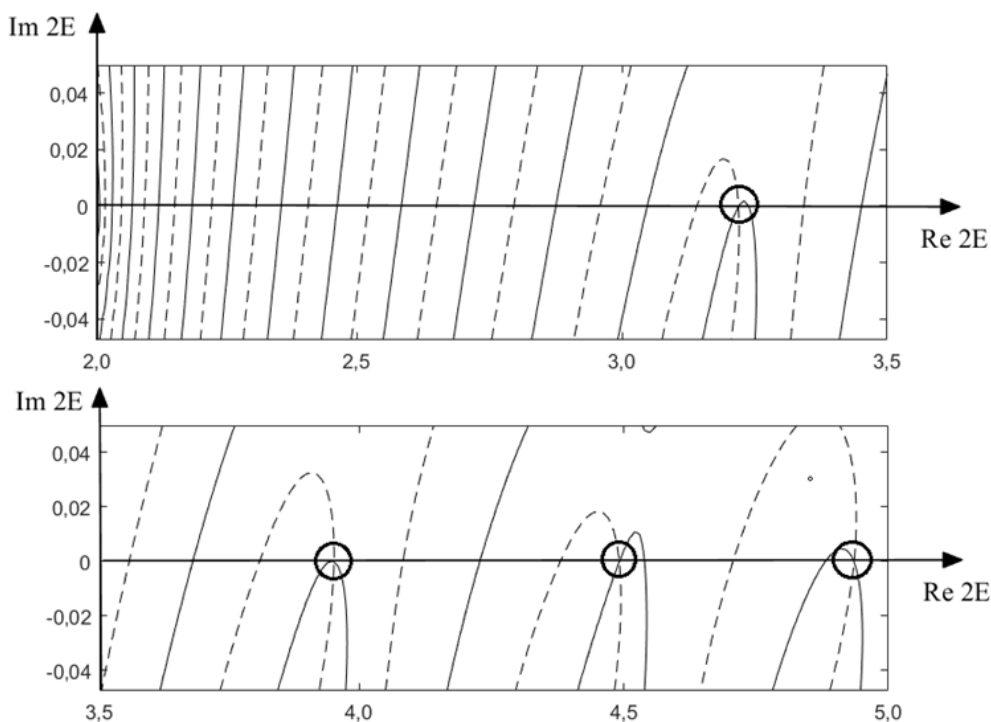


Рисунок 2.1 – Корни уравнения (2.2) при $m = 1$, $\lambda = 0,5$

Таблица 2.1 – Значения обезразмеренной энергии $2E/m$

n	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	Δ	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	Δ	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	Δ
$\lambda = 0,5$				$\lambda = 1,0$			$\lambda = 2,0$		
0	3,2193	3,2257	0,0064	3,8014	3,8158	0,0144	4,6203	4,6500	0,0297
1	3,9527	3,9557	0,0030	4,8325	4,8385	0,0060	6,0511	6,0624	0,0113
2	4,4914	4,4934	0,0020	5,5804	5,5841	0,0037	7,0798	7,0863	0,0065
3	4,9349	4,9363	0,0014	6,1925	6,1951	0,0026	7,9185	7,9230	0,0045
$\lambda = 4,0$				$\lambda = 8,0$			$\lambda = 16,0$		
0	5,7570	5,8132	0,0562	7,3200	7,4196	0,0996	9,4574	9,6247	0,1673
1	7,7246	7,7444	0,0198	10,0106	10,0438	0,0332	13,1256	13,1797	0,0541
2	9,1310	9,1422	0,0112	11,9280	11,9463	0,0183	15,7367	15,7660	0,0293
3	10,2755	10,2830	0,0075	13,4868	13,4989	0,0121	17,8594	17,8786	0,0192

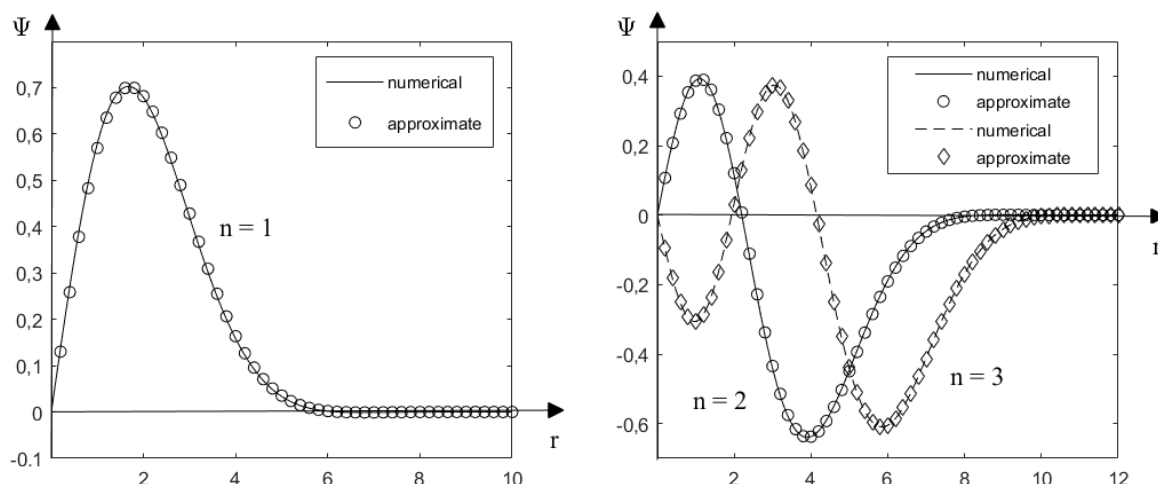


Рисунок 2.2 – Волновые функции первых трёх состояний при $m = 1$, $\lambda = 1$

На рисунке 2.2 приведены графики волновых функций, найденных аналитически по приближённой формуле (1.9) (approximate) и численным решением интегрального уравнения (numerical). Графики приближённых аналитических волновых функций визуально неотличимы от графиков, построенных на основании численных решений.

Таким образом, рассмотренный метод позволяет найти решения с хорошей точностью для указанных значений константы связи λ .

Заключение

Таким образом, в данной работе получены приближённые аналитические решения уравнения Логунова – Тавхелидзе с линейным в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом. При этом найденные волновые функции выражены через функцию Макдональда, а собственные значения энергии являются решениями трансцендентного уравнения. Сравнение полученных решений с численными показало эффективность предложенного метода. В дальнейшем мы планируем выполнить исследования, связанные с критериями применимости рассмотренного в данной работе приближённого аналитического метода, а также использовать этот метод для решения релятивистских двухчастичных уравнений в интегральной форме с другими типами взаимодействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.
2. Kapshai, V.N. One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

4. Теоретическая физика: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 5-е изд. – Москва: Физматлит, 2002. – Т. 3: Квантовая механика: нерелятивистская теория. – 808 с.

5. Kapshai, V. Integral equations for different wave functions and their use for resonance finding / V. Kapshai, K. Shilyaeva, N. Elander // J. Phys. B. – 2009. – Vol. 42, № 4. – P. 044001.

6. Капшай, В.Н. Определение влияния резонансов на сечение рассеяния на основе интегрального уравнения Фредгольма / В.Н. Капшай, К.П. Шильяева // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 10–17.

7. Капшай, В.Н. Резонансные состояния составных систем и ковариантные двухчастичные уравнения теории поля / В.Н. Капшай, К.П. Шильяева, Ю.А. Гришечкин // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности: Сборник научных трудов / Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 2011. – С. 79–88.

8. Гришечкин, Ю.А. Метод комплексного поворота для двухчастичных уравнений в импульсном представлении и резонансные состояния / Ю.А. Гришечкин, М.С. Данильченко, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 21–25.

9. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

Поступила в редакцию 04.05.2022.

Информация об авторах

Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент
Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛАЗЕРНОЙ ПОЛИРОВКИ КВАРЦЕВОГО СТЕКЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПЛАНИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В.А. Емельянов¹, Е.Б. Шершневу², Ю.В. Никитюк², С.И. Соколов², И.Ю. Аушев³

¹ОАО «Интеграл», Минск

²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

³Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск

OPTIMIZATION OF LASER POLISHING OF QUARTZ GLASS USING THE METHOD OF PLANNING COMPUTATIONAL EXPERIMENTS

V.A. Emelyanov¹, E.B. Shershnev², Y.V. Nikitjuk², S.I. Sokolov², I.Y. Aushev³

¹JSC "INTEGRAL", Minsk

²Francisk Skorina Gomel State University

³University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk

Аннотация. В данной работе с использованием метода полного факторного эксперимента и метода перебора параметров выполнена оптимизация процесса лазерной полировки кварцевого стекла. В результате конечно-элементного моделирования определены режимы лазерной полировки кварцевого стекла с использованием CO₂-лазера, обеспечивающие заданные значения температуры в зоне обработки при минимальных значениях термоупругих напряжений в кварцевых пластинах.

Ключевые слова: лазерная полировка, кварцевая пластина, ANSYS.

Для цитирования: Оптимизация лазерной полировки кварцевого стекла с использованием метода планирования вычислительных экспериментов / В.А. Емельянов, Е.Б. Шершневу, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, И.Ю. Аушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 26–30. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_26 – EDN: NRYSQT

Abstract. In this work, using the method of full factorial experiment and the method of enumeration of parameters, the process of laser polishing of quartz glass is optimized. As a result of finite element modeling, the modes of laser polishing of quartz glass using a CO₂ laser were determined. These modes provide the specified temperatures in the treatment zone at the minimum values of thermoelastic stresses in quartz plates.

Keywords: laser polishing, quartz plate, ANSYS.

For citation: Optimization of laser polishing of quartz glass using the method of planning computational experiments / V.A. Emelyanov, E.B. Shershnev, Y.V. Nikitjuk, S.I. Sokolov, I.Y. Aushev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 26–30. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_26 (in Russian). – EDN: NRYSQT

Введение

Для кварцевого стекла характерны высокая прочность и термостойкость, устойчивость к воздействию кислот и воды. Уникальные свойства этого материала обеспечивают его широкое применение в различных областях техники [1]. Одним из перспективных методов обработки кварцевого стекла является лазерная полировка [2]–[6]. Авторами ранее было выполнено конечно-элементное моделирование лазерной полировки кварцевого стекла и проведены экспериментальные исследования с помощью полного факторного эксперимента первого порядка с формированием соответствующей регрессионной модели процесса лазерной обработки материала [7]–[9].

В настоящее время интенсивно развивается новое направление математического моделирования – метамоделирование, при реализации которого математические модели для сложных систем строятся по результатам вычислительных экспериментов. Такие модели называют метамоделами (модели над моделями), при этом метамоделли имеют значительно более высокую вычислительную эффективность по сравнению с исходными моделями. Основной целью создания метамоделли является определение приближенных значений выходных параметров на основе входных параметров без проведения полных расчётов. Достижение данной цели обеспечивается применением метода планирования вычислительных конечно-элементных экспериментов при создании соответствующих регрессионных выражений [10]–[12].

В данной работе с использованием метамоделирования выполнена оптимизация параметров лазерной полировки кварцевого стекла.

1 Конечно-элементный анализ

Расчет температурных полей и полей термоупругих напряжений был выполнен в программе конечно-элементного анализа ANSYS. Моделирование осуществлялось в рамках несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке с использованием расчётной программы на языке программирования APDL (ANSYS parametric design language) [13]–[17].

Для моделирования использовалась пластина с геометрическими размерами 20×10×3 мм. Для расчетов была создана конечно-элементная модель, состоящая из 19200 элементов и 23247 узлов. При реализации теплового анализа применялись элементы Solid 70, для прочностного анализа применялись элементы Solid 185. Моделирование выполнялось с учетом зависимости теплофизических свойств кварцевого стекла от температуры [4], [6]. Параметры, использованные при моделировании лазерной полировки кварцевого стекла с использованием CO₂-лазера, представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Параметры лазерной полировки кварцевых стекол

Параметры	Значения
Плотность мощности лазерного излучения P_0 , Вт/м ²	22
Скорость обработки V , мм/с	2,5
Радиус лазерного пучка R , мм	1,5
Шаг сканирования, мм	0,25

Полученные при моделировании распределения температурных полей и полей термоупругих напряжений представлены на рисунках 1.1–1.2.

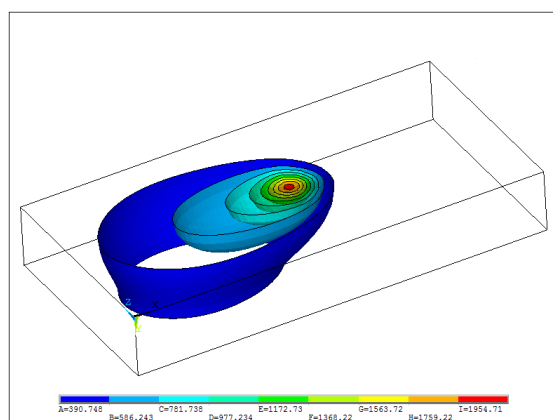


Рисунок 1.1 – Распределение температуры в объеме обрабатываемой кварцевой пластины, К

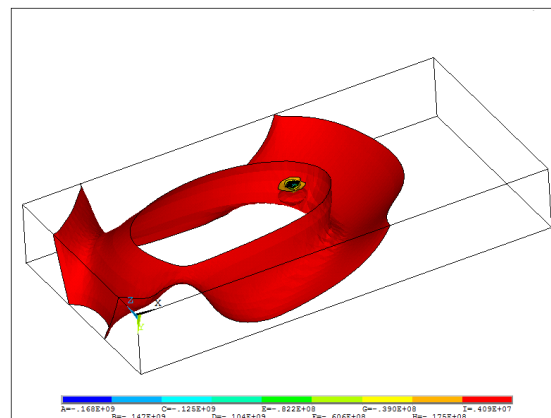


Рисунок 1.2 – Распределение напряжений σ_1 в объеме обрабатываемой кварцевой пластины, Па

Проведена верификация конечно-элементной модели на основании экспериментальных данных, полученных с использованием CO₂-лазера и тепловизора ИТ-3СМ. На рисунке 1.3 представлено распределение температурного поля в образце при воздействии круглого лазерного пучка, определенное при помощи тепловизора ИТ-3СМ. Относительная ошибка при определении максимальных температур на поверхности кварцевой пластины не превысила 5%, что позволяет сделать вывод о необходимом соответствии результатов конечно-элементного моделирования экспериментальным данным.

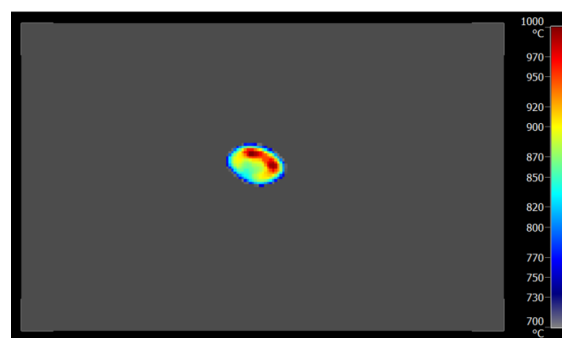


Рисунок 1.3 – Распределение температурного поля при обработке кварцевой пластины, определенное экспериментально, °C

2 Методика численного эксперимента

При реализации численного эксперимента была использована методика полного факторного эксперимента первого порядка с двухуровневым варьированием факторов. Сформирован план для трех факторов: скорость обработки V , шаг сканирования h , радиус лазерного пучка R . При этом определялись следующие выходные параметры: максимальная температура T и максимальные напряжения σ_1 в зоне лазерной обработки. Таким образом, моделью объекта исследования являлись функции отклика (T) и (σ_1),

связывающие выходные параметры с факторами (V, h, R).

После преобразования независимых переменных в натуральном масштабе к безразмерным переменным с кодируемыми значениями: $-1, +1$ сформирована таблица 2.1.

Таблица 2.1 – Значения независимых переменных в кодированном виде

Независимые переменные	Безразмерные переменные	-1	+1
Скорость обработки, мм/с	X1	2	4
Шаг сканирования, мм	X2	0,25	0,5
Радиус лазерного пучка, мм	X3	1	2

В таблице 2.2 представлены результаты численного эксперимента по моделированию лазерной полировки кварцевого стекла.

Таблица 2.2 – Результаты численного эксперимента

Номер комбинации факторов	Факторы			T, K	σ_1, MPa
	X1	X2	X3		
1	-1	-1	-1	1813	7,0
2	+1	-1	-1	1724	7,9
3	-1	+1	-1	1813	7,0
4	+1	+1	-1	1724	7,9
5	-1	-1	+1	4149	73,1
6	+1	-1	+1	3585	151,0
7	-1	+1	+1	4149	73,1
8	+1	+1	+1	3585	151,0

По данным, представленным в таблице 2.2, были построены регрессионные модели, определяющие зависимости T и σ_1 от параметров обработки, при этом шаг сканирования оказался

параметром не существенно влияющим на выходные параметры для выбранных диапазонов изменения технологических параметров лазерной обработки.

Полученные уравнения регрессии имеют следующий вид:

$$T = 2098,5 \cdot R - 163,25 \cdot V - (R - 1,5) \cdot (237,5 \cdot V - 712,5) + 159,75,$$

$$\sigma_1 = 104615000 \cdot R + 19697500 \cdot V + (R - 1,5) \cdot (38505000 \cdot V - 115515000) + 156272500.$$

На рисунках 2.1, 2.2 представлены зависимости максимальной температуры T и максимальных напряжений σ_1 от параметров обработки.

Оценка полученных регрессионных моделей была выполнена с использованием следующих критериев:

– средняя абсолютная ошибка (англ. Mean Absolute Error, MAE)

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i - y_i|,$$

– средняя квадратичная ошибка (англ. Root Mean Square Error, $RMSE$)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2},$$

– средняя абсолютная процентная ошибка (англ. Mean Absolute Percentage Error, $MAPE$)

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{d_i - y_i}{d_i} \right| \cdot 100,$$

где d_i – значения, определенные методом конечных элементов, y_i – значения, определенные с использованием регрессионных моделей.

Значения критериев, используемых для оценки регрессионных моделей, представлены в таблице 2.3.

Полученные данные позволяют сделать вывод о наличии необходимого соответствия регрессионной модели результатам конечно-элементного анализа.

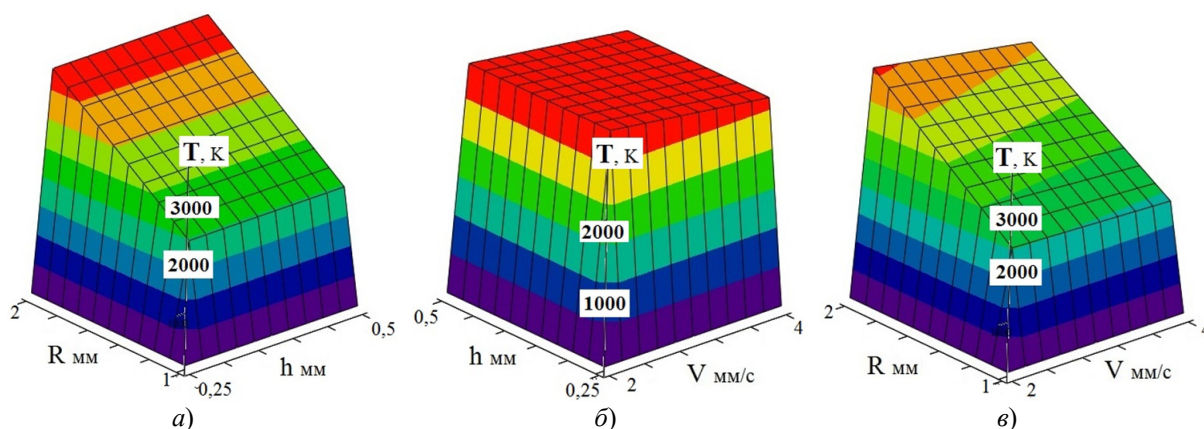


Рисунок 2.1 – Зависимость максимальной температуры T от параметров обработки
а) $V = \text{const}$; б) $R = \text{const}$; в) $h = \text{const}$

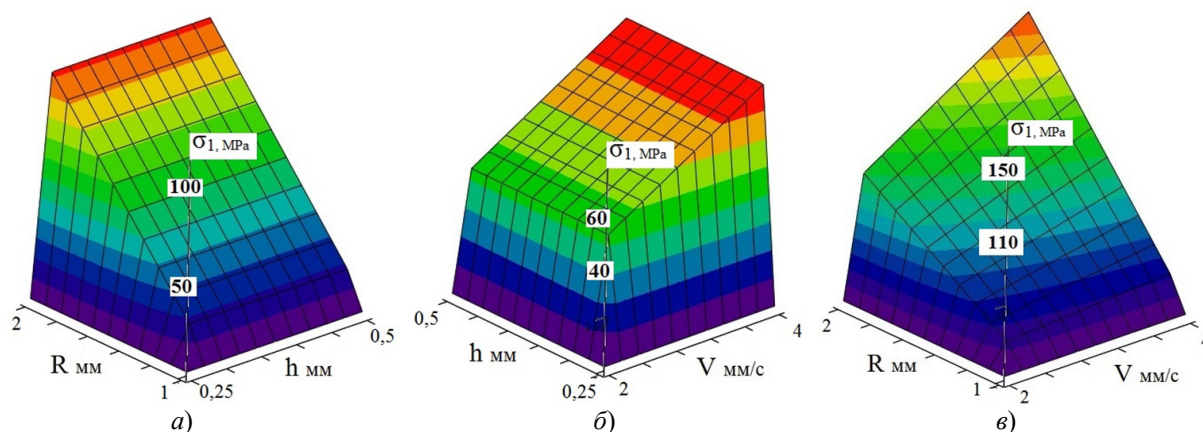


Рисунок 2.2 – Зависимость максимальных напряжений σ_1 от параметров обработки
 а) $V = \text{const}$; б) $R = \text{const}$; в) $h = \text{const}$

Таблица 2.3 – Результаты оценки регрессионных моделей

Критерий	Тестовый набор	
	T	σ_1
$RMSE$	3	140
MAE	3	136
$MAPE$	6	5

3 Определение оптимальных параметров процесса лазерной полировки кварцевого стекла

Оптимизация параметров лазерной полировки кварцевого стекла осуществлялась с использованием метода перебора. Этот метод в случае решения экстремальных задач является вариантом прямого метода оптимизации [18]. При этом диапазон значений температуры T , необходимой для эффективной полировки, был принят равным 2000–2005 К. Далее были рассчитаны температуры в зоне обработки по приведенной выше формуле. Скорость варьировалась в пределах 1–20 мм / с с шагом 1 мм / с, а радиус лазерного пучка изменялся в пределах 0,1–2 мм с шагом 0,1 мм. После определения параметров, обеспечивающих формирование заданной температуры в зоне лазерной обработки, были рассчитаны напряжения σ_1 (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Расчетные параметры лазерной полировки кварцевого стекла

№	V , мм	R , мм	T , К	σ_1 , МПа
1	5	1,2	2004	45
2	8	1,5	2001	160
3	17	0,3	2004	400

Как видно из таблицы 3.1, формирование температур в заданном диапазоне осуществляется при выборе трех наборов скоростей и радиусов лазерного пучка, при этом в третьем наборе

формируются критически большие напряжения в зоне обработки.

Заключение

В работе с использованием методики полного факторного эксперимента первого порядка с двухуровневым варьированием факторов получена регрессионная модель лазерной полировки кварцевых пластин. Установлено наличие необходимого соответствия регрессионной модели результатам конечно-элементного моделирования. Выполнена верификация конечно-элементной модели на основании экспериментальных данных, полученных с использованием CO_2 -лазера и тепловизора ИТ-3СМ. В результате численного эксперимента установлены оптимальные параметры лазерной полировки кварцевых пластин, обеспечивающие минимальные значения термоупругих напряжений при заданных значениях температуры. Предложенная методика применяется для определения технологических параметров, использование которых на практике обеспечит эффективную реализацию процесса лазерной полировки кварцевых стекол.

ЛИТЕРАТУРА

- Арбузов, В.И. Основы радиационного оптического материаловедения / В.И. Арбузов. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2008. – 284 с.
- Top-hat and Gaussian laser beam smoothing of ground fused silica surface* / D. Wang, F. Fan, M. Liu, T. Tan, H. Li, Y. Li, // Optics & Laser Technology. – 2020. – № 127. – Article 106141.
- Sysoev, V.K. Laser etching and polishing of quartz tubes / V.K. Sysoev // Glass and Ceramics. – 2003. – Vol. 60. – P. 106–107.
- Laser Beam Polishing of Quartz Glass Surfaces* / J. Hildebrand [et al.] // Physics Procedia. – 2011. – Vol. 12. – P. 452–461.
- Advanced analysis of laser beam polishing of quartz glass surfaces* / J. Hildebrand [et al.] // Physics Procedia. – 2012. – Vol. 39. – P. 277–285.

6. Борисовский, В.Е. Развитие теории и разработка комплекса технологий и оборудования для лазерной обработки кварцевого стекла: дис. докт. техн. наук: 05.11.14 / В.Е. Борисовский. – МГУПИ. – Москва, 2011. – 182 с.
7. Исследование процесса лазерной полировки кварцевого стекла / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.Е. Шершнев, С.И. Соколов // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 45–49.
8. Исследование лазерного макро- и микроформообразования хрупких неметаллических материалов методом полного факторного эксперимента / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.Е. Шершнев, С.И. Соколов // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 30–32.
9. Инновационные технологии и оборудование субмикронной электроники / А.П. Достанко [и др.]; под ред. акад. НАН Беларуси А.П. Достанко. – Минск: Беларуская навука, 2020. – 260 с.
10. Сокращение размерности данных в задачах имитационного моделирования / Ю.Г. Агалаков, А.В. Бернштейн // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2012. – № 3. – С. 3–17.
11. Планирование и анализ результатов эксперимента: учеб. пособие / А.П. Моргунов, И.В. Ревина; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2014. – 343 с.
12. Адлер, Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – Москва: Наука, 1976. – 278 с.
13. Официальный сайт компании ANSYS. – Режим доступа: <https://www.ansys.com>. – Дата доступа: 04.05.2022.
14. Каплун, А.Б. ANSYS в руках инженера: практическое руководство / А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
15. Чигарев, А.В. ANSYS для инженеров: справочное пособие / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук, А.Ф. Смалюк. – Москва: Машиностроение, 2004. – 512 с.
16. Введение в ANSYS: прочностной и тепловой анализ: учебное пособие / А.С. Шалумов [и др.]. – Ковров: КГТА, 2002. – 52 с.
17. Коваленко, Л.Д. Основы термоупругости / Л.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.
18. Gill, F. Practical optimization / F. Gill, W. Murray, M. Wright. – M.: Mir, 1985. – 383 p.

Поступила в редакцию 04.05.2022.

Информация об авторах

Емельянов Виктор Андреевич – д.т.н., профессор
Шершнев Евгений Борисович – к.т.н., доцент
Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Соколов Сергей Иванович – ст. преподаватель
Аушев Игорь Юрьевич – к.т.н., доцент

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_31

EDN: QSYVXB

**ТЕРМОУПРУГИЙ ИЗГИБ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ,
СВЯЗАННОЙ С ОСНОВАНИЕМ ПАСТЕРНАКА****А.Г. Козел***Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***THERMAL ELASTIC BENDING OF A CIRCULAR THREE-LAYER PLATE,
ASSOCIATED WITH THE PASTERNAK FOUNDATION****A.G. Kozel***Belarusian State University of Transport, Gomel*

Аннотация. Рассмотрен осесимметричный изгиб упругой трехслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака. Учтено воздействие температурного поля. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины принята гипотеза ломанной нормали. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат. Система уравнений равновесия получена с помощью вариационного метода Лагранжа. Ее общее аналитическое решение выписано в перемещениях. Выполнен численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния трехслойной металлополимерной пластины при равномерно распределенной нагрузке. Показано существенное влияние температуры на напряжения в слоях.

Ключевые слова: термоупругость, основание Пастернака, трехслойная пластина.

Для цитирования: Козел, А.Г. Термоупругий изгиб круговой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 31–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_31 – EDN: QSYVXB

Abstract. An axisymmetric bending of an elastic three-layer circular plate connected to the Pasternak foundation is considered. The effect of the temperature field is taken into account. To describe the kinematics of a plate package asymmetric in thickness, the hypothesis of a broken normal is accepted. The statement of the problem and its solution are carried out in a cylindrical coordinate system. The system of equilibrium equations was obtained using the Lagrange variational method. Its general analytical solution is written out in displacements. A numerical parametric analysis of the stress-strain state of a three-layer metal-polymer plate under a uniformly distributed load has been carried out. The significant influence of temperature on the stresses in the layers is shown.

Keywords: thermoelasticity, Pasternak foundation, three-layer plate.

For citation: Kozel, A.G. Thermal elastic bending of a circular three-layer plate, associated with the Pasternak foundation / A.G. Kozel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 31–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_31 (in Russian). – EDN: QSYVXB

Введение

В настоящее время в машиностроении, приборостроении и строительстве широко применяются композитные элементы конструкций. Слоистые композиты, в том числе трехслойные, обладают высокой изгибной жесткостью и прочностью при относительно небольшой массе по сравнению с традиционными листовыми материалами. Трехслойные конструкции обычно выполняют из внешних прочных слоев малой толщины, связанных между собой внутренним, менее прочным и относительно толстым заполнителем. За счет легкого внутреннего слоя обеспечивается совместная работа и устойчивость всей слоистой системы. Для заполнителя используют различные пенопласты, сотовые структуры из металлической фольги или полимерной бумаги, гофровые или ячеистые формы и др. Для несущих слоев применяют металлические сплавы,

а также композиционные и комбинированные материалы.

Несмотря на то, что основы теории многослойных конструкций начали разрабатываться еще с середины прошлого столетия, эта область и сейчас актуальна и продолжает развиваться. Задачи статики и динамики слоистых элементов конструкций при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях с учетом реологических и пластических свойств материалов слоев рассмотрены в работах [1]–[8].

В статье [9] предложен подход к решению задачи деформирования слоистых элементов конструкций из неупругих материалов при сложных видах нагружения. Выполнено сравнение результатов решения стандартным и предложенным способом задачи о циклическом растяжении трехслойных пластин с линейно упругими внешними слоями и вязкоупругим заполнителем.

Изгиб круговых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем под действием осесимметричных нагрузок произвольного вида исследовалось в работах [10], [11]. Влияние сжимаемости заполнителя на изгиб прямоугольных пластин, в том числе с учетом температуры, изучено в статьях [12], [13]. В обоих случаях аналитические решения получены в конечном виде. Численный анализ напряженно-деформированного состояния исследуемых пластин выполнен в зависимости от геометрических и упругих параметров слоев, величины и вида нагрузок.

В работах [14], [15] рассмотрено деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости под действием осесимметричных и неосесимметричных термосиловых нагрузок.

Изгиб сэндвич-панелей под действием термомеханических нагрузок исследован в статьях [16], [17]. Внешние слои пластины имеют двухкомпонентное (металлокерамическое) распределение материала по толщине, внутренний слой однороден и изготовлен из изотропного керамического материала. Предполагается, что модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент теплового расширения материала слоя изменяются по степенному закону. Получены точные аналитические решения. Численно исследовано влияние термомеханических нагрузок и других параметров на безразмерные прогибы, осевые и поперечные касательные напряжения.

В статье [18] выполнена постановка и приведена методика решения задачи об осесимметричном деформировании несимметричной по толщине упругой трехслойной полой оболочки, находящейся под действием равномерно распределенной и параболической нагрузок. Учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении, влияние температурного поля на НДС оболочки.

Большое количество работ в данной области посвящено исследованию деформирования трехслойных пластин, стержней и оболочек, связанных с упругим основанием. В большей части работ при описании реакции основания используется однопараметрическая модель Винклера. Деформирование композитной пластины на упругом основании под действием локальных нагрузок исследовано в статье [19]. В работе [20] рассмотрен термоупругий изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины с легким заполнителем, связанной с упругим основанием. Уравнения равновесия получены с помощью вариационного метода Лагранжа, учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Аналитические решения задачи теории малых упругопластических деформаций получены методом упругих решений Ильюшина. Проведен численный параметрический анализ.

В статье [21] исследован термомеханический изгиб упругопластической круглой (сплошной или

кольцевой) многослойной пластины с легким заполнителем, опирающейся на упругое основание. Гипотезы ломаной нормали используются для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластин. Получена система уравнений равновесия и ее точное решение относительно перемещений. Численные результаты получены для многослойной кольцевой металлополимерной пластины.

Анализ ряда экспериментов с плитами, связанными с упругим основанием, показал, что применение двухпараметрической модели основания Пастернака лучше описывает взаимодействие конструкции и основания, чем однопараметрическая модель Винклера [22], [23].

Геометрически нелинейное деформирование произвольной кольцевой пластины с двумя функционально-градиентными пьезоэлектрическими слоями, покоящейся на основании Пастернака, исследовано в работе [24]. Принимается, что все механические и электрические свойства, кроме коэффициента Пуассона, могут непрерывно изменяться по толщине пластины в зависимости от степенной функции. Выведены общие нелинейные уравнения, получены численные результаты в зависимости от параметров основания, показателя неоднородности и граничных условий.

Изотермическое осесимметричное деформирование несимметричных по толщине упругих и упругопластических круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, исследовалось в статьях [25]–[28]. Нелинейный изгиб сэндвич-пластины рассмотрен в [29]. Сравнение постановок и решений краевых задач для трехслойных круговых пластин, связанных с основаниями Винклера и Пастернака проведено в статье [30]. Выполнено численное сравнение перемещений и напряжений, полученных по обеим моделям при равномерно распределенной нагрузке и жесткой заделке контура пластины.

В предлагаемой работе, в отличие от предыдущих публикаций автора, учтено воздействие температурного поля на напряженно-деформированное состояние упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака. Приведено аналитическое решение, выполнен численный параметрический анализ влияния температуры на перемещения и напряжения.

1 Постановка краевой задачи

Постановка краевой задачи и её решение проведено в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединная плоскость заполнителя принята за координатную, ось z направлена вверх, перпендикулярно верхнему слою (рисунок 1.1). Для тонких несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа. Для легкого достаточно толстого заполнителя ($h_3 = 2c$) принимается модель Тимошенко, при этом деформированная

нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . Работа касательных напряжений в заполнителе не учитывается. На верхний слой пластины действует поперечная осесимметричная нагрузка $q = q(r)$. Связь реакции основания q_R , действующей на нижний слой пластины, и прогиба принимается согласно модели Пастернака [31]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1.1)$$

где κ_0 , t_f – коэффициенты сжатия и сдвига основания; $w(r)$ – осадка (прогиб) поверхности основания; Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

Реакция основания направлена в сторону, противоположную прогибу.

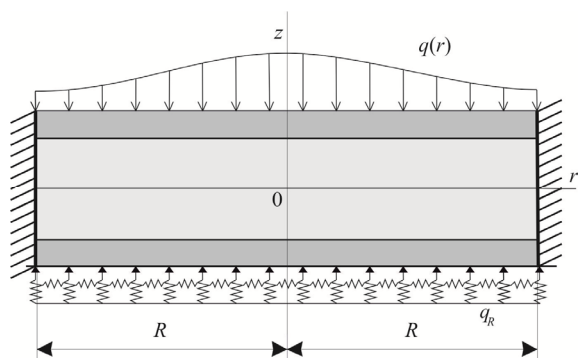


Рисунок 1.1 – Жесткое защемление контура трехслойной пластины на упругом основании

Радиальные перемещения линейно изменяются по толщине слоев, тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя). Слои несжимаемы по толщине, поэтому в направлении оси z перемещения точек пластины равны прогибу срединной плоскости заполнителя:

$$u_z^{(k)} = w(r).$$

Прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальные перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $w = w(r)$, $u = u(r)$, $\psi = \psi(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi(r) = 0$ при $r = R$, R – радиус пластины).

В соответствии с гипотезой прямолинейности нормали заполнителя сдвиговые деформации в нем будут:

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)} + w_{,r}.$$

Проинтегрировав это выражение, получим выражения радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \quad (1.2)$$

где $(u + c\psi)$ – величина смещения верхнего несущего слоя за счет деформации заполнителя; $(u - c\psi)$ – величина смещения нижнего несущего слоя; z – координата рассматриваемого волокна.

Радиальные и окружные деформации в слоях следуют из (1.2) и соотношений Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \\ \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \\ \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, \\ \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Физические уравнения связи напряжений и деформаций (1.3) принимаются в виде:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad (\alpha = r, \varphi)$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k), \quad (1.4)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений k -го слоя; $\varepsilon_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая часть тензора деформаций; $s_{rz}^{(3)}$, $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурозависимые модули сдвиговой и объёмной деформации материалов слоев; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; ΔT_k – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0 .

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя соотношения (1.2), представим в виде разницы силовой (индекс «e») и температурной (индекс «t») составляющих:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_t^{(k)}, \\ \sigma_{ae}^{(k)} &= 2G_k(T_k)\varepsilon_\alpha^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)}, \\ \sigma_t^{(k)} &= 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Введем внутренние обобщенные усилия и моменты

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Используя выражения (1.5) выделим во внутренних усилиях (1.6) силовую и температурную составляющие:

$$T_\alpha^{(k)} = T_{ae}^{(k)} - T_t^{(k)} = \sum_{k=1}^3 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{ae}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_t^{(k)} dz, \\
 M_\alpha^{(k)} &= M_{ae}^{(k)} - M_t^{(k)} = \sum_{k=1}^3 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_t^{(k)} = \\
 &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{ae}^{(k)} z dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_t^{(k)} z dz, \\
 H_{ae} &= M_{ae}^{(3)} + c(T_{ae}^{(1)} - T_{ae}^{(2)}), \\
 H_t &= M_t^{(3)} + c(T_t^{(1)} - T_t^{(2)}). \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Принимаем, что на контуре пластины могут действовать внешние погонные силы T_r^0 , Q^0 и моменты H_r^0 , M_r^0 .

С помощью вариационного принципа Лагранжа, используя выражения (1.1), (1.7), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающую равновесие рассматриваемой пластины, совпадающую с приведенной в [25]:

$$\begin{aligned}
 T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= 0, \\
 H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) &= 0, \\
 M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) + t_f \Delta w - \kappa_0 w &= -q, \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

где для простоты индекс «е» опущен.

Задача замыкается присоединением граничных термосиловых условий на контуре пластины ($r=R$)

$$\begin{aligned}
 T_r &= T_r^0 + T_t, \quad H_r = H_r^0 + H_t, \quad M_r = M_r^0 + M_t, \\
 M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= Q^0. \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Стоит отметить, что температура в явном виде входит только в силовые граничные условия (1.9). В уравнения (1.8) она не включена, так как производные от температурных слагаемых по радиусу равны нулю, а в разностных членах соответствующие добавки взаимно сокращаются.

Выразив внутренние усилия в системе уравнений (1.8) через перемещения, получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\
 L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\
 L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) + t_f \Delta w - \kappa_0 w &= -q, \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

где L_2 , L_3 – линейные дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}
 L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\
 L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};
 \end{aligned}$$

a_i – коэффициенты, учитывающие геометрические параметры, зависимость модулей упругости материалов слоев от температуры

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \\
 a_4 &= K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \\
 a_5 &= K_{32} + c(K_{11} - K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}, \\
 K_{km} &= \int_{h_k} \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) z^m dz, \quad (m=0, 1, 2).
 \end{aligned}$$

К системе (1.10) следует добавить граничные условия в перемещениях. Например, в случае жесткой заделки контура пластины при $r=R$

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad w = 0, \quad w_{,r} = 0. \quad (1.11)$$

Здесь также температура в явном виде в краевую задачу (1.10), (1.11) не входит.

