ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№1 (50) 2022

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (50) 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

ИНФОРМАТИКА

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:
– технические;
– физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун*, *Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 04.03.22. Формат 60×84 $^1\!/_8$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 11,54. Тираж 100 экз. Заказ № 130.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 1 (50) 2022

CONTENTS

PHYSICS

MATHEMATICS

INFORMATION SCIENCE

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

– Technics;

– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

ФИЗИКА

УДК 537.86:620.22-022.532 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_7

МОДЕЛИРОВАНИЕ, СОЗДАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТАПОВЕРХНОСТЕЙ, ПОКРЫВАЮЩИХ ОБЪЕКТЫ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

А.П. Балмаков[1], С.А. Хахомов[1], И.В. Семченко[1], Д. Ли[2], Д. Ванг[2], В. Сонг[3]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Университет Цзяннань, Уси*
[3]*Пекинский технический институт*

MODELING, CREATING AND EXPERIMENTAL STUDY OF METASURFACES COVERING OBJECTS OF COMPLEX SHAPE

A.P. Balmakou[1], S.A. Khakhomov[1], I.V. Semchenko[1], J. Li[2], J. Wang[2], W. Song[3]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Jiangnan University, Wuxi*
[3]*Beijing Institute of Technology*

Аннотация. В статье разработаны, с использованием программ автоматизированного проектирования, аддитивных средств производства, таких как оборудование с числовым программным управлением, изготовлены и экспериментально исследованы образцы метаповерхностей для экранизации металлических или металлизированных объектов сложной формы и уменьшения отражения излучения от них.

Ключевые слова: *элементарная ячейка*, *элемент метаповерхности*, *кольцевой резонатор*, *электрическая проводимость*, *преобразование поляризации излучения*, *безэховая камера*, *коэффициент поглощения излучения*.

Для цитирования: *Балмаков*, *А.П.* Моделирование, создание и экспериментальное исследование метаповерхностей, покрывающих объекты сложной формы / А.П. Балмаков, С.А. Хахомов, И.В. Семченко, Д. Ли, Д. Ванг, В. Сонг // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 7–13. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_7

Abstract. In this article, using computer-aided design programs, additive manufacturing means, such as numerically controlled equipment, the samples of metasurfaces for screening metal or metallized objects of a complex shape and reducing the reflection of radiation from them have been produced and experimentally studied.

Keywords: *unit cell*, *metasurface element*, *ring resonator*, *electrical conductivity*, *transformation of radiation polarization*, *anechoic chamber*, *radiation absorption coefficient*.

For citation: Balmakou, A.P. Modeling, creating and experimental study of metasurfaces covering objects of complex shape / A.P. Balmakou, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, J. Li, J. Wang, W. Song // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 7–13. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_7 (in Russian)

Введение

Объектом исследования в данной работе являются металл-диэлектрические метаповерхности, представляющие собой двумерные периодические массивы из металлических элементов определенной формы, обладающие определенной электрической проводимостью, расположенные в диэлектрическом слое с определенными материальными параметрами, период расположения которых в массиве значительно меньше длины волны резонансного излучения возбуждения структуры метаповерхности.

Целью данной работы является разработка моделей численного исследования электромагнитных свойств ультратонких метаповерхностей, взаимодействующих с электромагнитным излучением с целью управления электродинамическими параметрами излучения; создание управляющих программ для оборудования с числовым программным управлением с целью изготовления экспериментальных образцов исследуемых метаповерхностей; проектирование различных типов метаповерхностей для достижения расчетных электродинамических параметров, направленных на контролируемое отражение, поглощение, пропускание, преобразование электромагнитного излучения, взаимодействующего со структурой метаповерхности; определение ключевых параметров метаповерхности, ответственных за частотно- и поляризационно-селективные отражательные и поглощающие свойства; рассмотрение возможности применения новых типов электродинамических материалов, основанных на концепции исследуемых метаповерхностей, например, идеальных поглотителей электромагнитного излучения, преобразователей поляризации, частотно- и поляризационно-селективных фильтров излучения и др.

Для достижения поставленных целей в работе использованы методы разработки аналитических моделей и проведения аналитических расчётов, численной обработки аналитических данных, компьютерного моделирования физических процессов в слоистых структурах, вариационный и топологический анализ моделей, компьютерное автоматизированное 3D проектирование, экспериментальное исследование комплексных коэффициентов передачи и отражения (S_{21}, S_{11} параметров), а также коэффициента поглощения излучения.

1 Разработка управляющих программ для создания трехмерной модели проектируемой ультратонкой билатеральной метаповерхности

Ранее были представлены и исследованы несколько типов трехмерных моделей численного исследования метаматериала-поглотителя излучения гиперболического типа в пространственной периодической решетке которого каждый из рядов состоял из чередующихся периодически слоев графена и диоксида кремния, а также модернизированная структура, в которую добавлен дополнительный слой металлических колец переменного диаметра, расположенный на поверхности слоя графена [1]. Конструктивные особенности исследуемых моделей, используемые материалы с оптимальными оптическими характеристиками, а также локализация графеновых слоев, которые характеризуются низкими диссипативными потерями энергии и высокой плотностью носителей заряда [2]–[5], стимулируя возбуждение поверхностных плазмонов, были оптимизированы для функционирования в инфракрасном спектральном диапазоне. Однако проверка ключевых функциональных особенностей исследуемых метаповерхностей может быть проведена в спектральном диапазоне отличном от изначально заданного при перемасштабировании модели, основываясь на принципе электродинамической масштабной инвариантности, что позволяет изготовить масштабную копию исследуемой метаповерхности и провести исследование ее электродинамических свойств, например, в микроволновом диапазоне, принимая во внимание важность корректировки материальных параметров и учитывая их дисперсионные характеристики. В случае с рассматриваемыми моделями, их масштабирование в новый диапазон возбуждения сопряжено с отказом от графенового слоя в структуре метаповерхности, функциональность которого в новых условиях существенно снижается, поэтому масштабируемая модель является довольно грубым приближением, которая тем не менее способна предсказать поведение и важные данные о функциональных особенностях исследуемых метаповерхностей в первом приближении.

Для разработки управляющих программ создания образцов трехмерной модели метаповерхности с резонансной частотой возбуждения порядка 3ГГц в среде моделирования Ansys SpaceClaim & DSM была произведена трансформация уже разработанной ранее модели, элементарная ячейка которой показана на рисунке 1.1, в масштабную модель без графенового слоя и с оптимизированными под новый частотный диапазон материальными параметрами, элементарная ячейка которой показана на рисунке 1.2. Массив, образовавшийся в результате трансляции данной элементарной ячейки по осям *X* и *Y*, показан на рисунке 1.3. Таким образом, в основе метаповерхности лежит плоскопараллельный слой алюминия толщиной порядка 0,8 мм, в центре расположен плоскопараллельный слой стеклотекстолита FR-4 толщиной порядка 1,5 мм, на поверхности которого периодически расположены кольцеобразные медные резонаторы толщиной порядка 50 мкм.

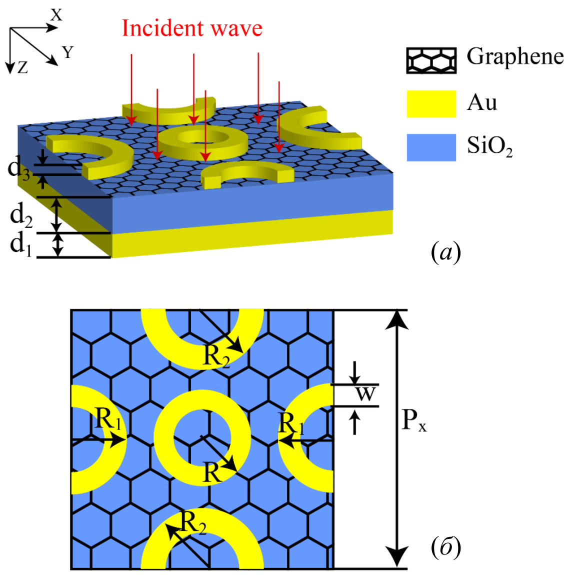


Рисунок 1.1 – (*а*) Изометрический вид элементарной ячейки оптимизированной метаповерхности поглотителя электромагнитного излучения; (*б*) вид элементарной ячейки сверху [1]

Вариационный анализ масштабной модели метаповерхности был произведен в среде моделирования электродинамических процессов Ansys HFSS, куда была экспортирована элементарная ячейка метаповерхности (рисунок 1.4). При этом были заданы периодические граничные условия Master-Slave, условия возбуждения структуры плоской падающий линейно-поляризованной волной Floquet ports, материальные параметры среды, выбран частотный диапазон исследования, произведена генерация полигональной сетки, а также исследованы ключевые физические процессы, происходящие при возбуждении структуры, например, генерация поверхностных токов при резонансе, плотность которого показана на рисунке 1.4, где красному цвету соответствует максимальная амплитуда тока, а синим – минимальная.

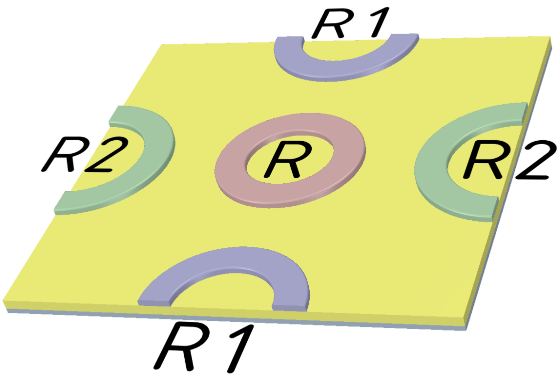


Рисунок 1.2 – Элементарная ячейка масштабной модели метаповерхности без графенового слоя и оптимизированными под новый частотный диапазон материальными параметрами, рассчитанными на возбуждение в микроволновом диапазоне частот

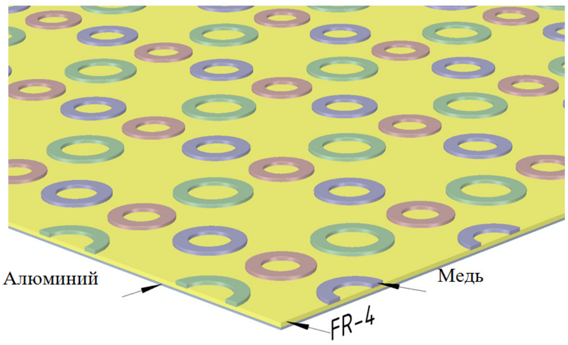


Рисунок 1.3 – Масштабная модель метаповерхности, полученная из элементарной ячейки (рисунок 1.2) путем ее трансляции вдоль осей *X* и *Y*

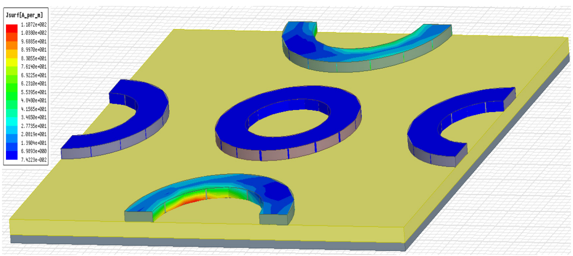


Рисунок 1.4 – Элементарная ячейка масштабной модели метаповерхности в среде моделирования Ansys HFSS с отображением диаграммы распределения плотности поверхностных токов в кольцевых резонаторах при их возбуждении

После проведения вариационного анализа масштабной модели метаповерхности и оптимизации ее топологии был произведен экспорт полноразмерной модели в специализированные среды для создания управляющих программ ЧПУ фрезерной обработки Vectric Aspire, MecSoft VisualMill/CAM, Autodesk Fusion 360, в которых были заданы соответствующие алгоритмы обработки, а также произведен выбор режущего инструмента, параметров его подвода и отвода, безопасных высот, параметров резания и т.д. В конечном результате генерируется G-код для ЧПУ оборудования, в котором записаны все необходимые данные для обработки, такие как траектории движения инструмента, его скорости, точки начала врезания и окончания, пути подвода и отвода. На примере скриншота из Vectric Aspire на рисунке 1.5 можно видеть траектории движения режущего инструмента (синие линии) и пути перехода между зонами обработки (красные линии).

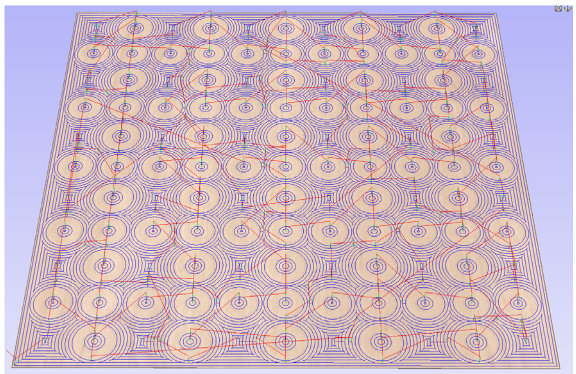


Рисунок 1.5 – Полноразмерная масштабная модель метаповерхности в среде для создания управляющих программ ЧПУ фрезерной обработки Vectric Aspire. Показаны траектории движения режущего инструмента (синие линии) и пути перехода между зонами обработки (красные линии)

2 Создание опытных образцов для проведения экспериментальных исследований

В рамках работы по созданию ультратонких частотно- и поляризационно-селективных поглощающих электромагнитное излучение метаповерхностей многопикового поглощения было предложено использование плоскопараллельных структур с кольцевыми резонаторами переменного диаметра, имеющих плоский металлический слой у основания [1].

Наличие нескольких пиков поглощения отличает данные структуры от исследуемых нами ранее метаповерхностей, основанных на резонаторах омегаобразной формы [6]–[8]. Основываясь на данных разработанной ранее численной компьютерной модели метаповерхности были определены ее оптимальная форма, размеры, материальные параметры составляющих компонентов. Данные компьютерного моделирования были также использованы для создания управляющих программ, необходимых для ЧПУ (числовое программное управление) оборудования при создании экспериментальных образцов трехмерной модели метаповерхности с центральной частотой операционного диапазона многопикового поглощения возбуждения порядка 3ГГц. По результатам данных исследований были предложены два типа метаповерхностей, схожих по форм-фактору, но отличающихся составом используемых при изготовлении материалов. В основе первого типа метаповерхности расположен плоскопараллельный слой алюминия толщиной порядка 0,8 мм, в центре находится плоскопараллельный слой стеклотекстолита FR-4 толщиной порядка 1,5 мм, на поверхности которого периодически расположены кольцеобразные медные резонаторы толщиной порядка 50 мкм. В основе второго типа метаповерхности также находится плоскопараллельный слой алюминия толщиной порядка 0,8 мм, над которым расположен плоскопараллельный слой монолитного поликарбоната толщиной 2 мм, в котором сделаны концентрические пазы 0,5 мм, заполненные смесью порошков меди и титана с использованием акрила в качестве фиксирующего агента.

В процессе изготовления данных типов метаповерхностей их трехмерные модели импортировались в специализированную среду Vectric Aspire для составления управляющей программы обработки образца на оборудовании с ЧПУ Cutter HD (CNC-Technology) под управлением Mach 3.

Следует также отметить, что были рассмотрены варианты создания образцов метаповерхностей с использованием аддитивных технологий послойной 3D печати, при этом для изготовления среднего слоя метаповерхности рассматривались пластики типов PLA, PET-G, а для изготовления кольцевых резонаторов – проводящий электрический ток пластик FLEX-conductive. При этом модель предварительно импортировалась в специализированный слайсер для составления программ послойной печати 3D принтером Anycubic Predator. Метод послойной 3D печати отлично подходит для изготовления сложных моделей метаповерхностей, однако, в то же время, имеет ряд ограничений, а именно – не позволяет создать образец больших размеров без необходимости состыковок 3D напечатанных частей, что вызвано ограниченной рабочей зоной печати 3D принтера; 3D печать ограничивается специализированными пластиками, электродинамические свойства которых могут не соответствовать модельным значениям, так, например, кольцевые резонаторы, напечатанные пластиком FLEX-conductive, не способны обеспечить расчетную электропроводимость для эффективного поглощения излучения. В то время как при изготовлении классическими методами использовалась возможность формовки проводящих кольцевых резонаторов из металлических порошков по заданному шаблону в диэлектрическом слое метаповерхности, что позволило регулировать электропроводимость посредством смешивания различных металлических порошков в различных пропорциях и, соответственно, тем самым контролировать поглощающие свойства метаповерхности. При формовке использовались металлические мелкодисперсные порошки меди и титана (3 : 1), при этом акриловый наполнитель использовался в качестве фиксирующего компонента.

Таким образом, на базе ранее исследуемых электродинамических моделях метаповерхностей были изготовлены два опытных образца, соответствующие описанным выше двум типам метаповерхностей, которые показаны на рисунках 2.1, 2.2. При изготовлении метаповерхности многопикового поглощения излучения первого типа, показанной на рисунке 2.1, в качестве основы для кольцевых резонаторов и диэлектрического слоя (подложки) использовался фольгированный медью стеклотекстолит FR-4 (диэлектрическая проницаемость стеклотекстолита на частоте 1 МГц порядка 5, тангенс угла потерь на этой же частоте порядка 0,025, поверхностное сопротивление порядка 10^5 МОм, объемное сопротивление порядка 10^5 МОм). При изготовлении образца второго типа, показанного на рисунке 2.2, в качестве диэлектрического слоя использовался монолитный поликарбонат (диэлектрическая проницаемость на частоте 1 МГц порядка 2,6, тангенс угла потерь на этой же частоте порядка 0,008, удельное сопротивление порядка 10^{15} Ом·см). Стоит отметить важное преимущество полученных образцов – их толщина – в несколько десятков раз меньше центральной резонансной длины волны поглощения.

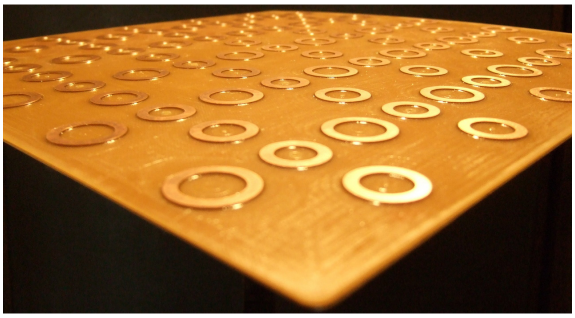


Рисунок 2.1 – Изготовленный экспериментальный образец метаповерхности первого типа на основе фольгированного медью стеклотекстолита

Метаповерхность проектировалась с учетом того, что резонансная длина волны возбуждения $\lambda_{res} = 100$ мм, соответствующая частоте 3 ГГц, находится в центре операционного диапазона многопикового поглощения, соответственно внешние диаметры кольцевых резонаторов были выбраны равными 21,2 мм, 22,6 мм, 25,6 мм, а расстояние между внутренним и внешним кольцами 8,8 мм, период трансляции кольцевых резонаторов каждого типа во взаимно-ортогональных направлениях $P = 62$ мм.

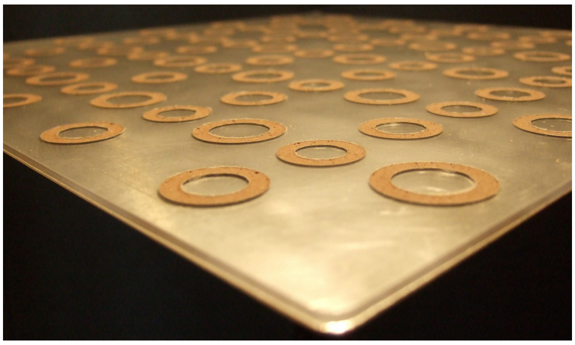


Рисунок 2.2 – Изготовленный экспериментальный образец метаповерхности второго типа на основе монолитного поликарбоната и мелкодисперсных металлических порошков

3 Экспериментальное исследование электромагнитных характеристик созданных опытных образцов

Экспериментальные исследования слабоотражающих ультратонких поглощающих электромагнитное излучение метаповерхностей проводились в модернизированной безэховой камере лаборатории «Физики волновых процессов» УО ГГУ им. Ф. Скорины. Камера имеет размеры 4,5 × 11,4 × 3,1 м и обладает уровнем безэховости в цилиндрической области $D = 30$ см по горизонтальной оси симметрии порядка –40 дБ, при этом по своей структуре является электродинамически изолированной от внешних электромагнитных воздействий клеткой Фарадея с толщиной листовой стали 0,8 мм. Внутренние поверхности камеры покрыты поглотителем микроволнового излучения «ТОРА-25», за исключением покрытия поверхности входной двери, для которой использовался поглотитель «ТОРА-9». Данный тип поглотителя представляет собой диэлектрический радиопоглощающий материал пирамидального типа в виде панелей из эластичного пенополиуретана с углеродным наполнителем, предназначенный для поглощения излучения и, тем самым, предотвращения его отражения от металлических стенок клетки Фарадея, обеспечивая рабочий диапазон измерений 1–37,5 ГГц с коэффициентом отражения –25 ÷ –50 дБ для ТОРА-25 и –10 ÷ –45 дБ для ТОРА-9.

Коэффициент поглощения A излучения экспериментальными образцами рассчитывался по полученным данным измерения комплексных коэффициентов передачи и отражения, посредством расчета коэффициентов прохождения T и отражения R, а именно, $A = 1 - T - R = 1 - |t^2| - |r^2|$ [9], [10]. Результаты данных расчетов проиллюстрированы на рисунке 3.1 для случая нормального падения излучения на образец и на рисунке 3.2 для случая падения излучения под углом 30°. Полученные данные позволяют утверждать, что экспериментальные образцы удовлетворяют основной цели, заложенной при их проектировании, а именно, реализации многопикового режима поглощения в довольно узкой полосе частот. В данном случае одновременно для обеих мод поляризации осуществляется трехпиковый режим поглощения. Пиковые значения поглощения излучения для образца № 1 оказались в соответствии с рассчитываемыми значениями, однако амплитудные значения пиков поглощения для второго образца несколько ниже ожидаемых, что может быть связано с отличием материальных параметров металлических порошков, используемых при формовке кольцевых резонаторов, а также материальных параметров подложки, на которой они располагались, от тех, которые были заложены при расчетах и моделировании из-за наличия посторонних примесей, окислов или других факторов.

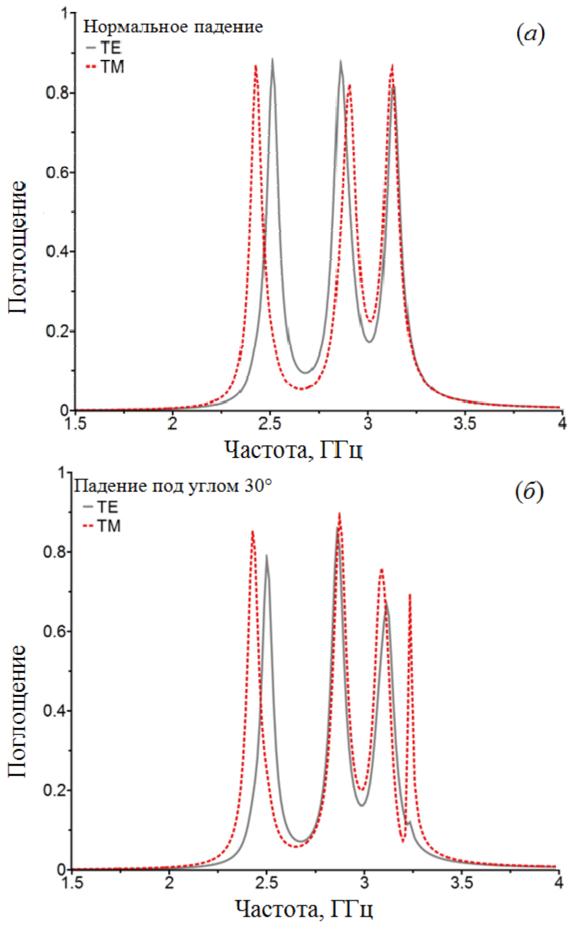


Рисунок 3.1 – Коэффициент поглощения излучения образцом № 1 (рисунок 2.1) при: (*а*) – нормальном падении, (*б*) – при падении под углом 30°

При исследовании коэффициента отражения излучения от образца под углом можно отметить наличие ограничения по диапазону допустимых углов, связанное с довольно большой высотой пирамид поглотителя «ТОРА-25», которые начинают затенять падающее и отраженное излучение при углах порядка 30° и более. Поэтому экспериментальные исследования по наклонному падению были ограничены данной величиной угла падения. В этом случае, как можно видеть из рисунков 3.1 (*а*) и 3.2 (*б*), высоты пиков поглощения оказались незначительно ниже тех, что наблюдаются при нормальном падении излучения, при этом для ТМ моды поляризации образовывается дополнительный пик в области высоких частот исследуемой полосы поглощения.

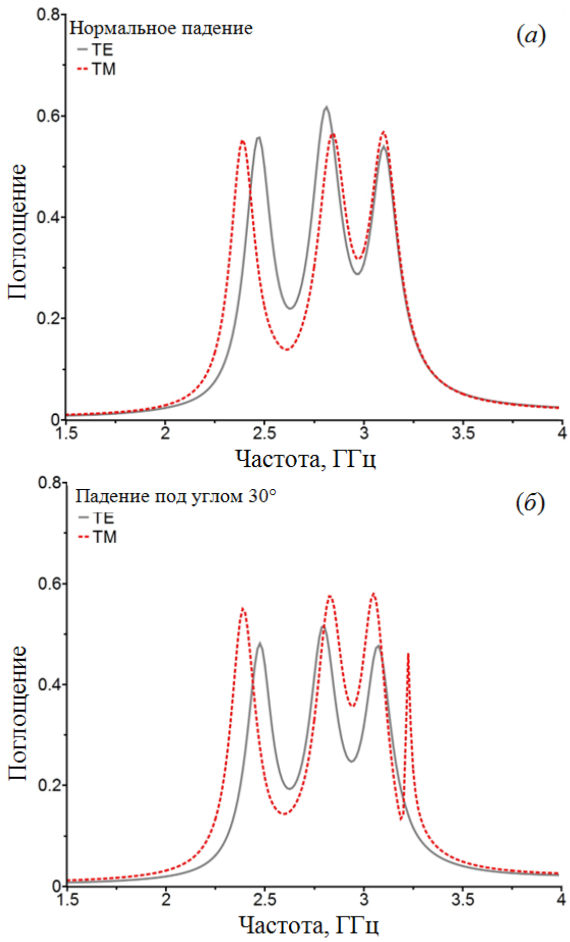


Рисунок 3.2 – Коэффициент поглощения излучения образцом № 2 (рисунок 2.2) при:
(*а*) – нормальном падении,
(*б*) – при падении под углом 30°

Заключение

Основываясь на принципе электродинамической масштабной инвариантности было произведено перемасштабирование модели метаповерхности поглотителя излучения в среде моделирования Ansys SpaceClaim & DSM под новый частотный диапазон с центром порядка 3 ГГц. Проведен вариационный анализ параметров элементарной ячейки массива метаповерхности в среде моделирования Ansys HFSS в результате чего были определены оптимальные параметры для наиболее эффективного поглощения. Полученный из элементарной ячейки путем ее трансляции полноразмерный массив масштабной метаповерхности был экспортирован в специализированные среды для генерации G-кода – управляющих программ – для оборудования с числовым программным управлением с целью последующего изготовления экспериментальных образцов исследуемой метаповерхности и исследования ее электродинамических характеристик в безэховой камере.

Разработаны несколько экспериментальных образцов метаповерхностей с целью создания ультратонких частотно- и поляризационно-селективных поглощающих электромагнитное излучение метаповерхностей многопикового поглощения. Было предложено использования металлических порошков для получения кольцевых резонаторов заданной формы и проводимости методом формовки. Использование современных программ автоматизированного проектирования, а также аддитивных средств производства (3D принтеры, оборудование с числовым программным управлением) позволило изготовить образцы с высокой точностью, необходимой для проведения исследований.