2 Общее решение краевой задачи

Рассмотрим процедуру решения системы уравнений (1.10). В силу ее линейности, с помощью первого уравнения исключаем из второго и третьего уравнений функцию u . Использование полученного второго уравнения позволяет исключить из первого и третьего функцию ψ . После двукратного интегрирования полученных первых двух уравнений и некоторых преобразований третьего имеем:

$$\begin{aligned}
 u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \\
 w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - \\
 - t_f D(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}) + \kappa_0 D w &= q D, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования; b_1, b_2, D – параметры, зависящие от температуры, через коэффициенты a_i

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2},$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Решение третьего уравнения системы (2.1) получено по методике, предложенной в [28]:

$$\begin{aligned}
 w &= C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + \\
 &+ C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r) + w_p(r), \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

где $J_0(\sqrt{a} \kappa r)$, $J_0(\sqrt{a} \kappa r)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка; $H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка; a и $\bar{a}$ – коэффициенты, зависящие от характеристик упругого основания [28]; $\kappa^4 = \kappa_0 D$, $w_p(r)$ – частное решение третьего уравнения (2.1).

Исходя из условия ограниченности перемещений в начале координат, в решениях (2.1), (2.2) для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 0$.

3 Изгиб пластины равномерно распределенной нагрузкой

Рассмотрим изгиб сплошной упругой трехслойной круговой пластины радиуса R , связанной с основанием Пастернака, под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q = q_0 = \text{const}$.

Частное решение третьего уравнения (2.1) может быть принято в виде

$$w_p(r) = \frac{q_0}{\kappa_0}. \quad (3.1)$$

Тогда решение системы уравнений (2.1), с учетом (3.1) и ограниченности перемещений в начале координат, можно записать в виде:

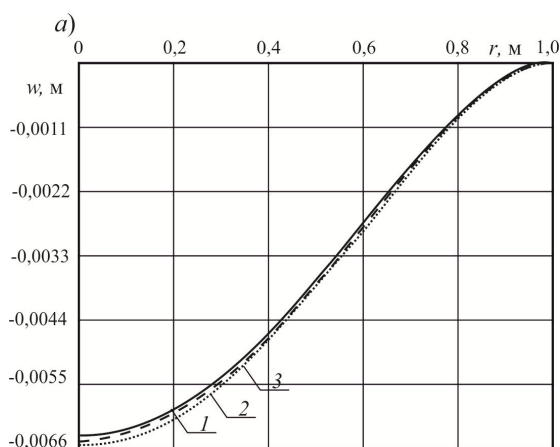
$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r, \\ w &= C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + \frac{q_0}{\kappa_0}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Константы интегрирования C_1, C_3, C_5, C_7 следуют из условий закрепления контура пластины.

Используя (1.11), при заделке контура пластины, имеем следующие константы интегрирования

$$\begin{aligned} C_1 &= C_3 = 0, \\ C_5 &= \\ &= q_0 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) / \left(\kappa_0 \left[\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) \right] \right), \\ C_7 &= \\ &= q_0 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) / \left(\kappa_0 \left[\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{a} J_0(\sqrt{a} \kappa R) J_1(\sqrt{a} \kappa R) \right] \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решение (3.2) с константами интегрирования (3.3) описывает термосиловые перемещения в упругой круговой трехслойной пластине при жесткой заделке ее контура, связанной с основанием Пастернака.



1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 313$ К, 3 – $T = 333$ К

Рисунок 4.1 – Изменение прогиба и сдвига в заполнителе трехслойной пластины

4 Численный параметрический анализ

Численная апробация решения выполнена для пластины, материалы слоев которой Д16Т–фторопласт-4–Д16Т. Геометрические параметры пластины $R = 1$ м, $h_1 = h_2 = 0,04$ м, $h_3 = 0,4$ м. Термомеханические характеристики материалов слоев заимствованы из [8]. Величина интенсивности равномерно распределенной поверхностной нагрузки $q_0 = 1$ МПа. Коэффициенты сжатия и сдвига основания: $\kappa_0 = 100$ МПа/м, $t_f = 1$ МПа·м. Пластина жестко защемлена по контуру.

Для описания зависимости модулей упругости несущих слоев от температуры используется формула, предложенная Дж. Ф. Беллом [3]:

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\} \varphi(T),$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases}$$

где T_m – температура плавления материала, К; $G(0), K(0), E(0)$ – значения модулей упругости при нулевой температуре, Па (например, при температуре $T_0 G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$).

Зависимость параметров упругости полимерного материала (заполнителя) от температуры принимается в виде [3]

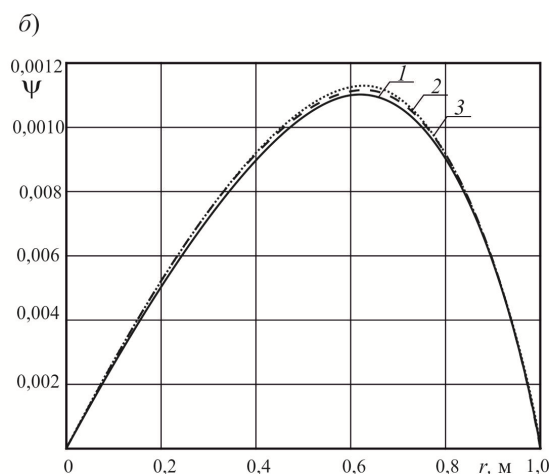
$$\{G(T), K(T)\} = \{G(0), K(0)\} / \varphi_1(T),$$

$$\varphi_1(T) = \left(1 + B [\Delta T / T_m]^v \operatorname{sgn} \Delta T \right),$$

где $\Delta T = T - T_0$, T_0 – начальная температура, К; G_0, K_0 – значения параметров при температуре T_0 .

На рисунке 4.1 а, б показано изменение вдоль радиуса прогиба $w(r)$ и сдвига в заполнителе $\psi(r)$ рассматриваемой пластины при различной температуре слоев: 1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 313$ К, 3 – $T = 333$ К. Температурное воздействие на пластину приводит к незначительному увеличению перемещений, что объясняется жесткостью заделки пластины.

Рисунок 4.2 иллюстрирует изменение радиальных напряжений по толщине упругой трехслойной пластины в центре (а) и на ее контуре (б)



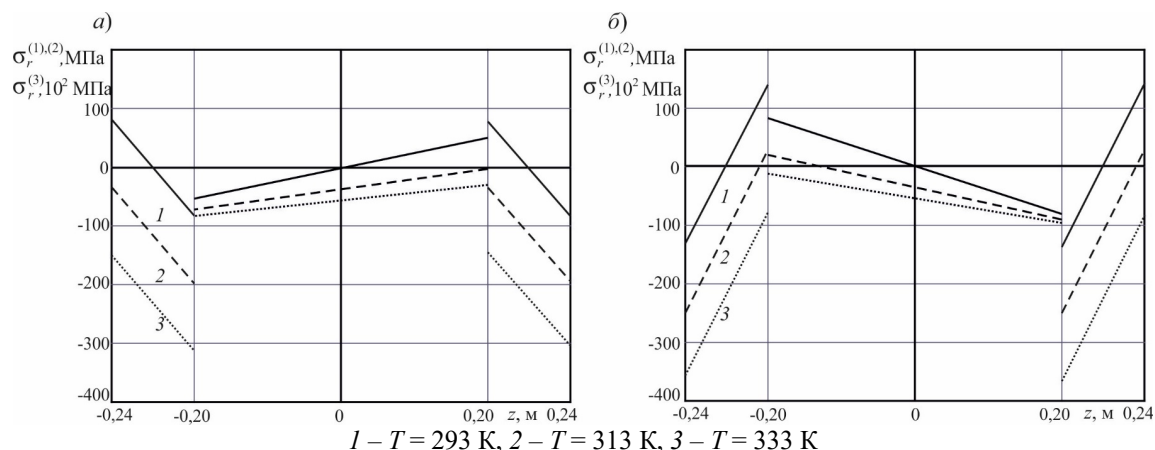


Рисунок 4.2 – Изменение радиальных напряжений по толщине пластины в центре (а) и на контуре (б)

при различной температуре слоев: 1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 313$ К, 3 – $T = 333$ К. Для наглядности напряжения в заполнителе увеличены в 100 раз. В слоях напряжения под действием температуры смещаются в отрицательную область. На контуре пластины при повышении температуры на 20 К максимальные напряжения в несущих слоях увеличились по модулю на 80%, в заполнителе – до 76%. При увеличении температуры на 40 К рост напряжений составил 160% и 123% соответственно.

На рисунке 4.3 показано изменение касательных напряжений в заполнителе. Несмотря на то, что сдвиговые деформации незначительно увеличиваются при росте температуры, касательные напряжения уменьшаются. Это объясняется уменьшением величины модуля сдвига G_3 . При увеличении температуры на 20 К напряжения уменьшились на – 31,5%, 40 К – 48%.

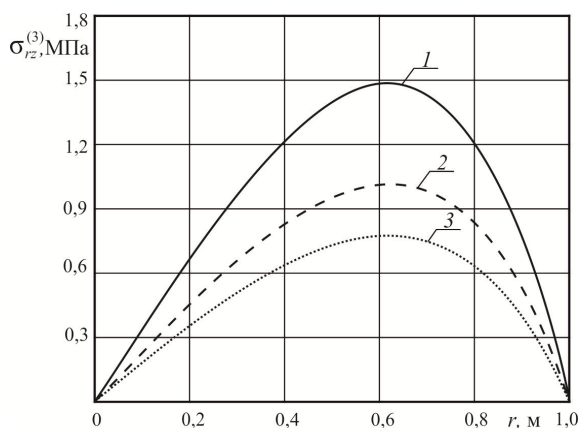


Рисунок 4.3 – Изменение касательных напряжений в заполнителе

Можно отметить, что температурное воздействие на пластину приводит к незначительному увеличению перемещений. В то же время, изменение напряжений при росте температуры существенно.

Заключение

В работе построена математическая модель расчета напряжений и перемещений при изгибе упругой трехслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака. Разработанный подход можно применять для нахождения этих параметров различных материалов с учетом температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – Москва: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Навука і тэхніка, 1988. – 271 с.
3. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с.
4. Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore – London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
5. Carrera, E. Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F.A. Fazzolari, M. Cinefra. – Academic Press. – 2016. – 410 p.
6. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 543 с.
7. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Бел. навука, 2017. – 275 с.
8. Gorshkov, A.G. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A.G. Gorshkov, É.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 9. – P. 1196–1203.
9. Паймушин, В.Н. Об одном методе решения задач о неупругом деформировании слоистого композита / В.Н. Паймушин, Р.А. Каюмов,

С.А. Холмогоров // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2021. – № 6. – С. 55–66.

10. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Захарчук // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т. 26, № 1. – С. 58–73.

11. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 53–57.

12. Зеленая, А.С. Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле / А.С. Зеленая // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 45–49.

13. Зеленая, А.С. Термоупругий изгиб трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2018. – Вып. 11. – С. 93–100.

14. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

15. Нестерович, А.В. Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 24–29.

16. Zenkour, A.M. Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates / M.A. Zenkour, N.A. Alghamdi // Journal of Sandwich Structures and Materials. – 2010. – Vol. 12, № 1. – P. 7–46.

17. Zenkour, A.M. Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol. 17, № 6. – P. 419–432.

18. Старовойтов, Э.И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

19. Starovoitov, E.I. Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 75–84.

20. Яровая, А.В. Термоупругопластическое деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.В. Яровая // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. –

2017. – № 1. – Режим доступа: <http://mathmod.esrae.ru/11-31>. – Дата доступа: 12.01.2022.

21. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mech. Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.

22. Fwa, T.F. Use of Pasternak foundation model in concrete pavement analysis / T.F. Fwa, X.P. Shi, S.A. Tan // Journal of transportation engineering. – 1996. – Vol. 122, № 4. – P. 323–328.

23. Katsikadelis, J.T. Clamped plates on Pasternak-type elastic foundation by the boundary element method / J.T. Katsikadelis, L.F. Kallivokas // Journal of Applied Mechanics. – 1986. – Vol. 53. – P. 909–917.

24. Arefi, M. Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation / M. Arefi, M.N.M. Allam // Smart Structures and Systems. – 2015. – Vol. 16, № 1. – P. 81–100.

25. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.

26. Козел, А.Г. Деформирование круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2017. – Вып. 32. – С. 235–240.

27. Козел, А.Г. Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.

28. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, №1. – С. 392–406.

29. Козел, А.Г. Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 106–113.

30. Козел, А.Г. Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. – Минск. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

31. Пастернак, П.Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П.Л. Пастернак. – Москва: Госстройиздат. – 1954. – 56 с.

Поступила в редакцию 23.02.2022.

Информация об авторах

Козел Анастасия Григорьевна – к.ф.-м.н.

АНИЗОТРОПНАЯ БРЭГГОВСКАЯ ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ РЕШЕТКАХ В УСЛОВИЯХ ФРЕНЕЛЕВСКОГО ОТРАЖЕНИЯ

Г.В. Кулак, В.Н. Навныко, Т.В. Николаенко

Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина

ANISOTROPIC BRAGG DIFFRACTION OF LIGHT ON HOLOGRAPHIC PHASE GRATINGS UNDER FRESNEL REFLECTION CONDITIONS

G.V. Kulak, V.N. Naunya, T.V. Nikolaenko

Mozyr State Pedagogical University named after I.P. Shamyakin

Аннотация. Теоретически исследованы энергетические коэффициенты отражения и пропускания дифрагированных волн нулевого и первого порядка при анизотропной брэгговской дифракции на голографических фазовых решетках в кубических нецентросимметричных кристаллах в условиях френелевского отражения. Установлено, что при значительных величинах амплитуды возмущения показателя преломления среды имеет место глубокая амплитудная модуляция света в прошедших и отраженных дифракционных порядках. Показано, что значительные периодические изменения коэффициентов пропускания дифрагированных волн нулевого и первого порядка при изменении азимута поляризации падающего света определяются существенным различием френелевских коэффициентов отражения на границах слоя для *s*- и *p*-составляющих падающего света.

Ключевые слова: голографическая решетка, анизотропная брэгговская дифракция, коэффициенты отражения и пропускания, модуляция света, азимут поляризации.

Для цитирования: Кулак, Г.В. Анизотропная брэгговская дифракция света на голографических фазовых решетках в условиях френелевского отражения / Г.В. Кулак, В.Н. Навныко, Т.В. Николаенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_38 – EDN: RIXPHL

Abstract. The energy coefficients of reflection and transmission of zero- and first-order diffracted waves with anisotropic Bragg diffraction by holographic phase gratings in cubic non-centrosymmetric crystals under Fresnel reflection conditions are theoretically investigated. It is established that at significant values of the amplitude of the perturbation of the refractive index of the medium, there is a high amplitude modulation of light in the transmitted and reflected diffraction orders. It is shown, that significant periodic changes in the transmission coefficients of diffracted waves of the zero and first orders with a change in the azimuth of polarization of incident light are determined by a significant difference in the Fresnel reflection coefficients at the layer boundaries for the *s*- and *p*-components of incident light.

Keywords: holographic grating, anisotropic Bragg diffraction, reflection and transmission coefficients, light modulation, polarization azimuth.

For citation: Kulak, G.V. Anisotropic bragg diffraction of light on holographic phase gratings under fresnel reflection conditions / G.V. Kulak, V.N. Naunya, T.V. Nikolaenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_38 (in Russian). – EDN: RIXPHL

Введение

Высокое значение величины фотоиндуцированного изменения показателя преломления материала среды, регистрирующей голографическую фазовую решетку (ГР) в оптически изотропной среде ($\Delta n = 5 \cdot 10^{-3}$), отмечено в работах [1], [2]. Показано, что в регистрирующей среде «реоксан» возможна запись высокоэффективных пропускающих и отражательных фазовых голограмм при геометрической толщине слоя материала $\sim 0,15\text{--}3$ мм. Кроме рассматриваемой среды для записи ГР, широкое применение находят различные регистрирующие ГР среды (фотополимеризующие акрилатные композиции, фотохромные среды органического и неорганического

типа, фоторефрактивные полимеры и др.), в которых амплитуда модуляции показателя преломления достигает величин $\Delta n \sim 10^{-2}\text{--}10^{-1}$ [3]. В работе [4] приведены компоненты тензора возмущений диэлектрической проницаемости кубического фоторефрактивного кристалла, выраженные через компоненты тензора электрооптических постоянных, фотоупругих постоянных, пьезоэлектрических постоянных, модулей упругости для различных перспективных срезов кристаллов. При этом открывается возможность анизотропной брэгговской дифракции света на ГР в фоторефрактивных кубических кристаллах для различных геометрических соотношений для волновых векторов дифрагированных волн и

волнового вектора ГР. Для реализации анизотропной дифракции одним из перспективных кристаллов является кристалл арсенида галлия, прозрачный в инфракрасной области спектра. Отмечено [5], [6], что электрооптический эффект в данных кристаллах значительно возрастает вблизи края фундаментального поглощения. В работе [6] показано, что, при малом отступлении от края запрещенной зоны в нецентросимметричных кубических кристаллах, анизотропная часть изменения тензора диэлектрической проницаемости за счет эффекта Поккельса значительно превышает изотропную. При этом эффективный электрооптический коэффициент достигает значений $r_{эф} \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ см / В [7]. В таком случае для напряженности поля пространственного заряда ГР $E_{sc} \sim 10^3 - 10^4$ В / см достигается изменение показателя преломления ГР $\Delta n \sim 10^{-3} - 10^{-2}$. Следует отметить, что в условиях считывания ГР для больших значений Δn следует учитывать френелевское отражение световых волн от границ модулированной среды [8].

В настоящей работе теоретически исследованы особенности анизотропной брэгговской дифракции световых волн на голографических фазовых решетках в кубических нецентросимметричных фоторефрактивных кристаллах в условиях френелевского отражения. В качестве модельного использован кристалл арсенида галлия (GaAs).

1 Теоретические результаты

Положим, что плоскопараллельный слой толщиной h с показателем преломления n_2 расположен между однородными прозрачными средами с показателями преломления n_1 и n_3 . Начало системы координат XYZ расположено на входной границе слоя $x = 0$, а ось Y перпендикулярна плоскости падения (рисунок 1.1).

При брэгговской дифракции света в слое на его толщину (h) накладывается условие: $h \geq n_2 \Lambda^2 / \lambda_0$ [9], где λ_0 – длина световой волны в вакууме, Λ – пространственный период ГР.

Решетка показателя преломления, создаваемая ГР вдоль оси X имеет вид:

$$n_2(x) = n_2 + (\Delta n / 2n_2) e^{iKx},$$

где $K = 2\pi / \Lambda$ – волновое число ГР, $\Delta n = \Delta \epsilon_{23} / 2n_2$ ($\Delta \epsilon_{23}$ – компонента тензора возмущения диэлектрической проницаемости кристалла ГР [6], [9]).

Предположим, что плоская световая волна с частотой $\omega \gg \Omega$ и волновым вектором

$$\vec{k}_1 = \vec{e}_x k_{1x} + \vec{e}_y k_{1y},$$

$\vec{e}_x \parallel OX$, $\vec{e}_y \parallel OY$ – единичные векторы,

$$k_{1x} = k n_1 \cos \varphi_1, \quad k_{1z} = k n_1 \sin \varphi_1,$$

($k = \omega / c$, $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$) имеет линейную поляризацию

с азимутом поляризации $\psi_0 = \arctg(A_{\perp} / A_{\parallel})$ ($A_{\perp}$ и $A_{\parallel}$ – соответственно амплитуды s - и p -составляющих падающего света) по отношению к плоскости дифракции XZ и падает на грань $x = 0$ под углом φ_1 к её нормали. Угол преломления $\varphi_2 = \arcsin(\sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_2} \sin \varphi_1)$ и равен углу Брэгга, то есть $\varphi_2 = \varphi_B = \arcsin(K / 2k_2)$, где $k_2 = k n_2$ ($n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$). Волновое уравнение, описывающее поведение световой волны в слое приведено в [10].

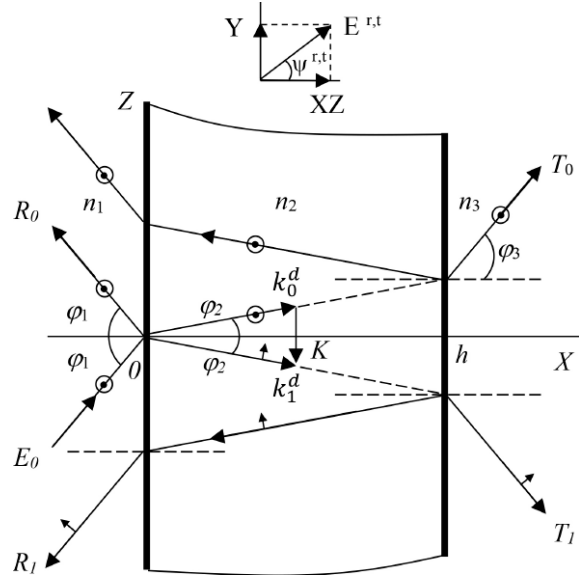


Рисунок 1.1 – Схема считывания ГР в анизотропном плоскопараллельном слое (XZ – плоскость дифракции, R_0, R_1 – коэффициенты отражения дифрагированных волн, T_0, T_1 – коэффициенты пропускания дифрагированных волн, φ_1 (φ_2) – угол падения (преломления) на границе $z = 0$, φ_3 – угол преломления на границе $z = h$)

Решение волнового уравнения для дифрагированного поля электромагнитной волны в слое можно записать в виде [11]:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(x) \exp[i(k_{mz}z - \omega_m t + \pi m / 2)], \quad (1.1)$$

где

$$k_{mz} = k_{0z} + mK, \quad \omega_m = \omega + m\Omega.$$

При $k_{0z} \approx K / 2$ из совокупности (1.1) связанных дифрагированных волн выделяются две наиболее существенные, соответствующие брэгговскому режиму дифракции с дифракционными порядками $m = 0$ и $m = -1$ [11]. Брэгговский режим дифракции теоретически возможен при значении параметра Клейна – Кука $Q \geq 1$ ($Q = \lambda_0 h / n_2 \Lambda^2$), где λ_0 – длина световой волны в вакууме [9]. С учетом этого система уравнений связанных волн имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_0}{dx^2} + k_{0x}^2 A_0 - ik_2^2 \eta A_{-1} &= 0, \\ \frac{d^2 A_{-1}}{dx^2} + k_{-1x}^2 A_{-1} + ik_2^2 \eta A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $k_{0x} = (k_2^2 - k_{0z}^2)^{1/2}$, $k_{-1x} = (k_2^2 - k_{-1z}^2)^{1/2}$, $k_{0z} = k_2 \sin \varphi_2$, $k_{-1z} \approx k_2 \sin \varphi_2$; $\eta = -\Delta n / (n_2 \cos \varphi_2)$, где изменения показателя преломления оптически изотропного кристалла составляет $\Delta n = -n_2^3 r_{\text{эф}} E_{sc} / 2$, $r_{\text{эф}}$ – эффективная электрооптическая постоянная, ответственная за анизотропную дифракцию света в слое с поворотом плоскости поляризации дифрагированной волны [7], [9]. При этом, вследствие анизотропии электрооптического эффекта, когда падающая и дифрагированная световая волна имеет s – поляризацию, дифрагированная становится p – поляризованной (и наоборот).

Постоянные распространения дифрагированных волн в слое находим из решения характеристического (дисперсионного) уравнения системы уравнений (1.2). Решение дисперсионного уравнения представимо в виде [10]:

$$k_x^\pm = k_2 \sqrt{(1 - n_1^2 / n_2^2 \sin^2 \varphi_1) \pm \eta}.$$

Сшивая напряженности электрического и магнитного полей в слое [10], [11], а также в областях $x < 0$ и $x > h$, находим коэффициенты отражения и пропускания (относительные интенсивности) дифрагированных волн на границах слоя. Решение системы восьми алгебраических уравнений можно найти в замкнутой форме.

При анизотропной дифракции s -поляризованной падающей волны в p -поляризованную на ГР с учетом наведенной электрооптической анизотропии амплитудные коэффициенты отражения ($r_{0,1}^s$) и пропускания ($t_{0,1}^s$) дифрагированных волн имеют вид:

$$t_{0,1}^s = -(n_1 \cos \varphi_1 n_2 \cos \varphi_2) \times \frac{\left[(e^{-ik_a} + e^{-ik_b}) + r_{12} r_{23} (e^{ik_a} + e^{ik_b}) \right] e^{-ik_3 h}}{(r_{12} r_{23} e^{ik_a} + e^{-ik_a}) (e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})}, \quad (1.3)$$

$$r_0^s = \frac{-(e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})}{(e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})},$$

$$t_1^s = 2(n_1 \cos \varphi_1 n_2 \cos \varphi_2) \times \frac{\left[(e^{-ik_a} + e^{-ik_b}) + r_{12} r_{23} (e^{ik_a} - e^{ik_b}) \right] e^{-ik_3 h}}{(r_{12} r_{23} e^{ik_a} + e^{-ik_a}) (e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})},$$

$$r_1^s = \frac{4i(n_1 \cos \varphi_1 n_2 \cos \varphi_2)}{(n_1 \cos \varphi_1 + n_2 \cos \varphi_2)} \times$$

$$\times \frac{(n_2 \cos \varphi_2 - n_3 \cos \varphi_3) \sin(k_a - k_b)}{(r_{12} r_{23} e^{ik_a} + e^{-ik_a}) (e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})},$$

где

$$r_{12} = \frac{n_1 \cos \varphi_1 - n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1 + n_2 \cos \varphi_2},$$

$$r_{23} = \frac{n_2 \cos \varphi_2 - n_3 \cos \varphi_3}{n_2 \cos \varphi_2 + n_3 \cos \varphi_3},$$

$$k_3 = kn_3 \cos \varphi_3; \quad n_3 = \sqrt{\epsilon_3};$$

$$k_{a,b} = k_2 h \sqrt{(1 \mp \eta) - n_1^2 / n_2^2 \sin^2 \varphi_1}.$$

В случае анизотропной дифракции p -поляризованной падающей волны в s -поляризованную на ГР в выражениях для амплитудных коэффициентов отражения (1.3), (1.4) следует выполнить замены: $s \rightarrow p$, $n_{1,2,3} \cos \varphi_{1,2,3} \rightarrow 1 / (n_{1,2,3} \cos \varphi_{1,2,3})$ [8].

2 Численные расчеты

Численные расчеты проводились для энергетических коэффициентов пропускания ($T_0^{s,p}, T_1^{s,p}$) и отражения ($R_0^{s,p}, R_1^{s,p}$), которые находятся из соотношений [12]:

$$R_{0,1}^{s,p} = |r_{0,1}^{s,p}|^2, \quad T_{0,1}^{s,p} = \frac{n_3 \cos \varphi_3}{n_1 \cos \varphi_1} |t_{0,1}^{s,p}|^2. \quad (2.1)$$

При отсутствии ГР ($\Delta n = 0$) выражения (2.1) для коэффициентов пропускания $T_0^{s,p}$ и отражения $R_0^{s,p}$ приводят к известным формулам Эйри [12], а дифрагированные волны первого порядка отсутствуют ($T_1^{s,p} = R_1^{s,p} = 0$). Для согласованного слоя ($n_1 = n_2 = n_3$) получаем, что $R_0^{s,p} = R_1^{s,p} = 0$, $T_0^s = T_0^p = \cos^2(kn_2 \eta / 2)$, $T_1^s = T_1^p = \sin^2(kn_2 \eta / 2)$ [9], [11].

В случае дифракции на ГР падающей световой волны с азимутом поляризации ψ_0 , на выходе слоя ($x = h$) происходит поворот плоскости поляризации дифрагированной волны нулевого и первого порядков на углы [12]:

$$\psi_{0,1}^r = \arctg(|r_{0,1}^s / r_{0,1}^p| \tg \psi_0),$$

$$\psi_{0,1}^t = \arctg(|t_{0,1}^s / t_{0,1}^p| \tg \psi_0).$$

Коэффициенты отражения ($R_{0,1}$) и пропускания ($T_{0,1}$) дифрагированных волн при произвольном азимуте поляризации ψ_0 находим из соотношений:

$$R_{0,1} = R_{0,1}^p \cos^2 \psi_{0,1}^r + R_{0,1}^s \sin^2 \psi_{0,1}^r,$$

$$T_{0,1} = T_{0,1}^p \cos^2 \psi_{0,1}^t + T_{0,1}^s \sin^2 \psi_{0,1}^t.$$

Следует отметить, что поворот плоскости поляризации дифрагированного света обусловлен лишь френелевским отражением от границ слоя для несогласованной структуры ($n_1 \neq n_2 \neq n_3$).

Численные расчеты проводились для плоскопараллельного слоя из кристалла $GaAs$ в случае анизотропной дифракции линейно поляризованного излучения с длиной волны $\lambda_0 = 1,15$ мкм и периодом ГР $\Lambda = 20$ мкм (рисунок 1.1). Предполагалось, что слой материала ($n_2 = 3,18$), в котором зарегистрирована ГР, граничит с воздухом ($n_1 = n_3 = 1$).

На рисунке 2.1 представлена зависимость коэффициентов пропускания (T_0, T_1) и отражения (R_0, R_1), занятого ГР слоя, от фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn при различных толщинах слоя h .

Из рисунка 2.1 следует, что коэффициенты пропускания дифрагированных волн нулевого порядка достигают значительных величин даже при малых Δn . При $\Delta n \approx 0,53 \cdot 10^{-3}$ величина $T_0 \approx 0,38$ независимо от толщины слоя h . Коэффициент пропускания дифрагированной волны первого порядка принимает отличное от нуля значение при $\Delta n = 0$ и толщине слоя $h = 2,5$ мм. Отметим, что для согласованной ГР структуры ($n_1 = n_2 = n_3$) данный эффект не реализуется. Лишь при $h = 2,5$ мм и $\Delta n \approx 1,2 \cdot 10^{-3}$ коэффициент пропускания достигает максимального значения $T_1 = 1$. Данные особенности анизотропной брэгговской дифракции в слое обусловлены наличием как прошедших дифрагированных на ГР волн, так и отраженных дифракционных порядков.

Значительные величины коэффициента отражения R_0 дифрагированная волна нулевого порядка принимает при малых значениях изменения показателя преломления слоя Δn . Величина коэффициента отражения дифрагированной

волны первого порядка R_1 на порядок меньше, чем отраженной дифрагированной волны нулевого порядка R_0 . При этом для любых толщин слоя h и изменения Δn коэффициенты отражения R_1 принимают одинаковые максимальные значения.

На рисунке 2.2 представлены зависимости энергетических коэффициентов пропускания и отражения дифрагированных волн нулевого и первого порядка от азимута поляризации падающего света ψ_0 . Для большей наглядности диапазон изменения ψ_0 ограничен интервалом от 0 до 45° . При изменении ψ_0 в интервале от 45° до 90° характер зависимостей не изменяется, причем амплитуда осцилляций и их период остаются неизменными.

Особенности коэффициентов пропускания (T_0, T_1) дифрагированных волн обусловлены различием коэффициентов пропускания ($T_{0s,p}, T_{1s,p}$) для s - и p -поляризованного света, падающего на модулированный ГР слой. При этом наибольшие осцилляции испытывает коэффициент пропускания дифрагированной волны первого порядка; для $h = 2$ мм коэффициент пропускания изменяется от $T_1 = 0,06$ до $T_1 = 0,41$. Наименьшие осцилляции испытывает коэффициент пропускания

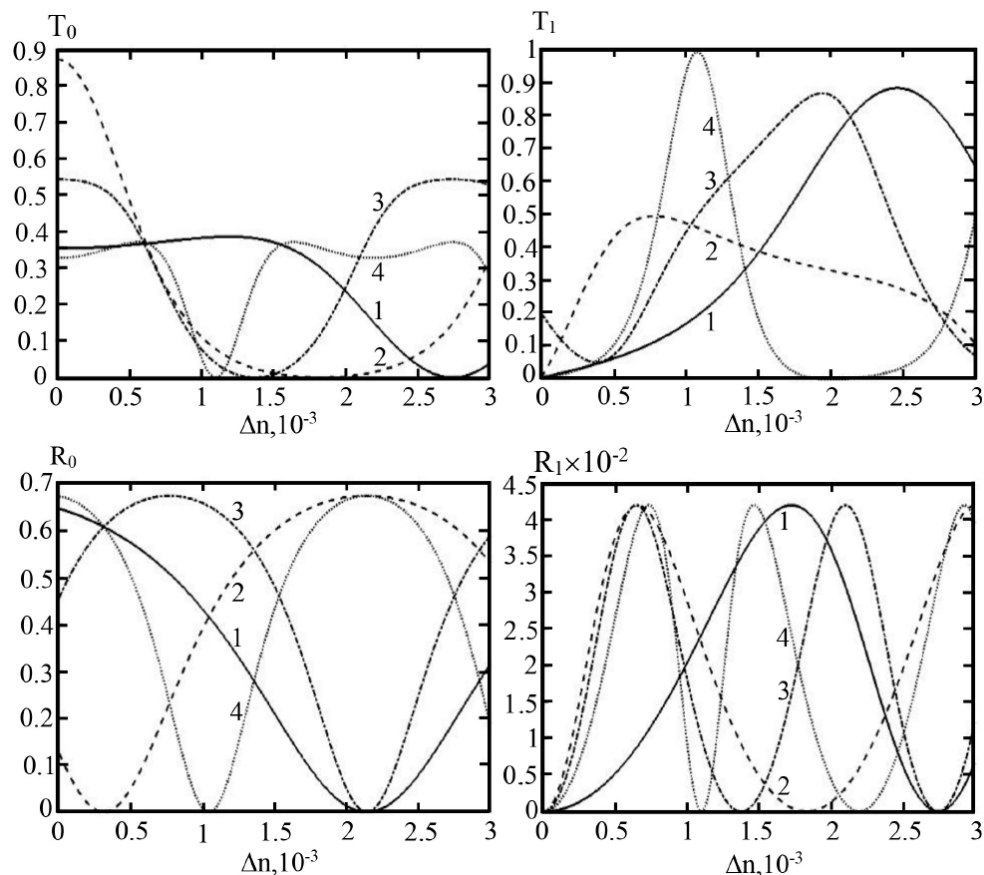


Рисунок 2.1 – Зависимости коэффициентов пропускания (T_0, T_1) и отражения (R_0, R_1) дифрагированной на ГР световой волны в плоскопараллельном слое от фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn при различных толщинах h : 1 мм (1); 1,5 мм (2); 2 мм (3); 2,5 мм (4) (кристалл $GaAs$, $n_2 = 3,18$, $n_1 = n_3 = 1$, $\lambda_0 = 1,15$ мкм, $\varphi_1 = 2^\circ$, $\psi_0 = 90^\circ$)

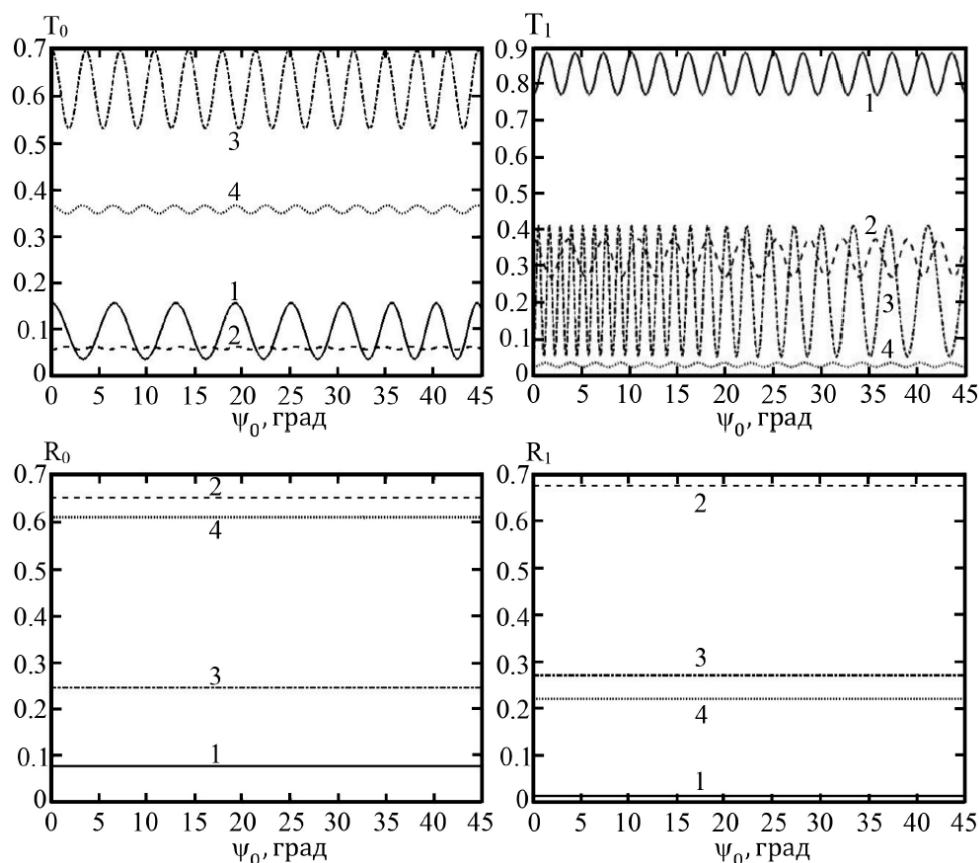


Рисунок 2.2 – Зависимости коэффициентов пропускания (T_0 , T_1) и отражения (R_0 , R_1) дифрагированной на ГР световой волны в плоскопараллельном слое от азимута поляризации падающего света ψ_0 при различных толщинах слоя h : 1 мм (1); 1,5 мм (2); 2 мм (3); 2,5 мм (4) ($GaAs$, $n_2 = 3,18$, $n_1 = n_3 = 1$, $\lambda_0 = 1,15$ мкм, $\phi_1 = 2^\circ$, $\Delta n = 2,5 \cdot 10^{-3}$)

T_0 при $h = 1,5$ мм. Осцилляции коэффициентов отражения дифрагированных волн (R_0 , R_1) при изменении азимута поляризации ψ_0 отсутствуют. Данный эффект можно рассматривать как поляризационно независимую модуляцию света в области ГР с периодически изменяющимся показателем преломления света. Рассмотренные закономерности объясняются нелинейным характером зависимостей коэффициентов отражения и пропускания дифрагированного света от толщины слоя, амплитуды модуляции показателя ГР для s - и p -поляризованных составляющих падающей волны.

Заключение

Таким образом, в работе исследованы особенности анизотропной дифракции света на ГР, размещенной в слое с показателем преломления, отличным от показателя преломления покрытия и подложки. Показано, что для больших значений изменения показателя преломления ГР в условиях их считывания необходимо учитывать значительные отличия френелевских коэффициентов отражения дифрагированных волн на границах плоскопараллельного слоя. Рассмотренные

особенности дифракции на фазовых решетках могут проявляться не только в условиях эффекта Франца – Келдыша, вблизи края фундаментального поглощения нецентросимметричного кубического кристалла, но и при создании устройств оптоэлектроники на основе аномального электрооптического эффекта в окрестности фазового перехода второго рода [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Использование фенантренина для формирования фазовых трехмерных голограмм в среде реоксана / Н.С. Шелехов, О.В. Бандюк, А.П. Попов, А.О. Ребезов // Сб. научных трудов. Оптическая голография с записью в трехмерных средах; под ред. Ю.Н. Денисюка. – Ленинград: Наука, 1986. – С. 74–82.
2. Длинноволновая граница спектральной чувствительности полимеров реоксана / А.Н. Попов, А.Ф. Кавтрев, А.В. Вениаминов, Г.И. Лашков // Сб. научных трудов. Оптическая голография с записью в трехмерных средах; под ред. Ю.Н. Денисюка. – Ленинград: Наука, 1986. – С. 82–91.