Проведены экспериментальные исследования разработанных образцов метаповерхности. Полученные результаты находятся в соответствии с проектируемыми функциональными возможностями разрабатываемого поглотителя излучения. Образец с цельнометаллическими кольцевыми резонаторами показал более высокие амплитуды пиков поглощения в сравнении с образцом, в котором кольцевые резонаторы выполнены из металлических порошков.

Результаты данного исследования могут быть использованы при проектировании устройств и материалов, необходимых для создания поляризационных фильтров и коммутаторов микроволнового излучения нового типа, основанных на концепции многопикового поглощения, например, селективных по частоте и поляризации отражателей, прерывателей, преобразователей поляризации излучения [11]–[24].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Inversion Method Characterization of Graphene-Based Coordination Absorbers Incorporating Periodically Patterned Metal Ring Metasurfaces* / Z. Bao [et al.] // Nanomaterials. – 2020. – Vol. 10, № 1102. – P. 1–10.

2. *Independent tunable multi-band absorbers based on molybdenum disulfide metasurfaces* / J. Wang [et al.] // Physical Chemistry Chemical Physics. – 2019. – Vol. 21, № 43. – P. 24132–24138.

3. *Perfect Narrowband Absorber Based on Patterned Graphene-Silica Multilayer Hyperbolic Metamaterials* / Y. Feng [et al.] // Plasmonics. – 2020. – P. 1–6.

4. *Characteristics of a bidirectional multi-function focusing and plasmon-launching lens with multiple periscope-like waveguides* / T. Xing [et al.] // Opt. Express. – 2020. – Vol. 28, № 14/6. – P. 20334–20344.

5. *THz Phase Modulation with Broadband Metasurfaces for Controlling Light Propagation* / J. Ma [et al.] // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 3 (36). – P. 28–31.

6. *Ground-plane-less bidirectional terahertz absorber based on omega resonators* / A. Balmakou, M. Podalov, S. Khakhomov, D. Stavenga, I. Semchenko // Opt. Lett. – 2015. – Vol. 40, № 9. – P. 2084–2087.

7. *Designing of ultra-thin electromagnetic sensor using omega-particles* / A. Balmakou [et al.] // Proc. of Chinese-Belarussian Workshop (Nanjing). – Nanging, China. – 2019. – P. 9–10.

8. *Radiation of circularly polarized microwaves by a plane periodic structure of Ω elements* / I.V. Semchenko // J. Commun. Technol. Electron. – 2007. – Vol. 52, № 9. – P. 1002–1005.

9. *Broadband reflectionless metasheets: Frequency-selective transmission and perfect absorption* / V.S. Asadchy [et al.] // Phys. Rev. X. – 2015. – Vol. 5, № 3. – P. 031005.

10. *Planar Broadband Huygens' Metasurfaces for Wave Manipulations* / F.S. Cuesta [et al.] // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2018. – Vol. 66, № 12. – P. 7117.

11. *Functional Metamirrors Using Bianisotropic Elements* / V.S. Asadchy [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2015. – Vol. 114. – P. 095503.

12. *Asadchy*, *V. S.* Bianisotropic metasurfaces: physics and applications / V.S. Asadchy, A. Díaz-Rubio, S.A. Tretyakov // Nanophotonics. – 2018. – Vol. 7, № 6. – P. 1069–1094.

13. *Electromagnetic waves in artificial chiral structures with dielectric and magnetic properties* / I.V. Semchenko [et al.] // Electromagnetics. – 2001. – Vol. 21, № 5. – P. 401–414.

14. *Semchenko*, *I.V.* Artificial uniaxial bianisotropic media at oblique incidence of electromagnetic waves / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // Electromagnetics. – 2002. – Vol. 22, № 1. – P. 71–84.

15. *Stored and absorbed energy of fields in lossy chiral single-component metamaterials* / I. Semchenko [et al.] // Physical Review B. – 2018. – Vol. 97, № 1. – P. 014432.

16. *Investigation of electromagnetic properties of a high absorptive, weakly reflective metamaterial-substrate system with compensated chirality* / I.V. Semchenko [et al.] // Journal of Applied Physics. – 2017. – Vol. 121. – P. 015108-1–015108-8.

17. *Semchenko*, *I.V.* Helices of optimal shape for nonreflecting covering / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // The European physical journal. Applied physics. – 2010. – Vol. 49, № 3. – ap09156.

18. *Семченко*, *И.В.* Электромагнитные волны в метаматериалах и спиральных структурах: монография / И.В. Семченко, С.А. Хахомов. – Минск: Беларуская навука, 2019. – 279 с.

19. *Design of the Chiral Metamaterials* / S. Yaoliang [et al.]. – Tsinghua University Press, 2021. – 297 p.

20. *Метаматериалы и метаповерхности* / И.В. Семченко [и др.] // Наука и инновации. – 2020. – № 8 (210). – С. 23–27.

21. *Optimal angular stability of reflectionless metasurface absorbers* / J.P. del Risco [et al.] // Phys. Rev. – 2021. – B 103. – P. 115426.

22. *High-performance terahertz refractive index sensor based on hybrid graphene Tamm structure* / Hu Jinlei [et al.] // Journal of the Optical Society of America B. – 2021. – Vol. 38, № 9. – P. 2543–2550.

23. *Multi-focusing metalenses based on quadrangular frustum pyramid-shaped nanoantennas* / Zhao Shaoguang [et al.] // Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications. – 2021. – Vol. 46. – P. 100957.

24. *High-Performance Tunable Multichannel Absorbers Coupled with Graphene-Based Grating and Dual-Tamm Plasmonic Structures* / J. Hu [et al.] // Plasmonics – 2021. – № 17. – P. 287–294. – DOI: https://doi.org/10.1007/s11468-021-01526-2.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, договоры № Ф20ПТИ-007, № Ф22КИ-016.

Поступила в редакцию 28.12.2021.

Информация об авторах

Балмаков Алексей Петрович – к.ф.-м.н., доцент
Хахомов Сергей Анатольевич – д.ф.-м.н., доцент
Семченко Игорь Валентинович – чл.-корр. НАН РБ, д.ф.-м.н., профессор
Дживен Ли – профессор
Джиченг Ванг – профессор
Вэй Сонг – профессор

ФИЗИКА

УДК 535.42 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_14

СМЕЩЕННЫЕ ПОЛЯ БЕССЕЛЯ С РАЗЛИЧНЫМИ АЗИМУТАЛЬНЫМИ ЗАВИСИМОСТЯМИ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

SHIFTED BESSEL FIELDS WITH VARIOUS AZIMUTHAL DEPENDENCES

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены новые решения уравнения Гельмгольца, описывающие бездифракционные непараксиальные смещенные волновые поля Бесселя с различными азимутальными зависимостями. Они характеризуются пятью свободными параметрами. Выполнено графическое моделирование таких пучков. Проанализированы зависимости картин интенсивности полей Бесселя от свободных параметров.

Ключевые слова: *пучки*, *пучки Бесселя*, *азимутальная зависимость*, *смещенные поля*, *поля Бесселя.*

Для цитирования: *Гиргель*, *С.С.* Смещенные поля Бесселя с различными азимутальными зависимостями / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 14–18. – DOI: https://doi.org/ 10.54341/20778708_2022_1_50_14

Abstract. The new solutions of the Helmholtz equation describing nondiffracting nonparaxial shifted Bessel wave fields with various azimuthal dependences are offered. They are characterised by five free parametres. Pictorial modelling of such beams is fulfilled. The dependences of the patterns of intensity of Bessel fields on the free parametres are analysed.

Keywords: *beams*, *Bessel beams*, *azimuthal dependence*, *shifted fields*, *Bessel fields.*

For citation: *Girgel*, *S.S.* Shifted Bessel fields with various azimuthal dependences / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 14–18. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_14 (in Russian)

Введение

Волновые поля Бесселя известны уже давно и в своё время из-за бездифракционности произвели фурор в научном мире. Немного истории. В 1978 году Дарнин (Durnin) получил волновые поля Бесселя и впервые показал [1], что идеальные поля Бесселя являются бездифракционными. Проведенный им эксперимент подтвердил эти выводы. Затем начались бурные исследования волновых полей Бесселя и их модификаций. Правда, потом выяснилось, что решения уравнения Гельмгольца через функции Бесселя для физиков были описаны, по крайней мере, еще в 1941году Стреттоном [2]. В настоящее время известны и другие типы волновых полей, обладающие свойствами бездифракционности, однако пучки Бесселя по-прежнему продолжают вызывать большой интерес во всём мире [3]–[17].

Для монохроматического излучения $(E \sim \exp(-i\omega t))$ волновые поля описываются уравнением Гельмгольца, которое, в частности, имеет классическое решение [17], [18]

$$E_n(x,y,z) = \\ = A\exp\left(iz\sqrt{k^2-k_\perp^2}\right)\cdot f(n,\varphi)J_n\left(k_\perp\rho\right). \quad (0.1)$$

Здесь $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$; $\sin(\varphi)=y/\rho$; $\cos(\varphi)=x/\rho$ – стандартные полярные координаты. Фазовый множитель $f(n,\varphi)$ обычно берут в виде $f(n,\varphi)=\exp(in\varphi)$, где φ – азимутальный угол, а $n=0,\pm1,\pm2,...,$ $n\in Z$.

Для дальнейшего целесообразно перейти к безразмерным координатам и параметрам соотношениями

$$X = x/w_0;\ Y = y/w_0;$$
$$Z = z/w_0;\ K = kw_0;\ K_\perp = k_\perp w_0.$$

Тогда $\cos(\varphi)=X/R$ и волновые поля Бесселя в безразмерных координатах описываются выражением

$$E_n(R,Z) = \\ = A\exp\left(iZ\sqrt{K^2-K_\perp^2}\right)\cdot f(n,\varphi)J_n\left(K_\perp R\right). \quad (0.2)$$

1 Смещенные волновые поля Бесселя с различными фазовыми множителями

Последнее выражение можно обобщить, если ввести комплексные сдвиги для поперечных координат X и Y соотношениями $X_s = X - iX_0$, $Y_s = Y - iY_0$. Такой формализм недавно предложили Ковалев и Котляр [4], [10], [11]. Практически авторы применяли вещественный сдвиг по X и чисто мнимый сдвиг по Y, чтобы упростить получающиеся выражения. Такие моды авторы назвали асимметричными модами Бесселя.

Их можно также называть децентрированными. Недавно [16] обсуждались более общие смещённые пучки Бесселя, когда поперечные координаты становились комплексными за счет параметров смещения и которые могут быть в общем случае комплексными.

Хотя параметры смещения X_0 и Y_0 в общем случае могут быть комплексными, их мнимые части приводят просто к смещению начала координат и не приводят к каким-либо физическим следствиям. Поэтому в дальнейшем будем полагать X_0 и Y_0 вещественными.

Плаченов [5] волновые пучки такого типа называет смещенными (shifted). Мы, в дальнейшем, обсуждаемые пучки Бесселя также будем называть смещенными. В работах [16], [5] обсуждались смещенные поля Бесселя с произвольными комплексными смешениями поперечных координат. Индекс s у таких поперечных координат означает, что координата смещенная (shifted).

Комплексную амплитуду *смещенных* волновых полей Бесселя в безразмерных координатах теперь можно записать, как

$$E_n(R_s, Z) = \\ = A\exp\left(iZ\sqrt{K^2 - K_\perp^2}\right)\cdot f(\varphi_s, n) J_n\left(K_\perp R_s\right). \quad (1.1)$$

Бездифракционные непараксиальные смещенные моды Бесселя (1.1) [4], [16] зависят от трех переменных (X, Y, Z) и пяти параметров $(K, K_\perp, X_0, Y_0, n)$. Здесь $R_s = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2}$ и поперечные координаты (R_s, φ_s) – уже комплексные, поэтому функция Бесселя и фазовый множитель являются комплекснозначными функциями. Согласно справочнику Абрамовиц [19], цилиндрические функции 1 рода функции Бесселя $J_n(z)$ – аналитические функции от z во всей комплексной области, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси. Все функции $J_n(z)$ многозначны и имеют $z = 0$ точкой ветвления.

Фазовый множитель $f(\varphi_s, n) = \exp(in\varphi_s)$ для смещенных полей Бесселя (1.1) можно представить явно через комплексную фазу φ_s в различных формах:

$$f_{s1}(\varphi_{s1}, n) = \exp(i\,n\arccos(X_s / R_s));$$
$$f_{s2}(\varphi_{s2}, n) = \exp(i\,n\arcsin(Y_s / R_s));$$
$$f_{s3}(\varphi_{s3}, n) = \exp(i\,n\,arctg(Y_s / R_s));$$
$$f_{s4}(\varphi_{s4}, n) = \exp(i\,n\,arctg(Y_s, Y_s)). \quad (1.2)$$

Кроме того, фазовый множитель $f(\varphi_s, n)$ можно также представить в различных неявных формах:

$$f_{s5}(\varphi_{s5}, n) = \left(\frac{X_s + iY_s}{R_s}\right)^n;$$
$$f_{s6}(\varphi_{s6}, n) = \left(\frac{X_s - iY_s}{R_s}\right)^{-n};$$
$$f_{s7}(\varphi_s, n) = \left(\frac{X_s + iY_s}{X_s - iY_s}\right)^{n/2}. \quad (1.3)$$

В итоге для фазового множителя $f(\varphi_s, n)$ смещенных полей Бесселя (1.1) мы можем взять семь различных выражений. Компьютерное моделирование с помощью системы компьютерной математики Mathematica показало, что первые два выражения $f_{s1}(\varphi_{s1}, n)$ и $f_{s2}(\varphi_{s2}, n)$ приводят к разрывам интенсивности полей Бесселя. Известно, что, с математической точки зрения, в общем случае, согласно [20], у функции Бесселя 1 рода аргумент z и порядок (или индекс) n могут быть произвольными комплексными числами. Однако мы ищем физически приемлемые решения, чтобы поверхности интенсивности волновых полей Бесселя были без разрывов и изломов, т. е. физически реализуемые поля. Поэтому $f_{s1}(\varphi_{s1}, n)$ и $f_{s2}(\varphi_{s2}, n)$ непосредственно нельзя использовать. Оставшиеся пять выражений $f_{s3}(\varphi_{s3}, n) - f_{s7}(\varphi_{s7}, n)$ дают одинаковые поверхности интенсивности, без разрывов и изломов, т. е. физически реализуемые. Заметим, что в литературе в качестве фазового множителя для волновых полей до сих пор использовался [4], [10], [11] только фазовый множитель $f_{s5}(\varphi_{s5}, n)$.