3. Барачевский, В.А. Современное состояние разработки светочувствительных сред (обзор) / В.А. Барачевский // Опт. и спектр. – 2018. – Т. 124, № 3. – С. 371–399.
4. Шандаров, С.М. Изменение тензора диэлектрической проницаемости в кубических фоторефрактивных кристаллах под действием электрического поля голографической решетки / С.М. Шандаров, В.В. Шепелевич, Н.Д. Хатьков // Опт. и спектр. – 1989. – Т. 67, № 4. – С. 819–822.
5. Багаев, В.С. Об электрооптическом эффекте в GaAs / В.С. Багаев, Ю.Н. Берозашвили, Л.В. Келдыш // Письма в ЖЭТФ. – 1966. – Т. 4, В. 9. – С. 364–368.
6. Аронов, А.Г. Анизотропные электрооптические эффекты в полупроводниках / А.Г. Аронов, Г.Е. Пикус // Физика твердого тела. – 1968. – Т. 10, В. 3. – С. 825–832.
7. Малиновский, В.К. Фотоиндуцированные явления в силленитах / В.К. Малиновский, О.А. Гудаев, В.А. Гусев, С.И. Деменко. – Москва: Наука, 1990. – 159 с.
8. Кулак, Г.В. Поляризационные особенности дифракции света на голографических фазовых решетках в среде «реоксан» / Г.В. Кулак, В.Н. Навныко, Т.В. Николаенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 14–18.
9. Петров, М.П. Фоточувствительные электрооптические среды в голографии и оптической обработке информации / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – Ленинград: Наука, 1983. – 270 с.
10. Кулак, Г.В. Дифракция света на ультразвуке в условиях френелевского отражения / Г.В. Кулак // Опт. и спектр. – 1994. – Т. 76, № 6. – С. 1027–1029.
11. Kong, J.A. Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media / J.A. Kong // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – Vol. 67, № 6. – P. 825–829.
12. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – Москва: Наука, 1973. – 721 с.

Поступила в редакцию 17.02.2022.

Информация об авторах

Кулак Геннадий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор
Навныко Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Николаенко Татьяна Викторовна – к.ф.-м.н., доцент

СКОРОСТЬ ВОЛНЫ ПРИ ГИДРОУДАРЕ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТЫХ ФУТЕРОВАННЫХ ТРУБ ИЗ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

THE WAVE VELOCITY DURING A WATER HAMMER AND THE STRESS-STRAIN STATE OF LAYERED LINED PIPES MADE OF ORTHOTROPIC MATERIALS

V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Решается задача расчета напряженно-деформированного состояния ортотропных двухслойных труб из композитов и определения скорости волны при гидроударе применительно к современной CIPP «Cured-in-place pipe». Выведены зависимости, определяющие скорость волны при гидроударе для различных комбинаций упругих ортотропных свойств трубы и футеровки. Приводятся численные результаты о влиянии цилиндрической анизотропии упругих свойств футеровки (или трубы) на скорость волны при гидроударе.

Ключевые слова: скорость волны, гидроудар, футеровка, напряжения, слоистая труба, ортотропный материал.

Для цитирования: Можаровский, В.В. Скорость волны при гидроударе и напряженно-деформированное состояние слоистых футерованных труб из ортотропных материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 44–51. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_44 – EDN: SGFXWP

Abstract. The problem of calculating the stress-strain state of orthotropic double-layer pipes made of composites and determining the wave velocity during a water hammer is solved, in relation to the modern CIPP “Cured-in-place pipe” technology. The dependences are derived that determine the wave velocity during a water hammer for various combinations of elastic orthotropic properties of the pipe and lining. The numerical results are given on the effect of cylindrical anisotropy of elastic properties of the lining (or pipe) on the wave velocity during a water hammer.

Keywords: wave velocity, water hammer, lining, stresses, layered pipe, orthotropic material.

For citation: Mozharovsky, V.V. The wave velocity during a water hammer and the stress-strain state of layered lined pipes made of orthotropic materials / V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 44–51. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_44 (in Russian). – EDN: SGFXWP

Введение

Развитие современной техники требует разработки новых материалов, способных работать в сложных эксплуатационных условиях – при воздействии повышенных давлений, температур и агрессивных сред. К подобным материалам относятся также композиционные материалы с полимерной, металлической или другой матрицей. Волокнистые композиты обладают рядом характерных уникальных свойств – повышенной направленной прочностью, жесткостью, выдерживают высокотемпературные деформации, обладают низким коэффициентом термического расширения. Важно отметить, что такие параметры работоспособности зависят не только от свойств волокон и матрицы, но и от доли фракции волокон, способов их армирования. Применение гетерогенных материалов определяется в большей степени условиями эксплуатации и требованиями к физико-механическим характеристикам

будущей конструкции. Большой практический интерес представляют слоистые структуры, которые способны существенно повлиять на характер распределения нагрузок, что может повысить прочность и износостойкость изделий.

В этой статье предлагаются исследования об определении параметров эксплуатации футерованных труб из современных композиционных материалов согласно новой современной технологии так называемой CIPP «Cured-in-place pipe» по ремонту труб без проведения земляных работ. Эта технология достаточно проста и начала широко применяться во всем мире. Суть этой технологии заключается в том, что в поврежденный участок трубы вводится футеровка из волокнистых композитных материалов со смолой (пропитанная труба, изготовленная из стекловолокна, углеродного волокна или другого пропитанного смолой вещества), которая прикрепляется к трубе под действием давлений воды или

пара, и получается новая слоистая отремонтированная труба. Ключевым моментом этой технологии является расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) в сечении трубы с композитной футеровкой и нахождение допускаемой толщины покрытия, а также определение скорости волны при гидроударе. Некоторое теоретическое решение по расчету (НДС) футерованной трубы из композиционного материала представлено в [1], здесь также дана постановка линейной упругой задачи для ортотропных материалов, геометрические и граничные условия. Поэтому, ради краткости, постановку упругой задачи опускаем, а приведем окончательные дифференциальные уравнения и основные зависимости. Решение задачи о расчете НДС двухслойной ортотропной трубы, слои которой состоят из разных материалов, при действии внутреннего давления и нулевого наружного, представлено в случае плоского напряженного состояния.

1 Определение скорости волны жидкости при гидроударе для ортотропной слоистой трубы

Исследования, касающиеся определения скорости волны при течении жидкости по изотропной трубе, известны давно. Теоретическое обоснование теории удара для изотропных труб при течении жидкости принадлежат известным ученым Мариоту, Кортвегу и выдающемуся российскому учёному Н.Е. Жуковскому. [2]–[4]. Согласно их исследованиям величина скорости волны при гидроударе зависит от упругой деформации стенки трубы и деформационных и механических свойств жидкости, то есть является скоростью распространения упругих деформаций. Следовательно, для определения скорости волны при гидроударе нужно определить деформацию в сечении трубы при изменении давления, которая выражается через изменения скорости площади сечения [5]–[7]:

$$\frac{\dot{A}}{A} \approx 2\varepsilon_0 \Big|_{r=a},$$

где A – площадь в сечении трубы, точка над A обозначает производную по времени t .

Система уравнений для описания переходного движения сжимаемых жидкостей состоит из дифференциальных уравнений неразрывности и сохранения момента [5], [6]

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V A)}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial(V)}{\partial t} + \rho V \frac{\partial(V)}{\partial x} + \frac{\partial(P)}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

Исходя из уравнений (1.1) и (1.2) и классических исследований, представленных в работах [2], [3], следует, что скорость распространения ударной волны определяется по формуле

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\partial \rho}{\partial P} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial P},$$

где P – давление внутри трубы; V – средняя скорость в направлении оси трубы; ρ – плотность жидкости; γ – удельный вес жидкости; x – абсцисса оси трубы; c – скорость волны от избыточного давления, гидроудара; t – время; A – площадь поперечного сечения трубы.

Здесь первое слагаемое характеризует влияние упругих свойств (compressibility) жидкости в трубе на скорость волны, а второе – эффекта жесткости трубы на скорость волны.

Из анализа уравнения следуют два асимптотических случая. Для несжимаемой жидкости $\frac{\partial \rho}{\partial P} = 0$, а для сжимаемой жидкости и в жесткой

трубе имеем $\frac{\partial A}{\partial P} = 0$, соответственно, скорости

волны будут $c^2 = \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A}$, $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$. Уравнение

(1.1) получается из выражения [7]

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

или, приняв $\dot{A}/A \approx 2\varepsilon_0$ и заменив $\dot{A}/A = P\Omega$, где Ω получаем из решения граничной задачи для слоистой трубы при определении деформации ε_0 можно уравнения непрерывности записать как

$$\frac{P}{K} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

находим [7]

$$c = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + K\Omega}}, \quad (1.3)$$

здесь K – объемный модуль упругости для жидкости.

Таким образом, исходя из литературных источников и выше приведенных зависимостей, следует, что при течении жидкости в двухслойной ортотропной трубе для нахождения скорости волны при гидроударе необходимо определить деформацию ε_0 .

2 Напряженно-деформированное состояние двухслойной трубы из ортотропных материалов

Математическая постановка и решение задачи определения напряженного-деформированного состояния футерованных труб из ортотропных материалов представлено, например, в статье [1]. Для определения НДС слоистой конструкции трубы при действии давления внутри трубы представим краткое решение задачи расчета напряжений и деформаций в покрытии и в трубе из ортотропных материалов.

Пусть имеется цилиндрическая труба, однослойная и двухслойная, из ортотропных

материалов (внутренний радиус – r_a , внешний – r_c , межслойный радиус для двухслойной трубы – r_b). Труба находится под действием внутреннего нагружения P , внешнее давление отсутствует. На рисунке 2.1, а также на рисунках в таблице 2.1 показана модель двухслойной трубы из ортотропных материалов с футеровкой (покрытием), которая может быть и трансверсально-изотропной.

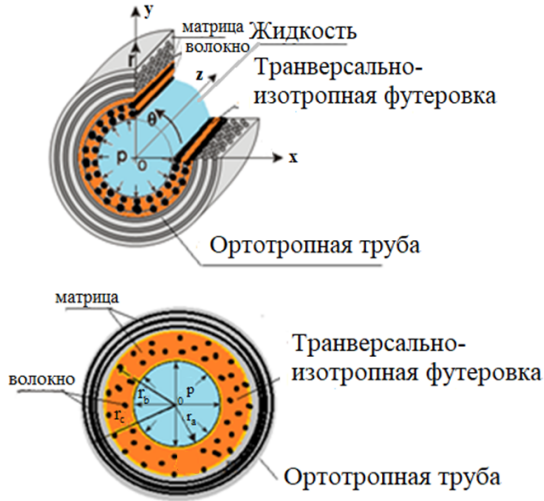


Рисунок 2.1 – Схема расчета двухслойной СТРП трубы

Определим НДС труб из ортотропных материалов. Выпишем основные уравнения, используемые в дальнейшем.

Для ортотропного тела с цилиндрической анизотропией уравнения обобщенного закона Гука (уравнения представлены в главных направлениях ортотропии волокнистого материала) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, \quad \gamma_{\theta z} = a_{44}\tau_{\theta z}, \\ \varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta + a_{23}\sigma_z, \quad \gamma_{rz} = a_{55}\tau_{rz}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_z, \quad \gamma_{r\theta} = a_{66}\tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

a_{ij} – упругие постоянные.

В других (технических) обозначениях уравнения (2.1) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{rz}}{E_z}\sigma_z, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G_{\theta z}}\tau_{\theta z}, \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r}\sigma_r + \frac{1}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{\theta z}}{E_z}\sigma_z, \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{rz}}\tau_{rz}, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{zr}}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta + \frac{1}{E_z}\sigma_z, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

где E_r, E_θ, E_z – модули Юнга для растяжения (сжатия) по направлениям r, θ, z (совпадающим с главными направлениями упругости); ν_{ij} – коэффициенты Пуассона, удовлетворяющие условиям: $\nu_{z\theta}E_z = \nu_{\theta z}E_\theta$; $\nu_{r\theta}E_\theta = \nu_{\theta r}E_r$.

Для рассматриваемой задачи запишем уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

решается задача при следующих заданных граничных условиях:

- 1) $\sigma_r^{(1)} = -p$, при $r = r_a$;
- 2) $\sigma_r^{(2)} = 0$, при $r = r_c$;
- 3) $\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}$, при $r = r_b$;
- 4) $u^{(1)} = u^{(2)}$, при $r = r_b$;

где p – интенсивность нагрузки (давления) на внутренней части трубы; r_a, r_c – внутренний и внешний радиусы трубы; r_b – радиус границы слоёв трубы; Λ_1, Λ_2 – области трубы и футеровки соответственно; $\sigma_r^{(i)}$ и $u^{(i)}$ – радиальное напряжение и перемещение (индекс $i, i = 1, 2$ указывает на рассматриваемую область трубы Λ_i).

В случае отсутствия массовых сил компоненты тензора напряжений для каждого слоя футерованной трубы должны удовлетворять уравнениям равновесия.

Компоненты напряжений σ_r, σ_θ определяются через деформации ε_r и ε_θ

$$\sigma_r = A_{11}\varepsilon_r + A_{12}\varepsilon_\theta,$$

$$\sigma_\theta = A_{12}\varepsilon_r + A_{22}\varepsilon_\theta,$$

или, используя соотношения Коши о связи напряжений с деформациями, имеем

$$\begin{cases} \sigma_r = A_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + A_{12} \frac{u}{r}, \\ \sigma_\theta = A_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + A_{22} \frac{u}{r}. \end{cases}$$

В случае плоского напряженного состояния технические постоянные для каждой $i, i = 1, 2$ области слоистой трубы будут

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_r}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}, \quad A_{12} = \nu_{r\theta} \frac{E_\theta}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}, \\ A_{22} &= \frac{E_\theta}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение равновесия, получаем дифференциальное уравнение в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{A_{22}}{A_{11}} \frac{1}{r^2} u = 0,$$

решение которого ищем в виде

$$u^{(i)} = \begin{cases} C_1^{(i)} r^{k^{(i)}} + C_2^{(i)} r^{-k^{(i)}}, & m^{(i)} > 0, \\ C_1^{(i)} \sin(k^{(i)} \ln r) + C_2^{(i)} \cos(k^{(i)} \ln r), & m^{(i)} < 0, \\ C_1^{(i)} r + C_2^{(i)} r^{-1}, & m^{(i)} = 0, \end{cases}$$

где индекс $i, i = 1, 2$ указывает на рассматриваемую область трубы Λ_i , $m^{(i)} = \frac{A_{22}^{(i)}}{A_{11}^{(i)}}$, $k^{(i)} = \sqrt{m^{(i)}}$,

$C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$ – неизвестные коэффициенты.

На основании формул получаем зависимость напряжений для каждой области D_i

$$\sigma_r = kA_{11}(C_1 r^{k-1} - C_2 r^{-k-1}) + A_{12}(C_1 r^{k-1} + C_2 r^{-k-1}),$$

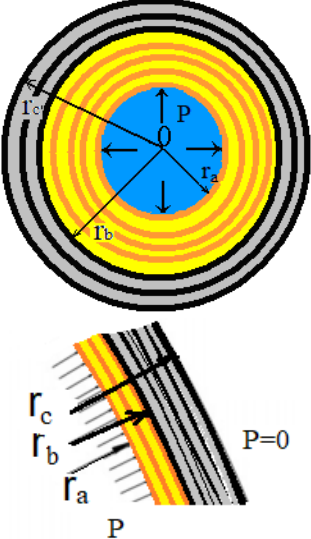
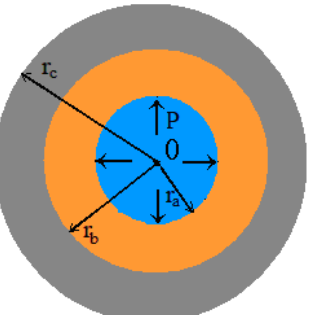
$$\sigma_\theta = kA_{12}(C_1 r^{k-1} - C_2 r^{-k-1}) + A_{22}(C_1 r^{k-1} + C_2 r^{-k-1})$$

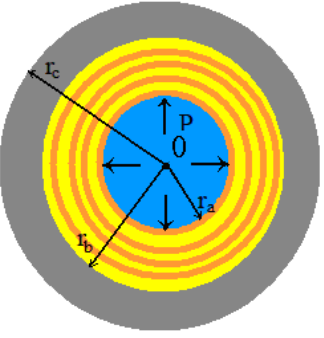
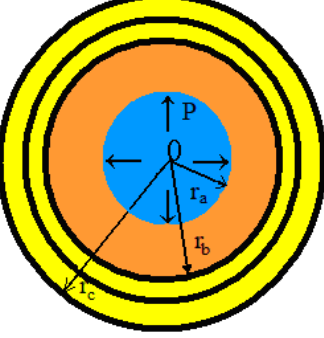
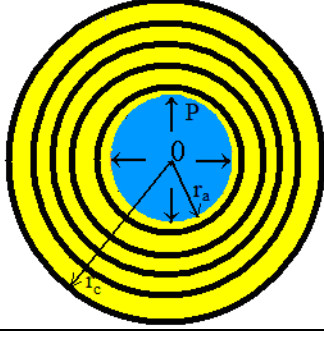
и затем находим деформацию $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$.

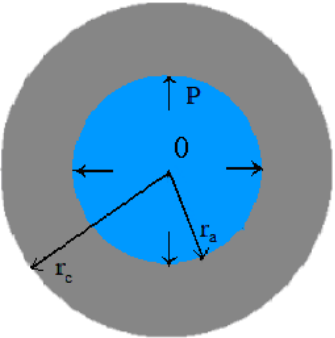
Подставив в формулу (1.3) значение $\dot{A}/A = P/\Omega$, получаем скорость волны при гидроударе в слоистой композитной трубе с движущейся жидкостью.

Для удобства создания алгоритма расчета ударной волны, при движении жидкости в слоистой композитной трубе, построена схема расчета различных комбинаций футеровки композитных труб, которая представлена в таблице 2.1. Верхние индексы «1» и «2» характеризуют материалы покрытия и трубы.

Таблица 2.1 – Значение функции Ω для различных конструкций трубы

Конструкция трубы	Значение функции Ω , входящей в формулу для вычисления скорости волны при гидроударе (примеры расчета скорости волны)
Ортотропная труба. Ортотропная футеровка 	$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[-1 + \left(-\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \times \right. \\ \left. \alpha \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \right] \times \\ \times \frac{\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \frac{\beta}{\alpha} \right)},$ $\beta = A_{12}^{(1)} - k_1 A_{11}^{(1)}, \alpha = A_{11}^{(1)} k_1 + A_{12}^{(1)}, \gamma = A_{11}^{(2)} k_2 + A_{12}^{(2)}, g = A_{12}^{(2)} - k_2 A_{11}^{(2)}.$ Труба: $E_0 = 167$ ГПа; $E_r = 9,18$ ГПа; $\nu_{0r} = 0,294$; $\nu_{r0} = 0,0162$; $r_c = 0,156$ м; $r_b = 0,15$ м; толщина $r_c - r_b = 0,006$ м. Покрытие: $E_0 = 80$ ГПа; $E_r = 4,21$ ГПа; $\nu_{0r} = 0,3$; $\nu_{r0} = 0,158$; $r_b = 0,15$ м; $r_a = 0,147$ м, толщина $r_b - r_a = 0,003$ м; $c = 1173$ м/с.
Изотропная труба. Изотропная футеровка 	$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[-1 + \left(-\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \times \right. \\ \left. \alpha \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \right] \times \\ \times \frac{\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \frac{\beta}{\alpha} \right)},$ $\gamma = \frac{E^{(2)}}{1 - \nu^{(2)}}, g = \frac{-E^{(2)}}{1 + \nu^{(2)}}, \beta = \frac{-E^{(1)}}{1 + \nu^{(1)}}, \alpha = \frac{E^{(1)}}{1 - \nu^{(1)}},$ где $E^{(2)}$ и $\nu^{(2)}$ – характеристики изотропной трубы, $E^{(1)}$ и $\nu^{(1)}$ – характеристики изотропной футеровки. Труба стальная: $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$; $r_c = 0,156$ м; $r_b = 0,15$ м; толщина $r_c - r_b = 0,006$ м. Покрытие fiberglass reinforced: $E = 9$ ГПа, $\nu = 0,22$; $r_b = 0,15$ м; $r_a = 0,147$ м; толщина $r_b - r_a = 0,003$ м; $c = 1183,4$ м/с.

Конструкция трубы	Значение функции Ω , входящей в формулу для вычисления скорости волны при гидроударе (примеры расчета скорости волны)
Изотропная труба. Ортотропная футеровка 	$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[-1 + \left(-\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \times \right. \\ \left. \alpha \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \right] \times \\ \times \frac{\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \frac{\beta}{\alpha} \right)} ;$ $\beta = A_{12}^{(1)} - k_1 A_{11}^{(1)}, \alpha = A_{11}^{(1)} k_1 + A_{12}^{(1)}, \gamma = \frac{E}{1-\nu}, g = \frac{-E}{1+\nu},$ где E и ν – характеристики изотропной трубы, k_1 – коэффициент для покрытия. Труба стальная: $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$; $r_c = 0,156$ м; $r_b = 0,15$ м; толщина $r_c - r_b = 0,006$ м. Покрытие: $E_0 = 80$ ГПа; $E_r = 4,21$ ГПа; $\nu_{0r} = 0,3$; $\nu_{r0} = 0,158$; $r_b = 0,15$ м; $r_a = 0,147$ м, толщина $r_b - r_a = 0,003$ м; $c = 1210$ м/с.
Ортотропная труба. Изотропная футеровка 	$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[-1 + \left(-\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \times \right. \\ \left. \alpha \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \right] \times \\ \times \frac{\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \frac{\beta}{\alpha} \right)}{\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2k_2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \frac{\beta}{\alpha} \right)} ;$ $\beta = \frac{-E}{1+\nu}, \alpha = \frac{E}{1-\nu}, \gamma = A_{11}^{(2)} k_2 + A_{12}^{(2)}, g = A_{12}^{(2)} - k_2 A_{11}^{(2)},$ где E и ν – характеристики изотропной футеровки. Труба: $E_0 = 167$ ГПа; $E_r = 9,18$ ГПа; $\nu_{0r} = 0,294$; $\nu_{r0} = 0,0162$; $r_c = 0,156$ м; $r_b = 0,15$ м; толщина $r_c - r_b = 0,006$ м. Покрытие fiberglass reinforced: $E = 9$ ГПа, $\nu = 0,22$; $r_b = 0,15$ м; $r_a = 0,147$ м; толщина $r_b - r_a = 0,003$ м; $c = 1134$ м/с.
Ортотропная труба 	$\Omega = \frac{-2}{1 - (r_c / r_a)^{2k}} \left(\frac{1}{A_{11}k + A_{12}} + \frac{(r_c / r_a)^{2k}}{A_{11}k - A_{12}} \right),$ r_c и r_a – внешний и внутренний радиусы трубы соответственно, $k = \sqrt{m} = \sqrt{A_{22} / A_{11}}$. Труба: $E_0 = 167$ ГПа; $E_r = 9,18$ ГПа; $\nu_{0r} = 0,294$; $\nu_{r0} = 0,0162$; $r_c = 0,156$ м; $r_a = 0,15$ м; толщина $r_c - r_a = 0,006$ м; $c = 1133$ м/с.

Конструкция трубы	Значение функции Ω , входящей в формулу для вычисления скорости волны при гидроударе (примеры расчета скорости волны)
Изотропная труба 	$\Omega = \frac{2}{E} \left(v - \frac{1 + (r_c / r_a)^2}{1 - (r_c / r_a)^2} \right), \quad r_c \text{ и } r_a - \text{внешний и внутренний радиусы трубы соответственно, } E \text{ и } v - \text{характеристики изотропной трубы [7].}$ $\Omega = \lambda \frac{D}{Eh} \text{ для формулы Жуковского Н.Е., Korteweg D.J.,}$ D – диаметр трубы, E – модуль упругости, h – толщина трубы, λ – коэффициент, характеризующий условия закрепления и коэффициент Пуассона. Труба стальная: $E = 210$ ГПа, $v = 0,3$; $r_c = 0,156$ м; $r_a = 0,15$ м; толщина $r_c - r_a = 0,006$ м; $c = 1184$ м/с.

3 Примеры расчета скорости волны при гидроударе для слоистой трубы из композита

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния двухслойных композитных труб представлены на рисунке 3.1. Для сравнения и подтверждения правильности расчетов показаны значения напряжений, подсчитанные для изотропной двухслойной трубы ($E_0 / E_r = 1$), и даны в сравнении с [7] (рисунок 3.1, б).

Коэффициенты обобщенного закона Гука определяются по зависимостям, в которых упругие характеристики материала определяются из [8] следующим образом, по правилу смесей:

$$E_r = E_m \frac{1 + \eta V}{1 - \eta V}, \quad E_0 = V E_f + (1 - V) E_m,$$

$$v_{r0} = V v_f + (1 - V) v_m, \quad \eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m},$$

$$G_{r0} = \frac{G_f G_m}{G_f (1 - V) + G_m V}.$$

В формулах и далее E_f , G_f , v_f – технические постоянные волокна, E_m , G_m , v_m – технические постоянные матрицы, V – объемное содержание волокон.

В качестве примера для исследования о влиянии анизотропных свойств волокнистого материала футеровки рассмотрим расчет скорости волны при гидроударе для стальной изотропной трубы с модулем упругости $E = 210$ ГПа и коэффициентом Пуассона $v = 0,3$, считая, что модуль упругости футеровки (волокнистый стеклопластик) будет меняться: от $E_0 = 9$ ГПа до 80 ГПа, $v_{0r} = 0,22$; $E_r = 9$ ГПа; внутреннее давление $P = 0,9806$ МПа; плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м³; объемный модуль упругости жидкости $K = 2140$ МПа (рисунок 3.1, а). Для сравнения полученных расчетов скорости волны при гидроударе с расчетами, приведенными в работе для изотропной футеровки [7], проведем расчет для стальной трубы со стеклонаполненной футеровкой, изменяя модули упругости от ортотропного

материала к изотропному. Размеры труб и толщины футеровки соответствуют работе [7] ($v_{0r} = 0,3$; $E_r = 14,804$ ГПа; $E_0 = 14,804 - 296,08$ ГПа (рисунок 3.1, б). Для изотропного материала представленные расчеты совпадают с результатами работы [7] (рисунок 3.1, б, кривая 5). Анализ полученных результатов расчета на рисунке 3.1 показывает существенное влияние свойств анизотропии материала футеровки на изменения скорости волны при гидроударе в зависимости от толщины покрытия. Кроме того, существенно влияет на скорость волны и соотношения модулей упругости ортотропного материала.

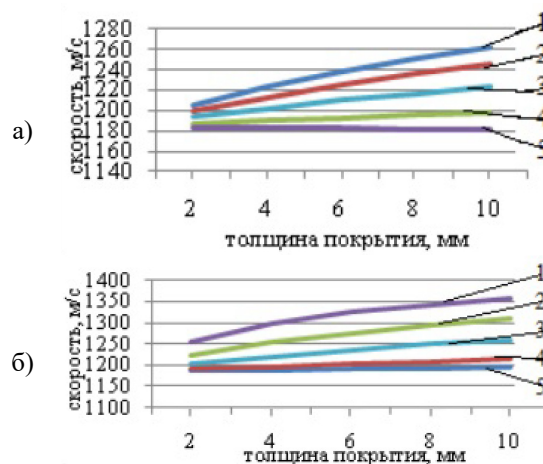


Рисунок 3.1 – Скорости волны при гидроударе для слоистых труб из композита при следующих отношениях модулей упругости E_0 / E_r :

- а) 1–8,8; 2–6,7; 3–4; 4–2,2; 5–1;
б) 1–20; 2–10; 3–5; 4–2; 5–1.

На рисунках 3.2 и 3.3 показаны графики зависимостей напряжений σ_r , перемещений u_r и напряжений σ_0 от r для двухслойной трубы с покрытием из изотропных материалов и двухслойной изотропной трубы с ортотропным покрытием соответственно.

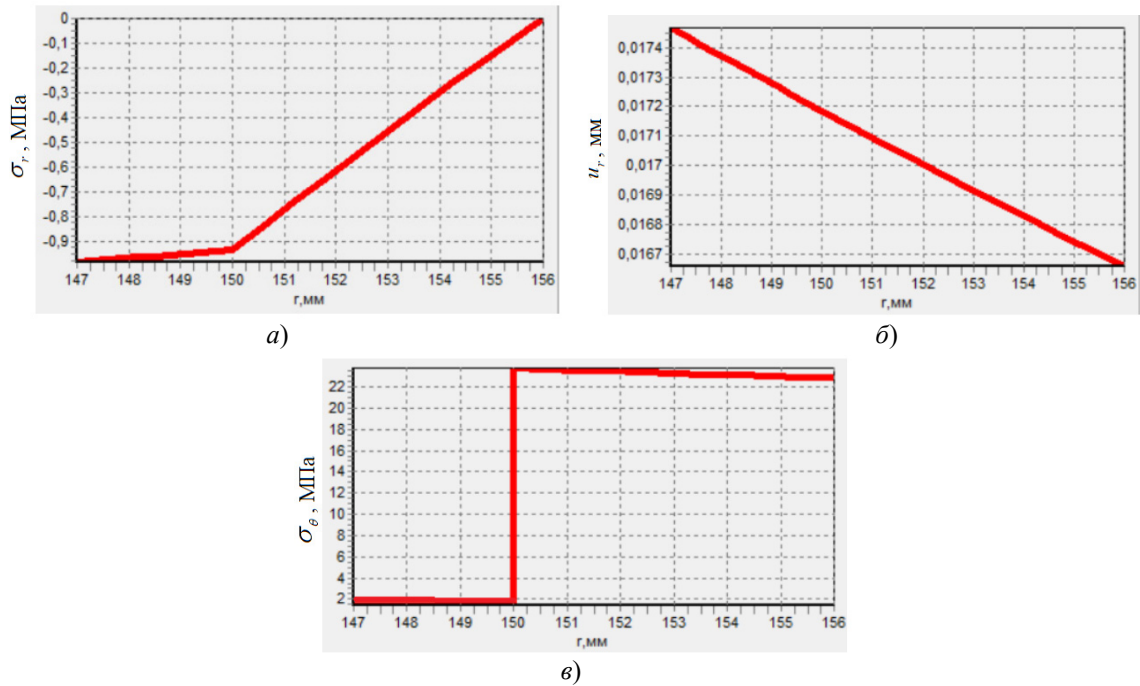


Рисунок 3.2 – Графики зависимостей:

а) напряжений σ_r от r ; б) перемещений u_r от r ;

в) напряжений σ_θ от r для двухслойной трубы с покрытием из изотропных материалов (труба стальная: $E = 210$ ГПа; $\nu = 0,3$; $r_c = 0,156$ м; $r_b = 0,15$ м, толщина $r_c - r_b = 0,006$ м; покрытие: $\nu_{\theta r} = \nu_{r\theta} = 0,3$; $E_r = E_\theta = 14,804$ ГПа, $r_b = 0,15$ м, $r_a = 0,147$ м, толщина $r_b - r_a = 0,003$ м)

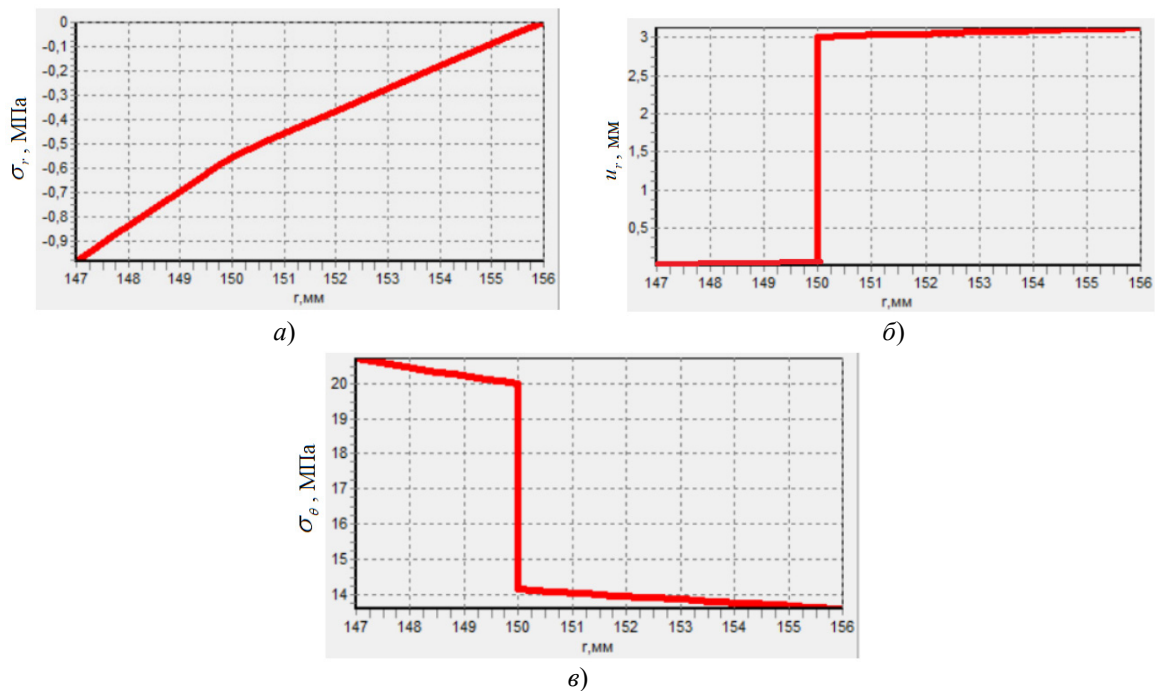


Рисунок 3.3 – Графики зависимостей:

а) напряжений σ_r от r ; б) перемещений u_r от r ;

в) напряжений σ_θ от r для двухслойной изотропной трубы с ортотропным покрытием (труба стальная: $E = 210$ ГПа; $\nu = 0,3$; $r_c = 0,156$ м; $r_b = 0,15$ м, толщина $r_c - r_b = 0,006$ м; покрытие: $E_\theta = 296,08$ ГПа; $E_r = 14,804$ ГПа; $\nu_{\theta r} = 0,3$; $\nu_{r\theta} = 0,015$; $r_b = 0,15$ м, $r_a = 0,147$ м, толщина $r_b - r_a = 0,003$ м)

Заключение

В статье представлена методика расчета скорости волны при гидроударе при течении жидкости в трубах из волокнистых композитов с футеровкой. Математическая модель расчета базируется на решении краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии ортотропной слоистой трубы и на классических подходах о расчете скорости волны при гидроударе при движении жидкости в металлической трубе. Классические результаты получаются как частный случай расчета поставленной задачи при равенстве модулей упругости для ортотропного материала. Представленные формулы для упругих труб являются точными для тонких и толстых, но они могут лишь приближенно определять искомые параметры для армированных труб с намоткой. Когда напряжение преобразуем из главных направлений в направления нагружения, мы делаем поворот на угол θ около оси z . Элементы, модули упругости, входящие в физические уравнения, записываются через некоторый угол в направлении нагружения [8]. Представленные решения рассматриваемых задач легко преобразуются в решения для случая расчета для плоской деформации при замене упругих физических постоянных – модулей упругости и коэффициентов Пуассона [8], [9]. В заключении отметим, что данная методика апробировалась при расчете изотропных труб численными методами [7] и в дальнейшем осталось проверить её экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марьин, С.А. Напряженно-деформированное состояние слоистой трубы из ортотропных материалов / С.А. Марьин, В.В. Можаровский // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2004. – Т. 9, № 3. – С. 16–21.

2. Korteweg, D.J. Über die fortpflanzungsgeschwindigkeit des schalles in elastischen rohren / D.J. Korteweg // Ann. Phys. Chemie. – 1878. – Vol. 5–12. – P. 525–542.

3. Joukowski, N. E. Memoirs of the Imperial Academy Society of St. Petersburg / N.E. Joukowski // Proc. Amer. Water Works Assoc. – 1898. – Vol. 9, № 5. – P. 341–424.

4. Жуковский, Н.Е. Об гидравлическом ударе в водопроводных трубах / Н.Е. Жуковский; Госиздат технико-теоретической литературы. – Москва – Ленинград, 1949. – С. 525–542.

5. Lighthill, J. Waves in Fluids / J. Lighthill. – Cambridge University Press, 1978.

6. Joseph, E. Shock Loading and Failure of Fluid-Filled Tubular Structures / E. Joseph, Shepherd and Kazuaki Inaba // Materials and structures. – 2010. – Charter 6. – P. 153–190.

7. Wave celerity in hydraulic transients computation for cipp-rehabilitated pipes / F. Evangelista [et al.] // Int. J. Comp. Meth. and Exp. Meas. – 2020. – Vol. 8, № 4. – P. 326–340.

8. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов: плоские контактные задачи / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 271 с.

9. Heracovich, C.T. Mechanics of Fibrous Composites. – University of Virginia, New York, 1998. – 480 p.

Поступила в редакцию 10.03.2022.

Информация об авторах

Можаровский Валентин Васильевич – д.т.н., профессор
Киргинцева Светлана Викторовна – ассистент

СТРУКТУРА И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРЕМНИЙ-УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, ЛЕГИРОВАННЫХ ХРОМОМ

А.С. Руденков¹, А.В. Рогачев¹, С.М. Завадский², А.Н. Купо¹

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF SILICON-CARBON COATINGS ALLOYED WITH CHROMIUM

A.S. Rudenkov¹, A.V. Rogachev¹, S.M. Zavadski², A.N. Kupo¹

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Аннотация. Определены морфологические особенности, фазовый состав и механические свойства легированных хромом кремний-углеродных покрытий, сформированных ионно-лучевым распылением составной мишени на основе карбида кремния и хрома. Установлено, что введение хрома в покрытие приводит к снижению концентрации кислорода, способствует структурной упорядоченности sp^2 -кластеров. Легированные хромом Si / C покрытия имеют более гладкую поверхность, характеризуются повышенной пластичностью, более низкими значениями коэффициентов трения и объемного изнашивания контртела.

Ключевые слова: углеродные покрытия, кремний, хром, морфология, фазовый состав, твердость, пластичность, коэффициент трения.

Для цитирования: Структура и механические свойства кремний-углеродных покрытий, легированных хромом / А.С. Руденков, А.В. Рогачев, С.М. Завадский, А.Н. Купо // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 52–57. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_52 – EDN: STABSW

Abstract. The morphological features, phase composition, and mechanical properties of chromium-doped silicon-carbon coatings formed by ion-beam sputtering of a composite target based on silicon and chromium carbide are determined. It has been established that the introduction of chromium into the coating leads to a decrease in the oxygen concentration and contributes to the structural ordering of sp^2 clusters. Alloying with chromium Si / C coatings have a smoother surface and are characterized by increased plasticity, lower values of friction coefficients and volumetric wear of the counterbody.

Keywords: carbon coatings, silicon, chromium, morphology, phase composition, hardness, plasticity, friction coefficient.

For citation: Structure and mechanical properties silicon-carbon coatings alloyed with chromium / A.S. Rudenkov, A.V. Rogachev, S.M. Zavadski, A.N. Kupo // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 52–57. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_52 (in Russian). – EDN: STABSW

Введение

Покрытия на основе углерода обладают уникальным комплексом свойств: высокой микротвердостью и износостойкостью; низким коэффициентом трения; химической инертностью; низкой шероховатостью; высокими напряжениями пробоя, электрическим сопротивлением и теплопроводностью; прозрачностью в инфракрасной области; устойчивостью к коррозии; низким коэффициентом трения и хорошей биосовместимостью [1]–[4]. Однако, у рассматриваемого типа покрытий существуют и недостатки – высокий уровень внутренних механических напряжений и низкая термостойкость (до 350°С), что значительно ограничивает их сферу применения [5]–[7].