Как известно [19], [20], обратные тригонометрические функции арктангенс, арккосинус, арксинус и логарифм являются многозначными функциями комплексных аргументов. Поэтому при численных расчетах они могут приводить к различным результатам. Это связано с тем, что системы компьютерной математики (Maple, Mathematica и др.) при расчётах многозначных комплексных функций обычно выбирают их главное значение, поэтому результаты численных расчетов могут различаться.

2 Смещенные поля Бесселя с явными азимутальными зависимостями

Кроме фазового множителя $f(\varphi_s, n)$ можно использовать множители с явными азимутальными зависимостями типа $f(\varphi_s, n) = \cos(n\varphi_s)$ или $f(\varphi_s, n) = \sin(n\varphi_s)$. Множитель $\cos(n\varphi_s)$ лучше применять, чем $\sin(n\varphi_s)$, так как при $n \to 0$ функция $\sin(n\varphi_s) \to 0$. С математической точки зрения выражения с различными фазовыми функциями $\exp(in\varphi)$ и $\cos(n\varphi_s)$ совершенно равноправны, одинаково пригодны и удовлетворяют соответствующему уравнению Гельмгольца. Однако в подавляющем большинстве публикаций фазовая функция $f(\varphi, n)$ для волновых полей Бесселя берется в форме $\exp(in\varphi)$. Это, по-видимому, можно объяснить только упрощением расчетов. Но встречаются для полей Бесселя и альтернативные зависимости $\cos(n\varphi)$: [6], [9], [12]–[14], [18]–[27] и др. Цилиндрические векторные пучки с зависимостью $\cos(n\varphi)$ обсуждались недавно в [7] и [8].

Фазовые множители $f(\varphi_s, -n) = \exp(-in\varphi_s)$ получаются из (1.2), (1.3) заменами $n \to (-n)$. Так как по формулам Эйлера

$$\cos(n\varphi_s) = (\exp(in\varphi) + \exp(-in\varphi))/2,$$

то из f_{s1} – f_{s4} имеем четыре различных корректных выражения для фазового множителя $\cos(n\varphi_s)$. Кроме этого, как показывает компьютерное моделирование интенсивности поля, еще для корректных представлений множителя $\cos(n\varphi_s)$ можно применять взаимозаменяемые выражения f_{s5} – f_{s7}. Итого – $4 + 6 = 10$ представлений явного фазового множителя $\cos(n\varphi_s)$. Среди них выделяется множитель

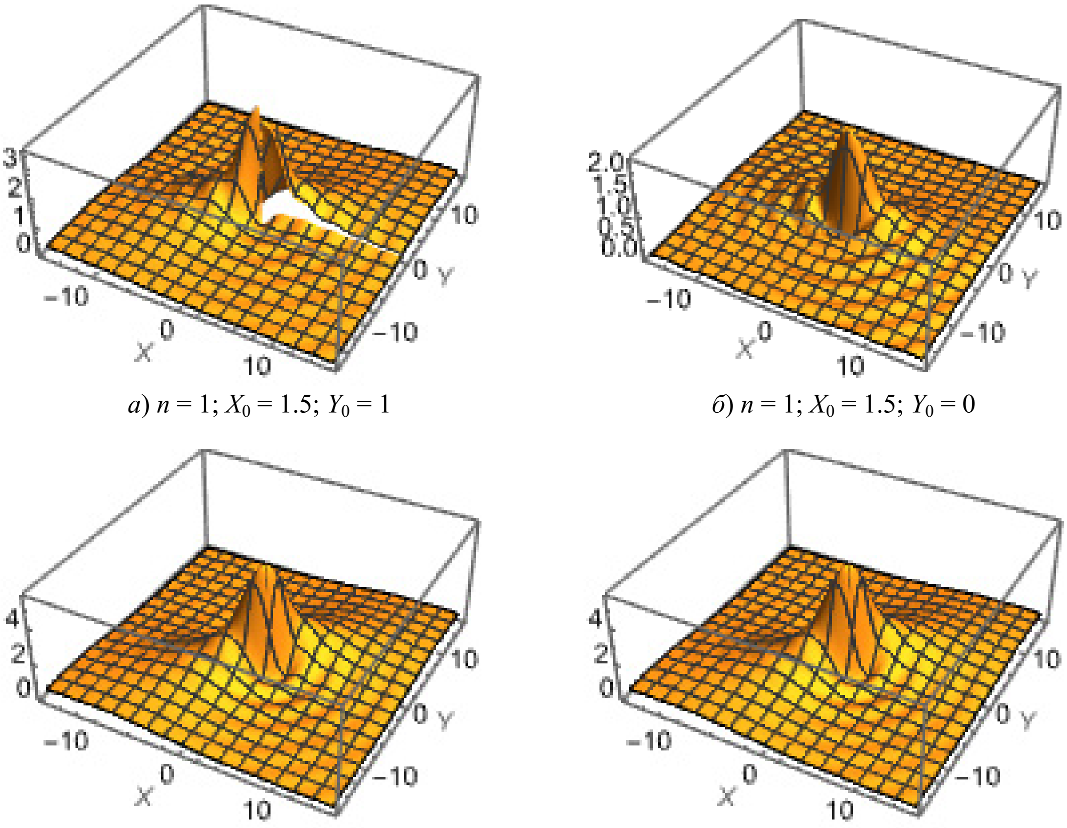
$$\cos(n\varphi_s) = \cos(n \arccos(X_s / R_s)) = T_n(X_s / R_s),$$

где $T_n(X_s / R_s)$ – полином Чебышева 1 рода.

Все эти 10 выражений для явной азимутальной зависимости $f(\varphi_s, n) = \cos(n\varphi_s)$ в (1.1) эквивалентны, как показывает компьютерное моделирование с помощью системы Mathematica. Они дают одинаковые поверхности интенсивности $|E_n|^2$. Кроме того, для смещенных полей Бесселя можно использовать также модули вещественной $|\mathrm{Re}(E_n)|^2$ и мнимой $|\mathrm{Im}(E_n)|^2$ частей комплексной амплитуды E_n, используя множители (1.2) и (1.3).

Аналогично выводим, используя формулы Эйлера, еще 10 представлений явного фазового множителя $\sin(n\varphi_s)$.

Проведено графическое моделирование интенсивности в поперечных сечениях смещенных волновых полей Бесселя в зависимости от нескольких свободных параметров в 3D формате. Использовались безразмерные параметры и координаты. Множитель $\exp\left(iZ\sqrt{K^2 - K_\perp^2}\right)$ не влияет на характер распределения интенсивности поля в поперечном сечении пучка, поэтому его можно опустить.



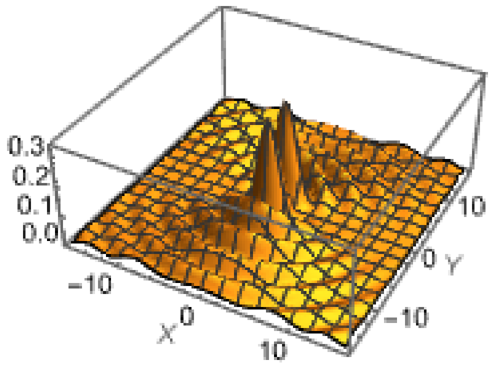
а) $n = 1$; $X_0 = 1.5$; $Y_0 = 1$

б) $n = 1$; $X_0 = 1.5$; $Y_0 = 0$

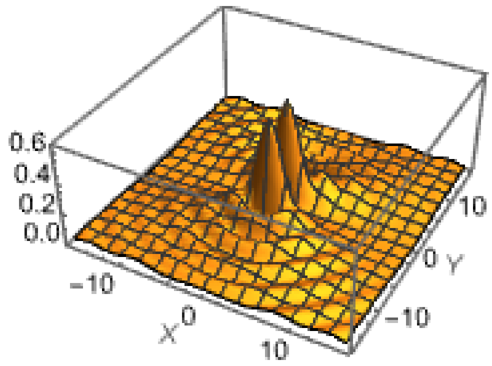
в) $n = 1$; $X_0 = 1.5$; $Y_0 = 1.5$

г) $n = 4$; $X_0 = 1.5$; $Y_0 = 1.5$

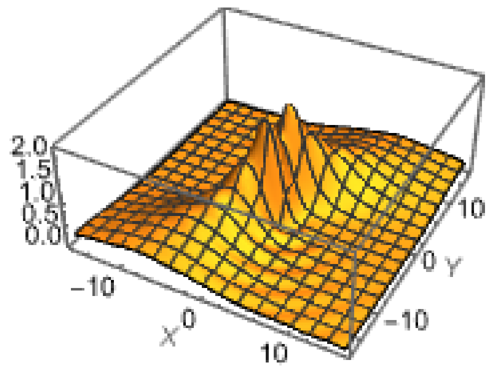
Рисунок 2.1 – 3D графики интенсивности смещенных полей Бесселя:
а) с азимутальной зависимостью $f_{s1}(\varphi_{s1}, n) = \exp(i\, n \arccos(X_s / R_s))$;
б) – *г*) с азимутальной зависимостью $f_{s5}(\varphi_{s5}, n) = \left((X_s + iY_s)/R_s\right)^n$.



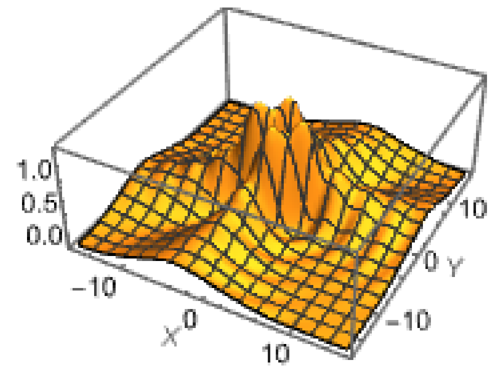
а) $n = 1$; $X_0 = 0$; $Y_0 = 0$



б) $n = 1$; $X_0 = 1.5$; $Y_0 = 0$



в) $n = 1$; $X_0 = 1.5$; $Y_0 = 1.5$



г) $n = 2$; $X_0 = 1.5$; $Y_0 = 1.5$

Рисунок 2.2 – 3D графики интенсивности смещенных полей Бесселя с явной азимутальной зависимостью $\cos(n\varphi_s) = \cos(n\arccos(X_s / R_s)) = T_n(X_s / R_s)$.

В качестве примеров на рисунках 2.1 и 2.2 изображены 3D графики интенсивности смещенных полей Бесселя в поперечном сечении. Полагаем во всех случаях $A = 1$. Интенсивность пучка в каждой точке поперечного сечения рисунков 2.1 и 2.2 пропорциональна ординате пространственной фигуры.

Анализируя результаты графического моделирования интенсивности в поперечных сечениях смещенных волновых полей Бесселя можно сделать следующие выводы.

При увеличении X_0 (Y_0) центральный максимум постепенно возрастает и смещается соответственно вдоль оси X (Y) – рисунки 2.1, *б*) и 2.1, *в*). Если параметры $X_0 = Y_0 \neq 0$ и возрастают, то приближенно картина интенсивности поворачивается вокруг оси Z на $\pi / 4$.

Если волновые поля Бесселя несмещенные, т. е. $X_0 = Y_0 = 0$, то n – порядок оси симметрии поля Z. Увеличение порядка n приводит к постепенному смещению пиков интенсивности, возрастанию амплитуды максимума и постепенному подавлению интенсивности остальных колец – рисунок 2.1, *г*).

С увеличением Z картина интенсивности постепенно расплывается, что естественно. Из рисунков 2.1 и 2.2 видно, что комплексное смещение поперечных координат приводит к нарушению цилиндрической симметрии волновых полей Бесселя и возникновению асимметрии интенсивности.

Основными результатами настоящей работы являются выражения (1.2)–(1.3). В частных случаях наши выражения эквивалентны выражениям для aB-мод, обсуждаемых в работах [4], [10], [1].

Заключение

Задача перехода от стандартных полей Бесселя к смещенным полям Бесселя с явными азимутальными зависимостями является нетривиальной. Показательно, что авторы работ [4], [10], [11] избегают явного введения комплексных полярных переменных φ и ρ и оставляют лишь комплексифицированные декартовы координаты x и y.

В данной работе вводятся новые типы пучков – смещенные непараксиальные волновые поля Бесселя с различными азимутальными зависимостями. Такие моды характеризуются пятью свободными параметрами: дискретным вещественным индексом (n) и четырьмя комплексными непрерывными параметрами $(K, K_{\perp}, X_0, Y_0)$. Введенные здесь моды в частном случае редуцируются к aB-модам Котляра и Ковалева [4], [10], [11].

Бо́льшая часть выражений для фазового множителя приводит к эквивалентным картинам интенсивности. Однако некоторые (f_{s1} и f_{s2}) приводят к разрывам поверхности интенсивности, что физически недопустимо и поэтому их применять нельзя.

Проведенное графическое моделирование интенсивности смещенных непараксиальных волновых полей Бесселя с различными азимутальными зависимостями показало значительную асимметрию таких мод, которая возрастает при увеличении комплексного смещения поперечных координат.

Для неявной азимутальной зависимости типа $\exp(in\varphi_s)$ можно применять любой из фазовых множителей (1.3).

Для явной азимутальной зависимости предпочтительнее пользоваться фазовым множителем в форме $\cos(n\varphi_s) = T_n(X_s / R_s)$ или даже вещественными либо мнимыми частями полной комплексной амплитуды электрического поля волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Durnin*, *J.* Diffraction – free beams / J. Durnin, J.Jr. Miceli // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58, iss. 15. – P. 1492–1501.