Одним из наиболее перспективных технологических приемов снижения уровня внутренних напряжений с одновременным повышением термостойкости является легирование углеродных

покрытий тугоплавкими металлами (Ta, W, Mo) либо кремнием [6]–[9]. Так, авторами [8] показано, что введение вольфрама в состав углеродных покрытий приводит к снижению внутренних напряжений с 2,9 ГПа до 1,8 ГПа. Легирование углеродных покрытий кремнием способствует не только снижению уровня внутренних напряжений, но и сохранению термостабильности механических свойств при температуре до 600°С [6]. Такие изменения механических характеристик объясняется достаточно высоким содержанием углеродных sp^3 -связей, ростом содержания высокодисперсных твердых фаз на основе SiC_x , SiO_x .

Таким образом, путем выбора легирующего элемента и варьирования его концентрации можно значительно повысить физико-механические свойства покрытий. При этом необходимо учитывать, что свойства углеродных покрытий

зависят, главным образом, от соотношения sp^3/sp^2 -гибридизированных атомов углерода и при легировании их металлами – химическим и фазовыми составами. Известно, что повышение свойств углеродных покрытий, легированных кремнием, определяется формированием более дисперсной структуры и образованием твердых нанокластеров карбида кремния [10]. Введение металлов в состав слоя, особенно на стадии его осаждения, может оказать каталитическое или ингибирующее влияние на процессы химического взаимодействия, структурообразования.

Так, можно прогнозировать, что легирование кремний-углеродных покрытий хромом, проявляющим по отношению к углероду в сравнении с кремнием более высокую активность, значительно изменит фазовый и химический состав покрытия и, соответственно, их свойства. Определение особенностей процессов осаждения, формирования структуры, установление механических свойств таких покрытий и составляет основную цель настоящей работы.

1 Методика эксперимента

Кремний-углеродные покрытия, легированные хромом, были сформированы на кремниевых подложках путем ионно-лучевого распыления мишени на основе карбида кремния со вставками проволоки из хрома (рисунок 1.1). Параметры работы ионно-лучевого источника: напряжение разряда – 4,5 кВ, ток разряда 150 мА, остаточное давление в вакуумной камере – 2×10^{-2} Па, подача рабочего газа (аргон) – 32 мл/мин. Толщина покрытия – 150 нм.

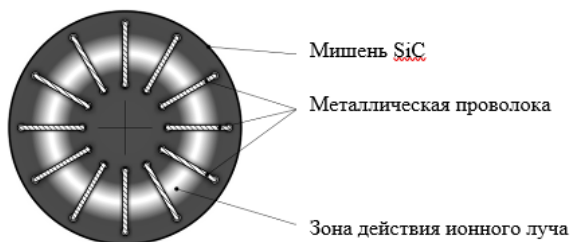


Рисунок 1.1 – Составная мишень

Элементный состав покрытий определялся с помощью сканирующего электронного микроскопа Stereoscan-360 (Cambridge Instruments, Англия), оснащенного приставкой для проведения энергодисперсионного анализа и позволяющего определить качественный и количественный химический состав исследуемого образца.

Морфологические особенности сформированных композиционных покрытий были изучены средствами атомно-силовой микроскопии (АСМ) при использовании микроскопа Solver Pro (NT-MDT, Россия) в режиме полуконтакта. Статистический анализ полученных данных был выполнен с помощью специализированного аналитического программного комплекса Gwyddion,

позволяющего вычислять среднее арифметическое отклонение всех точек профиля шероховатости от средней линии на длине оценки (R_a), проводить оценку рельефа путем вычисления квадратного корня из среднего квадрата расстояний вершин неровностей профиля до его средней линии и определять средние значения количества, высоты и диаметра отдельных структурных образований (зерен) на площади сканирования (4×4 мкм).

Фазовый состав кремний-углеродных покрытий, легированных хромом, определялся методом спектроскопии комбинационного рассеяния при помощи спектрометра Sentera (Bruker, Германия) с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм, мощностью 5 мВт.

Механические характеристики покрытий (нанотвердость H , модуль упругости E) определялись нанотвердомером «НаноСкан 4D» (ФГБНУ «ТИСНУМ», Россия), оснащённым алмазным индентором Берковича.

Триботехнические испытания осуществлялись по схеме «сфера – плоскость» (шарик радиусом 5 мм из закаленной стали ШХ15 при следующих параметрах: средняя скорость перемещения равнялась 0,0087 м/с, нагрузка – 0,98 Н. Передача, прием и обработка полученных данных при выполнялась при помощи специализированного программного обеспечения, позволяющего определить коэффициент трения.

2 Результаты и их обсуждение

Показано, что при формировании кремний-углеродных покрытий, легированных хромом, путем ионно-лучевого распыления составной мишени концентрация металла монотонно изменяется при увеличении количества вставок (таблица 2.1). Ранее в [11] нами установлено, что в случае осаждения кремний-углеродных покрытий, легированных металлом, из потока сложного состава, образованного с помощью импульсного катодно-дугового источника углеродной плазмы и стационарного электродугового источника металлической плазмы, наблюдается нелинейное изменение концентрации металла в покрытии.

Таблица 2.1 – Химический состав углеродных покрытий, легированных кремнием и титаном

Мишень	Концентрация элементов в покрытии, ат. %			
	C	Si	O	Cr
SiC	43,26	37,79	18,95	–
SiC+Cr (2 вставки)	42,45	39,34	15,91	2,30
SiC+Cr (4 вставки)	41,30	40,84	13,78	4,08
SiC+Cr (8 вставок)	40,57	42,16	11,42	5,85

При наличии вставок хрома в мишени на основе карбида кремния концентрация кислорода в покрытии существенно ниже, что обусловлено, по всей видимости, более интенсивным распадом оксида кремния при его распылении в присутствии хрома. Это предположение подтверждается снижением концентрации кислорода в покрытии с увеличением площади вставок из хрома в мишени.

Методом АСМ установлено, что кремний-углеродные покрытия, легированные хромом, характеризуются более низкой шероховатостью (рисунок 2.1, таблица 2.2).

Средняя высота нановыступов покрытий при концентрации хрома 5,85% снижается почти в 2 раза, при этом, однако, возрастает размер отдельных поверхностных элементов. Установленные изменения химического состава покрытий сказываются и на структурной дисперсности покрытия: размер зерен возрастает при повышении концентрации хрома.

Спектры комбинационного рассеивания полученных углеродных покрытий характеризуются наличием пика в диапазоне от 1000 см^{-1} и 1800 см^{-1} . Методика анализа углеродного пика заключается в его разложении на две гауссианы:

– D-пик (около $1350\text{--}1400\text{ см}^{-1}$), соответствующий матрице на основе sp^2 -гибридизированных атомов и содержащей sp^3 -гибридизированные атомы [12];

– G-пик (около $1560\text{--}1580\text{ см}^{-1}$), соответствующий sp^2 -гибридизированным атомам углерода [13].

Таблица 2.2 – Морфологические особенности кремний-углеродных покрытий, легированных хромом

Образец	Средняя высота, нм	R_a , нм	Плотность зерен, шт.	Средний диаметр зерен, нм
$\text{C}_{43,26\%} + \text{Si}_{37,79\%}$	2,8	0,2	496	22
$\text{C}_{42,45\%} + \text{Si}_{39,34\%} + \text{Cr}_{2,3\%}$	2,5	0,3	297	42
$\text{C}_{41,30\%} + \text{Si}_{40,84\%} + \text{Cr}_{4,08\%}$	2,4	0,4	264	40
$\text{C}_{40,57\%} + \text{Si}_{42,16\%} + \text{Cr}_{5,85\%}$	1,6	0,1	336	41

Данные КР-спектроскопии (таблица 2.3) подтверждают результаты атомно-силовой микроскопии и также свидетельствуют о снижении дисперсности sp^2 – кластеров, поскольку значения соотношения I_D / I_G при легировании покрытия

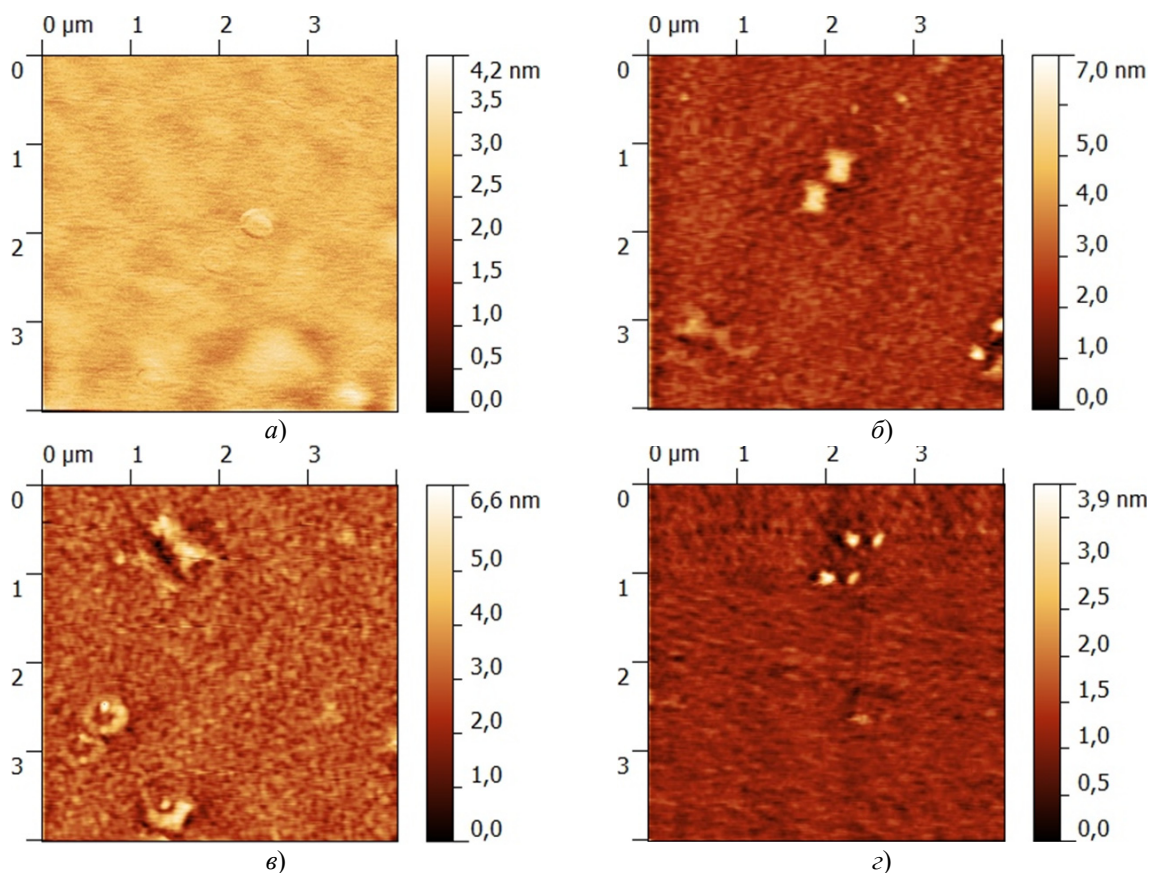


Рисунок 2.1 – АСМ изображения поверхности кремний-углеродных покрытий, легированных хромом: а) $\text{C}_{43,26\%} + \text{Si}_{37,79\%}$; б) $\text{C}_{42,45\%} + \text{Si}_{39,34\%} + \text{Cr}_{2,3\%}$; в) $\text{C}_{41,30\%} + \text{Si}_{40,84\%} + \text{Cr}_{4,08\%}$; з) $\text{C}_{40,57\%} + \text{Si}_{42,16\%} + \text{Cr}_{5,85\%}$

хромом в соответствии с [14] обратно пропорционально размеру кластеров графита. Необходимо отметить, что в случае формирования кремний-углеродных покрытий из плазмы импульсного катодно-дугового разряда значение соотношения I_D / I_G варьируется в пределах 0,5–0,7 в зависимости от режимов и условий осаждения. Кроме того, кремний-углеродные покрытия, легированные хромом и сформированные путем ионно-лучевого распыления, характеризуются смещением D-пика в область более высоких волновых чисел по сравнению с однокомпонентными углеродными покрытиями [12] и кремний-углеродными покрытиями [11], осаждаемыми при помощи импульсного катодно-дугового источника, что может быть обусловлено более высокими концентрациями кремния и, как следствие, образованием Si-C связей (пик вблизи 1450 см^{-1}).

Легирование кремний-углеродных покрытий хромом способствует уменьшению ширины G-пика, что связано с увеличением степени структурной упорядоченности кластеров графита [12]. Значение соотношения I_D / I_G может быть вызвано целым комплексом факторов: изменением фазового соотношения sp^3 / sp^2 [14] и размеров sp^2 -кластеров [12], смещением D-пика вследствие изменения концентрации карбида кремния [15]. Так, согласно [15] легирование углеродных покрытий кремнием свыше 37 ат. % приводит к снижению содержания sp^2 -кластеров. Кроме того, известно [16], что легирование углеродных покрытий атомарными потоками металлов способствует увеличению содержания графита и увеличению степени упорядоченности sp^2 -гибридизированных атомов углерода.

Для спектров комбинационного рассеяния кремний-углеродных покрытий характерно наличие пиков вблизи 968 см^{-1} и 794 см^{-1} , что,

согласно [17] соответствует LO и TO модам колебаний SiC. Установлено, что легирование хромом кремний-углеродных покрытий приводит к снижению модуля упругости E и нанотвердости H по сравнению с кремний-углеродными покрытиями, не содержащими металл (таблица 2.4). Полученный результат коррелирует с результатами, приведенными в работах [10], [18], свидетельствует об уменьшении соотношения H / E при введении металлов в состав покрытий на основе углерода, а значит и об увеличении пластичности покрытия.

В первую очередь, снижение микротвердости может быть обусловлено фазовой трансформацией $sp^3 \rightarrow sp^2$. Кроме того, уменьшение микротвердости может объясняться снижением концентрации C – O – Si, Si – C связей из-за сорбции кислорода и ионов углерода металлическими вставками мишени, а также взаимодействием атомов хрома с кислородом и углеродом в объеме покрытия. Хром обладает более высокой химической активностью по сравнению с кремнием, поэтому в объеме покрытия в первую очередь будут образовываться химические соединения с хромом.

Введение хрома в объем кремний-углеродных покрытий приводит к снижению коэффициента трения (рисунок 2.2) и коэффициента объемного изнашивания контртела j (таблица 2.4).

С увеличением концентрации хрома в кремний-углеродных покрытиях наблюдается уменьшение значений коэффициентов трения и объемного изнашивания контртела, что обусловлено, по всей видимости, более интенсивной графитизацией, изменением морфологии поверхности, снижением содержания оксида кремния, определяющего в значительной степени абразивное воздействие покрытия на контртело.

Таблица 2.3 – Статистическая обработка КР спектров кремний-углеродных покрытий легированных хромом

Образец	D-пик		G-пик		I_D / I_G
	Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	
$C_{43,26\%} + Si_{37,79\%}$	1431,4	142,4	1529,3	103,0	2,19
$C_{42,45\%} + Si_{39,34\%} + Cr_{2,3\%}$	1435,6	163,5	1535,3	93,5	1,95
$C_{41,30\%} + Si_{40,84\%} + Cr_{4,08\%}$	1438,4	166,7	1534,3	94,2	1,89
$C_{40,57\%} + Si_{42,16\%} + Cr_{5,85\%}$	1437,9	152,3	1540,0	91,3	2,03

Таблица 2.4 – Механические характеристики кремний-углеродных покрытий, легированных хромом

Образец	H , ГПа	E , МПа	H / E	Коэффициент трения	$j \times 10^{-17}$, $\text{м}^3 / (\text{Н} \cdot \text{м})$
$C_{43,26\%} + Si_{37,79\%}$	16,7	182,2	0,09	0,50	412
$C_{42,45\%} + Si_{39,34\%} + Cr_{2,3\%}$	15,3	174,6	0,09	0,46	391
$C_{41,30\%} + Si_{40,84\%} + Cr_{4,08\%}$	14,5	169,3	0,08	0,41	376
$C_{40,57\%} + Si_{42,16\%} + Cr_{5,85\%}$	12,8	150,9	0,08	0,38	345

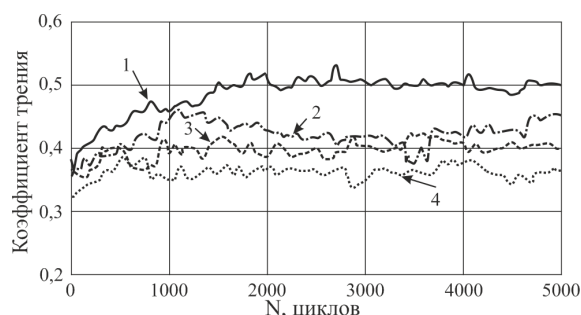


Рисунок 2.2 – Кинетические зависимости коэффициента трения кремний-углеродных покрытий (1) и кремний-углеродных покрытий с различным содержанием хрома:

- 2 – $C_{42,45\%} + Si_{39,34\%} + Cr_{2,3\%}$,
 3 – $C_{41,30\%} + Si_{40,84\%} + Cr_{4,08\%}$,
 4 – $C_{40,57\%} + Si_{42,16\%} + Cr_{5,85\%}$

Выводы

Показано, что легирование кремний-углеродных покрытий хромом приводит к снижению средней высоты нановыступов, повышению среднего диаметра структурных образований. Введение хрома в покрытие снижает концентрацию кислорода, способствует структурной упорядоченности sp^2 -кластеров.

Установлено, что легирование хромом кремний-углеродных покрытий способствует увеличению их пластичности, снижению микротвердости, модуля упругости, коэффициента трения и коэффициента объемного изнашивания контртела. Такой эффект, по-видимому, достигается за счет более значительной графитизации покрытия и уменьшения содержания абразивных фаз внедрения на основе соединений SiO_x , благодаря более высокой химической активности хрома по сравнению с кремнием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Effects of iodine doping on optoelectronic properties of diamond-like carbon thin films deposited by microwave surface wave plasma CVD* / A.M.M. Ommer [et al.] // *Diamond and Related Materials*. – 2004. – Vol. 13. – P. 2136–2139.
2. *Effects of deposition gas pressure on the properties of hydrogenated amorphous carbon nitride films grown by surface wave microwave plasma chemical vapor deposition* / M. Rusop [et al.] // *Diamond and Related Materials*. – 2005. – Vol. 14. – P. 975–982.
3. Kim, J. Dependence of the physical properties DLC films by PECVD on the Ar gas addition / J. Kim, C. Lee // *Journal of the Korean Physical Society*. – 2003. – Vol. 42. – P. 956–960.
4. Рогачев, А.В. Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // *Трение и износ*. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.

5. *Study of mechanical properties and stress of tetrahedral amorphous carbon films prepared by pulse biasing* / Y.B. Zhang [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 2005. – Vol. 195. – P. 338–343.

6. *In-situ thermal stability analysis of amorphous Si-doped carbon films* / M. Rouhani [et al.] // *Carbon*. – 2021. – Vol. 184. – P. 772–785.

7. *Stress reduction of diamond-like carbon by Si incorporation: A molecular dynamics study* / X. Li [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 2013. – Vol. 228. – P. 5190–5193.

8. *Influence of W content on microstructural, mechanical and tribological properties of sulfurized W-doped diamond-like carbon coatings* / W. Yue [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 2013. – Vol. 218. – P. 47–56.

9. *Structure and properties of Mo-containing diamond-like carbon films produced by ion source assisted cathodic arc ion-plating* / L.L. Wang [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2013. – Vol. 286. – P. 109–114.

10. *Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы* / Д.Г. Пилипцов, А.С. Руденков, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Цзян Сяо Хун, Чжоу Бин. – 2020. – Москва: Радиотехника. – 283 с.

11. Руденков, А.С. Морфология и фазовый состав легированных кремнием углерод-титановых покрытий / А.С. Руденков, А.В. Рогачёв, Д.Г. Пилипцов // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2021. – № 3 (48). – С. 37–41.

12. *Ferrari, A.C. Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon* / A.C. Ferrari, J. Robertson // *Physical Review B*. – 2000. – Vol. 61. – P. 4095–4107.

13. *Tuinstra, F. Raman spectrum of graphite* / F. Tuinstra, J.L. Koenig // *Journal of Chemical Physics*. – 1970. – Vol. 53. – P. 1126–1130.

14. *Microstructure and high-temperature tribological properties of Si-doped hydrogenated diamond-like carbon films* / T.F. Zhang [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2018. – Vol. 435. – P. 963–973.

15. *Bonding structure and haemocompatibility of silicon-incorporated amorphous carbon* / S. Zhang [et al.] // *Thin Solid Films*. – 2006. – Vol. 515. – P. 66–72.

16. Руденков, А.С. Влияние концентрации металла на фазовый состав, структуру и свойства углерод-металлических покрытий / А.С. Руденков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2015. – № 3 (24). – С. 26–32.

17. *Characteristics and surface energy of silicon-doped diamond-like carbon films fabricated by plasma immersion ion implantation and deposition* / G.J. Wan [et al.] // *Diamond and Related Materials*. – 2006. – Vol. 15. – P. 1276–1281.

18. Пилипцов, Д.Г. Влияние термообработки на механические свойства слоистых углеродных

покрытий / Д.Г. Пилипцов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 29–37. – DOI: 10.54341/20778708_2021_3_48_37

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «Разработка реакционных ионно-плазменных методов формирования и параметризация покрытий на основе силицированного углерода и карбидообразующих металлов с высокими механическими свойствами и повышенной термостойкостью», комплексное задание 3.1.02 «Разработка устройств и процессов комбинированного электронно-ионного нанесения слоев и модифицирования поверхности для формирования функциональных покрытий»

ГПНИ «Материаловедение, новые материалы и технологии», подпрограмма «Электромагнитные, пучково-плазменные и литейно-деформационные технологии обработки и создания материалов».

Поступила в редакцию 05.05.2022.

Информация об авторах

*Руденков Александр Сергеевич – к.т.н., доцент
Рогачёв Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.м., профессор
Завадский Сергей Михайлович – к.т.н., доцент
Купо Александр Николаевич – к.т.н., доцент*

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ПОЛУСУБНОРМАЛЬНЫМИ КОРАДИКАЛАМИ СИЛОВСКИХ НОРМАЛИЗАТОРОВ

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON FINITE GROUPS WITH SEMISUBNORMAL RESIDUALS OF SYLOW NORMALIZERS

A.F. Vasil'ev

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Пусть π – некоторое множество простых чисел, G – π -разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi}$. Доказано, что если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовой p -подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π -сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G , то G π -сверхразрешима.

Ключевые слова: конечная группа, силовский нормализатор, полусубнормальная подгруппа, нильпотентный корадикал, π -сверхразрешимая группа.

Для цитирования: Васильев, А.Ф. О конечных группах с полусубнормальными корадикалами силовских нормализаторов / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 58–62. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_58 – EDN: UEJBDP

Abstract. Let π be some set of primes, G be a π -soluble group and $G \in \mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi}$. It is proved that if for any prime $p \in \pi \cap \pi(G)$ and Sylow p -subgroup P from G the normalizer $N_G(P)$ is π -supersoluble and its nilpotent residual is semisubnormal in G , then G is π -supersoluble.

Keywords: finite group, Sylow normalizer, semisubnormal subgroup, nilpotent residual, π -supersoluble group.

For citation: Vasil'ev, A.F. On finite groups with semisubnormal residuals of Sylow normalizers / A.F. Vasil'ev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 58–62. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_58 (in Russian). – EDN: UEJBDP

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Изучение принадлежности насыщенной формации $\mathfrak{F}$ групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп лежат в $\mathfrak{F}$, восходит к результату Глаубермана [1] о том, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_q$ – формация всех q -групп и нормализатор любой силовой q -подгруппы группы G принадлежит $\mathfrak{N}_q$ для любого простого делителя q порядка G , то G – примарная группа. В дальнейшем для краткости нормализаторы силовских подгрупп группы будем называть силовскими нормализаторами. В [2] в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, доказано, что $G \in \mathfrak{N}$ всякий раз, как силовские нормализаторы нильпотентны. В [3] установлено, что если $\mathfrak{F}$ – формация всех ϕ -дисперсивных групп с абелевыми силовскими подгруппами для некоторого упорядочения ϕ множества всех простых чисел, или $\mathfrak{F}$ – формация всех вполне факторизуемых групп, то группа G с силовскими нормализаторами из

$\mathfrak{F}$ сама соответственно принадлежит $\mathfrak{F}$. К этому направлению исследований относятся также работы [4]–[6].

Отметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп, то из сверхразрешимости силовских нормализаторов в группе G уже не следует, что G принадлежит $\mathfrak{U}$. В качестве примера такой группы выступает симметрическая группа S_4 степени 4, в которой силовскими нормализаторами являются силовские 2-подгруппы и подгруппы, изоморфные $[Z_3]Z_2$. При этом $S_4 \notin \mathfrak{U}$, а в S_4 все силовские нормализаторы принадлежат $\mathfrak{U}$. Строение группы со сверхразрешимыми силовскими нормализаторами было исследовано в работах [7], [8]. Например, для такой группы G в [7] были получены свойства в случае $|\pi(G)| = 2$, в [8] найдены оценки нильпотентной длины в случае разрешимости G .

Группы с формационно субнормальными силовскими нормализаторами исследовались в [9], где, в частности, были найдены наследственные

насыщенные формации $\mathfrak{F}$, содержащие группу с $\mathfrak{F}$ -субнормальными силовскими нормализаторами.

Согласно [10] подгруппа A группы G называется *полуноормальной* в G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX – подгруппа в G для любой подгруппы X из B . В [11] подгруппа A группы G называется *полусубнормальной* в G , если A субнормальна или полуноормальна в G .

Понятие полусубнормальной подгруппы в разрешимых группах является частным случаем активно используемого в настоящее время понятия $\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппы. Напомним [12], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$ -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо имеется цепь подгрупп от H до G с простыми индексами. В разрешимой группе всякая полусубнормальная подгруппа является $\mathbb{P}$ -субнормальной, однако обратное неверно.

В настоящей работе для π -разрешимой группы G , принадлежащей $\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$, с π -сверхразрешимыми нормализаторами силовских p -подгрупп ($p \in \pi \cap \pi(G)$) найдена связь полусубнормальности нильпотентных корадикалов в G этих силовских нормализаторов с π -сверхразрешимостью G . Получены новые результаты для разрешимой группы со сверхразрешимыми силовскими нормализаторами.

1 Предварительные сведения

В работе используются обозначения и определения из [13] и [14].

Через $|G|$ обозначается порядок группы G , $\pi(G)$ – множество всех простых делителей $|G|$, $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа G для простого числа p ,

$\text{Core}_G(M) = \bigcap_{x \in G} M^x$ для всех $x \in G$ для любой подгруппы M из G ,

$F(G)$ – подгруппа Фиттинга из G , т. е. наибольшая нильпотентная нормальная подгруппа G ,

Z_p – циклическая подгруппа порядка p ,

1 – единичная подгруппа (группа),

$\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел.

В работе используются обозначения классов групп:

$\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп,

$\mathfrak{E}_\pi$ – класс всех π -групп для $\pi \subseteq \mathbb{P}$,

$\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π' -групп, где $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$,

$\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'} = \{G \mid \exists N \trianglelefteq G, N \in \mathfrak{E}_\pi \text{ и } G/N \in \mathfrak{E}_{\pi'}\}$.

Лемма 1.1. Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Если H – субнормальная подгруппа в G , то $H \cap K$ – субнормальная подгруппа в K [13, теорема 7.3].

(2) Если K – субнормальная подгруппа в H и H – субнормальная подгруппа в G , то K – субнормальная подгруппа в G [13, лемма 7.1].

(3) Если H и K – субнормальные подгруппы в G , то $H \cap K$ – субнормальная подгруппа в G и $\langle H, K \rangle$ – субнормальная подгруппа в G [13, теоремы 7.4 и 7.5].

(4) Если H – субнормальная подгруппа в G и K – нормальная подгруппа в G , то HK/K субнормальна в G/K [14, лемма A.14.1 (b)].

Лемма 1.2 [11, лемма 3.1]. (1) Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и $H \leq X \leq G$, то H полусубнормальна в X .

(2) Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и подгруппа N нормальна в G , то HN полусубнормальна в G и HN/N полусубнормальна в G/N .

(3) Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и Y – непустое множество элементов из G , то подгруппа $H^Y = \langle H^y \mid y \in Y \rangle$ полусубнормальна в G . В частности, H^g полусубнормальна в G для любого $g \in G$.

Лемма 1.3 [11, лемма 3.2 (1)]. Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы G . Если силовская p -подгруппа P из G полусубнормальна в G , то P нормальна в G .

Лемма 1.4 [14, теорема A.15.2]. Если в группе G существует максимальная подгруппа M с $\text{Core}_G(M) = 1$, то выполняется только одно из утверждений:

(1) в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N , $N = C_G(N)$ (в частности, N абелева) и M дополняет N в G ;

(2) в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N , N неабелева и M является добавлением N в G ;

(3) в G имеются только две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 , каждая из них добавляется с помощью M в G . Также $C_G(N_i) = N_{3-i}$ и $N_1 \cong N_2 \cong N_1 N_2 \cap M$.

Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $G^\mathfrak{F}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G со свойством $G/G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$. Нильпотентный корадикал – это $G^\mathfrak{N}$ для $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$.

Лемма 1.5 [13, лемма 1.2] Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $(G/K)^\mathfrak{F} = G^\mathfrak{F}K/K$ для любой $K \trianglelefteq G$;

(2) если $G = HK$, H – подгруппа из G и $K \trianglelefteq G$, то $H^\mathfrak{F}K = G^\mathfrak{F}K$.

Лемма 1.6 [13, лемма 3.9 (1)]. Если G – группа, то $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$ для любого главного фактора H/K из G , $p \in \pi(H/K)$, и $F_p(G) \leq C_G(H/K)$.

Известные необходимые нам свойства π -сверхразрешимых групп (см., например, [13, с. 35], [15, гл. VI, § 8, 9]) приведем в следующей лемме.

Лемма 1.7. Класс всех π -сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией; если группа G p -сверхразрешима, то она имеет p -нильпотентный коммутант; если группа G сверхразрешима, то G дисперсивна по Оре.

Напомним [13], что *дисперсивная по Оре* группа – это группа G с $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, в которой существуют нормальные подгруппы порядков

$$P_1^{\alpha_1}, P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2}, \dots, P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}$$

при естественном упорядочении

$$p_1 > p_2 > \dots > p_n.$$

Нам потребуется известный результат С.А. Чунихина.

Лемма 1.8 [13, теорема 18.3]. Если G – π -разрешимая группа, то $G \in (D_\pi \mathfrak{S}) \cap D_\pi$.

2 Основной результат

Лемма 2.1. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G , N – нормальная подгруппа из G . Если $(N_G(P))^{\pi_1}$ – полусубнормальная подгруппа в G , то $(N_{G/N}(PN/N))^{\pi_1}$ – полусубнормальная подгруппа в G/N .

Доказательство. По свойству силовских подгрупп $N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$. Из леммы 1.5 следует, что

$$(N_{G/N}(PN/N))^{\pi_1} = (N_G(P))^{\pi_1} N/N.$$

Тогда из полусубнормальности $(N_G(P))^{\pi_1}$ в G по лемме 1.2 (2) имеем $(N_{G/N}(PN/N))^{\pi_1}$ – полусубнормальная подгруппа в G/N . $\square$

Лемма 2.2. Если G – π -сверхразрешимая группа и $|\pi \cap \pi(G)| \geq 1$, то холлова π -подгруппа из G дисперсивна по Оре.

Доказательство. Из π -сверхразрешимости G по лемме 1.7 следует π -сверхразрешимость холловой π -подгруппы G_π из G . Отсюда с учетом леммы 1.8 G_π дисперсивна по Оре. $\square$

Теорема 2.1. Пусть G – π -разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p -подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π -сверхразрешим и его nilпотентный корадикал полусубнормален в G , то G π -сверхразрешима.

Доказательство. Предположим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем среди них группу G наименьшего порядка. Тогда G π -разрешима, для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p -подгруппы P из G ее

нормализатор $N_G(P)$ π -сверхразрешим $(N_G(P))^{\pi_1}$ полусубнормален в G , а G не является π -сверхразрешимой.

Из π -разрешимости G следует, что в G имеется минимальная нормальная подгруппа N . Тогда либо N – p -группа для некоторого простого числа p , либо N – π' -группа. Так как N π -сверхразрешима, $N \neq G$.

Рассмотрим любую силовскую s -подгруппу $S_1 N/N$ из G/N , $s \in \pi \cap \pi(G)$. В G найдется силовская s -подгруппа S такая, что

$$S_1 / N = SN / N.$$

Из π -сверхразрешимости $N_G(S)$ следует, что

$$N_{G/N}(S_1 / N) = N_G(S)N / N \cong N_G(S) / N_G(S) \cap N$$

π -сверхразрешим. По лемме 2.1 из полусубнормальности $(N_G(S))^{\pi_1}$ в G заключаем, что

$$(N_{G/N}(S_1 / N))^{\pi_1} = (N_{G/N}(SN / N))^{\pi_1}$$

полусубнормален в G/N . Так как G/N π -разрешима, по выбору G имеем G/N π -сверхразрешима.

Если в G существует еще одна минимальная нормальная подгруппа $N_1 \neq N$, то G/N_1 π -сверхразрешима. Так как класс всех π -сверхразрешимых групп является формацией, заключаем, что $G/N \cap N_1 \cong G$ π -сверхразрешима. Это противоречит выбору G .

Итак, N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G .

Допустим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $N \leq \Phi(G)$.

Поэтому $G/\Phi(G) \cong G/N/\Phi(G)/N$ π -сверхразрешима. Из насыщенности формации всех π -сверхразрешимых групп заключаем, что G π -сверхразрешима. Получили противоречие с выбором G .

Значит, $\Phi(G) = 1$. Тогда G имеет максимальную подгруппу M с $\text{Core}_G(M) = 1$. Для G может выполняться только одно из утверждений (1) или (2) леммы 1.4.

Случай N – π' -группа невозможен, так как G/N π -сверхразрешима.

Предположим, что N – p -группа, где $p \in \pi \cap \pi(G)$. Тогда N абелева и для G выполняется утверждение (1) леммы 1.4. Поэтому $M \cap N = 1$ и $N = C_G(N)$.

Если $|\pi \cap \pi(G)| = 1$, то из $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$ следует, что силовская p -подгруппа P из G нормальна в G и получаем противоречие $G = N_G(P)$ – π -сверхразрешимая группа.

Таким образом, $|\pi \cap \pi(G)| > 1$.

Отметим, что p является делителем $|M|$. Из леммы 1.6 и $M \cong G/C_G(N)$ следует, что $O_p(M) = 1$. Из $F(G) = N(F(G) \cap M)$ заключаем,

что $|F(G) \cap M|$ не делится на p . Поскольку $F(G)$ – p -группа, имеем, что $N = F(G)$. Более того, $N = F_p(G)$, ввиду того, что $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$.

Обозначим через r наибольшее простое число из $\pi \cap \pi(M)$ и через R силовскую r -подгруппу группы M . Так как $M \cong G/N$ π -сверхразрешима, по лемме 2.2 R нормальна в холловой π -подгруппе M_π из M . Из $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$ следует, что $M \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Поэтому M_π нормальна в M , а значит, R нормальна в M ввиду характеристичности в M_π .

Если предположить, что $r = p$, то получаем противоречие $1 \neq R \leq O_p(M) = 1$.

Следовательно, $r > p$. Так как $M \leq N_G(R)$ и $\text{Core}_G(M) = 1$, заключаем, что $M = N_G(R)$. Индекс $|G : M|$ является p -числом, поэтому R – силовская r -подгруппа группы G и нильпотентный корадикал M^π полусубнормален в G . Отметим, что $M^\pi \neq 1$. Так как в противном случае M была бы нильпотентной подгруппой и в M неединичная силовская p -подгруппа содержалась бы в $O_p(M) = 1$.

Из абелевости M/M' следует, что $M^\pi \leq M'$. Ввиду леммы 1.7 M' p -нильпотентен. Так как $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$ и $O_p(M) = 1$, имеем $p \notin \pi(M')$. Итак, $p \notin \pi(M^\pi)$. Рассмотрим возможные случаи.

1. M^π субнормален в G . Тогда существует цепь подгрупп

$$M^\pi = M_0 \triangleleft M_1 \triangleleft \dots \triangleleft M_{s-1} \triangleleft M_s = G.$$

Так как $F_p(M_{i-1})$ характеристична в M_{i-1} , заключаем, что $F_p(M_{i-1})$ нормальна в M_i и $F_p(M_{i-1}) \leq F_p(M_i)$, $i = 1, \dots, s$. Тогда

$$M^\pi \leq F_p(M_{i-1}) \leq F_p(M_s) = F_p(G) = N.$$

Получили противоречие $1 \neq M^\pi \leq M \cap N = 1$.

2. M^π полунормален в G . Тогда в G существует подгруппа B такая, что $G = M^\pi B$ и подгруппа M^π перестановочна с каждой подгруппой из B . Из $p \notin \pi(M^\pi)$ следует, что $p \in \pi(B)$ и силовская p -подгруппа P группы G содержится в B . Поэтому $N \leq B$. Пусть $z \in N$ и $|z| = p$. Тогда $M^\pi \langle z \rangle$ – подгруппа группы G и

$$M^\pi \langle z \rangle \cap N = \langle z \rangle (M^\pi \cap N) = \langle z \rangle$$

нормальна в $M^\pi \langle z \rangle$.

Предположим, что r делит $|M^\pi|$ и M_1 – силовская r -подгруппа из M^π . Заметим, что

$$M_1 = R \cap M^\pi \trianglelefteq M^\pi \trianglelefteq M.$$

Поэтому $M = N_G(M_1)$. Так как $M_1 \langle z \rangle$ –

подгруппа в $M^\pi \langle z \rangle$, M_1 максимальна в $M_1 \langle z \rangle$. Из $|M_1 \langle z \rangle : N_{M_1 \langle z \rangle}(M_1)| \equiv 1 \pmod{r}$ и $r > p$ следует, что M_1 нормальна в $M_1 \langle z \rangle$. Отсюда $z \in M_1 \langle z \rangle \leq N_G(M_1) = M$. Получили противоречие $1 \neq z \in M \cap N = 1$.

Итак, r не делит $|M^\pi|$. Откуда следует, что $|\pi \cap \pi(G)| \geq 3$.

Рассмотрим $H = PR$. Из $P = N(P \cap M)$ следует, что $H = N(P \cap M)R$ является подгруппой в G . Ввиду $N_H(R) \leq N_G(R)$ имеем, что $N_H(R)$ π -сверхразрешим и $(N_H(R))^\pi \leq N_G(R)^\pi = \{p, r\}'$ -подгруппа. Тогда $(N_H(R))^\pi = 1$ субнормальна, а значит, полусубнормальна в H .

Отметим, что $N_H(P) = P$. Действительно, если бы в $N_H(P)$ имелась силовская r -подгруппа R_1 , то тогда бы $R_1 \trianglelefteq N_H(P)$ ввиду сверхразрешимости $N_H(P)$. Поэтому R_1 централизовала бы N и получалось бы противоречие

$$R_1 \leq C_G(N) = N.$$

Тогда $(N_H(P))^\pi = 1$ субнормальна, поэтому и полусубнормальна в H . По выбору G из $|G| > |H|$ следует, что H сверхразрешима и $R \trianglelefteq H$. Поэтому $R \leq C_K(N) \leq C_G(N) = N$. Получили противоречие $1 \neq R \leq M \cap N = 1$. $\square$

3 Заключительные замечания

В работе найдены достаточные условия, при которых π -разрешимая группа G , принадлежащая $\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$, является π -сверхразрешимой, а именно: силовский нормализатор π -сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G для любой силовской p -подгруппы p из G , где p из $\pi \cap \pi(G)$. Из теоремы 2.1 получаются новые результаты.

Следствие 3.1. Пусть G – π -разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p -подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π -сверхразрешим и его нильпотентный корадикал субнормален в G , то G π -сверхразрешима.

Следствие 3.2. Пусть G – π -разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p -подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π -сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полунормален в G , то G π -сверхразрешима.

Следствие 3.3. Пусть G – π -разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p -подгруппы P из G

нормализатор $N_G(P)$ π -сверхразрешим и его коммутант субнормален в G , то G π -сверхразрешима.

Для $\pi(G) \subseteq \pi$ теорема 2.1 включает следующие результаты.

Следствие 3.4. Если в разрешимой группе G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G , то G сверхразрешима.

Следствие 3.5. Если в разрешимой группе G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал субнормален в G , то G сверхразрешима.

Следствие 3.6. Если в разрешимой группе G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полунормален в G , то G сверхразрешима.

Следствие 3.7. Если в разрешимой группе G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его коммутант субнормален в G , то G сверхразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glauberman, G. Prime-power factor groups of finite groups II / G. Glauberman // Math. Z. – 1970. – Vol. 117. – P. 46–51.
2. Bianchi, M. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers / M. Bianchi, A. Gillio Berta Mauri, P. Hauck // Arch. Math. – 1986. – Vol. 47, № 3. – P. 193–197.
3. Монахов, В.С. Нормальные подгруппы конечных групп и формации с нормализаторными условиями / В.С. Монахов, М.В. Селькин // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 867–870.
4. Баллестер-Болинше, А. О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах / А. Баллестер-Болинше, Л.А. Шеметков // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 3–5.
5. D'Aniello, A. Saturated formations closed under Sylow normalizers / A. D'Aniello, C. De Vivo, G. Giordano, M.D. Pérez-Ramos // Commun. Algebra. – 2005. – Vol. 33, № 8. – P. 2801–2808.
6. Kazarin, L. On Sylow normalizers of finite groups / L. Kazarin, A. Martínez-Pastor, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra Appl. – 2014. – Vol. 13, № 3. – P. 1350116–1–20.
7. Fedri, V. Finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / V. Fedri, L. Serena // Arch. Math. – 1988. – Vol. 50, № 1. – P. 11–18.
8. Bryce, R.A. Bounds on the Fitting length of finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / R.A. Bryce, V. Fedri, L. Serena // Bull. Austral. Math. Soc. – 1991. – Vol. 44, № 1. – P. 19–31.
9. Васильев, А.Ф. О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Математические заметки. – 2020. – Т. 108, № 5. – С. 679–691.
10. Su, X. Seminormal subgroups of finite groups / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, № 1. – P. 5–10.
11. Monakhov, V.S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23, № 5. – P. 893–911.
12. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
13. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.
14. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
15. Huppert, B. Endliche Gruppen. I. / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.

Поступила в редакцию 04.04.2022.

Информация об авторах

Васильев Александр Федорович – д.ф.-м.н., доцент

ИДЕМПОТЕНТЫ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

IDEMPOTENTS IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются идемпотенты в полиадических группоидах специального вида. Основной результат получен для l -арной группы специального вида, то есть для полиадической группы с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и n -арной операции η . В качестве следствий получены результаты для полиадических групп специального вида с $(2s+1)$ -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определена на декартовой степени A^k тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, и тернарной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арная группа, идемпотент, подстановка.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Идемпотенты в полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 63–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_63 – EDN: UJHSDS

Abstract. The article focuses on idempotents in polyadic groups of a special form. The main result was obtained for l -ary group of a special form, i. e. for polyadic group with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$, that is called polyadic operation of a special form and is defined on Cartesian power A^k of n -ary group $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$, satisfying the condition $\sigma^l = \sigma$, and n -ary operation η . As corollaries there were obtained the results for polyadic groups of a special form with $(2s+1)$ -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$, which is defined on Cartesian power A^k of ternary group $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ which satisfies the condition $\sigma^{2s+1} = \sigma$, and ternary operation η .

Keywords: polyadic operation, n -ary group, idempotent, substitution.

For citation: Gal'mak, A.M. Idempotents in polyadic groupoids of special form / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 63–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_63 (in Russian). – EDN: UJHSDS

Введение

Данная статья посвящена изучению идемпотентов в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ специального вида с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, называемой полиадической операцией специального вида. Основной результат будет доказан для l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Определение l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, можно найти в [1]. При этом на A^k вначале определяется n -арная операция $\eta_{1, \sigma, k}$, а затем с помощью неё – l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$.

Можно показать (см., например, [1]), что l -арную операцию $\eta_{s, \sigma, k}$ можно определить покомпонентно следующим образом. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид,

$$n \geq 2, s \geq 1, l = s(n-1) + 1, k \geq 2, \sigma \in S_k.$$

$$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}) \\ &\eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}) \eta(\dots \\ &\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots \\ &\dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots) \dots). \end{aligned}$$

Если n -арная операция η ассоциативна, то

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \\ &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}), j = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

откуда для подстановки σ из S_k , удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, следует

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{lj}).$$

Для бинарной операции η l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s+1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$, обозначаемой также символом

$[]_{l, \sigma, k}$. Изучению этой операции посвящена книга [2]. Частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, соответствующими циклу $\sigma = (12 \dots k)$, являются две полиадические операции Э. Поста [3]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

1 Используемые результаты

Согласно следующей теореме, тождественность подстановки σ^{l-1} влечёт за собой перенос ассоциативности с n -арной операции η на l -арную операцию $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 1.2 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Тождественность подстановки σ^{l-1} переносит с n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не только ассоциативность, но и свойство быть «полиадической группой».

Теорема 1.3 [1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Согласно Э. Посту [3], последовательность $e_1 \dots e_{k(n-1)}$, где $k \geq 1$, элементов n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называют её *нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \dots e_{k(n-1)}x) = x, \quad \eta(xe_1 \dots e_{k(n-1)}) = x$$

для любого $x \in A$.

Критерии нейтральности последовательности элементов n -арной группы содержатся в следующем предложении.

Предложение 1.1 [3]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $k \geq 1$, $e_1, \dots, e_{k(n-1)} \in A$, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) последовательность $e_1 \dots e_{k(n-1)}$ – нейтральная;
- 2) существует элемент $a \in A$ такой, что $\eta(e_1 \dots e_{k(n-1)}a) = a$;
- 3) существует элемент $a \in A$ такой, что $\eta(ae_1 \dots e_{k(n-1)}) = a$.

Множество всех идемпотентов полиадического группоид $\langle A, \eta \rangle$ будем обозначать символом $I(A, \eta)$.

Определения и основные свойства n -арной группы, а также более подробную информацию о нейтральных и обратных последовательностях можно найти в книгах [4], [5].

2 Общий случай

Легко проверяется, что для любого идемпотента ε n -арного группоид $\langle A, \eta \rangle$ элемент $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Это следует и из следующего предложения.

Предложение 2.1. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, то элемент $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ выполняется условие

$$\eta(\varepsilon_j \varepsilon_{\sigma(j)} \dots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(\varepsilon_{\sigma^{n-1}(j)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \eta(\varepsilon_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots \varepsilon_{\sigma^{s(n-1)}(j)})) \dots)) = \varepsilon_j. \quad (2.1)$$

Доказательство. Если ε – идемпотент в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_l) = \varepsilon,$$

то есть

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \dots (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)}_l) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).$$

Применив к последнему равенству приведённое во введении определение l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, получим равенство (2.1).

Если теперь компоненты $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ определяются равенством (2.1), то верно последнее равенство, то есть ε – идемпотент в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Предложение доказано.

Следствие 2.1. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, то элемент $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда компоненты $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \eta(\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-1}(1)} \varepsilon_1) &= \varepsilon_1, \\ &\dots \\ \eta(\varepsilon_k \varepsilon_{\sigma(k)} \varepsilon_{\sigma^2(k)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-1}(k)} \varepsilon_k) &= \varepsilon_k. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если в следствии 2.1 положить $n = 2$, то получим предложение 3.8.1 из [2].

Для подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, элементы $\varepsilon_{\sigma^{j-1}(j)}$ в (2.2) заменяются элементами ε_j . При этом l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, согласно теореме 1.2, становится l -арной полугруппой.

Следствие 2.2. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в l -арной полугруппе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда компоненты $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \eta(\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)} \varepsilon_1) &= \varepsilon_1, \\ &\dots \\ \eta(\varepsilon_k \varepsilon_{\sigma(k)} \varepsilon_{\sigma^2(k)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(k)} \varepsilon_k) &= \varepsilon_k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если в следствии 2.2 положить $n = 2$, то получим следствие 3.8.2 из [2].

Применяя к следствию 2.2 теорему 1.3, получим

Следствие 2.3. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является

идемпотентом в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда компоненты $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ удовлетворяют условиям (2.3).

Ввиду предложения 1.1, следующие два следствия равносильны следствию 2.3.

Следствие 2.4. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда последовательности

$$\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)}, \dots, \varepsilon_k \varepsilon_{\sigma(k)} \varepsilon_{\sigma^2(k)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(k)}$$

являются нейтральными в $\langle A, \eta \rangle$.

Следствие 2.5. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда последовательности

$$\varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\sigma(k)} \varepsilon_{\sigma^2(k)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(k)} \varepsilon_k$$

являются нейтральными в $\langle A, \eta \rangle$.

Если в следствиях 2.4 и 2.5 положить $n = 2$, то получим следствие 3.8.3 из [2].

В качестве подстановки σ в следствиях 2.2 – 2.5 можно взять любую подстановку σ из S_k , удовлетворяющую условию $\sigma^n = \sigma$, так как она будет удовлетворять и условию $\sigma^l = \sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$.

В частности, можно взять любой цикл σ длины $n - 1$ из S_k , если $n \leq k + 1$. Например, цикл $\sigma = (12 \dots n - 1)$.

3 Основной результат

В достаточном утверждении следствия 2.3 число равенств в (2.3) можно уменьшить. Для этого нам понадобится

Лемма 3.1. Пусть $l \geq 2$, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k , $\sigma^l = \sigma$, $\sigma(j) = t$ для некоторых $j, t \in \{1, \dots, k\}$, $a_1, \dots, a_k$ – элементы n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Если

$$\eta(a_j a_{\sigma(j)} a_{\sigma^2(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j) = a_j, \quad (3.1)$$

то

$$\eta(a_m a_{\sigma(m)} a_{\sigma^2(m)} \dots a_{\sigma^{l-2}(m)} a_m) = a_m. \quad (3.2)$$

Доказательство. Так как $\sigma(j) = t$, то

$$a_{\sigma(j)} = a_m, \quad a_{\sigma^s(j)} = a_{\sigma^{s-1}(\sigma(j))} = a_{\sigma^{s-1}(m)}$$

для любого $s \geq 2$, в частности,

$$a_j = a_{\sigma^{l-1}(j)} = a_{\sigma^{l-2}(m)}.$$

Поэтому из (3.1) следует

$$\eta(a_j a_m a_{\sigma(m)} \dots a_{\sigma^{l-3}(m)} a_{\sigma^{l-2}(m)}) = a_j,$$

откуда

$$\eta(\beta \eta(a_j a_m a_{\sigma(m)} \dots a_{\sigma^{l-3}(m)} a_{\sigma^{l-2}(m)}) a_m) = \eta(\beta a_j a_m),$$

где β – любая обратная последовательность в $\langle A, \eta \rangle$ для элемента a_j . Из полученного равенства ввиду нейтральности последовательности βa_j следует (3.2). $\square$

Замечание 3.1. В качестве обратной последовательности β из леммы 3.1 можно взять последовательность $\overline{a_j} \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}$ при $n \geq 3$ или

обратный элемент a_j^{-1} для элемента a_j при $n = 2$.

Следствие 3.1. Пусть $l \geq 2$, $k \geq 2$, σ – цикл из S_k длины k , $\sigma^l = \sigma$, $a_1, \dots, a_k$ – элементы n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Если равенство (3.1) верно для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$, то оно верно для любого $j \in \{1, \dots, k\}$.

Теорема 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k$,

$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p$ – разложение в произведение независимых циклов, исключая циклы единичной длины, подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) если элемент $\mathbf{e}$ является идемпотентом в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то для каждой компоненты ε_m , индекс которой подстановка σ оставляет неподвижным, верно равенство

$$\eta(\underbrace{\varepsilon_m \dots \varepsilon_m}_l) = \varepsilon_m, \quad (3.3)$$

а для каждого цикла σ_r ($r = 1, \dots, p$) верно равенство

$$\eta(\varepsilon_{i_r} \varepsilon_{\sigma(i_r)} \varepsilon_{\sigma^2(i_r)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_r)} \varepsilon_{i_r}) = \varepsilon_{i_r}, \quad (3.4)$$

где i_r – любой символ, входящий в запись цикла σ_r ;

2) если для каждой компоненты ε_m , индекс которой подстановка σ оставляет неподвижным, верно равенство (3.3), а для каждого цикла σ_r ($r = 1, \dots, p$) верно равенство (3.4), где i_r – некоторый символ, входящий в запись цикла σ_r , то элемент $\mathbf{e}$ является идемпотентом в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Доказательство. Дополним разложение из формулировки теоремы циклами длины 1:

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p \sigma_{p+1} \dots \sigma_t,$$

где $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_t$ – все циклы длины 1. Пусть

$$X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_t$$

– σ -орбиты, соответствующие циклам $\sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_t$, то есть

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_p \cup X_{p+1} \cup \dots \cup X_t,$$

$$X_r \cap X_s = \emptyset, \quad r \neq s,$$

где $X = \{1, 2, \dots, k\}$. Через l_r обозначим длину цикла σ_r ($r = 1, \dots, t$) или, что то же самое, мощность орбиты X_r . Ясно, что

$$l_{p+1} = \dots = l_t = 1.$$

Кроме того, положим

$$X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_t = \{i_t\},$$

то есть $i_{p+1}, \dots, i_t$ – все символы, которые подстановка σ оставляет неподвижными.

1) Согласно следствию 2.3, компоненты $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ идемпотента $\mathbf{e}$ удовлетворяют равенствам (2.3). В этих равенствах каждому из неподвижных символов $i_{p+1}, \dots, i_t$ соответствует равенство (3.4) для $r = p + 1, \dots, t$, которое совпадает с равенством

$$\eta(\underbrace{\varepsilon_{i_r} \dots \varepsilon_{i_r}}_t) = \varepsilon_{i_r},$$

то есть верны равенства (3.3), если $m \in \{i_{p+1}, \dots, i_t\}$.

Для переставляемых символов равенства (3.4) содержатся среди равенств (2.3).

2) Если подстановка σ оставляет неподвижным индекс m компоненты ε_m , то равенство (3.3) совпадает с равенством

$$\eta(\varepsilon_m \varepsilon_{\sigma(m)} \varepsilon_{\sigma^2(m)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(m)} \varepsilon_m) = \varepsilon_m.$$

Пусть теперь $\sigma(m) \neq m$, и пусть для определённости символ m принадлежит σ -орбите X_r для некоторого $r \in \{1, \dots, p\}$. Если i_r – некоторый элемент σ -орбиты X_r , то

$$\sigma_r = (i_r \ \sigma(i_r) \ \sigma^2(i_r) \dots \sigma^{l-1}(i_r)).$$

Для сокращения записей положим

$$m_1 = i_r,$$

$$m_2 = \sigma(i_r) = \sigma(m_1),$$

$$m_3 = \sigma^2(i_r) = \sigma(m_2),$$

...

$$m_{l_r} = \sigma^{l-1}(i_r) = \sigma(m_{l-1}).$$

По лемме 3.1 из равенства (3.4), справедливого для некоторого символа $m_1 = i_r$, входящего в запись цикла σ_r , следуют $l_r - 1$ равенств для остальных символов этого цикла:

$$\eta(\varepsilon_{m_2} \varepsilon_{\sigma(m_2)} \varepsilon_{\sigma^2(m_2)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(m_2)} \varepsilon_{m_2}) = \varepsilon_{m_2},$$

...

$$\eta(\varepsilon_{m_{l_r}} \varepsilon_{\sigma(m_{l_r})} \varepsilon_{\sigma^2(m_{l_r})} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(m_{l_r})} \varepsilon_{m_{l_r}}) = \varepsilon_{m_{l_r}},$$

то есть равенство (3.4) верно для любого символа i_r , входящего в запись цикла σ_r .

Таким образом, все компоненты $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ удовлетворяют условиям (2.3) независимо от того, оставляет подстановка σ их индексы неподвижными или переставляет. По следствию 2.3 элемент ε является идемпотентом в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. □

Замечание 3.2. Ясно, что каждому циклу σ_r ($r = 1, \dots, p$) длины $l_r \geq 2$ в (2.3) соответствует l_r равенств. Из теоремы 3.1 следует, что в достаточном утверждении следствия 2.3 эти l_r равенств можно заменить одним равенством. Следовательно, число равенств в (2.3) можно уменьшить на $l_1 + \dots + l_p - p$. Таким образом, в достаточном утверждении следствия 2.3 k равенств в (2.3) можно заменить следующими t равенствами

$$\eta(\varepsilon_{i_1} \varepsilon_{\sigma(i_1)} \varepsilon_{\sigma^2(i_1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_1)} \varepsilon_{i_1}) = \varepsilon_{i_1},$$

...

$$\eta(\varepsilon_{i_p} \varepsilon_{\sigma(i_p)} \varepsilon_{\sigma^2(i_p)} \dots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_p)} \varepsilon_{i_p}) = \varepsilon_{i_p},$$

$$\eta(\underbrace{\varepsilon_{i_{p+1}} \dots \varepsilon_{i_{p+1}}}_t) = \varepsilon_{i_{p+1}}, \dots, \eta(\underbrace{\varepsilon_{i_t} \dots \varepsilon_{i_t}}_t) = \varepsilon_{i_t}.$$

Так как цикл σ из S_k длины k имеет порядок k , то условие $\sigma^l = \sigma$ равносильно равенству

$l - 1 = tk$ для некоторого $t \geq 1$. Поэтому теорема 3.1 позволяет сформулировать

Следствие 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k$, σ – цикл длины k из S_k , $l - 1 = tk$ для некоторого $t \geq 1$. Тогда:

1) если элемент ε является идемпотентом в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\eta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_t \varepsilon_j) = \varepsilon_j \quad (4.3)$$

для любого $j \in \{1, \dots, k\}$, где

$$\alpha = \varepsilon_j \varepsilon_{\sigma(j)} \varepsilon_{\sigma^2(j)} \dots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)};$$

2) если для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$ верно (4.3), то элемент ε является идемпотентом в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Следствие 3.2 можно сформулировать иначе, явно указав множество $I(A^k, \eta_{s, \sigma, k})$ всех идемпотентов l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Следствие 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, σ – цикл длины k из S_k , $l - 1 = tk$ для некоторого $t \geq 1$. Тогда

$$I(A^k, \eta_{s, \sigma, k}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k \mid \eta(\underbrace{\varepsilon_j \varepsilon_{\sigma(j)} \dots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)}}_t \dots \varepsilon_j \varepsilon_{\sigma(j)} \dots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)} \varepsilon_j) = \varepsilon_j\}$$

для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. В частности,

$$I(A^k, \eta_{s, \sigma, k}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k \mid \eta(\underbrace{\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)}}_t \dots \varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)} \varepsilon_1) = \varepsilon_1\}.$$

Полагая в следствии 3.3 $\sigma = (1 \ 2 \dots k)$, $j = 1$, получим

Следствие 3.4. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, k делит $l - 1$, то

$$I(A^k, \eta_{s, (1 \ 2 \dots k), k}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k \mid \eta(\underbrace{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k \varepsilon_1}_t) = \varepsilon_1\}.$$

Считая в теореме 3.1 и следствии 3.4 $\langle A, \eta \rangle$ – группой ($n = 2$), получим в качестве следствий соответственно теорему 3.8.5 и следствие 3.8.9 из [2].

Полагая в следствиях 3.3 и 3.4 $k = n - 1$, получим ещё два следствия.

Следствие 3.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, σ – цикл длины $n - 1$ из S_{n-1} . Тогда

$$I(A^{n-1}, \eta_{s, \sigma, n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} \mid \eta(\underbrace{\varepsilon_j \varepsilon_{\sigma(j)} \dots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)}}_s \dots \varepsilon_j \varepsilon_{\sigma(j)} \dots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)} \varepsilon_j) = \varepsilon_j\}$$

для любого $j \in \{1, \dots, n - 1\}$. В частности,

$$I(A^{n-1}, \eta_{s, \sigma, n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} \mid \eta(\underbrace{\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(1)}}_s \dots \varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(1)} \varepsilon_1) = \varepsilon_1\}.$$

Следствие 3.6. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, то

$$I(A^{n-1}, \eta_{s, (1 \ 2 \dots n-1), n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} \mid \eta(\underbrace{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_1}_s) = \varepsilon_1\}.$$

Замечание 3.3. Теорема 3.1 и следствия из неё могут быть переформулированы на языке нейтральных последовательностей.

4 Тернарный случай ($n = 3$)

Сформулируем следствия из результатов, полученных в разделах 2 и 3, считая $\langle A, \eta \rangle$ тернарным группоидом.

Предложению 2.1 и следствиям 2.1–2.5 соответствуют следующие следствия.

Следствие 4.1. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарный группоид, то элемент $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в $(2s+1)$ -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ выполняется условие

$$\eta(\varepsilon_j \varepsilon_{\sigma(j)} \eta(\varepsilon_{\sigma^2(j)} \varepsilon_{\sigma^3(j)} \eta(\dots \eta(\varepsilon_{\sigma^{2s-1}(j)} \varepsilon_{\sigma^{2s}(j)} \varepsilon_{\sigma^{2s+1}(j)} \dots))) = \varepsilon_j.$$

Следствие 4.2. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная полугруппа, то элемент $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в $(2s+1)$ -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда компоненты $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ удовлетворяют условиям

$$\eta(\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2s}(1)}) = \varepsilon_1,$$

...

$$\eta(\varepsilon_k \varepsilon_{\sigma(k)} \varepsilon_{\sigma^2(k)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2s}(k)}) = \varepsilon_k.$$

Следствие 4.3. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная полугруппа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, то элемент $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в $(2s+1)$ -арной полугруппе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда компоненты $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ удовлетворяют условиям

$$\eta(\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2s-1}(1)} \varepsilon_1) = \varepsilon_1,$$

...

$$\eta(\varepsilon_k \varepsilon_{\sigma(k)} \varepsilon_{\sigma^2(k)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2s-1}(k)} \varepsilon_k) = \varepsilon_k.$$

Следствие 4.4. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, то элемент $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда компоненты $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ удовлетворяют равенствам из следствия 4.3.

Следствие 4.5. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, то элемент $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда последовательности

$$\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2s-1}(1)}, \dots, \varepsilon_k \varepsilon_{\sigma(k)} \varepsilon_{\sigma^2(k)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2s-1}(k)}$$

являются нейтральными в $\langle A, \eta \rangle$.

Следствие 4.6. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, то элемент $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда последовательности

$$\varepsilon_{\sigma(1)} \varepsilon_{\sigma^2(1)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2s-1}(1)} \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\sigma(k)} \varepsilon_{\sigma^2(k)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2s-1}(k)} \varepsilon_k$$

являются нейтральными в $\langle A, \eta \rangle$.

Теореме 3.1 соответствует следующее

Следствие 4.7. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in A^k$, $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p$ – разложение в произведение независимых циклов, исключая циклы единичной длины, подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$. Тогда:

1) если элемент $\mathbf{e}$ является идемпотентом в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то для каждой компоненты ε_m , индекс которой подстановкой σ оставляет неподвижным, верно равенство

$$\eta(\underbrace{\varepsilon_m \dots \varepsilon_m}_{2s+1}) = \varepsilon_m, \quad (4.1)$$

а для каждого цикла σ_r ($r = 1, \dots, p$) верно равенство

$$\eta(\varepsilon_{i_r} \varepsilon_{\sigma(i_r)} \varepsilon_{\sigma^2(i_r)} \dots \varepsilon_{\sigma^{2s-1}(i_r)} \varepsilon_{i_r}) = \varepsilon_{i_r}, \quad (4.2)$$

где i_r – любой символ, входящий в запись цикла σ_r ;

2) если для каждой компоненты ε_m , индекс которой подстановкой σ оставляет неподвижным, верно равенство (4.1), а для каждого цикла σ_r ($r = 1, \dots, p$) верно равенство (4.2), где i_r – некоторый символ, входящий в запись цикла σ_r , то элемент $\mathbf{e}$ является идемпотентом в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Следствию 3.6 соответствует следующее

Следствие 4.8. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{I}(A^2, \eta_{s, (12), 2}) = \\ & = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in A^2 \mid \eta(\underbrace{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_1 \varepsilon_2}_s \varepsilon_1) = \{\varepsilon_1\}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.
2. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Издательский центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

Поступила в редакцию 14.04.2022.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ИЕРАРХИИ РИККАТИ

Е.В. Кузьмина

Брестский государственный технический университет
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

GENERALIZED SOLUTIONS OF THE SECOND EQUATION
OF THE RICKATI HIERARCHY

E.V. Kuzmina

Brest State Technical University
Brest State A.S. Pushkin University

Аннотация. В данной работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка иерархии Риккати. Понятие обобщенного решения для такого уравнения не может быть введено в рамках классической теории обобщенных функций ввиду того, что не определено произведение обобщенных функций. Для введения понятия обобщенного решения рассмотрен подход, при котором построение обобщенного решения второго уравнения иерархии Риккати осуществляется с помощью аппроксимации решениями задачи Коши с комплексными начальными условиями. Общее количество обобщенных решений зависит от начальных условий задачи Коши, а их вид зависит от расположения полюсов аппроксимирующих решений.

Ключевые слова: обобщенная функция, обобщенное решение нелинейного дифференциального уравнения, свойство Пенлеве.

Для цитирования: Кузьмина, Е.В. Обобщенные решения второго уравнения иерархии Риккати / Е.В. Кузьмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 68–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_68 – EDN: UQMBEZ

Abstract. A nonlinear differential equation of the second order of the Riccati hierarchy is considered. The concept of a generalized solution for such an equation cannot be introduced in the classical theory of generalized functions because the product of generalized functions is not defined. To introduce the concept of a generalized solution, an approach is considered in which the construction of a generalized solution of the second equation of the Riccati hierarchy is carried out using approximation by solutions of the Cauchy problem with complex initial conditions. The total number of generalized solutions depends on the initial conditions of the Cauchy problem, and their form depends on the location of the poles of the approximating solutions.

Keywords: generalized function, generalized solution of a nonlinear differential equation, Painleve property.

For citation: Kuzmina, E.V. Generalized solutions of the second equation of the Rickati hierarchy / E.V. Kuzmina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 68–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_68 (in Russian). – EDN: UQMBEZ

Введение

Дифференциальное уравнение вида

$$w^{(n)}(z) = R(z, w, w', \dots, w^{(n-1)}) \quad (0.1)$$

можно рассматривать на комплексной плоскости и на вещественной прямой. Пусть решение $w(z)$ задачи Коши на комплексной плоскости с начальными данными в точке вещественной прямой является однозначной аналитической функцией, имеющей особенности на вещественной прямой. Если рассмотреть это же уравнение на вещественной прямой, то решение задачи Коши определено только на части прямой, так как не продолжается через особенность. Но функция $w(z)$ однозначно определена и на других частях прямой и тем самым на прямой определена функция, которую будем называть *формальным решением задачи Коши*.

Как известно, если функция имеет особенность, то ей соответствует семейство обобщенных функций (распределений) [1], которые более детально описывают состояние соответствующей физической системы. Поэтому возникает вопрос: какие из распределений, соответствующих формальному решению, можно считать обобщенными решениями уравнения? Непосредственно подставить обобщенные функции в уравнение нельзя, так как при подстановке возникают произведения обобщенных функций, которые не определены в классической теории, и рассматриваемый вопрос связан с проблемой умножения обобщенных функций [2]–[6].

Получение ответа на этот вопрос требует детального анализа, использующего явное описание обобщенных функций, соответствующих решению. Поэтому ниже рассмотрены конкретные

уравнения, для которых формальные решения описываются в явном виде.

Одним из наиболее изученных классов дифференциальных уравнений является класс уравнений со свойством Пенлеве. Особая точка решения дифференциального уравнения (0.1) называется *подвижной*, если её положение на комплексной плоскости зависит от начальных условий. Говорят, что уравнение (0.1) обладает *свойством Пенлеве*, если все подвижные особые точки решений являются полюсами [7]. Одним из способов построения дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве является воздействие специальными операторами на известные уравнения, уже обладающие свойством Пенлеве.

Наиболее простыми для дальнейшего исследования являются рациональные решения. Выделение таких решений фигурирует во многих работах, например в [8], [9]. В частности, такие решения могут быть построены для уравнений из иерархии Риккати.

1 Второе уравнение иерархии Риккати. Формальные решения

Известно, что уравнение первого порядка имеет свойство Пенлеве, если и только если оно является уравнением Риккати, т. е. имеет вид

$$w'(z) = a(z)w^2 + b(z)w + c(z).$$

В работе [10] была построена иерархия уравнений со свойством Пенлеве, порожденная уравнением Риккати

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0.$$

Это уравнения вида

$$D_R^n w = 0, n = 1, 2, 3, \dots,$$

где D_R есть преобразование дифференциальных выражений, действующие по формуле

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, z \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

При $n = 1$ получаем уравнение

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0.$$

Применяя преобразование D_R , получаем второе уравнение из иерархии Риккати

$$w''(z) + \gamma^2 w^3(z) + 3\gamma w(z)w'(z) = 0, \quad (1.1)$$

которое и будет предметом исследования в данной работе.

Лемма 1.1. *Решение задачи Коши для уравнения (1.1) с условиями $w(z_0) = C_1$, $w'(z_0) = C_2$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, причем C_1 и C_2 одновременно не равны нулю, является рациональной функцией и имеет следующий вид:*

$$1) \text{ если } C_2 \neq -\frac{1}{2}\gamma C_1^2, C_2 \neq -\gamma C_1^2, \text{ то}$$

$$w(z) = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} \right], \quad (1.2)$$

где

$$a = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},$$

$$b = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},$$

а знаком $\sqrt{}$ обозначена одна из ветвей двузначной функции;

2) если $C_2 = -\gamma C_1^2$, то

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}, \text{ где } a = z_0 - \frac{1}{\gamma C_1}; \quad (1.3)$$

3) если $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, то

$$w(z) = \frac{2}{\gamma(z-a)}, \text{ где } a = z_0 - \frac{2}{\gamma C_1}. \quad (1.4)$$

Доказательство. Как показано в [10], уравнению (1.1) удовлетворяет формальный ряд вида

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)} + h_0 - \gamma h_0^2(z-a) + \gamma^2 h_0^3(z-a)^2 - \gamma^3 h_0^4(z-a)^3 + \dots, \quad (1.5)$$

где h_0 – произвольная постоянная. Ряд в (1.5)

сходится в области $|z-a| < \rho$, $\rho = \frac{1}{|\gamma h_0|}$, и его

сумма может быть найдена в явном виде. Поэтому (1.5) задает функцию

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)} + \frac{h_0}{1 + \gamma h_0(z-a)}, \quad (1.6)$$

которая ввиду аналитичности является решением на всей плоскости, кроме точек a и $a - \frac{1}{\gamma h_0}$, яв-

ляющихся полюсами. Семейство решений (1.6) зависит от двух параметров и эти решения являются рациональными функциями. Если $z_0 \neq a$ и

$z_0 \neq a - \frac{1}{\gamma h_0}$, то решение однозначно определяется по условиям Коши. Связь между полюсами и начальными условиями $w(z_0) = C_1$, $w'(z_0) = C_2$

описывается следующим образом.

1. Пусть $C_2 \neq -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, $C_2 \neq -\gamma C_1^2$. Используя формулу (1.6), получим

$$h_0 = \pm \frac{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}{2\gamma \sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}},$$

$$a = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}.$$

Поэтому решение имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} \right],$$

$$\text{где } b = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}.$$

2. Пусть $C_2 = -\gamma C_1^2$. В этом случае $h_0 = 0, b = \infty$ и решение имеет следующий вид

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}, \text{ где } a = z_0 - \frac{1}{\gamma C_1}.$$

3. Пусть $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$. Тогда решение не представляется в виде (1.5), но может быть задано формулой (1.2) при $a = b$

$$w(z) = \frac{2}{\gamma(z-z_0) + \frac{2}{C_1}} = \frac{2}{\gamma(z-a)}, \text{ где } a = z_0 - \frac{2}{\gamma C_1}.$$

Это решение соответствует $h_0 = \infty$.

Таким образом, решение задачи Коши представляется в одном из трех видов: (1.2), (1.3) или (1.4), и оно однозначно задается своими полюсами, при этом особый вид решение имеет, если $b = \infty$ или если $a = b$. $\square$

Далее будем рассматривать задачу Коши для уравнения (1.1) с начальными условиями в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ и вещественными C_1, C_2 . Из леммы 1.1 следует, что формальные решения могут быть разных видов, в зависимости от вида точек a и b . Если точки a и b не лежат на вещественной оси, то формальное решение является гладким на прямой, такое решение будем называть *регулярным*, а в противном случае – *сингулярным*. Будем говорить, что это *сингулярное решение общего положения*, когда оно имеет на прямой два различных полюса. Возможны два вырожденных случая. Таким образом, имеем следующий вид формальных решений.

Регулярный случай имеем, если $C_1^2 > -\frac{2}{\gamma}C_2$.

Тогда полюса a и b не лежат на вещественной оси. Решение задачи Коши является гладкой функцией и имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right],$$

где

$$a = x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + i \frac{\sqrt{2\gamma C_2 + \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},$$

$$b = x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - i \frac{\sqrt{2\gamma C_2 + \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}$$

есть комплексно-сопряженные числа. Функцию $w(x)$ можно переписать в виде

$$w(x) = \frac{1}{\gamma} \frac{2(x-p)}{(x-p)^2 + q^2}, \quad (1.7)$$

где $p = x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2}$, $q^2 = \frac{2C_2 + \gamma C_1^2}{\gamma(\gamma C_1^2 + C_2)^2} > 0$.

Решение (1.7) является вещественно-значной гладкой функцией и совпадает с обобщенным решением.

Сингулярный случай общего положения

имеем, если $C_1^2 < -\frac{2}{\gamma}C_2$ и $C_2 \neq -\gamma C_1^2$. Точки a и

b вещественные и различные, делят прямую на три части. Тогда на вещественной оси решение задачи Коши однозначно определено только на одной из этих трех частей, содержащей точку x_0 . Но аналитическая функция $w(z)$ задает на всей прямой однозначно определенное по условию Коши формальное решение

$$w(x) = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right], \quad (1.8)$$

где

$$a = x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},$$

$$b = x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}. \quad (1.9)$$

Сингулярный случай бесконечно удаленного полюса имеем, если $C_2 = -\gamma C_1^2$. В этом случае одна из величин a или b обращается в бесконечность, далее считаем, что $b = \infty$, а $a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}$.

На всей вещественной оси однозначно определено вещественно-значное формальное решение задачи Коши

$$w(x) = \frac{1}{\gamma(x-a)}, \text{ где } a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}, \quad (1.10)$$

имеющее особенность в точке a .

Сингулярный случай совпадения полюсов

имеем, если $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$. Точки a и b совпадают на вещественной прямой. Формальное решение имеет следующий вид

$$w(x) = \frac{2}{\gamma(x-a)}, \text{ где } a = x_0 - \frac{2}{\gamma C_1}. \quad (1.11)$$

2 Обобщенные решения

Если функция на прямой имеет полюса, то ей соответствует не одна, а некоторое семейство обобщенных функций [1].

В частности, сингулярное решение общего положения (1.8) имеет два полюса и ему соответствует двухпараметрическое семейство распределений

$$U_{M_1, M_2} = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-b}\right) + \frac{1}{\gamma} M_1 \delta_a + \frac{1}{\gamma} M_2 \delta_b, \quad (2.1)$$

зависящее от двух произвольных постоянных M_1, M_2 . Здесь $\langle \delta_\tau, \varphi \rangle = \varphi(\tau)$ – дельта-функция

Дирака, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ – обобщенная функция, заданная

с помощью интеграла в смысле главного значения по Коши

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \text{v.p.} \int \frac{1}{x} \varphi(x) dx.$$

Распределения (2.1) являются кандидатами на обобщенное решение.

Решение (1.10) имеет один полюс и ему соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций вида

$$U_M = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma} M \delta_a, \quad (2.2)$$

где M – произвольная постоянная.

Формальное решение (1.11) имеет один полюс и ему соответствуют распределения

$$\frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{2}{\gamma} M \delta_a. \quad (2.3)$$

Как уже отмечалось, распределения (2.1)–(2.3) нельзя подставить в уравнение, хотя бы потому, что куб таких распределений не определен в классической теории обобщенных функций. Поэтому требуется выяснить, какие из распределений (2.1)–(2.3) и в каком смысле можно считать решениями уравнения (1.1) на прямой.

Вопросу определения понятия обобщенного решения посвящена обширная литература, например [11], [12]. Общая идея введения обобщенных решений основана на построении вспомогательных семейств функций, причем способ построения таков, что если существует предел такого семейства, то его естественно считать обобщенным решением. Часто используется подход, при котором обобщенные коэффициенты заменяются на их аппроксимации семействами гладких функций, зависящими от малого параметра ε . Тогда семейство аппроксимирующих уравнений имеет решения, которые являются гладкими функциями, а обобщенным решением исходного уравнения называется предел решений аппроксимирующих уравнений в смысле сходимости в $D'(\mathbb{R})$. Такой подход использовался, например, в работах [13]–[15]. Было обнаружено, что обобщенные решения не всегда существуют даже для простейших линейных уравнений первого порядка с обобщенными коэффициентами.

Уравнение на прямой

$$u''(x) + \gamma^2 u^3(x) + 3\gamma u(x)u'(x) = 0, \quad (2.4)$$

соответствующее уравнению (1.1), не содержит обобщенных коэффициентов. Поэтому для уравнения (2.4) нужны другие способы построения аппроксимаций. Наиболее естественный из них связан с выходом в комплексную плоскость. Он основан на том, что формальные решения задачи Коши с не вещественными начальными условиями являются гладкими функциями и ими можно аппроксимировать формальное решение уравнения (2.4), имеющие особенности на прямой.

Пусть $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, $C_1(\varepsilon) \rightarrow C_1, C_2(\varepsilon) \rightarrow C_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (1.1) с условиями

$$w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon), w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$$

не имеет особенностей на вещественной оси.

Определение 2.1. Распределение W будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (2.4) с условиями $u(x_0) = C_1, u'(x_0) = C_2$ при заданном способе аппроксимации начальных условий, если $w_\varepsilon(x)$ сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к W в смысле сходимости в пространстве $D'(\mathbb{R})$.

Исследуем сходимость семейства $w_\varepsilon(x)$ в зависимости от способа приближения $C_1(\varepsilon)$ к $C_1, C_2(\varepsilon)$ к C_2 . Для разных видов формальных решений получаем разные результаты.

Сингулярные решения общего положения. Пусть $w(x)$ – сингулярное решение общего положения, имеющее имеет вид (1.8), где точки a и b вещественные и имеют вид (1.9).

Теорема 2.1. Если $C_1^2 < -\frac{2}{\gamma} C_2, C_2 \neq -\gamma C_1^2$,

то решения задачи Коши для уравнения (1.1), удовлетворяющие не вещественным начальным условиям $w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon), w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$, где $C_1(\varepsilon) \rightarrow C_1, C_2(\varepsilon) \rightarrow C_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, при достаточно малых ε задаются формулой

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{x-a_\varepsilon} + \frac{1}{x-b_\varepsilon} \right], \quad (2.5)$$

в которой

$$\begin{aligned} a_\varepsilon &= x_0 - \frac{C_1(\varepsilon)}{\gamma C_1^2(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)} + q_\varepsilon, \\ b_\varepsilon &= x_0 - \frac{C_1(\varepsilon)}{\gamma C_1^2(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)} - q_\varepsilon, \\ q_\varepsilon^2 &= -\frac{2C_2(\varepsilon) + \gamma C_1^2(\varepsilon)}{\gamma(\gamma C_1^2(\varepsilon) + C_2(\varepsilon))^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Полюса $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ не лежат на вещественной прямой и $a_\varepsilon \rightarrow a, b_\varepsilon \rightarrow b$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а семейство $w_\varepsilon(x)$ почти всюду сходится к формальному решению (1.8).