2. *Stretton*, *J.A.* Electromagnetic Theory / McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, 1941. – 631 p.

3. *Киселев*, *А.П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.

4. *Ковалев*, *А.А.* Асимметричные моды Бесселя первого и второго типа и их суперпозиции / Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 39, № 1. – С. 5–10.

5. *Плаченов*, *А.Б.* Смещенные параксиальные пучки Бесселя – Гаусса. I. / А.Б Плаченов // Опт. и спектр. – 2019. – Т. 126, вып.3. – С. 311–318.

6. *Chavez-Cerda*, *S.* Nondiffracting beams: travelling, standing, rotating and spiral waves / S. Chavez-Cerda, G.S. McDonald, G.H.C. New // Opt. Communs. – 1996. – Vol. 123. – P. 225–233.

7. *Effect of a spiral phase on a vector optical field with hybrid polarization states* / Rui-Pin Chen [et al.] // J. Opt. – 2015. – Vol. 17. – P. 065605.

8. *Fu*, *S. Bessel beams with spatial oscillating polarization* / S. Fu, S. Zhang, C. Gao // Sci. Per. – 2016. – Vol. 6, № 1. – P. 30765.

9. *Horak*, *R.* Nondiffracting stationary electromagnetic field / R. Horak, Z. Bouchal, J. Bajer // Opt. Commun. – 1997. – Vol. 133. – P. 315–327.

10. *Kotlyar*, *V.V.* Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39, № 8. – P. 2395–2398.

11. *Kotlyar*, *V.V.* Diffraction-free asymmetric elegant Bessel beams with fractional orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38 (1). – P. 4–10.

12. *Mitri*, *F.G.* Acoustics of finite asymmetric exotic beams: Examples of Airy and fractional Bessel beams / F.G. Mitri // Journal of Applied Physics. – 2017. – Vol. 122. – P. 224903.

13. *Mitri*, *F.G.* Vector wave analysis of an electromagnetic high-order Bessel vortex beam of fractional type / F.G. Mitri // Opt. Lett. – 2011. – Vol. 36. – P. 606–608.

14. *Mitri*, *F.G* .Three-dimensional vectorial analysis of an electromagnetic non-diffracting high-order Bessel trigonometric beam / F.G. Mitri // Wave Motion. – 2012. – Vol. 49. – P. 561–568.

15. *Tao*, *S.H.* Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, Xiaocong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43, № 1. – P. 122–126.

16. *Гиргель*, *С.С.* Бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 13–16.

17. *Абрамочкин*, *Е.Г.* Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г Абрамочкин, В.Г. Волостников // Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.

18. *Маркузе*, *Д.* Оптические волноводы / Д. Маркузе. – Москва: Мир, 1974. – 576 с.

19. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

20. *NIST Handbook of Mathematical Functions*, 2010. – 498 p.

21. *Мидвинтер*, *Джон Э.* Волоконные световоды для передачи информации / Джон Э. Мидвинтер. – Москва: Радио и связь, 1983. – 336 с.

22. *Снайдер*, *А.* Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. – Москва: Радио и связь, 1987. – 656 с.

23. *Гончаренко*, *А.М.* Основы теории оптических волноводов / А.М. Гончаренко, В.А. Карпенко. – Минск: Наука и техника, 1983. – 237 с.

24. *Seshadri*, *S.R.* Scalar modified Bessel–Gauss beams and waves / S.R. Seshadri // J. Opt. Soc. Am. A. – 2007. – Vol. 24, № 9. – P. 2837–2842.

25. *Two-dimensional complex source point solutions*: *application to pro-pagationally invariant beams*, *optical fiber modes*, *planar waveguides*, *and plasmonic devices* / Colin J.R. Sheppard [et al.] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2014. – Vol. 31, № 12. – P. 2674–2679.

26. *Seshadri*, *S.R.* Electromagnetic Gaussian beam / S.R. Seshadri // J. Opt. Soc. Am. A. – 1987. – Vol. 15, № 22. – P. 2712–2719.

27. *Скучик*, *Е.* Основы акустики. Т. 2. / Е. Скучик. – Москва: Мир, 1976. – 542 с.

Поступила в редакцию 20.01.2022.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

УДК 539.12 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_19

БЕЗМАССОВОЕ ПОЛЕ СО СПИНОМ 3/2: РЕШЕНИЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ, УСТРАНЕНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

А.В. Ивашкевич

Институт физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

SPIN 3/2 MASSLESS FIELD, SOLUTIONS WITH CYLINDRICAL SYMMETRY, ELIMINATING THE GAUGE DEGREES OF FREEDOM

A.V. Ivashkevich

B.I. Stepanov Institute of Physics, *National Academy of Sciences of Belarus*

Аннотация. Система уравнений, описывающая безмассовую частицу со спином 3/2, решена в цилиндрических координатах пространства Минковского. Используется общековариантный тетрадный формализм. На решениях диагонализируются операторы $i\partial_t, J_3, i\partial_z$. После разделения переменных получена система уравнений для 16 функций, зависящих от переменой *r*. Показано, что построенные согласно теории Паули – Фирца калибровочные решения с цилиндрической симметрией, обращают эти 16 уравнений в тождества. Найдены 6 линейно независимых решений системы уравнений, 4 из них совпадают с калибровочными, два не содержат калибровочных степеней свободы и описывают физически наблюдаемые состояния, они выражаются через функции Бесселя.

Ключевые слова: *спин* 3/2, *цилиндрическая симметрия*, *безмассовое поле*, *точные решения*, *калибровочные степени свободы*.

Для цитирования: *Ивашкевич*, *А.В*. Безмассовое поле со спином 3/2: решения с цилиндрической симметрией, устранение калибровочных степеней свободы / А.В. Ивашкевич // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 19–27. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_19

Abstract. The system of equations for the vector-bispinor describing a spin 3/2 massless particle, is solved in cylindric coordinates of the Minkowski space. The covariant tetrad formalism is applied. Three operators, $i\partial_t$, J_3, $i\partial_z$ are diagonalized on the constructed solutions. After separating the variables, the system of 16 functions in the variable *r* is derived. It is shown that the gauge solutions with cylindric symmetry, which are specified according to the Pauli – Fierz theory, satisfy these 16 equations identically. There are constructed 6 linearly independent solutions. Four of them coincide with the gauge ones, and two remain solutions do not contain the gauge degrees of freedom. These two solutions are expressed in terms of Bessel functions.

Keywords: *spin* 3/2, *cylindric symmetry*, *massless field*, *exact solutions*, *gauge degrees of freedom.*

For citation: *Ivashkevich*, *A.V.* Spin 3/2 massless field, solutions with cylindrical symmetry, eliminating the gauge degrees of freedom / A.V. Ivashkevich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 19–27. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_19

Introduction

After the primary papers by Pauli and Fierz [1], [2], and Rarita and Schwinger [3], the theory of the particle with spin 3/2 [4]–[25] always has attracted attention. The description of that particle requires 16-component wave function with transformation properties of vector-bispinor with respect to the Lorentz group. Special interest represents the case of the massless particle. As was shown by Pauli and Fierz, there exists specific gauge symmetry, according to which the 4-gradient over arbitrary bispinor gives solutions of the massless wave equation. The gauge states do not contribute to observable physical quantities, like energy-momentum tensor.

In the present paper, we follow the problem of the degrees of freedom of the massless particle for solutions with cylindric symmetry. In explicit form there are constructed two solutions which do not contain the gauge components. Also we find 4 solutions of the wave equation, which may be identified with the gauge ones. The study is based on the use of covariant tetrad formalism according to general method by Tetrode – Weyl – Fock – Ivanenko [19].

1 Separating the variables

The following form of the wave equation for the spin 3/2 particle (for generality, we start with the case of the massive particle; see notations in [19]) is known

$$\gamma^5 \varepsilon_\rho^{\ \sigma\alpha\beta}(x)\gamma_\sigma\left(iD_\alpha - M\gamma_\alpha\right)\Psi_\beta = 0, \qquad D_\alpha = \nabla_\alpha + \Gamma_\alpha + ieA_\alpha; \tag{1.1}$$

$M = mc/2\hbar c$ stands for the massive parameter. It is readily proved that in massless case, if the Riemann curvature tensor for a space-time model equals to zero, then eq. (1.1) has the class of gradient type solutions

$$\Psi^G_\beta(x) = D_\beta \Psi(x), \quad D_\beta = (\nabla_\beta + \Gamma_\beta),$$

where Φ stands for an arbitrary bispinor field. Indeed, due to the commutator [19]:

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)\Phi = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}(x)R_{\mu\nu\alpha\beta}(x) \equiv 0, \quad (1.2)$$

eq. (1.1) is satisfied identically by this gradient solution in all space-time models with $R_{\mu\nu\alpha\beta}(x)=0$.

After transition in the field function to the tetrad presentation in vector index $\Psi_\beta = e^{(b)}_\beta \Psi_b$ eq. (1.1) takes on the form

$$\gamma^5 \varepsilon_k^{can}\gamma_c\left[i(D_a)^l_n - M\gamma_a\delta^l_n\right]\Psi_l = 0, \quad (1.3)$$

where we use the extended derivative operator

$$D_a = e^\alpha_{(a)}(\partial_\alpha + ieA_\alpha) + \frac{1}{2}\left(\sigma^{ps}\otimes I + I\otimes j^{ps}\right)\gamma_{[ps]a}. \quad (1.4)$$

Introducing 6 matrices $\varepsilon_k^{can} = (\mu^{[ca]})^n_k$, we can rewrite eq. (1.3) as follows

$$\gamma^5(\mu^{[ca]})_k{}^n\gamma_c\left[i(D_a)_n{}^l - M\gamma_a\delta_n{}^l\right]\Psi_l = 0. \quad (1.5)$$

Allowing for the summation formula

$$\mu^{ca}\gamma_c D_a = \mu^{[01]}[\gamma_0 D_1\Psi - \gamma_1 D_0\Psi] +$$
$$+\mu^{[02]}[\gamma_0 D_2\Psi - \gamma_2 D_0] + \mu^{[03]}[\gamma_0 D_3\Psi - \gamma_3 D_0] +$$
$$+\mu^{[23]}[\gamma_2 D_3\Psi - \gamma_3 D_2\Psi +$$
$$+\mu^{[31]}[\gamma_3 D_1\Psi - \gamma_1 D_3] + \mu^{[12]}[\gamma_1 D_2\Psi - \gamma_2 D_1],$$

or (taking in mind that the matrices $\mu^{[ca]}$ act on the vector index)

$$\mu^{[ca]}\gamma_c D_a =$$
$$=\left(\gamma^1\otimes\mu^{[01]} + \gamma^2\otimes\mu^{[02]} + \gamma^3\otimes\mu^{[03]}\right)D_0\Psi +$$
$$+\left(\gamma^0\otimes\mu^{[01]} + \gamma^2\otimes\mu^{[12]} - \gamma^3\otimes\mu^{[31]}\right)D_1\Psi +$$
$$+\left(\gamma^0\otimes\mu^{[02]} + \gamma^3\otimes\mu^{[23]} - \gamma^1\otimes\mu^{[12]}\right)D_2\Psi +$$
$$+\left(\gamma^0\otimes\mu^{[03]} + \gamma^1\otimes\mu^{[31]} - \gamma^2\otimes\mu^{[23]}\right)D_3\Psi,$$

and the other summation formula

$$(\mu^{[ca]})_k{}^n\gamma_c\gamma_a\Psi_n \quad\Rightarrow\quad \mu^{[ca]}\gamma_c\gamma_a\Psi =$$
$$=\left\{(\gamma_0\gamma_1-\gamma_1\gamma_0)\otimes\mu^{[01]} + (\gamma_0\gamma_2-\gamma_2\gamma_0)\otimes\mu^{[02]} +\right.$$
$$+(\gamma_0\gamma_3-\gamma_3\gamma_0)\otimes\mu^{[03]} + (\gamma_2\gamma_3-\gamma_3\gamma_2)\otimes\mu^{[23]} +$$
$$\left.+(\gamma_3\gamma_1-\gamma_1\gamma_3)\otimes\mu^{[31]} + (\gamma_1\gamma_2-\gamma_2\gamma_1)\otimes\mu^{[12]}\right\}\Psi =$$
$$=\left\{s_{01}\otimes\mu^{[01]} + s_{02}\otimes\mu^{[02]} + s_{03}\otimes\mu^{[03]} +\right.$$
$$\left.+s_{23}\otimes\mu^{[23]} + s_{31}\otimes\mu^{[31]} + s_{12}\otimes\mu^{[12]}\right\}\Psi,$$

we arrive at the detailed form of the basic equation (1.5):

$$\left(\gamma^1\otimes\mu^{[01]} + \gamma^2\otimes\mu^{[02]} + \gamma^3\otimes\mu^{[03]}\right)D_0\Psi +$$
$$+\left(\gamma^0\otimes\mu^{[01]} + \gamma^2\otimes\mu^{[12]} - \gamma^3\otimes\mu^{[31]}\right)D_1\Psi +$$
$$+\left(\gamma^0\otimes\mu^{[02]} + \gamma^3\otimes\mu^{[23]} - \gamma^1\otimes\mu^{[12]}\right)D_2\Psi +$$
$$+\left(\gamma^0\otimes\mu^{[03]} + \gamma^1\otimes\mu^{[31]} - \gamma^2\otimes\mu^{[23]}\right)D_3\Psi +$$
$$+iM\left\{s_{01}\otimes\mu^{[01]} + s_{02}\otimes\mu^{[02]} + s_{03}\otimes\mu^{[03]} +\right.$$
$$\left.+s_{23}\otimes\mu^{[23]} + s_{31}\otimes\mu^{[31]} + s_{12}\otimes\mu^{[12]}\right\}\Psi = 0. \quad (1.6)$$

Let us search solutions with cylindrical symmetry. For cylindrical coordinates and tetrad

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2,$$
$$x^\alpha = (t, r, \phi, z), \quad A_\phi = \frac{Br^2}{2}, \quad (1.7)$$

$$e^\beta_{(a)}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad e_{(a)\beta}(y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

the Ricci rotation coefficients are

$$\gamma_{ab0} = 0, \quad \gamma_{ab1} = 0, \quad \gamma_{122} = -\gamma_{212} = +\frac{1}{r}, \quad \gamma_{ab3} = 0.$$

The components of the derivative operator D_c are determined by the formulas

$$D_0 = \partial_t, \quad D_1 = \partial_r, \quad (1.8)$$

$$D_2 = \frac{1}{r}\left(\partial_\phi + \frac{ieBr^2}{2}\right) + \frac{1}{r}\left(\sigma^{12}\otimes + I\otimes j^{12}\right), \quad D_3 = \partial_z.$$

Thus, eq. (1.6) takes on the form

$$\left\{(\gamma^1\otimes\mu^{[01]} + \gamma^2\otimes\mu^{[02]} + \gamma^3\otimes\mu^{[03]})\partial_t\Psi +\right.$$
$$+(\gamma^0\otimes\mu^{[01]} + \gamma^2\otimes\mu^{[12]} - \gamma^3\otimes\mu^{[31]})\partial_r\Psi +$$
$$+(\gamma^0\otimes\mu^{[02]} + \gamma^3\otimes\mu^{[23]} - \gamma^1\otimes\mu^{[12]})D_2\Psi +$$
$$\left.+(\gamma^0\otimes\mu^{[03]} + \gamma^1\otimes\mu^{[31]} - \gamma^2\otimes\mu^{[23]})\partial_z\Psi\right\}_k +$$
$$+iM\{s_{01}\otimes\mu^{[01]} + s_{02}\otimes\mu^{[02]} + s_{03}\otimes\mu^{[03]} +$$
$$+s_{23}\otimes\mu^{[23]} + s_{31}\otimes\mu^{[31]} + s_{12}\otimes\mu^{[12]}\}\Psi = 0, \quad (1.9)$$

where $s_{01} = (\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0)/4$ and so on. We need expressions for 6 matrices $\mu^{[ca]}$:

$$\mu^{[01]} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mu^{[02]} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mu^{[03]} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mu^{[23]} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mu^{[31]} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mu^{[12]} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

and expressions for Dirac matrices:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\sigma^{12} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix}, \quad j^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$s_{01} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \quad s_{02} = -\begin{vmatrix} 0 & -2i & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{vmatrix},$$

$$s_{03} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad s_{23} = \begin{vmatrix} 0 & -2i & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{vmatrix},$$

$$s_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad s_{12} = \begin{vmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{vmatrix}.$$

We apply the substitution for cylindrically symmetric wave function (assuming $\varepsilon > 0$):

$$\Psi_{A(n)} = e^{-i\varepsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} \Phi_{A(n)}(r),$$

$$[\Phi_{A(n)}] = \Phi(r) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.10)$$

It should be noted that in the basis of cylindrical tetrad, parameter *m* stands for eigenvalues of the third projection of the total angular momentum, so *m* takes on the half-integer values $m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$. Allowing for the above substitution, we reduce the equation to the form

$$-i\varepsilon\left(\gamma^1 \otimes \mu^{[01]} + \gamma^2 \otimes \mu^{[02]} + \gamma^3 \otimes \mu^{[03]}\right)\Phi +$$
$$+\left(\gamma^0 \otimes \mu^{[01]} + \gamma^2 \otimes \mu^{[12]} - \gamma^3 \otimes \mu^{[31]}\right)\frac{d}{dr}\Phi +$$
$$+\left(\gamma^0 \otimes \mu^{[02]} + \gamma^3 \otimes \mu^{[23]} - \gamma^1 \otimes \mu^{[12]}\right)D_2\Phi +$$
$$+ ik\left(\gamma^0 \otimes \mu^{[03]} + \gamma^1 \otimes \mu^{[31]} - \gamma^2 \otimes \mu^{[23]}\right)\Phi +$$
$$+iM\left\{s_{01} \otimes \mu^{[01]} + s_{02} \otimes \mu^{[02]} + s_{03} \otimes \mu^{[03]} +\right.$$
$$\left.+ s_{23} \otimes \mu^{[23]} + s_{31} \otimes \mu^{[31]} + s_{12} \otimes \mu^{[12]}\right\}\Phi = 0, \quad (1.11)$$

where

$$D_2 = \frac{1}{r}\left(im + \sigma^{12} \otimes + I \otimes j^{12}\right). \qquad (1.12)$$

The main equation may be re-written in a shorter form

$$-i\varepsilon B_0\Phi + B_1\frac{d}{dr}\Phi + B_2 D_2\Psi + ikB_3\Phi +$$
$$+ iM\left\{s_{01} \otimes \mu^{[01]} + s_{02} \otimes \mu^{[02]} + s_{03} \otimes \mu^{[03]} +\right.$$
$$\left.+ s_{23} \otimes \mu^{[23]} + s_{31} \otimes \mu^{[31]} + s_{12} \otimes \mu^{[12]}\right\}\Phi = 0. \quad (1.13)$$

First, we calculate the terms:

$$-i\varepsilon B_0\Phi =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & +\varepsilon(d_3 - ih_2) & +i\varepsilon(h_1 - d_3) & +\varepsilon(-d_1 + id_2) \\ 0 & +\varepsilon(-h_3 + id_2) & +i\varepsilon(-d_1 - h_3) & +\varepsilon(h_1 + ih_2) \\ 0 & -\varepsilon(g_3 - if_2) & -i\varepsilon(f_1 - g_3) & -\varepsilon(-g_1 + ig_2) \\ 0 & -\varepsilon(-f_3 + ig_2) & -i\varepsilon(-g_1 - f_3) & -\varepsilon(f_1 + if_2) \end{vmatrix},$$

$$\frac{d}{dr}B_1\Phi = \begin{vmatrix} +h_2' + id_3' & 0 & h_0' - h_3' & h_2' + id_0' \\ -d_2' - ih_3' & 0 & -d_0' - d_3' & d_2' - ih_0' \\ -f_2' - ig_3' & 0 & -f_0' - f_3' & f_2' - ig_0' \\ g_2' + if_3' & 0 & g_0' - g_3' & g_2' + if_0' \end{vmatrix},$$

$$B_2 D_2\Phi =$$
$$= \frac{i}{2r}\begin{vmatrix} \begin{matrix}-(2\mu-1)h_1 + \\ +(2\mu+1)d_3 - \\ -2ih_2\end{matrix} & \begin{matrix}-(2\mu-1)\times \\ \times(h_0 - h_3)\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}-(2\mu-1)h_1 + \\ +(2\mu+1)d_0 - \\ -2ih_2\end{matrix} \\ \begin{matrix}+(2\mu+1)d_1 + \\ +(2\mu-1)h_3 + \\ +2id_2\end{matrix} & \begin{matrix}+(2\mu+1)\times \\ \times(d_0 + d_3)\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}-(2\mu+1)d_1 + \\ +(2\mu-1)h_0 - \\ -2id_2\end{matrix} \\ \begin{matrix}(2\mu-1)f_1 - \\ -(2\mu+1)g_3 + \\ +2if_2\end{matrix} & \begin{matrix}(2\mu-1)\times \\ \times(f_0 + f_3)\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}-(2\mu-1)f_1 - \\ -(2\mu+1)g_0 - \\ -2if_2\end{matrix} \\ \begin{matrix}-(2\mu+1)g_1 - \\ -(2\mu-1)f_3 - \\ -2ig_2\end{matrix} & \begin{matrix}-(2\mu+1)\times \\ \times(g_0 - g_3)\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}-(2\mu+1)g_1 - \\ -(2\mu-1)f_0 - \\ -2ig_2\end{matrix} \end{vmatrix},$$

$$ikB_3\Phi = \qquad (1.14)$$
$$= \begin{vmatrix} k(d_1 - id_2) & k(d_0 - ih_2) & ik(-d_0 + h_1) & 0 \\ k(-h_1 - ih_2) & k(-h_0 - id_2) & ik(-h_0 + d_1) & 0 \\ -k(g_1 - ig_2) & -k(g_0 + if_2) & -ik(-g_0 - f_1) & 0 \\ -k(-f_1 - if_2) & -k(-f_0 + ig_2) & -ik(-f_0 - g_1) & 0 \end{vmatrix}.$$

For massive term we get

$$+iM\left\{s_{01} \otimes \mu^{[01]} + s_{02} \otimes \mu^{[02]} + s_{03} \otimes \mu^{[03]} +\right.$$
$$\left.+ s_{23} \otimes \mu^{[23]} + s_{31} \otimes \mu^{[31]} + s_{12} \otimes \mu^{[12]}\right\}\Phi = \qquad (1.15)$$

$$= 2iM\begin{vmatrix} -i(f_3 + g_1) - g_2 & -f_2 - i(g_0 + g_3) & f_1 - g_0 - g_3 & -if_0 + ig_1 + g_2 \\ -if_1 + f_2 + ig_3 & -if_0 + if_3 + g_2 & f_0 - f_3 - g_1 & -if_1 + f_2 + ig_0 \\ -i(d_1 - id_2 + h_3) & -id_0 + id_3 + h_2 & -d_0 + d_3 - h_1 & -i(d_1 - id_2 + h_0) \\ i(d_3 - h_1) + h_2 & -d_2 - i(h_0 + h_3) & d_1 + h_0 + h_3 & i(d_0 + h_1 + ih_2) \end{vmatrix}.$$

Collect all summands in the equation together:

$$\begin{vmatrix} 0 & +\varepsilon(d_3 - ih_2) & +i\varepsilon(h_1 - d_3) & +\varepsilon(-d_1 + id_2) \\ 0 & +\varepsilon(-h_3 + id_2) & +i\varepsilon(-d_1 - h_3) & +\varepsilon(h_1 + ih_2) \\ 0 & -\varepsilon(g_3 - if_2) & -i\varepsilon(f_1 - g_3) & -\varepsilon(-g_1 + ig_2) \\ 0 & -\varepsilon(-f_3 + ig_2) & -i\varepsilon(-g_1 - f_3) & -\varepsilon(f_1 + if_2) \end{vmatrix} +$$

$$
+\begin{vmatrix} +h_2' + id_3' & 0 & +h_0' - h_3' & +h_2' + id_0' \\ -d_2' - ih_3' & 0 & -d_0' - d_3' & +d_2' - ih_0' \\ -f_2' - ig_3' & 0 & -f_0' - f_3' & +f_2' - ig_0' \\ +g_2' + if_3' & 0 & +g_0' - g_3' & +g_2' + if_0' \end{vmatrix} +
$$

$$
+\frac{i}{2r}\begin{vmatrix} \begin{matrix} -(2\mu-1)h_1 + \\ +(2\mu+1)d_3 - 2ih_2 \end{matrix} & -(2\mu-1)(h_0 - h_3) \\ \hline \begin{matrix} +(2\mu+1)d_1 + \\ +(2\mu-1)h_3 + 2id_2 \end{matrix} & +(2\mu+1)(d_0 + d_3) \\ \hline \begin{matrix} +(2\mu-1)f_1 - \\ -(2\mu+1)g_3 + 2if_2 \end{matrix} & +(2\mu-1)(f_0 + f_3) \\ \hline \begin{matrix} -(2\mu+1)g_1 - \\ -(2\mu-1)f_3 - 2ig_2 \end{matrix} & -(2\mu+1)(g_0 - g_3) \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 0 & -(2\mu-1)h_1 + (2\mu+1)d_0 - 2ih_2 \\ \hline 0 & -(2\mu+1)d_1 + (2\mu-1)h_0 - 2id_2 \\ \hline 0 & -(2\mu-1)f_1 - (2\mu+1)g_0 - 2if_2 \\ \hline 0 & -(2\mu+1)g_1 - (2\mu-1)f_0 - 2ig_2 \end{vmatrix} +
$$

$$
+\begin{vmatrix} +k(d_1 - id_2) & +k(d_0 - ih_2) & +ik(-d_0 + h_1) & 0 \\ +k(-h_1 - ih_2) & +k(-h_0 - id_2) & +ik(-h_0 + d_1) & 0 \\ -k(g_1 - ig_2) & -k(g_0 + if_2) & -ik(-g_0 - f_1) & 0 \\ -k(-f_1 - if_2) & -k(-f_0 + ig_2) & -ik(-f_0 - g_1) & 0 \end{vmatrix} +
$$

$$
+2M\begin{vmatrix} +f_3 + g_1 - ig_2 & -if_2 + g_0 + g_3 \\ \hline -g_3 + f_1 + if_2 & +ig_2 + f_0 - f_3 \\ \hline +h_3 + d_1 - id_2 & +ih_2 + d_0 - d_3 \\ \hline -d_3 + h_1 + ih_2 & -id_2 + h_0 + h_3 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} i(f_1 - g_0 - g_3) & +f_0 - g_1 + ig_2 \\ \hline i(f_0 - f_3 - g_1) & -g_0 + f_1 + if_2 \\ \hline i(-d_0 + d_3 - h_1) & +h_0 + d_1 - id_2 \\ \hline i(d_1 + h_0 + h_3) & -d_0 - h_1 - ih_2 \end{vmatrix} = 0.
$$

Further we will follow only the massless case.