В пространстве $D'(\mathbb{R})$ семейство $w_\varepsilon(x)$ сходится тогда и только тогда, когда знаки $\text{Im } a(\varepsilon)$ и $\text{Im } b(\varepsilon)$ постоянны при достаточно малых ε и, в зависимости от этих знаков, предельно является одно из четырех распределений

$$\begin{aligned} W^{\pm, \pm} &= \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-b}\right) \pm \\ &\pm i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a \pm i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_b. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Доказательство. Согласно лемме 1.1, решения задачи Коши для уравнения (1.1) имеют

вид (2.5). То, что $a_\varepsilon \rightarrow a, b_\varepsilon \rightarrow b$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем непосредственно из (2.6), откуда следует и сходимости почти всюду.

Поскольку функция $w_\varepsilon(x)$ представляется в виде суммы двух функций, достаточно проверить сходимость в пространстве распределений каждого слагаемого. Первое слагаемое есть $v_{a_\varepsilon}(x) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{x - a_\varepsilon}$. Наиболее простой случай имеет, если $a_\varepsilon = a + i\varepsilon$, т. е. a_ε приближается к a сверху по вертикали. Тогда получаем семейство

$$\begin{aligned} v_{a_\varepsilon}^+(x) &= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{x - a - i\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{x - a}{(x - a)^2 + \varepsilon^2} + i \frac{1}{\gamma} \frac{\varepsilon}{(x - a)^2 + \varepsilon^2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

сходимость которого хорошо известна. А именно, семейство гладких функций

$$\frac{x - a}{(x - a)^2 + \varepsilon^2}$$

сходится в пространстве распределений к $P\left(\frac{1}{x - a}\right)$, а семейство

$$\frac{\varepsilon}{(x - a)^2 + \varepsilon^2}$$

сходится к δ_a . Поэтому семейство (2.8) сходится к распределению

$$V^+ = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) + i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a.$$

При $a_\varepsilon = a - i\varepsilon$ получаем другое семейство функций

$$v_{a_\varepsilon}^-(x) = \frac{1}{\gamma} \frac{x - a}{(x - a)^2 + \varepsilon^2} - i \frac{1}{\gamma} \frac{\varepsilon}{(x - a)^2 + \varepsilon^2},$$

которое почти всюду сходится к той же функции $\frac{1}{\gamma} \frac{1}{x - a}$, а в пространстве $D'(\mathbb{R})$ сходится к другому распределению, а именно к

$$V^- = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) - i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a.$$

Но возможны и другие способы приближения a_ε к a , для которых также следует исследовать сходимость. Любое приближение имеет вид $a_\varepsilon = a + h_1(\varepsilon) + ih_2(\varepsilon)$,

где $h_1(\varepsilon) \rightarrow 0, h_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Без ограничения общности можно считать, что $h_2(\varepsilon) = \pm\varepsilon$. Пусть $h_2(\varepsilon) = \varepsilon$, случай $h_2(\varepsilon) = -\varepsilon$ исследуется аналогично. Имеем

$$\begin{aligned} v_{a_\varepsilon}(x) &= \frac{1}{\gamma(x - a_\varepsilon)} = \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{x - a - h_1(\varepsilon)}{[x - a - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} + i \frac{1}{\gamma} \frac{\varepsilon}{[x - a - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Выражение (2.8) получается из выражения (2.9) при $h_1(\varepsilon) = 0$. Покажем, что семейства (2.8) и (2.9) имеют одинаковые пределы. Разность этих семейств почти всюду сходится к нулю. Если $h_1(\varepsilon)$ мало по сравнению с ε , то для разности этих семейств можно получить оценки, позволяющие перейти к пределу под знаком интеграла, откуда следует совпадение пределов в пространстве распределений. Но величина $h_1(\varepsilon)$ может стремиться к нулю сколь угодно медленно по сравнению с ε и может быть существенно большей, чем ε . Тогда для разности семейств (2.8) и (2.9) нет интегрируемой мажоранты и доказательство сходимости требует дополнительного исследования. Геометрический смысл такой сходимости заключается в том, что полюса a_ε приближаются к точке a , касаясь действительной оси.

Для упрощения обозначений будем считать, что $a = 0, \gamma = 1$ и

$$\begin{aligned} v_{a_\varepsilon}(x) &= \frac{1}{x - a_\varepsilon} = \\ &= \frac{x - h_1(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} + i \frac{\varepsilon}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если носитель функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$ принадлежит промежутку $[-R + 1, R - 1]$, то распределение

$P\left(\frac{1}{x}\right)$ может быть задано выражением

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int_{|x| < R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

Отметим, что при $h \rightarrow 0$

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x - h}\right), \varphi \right\rangle \rightarrow \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

Рассмотрим вещественные части функций (2.10) как распределения, т. е. исследуем семейство функционалов

$$I_1(\varepsilon, \varphi) := \int \frac{x - h_1(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx.$$

Так как

$$\int_{-R + h_1(\varepsilon)}^{R + h_1(\varepsilon)} \frac{x - h_1(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} dx = 0,$$

$$\text{то } I_1(\varepsilon, \varphi) = \int_{-R + h_1(\varepsilon)}^{R + h_1(\varepsilon)} \frac{[\varphi(x) - \varphi(h_1(\varepsilon))][x - h_1(\varepsilon)]}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} dx.$$

Преобразуем последнее выражение

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon, \varphi) &= \int_{-R + h_1(\varepsilon)}^{R + h_1(\varepsilon)} \frac{\varphi(x) - \varphi(h_1(\varepsilon))}{x - h_1(\varepsilon)} dx + \\ &+ \int_{-R + h_1(\varepsilon)}^{R + h_1(\varepsilon)} [\varphi(x) - \varphi(h_1(\varepsilon))] \times \\ &\times \left(\frac{x - h_1(\varepsilon)}{[x - h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{x - h_1(\varepsilon)} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle + \left[\left\langle P\left(\frac{1}{x-h_1(\varepsilon)}\right), \varphi \right\rangle - \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle \right] - \\ - \int_{-R+h_1(\varepsilon)}^{R+h_1(\varepsilon)} [\varphi(x) - \varphi(h_1(\varepsilon))] \times \\ \times \frac{\varepsilon^2}{\{[x-h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2\} [x-h_1(\varepsilon)]} dx.$$

Здесь второе слагаемое стремится к нулю. Очевидно, что в последнем интеграле подынтегральные выражения почти всюду сходятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. В общем случае из этого не следует сходимости к нулю интегралов. Но здесь имеются оценки

$$\frac{\varepsilon^2}{[x-h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} < 1, \\ \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(h_1(\varepsilon))}{x-h_1(\varepsilon)} \right| \leq \text{const},$$

ввиду которых подынтегральные выражения ограничены одной постоянной и, согласно теореме Лебега, эти интегралы сходятся к нулю. Таким образом,

$$I_1(\varepsilon, \varphi) \rightarrow \left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

Аналогично проверяется, что мнимая часть

$$\int \frac{\varepsilon}{[x-h_1(\varepsilon)]^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx$$

сходится к $\pi\varphi(0)$. Следовательно, если $\text{Im}a(\varepsilon) < 0$ для достаточно малых ε , то пределом

$\frac{1}{\gamma} \frac{1}{x-a_\varepsilon}$ является распределение

$$\frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) - i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a;$$

если $\text{Im}a(\varepsilon) > 0$ для достаточно малых ε , то пределом является распределение

$$\frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a.$$

Второе слагаемое $\frac{1}{\gamma} \frac{1}{x-b_\varepsilon}$ имеет такой же

вид, что и слагаемое $\frac{1}{\gamma} \frac{1}{x-a_\varepsilon}$, поэтому сходится

в пространстве обобщенных функций к одному из двух распределений вида

$$\frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-b}\right) \pm i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_b.$$

Таким образом,

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{x-a_\varepsilon} + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{x-b_\varepsilon}$$

сходится в пространстве $D'(\mathbb{R})$ к одному из четырех распределений (2.7).

Конкретный вид предела зависит от расположения полюсов аппроксимирующих решений $w_\varepsilon(x)$. $\square$

Согласно доказанному, среди распределений (2.1), соответствующих формальному решению, обобщенными решениями являются только те, у которых $M_1 = \pm i\pi$, $M_2 = \pm i\pi$, причем знаки зависят от того, в верхней или в нижней полуплоскости расположены полюса аппроксимирующего решения. Условия на поведение полюсов можно переписать в терминах поведения комплексных начальных условий, но такая запись будет более громоздкой.

Таким образом, в случае сингулярных решений общего положения существуют четыре различных обобщенных решения задачи Коши.

Сингулярный случай бесконечно удаленного полюса. Формальное решение имеет вид (1.10), где точка a вещественная.

Теорема 2.2. Если $C_2 = -\gamma C_1^2$, то решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon), w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon),$$

где $C_1(\varepsilon) \rightarrow C_1$, $C_2(\varepsilon) \rightarrow C_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, могут быть двух видов.

I. Если $C_2(\varepsilon) \neq -\gamma C_1^2(\varepsilon)$, то $w_\varepsilon(x)$ есть семейство (2.5), где $a_\varepsilon \rightarrow a$, $b_\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;

II. Если $C_2(\varepsilon) = -\gamma C_1^2(\varepsilon)$, то

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma(x-a_\varepsilon)}, \text{ где } a_\varepsilon = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1(\varepsilon)} \rightarrow a.$$

Семейство $w_\varepsilon(x)$ почти всюду сходится к формальному решению (1.10), а в пространстве $D'(\mathbb{R})$ сходимость $w_\varepsilon(x)$ зависит от поведения полюсов и возможна только в двух случаях:

1) если $\text{Im}a(\varepsilon) < 0$ для достаточно малых ε , то обобщенным решением является распределение

$$W^- = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) - i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a;$$

2) если $\text{Im}a(\varepsilon) > 0$ для достаточно малых ε , то обобщенным решением является распределение

$$W^+ = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + i\pi \frac{1}{\gamma} \delta_a,$$

$$\text{где } a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}.$$

Доказательство. Пусть $C_2(\varepsilon) \neq -\gamma C_1^2(\varepsilon)$. Тогда решения задачи Коши имеют вид (2.5), где полюса a_ε и b_ε заданы с помощью (2.6). Ввиду равенства $C_2 = -\gamma C_1^2$, один из этих полюсов стремится к бесконечности, а второй имеет конечный предел. Будем считать, что $b_\varepsilon \rightarrow \infty$,

тогда $a_\varepsilon \rightarrow a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}$. Так как $b_\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, семейство $\frac{1}{x - b_\varepsilon}$ сходится к нулю и точно, и в пространстве распределений, откуда следует, что предел семейства $w_\varepsilon(x)$ совпадает с пределом семейства $\frac{1}{\gamma(x - a_\varepsilon)}$.

Если

$$C_2(\varepsilon) = -\gamma C_1^2(\varepsilon),$$

то решения задачи Коши для уравнения (1.1) есть

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma(x - a_\varepsilon)}, \text{ где } a_\varepsilon = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1(\varepsilon)}. \quad (2.11)$$

Семейство (2.11) точно сходится к формальному решению (1.10). Полюс a_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к точке a – полюсу формального решения (1.10). Очевидно и обратное: если дан полюс a_ε , то $C_1(\varepsilon)$ однозначно определяется по формуле

$$C_1(\varepsilon) = \frac{1}{\gamma(x_0 - a_\varepsilon)}.$$

Таким образом, условие, что $C_1(\varepsilon) \rightarrow C_1$ эквивалентно тому, полюс a_ε стремится к a – полюсу формального решения.

Условия сходимости и пределы в пространстве распределений семейства $\frac{1}{\gamma(x - a_\varepsilon)}$ описаны в теореме 2.1, откуда получаем требуемое. $\square$

Таким образом, в рассматриваемом случае среди распределений (2.2), соответствующих формальному решению, обобщенными решениями являются только те, у которых $M = \pm i\pi$, и существует только два обобщенных решения задачи Коши.

Сингулярный случай совпадения полюсов. В этом случае $w(x)$ имеет вид (1.11), где точка a вещественная. Этот случай является вырожденным случаем сингулярного решения общего положения при $a = b$.

Теорема 2.3. Если $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, то решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon), w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon),$$

где $C_1(\varepsilon) \rightarrow C_1, C_2(\varepsilon) \rightarrow C_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеют вид (2.5), где $a_\varepsilon \rightarrow a, b_\varepsilon \rightarrow a$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В частности, если $C_2(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2(\varepsilon)$, то $a_\varepsilon = b_\varepsilon$ и

$$w_\varepsilon(x) = \frac{2}{\gamma(x - a_\varepsilon)}, \text{ где } a_\varepsilon = x_0 - \frac{2}{\gamma C_1(\varepsilon)} \rightarrow a.$$

В пространстве $D'(\mathbb{R})$ семейство $w_\varepsilon(x)$ сходится в одном из следующих случаев:

1) если $\text{Im}a(\varepsilon) < 0, \text{Im}b(\varepsilon) < 0$ для достаточно малых ε , то обобщенным решением является распределение

$$W^- = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) - i\pi \frac{2}{\gamma} \delta_a;$$

2) если $\text{Im}a(\varepsilon) > 0, \text{Im}b(\varepsilon) > 0$ для достаточно малых ε , то обобщенным решением является распределение

$$W^+ = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right) + i\pi \frac{2}{\gamma} \delta_a;$$

3) если $\text{Im}a(\varepsilon) \cdot \text{Im}b(\varepsilon) < 0$, для достаточно малых ε , то обобщенным решением является распределение

$$W = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right), \text{ где } a = x_0 - \frac{2}{\gamma C_1}.$$

Доказательство теоремы 2.3 повторяет рассуждения из доказательства теоремы 2.1.

В рассматриваемом случае среди распределений (2.3), соответствующих формальному решению, существуют три различных обобщенных решения задачи Коши, а именно те, у которых $M = \pm i\pi$ или $M = 0$.

Заключение

Обобщенные решения задачи Коши для второго уравнения иерархии Риккати строятся как пределы комплексно-значных функций, являющихся решениями задачи Коши с комплексными начальными условиями. Общее количество обобщенных решений зависит от начальных условий задачи Коши и таких решений может быть одно, два, три или четыре. При этом, если ограничиться рассмотрением аппроксимаций формального решения вещественными гладкими решениями, то обобщенное решение существует только при условии $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, такое решение единственно и есть

$$W = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x - a}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – Москва: Наука, 1979. – 320 с.
2. Иванов, В.К. Гиперраспределения и умножение распределений Шварца / В.К. Иванов // Доклады Академии наук СССР. – 1972. – Т. 204, № 5. – С. 1045–1048.
3. Егоров, Ю.В. К теории обобщенных функций / Ю.В. Егоров // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, № 5. – С. 3–40.
4. Colombeau, J.F. New generalized functions and multiplication of distributions / J.F. Colombeau. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – 374 p.

5. Colombeau, J.F. A multiplication of distributions / J.F. Colombeau // Journal of mathematical analysis and applications. – 1983. – № 94. – P. 96–115.
6. Шагова, Т.Г. Рациональные мнемофункции на $\mathbb{R}$ / Т.Г. Шагова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 2. – С. 6–17.
7. Ince, E.L. Ordinary differential equations / E.L. Ince. – New York: Dover Publications, 1944. – 558 с.
8. Громак, В.И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В.И. Громак, Н.А. Лукашевич. – Минск: Университетское, 1990. – 157 с.
9. Громак, В.И. О решениях второго уравнения Пенлеве / В.И. Громак // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 5. – С. 753–763.
10. Грицук, Е.В. Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве / Е.В. Грицук, Е.В. Кузьмина // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 2. – С. 64–72.
11. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверию, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Холден. – Москва: Мир, 1991. – 568 с.
12. Данилов, В.Г. Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка / В.Г. Данилов, В.П. Маслов, В.М. Шелкович // ТМФ. – 1998. – Т. 114, №1. – С. 3–55.
13. Антоневиц, А.Б. Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А.Б. Антоневиц, Т.Г. Шагова // Таврический Вестник Информатики и Математики. – 2019. – № 3. – С. 23–36.
14. Антоневиц, А.Б. Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{S}{x}u = 0$ в пространстве распределений / А.Б. Антоневиц, Е.В. Кузьмина // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–66.
15. Кузьмина, Е.В. Обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка с рациональным коэффициентом специального вида / Е.В. Кузьмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1 (46). – С. 54–61.

Поступила в редакцию 20.04.2022.

Информация об авторах

Кузьмина Елена Викторовна – аспирантка

О ПАРАХ ЛОКЕТТА И ГИПОТЕЗЕ ЛОКЕТТА ДЛЯ σ -ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Е.Д. Ланцетова

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова

ON LOCKETT PAIRS AND LOCKETT CONJECTURE FOR σ -LOCAL FITTING CLASSES

E.D. Lantsetova

P.M. Masherov Vitebsk State University

Аннотация. Для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ Локетт определил наименьший класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H , и класс Фиттинга $\mathfrak{F}_*$ как пересечение всех непустых классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Парой Локетта непустых классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют такую упорядоченную пару $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$, для которой справедливо равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$. В настоящей работе в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп описаны методы построения пар Локетта для случая, когда $\mathfrak{F}$ обобщенно локальный класс Фиттинга, и, в частности, для $\mathfrak{F}$ подтверждена гипотеза Локетта.

Ключевые слова: σ -локальный класс Фиттинга, пара Локетта, гипотеза Локетта.

Для цитирования: Ланцетова, Е.Д. О парах Локетта и гипотезе Локетта для σ -локальных классов Фиттинга / Е.Д. Ланцетова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 76–82. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_76 – EDN: WQAZZC

Abstract. For each nonempty Fitting class $\mathfrak{F}$, Lockett defined the smallest Fitting class $\mathfrak{F}^*$ containing $\mathfrak{F}$ such that $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ for all groups G and H and the Fitting class $\mathfrak{F}_*$ as the intersection of all nonempty Fitting classes $\mathfrak{X}$ for which $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Lockett pair of nonempty Fitting classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is an ordered pair $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ such that $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$. If $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{F}$ is a Lockett class, then $\mathfrak{F}$ is said to satisfy Lockett conjecture in $\mathfrak{H}$. In the present paper, in the universe $\mathfrak{S}$ of all finite soluble groups, the methods for constructing Lockett pairs are described for the case when $\mathfrak{F}$ is a generalized local Fitting class, and, in particular, for $\mathfrak{F}$ confirmed Lockett conjecture.

Keywords: σ -local Fitting class, Lockett pair, Lockett conjecture.

For citation: Lantsetova, E.D. On Lockett pairs and Lockett conjecture for σ -local Fitting classes / E.D. Lantsetova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 76–82. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_76 (in Russian). – EDN: WQAZZC

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными и разрешимыми. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. Классом групп называют всякую совокупность групп, содержащую вместе с каждой своей группой G и все группы изоморфные G . Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$ -подгруппа, которую называют $\mathfrak{F}$ -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

В теории конечных разрешимых групп многие известные результаты посвящены исследованию структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп при помощи операторов « $*$ » и « $*$ », которые были определены Локеттом [2]. Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ оператор « $*$ » сопоставляет наименьший класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H и оператор « $*$ », сопоставляющий $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_* = \bigcap \{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}$. Если $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ называется классом Локетта.

Возможность применения операторов Локетта для изучения строения классов Фиттинга в терминах радикалов обусловлена следующими обстоятельствами. Во-первых, семейство классов Локетта обширно, поскольку любой класс Фиттинга, замкнутый относительно гомоморфных образов или относительно подпрямых произведений, и любой класс Фишера [1, теорема X.1.25] являются классами Локетта. Во-вторых, Локеттом [2] была сформулирована следующая проблема, известная в теории классов групп под названием

Гипотеза Локетта [2, проблема стр. 135].
Верно ли, что для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существует нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$?

Напомним, что непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *нормальным*, если для любой группы G ее $\mathfrak{F}$ -радикал является максимальной из подгрупп G , принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Класс $\mathfrak{F}$ называют *наследственным*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия подгрупп. Брайс и Косси [3] доказали справедливость гипотезы Локетта для всех локальных наследственных классов Фиттинга и установили, что любой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга.

Развитие и обобщение указанных результатов [3, раздел 5] привело к определению понятия пары Локетта.

Упорядоченная пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется *парой Локетта* или просто *L-парой*, если справедливо равенство

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*.$$

Заметим что, если $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ – L-пара, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет обобщенной гипотезе Локетта, т. е. гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$. В частности, если $\mathfrak{H}$ – класс всех разрешимых групп, т. е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, и $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ – L-пара, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта.

Брайсом и Косси [3], [1, теорема X.6.12] было установлено, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – локальные наследственные классы Фиттинга, то $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ – L-пара. Построению L-пар для случая, когда $\mathfrak{F}$ – локальный класс вида $\mathfrak{X}\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_\pi$ ($\mathfrak{X}$ – произвольный непустой класс Фиттинга) и $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, замкнутый относительно $\mathfrak{F}$ -инъекторов специального вида, была посвящена работа Бейдлемана и Хаука [4], [1, теоремы X.6.8 и X.6.11]. Кроме того, Бризоном [5] было доказано, что классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ образуют L-пару и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга всех π -групп и $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, замкнутый

относительно холловых π -подгрупп. Дёрком и Хоуксом [1] было показано, что $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является L-парой в случае, когда $\mathfrak{F}$ либо локальный наследственный класс Фиттинга, либо класс Фиттинга, определяемый локально функцией, все значения которой постоянны, и $\mathfrak{H}$ – локальный наследственный класс Фиттинга. Прогресс в данном направлении исследований был достигнут в работе Н.Т. Воробьева [6], где была подтверждена гипотеза Локетта для произвольного локального класса Фиттинга при помощи построения L-пары для случая, когда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален и класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ f -инъекторно замкнут (f – функция, определяющая локально $\mathfrak{F}$). Заметим также, что в универсуме $\mathfrak{S}^\pi$ всех π -разрешимых групп в работе [7] были построены L-пары для локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и класса Фиттинга $\mathfrak{H}$, состоящего из всех групп таких, холловы π -подгруппы которых нильпотентны.

Все это приводит к задаче нахождения новых семейств классов Фиттинга, специальным случаем которых является семейство локальных классов Фиттинга, для которых упорядоченная пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ является L-парой, в частности, описания классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, для которых $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.

В настоящей работе такая задача решена для случая σ -локальных классов Фиттинга. Ориентиром для таких исследований является σ -метод, предложенный Скибой [8], для изучения строения групп и формаций [9]–[11], который был дуализирован для классов Фиттинга в работе [12] и состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n , $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей группы G . Пусть σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Если $\mathfrak{F}$ – класс групп, то символом $\sigma(\mathfrak{F})$ обозначают множество

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup \{\sigma(G) : G \in \mathfrak{F}\}.$$

Всякое отображение вида $f : \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называется σ -функцией Хартли или просто H_σ -функцией. Если f – H_σ -функция, то символом $\text{Supp}(f)$ обозначают носитель f , т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Пусть $LR_\sigma(f) = (G : G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G))$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – классы всех σ_i -групп и всех σ_i' -групп

соответственно, символом $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ обозначен $\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ -корадикал группы G – наименьшая нормальная подгруппа G , факторгруппа по которой σ_i -замкнута.

Определение [12]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется σ -локальным, если $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$ для некоторой H_{σ} -функции f . В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, то $\mathfrak{F}$ называют локальным классом Фиттинга.

1 Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Напомним, что наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$ -подгруппу группы G называют $\mathfrak{F}$ -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Произведением $\mathfrak{F} \mathfrak{H}$ классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс $(G : \exists N \trianglelefteq G, N \in \mathfrak{F} \text{ и } G/N \in \mathfrak{H})$; произведением $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс $(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что если $\mathfrak{H}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathfrak{F} \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ [1, стр. 566]. Более того, произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12 (a), (c)].

Лемма 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга. Тогда

- 1) $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{F}}$ [1, теорема IX.1.12 (b)];
- 2) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{H}}$.

Класс Фиттинга, замкнутый относительно гомоморфных образов, называют радикальным гомоморфом. Радикальный гомоморф, являющийся замкнутым относительно подпрямых произведений, называют радикальной или фиттинговой формацией.

Лемма 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ [1, замечание IX.1.11];
- 2) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ – радикальный гомоморф, то $\mathfrak{F} \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \mathfrak{M}$ [4, лемма 5];
- 3) если $\{\mathfrak{H}_i : i \in I\}$ – множество классов Фиттинга, то $\bigcap_{i \in I} (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}_i) = \mathfrak{F} \diamond (\bigcap_{i \in I} \mathfrak{H}_i)$ [6, лемма 4 (2)].

Мы будем использовать следующие свойства операторов Локетта, которые представляет

Лемма 1.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда

- 1) $\mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{F}^*)_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп [1, теорема X.1.15];
- 2) если $\mathfrak{H}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F}_*$ [3, лемма 3.4, следствие 3.5].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$ -инъектором группы G , если $V \cap N$ является максимальной подгруппой группы N среди подгрупп, входящих в $\mathfrak{F}$ для любой субнормальной подгруппы N группы G .

Лемма 1.4 [13, теорема 1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда в группе G существует $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены в G .

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Фишера, если из того, что $G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$ и H/K – p -группа (p – простое число), следует $H \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1.5 [14, теорема 4.4]. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фишера. Тогда $\mathfrak{S}_*$ замкнут относительно взятия $\mathfrak{F}$ -инъекторов.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Обозначим через $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$ класс групп, который определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G принадлежит $\mathfrak{H}$.

Лемма 1.6 [1, теорема IX.2.3]. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $(\mathfrak{F} \mathfrak{S}_{\pi}) \uparrow (\mathfrak{H} \mathfrak{S}_{\pi})$ – класс Фиттинга.

Операция замыкания D_0 для класса групп $\mathfrak{X}$ определяется как

$$D_0(\mathfrak{X}) = (G : G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_r, \text{ где } H_i \in \mathfrak{X}).$$

Лемма 1.7 [1, лемма X.1.36]. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$ также является классом Фиттинга, и класс $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}^*$ является D_0 -замкнутым. Тогда $(\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H})^* = \mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}^*$, в частности, $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}^*$ – класс Локетта.

Мы будем использовать следующую классификацию H_{σ} -функций σ -локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ [12]. Пусть $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$ для H_{σ} -функции f и $\Pi = \text{Supp}(f)$. Тогда H_{σ} -функция f называется:

- 1) приведенной, если $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;
- 2) полной в случае, когда $f(\sigma_i) = f(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;
- 3) полной приведенной, если f является одновременно полной и приведенной H_{σ} -функцией.

Лемма 1.8 [12, лемма 3.2]. Каждый σ -локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется полной приведенной H_{σ} -функцией.

Лемма 1.9. Справедливы следующие утверждения:

- 1) каждый σ -локальный класс Фиттинга является классом Фишера [12, лемма 3.3 (2)];

2) каждый σ -локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является классом Локетта [12, следствие 3.4].

Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *формацией*, если $\mathfrak{X}$ замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений.

Лемма 1.10 [15, теорема 1.1]. *Любой наследственный класс Фиттинга является формацией.*

2 Основные результаты

Пусть $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$ для некоторой H_{σ} -функции f и $\Pi = Supp(f)$. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем *f -инъекторно замкнутым*, если $\mathfrak{H} \subseteq f(\sigma_i) \uparrow \mathfrak{H}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$.

Случаи f -инъекторной замкнутости класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ представляют следующие

Примеры 2.1. Пусть $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$, где f – приведенная H_{σ} -функция и $\Pi = Supp(f)$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ является f -инъекторно замкнутым в каждом из следующих случаев:

- 1) $f(\sigma_i)$ – наследственный класс Фиттинга для всех $\sigma_i \in \Pi$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга;
- 2) $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, причем $\mathfrak{X} \subseteq f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathfrak{Y}$ – наследственный класс Фиттинга;
- 3) $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ или $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$;
- 4) $f(\sigma_i)$ – нормальный класс Фиттинга для всех $\sigma_i \in \Pi$, $\mathfrak{H}$ – произвольный класс Фиттинга;
- 5) $\mathfrak{H}$ – наследственный класс Фиттинга.

Поскольку в случае 1) $f(\sigma_i)$ – наследственный класс Фиттинга, $f(\sigma_i)$ является классом Фишера для всех $\sigma_i \in \Pi$. Следовательно, по лемме 1.5 класс $\mathfrak{H} \subseteq f(\sigma_i) \uparrow \mathfrak{H}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathfrak{H}$ – f -инъекторно замкнутый класс Фиттинга.

Проверим f -инъекторную замкнутость класса $\mathfrak{H}$ в случае 2). Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда ввиду разрешимости группы G по лемме 1.4 в G существует $f(\sigma_i)$ -инъектор V для $\sigma_i \in \Pi$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq f(\sigma_i)$, то по утверждению 2) леммы 1.1 $G_{\mathfrak{X}} \leq G_{f(\sigma_i)}$ и по определению $f(\sigma_i)$ -инъектора $G_{f(\sigma_i)} \leq V$. Поскольку $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$. Ввиду того, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ наследственен и $V/G_{\mathfrak{X}} \leq G/G_{\mathfrak{X}}$, $V/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$. Так как $G_{\mathfrak{X}} \leq V$, $G_{\mathfrak{X}} \leq V$. Следовательно, $V/G_{\mathfrak{X}}/V_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}} \cong V/V_{\mathfrak{X}}$. Отсюда $V/V_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$, поскольку по лемме 1.10 класс $\mathfrak{Y}$ – формация. Таким образом, $V \in \mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ и класс $\mathfrak{H}$ f -инъекторно замкнут.

В случае 3) если $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$, класс $\mathfrak{H}$ f -инъекторно замкнут ввиду

того, что каждый $f(\sigma_i)$ -инъектор группы $G \in \mathfrak{H}$ является $f(\sigma_i)$ -подгруппой и, следовательно, $\mathfrak{H}$ -подгруппой. Если же $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$, поскольку H_{σ} -функция f класса $\mathfrak{F}$ приведенная и $\mathfrak{H}$ f -инъекторно замкнут по указанному выше.

Напомним, что класс $\mathfrak{X}$ называют *нормальным* [16], если для любой группы G ее $\mathfrak{X}$ -инъектор является нормальной подгруппой G . Поэтому если $G \in \mathfrak{H}$ и V $f(\sigma_i)$ -инъектор G , то $V \in \mathfrak{H}$ и в случае 4) класс $\mathfrak{H}$ f -инъекторно замкнут.

Случай 5) тривиален.

Следующая теорема описывает построения L -пар для случая, когда $\mathfrak{F}$ – σ -локальный класс Фиттинга.

Теорема 2.2. Пусть $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(F)$ – σ -локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной H_{σ} -функцией F и $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга. Если $\mathfrak{H}$ – F -инъекторно замкнутый класс, то $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является L -парой.

Доказательство. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$, то по утверждению 2) леммы 1.3 $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{H}_*$. Кроме того, по утверждению 1) леммы 1.3

$$(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Следовательно, $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$.

Докажем обратное включение. Пусть G – группа из $\mathfrak{H}$. По лемме 1.4 в G существует $F(\sigma_i)$ -инъектор V , где $\sigma_i \in Supp(F) = \Pi$. Из того, что $V \in F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$ и F – приведенная H_{σ} -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, вытекает $V \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$.

Докажем справедливость равенства

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* = ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i}^*.$$

Вначале покажем, что

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i}^*.$$

Если $G \in (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i}$, то ввиду утверждения 2) леммы 1.2 следует $G \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i}^*$. Следовательно, $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i} \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i}^*$ и по утверждению 2) леммы 1.3

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* \subseteq (((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma_i}^*)^*.$$

Так как класс Фиттинга $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$ – локален, то по утверждению 2) леммы 1.9 $\mathfrak{S}_{\sigma_i}^*$ является классом Локетта. Кроме того, ввиду утверждения 1) леммы 1.3 $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* = ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*$ и поэтому $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*$ также является классом Локетта. Используя утверждение 1) леммы 1.1 и тот факт, что $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*$ и $\mathfrak{S}_{\sigma_i}^*$ – классы Локетта, получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 & ((G \times H)_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})^* \mathfrak{S}_{\sigma'_i} / (G \times H)_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} = \\
 & = (G / G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \times H / H_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*}) \mathfrak{S}_{\sigma'_i} = \\
 & = (G / G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*}) \mathfrak{S}_{\sigma'_i} \times (H / H_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*}) \mathfrak{S}_{\sigma'_i} = \\
 & = G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \mathfrak{S}_{\sigma'_i} / G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \times H_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \mathfrak{S}_{\sigma'_i} / H_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} = \\
 & = G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \mathfrak{S}_{\sigma'_i} \times H_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \mathfrak{S}_{\sigma'_i} / G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \times H_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} = \\
 & = G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \mathfrak{S}_{\sigma'_i} \times H_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \mathfrak{S}_{\sigma'_i} / (G \times H)_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*}. \\
 & \text{Значит,} \\
 & (G \times H)_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \mathfrak{S}_{\sigma'_i} = G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \mathfrak{S}_{\sigma'_i} \times H_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \mathfrak{S}_{\sigma'_i}
 \end{aligned}$$

для всех групп G и H . Следовательно,

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma'_i} = (((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*$$

– класс Локетта и справедливо включение

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^* \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}.$$

Докажем обратное включение. Пусть G – группа минимального порядка из класса

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma'_i} \setminus ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*.$$

По утверждению 2) леммы 1.1 $G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \leq G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*}$.

Если $G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$ – нефраттиниевский фактор группы $G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$, то в ней существует такая максимальная подгруппа $M / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$, что

$$G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} = (G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})(M / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}).$$

По утверждению 1) леммы 1.3

$$G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \leq Z(G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})$$

и, следовательно, $M / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$ – нормальная подгруппа группы $G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$. По индукции

$M \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*$. Поскольку

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*,$$

$$G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*.$$

Следовательно, $G = G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} M \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*$, что невозможно.

Пусть $G_{((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \subseteq \Phi(G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})$. Из того, что $\mathfrak{S}_{\sigma'_i}$ – насыщенная формация и

$$G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / \Phi(G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}) \in \mathfrak{S}_{\sigma'_i},$$

следует $G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \in \mathfrak{S}_{\sigma'_i}$ и $G \in (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}$.

Применяя утверждение 1) леммы 1.3, имеем

$$G \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*.$$

Полученное противоречие завершает доказательство равенства: $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^* = ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*)^* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}$.

Далее, используя утверждение 1) леммы 1.3 и утверждение 1) леммы 1.2, получаем

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}.$$

Следовательно, $V \in (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}$ и поэтому

$$G \in F(\sigma_i) \uparrow ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*.$$

Итак, справедливо включение

$$\mathfrak{H} \subseteq F(\sigma_i) \uparrow ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*.$$

Так как H_{σ} -функция является полной, то по лемме 1.6 класс групп $F(\sigma_i) \uparrow ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*$ является классом Фиттинга. Более того, по лемме 1.7 имеет место равенство:

$$F(\sigma_i) \uparrow ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^* = (F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*.$$

Следовательно, по утверждению 1) леммы 1.3

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{H}_* & \subseteq ((F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})^*)_* = \\
 & = (F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})_*
 \end{aligned}$$

и имеет место включение

$$(F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})_* \subseteq F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}.$$

Итак, нами установлено включение

$$\mathfrak{H}_* \subseteq F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$. Следовательно, для каждого $\sigma_i \in \Pi$ имеет место $F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}$.

Используя утверждение 2) леммы 1.2 и ассоциативный закон умножения классов Фиттинга, получаем $(F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}_*) \mathfrak{S}_{\sigma'_i} \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}$. Значит,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} (F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}_*) \mathfrak{S}_{\sigma'_i}) & \subseteq \\
 & \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i})).
 \end{aligned}$$

Ввиду того, что F – полная H_{σ} -функция, определяющая класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, следует

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} (F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}_*) \mathfrak{S}_{\sigma'_i}) & = \\
 = \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} F(\sigma_i) \mathfrak{S}_{\sigma'_i}) \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}) & = \\
 = \mathfrak{F} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\sigma'_i}).
 \end{aligned}$$

Тогда, используя утверждение 3) леммы 1.2

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* (\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma'_i}) \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* (\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma'_i}).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\Pi'} \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\Pi'}.$$

Так как по утверждению 1) леммы 1.2 $\mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\Pi'}$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\Pi'}$. Кроме того, очевидно, $\mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\Pi'} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$. Следовательно, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$ и справедливо равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$, т. е. $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является L -парой. $\square$

Теорема 2.3. Пусть $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(F)$ – σ -локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной H_{σ} -функцией F и $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга. Тогда если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то ввиду случая 3) из примеров 2.1 класс $\mathfrak{H}$ F -инъекторно замкнут. По теореме 2.2 справедливо равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$. Поскольку по утверждению 2) леммы 1.9 $\mathfrak{F}$ является классом Локетта, $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_*$ и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$. $\square$

3 Следствия

Из теорем 2.2 и 2.3 получаем следующие следствия.

Следствие 3.1. Любой σ -локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, т. е. $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$.

Доказательство утверждения вытекает непосредственно из теоремы 2.3 в случае, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$.

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ – минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, получаем

Следствие 3.2 (Воробьев [6, теорема]). Если F – полная приведенная H -функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – F -инъекторно замкнутый класс Фиттинга, то пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является L -парой. В частности, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.

Следствие 3.3 (Брайс, Косси [3, теорема 4.17]). Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – локальные наследственные классы Фиттинга, то пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является L -парой. В частности, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.

Следствие 3.4 (Бризон [5, предложение 6.5]). Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Если $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{S}_\pi$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Поскольку класс Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ определяется локально H -функцией F такой, что

$$F(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_\pi, & \text{если } p \in \pi, \\ \emptyset, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

и $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, класс $\mathfrak{F}$ F -инъекторно замкнут (см. пример 2.1.3). Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{F}$ для минимального разбиения σ множества $\mathbb{P}$.

Следствие 3.5 (Дерк, Хоукс [1, предложение X.6.10]). Пусть I – множество индексов и каждому $i \in I$ соответствует некоторое множество простых чисел π_i и класс Фиттинга $\mathfrak{X}_i$. Пусть I – бесконечное множество такое, что для каждого конечного подмножества τ класс Фиттинга $\mathfrak{S}_\tau$ содержится в конечном числе классов $\mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi'_i}$. Тогда если $\mathfrak{H}$ – локальный наследственный класс Фиттинга и для любого $i \in I$ класс Фиттинга $\mathfrak{X}_i$ либо наследственен, либо $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{F}$ для некоторого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то пара классов Фиттинга $(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi'_i}, \mathfrak{H})$ является L -парой.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi'_i}$ и $\mathfrak{X}_i$ – наследственный класс Фиттинга для всех $i \in I$. Легко видеть, что произведение наследст-

венных классов $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{S}_{\pi_i}$ и $\mathfrak{S}_{\pi'_i}$ – наследственный класс Фиттинга и поэтому $\mathfrak{M}$ – наследственный класс Фиттинга. Следовательно, по теореме [17] класс $\mathfrak{M}$ локален. Так как класс $\mathfrak{H}$ наследственен, то по следствию 1 [18] $\mathfrak{H}$ F -инъекторно замкнут для H -функции F такой, что $F(p) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi'_i} \cap (\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{X}_j \mathfrak{S}_{\pi_j})$ для $p \in \pi_i$.