2 Massless field

We have the system

$$
\begin{gathered}
h_2' + id_3' + \frac{i}{2r}\left[-(2m-1)h_1 + (2m+1)d_3 - 2ih_2\right] + \\
+ k(d_1 - id_2) = 0, \\
-d_2' - ih_3' + \frac{i}{2r}\left[+(2m+1)d_1 + (2m-1)h_3 + 2id_2\right] + \\
+ k(-h_1 - ih_2) = 0, \\
-f_2' - ig_3' + \frac{i}{2r}\left[+(2m-1)f_1 - (2m+1)g_3 + 2if_2\right] - \\
- k(g_1 - ig_2) = 0, \\
g_2' + if_3' + \frac{i}{2r}\left[-(2m+1)g_1 - (2m-1)f_3 - 2ig_2\right] - \\
- k(-f_1 - if_2) = 0;
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

$$
\begin{gathered}
+\varepsilon(d_3 - ih_2) + \frac{i}{2r}\left[-(2m-1)(h_0 - h_3)\right] + \\
+ k(d_0 - ih_2) = 0, \\
+\varepsilon(-h_3 + id_2) + \frac{i}{2r}\left[(2m+1)(d_0 + d_3)\right] + \\
+ k(-h_0 - id_2) = 0, \\
-\varepsilon(g_3 - if_2) + \frac{i}{2r}\left[(2m-1)(f_0 + f_3)\right] - k(g_0 + if_2) = 0, \\
-\varepsilon(-f_3 + ig_2) - \frac{i}{2r}\left[(2\mu+1)(g_0 - g_3)\right] - \\
- k(-f_0 + ig_2) = 0;
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

$$
\begin{gathered}
+i\varepsilon(h_1 - d_3) + h_0' - h_3' + ik(-d_0 + h_1) = 0, \\
+i\varepsilon(-d_1 - h_3) - d_0' - d_3' + ik(-h_0 + d_1) = 0, \\
-i\varepsilon(f_1 - g_3) - f_0' - f_3' - ik(-g_0 - f_1) = 0, \\
-i\varepsilon(-g_1 - f_3) + g_0' - g_3' - ik(-f_0 - g_1) = 0;
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

$$
\begin{gathered}
+\varepsilon(-d_1 + id_2) + h_2' + id_0' + \\
+\frac{i}{2r}\left[-(2m-1)h_1 + (2m+1)d_0 - 2ih_2\right] = 0, \\
+\varepsilon(h_1 + ih_2) + d_2' - ih_0' + \\
+\frac{i}{2r}\left[-(2m+1)d_1 + (2m-1)h_0 - 2id_2\right] = 0, \\
-\varepsilon(-g_1 + ig_2) + f_2' - ig_0' + \\
+\frac{i}{2r}\left[-(2m-1)f_1 - (2m+1)g_0 - 2if_2\right] = 0, \\
-\varepsilon(f_1 + if_2) + g_2' + if_0' + \\
+\frac{i}{2r}\left[-(2m+1)g_1 - (2m-1)f_0 - 2ig_2\right] = 0.
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Let us verify correctness of the system by substituting the gauge functions into it. The gauge solutions with cylindrical symmetry are determined by the formulas

$$
\begin{gathered}
\bar{\Psi}_n = D_n \Phi, \quad D_n = e^{\alpha}_{(n)} \partial_\alpha + \frac{1}{2}\sigma^{kl}\gamma_{kln}, \\
\Phi = e^{-i\varepsilon x^0} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{vmatrix} K_1(r) \\ K_2(r) \\ K_3(r) \\ K_4(r) \end{vmatrix}, \\
D_0 = \partial_0, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \\
D_2 = \frac{1}{r}(\partial_\phi + \sigma^{12}), \quad D_3 = \partial_z;
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

so they are given by the matrix (exponential multipliers are omitted)

$$
\bar{\Psi}_n = (\bar{\Psi}_{An}) = \begin{vmatrix} -i\varepsilon K_1 & K'_1 & \frac{i}{r}\left(m - \frac{1}{2}\right)K_1 & ikK_1 \\ -i\varepsilon K_2 & K'_2 & \frac{i}{r}\left(m + \frac{1}{2}\right)K_2 & ikK_2 \\ -i\varepsilon K_3 & K'_3 & \frac{i}{r}\left(m - \frac{1}{2}\right)K_3 & ikK_3 \\ -i\varepsilon K_4 & K'_4 & \frac{i}{r}\left(m + \frac{1}{2}\right)K_4 & ikK_4 \end{vmatrix} =
$$

$$=\begin{vmatrix} \bar f_0 & \bar f_1 & \bar f_2 & \bar f_3 \\ \bar g_0 & \bar g_1 & \bar g_2 & \bar g_3 \\ \bar h_0 & \bar h_1 & \bar h_2 & \bar h_3 \\ \bar d_0 & \bar d_1 & \bar d_2 & \bar d_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.6)$$

It is readily verified that all 16 equations are satisfied by these functions. It should be especially noted that any explicit form of separated gauge functions K_1, K_2, K_3, K_4 does not matter.

To proceed with the system, let us transform it to the new variables

$$f_1 + if_2 = F_1, \; f_1 - if_2 = F_2,$$
$$f_1 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2), \; f_2 = \frac{1}{2i}(F_1 - F_2);$$
$$g_1 + ig_2 = G_1, \; g_1 - ig_2 = G_2,$$
$$g_1 = \frac{1}{2}(G_1 + G_2), \; g_2 = \frac{1}{2i}(G_1 - G_2);$$
$$h_1 + ih_2 = H_1, \; h_1 - ih_2 = H_2,$$
$$h_1 = \frac{1}{2}(H_1 + H_2), \; h_2 = \frac{1}{2i}(H_1 - H_2);$$
$$d_1 + id_2 = D_1, \; d_1 - id_2 = D_2,$$
$$d_1 = \frac{1}{2}(D_1 + D_2), \; d_2 = \frac{1}{2i}(D_1 - D_2);$$
$$f_0 + f_3 = F_0, \; f_0 - f_3 = F_3,$$
$$f_0 = \frac{1}{2}(F_0 + F_3), \; f_3 = \frac{1}{2}(F_0 - F_3);$$
$$g_0 + g_3 = G_0, \; g_0 - g_3 = G_3,$$
$$g_0 = \frac{1}{2}(G_0 + G_3), \; g_3 = \frac{1}{2}(G_0 - G_3);$$
$$h_0 + h_3 = H_0, \; h_0 - h_3 = H_3,$$
$$h_0 = \frac{1}{2}(H_0 + H_3), \; h_3 = \frac{1}{2}(H_0 - H_3);$$
$$d_0 + d_3 = D_0, \; d_0 - d_3 = D_3,$$
$$d_0 = \frac{1}{2}(D_0 + D_3), \; d_3 = \frac{1}{2}(D_0 - D_3); \qquad (2.7)$$

in this way we arrive at new equations, which may be divided into two unlinked groups, each of 8 equations. It is convenient to apply special notations for two operators:

$$a = \frac{d}{dr} + \frac{1+2m}{2r}, \; b = \frac{d}{dr} + \frac{1-2m}{2r}. \qquad (2.8)$$

First, let us consider the first subsystem:

$$iaF_1 + iaG_3 - i\left(b + \frac{1}{r}\right)F_2 = (\varepsilon + k)G_2,$$
$$ibG_2 + ibF_0 - i\left(a + \frac{1}{r}\right)G_1 = (\varepsilon - k)F_1,$$
$$iaG_0 = (\varepsilon - k)G_2, \quad ibF_3 = (\varepsilon + k)F_1,$$
$$i\left(a - \frac{1}{r}\right)F_0 = F_2(\varepsilon - k), \; i\left(b - \frac{1}{r}\right)G_3 = G_1(\varepsilon + k),$$
$$ibF_0 = F_1(\varepsilon - k) - G_0(\varepsilon + k) + G_3(\varepsilon - k),$$
$$iaG_3 = G_2(\varepsilon + k) - F_3(\varepsilon - k) + F_0(\varepsilon + k). \qquad (2.9)$$

With the help of equations 7 and 8 we can exclude the variables F_0, G_3 in equations 1 and 2:

$$iaF_1 - F_3(\varepsilon - k) + F_0(\varepsilon + k) - i(b + 1/r)F_2 = 0,$$
$$ibG_2 - G_0(\varepsilon + k) + G_3(\varepsilon - k) - i(a + 1/r)G_1 = 0.$$

Further, with the help of equations 3, 4, 5, 6 we exclude the variables F_1, F_2 and G_1, G_2:

$$-\frac{1}{(\varepsilon + k)}abF_3 - F_3(\varepsilon - k) + F_0(\varepsilon + k) +$$
$$+\frac{1}{(\varepsilon - k)}\left(b + \frac{1}{r}\right)\left(a - \frac{1}{r}\right)F_0 = 0,$$
$$-b\frac{1}{(\varepsilon - k)}aG_0 - G_0(\varepsilon + k) + G_3(\varepsilon - k) +$$
$$+\left(a + \frac{1}{r}\right)\frac{1}{(\varepsilon + k)}\left(b - \frac{1}{r}\right)G_3 = 0,$$

or

$$\left[ab + \varepsilon^2 - k^2\right]\frac{F_3}{\varepsilon + k} =$$
$$= \left[\left(b + \frac{1}{r}\right)\left(a - \frac{1}{r}\right) + \varepsilon^2 - k^2\right]\frac{F_0}{\varepsilon - k},$$
$$\left[ba + \varepsilon^2 - k^2\right]\frac{G_0}{\varepsilon - k} =$$
$$= \left[\left(a + \frac{1}{r}\right)\left(b - \frac{1}{r}\right) + \varepsilon^2 - k^2\right]\frac{G_3}{\varepsilon + k}.$$

Taking in mind the following identities

$$ab = \left(b + \frac{1}{r}\right)\left(a - \frac{1}{r}\right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m - 1/2)^2}{r^2} = \Delta_-,$$
$$ba = \left(a + \frac{1}{r}\right)\left(b - \frac{1}{r}\right) =$$
$$= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m + 1/2)^2}{r^2} = \Delta_+, \qquad (2.10)$$

we get two 2-order equations:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m - 1/2)^2}{r^2}\right]\left(\frac{F_0}{\varepsilon - k} - \frac{F_3}{\varepsilon + k}\right) = 0,$$
$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{(m + 1/2)^2}{r^2}\right]\left(\frac{G_0}{\varepsilon - k} - \frac{G_3}{\varepsilon + k}\right) = 0. \qquad (2.11)$$

We will impose constraints of two types:

$$A, \; \frac{1}{\varepsilon + k}F_3(r) = +\frac{1}{\varepsilon - k}F_0(r) = f(r),$$
$$\frac{1}{\varepsilon + k}G_3(r) = +\frac{1}{\varepsilon - k}G_0(r) = g(r); \qquad (2.12)$$
$$B, \; \frac{1}{\varepsilon + k}F_3(r) = -\frac{1}{\varepsilon - k}F_0(r) = f(r),$$
$$\frac{1}{\varepsilon + k}G_3(r) = -\frac{1}{\varepsilon - k}G_0(r) = g(r). \qquad (2.13)$$

In the case A, eqs. (2.11) are satisfied identically, and the functions $f(r), g(r)$ may be arbitrary. Below we will see that the case A corresponds to the gauge solutions.

In the case B, the functions $f(r), g(r)$ obey the following equations

$$F_0, F_3, \left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\varepsilon^2-k^2-\frac{(m-1/2)^2}{r^2}\right]f(r)=0;$$

$$G_0, G_3,$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\varepsilon^2-k^2-\frac{(m+1/2)^2}{r^2}\right]g(r)=0; \quad (2.14)$$

and all remaining functions can be found by means of the formulas

$$F_1=\frac{ib}{(\varepsilon+k)}F_3=ibf,$$

$$F_2=\frac{i(a-1/r)}{\varepsilon-k}F_0=i(a-1/r)f,$$

$$G_1=\frac{i(b-1/r)}{\varepsilon+k}G_3=i(b-1/r)\,g, \quad (2.15)$$

$$G_2=\frac{ia}{\varepsilon-k}G_0=ia\,g.$$

Let us prove consistency of restrictions B with the complete system of equations. To this end, in all equations we should take into account the constraints

$$B,\ \frac{1}{\varepsilon+k}F_3(r)=-\frac{1}{\varepsilon-k}F_0(r),$$

$$\frac{1}{\varepsilon+k}G_3(r)=-\frac{1}{\varepsilon-k}G_0(r).$$

In this way, eqs. 3, 4, 5, 6 from (2.9) lead to

$$F_1=-\frac{ib}{\varepsilon-k}F_0,\ F_2=\frac{i(a-1/r)}{\varepsilon-k}F_0,$$

$$G_1=-\frac{i(b-1/r)}{(\varepsilon-k)}G_0,\ G_2=\frac{ia}{(\varepsilon-k)}G_0.$$

Let us follow the remaining four equations from (2.9):

$$iaF_1+iaG_3-i\left(b+\frac{1}{r}\right)F_2=(\varepsilon+k)G_2 \Rightarrow$$

$$-ia\frac{ib}{\varepsilon-k}F_0-ia\frac{\varepsilon+k}{\varepsilon-k}G_0-$$

$$-i\left(b+\frac{1}{r}\right)\frac{i(a-1/r)}{\varepsilon-k}F_0=\frac{\varepsilon+k}{(\varepsilon-k)}iaG_0 \Rightarrow$$

$$[ab+(b+1/r)(a-1/r)]F_0=2i(\varepsilon+k)aG_0 \Rightarrow$$

$$abF_0=i(\varepsilon+k)aG_0,$$

next

$$bF_0=i(\varepsilon+k)G_0;$$

$$ibG_2+ibF_0-i\left(a+\frac{1}{r}\right)G_1=+(\varepsilon-k)F_1 \Rightarrow$$

$$ib\frac{ia}{(\varepsilon-k)}G_0+ibF_0+i\left(a+\frac{1}{r}\right)\frac{i(b-1/r)}{(\varepsilon-k)}G_0=$$

$$=-(\varepsilon-k)\frac{ib}{\varepsilon-k}F_0,$$

$$[ba+(a+1/r)(b-1/r)]G_0=2i(\varepsilon-k)bF_0 \Rightarrow$$

$$baG_0=i(\varepsilon-k)bF_0,$$

next

$$aG_0=i(\varepsilon-k)F_0;$$

$$ibF_0=F_1(\varepsilon-k)-G_0(\varepsilon+k)+G_3(\varepsilon-k) \Rightarrow$$

$$ibF_0=-ibF_0-(\varepsilon+k)G_0-(\varepsilon+k)G_0,$$

that is

$$ibF_0=-(\varepsilon+k)G_0\ ;$$

next

$$iaG_3=G_2(\varepsilon+k)-F_3(\varepsilon-k)+F_0(\varepsilon+k) \Rightarrow$$

$$-ia\frac{\varepsilon+k}{\varepsilon-k}G_0=$$

$$=(\varepsilon+k)\frac{ia}{(\varepsilon-k)}G_0+(\varepsilon+k)F_0+F_0(\varepsilon+k),$$

that is

$$iaG_0=-(\varepsilon-k)F_0.$$

Thus, restrictions B are consistent with the system (2.9), only when the following four equations hold

$$abF_0=i(\varepsilon+k)aG_0,\ baG_0=i(\varepsilon-k)bF_0,$$

$$bF_0=i(\varepsilon+k)G_0,\ aG_0=i(\varepsilon-k)F_0; \quad (2.16)$$

we can see that only two equations are independent

$$bF_0=i(\varepsilon+k)G_0,\ aG_0=i(\varepsilon-k)F_0. \quad (2.17)$$

In the formulas $F_0=-(\varepsilon-k)f, G_0=-(\varepsilon-k)g$, the multipliers before *f* and *g* may be hidden in new notations:

$$F_0=-(\varepsilon-k)f=F,\ G_0=-(\varepsilon-k)g=G; \quad (2.18)$$

correspondingly, eqs. (2.17) are written as follows

$$bF=i(\varepsilon+k)G,\ aG=i(\varepsilon-k)F. \quad (2.19)$$

This 1-st order equations assume the above equations (2.14):

$$bF=i(\varepsilon+k)G,$$

$$aG=i(\varepsilon-k)F, \Rightarrow$$

$$abF=i(\varepsilon+k)aG=-(\varepsilon+k)(\varepsilon-k)F, \quad (2.20)$$

$$baG=i(\varepsilon-k)bF=-(\varepsilon-k)(\varepsilon+k)G.$$

Existence of the constrains (2.19) means that the system of 8 equations with restriction B describes only one solution, because the constrains (2.19) permit us to fix the relative coefficient between the variables $F(r)$ and $G(r)$.