Если $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{F}$ для всех $i \in I$, то по следствию 2 [18] класс $\mathfrak{M}$ локален и $\mathfrak{H}$ F -инъекторно замкнут для H -функции F такой, что $F(p) = \mathfrak{F} \mathfrak{S}_{\pi_i}$ для $p \in \pi_i$. Таким образом, в каждом случае по теореме 2.2 $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H})$ – L -пара. $\square$

Следствие 3.6 (Дерк, Хоукс [1, следствие X.6.11]). Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – наследственный. Тогда пара $(\mathfrak{F}\mathfrak{M}, \mathfrak{H})$ является L -парой, где $\mathfrak{M}$ – класс всех нильпотентных групп. В частности, $\mathfrak{F}\mathfrak{M}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 2.2 при минимальном разбиении σ множества $\mathbb{P}$, поскольку класс $\mathfrak{F}\mathfrak{M}$ – локальный, определяемый H -функцией F такой, что $F(p) = \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$ и класс $\mathfrak{H}$ F -инъекторно замкнут.

Заключение

В настоящей работе в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп описаны методы построения пар Локетта для случая, когда $\mathfrak{F}$ обобщенно локальный класс Фиттинга, и, в частности, для $\mathfrak{F}$ подтверждена гипотеза Локетта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – P. 131–136.
3. Bryce, R.A. A problem in the Theory of Normal Fitting Classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol. 141. – P. 99–110.
4. Beidleman, J.C. Über Fittingklassen und die Lockett – Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 2. – P. 161–167.
5. Brison, O.J. Hall operators for Fitting classes / O.J. Brison // Arch. Math. (Basel). – 1979. – Vol. 33, № 1. – P. 1–9.
6. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.
7. Lujin Zhu. On Lockett Pairs and Lockett Conjecture for π -Soluble Fitting Classes / Lujin Zhu, Nanying Yang, N.T. Vorob'ev // Bull. Malays. Sci. Soc. (2). – 2013. – Vol. 36, № 3. – P. 825–832.

8. Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.
9. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.
10. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
11. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
12. Guo, W. On σ -local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.
13. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.
14. Hauck, P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse / P. Hauck // J. Algebra. – 1979. – Vol. 53, № 3. – P. 395–401.
15. Bryce, R.A. Subgroup closed Fitting classes are formations / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1982. – Vol. 91, № 2. – P. 225–258.
16. Bessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Bessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Vol. 118. – P. 1–8.
17. Воробьев, Н.Т. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1992. – Т. 51, № 3. – С. 3–8.
18. Hauck, P. A characterization of dominant local Fitting classes / P. Hauck, V.N. Zahursky // J. Algebra. – 2012. – Vol. 358. – P. 27–32.

Поступила в редакцию 03.02.2022.

Информация об авторах

Ланцетова Екатерина Дмитриевна – аспирантка

ГРАНИЦЫ ВАЛИДНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ РАСЩЕПЛЯЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРЕХТЕМПОВЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ч.А. Налигама, О.Б. Цехан

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ASYMPTOTIC APPROXIMATIONS VALIDITY BOUNDARIES FOR DECOUPLING TRANSFORMATION OF THREE-TIME-SCALE LINEAR TIME-INVARIANT SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS WITH DELAY

C.A. Naligama, O.B. Tsekhan

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Для трехтемповых линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием по состоянию развивается метод разделения движений на основе невырожденного преобразования типа Чанг. Введены асимптотические приближения для полностью разделенных подсистем рассматриваемой системы с трехвременными масштабами, построены и доказаны границы значений малых параметров сингулярности, гарантирующие справедливость асимптотических представлений решений матричных операторных уравнений, лежащих в основе преобразования, асимптотических приближений для расщепляющего преобразования и матричных операторов расщепленной системы. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, трехтемповая система, запаздывание, расщепляющее преобразование, декомпозиция, асимптотическое приближение, оценка параметра.

Для цитирования: Налигама, Ч.А. Границы валидности асимптотических аппроксимаций для расщепляющего преобразования трехтемповых линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Ч.А. Налигама, О.Б. Цехан // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 83–93. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_83 – EDN: ZLGNYA

Abstract. For time-invariant singularly perturbed control systems with state delay the method of separation of movements is evolved on the basis of Chang-type non-degenerate transformation. Asymptotic approximations for completely separated subsystems of the considered singularly perturbed system with three-time scales are introduced, boundaries of values of small singularity parameters are constructed and proved, which guarantee the validity of asymptotic representations and estimates of solutions underlying matrix operator equations, asymptotic approximations for the decoupling transformation and matrix operators of the split system. An illustrative example is given.

Keywords: singularly perturbed system, three-time-scale system, time delay, decoupling transformation, decomposition, asymptotic approximation, parameter estimate.

For citation: Naligama, C.A. Asymptotic approximations validity boundaries for decoupling transformation of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed systems with delay / C.A. Naligama, O.B. Tsekhan // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 83–93. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_83 – EDN: ZLGNYA

Introduction

Singularly Perturbed Systems (SPS) are a common occurrence specially in contemporary application in engineering, quantum mechanics, optimal control, etc. [1]–[3]. High dimensionality and rigidity of such systems due to the precedence of small parameters which can be sourced by a wide range of physical parameters such as friction factors, viscosity and other system parameters, have made analysis of solving such systems harder even in modern mathematics.

Time scale separation of the Singularly Perturbed Systems is a widely studied area due to the possibility of reducing the dimension of the simulated

systems for the purpose of analysing and synthesizing systems. Time scale separation of a linear singularly-perturbed continuous-time varying systems without delay has been introduced with Chang's transformation [4]–[6] with a nondegenerate change of variables. Generalization of the Change-type transformation on a two-time scale singular perturbed time-invariant system without delay has been done in [7]–[9] with two step change of variables. There have been several studies in the area on the generalization of Chang's transformation to two, three and multi-time scale Singularly Perturbed systems in slitting the subsystems depending on the space of the variables which leads to lower

dimensional systems which are lesser in complexity in solving. Further, studies related to Singular Perturbed Systems with delays have been conducted in [10], [11] where Chang type transformation has been generalized to obtained the subsystems with delays.

Methods of solving Singularly Perturbed Systems is one of the widely researched areas in mathematics and many approaches of solving Singularly Perturbed Systems have been introduced by mathematicians. Majorly those approaches are based either on classical numerical approaches or on asymptotic methods, and hybrid approaches have also been considered. As far as the numerical methods of solving Singularly Perturbed Systems are concerned, only the quantitative information of considered problems can be obtained, while some explicit information of the quantitative behaviour of the family of the problem can be acquired with the application of asymptotic methods [12]. In complex SPSs, it is difficult to develop efficient numerical methods for SPS due to the rigidity of such systems. When the asymptotic methods are considered, the main term of the asymptotic approximations contains necessarily the essentials for the indication of the qualitative behaviour of the solution and in some cases is capable of replacing the exact solution to the problem. Thus, the development of asymptotic methods contributes to the development of accurate numerical methods, as the knowledge of the structure of the solution helps in the development of numerical methods for solving complex problems. The simulation results of the study [13] indicate that the asymptotic method is effective in the approximation of sub-systems of SPS without compromising the qualitative behaviours of the solutions. So, it is important to construct a splitting transformation and its asymptotic approximation as a method for decomposing complex systems, a way to eliminate the rigidity of such systems when developing effective numerical methods.

The study [10] generalized the transformation introduced by Chang in [4], to a linear time invariant system with delay in the slow state variables where the transformation has been constructed in the form of an asymptotic series. In [11] a two-time scale SPS with multiple commensurate delays in the slow state variables is considered and Chang's transformation has been applied. An SPS is decomposed into its fast and slow subsystems and matrix-valued operators are approximated with respect to the small parameter in an asymptotic series form. In a later study [12] for a similar SPS, schema of the Chang's transformation of [4] is applied and existence/continuity of asymptotic approximations to the solutions of matrix-valued operator of the transformation is proved and discussed.

In a similar study [14], [15] decomposition and asymptotic approximation of the three-time-scale singularly perturbed systems with multiple commensurate delays in the slow state variables has been

discussed. But there are few studies carried out considering the measure of reliability of the asymptotic approximations for the SPS and, specially no studies have been conducted for three-time-scale SPSs with delay.

However, extension of the splitting transformation proposed by Chang to systems with delay is generally impossible. This is related to the existence and properties of fast and slow manifolds for such systems [15]. Extending the splitting transformation to systems with delay in the case when this is possible requires, in particular, substantiating the asymptotic representation of solutions of matrix operator equations that depend on small parameters and obtaining corresponding estimates for small parameters. For three-scale systems with delay, this problem is solved for the first time.

So, this work extends the results in [14], [15] by deriving of a measure of the reliability (validity) of the asymptotic approximation of the decoupled due to the splitting transformation of the considered TSPLTISD.

The study [14] focuses on the construction and substantiation of a nondegenerate transformation, which splits a three time-scale linear time-invariant singularly perturbed system with perturbation parameters of two different orders of magnitude (small parameters of two different orders at the highest derivatives of a part of the variables) and with a delay in slow state variables into three regularly dependent on small parameters independent subsystems of smaller dimensions than the original ones: relatively fast, fastest and slow variables and the matrix operator equations are obtained, which must be satisfied by the elements of a non-degenerate transformation, so that as a result of its application, unrelated subsystems of different rates are obtained.

As the continuation of the study [14], in [15], it is discussed that the decoupling transformation formed in the study [14] can be constructed with any degree of accuracy in the form of an asymptotic expansion in powers of small parameters. For this, the proof of the solvability of the previously obtained matrix operator equations is discussed. Further it is discussed that decomposed subsystems can be represented in the form of asymptotic expansions in powers of small parameters, and iterative schemes can be determined for finding the terms of the asymptotic series. Extensive elaboration of the proof of the theorems related to [15] shall be published in the forthcoming publications of the authors.

The interest of this study is the construction of the boundaries with a small parameter with respect to the reliability / validity of asymptotic approximations of three time scale singularly perturbed system with multiple commensurate delays in the slow state variables. Generalization of Chang's type transformation for a Three Time Scale Singularly Perturbed System with multiple commensurate delays in the slow state variable has been discussed by the

previous research works by the authors and the construction of iterative schemas for the asymptotic approximation for the decoupled sub-systems depending on the tempo of the variables has also been carried out in the previous works [14], [15].

In this paper, with the use of a contraction mapping principle and the fixed point theorem the upper bounds on small singularity parameters guaranteeing the validity of asymptotic approximations for the decoupling transformation and matrix operators of the decoupled system are proven.

1 Statement of the problem

A three-time-scale singularly perturbed linear time-invariant control system with multiple commensurate delays in the slow state variables (TSPLTISD) is considered as defined here:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{j=0}^l A_{11j} x(t-jh) + A_{12} y(t) + \\ &+ A_{13} z(t) + B_1 u(t), \quad x \in R^{n_1}, u \in R^r, \\ \varepsilon_1 \dot{y}(t) &= \sum_{j=0}^l A_{21j} x(t-jh) + A_{22} y(t) + \\ &+ A_{23} z(t) + B_2 u(t), \quad y \in R^{n_2}, \\ \varepsilon_2 \dot{z}(t) &= \sum_{j=0}^l A_{31j} x(t-jh) + A_{32} y(t) + \\ &+ A_{33} z(t) + B_3 u(t), \quad z \in R^{n_3}, t \geq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Here $A_{11j}, A_{12}, A_{13}, B_i, i = \overline{1, 3}, j = \overline{0, l}$ are constant matrices with appropriate dimensions, $h = \text{const} > 0$ – delay, $0 < \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$ – small parameters, that describe the time-scale separation, $\varphi(\theta), \theta \in [-h, 0)$ – piecewise continuous n_1 -vector function, $u(t)$ – piecewise continuous on T , r -vector control function, $x_0 \in R^{n_1}, y_0 \in R^{n_2}$.

Note that since $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$, then $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ll \varepsilon_2$,

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \ll 1, \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \rightarrow 0.$$

The presence of two small parameters of different orders of smallness in the form of factors at the derivatives of some of the variables determines the different-rate nature of the change in the phase coordinates in the vicinity of the point. So, x is slow, y is fast and z is the fastest variables.

Let $p \triangleq \frac{d}{dt}$ – differentiation operator, e^{-ph} – delay operator:

$$\begin{aligned} e^{-ph} v(t) &= v(t-h), \\ e^{-jph} v(t) &= v(t-jh). \end{aligned}$$

Introducing matrix operators

$$A_{i1}(e^{-ph}) \triangleq \sum_{j=0}^l A_{i1j} e^{-jph}, \quad i = \overline{1, 3},$$

block matrix operator and block matrix

$$\begin{aligned} A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}) &= \begin{bmatrix} A_{11}(e^{-ph}) & A_{12} & A_{13} \\ \frac{A_{21}(e^{-ph})}{\varepsilon_1} & \frac{A_{22}}{\varepsilon_1} & \frac{A_{23}}{\varepsilon_1} \\ \frac{A_{31}(e^{-ph})}{\varepsilon_2} & \frac{A_{32}}{\varepsilon_2} & \frac{A_{33}}{\varepsilon_2} \end{bmatrix}, \\ B(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \begin{bmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\varepsilon_1} \\ \frac{B_3}{\varepsilon_2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

For $\varepsilon_2 > 0$ rewrite the system (1) in the equivalent matrix-operator form:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}) \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + B(\varepsilon_1, \varepsilon_2) u(t).$$

For simplicity further, where this does not lead to an ambiguous understanding, in the sequel the arguments for matrix functions $A_{i1}(e^{-ph}), i = \overline{1, 3}$, etc. will be omitted. We will use $\|A\|_\infty \triangleq \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

In [14] for the system (1.1) a decoupling transformation that decomposes TSPLTISD (1.1) to three independent subsystems of lower dimension (relatively faster, fast and slow variables) has been constructed.

For the decoupling of the TSPLTISD (1.1) next transformation (change of variables) has been introduced in [14]

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} = T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}) \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix},$$

$$\xi(t) \in R^{n_1}, \eta(t) \in R^{n_2}, \beta(t) \in R^{n_3}, t \in T \quad (1.4)$$

where

$$\begin{aligned} T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}) &= \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_1 H_3 - \varepsilon_2 H_2 \\ L_1 - \varepsilon_2 H_3 L_2 & I_n - \varepsilon_2 H_3 L_3 & -\varepsilon_2 H_3 \\ L_2 & L_3 & I_p \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_{11}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}) &= I_m - \varepsilon_1 H_1 (L_1 - \varepsilon_2 H_3 L_2) - \varepsilon_2 H_2 L_2, \\ \bar{A}_{12}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_1 H_3 L_3 - \varepsilon_2 H_2 L_3 - \varepsilon_1 H_1, \\ L_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}), H_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}), i &= \overline{1, 3} \end{aligned} \quad (1.5)$$

are matrix operators depending on the parameters

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ and satisfying the equations (with $\mu = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$):

$$\mu L \begin{bmatrix} \varepsilon_1 A_{11} & \varepsilon_1 A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - \mu L \begin{bmatrix} \varepsilon_1 A_{13} \\ A_{23} \end{bmatrix} L + (A_{31}, A_{32}) - A_{33} L = 0, \\ L(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = \left[L_2(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}), L_3(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) \right], \quad (1.6)$$

$$A_{31} - A_{33} L_2 + \varepsilon_2 L_2 (A_{11} - A_{13} L_2) + \mu L_3 (A_{21} - A_{23} L_2) = 0, \quad L_2(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) \in \mathbb{C}^{n_3 \times n_1}, \quad (1.7)$$

$$A_{32} - A_{33} L_3 + \varepsilon_2 L_2 (A_{12} - A_{13} L_3) + \mu L_3 (A_{22} - A_{23} L_3) = 0, \quad L_3(\varepsilon_2, \mu, e^{-ph}) \in \mathbb{C}^{n_3 \times n_2}, \quad (1.8)$$

$$A_{21} - (A_{22} - A_{23} L_3) L_1 - A_{23} L_2 + \varepsilon_1 L_1 (A_{11} - A_{13} L_2 - (A_{12} - A_{13} L_3) L_1) = 0, \\ L_1(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_1}, \quad (1.9)$$

$$A_{23} - H_3 A_{33} + \varepsilon_2 (L_1 A_{12} H_3 - H_3 L_2 A_{13} - L_1 A_{13} L_3 H_3) + \varepsilon_1 L_1 A_{13} + \mu (A_{22} H_3 - A_{23} L_3 H_3 - H_3 L_3 A_{23}) = 0, \quad (1.10)$$

$$A_{12} - H_1 (A_{22} - A_{23} L_3) - A_{13} L_3 + \varepsilon_1 (A_{11} - A_{13} L_2 - (A_{12} - A_{13} L_3) L_1) H_1 - \varepsilon_1 H_1 L_1 (A_{12} - A_{13} L_3) = 0, \quad (1.11)$$

$$A_{13} + \varepsilon_2 H_2 (A_{11} - A_{13} L_2 - A_{12} L_1 + A_{13} L_3 L_1) + \mu A_{12} H_3 - \mu A_{13} L_3 H_3 - H_2 (A_{33} + \varepsilon_2 L_2 A_{13} + \mu L_3 A_{23}) = 0, \\ H_3(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_3}, \\ H_1(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}, \\ H_2(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_3}. \quad (1.12)$$

The matrix operators

$$L_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}), H_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e^{-ph}), i = \overline{1, 3}$$

used in this transformation satisfy the algebraic equations of Riccati and Sylvester.

This article, focuses on deriving the boundaries of the values of small parameters, for which approximations of the (1.6)–(1.12) solutions are valid.

2 Measure of the Reliability of the Asymptotic Approximations

To prove the boundaries of the values of small parameters let us note,

$$A^{12}(\varepsilon_1, e^{-ph}) \triangleq \begin{bmatrix} \varepsilon_1 A_{11}(e^{-ph}) & \varepsilon_1 A_{12} \\ A_{21}(e^{-ph}) & A_{22} \end{bmatrix}, \\ A^{13}(\varepsilon_1, e^{-ph}) \triangleq \begin{bmatrix} \varepsilon_1 A_{13}(e^{-ph}) \\ A_{23}(e^{-ph}) \end{bmatrix}$$

and rewrite (1.6) as

$$\mu L A^{12}(\varepsilon_1, e^{-ph}) -$$

$$- \mu L A^{13}(\varepsilon_1, e^{-ph}) L + (A_{31}, A_{32}) = A_{33} L. \quad (2.1)$$

Lemma 2.1. Suppose that $\det A_{33} \neq 0$,

$$\det [A_{22} - A_{23} L_3^0] \neq 0.$$

Then for all $\mu \in [0, \mu^*)$ such that

$$\mu^* = \frac{1}{\|A_{33}^{-1}\| (a + bd + 2(abd)^{1/2})}, \quad (2.2)$$

where $a \triangleq \|A^{12}(1, e^{-ph}) - A^{13} L^0(e^{-ph})\|$, $b \triangleq \|A^{13}(1)\|$,

$$d \triangleq \|L^0(e^{-ph})\|, \quad b(\varepsilon_1) \triangleq \|A^{13}(\varepsilon_1)\|,$$

$$a(\varepsilon_1) \triangleq \|A^{12}(\varepsilon_1, e^{-ph}) - A^{13}(\varepsilon_1, e^{-ph}) L^0(e^{-ph})\|,$$

there are unique continuous functions depending on μ, ε_1 ,

$$L(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = [L_2(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}), L_3(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph})],$$

satisfying the equations (1.6)–(1.8), that could be represented in asymptotic series form:

$$L(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^M \mu^m L^m(\varepsilon_1, e^{-ph}) + O(\mu^{M+1}), \quad (2.3)$$

$$L_i(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^M \mu^m L_i^m(\varepsilon_1, e^{-ph}) + O(\mu^{M+1}), \quad (2.4)$$

$$L_i^m(\varepsilon_1, e^{-ph}) = \sum_{n=0}^m \varepsilon_1^n L_i^{nm}(\varepsilon_1, e^{-ph}), \quad i = 2, 3$$

where the terms $L^m(\varepsilon_1, e^{-ph})$, according to iterative schemes

$$L^m(\varepsilon_1, e^{-ph}) = \sum_{n=0}^m \varepsilon_1^n L^{nm}(\varepsilon_1, e^{-ph}), \quad (2.5)$$

where $L^0 = L^0 = A_{33}^{-1} [A_{31}, A_{32}]$,

$$L^{nm} = A_{33}^{-1} \left[L^{n-1, m-1} A_{1,12} + L^{n, m-1} A_{2,12} - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=n-m+j}^{n-1} L^{ij} A_{1,3} L^{n-i-1, m-j-1} - \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=n-m+j+1}^n L^{ij} A_{2,3} L^{n-i, m-j-1} \right], \quad m \geq 1, n \leq m, \quad (2.6)$$

$$A_{1,12}(e^{-ph}) = \begin{bmatrix} A_{11}(e^{-ph}) & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{2,12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}(e^{-ph}) & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{1,3} = \begin{bmatrix} A_{13} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{23} \end{bmatrix}.$$

Proof. The existence and uniqueness of the continuous functions

$$L(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = [L_2(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}), L_3(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph})]$$

in the form of (2.3), (2.4) is similar to that is discussed in [9].

The iterative schemes (2.4), (2.6) and representation (2.5) can be proven by substituting (2.3) and (2.5) into the equations (2.1) and comparing the coefficients of equal powers of μ of the resulting equations.

Let us prove the assessment (2.2).

Denoting

$$\begin{aligned} L^0(\varepsilon_1, e^{-ph}) &\triangleq L(\varepsilon_1, 0, e^{-ph}) = \\ &= L^{00}(\varepsilon_1, e^{-ph}) = A_{33}^{-1} [A_{31}, A_{32}], \end{aligned}$$

introducing

$$D(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = L(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) - L^0(\varepsilon_1, e^{-ph})$$

and taking into account $A_{33}L^0(\varepsilon_1, e^{-ph}) = [A_{31}, A_{32}]$,

rewriting (2.1) as

$$\begin{aligned} D &= \mu A_{33}^{-1} [L^0(A^{12} - A^{13}L^0) + D(A^{12} - A^{13}L^0) - \\ &- L^0A^{13}D - DA^{13}D] \triangleq f(D(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph})). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Further similar as in [9] consider

$$\Gamma = \left\{ D(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) : \|D\| \leq \left(\frac{a(1)d}{b(1)} \right)^{1/2} \right\},$$

and taking into account the properties of the norm, it can be seen that,

$$a(\varepsilon_1) < a(1) = a, \quad b(\varepsilon_1) < b(1) = b. \quad (2.8)$$

Then taking into account (2.4), for $\varepsilon_1 \ll 1$ it can be shown that if the condition,

$$\|\mu A_{33}^{-1}\| \leq \frac{1}{a(1) + b(1)d + 2(a(1)b(1)d)^{1/2}}$$

is satisfied then, $\|f(D(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}))\| \leq \left(\frac{a(1)d}{b(1)} \right)^{1/2}$ and

for any $D, \tilde{D} \in \Gamma$ under the condition

$$\|f(D) - f(\tilde{D})\| \leq \|D - \tilde{D}\|,$$

i. e. $f(D)$ is contraction mapping.

By the fixed point theorem, the equation (2.7) has a unique solution in Γ , that can be a successive

approximation starting with any $D^0 \leq \left(\frac{ad}{b} \right)^{1/2}$ if,

$$\mu < \frac{1}{\|A_{33}^{-1}\| (a + bd + 2(abd)^{1/2})}. \quad \square$$

Lemma 2.2. Suppose that $\det A_{33} \neq 0$,

$\det [A_{22} - A_{23}L_3^0] \neq 0$, $\mu < \varepsilon_1$, $\mu \in [0, \mu^*)$, μ^* satisfies (2.1). Then for all $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon_1^*)$ such that

$$\varepsilon_1^* = \frac{1}{\|[A_{22} - A_{23}L_3]^{-1}\| (a + bl + 2\sqrt{(k + al)b})}, \quad (2.9)$$

where $l \triangleq \|L_1^0\|$ and a, b, k are any non-negative numbers satisfying $b \geq \tilde{b} \triangleq \|A_{13}L_3 - A_{12}\|$,

$$a \geq \tilde{a} \triangleq \|A_{11} + A_{13}L_3L_1^0 - A_{13}L_2 - A_{12}L_1^0\|,$$

$k \geq \tilde{k} \triangleq \|A_{23} \frac{1}{\mu} (D_2 - D_3L_1^0)\|$, there are unique continuous functions depending on μ , ε_1 ,

$L_1(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph})$, satisfying the equation (1.8), that could be represented in an asymptotic series form:

$$L_1(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_1^n L_1^n(\mu, e^{-ph}) + O(\varepsilon_1^{N+1}), \quad (2.10)$$

$$L_1^n(\mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m L_1^{nm}(e^{-ph}),$$

where the terms, $L_1^{nm}(e^{-ph})$ of the asymptotic series can be found according to iterative schemes (2.11).

$$\begin{aligned} L_1^{mn}(e^{-ph}) &= (A_{22} - A_{23}L_3^{00})^{-1} \times \\ &\times \left(L_1^{n-1,m}A_{11} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m L_1^{j-1,k} \times \right. \\ &\times \left(A_{12}L_1^{n-j,m-k} - A_{13} \sum_{r=0}^n \sum_{s=r}^m L_3^{r-j,s-k} L_1^{n-r-j,m-s-k} \right) + \\ &+ A_{23} \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^m L_3^{jk} L_1^{n-j,m-k} - A_{23}L_2^{mn} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m-n} L_1^{j-1,k} A_{13}L_2^{n-j,m-k} \Big), \quad m > 0, \quad n > 0; \end{aligned}$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} L_1^{00}(e^{-ph}) &= (A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32})^{-1} (A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}), \\ L_1^{mn}(e^{-ph}) &= 0, \quad n < 0 \vee m < 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Proof. The existence and uniqueness of the continuous functions $L_1(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph})$ in the form of (2.10), (2.11) are similar to that is discussed in [9].

The iterative schemes (2.10), (2.11) and the representation in (2.10) can be proven by substituting (2.10) into the equations (1.9) and comparing the coefficients of equal powers of μ, ε_1 of the resulting equations.

Let us prove the assessment (2.9).

Introducing

$$D_i(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = L_i(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) - L_i^{00}(e^{-ph}), \quad i = 1, 2, 3$$

and taking into account

$$L_1^{00}(e^{-ph}) = [A_{22} - A_{23}L_3^{00}]^{-1} [A_{21} - A_{23}L_2^{00}],$$

rewrite (1.9) as

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_1 [A_{22} - A_{23}L_3]^{-1} \left[-\frac{\mu}{\varepsilon_1} A_{23} (\bar{D}_2 - \bar{D}_3L_1^{00}) + \right. \\ &+ L_1^{00} (A_{11} - A_{13}L_2) - L_1^{00} (A_{12} - A_{13}L_3) L_1^{00} - \\ &- L_1^{00} (A_{12} - A_{13}L_3) D_1 + \\ &+ D_1 ((A_{11} - A_{13}L_2) - (A_{12} - A_{13}L_3) L_1^{00}) - \\ &- D_1 (A_{12} - A_{13}L_3) D_1 \Big] = \\ &\triangleq f_1(D_1(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph})), \quad \bar{D}_i = \frac{1}{\mu} D_i, \quad i = 2, 3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Note that due to (2.7) for $\mu < \varepsilon_1$, $\bar{D}_i$, $i = 2, 3$, are bounded as $\mu \rightarrow 0$.

Let $\Gamma_1 = \left\{ D_1(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) : \|D_1\| \leq \left(\frac{k+al}{b} \right)^{1/2} \right\}$, then

for $D_1 \in \Gamma_1$ from (2.13) under condition $\frac{\mu}{\varepsilon_1} < 1$ we

can derive

$$\|f_1(D_1)\| \leq \varepsilon_1 \left\| [A_{22} - A_{23}L_3]^{-1} \right\| \times \\ \times \left[a + bl + 2\sqrt{(k+al)b} \right] \left(\frac{k+al}{b} \right)^{1/2}.$$

So, if the condition

$$\varepsilon_1 \leq \frac{1}{\left\| [A_{22} - A_{23}L_3]^{-1} \right\| \left[a + bl + 2\sqrt{(k+al)b} \right]} \quad (2.14)$$

is satisfied and $D_1 \in \Gamma_1$ then $\|f_1(D_1)\| \leq \left(\frac{k+al}{b} \right)^{1/2}$

i. e. $f(D_1) \in \Gamma_1$.

Let $D_1, \tilde{D}_1 \in \Gamma_1$. Under the condition (2.9):

$$\|f_1(D_1) - f_1(\tilde{D}_1)\| = \varepsilon_1 \left\| [A_{22} - A_{23}L_3]^{-1} \right\| \times \\ \times \left\| (D_1 - \tilde{D}_1) \left((A_{11} - A_{13}L_2) - (A_{12} - A_{13}L_3)L_1^{00} \right) - \right. \\ \left. - L_1^{00} (A_{12} - A_{13}L_3) (D_1 - \tilde{D}_1) - \right. \\ \left. - (D_1 - \tilde{D}_1) (A_{12} - A_{13}L_3) D_1 + \right. \\ \left. + \tilde{D}_1 (A_{12} - A_{13}L_3) (D_1 - \tilde{D}_1) \right\| \leq \\ \leq \varepsilon_1 \left\| [A_{22} - A_{23}L_3]^{-1} \right\| \|D_1 - \tilde{D}_1\| \times \\ \times \left\| (A_{11} - A_{13}L_2) - (A_{12} - A_{13}L_3)L_1^{00} - L_1^{00} (A_{12} - A_{13}L_3) - \right. \\ \left. - (A_{12} - A_{13}L_3) D_1 + \tilde{D}_1 (A_{12} - A_{13}L_3) \right\| \leq \\ \leq \varepsilon_1 \left\| [A_{22} - A_{23}L_3]^{-1} \right\| \|D_1 - \tilde{D}_1\| \times \\ \times (a + bl + 2\sqrt{(k+al)b}) \leq \|D_1 - \tilde{D}_1\|,$$

i. e., $f_1(D_1)$ is a contraction mapping.

By the fixed point theorem, the equation (2.13) has a unique solution in Γ_1 , that can be a successive

approximation starting with any $D_1^0 \leq \left(\frac{k+al}{b} \right)^{1/2}$ if

$$\varepsilon_1 \leq \frac{1}{\left\| [A_{22} - A_{23}L_3]^{-1} \right\| \left[a + bl + 2\sqrt{(k+al)b} \right]}. \quad \square$$

Let matrix operators $H_3^{nm}(e^{-ph})$, $H_2^{nm}(e^{-ph})$, $H_1^{nm}(e^{-ph})$ be found according to the following iterative scheme:

$$H_3^{mn}(e^{-ph}) = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m L_1^{j-1,k-1} \left(A_{12} H_3^{n-j,m-k} - \right. \right. \\ \left. \left. - A_{13} \sum_{r=0}^n \sum_{s=r}^m L_3^{r-j,s-k} H_3^{n-r-j,m-s-k} \right) - \right.$$

$$- A_{23} \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^m L_3^{j,k-1} H_3^{n-j,m-k} + A_{22} H_3^{n,m-1} - \\ \left. - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m-n} H_3^{j-1,k-1} L_2^{n-j,m-k} A_{13} + \right. \quad (2.15)$$

$$\left. + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m-n} H_3^{j,k-1} L_3^{n-j,m-k} A_{23} + L_1^{n-1,m} A_{13} \right) A_{33}^{-1},$$

$m > 0, n > 0$,

with initial conditions

$$H_3^{00}(e^{-ph}) = A_{22} A_{33}^{-1},$$

$$H_3^{0,m}(e^{-ph}) =$$

$$= \left[A_{22} H_3^{0,m-1} - \sum_{k=1}^m L_3^{0,k-1} H_3^{0,m-k} + \right.$$

$$\left. + A_{23} \sum_{k=1}^{m-n} L_3^{0,k-1} H_3^{0,m-k} \right] A_{33}^{-1},$$

$$H_3^{n,0}(e^{-ph}) = L_1^{n-1,0} A_{13} A_{33}^{-1} \quad (2.16)$$

$$H_1^{mn}(e^{-ph}) =$$

$$= \left(A_{11} H_1^{n-1,m} - A_{13} \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^m \left\{ L_2^{j-1,k} H_1^{n-j,m-k} - \right. \right. \quad (2.17)$$

$$\left. - L_3^{j-1,k} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m L_1^{r-j,s-k} H_1^{n-r-j,m-s-k} \right\} -$$

$$- \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m (A_{12} L_1^{j-1,k} H_1^{n-j,m-k} + H_1^{j-1,k} L_1^{n-j,m-k} A_{12}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m-n} H_1^{j-1,k} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^{m-n} L_1^{r-j,s-k} A_{13} L_3^{n-r-j,m-s-k} +$$

$$+ \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m-n} H_1^{j,k} A_{23} L_3^{n-j,m-k} - A_{13} L_3^{nm} \Big) (A_{22} - A_{23} L_3^{00})^{-1},$$

$m > 0, n > 0$,

with initial conditions

$$H_1^{00}(e^{-ph}) = [A_{12} - A_{13} A_{33}^{-1} A_{32}] [A_{22} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{32}]^{-1},$$

$$H_2^{mn}(e^{-ph}) =$$

$$= \left(A_{11} H_2^{n-1,m-1} - A_{13} \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^m L_2^{j-1,k-1} H_2^{n-j,m-k} - \right.$$

$$- A_{12} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m L_1^{j-1,k-1} H_2^{n-j,m-k} + A_{12} H_3^{n,m-1} +$$

$$+ A_{13} \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^m L_3^{j-1,k-1} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m L_1^{r-j,s-k} H_1^{n-r-j,m-s-k} - \quad (2.18)$$

$$- A_{13} \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^m L_3^{j,k-1} H_3^{n-j,m-k} -$$

$$- \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m-n} H_2^{j-1,k-1} L_3^{n-j,m-k} A_{23} -$$

$$- \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^{m-n} H_2^{j-1,k-1} L_2^{n-j,m-k} A_{13} \Big) A_{33}^{-1}, \quad m > 0, n > 0,$$

with initial conditions,

$$H_2^{00}(e^{-ph}) = A_{13} A_{33}^{-1},$$

$$H_2^{n,0}(e^{-ph}) = 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.19)$$

Considering the results of Lemma 2.1 and Lemma 2.2, and the linearity of (1.10), (1.11), (1.12) with respect to $H_1(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}), H_2(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}), H_3(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph})$ it is possible to obtain the following Corollary.

Corollary 2.1. *Let the assumptions of Lemmas 2.1 and 2.2 hold. The approximations,*

$$H_3(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_1^n \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m H_3^{nm}(e^{-ph}) + O(\varepsilon_1^{N+1}), \quad (2.20)$$

$$H_1(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_1^n \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m H_1^{nm}(e^{-ph}) + O(\varepsilon_1^{N+1}), \quad (2.21)$$

$$H_2(\varepsilon_1, \mu, e^{-ph}) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_1^n \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m H_2^{nm}(e^{-ph}) + O(\varepsilon_1^{N+1}), \quad (2.22)$$

where the terms, $H_3^{nm}(e^{-ph}), H_2^{nm}(e^{-ph}), H_1^{nm}(e^{-ph})$ of the asymptotic series can be found according to iterative schemes (2.20)–(2.22) are valid for all $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon_1^*], \mu \in [0, \mu^*]$ respectively such that μ^* and ε_1^* are satisfying (2.2) and (2.9) correspondingly.

3 Results and Verifications

An illustrative example of TSPLTISD is considered for the application and the verification of the obtained results. Initially the system is solved using a standard tool with numerical approaches to obtain the exact subsystems for the considered TSPLTISD, on the MATLAB Simulink platform and then the obtained results are modeled so that they can be compared with the exact subsystems obtained.

Example. Let's consider an illustrative example

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) - y(t) + u(t), \\ \varepsilon_1 \dot{y}(t) &= -x(t-1) - y(t), \\ \varepsilon_2 \dot{z}(t) &= -x(t-1) - z(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}^1,$$

with initial conditions:

$$\begin{aligned} x(0) &= \varphi(0) = 0.5, y(0) = 2, \\ z(0) &= 1, x(\theta) = \varphi(\theta) = 1, \theta \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Considering the system (3.1) parameters in the form (1.2) can be denoted as:

$$\begin{aligned} h &= 1, n_1 = n_2 = n_3 = r = 1, \\ A_{11,0} &= -1, A_{11,1} = 0, A_{12} = -1, A_{13} = 0, B_1 = 1, \\ A_{21,0} &= 0, A_{21,1} = -1, A_{22} = -1, A_{23} = 0, B_2 = 0, \\ A_{31,0} &= 0, A_{31,1} = -1, A_{32} = 0, A_{33} = -1, B_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Note that $\det A_{33} \neq 0$,

$$\det [A_{22} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{32}] = -1 \neq 0,$$

so, according to Lemmas 2.1, 2.2 and the Corollary, considered Singularly Perturbed System (3.1) can be asymptotically decomposed with the use of the introduced approach. Matrix operator equations similar to (1.7)–(1.12) for (3.1) have the form (with $\lambda = e^{-ph}$):

$$L_2 - \varepsilon_2 L_2 - \lambda - \mu L_3 \lambda = 0, \quad (3.3)$$

$$L_3 - \varepsilon_2 L_2 - \mu L_3 = 0, \quad (3.4)$$

$$L_1 - \lambda + \varepsilon_1 L_1 (L_1 - 1) = 0, \quad (3.5)$$

$$H_3 - \varepsilon_2 L_1 H_3 - \mu H_3 = 0, \quad (3.6)$$

$$H_1 - 1 + \varepsilon_1 (L_1 - 1) H_1 + \varepsilon_1 H_1 L_1 = 0, \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_2 H_2 (L_1 - 1) - \mu H_3 + H_2 = 0. \quad (3.8)$$

The first terms of expansions (2.3), (2.10) and (2.20)–(2.22) are,

$$L_1^{00} = \lambda, L_2^{00} = \lambda, L_3^{00} = 0, H_1^{00} = 1, H_2^{00} = 0, H_3^{00} = 0.$$

Evaluating (2.2), (2.9) using the induced norm $\|A\|_{\infty} \triangleq \max_i \sum_j |a_{ij}|$, $\|e^{-ph}\| = 1$, the approximations

(2.3), (2.10) and (2.15)–(2.17) are valid for all $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon_1^*], \mu \in [0, \mu^*], \varepsilon_1^* = \frac{1}{2}, \mu^* = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$.

The degenerate system for (3.1) has the form,

$$\dot{x}_s(t) = -x(t) + x(t-h) + u(t),$$

$$x_s(0) = x_0 = 0.5, x_s(\theta) = \varphi(\theta) = 1, \theta \in [-1, 0].$$

ε_2 – Boundary Layer System has the form

$$\frac{d\hat{z}(\tau_{\varepsilon_2})}{d\tau_{\varepsilon_2}} = -\hat{z}(\tau_{\varepsilon_2}), \quad \hat{z}(0) = 2,$$

$$\text{where } \hat{z}(t) = z(t) + 1, \tau_{\varepsilon_2} = \frac{t}{\varepsilon_2}, \frac{dx}{d\tau_{\varepsilon_2}} = 0, \frac{dy}{d\tau_{\varepsilon_2}} = 0,$$

$$x = 0.5, y = 2.$$

ε_1 – Boundary Layer System has the form

$$\frac{d\hat{y}(\tau_{\varepsilon_1})}{d\tau_{\varepsilon_1}} = -\hat{y}(\tau_{\varepsilon_1}), \quad \hat{y}(0) = 3,$$

$$\text{where } \hat{y}(t) = y(t) + 1, \frac{dx}{d\tau_{\varepsilon_1}} = 0, x = 0.5.$$

Similar to (9), (10), (14), (15), (19) and (20) of [14] and the initial iterations of matrix operators of asymptotic approximations of a decoupled system as discussed in [15], for (3.1) it has the form,

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon}^{00}(e^{-ph}) &= -1 + e^{-ph}, A_{\eta}^{00} = -1, A_{\beta}^{00} = -1, \\ B_{\varepsilon}^{00} &= -1, B_{\eta}^{00} = 0, B_{\beta}^{00} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

The 1st order approximation of the split system (3.1) has the form:

$$\dot{\xi}^0(t) = -\xi^0(t) + \xi^0(t-h) + u(t), \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_1 \dot{\eta}^0(t) = -\eta^0(t), \quad \varepsilon_2 \dot{\beta}^0(t) = -\beta^0(t),$$

with

$$\xi^0(0) = x_0 = 0,5, \quad \xi^0(\theta) = \varphi(\theta) = 1, \quad \theta < 0,$$

$$\eta^0(0) = 3, \quad \beta^0(0) = 2.$$

The comparison of the exact solution of (3.1) under $u(t) \equiv 0$, $\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,001$ and under $\varepsilon_1 = 0,1$, $\varepsilon_2 = 0,001$ with the solutions obtained on the basis of the 1st order approximations.

$$x(t) = \xi^0(t) + O(\mu),$$

$$y(t) = \eta^0(t) - L_1^{00} \xi^0(t) + O(\mu) =$$

$$= \eta^0(t) - \xi^0(t-h) + O(\mu),$$

$$z(t) = \beta^0(t) + (L_3^{00} L_1^{00} - L_2^{00}) \xi^0(t) - L_3^{00} \eta^0(t) + O(\mu) =$$

$$= \beta^0(t) - \xi^0(t-h) + O(\mu),$$

The simulation results obtained in the MATLAB Simulink has been presented in the figures 3.1–3.6.

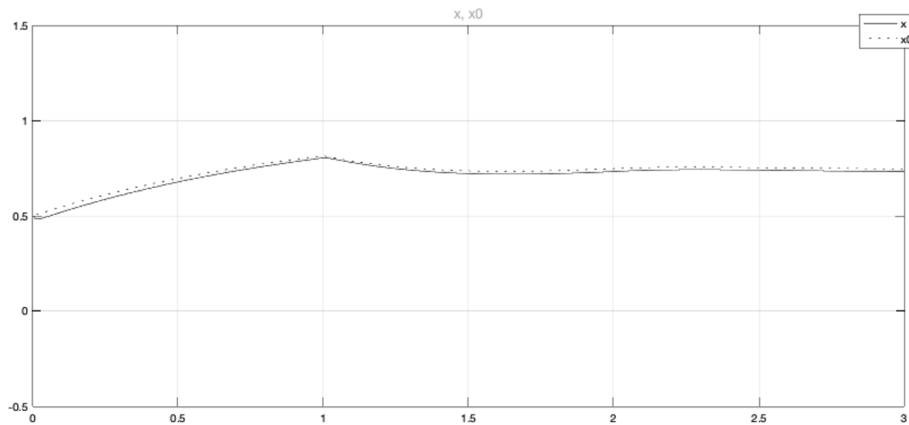


Figure 3.1 – x -component of exact (thick solid) and its asymptotic approximations of the 1st order (dotted line) under $\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,001$

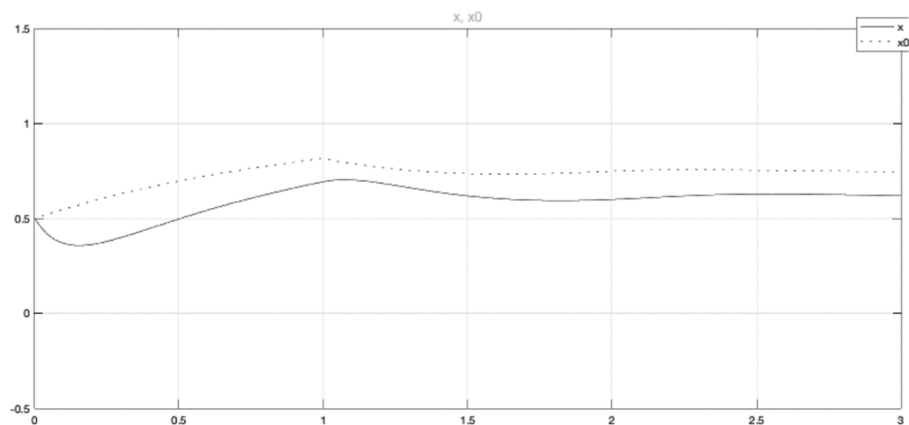


Figure 3.2 – x -component of exact (thick solid) and its asymptotic approximations of the 1st order (dotted line) under $\varepsilon_1 = 0,1$, $\varepsilon_2 = 0,001$

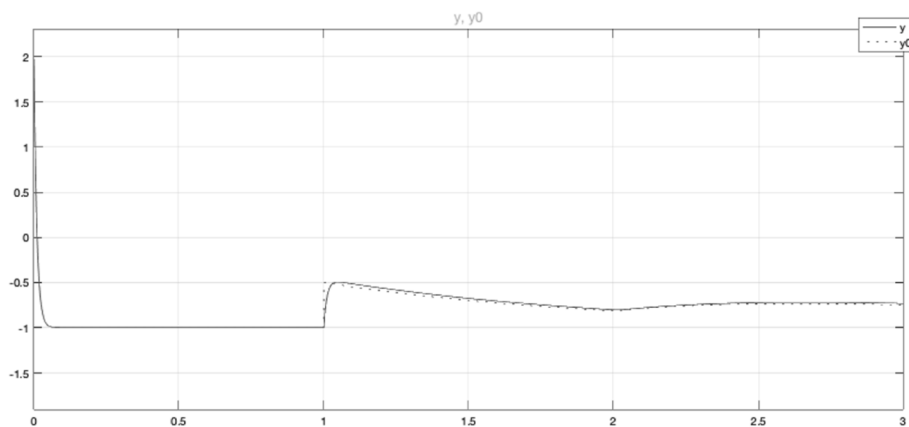


Figure 3.3 – y -component of exact (thick solid) and its asymptotic approximations of the 1st order (dotted line) under $\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,001$

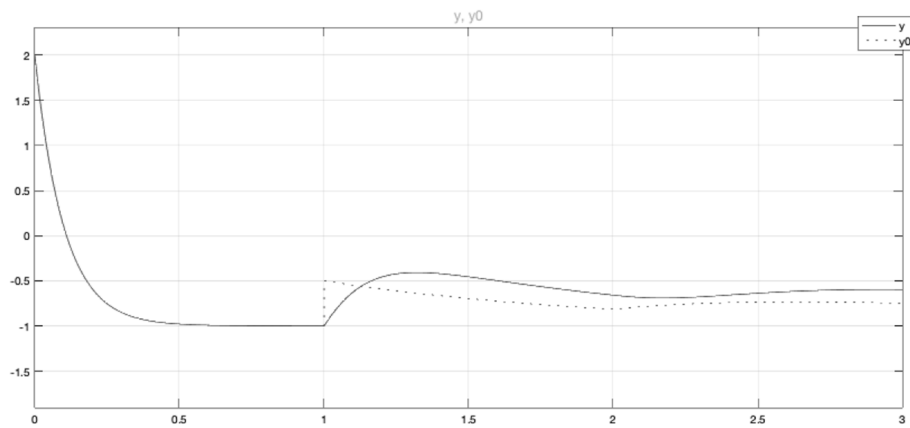


Figure 3.4 – y -component of exact (thick solid) and its asymptotic approximations of the 1st order (dotted line) under $\varepsilon_1 = 0,1$, $\varepsilon_2 = 0,001$

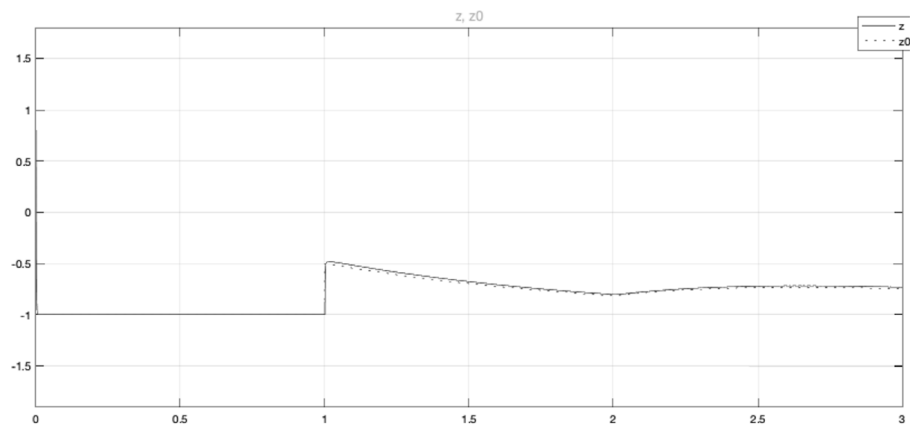


Figure 3.5 – z -component of exact (thick solid) and its asymptotic approximations of the 1st order (dotted line) under $\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,001$

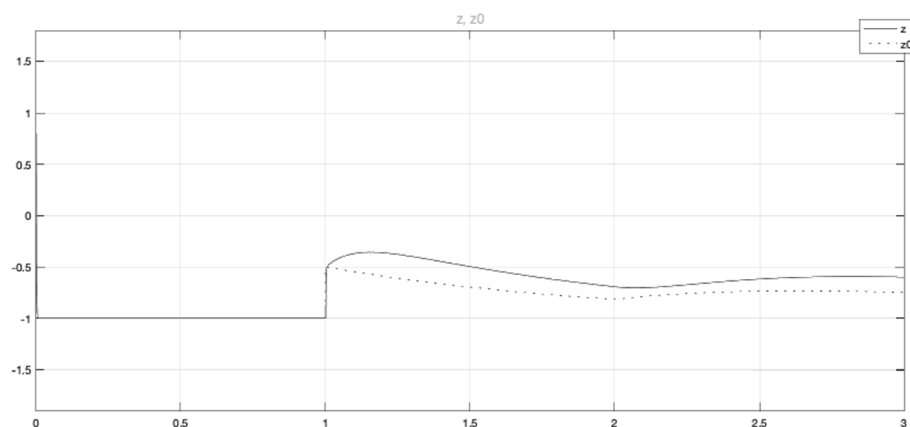


Figure 3.6 – z -component of exact (thick solid) and its asymptotic approximations of the 1st order (dotted line) under $\varepsilon_1 = 0,1$, $\varepsilon_2 = 0,001$

Conclusion

The asymptotic approximation discussed in this paper completely splits the Three-time-scale Singularly Perturbed Systems with multiple commensurate delays in the slow state variables (1.1), into their subsystems according to the tempo to any degree of accuracy in powers of the small parameters present in the system.

L and H need to satisfy the algebraic matrix equations (1.7)–(1.12) for the complete decoupling of the TSPLTISD into its subsystems respectively. Considering the fact that $f(D)$ is contractions mapping subjected to the constructed bounds of small parameters μ, ε_1 , $f(D)$ has a unique solution which can be successively approximated starting with D_0 .

Further by considering the concepts of the fixed point theorem for (2.7) and (2.13) and fact that $D = L - L_0$ and $D = H - H_0$ it can be concluded that the asymptotic approximations for the L and H matrixes hold, small parameter of the system subjected to the boundaries as defined by Lemma 2.1, 2.2, and Corollary 2.1. Thus, by Lemma 2.1, 2.2 and Corollary 2.1 on the reliability of the asymptotic approximations for the L, H matrixes, it can be considered that when the boundary requirements for the small parameters are met asymptotic approximations (2.3), (2.10) and (2.20)–(2.22) to be valid, and hence the subsystems (relatively faster, fast and slow variables) for the generalized TSPLTISD can be constructed in the form of asymptotic approximations.

Secondly, a sample TSPLTISD that satisfies the reliability boundaries for small parameters as stated in (2.7) and (2.13) is considered. With reference to the comparison results of the exact subsystems and the constructed 0th degree asymptotic approximations for subsystems in (3.1) via Figures, 3.1–3.6 it can be concluded that asymptotic approximations are valid and accurately represents the subsystems in terms of the qualitative behavior of the subsystems.

Note that with reference to the simulation results shown in Figures 3.1–3.6 it can be concluded that, as the values of small parameters decrease, the accuracy of the approximation increases. As a rule, for the practice purposes, obtaining 0–1 approximations are sufficient.

But 1st order approximation for the considered case (3.1) is not an accurate representation of the exact subsystem. And 2nd order approximation and higher order approximations for the subsystems can be constructed that construct the subsystems more accurately. Based on (1.4), (1.5) and asymptotic approximations of L, H , higher approximations of system solutions could be obtained.

The use of the constructed asymptotic approximations of the decoupling transformation allows one to reduce the solution of a number of stability, control, and estimation problems for large systems with singular perturbations and delays to systems of lower dimension that are independent or regularly dependent on a small parameter. The decomposition algorithm can be implemented in software for computer algebra systems, the obtained results can be used to solve problems of analysis and synthesis of three time-scale linear stationary singularly perturbed systems with delay.

REFERENCES

1. Dmitriev, M.G. Singular perturbations in control problems. / M.G. Dmitriev, G.A. Kurina // Autom. Remote Control. – 2006. – Vol 67, № 1. P. 1–43. – DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117906010012>
2. Vasil'eva, A.B. Singular perturbations in optimal control problems / A.B. Vasil'eva, M.G. Dmitriev //

J Math Sci. – 1986. – Vol. 34, № 3. – P.1579–1629. – DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01262406>

3. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: An overview 2002–2012 / Y. Zhang, D.S. Naidu, C. Cai, Y. Zou // Int. J. Inf. Syst. Sci. – 2014. – Vol. 9, № 1. – P. 1–36.

4. Chang, K. Singular perturbations of a general boundary value problem / K. Chang // SIAM J. Math. Anal. – 1972. – № 3. – P. 520–526.

5. Naidu, D.S. On-three time scale analysis / D.S. Naidu, R. Ravinder // 24th IEEE Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale, 11–13 Dec. 1985. – Fort Lauderdale, FL, USA, 1985. – P. 81–85. – DOI: [6.1109/CDC.1985.268520](https://doi.org/10.1109/CDC.1985.268520)

6. Yang, X. A Generalization of Chang Transformation for Linear Time-Varying Systems / X. Yang, J.J. Zhu // In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Atlanta, GA, USA, 15–17 December 2010. – P. 6863–6869.

7. Ladde, G.S. Diagonalization and stability of multi-time-scale singularly perturbed linear systems / G.S. Ladde, S.G. Rajalakshmi // Applied Mathematics and Computation. – 1985. – Vol. 16, № 2. – P. 115–140. – DOI: [https://doi.org/10.1016/0096-3003\(85\)90003-7](https://doi.org/10.1016/0096-3003(85)90003-7)

8. Kokotovic, P. Riccati equation for block-diagonalization of ill-conditioned systems / P. Kokotovic // IEEE Transactions on Automatic Control, 1975. – Vol. 20, № 6. – P. 812–814. – DOI: [10.1109/TAC.1975.1101089](https://doi.org/10.1109/TAC.1975.1101089)

9. Kokotovic, P.V. Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design / P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, O'Reilly. – Academic Press: London, UK, 1986. – 371 p.

10. Tsekhan, O.B. Decoupling transformation for linear stationary singularly-perturbed system with delay and its applications to analysis and control of spectrum / O.B. Tsekhan // Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylchal'naia Tekhnika i Kiravanne – 2017. – Vol 7, № 3. – P. 50–61 (in Russian).

11. Tsekhan, O.B. Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation / O.B. Tsekhan // Axioms. – 2019. – Vol. 8, № 71. – P. 1–19. – DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms8020071>

12. Naligama, C.A. On decoupling transformation for time-invariant singularly perturbed systems with delay / C.A. Naligama, O.B. Tsekhan // Modern methods of the theory of boundary value problems: materials of the International Conference: Voronezh Spring Mathematical School: “Pontryagin Readings – XXXI”, Voronezh, 3–9 May, 2020: ANO “Nauka-Unipress”, 2020. – P. 232.

13. Kadalbajoo, Mohan K. A Survey of Numerical Techniques for Solving Singularly Perturbed Ordinary Differential Equations / Mohan K. Kadalbajoo // Applied Mathematics and Computation. –

2002. – Vol. 130, № 2–3. – P. 457–510. – DOI: 10.1016/s0096-3003(01)00112-6

14. *Naligama, C.A.* Decoupling of Three-Time-Scale Linear Time-Invariant Singularly Perturbed Control Systems with State Delay Based on a Non-degenerate Transformation / C.A. Naligama, O.B. Tsekhan // *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control.* – 2021. – Vol. 11, № 3. – P. 27–36. – EDN: DRSWMW

15. *Naligama, C.A.* On the asymptotic approximation of decoupling transformation for three time-scale linear time-invariant singularly perturbed system with delay / C.A. Naligama, O.B. Tsekhan // *International Mathematical Conference “Seventh Bogdanov Readings on Differential Equations” Republic of Belarus, Minsk June 1–4, 2021.* – P. 160–163.

16. *Magalhaes, L.T.* Exponential estimates for singularly-perturbed linear functional differential equations / L.T. Magalhaes // *J. Math. Anal. Appl.* – 1984. – № 103. – P. 443–460.

The work of Olga Tsekhan was partially supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus under the State program of scientific research “Convergence-2025”: task 1.2.04.

Поступила в редакцию 03.12.2021.

Информация об авторах

Налигама Чамила Анурадха – аспирант

Цехан Ольга Борисовна – к.ф.-м.н., доцент

О ПОЛИОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ПЕРВОГО ТИПА

А.П. Старовойтов, А.Д. Ковалькова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON POLYORTHOGONAL FUNCTIONS OF THE FIRST TYPE

A.P. Starovoitov, A.D. Kovalkova

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В предгильбертовых функциональных пространствах, порождённых мерами $\mu_1, \dots, \mu_k$, описан процесс полиортогонализации произвольной линейно независимой системы функций $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}$, который позволяет для произвольного мультииндекса n ввести понятие n -ой полиортогональной функции. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых эта полиортогональная функция определяется однозначно, и описан её явный вид. Основная теорема является кратным аналогом теоремы Грама – Шмидта об ортогонализации.

Ключевые слова: линейно независимая система, предгильбертовы пространства, полиортогональные многочлены, совершенная система, ортогонализация Грама – Шмидта.

Для цитирования: Старовойтов, А.П. О полиортогональных функциях первого типа / А.П. Старовойтов, А.Д. Ковалькова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 94–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_94 – EDN: ZVSWTZ

Abstract. In pre-Hilbert function spaces generated by the measures $\mu_1, \dots, \mu_k$, the process of polyorthogonalization of an arbitrary linearly independent system of functions $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ is described, which allows us to introduce the concept of the n th polyorthogonal function for an arbitrary multi-index n . Necessary and sufficient conditions are found under which this polyorthogonal function is uniquely determined, and its explicit form is described. The main theorem is a multiple analogue of the Gram – Schmidt orthogonalization theorem.

Keywords: linearly independent system, Pre-Hilbert spaces, polyorthogonal polynomials, perfect system, Gram – Schmidt orthogonalization.

For citation: Starovoitov, A.P. On polyorthogonal functions of the first type / A.P. Starovoitov, A.D. Kovalkova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 94–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_94 (in Russian). – EDN: ZVSWTZ

Введение

Точно также, как появление ортогональных многочленов связано с исследованиями в теории аппроксимаций Паде марковских функций, полиортогональные многочлены естественным образом возникают в теории аппроксимаций Эрмита – Паде марковских функций (см., например, [1]). Для полиортогональных многочленов условия ортогональности задаются с помощью нескольких мер $\mu_1, \dots, \mu_k$, и при этом степень участия каждой меры определяется индивидуально весовым коэффициентом. Особое внимание вызывают те меры, для которых известные утверждения общей теории ортогональных многочленов справедливы и для полиортогональных многочленов. В этом направлении исследований получен ряд интересных и глубоких результатов [2]–[6]. В частности, для многих совершенных систем функций полиортогональные многочлены хорошо изучены [1] и нашли приложения в различных областях алгебры, анализа, теории функций, современной физики [7]–[14].

© Старовойтов А.П., Ковалькова А.Д., 2022

В данной работе дано обобщение понятия полиортогонального многочлена первого типа: вместо полиортогонализации первого типа линейно независимой системы функций $\{1, x, x^2, \dots\}$ [15] рассматривается полиортогонализация произвольной линейно независимой системы функций $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$ в предгильбертовых пространствах, порождённых мерами $\mu_1, \dots, \mu_k$. Основная теорема является обобщением теоремы Грама – Шмидта об ортогонализации [16], [17, гл. 4, § 1]. В ней описывается процесс полиортогонализации системы функций φ и устанавливается явный вид полиортогональных функций первого типа, полученных в результате указанной полиортогонализации. Классическая формула Грама – Шмидта для представления ортогонального многочлена [17, гл. 4, § 1] и формулы для представления полиортогональных многочленов первого типа, полученные в [15], вытекают из доказанной основной теоремы в качестве частных случаев.

1 Полиортогонализация первого типа

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_k$ – положительные борелевские меры на вещественной прямой, носителями которых являются отрезки $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ действительной прямой. Рассмотрим систему функций

$$\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\},$$

удовлетворяющую следующим естественным условиям. Считаем, что при всех $j = 1, \dots, k$ каждая функция измерима на Δ_j относительно меры μ_j . Предполагаем также, что система φ линейно независима на каждом из отрезков Δ_j и

$$\int_{\Delta_j} |\varphi_p(x)|^2 d\mu_j(x) < +\infty, j = 1, \dots, k; p = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

При выполнении условий (1.1) будем писать, что $\varphi \in L^2_\mu$, $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$. Обозначим через

$$(f, g)^j = \int_{\Delta_j} h(x)g(x)d\mu_j(x)$$

скалярное произведение функций $h(x)$ и $g(x)$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ_j .

Множество мультииндексов $n = (n_1, \dots, n_k)$, т. е. упорядоченных наборов k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}_+^k$. Порядком мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ назовём сумму $|n| := n_1 + \dots + n_k$.

Определение 1.1. Пусть $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс, а $\varphi \in L^2_\mu$. Функции

$$\psi_j(x) = \alpha_0^j \varphi_0(x) + \alpha_1^j \varphi_1(x) + \dots + \alpha_{n_j-1}^j \varphi_{n_j-1}(x),$$

$$j = 1, \dots, k,$$

все одновременно тождественно не равные нулю, будем называть n -ми полиортогональными функциями первого типа для набора мер μ , порожденными системой φ , если

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Delta_j} \psi_j(x) \varphi_v(x) d\mu_j(x) = 0, \quad (1.2)$$

$$v = 0, 1, \dots, |n| - 2.$$

В определении предполагается, что при $n_j = 0$, $\psi_j(x) \equiv 0$ и $|n| \neq 1$. Если $|n| = 1$, то у индекса n только одна компонента $n_{j_0} = 1$, остальные равны нулю. Тогда набор n -ых полиортогональных функций первого типа

$$\Psi = \{\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)\}$$

состоит из $\psi_{j_0}(x) \equiv \varphi_{j_0}(x)$ и $\psi_j(x) \equiv 0$ при $j \neq j_0$.

Если в этом определении положить $k = 1$, либо, что тоже самое, взять мультииндекс $n = (n_1, 0, \dots, 0)$, то, отождествляя меру μ_1 с μ , а компоненту n_1 с $n \in \mathbb{Z}_+^1$, придём к классическому определению. В этом случае полиортогональная функция первого типа

$$\psi_1(x) = \alpha_0^1 \varphi_0(x) + \dots + \alpha_{n-1}^1 \varphi_{n-1}(x)$$

является $(n-1)$ -ой ортогональной функцией и для неё справедлива формула Грама – Шмидта [17, гл. 3, § 1], [18]

$$\psi_1(x) = \left[\begin{array}{cccc} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{n-2}) & (\varphi_1, \varphi_{n-2}) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{n-1}(x) \end{array} \right] \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что коэффициент α_{n-1}^1 в представлении Грама – Шмидта функции $\psi_1(x)$ равен определителю Грама

$$G_{n-1} = \left[\begin{array}{cccc} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_{n-2}, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-2}, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{n-2}) & (\varphi_1, \varphi_{n-2}) & \dots & (\varphi_{n-2}, \varphi_{n-2}) \end{array} \right]$$

для системы функций $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-2}(x)\}$. Отметим [17, гл. 3, § 1], что определитель Грама G_{n-1} системы $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-2}(x)\}$ отличен от нуля только в том случае, когда эта система линейно независима на отрезке Δ .

Если $\varphi = \{1, x, x^2, \dots\}$, то для каждой меры μ_j можно определить функцию Маркова

$$f_j(z) = \int_{\Delta_j} \frac{d\mu_j(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_j, j = 1, \dots, k. \quad (1.4)$$

Её ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид

$$f_j(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s_p^j}{z^{i+1}},$$

где

$$s_p^j = (x^\alpha, x^\beta)^j = \int_{\Delta_j} x^p d\mu_j(x) (p = 0, 1, \dots)$$

– последовательность степенных моментов меры μ_j , а $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^1$, $\alpha + \beta = p$. В таком случае n -ые полиортогональные функции $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$ первого типа являются n -ми полиортогональными многочленами первого типа $A_1(x), \dots, A_k(x)$, а соотношения ортогональности (1.2) можно записать в стандартном виде [1]:

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Delta_j} A_j(x) x^v d\mu_j(x) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, |n| - 2.$$

Полиортогональные функции первого типа условиями (1.2) определяются с точностью до числового множителя: если $\Psi = \{\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)\}$ – набор n -ых полиортогональных функций первого типа для μ , то при $\lambda \neq 0$ набор

$$\lambda \Psi := \{\lambda \psi_1(x), \dots, \lambda \psi_k(x)\}$$

также состоит из n -ых полиортогональных функций первого типа для μ . На самом деле неединственность может носить и более существенный характер. Приведём пример, подтверждающий это.

Пример 1.1. Пусть $\varphi = \{1, x, x^2, \dots\}$, $k = 2$, $n = (2, 2)$, $d\mu_1(x) = dx$, $d\mu_2(x) = -dx$, где dx – мера Лебега, носитель которой $\Delta = [0, 1]$. Тогда

$$\psi_1(x) = a + bx, \quad \psi_2(x) = -a - bx,$$

где a и b – произвольные действительные числа не равные нулю одновременно.

Определение 1.2. Будем говорить, что n -ые полиортогональные функции $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$ первого типа однозначно определяются условиями (1.2), если для любых двух наборов таких функций

$$\Psi' = \{\psi'_1(x), \dots, \psi'_k(x)\},$$

$$\Psi'' = \{\psi''_1(x), \dots, \psi''_k(x)\}$$

найдётся $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\Psi'' \equiv \lambda \Psi'$ на всех отрезках Δ_j .

Актуальным является вопрос о том, каковы необходимые и достаточные условия на индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и системы

$$\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots\},$$

$$\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_k\},$$

при которых n -ые полиортогональные функции определяются условиями (1.2) однозначно. В случае $k = 1$ однозначность вытекает из линейной независимости системы φ [17, гл. 3, § 1]. Пример 1.1 показывает, что уже при $k = 2$ это не так. Далее будет установлено, что при сделанных предположениях n -ые полиортогональные функции первого типа всегда существуют, а однозначность их существования равносильна условию максимальности ранга матрицы, которую можно назвать кратным аналогом известной матрицы Грама [17, гл. 3, § 1].

2 Теорема о полиортогонализации

Далее считаем, что порядок мультииндекса $|n| \geq 2$. Рассмотрим ненулевой индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$. Для каждого $n_j \neq 0$ определим матрицу порядка $(|n| - 1) \times n_j$

$$G^j = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)^j & (\varphi_1, \varphi_0)^j & \dots & (\varphi_{n_j-1}, \varphi_0)^j \\ (\varphi_0, \varphi_1)^j & (\varphi_1, \varphi_1)^j & \dots & (\varphi_{n_j-1}, \varphi_1)^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{|n|-2})^j & (\varphi_1, \varphi_{|n|-2})^j & \dots & (\varphi_{n_j-1}, \varphi_{|n|-2})^j \end{pmatrix},$$

а после этого определим матрицу порядка $(|n| - 1) \times |n|$

$$G_n = [G^1 \quad G^2 \quad \dots \quad G^k].$$

В том случае, если $n_j = 0$, матрица G_n не содержит блок-матрицу G^j . Определим также

функциональные матрицы порядка $1 \times |n|$

$$U_j(x) = (00 \dots 0 \dots \varphi_0(x) \varphi_1(x) \dots \varphi_{n_j-1}(x) \dots 00 \dots 0)$$

и матрицу

$$U(x) = U_1(x) + \dots + U_k(x) = (\varphi_0(x) \dots \varphi_{n_1-1}(x) \dots \varphi_0(x) \dots \varphi_{n_k-1}(x)).$$

Если в матрице G_n добавить ещё одну строку, состоящую из элементов матрицы $U_j(z)$, то получим квадратную матрицу. Определитель полученной квадратной матрицы представим в виде

$$\det \begin{bmatrix} G_n \\ U_j(x) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & (\varphi_0, \varphi_0)^j & (\varphi_1, \varphi_0)^j & \dots & (\varphi_{n_j-1}, \varphi_0)^j & \dots \\ \dots & (\varphi_0, \varphi_1)^j & (\varphi_1, \varphi_1)^j & \dots & (\varphi_{n_j-1}, \varphi_1)^j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & (\varphi_0, \varphi_{|n|-2})^j & (\varphi_1, \varphi_{|n|-2})^j & \dots & (\varphi_{n_j-1}, \varphi_{|n|-2})^j & \dots \\ 0 \dots 0 & \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{n_j-1}(x) & 0 \dots 0 \end{vmatrix}.$$

Определение 2.1. Ненулевой индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ будем называть слабо нормальным для μ , если ранг матрицы G_n равен $|n| - 1$, т. е. является максимальным.

Так, в примере 1.1 индекс $n = (2, 2)$ не является слабо нормальным для рассматриваемых в этом примере мер μ_1, μ_2 , поскольку $\text{rang } G_n = 2$.

Определение 2.2. Набор (систему) мер $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ будем называть слабо совершенной, если любой ненулевой индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является слабо нормальным для μ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. Для ненулевого индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и системы мер $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ n -ые полиортогональные функции $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$ определяются условиями (1.2) однозначно тогда и только тогда, когда индекс n является слабо нормальным для μ , т. е. $\text{rang } G_n = |n| - 1$.

В том случае, если $\text{rang } G_n = |n| - 1$, при соответствующем выборе нормирующего множителя справедливы представления

$$\psi_j(x) = \det \begin{bmatrix} G_n \\ U_j(x) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть $n_j \neq 0$ и функции

$$\psi_j(x) = b_0^j \varphi_0(x) + \dots + b_{n_j-1}^j \varphi_{n_j-1}(x)$$

удовлетворяют условиям (1.2). По условию система $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\}$ линейно независима на каждом из отрезков Δ_j . Поэтому равносильная условиям (1.2) система линейных уравнений для нахождения неизвестных

коэффициентов $b_0^j, \dots, b_{n_j-1}^j$ функций $\psi_j(x)$ в матричной форме может быть записана в виде:

$$G_n \cdot b^T = \theta^T, \quad (2.2)$$

где $b = (b_0^1 b_1^1 \dots b_{n_1-1}^1 \dots b_0^k b_1^k \dots b_{n_k-1}^k)$ – матрица-строка порядка $1 \times |n|$, а θ – нулевая матрица-строка порядка $1 \times |n|$ (при $n_j = 0$ матрица b не содержит неизвестных $b_0^j, \dots, b_{n_j-1}^j$). В силу того, что система (2.2) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, из теоремы Кронекера – Капелли следует, что эта система имеет ненулевое решение, а множество всех её линейно независимых решений состоит только из одного фундаментального решения только тогда, когда $\text{rang } G_n = |n| - 1$. Все другие ненулевые решения получаются в результате умножения этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Поэтому первое утверждение теоремы 2.1 доказано.

Предположим теперь, что $\text{rang } G_n = |n| - 1$. Необходимо доказать, что функции $\psi_j(x)$, определённые равенствами (2.1), являются искомыми. Разлагая определитель в (2.1) по элементам последней строки, получим, что функция $\psi_j(x)$ представляется в виде

$$\psi_j(x) = \alpha_0^j \varphi_0(x) + \dots + \alpha_{n_j-1}^j \varphi_{n_j-1}(x),$$

и поскольку $\text{rang } G_n = |n| - 1$, то, по крайней мере, одна из этих функций тождественно не равна нулю. Остаётся проверить, что функции $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$, определённые равенствами (2.1), удовлетворяют условиям (1.2). Считая, что $n_j \neq 0$, при каждом j применим оператор интегрирования $J_j f := \int_{\Delta_j} f(x) d\mu_j(x)$ к последней строке определителя (2.1), предварительно умножив эту строку на функцию $\varphi_v(x)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Delta_j} \psi_j(x) \varphi_v(x) d\mu_j(x) = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)^1 & \dots & (\varphi_{n_1-1}, \varphi_0)^1 & \dots & (\varphi_0, \varphi_0)^k & \dots & (\varphi_{n_k-1}, \varphi_0)^k \\ (\varphi_0, \varphi_1)^1 & \dots & (\varphi_{n_1-1}, \varphi_1)^1 & \dots & (\varphi_0, \varphi_1)^k & \dots & (\varphi_{n_k-1}, \varphi_1)^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{|n|-2})^1 & \dots & (\varphi_{n_1-1}, \varphi_{|n|-2})^1 & \dots & (\varphi_0, \varphi_{|n|-2})^k & \dots & (\varphi_{n_k-1}, \varphi_{|n|-2})^k \\ (\varphi_0, \varphi_v)^1 & \dots & (\varphi_{n_1-1}, \varphi_v)^1 & \dots & (\varphi_0, \varphi_v)^k & \dots & (\varphi_{n_k-1}, \varphi_v)^k \end{vmatrix}.$$

Определитель в правой части последнего равенства при $v = 0, 1, \dots, |n| - 2$ имеет две одинаковые строки, поэтому он равен нулю. Следовательно условия (1.2) выполняются. $\square$

3 Замечания и следствия

Компонента n_j мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ может быть равной нулю. В этом случае, согласно

определению 1.1, соответствующая компонента $\psi_j(x)$ вектор-функции Ψ тождественно равна нулю. Из условий ортогональности (1.2) следует, что в этом случае мера $\mu_j(x)$ фактически не участвует в определении n -ых полиортогональных функций. Поэтому, если, например, $n = (n_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то, считая, что мера μ_1 тождественно совпадает с мерой μ , а компонента n_1 совпадает с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^1$, получим, что полиортогональная функция $\psi_1(x)$ является $(n-1)$ -ой ортогональной функцией и представление (2.1) в точности совпадает с формулой Грама – Шмидта (1.3).

Известно [1, стр. 158], что если носители мер μ_j не перекрываются (их общими точками могут быть только концы отрезков Δ_j), а $A_1(x), \dots, A_k(x)$ – полиортогональные многочлены первого типа, отвечающие мультииндексу $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$, то многочлен $A_j(x)$ имеет внутри отрезка Δ_j ровно $n_j - 1$ простых нулей. В этом случае система марковских функций (1.4) является совершенной. Это значит [1], что при любом ненулевом индексе $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ для всех $j = 1, \dots, k$ справедливы равенства $\deg A_j = n_j - 1$. Здесь предполагается, что $\deg A_j = -1$, тогда и только тогда, когда $A_j(x) \equiv 0$. Следующий пример показывает, что если носители мер перекрываются, то система (1.4), состоящая из марковских функций $\mathbf{f} = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$, уже может быть несовершенной.

Пример 3.1. Пусть $\varphi = \{1, x, x^2, \dots\}$, $k = 2$, $n = (1, 3)$,

$$d\mu_1(x) = dx, \Delta_1 = [0, 1];$$

$$d\mu_2(x) = dx, \Delta_2 = [-1, 1],$$

где dx – мера Лебега. Тогда для $\mu = \{\mu_1, \mu_2\}$ при определённом выборе нормирующего множителя

$$A_1(x) = 6x + 4, \quad A_2(x) = -4.$$

Поскольку $\deg A_2 = 1$, то соответствующая система $\mathbf{f} = \{f_1(x), f_2(x)\}$ марковских функций не является совершенной.

Сделаем ещё одно замечание. В [15] установлено, что система марковских функций $\mathbf{f} = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ является совершенной тогда и только тогда, когда для любого ненулевого индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ выполняется условие:

$$\prod_n = \prod_{j=1}^k \tilde{H}_n^{n_j} \neq 0, \text{ где } \tilde{H}_n^{n_j} - \text{определитель матрицы, полученной из матрицы } G_n \text{ выбрасыванием}$$

в ней столбца

$$((\varphi_{n_j-1}, \varphi_0)^j (\varphi_{n_j-1}, \varphi_1)^j, \dots, (\varphi_{n_j-1}, \varphi_{|n|-2})^j)^T.$$

Нетрудно заметить, что если для мультииндекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ произведение $\prod_n \neq 0$, то $\text{rang } G_n = |n| - 1$.

Поэтому любая совершенная система $\mathbf{f}$ марковских функций (1.4) является слабо совершенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никитин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.
2. Aptekarev, A.I. Multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev // J. Comput. Appl. Math. – 1998. – Vol. 99, № 1–2. – P. 423–447.
3. Aptekarev, A.I. Multiple orthogonal polynomials / A. Aptekarev, V. Kaliaguine, J. Van Iseghem // Constr. Approx. – 2000. – Vol. 16. – P. 487–524.
4. Assche, W. Van. Some classical multiple orthogonal polynomials / W. Van Assche, E. Coussement // J. Comput. Appl. Math. – 2001. – Vol. 127. – P. 317–347.
5. Aptekarev, A.I. Multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche // Transactions of the American Mathematical Society. – 2003. – Vol. 355, № 10. – P. 3887–3914.
6. Kuijlaars, A.B.J. Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights / A.B.J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky // Comm. Math. Phys. – 2009. – Vol. 286, № 1. – P. 217–275.
7. Сорокин, В.Н. Аппроксимации Эрмита – Паде для систем Никитина и иррациональность числа $\zeta(1.3)$ / В.Н. Сорокин // УМН. – 1994. – Т. 49, № 2. – С. 167–168.
8. Daems, E. Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions / E. Daems, A.B.J. Kuijlaars // J. Approx. Theory. – 2007. – Vol. 146, № 1. – P. 91–114.
9. Mukhin, E. Multiple orthogonal polynomials and a counterexample to the Gaudin Bethe Ansatz conjecture / E. Mukhin, A. Varchenko // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – Vol. 359, № 11. – P. 5383–5418.

10. Aptekarev, A.I. Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.

11. Kuijlaars, A.B.J. Singular values of products of Ginibre random matrices, multiple orthogonal polynomials and hard edge scalings / A.B.J. Kuijlaars, L. Zhang // Comm. Math. Phys. – 2014. – Vol. 332, № 2. – P. 750–781.

12. Сорокин, В.Н. Аппроксимации Эрмита – Паде функции Вейля и её производной для дискретных мер / В.Н. Сорокин // Математический сборник. – 2020. – Т. 211, № 10. – С. 139–156.

13. Суетин, С.П. Полиномы Эрмита – Паде и квадратичные аппроксимации Шафера для многозначных аналитических функций / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2020. – Т. 75, № 4 (454). – P. 213–214.

14. Икономов, Н.Р. Алгоритм Висковатова для полиномов Эрмита – Паде / Н.Р. Икономов, С.П. Суетин // Математический сборник. – 2021. – Т. 212, № 9. – С. 94–118.

15. Старовойтов, А.П. Аналоги формулы Шмидта для полиортогональных многочленов первого типа / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 424–433.

16. Schmidt, E. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener / E. Schmidt // Math. Ann. – 1907. – Vol. 63. – P. 433–476.

17. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

18. Gram, I.P. Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate / E. Schmidt // Journ. für Math. – 1883. – Vol. 94. – P. 41–73.

Поступила в редакцию 15.02.2022.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Ковалькова Ангелина Дмитриевна – студентка

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfint.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).