To follow the consequences from the other 8 equations, let us write down both subsystems and compare them:

the first is

$$iaF_1+iaG_3-i(b+1/r)F_2=(\varepsilon+k)G_2,$$

$$ibG_2+ibF_0-i(a+1/r)G_1=(\varepsilon-k)F_1,$$

$$iaG_0=(\varepsilon-k)G_2,\ ibF_3=(\varepsilon+k)F_1,$$

$$i(a-1/r)F_0=F_2(\varepsilon-k),\ i(b-1/r)G_3=G_1(\varepsilon+k),$$

$$ibF_0=F_1(\varepsilon-k)-G_0(\varepsilon+k)+G_3(\varepsilon-k),$$

$$iaG_3=G_2(\varepsilon+k)-F_3(\varepsilon-k)+F_0(\varepsilon+k); \quad (2.21)$$

the second is

$$iaH_1-iaD_0-i(b+1/r)H_2=-(\varepsilon-k)D_2,$$

$$ibD_2-ibH_3-i(a+1/r)D_1=-(\varepsilon+k)H_1,$$

$$-iaD_3 = -(\varepsilon + k)D_2,\ -ibH_0 = -(\varepsilon - k)H_1,$$
$$-i(a - 1/r)H_3 = -(\varepsilon + k)H_2,$$
$$-i(b - 1/r)D_0 = -(\varepsilon - k)D_1,$$
$$-ibH_3 = -H_1(\varepsilon + k) - D_3(\varepsilon - k) + D_0(\varepsilon + k),$$
$$-iaD_0 = -D_2(\varepsilon - k) - H_0(\varepsilon + k) + H_3(\varepsilon - k). \quad (2.22)$$

We can immediately notice that eqs. (2.22) follow from (2.21) at the changes:

$$F_1 \Rightarrow H_1,\ F_2 \Rightarrow H_2,\ F_0 \Rightarrow -H_3,\ F_3 \Rightarrow -H_{03},$$
$$(\varepsilon + k) \Rightarrow -(\varepsilon - k),$$
$$G_1 \Rightarrow D_1,\ G_2 \Rightarrow D_2,\ G_0 \Rightarrow -D_3,\ G_3 \Rightarrow -D_0,$$
$$(\varepsilon - k) \Rightarrow +(\varepsilon + k); \quad (2.23)$$

further we derive the rules

$$F \Rightarrow \frac{-H_3}{-(\varepsilon + k)} + \frac{H_0}{-(\varepsilon - k)} = -H,$$
$$G \Rightarrow \frac{-D_3}{-(\varepsilon + k)} + \frac{D_0}{-(\varepsilon - k)} = -D. \quad (2.24)$$

Therefore, the final equations from the first subsystem

$$iaG = -(\varepsilon - k)F,\ (\Delta_- + \varepsilon^2 - k^2)F = 0,$$
$$ibF = -(\varepsilon + k)G,\ (\Delta_+ + \varepsilon^2 - k^2)G = 0 \quad (2.25)$$

transform to those for the second subsystem as shown below

$$iaD = (\varepsilon + k)H,\ (\Delta_- + \varepsilon^2 - k^2)H = 0,$$
$$ibH = (\varepsilon - k)D,\ (\Delta_+ + \varepsilon^2 - k^2)H = 0. \quad (2.26)$$

3 Gauge solutions

Let us collect together the results of solving the system of 16 equations for the case A:

$$F_0 = (\varepsilon - k)f,\ F_1 = ibf,$$
$$F_2 = i(a - 1/r)f,\ F_3 = (\varepsilon + k)f,$$
$$G_0 = (\varepsilon - k)g,\ G_1 = i(b - 1/r)g,$$
$$G_2 = iag,\ G_3 = (\varepsilon + k)g,$$
$$H_0 = (\varepsilon - k)h,\ H_1 = ibh, \quad (3.1)$$
$$H_2 = i(a - 1/r)h,\ H_3 = (\varepsilon + k)h,$$
$$D_0 = (\varepsilon - k)d,\ D_1 = i(b - 1/r)d,$$
$$D_2 = iad,\ D_3 = (\varepsilon + k)d.$$

In fact, here we have four independent solutions, determined by four arbitrary functions

$$(f, 0, 0, 0),\ (0, g, 0, 0),\ (0, 0, h, 0),\ (0, 0, 0, d).$$

In turn, let us transform the above gauge solutions (2.11) to similar variables, so we obtain

$$\bar{F}_0 = -i(\varepsilon - k)K_1,\ \bar{F}_1 = \left(\frac{d}{dr} - \frac{m - 1/2}{r}\right)K_1,$$
$$\bar{F}_2 = \left(\frac{d}{dr} + \frac{m - 1/2}{r}\right)K_1,\ \bar{F}_2 = -i(\varepsilon + k)K_1,$$
$$\bar{G}_0 = -i(\varepsilon - k)K_1,\ \bar{G}_1 = \left(\frac{d}{dr} - \frac{m + 1/2}{r}\right)K_2,$$
$$\bar{G}_2 = \left(\frac{d}{dr} + \frac{m + 1/2}{r}\right)K_2,\ \bar{G}_3 = -i(\varepsilon + k)K_2,$$
$$\bar{H}_0 = -i(\varepsilon - k)K_1,\ \bar{H}_1 = \left(\frac{d}{dr} - \frac{m - 1/2}{r}\right)K_3,$$
$$\bar{H}_2 = \left(\frac{d}{dr} + \frac{m - 1/2}{r}\right)K_3,\ \bar{H}_2 = -i(\varepsilon + k)K_3,$$
$$\bar{D}_0 = -i(\varepsilon - k)K_4,\ \bar{D}_1 = \left(\frac{d}{dr} - \frac{m + 1/2}{r}\right)K_4,$$
$$\bar{D}_2 = \left(\frac{d}{dr} + \frac{m + 1/2}{r}\right)K_4,\ \bar{D}_3 = -i(\varepsilon + k)K_4. \quad (3.2)$$

We can readily see that the matrix of gauge solutions coincides with the matrix (3.1) of solutions for the case A (up to the multiplier *i*).

4 Solving the second order equations, taking into account the constraints

Let us find solutions of two equations

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \varepsilon^2 - k^2 - \frac{(m + 1/2)^2}{r^2}\right]G(r) = 0,$$
$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \varepsilon^2 - k^2 - \frac{(m - 1/2)^2}{r^2}\right]F(r) = 0. \quad (4.1)$$

In the variable $x = \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}\, r$, they have the form of Bessel equations:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + 1 - \frac{p^2}{x^2}\right]G(x) = 0,$$
$$p = m + \frac{1}{2},\ -p = -m - \frac{1}{2};$$
$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + 1 - \frac{s^2}{x^2}\right]F(x) = 0, \quad (4.2)$$
$$s = m - \frac{1}{2} = p - 1,\ -s = -m + \frac{1}{2} = -p + 1.$$

Their independent solutions are

$$G_{(1)}(x) \sim J_p(x),\ G_{(2)}(x) \sim J_{-p}(x);$$
$$F_{(1)}(x) \sim J_s(x) = J_{p-1}(x), \quad (4.3)$$
$$F_{(2)}(x) \sim J_{-s}(x) = J_{-p+1}(x).$$

Below we will consider only solutions which are regular in $x = 0$. First, we assume positive values of *m*. Let us transform the constraints

$$aG = i(\varepsilon - k)F,\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{m + 1/2}{r}\right)G = i(\varepsilon - k)F;$$
$$bF = i(\varepsilon + k)G,\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{m - 1/2}{r}\right)F = i(\varepsilon + k)G$$

to Bessel form. The first constraint gives

$$\sqrt{\varepsilon + k}\left(\frac{d}{dx} + \frac{m + 1/2}{x}\right)G = i\sqrt{\varepsilon - k}F,$$
$$G_{(1)} = \beta J_p,\ F_{(1)} = \alpha J_{p-1},$$

that is

$$\sqrt{\varepsilon + k}\left(\frac{d}{dx} + \frac{p}{x}\right)\beta J_p = i\sqrt{\varepsilon - k}\,\alpha J_{p-1}. \quad (4.4)$$

The second constraint gives

$$\sqrt{\varepsilon-k}\left(\frac{d}{dx}-\frac{m-1/2}{x}\right)F=i\sqrt{\varepsilon+k}G,$$

$$F_{(1)}=\alpha J_{p-1},\ G_{(1)}=\beta J_{p},$$

so that

$$\sqrt{\varepsilon-k}\ (\frac{d}{dx}-\frac{p-1}{x})\ \alpha J_{p-1}=i\sqrt{\varepsilon+k}\ \beta J_{p}. \quad (4.5)$$

Further, taking in mind the known properties of the Bessel functions

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{p}{x}\right)J_{p}=J_{p-1},\ \left(\frac{d}{dx}-\frac{p-1}{x}\right)J_{p-1}=-J_{p},$$

we derive two algebraic relations which determine coefficients α and β:

$$\sqrt{\varepsilon+k}\beta=i\sqrt{\varepsilon-k}\alpha,\ \sqrt{\varepsilon-k}\alpha=-i\sqrt{\varepsilon+k}\beta\Rightarrow$$

$$\alpha=\sqrt{\varepsilon+k},\ \beta=i\sqrt{\varepsilon-k}.$$

Therefore, the needed solution is

$$F_{(1)}(x)=\sqrt{\varepsilon+k}J_{p-1}(x),$$
$$G_{(1)}(x)=i\sqrt{\varepsilon-k}J_{p}(x),\ m>0. \quad (4.6)$$

Similar solution at negative m has the form

$$F_{(2)}(x)=\sqrt{\varepsilon+k}J_{-p+1}(x),$$
$$G_{(2)}(x)=i\sqrt{\varepsilon-k}J_{-p}(x),\ m<0. \quad (4.7)$$

In accordance with the above noted symmetry between two subsystems, we get similar results for functions $H(x)$ and $D(x)$:

$$H_{(1)}(x)=\sqrt{\varepsilon-k}J_{p-1}(x),$$
$$D_{(1)}(x)=i\sqrt{\varepsilon+k}J_{p}(x),\ m>0; \quad (4.8)$$

$$H_{(2)}(x)=\sqrt{\varepsilon-k}J_{-p+1}(x),$$
$$D_{(2)}(x)=i\sqrt{\varepsilon+k}J_{-p}(x),\ m<0. \quad (4.9)$$

Conclusion

The wave equation for the massless spin 3/2 has been studied in cylindrical coordinates of Minkowski space. After separating the variables, the system of 16 equations was derived. There are constructed 6 independent solutions. Four of them coincide with the gauge ones, two solutions do not contain the gauge components and describe physically observable states of the particle.

REFERENCES

1. *Pauli*, *W.* Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz. – Helvetica Physica Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. *Fierz*, *M.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

3. *Rarita*, *W.* On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64.

4. *Ginzburg*, *V.L.* To the theory of particles of spin 3/2 / V.L. Ginzburg // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1942. – Vol. 12. – P. 425–442 (in Russian).

5. *Davydov*, *A.S.* Wave equation for a particle with spin 3/2, in absence of external field / A.S. Davydov // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1943. – Vol. 13. – P. 313–319.

6. *Bhabha*, *H.J.* Relativistic Wave Equations for the Elementary Particles / H.J. Bhabha // Reviews of Modern Physics. – 1945. – Vol. 17, № 2-3. – P. 200–216.

7. *Gelfand*, *I.M.* General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group / I.M. Gelfand, A.M. Yaglom // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1948. – Vol. 18, № 8. – P. 703–733 (in Russian).

8. *Fradkin*, *E.S.* To the theory of particles with higher spins / E.S. Fradkin // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1950. – Vol. 20, № 1. – P. 27–38 (in Russian).

9. *Fedorov*, *F.I.* Generalized relativistic wave equations / F.I. Fedorov // Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. – 1952. – Vol. 82, № 1. – P. 37–40 (in Russian).

10. *Feinberg*, *V.Ya.* On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields / V.Ya. Feinberg // Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR. – 1955. – Vol. 6. – P. 269–332 (in Russian).

11. *Petras*, *M.A.* Note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M.A. Petras // Czechoslovak Journal of Physics. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.

12. *Bogush*, *A.A.* Equation for a 3/2 particle with anomalous magnetic moment / A.A. Bogush // Russian Physics Journal, 1984. – Vol. 1. – P. 23–27 (in Russian).

13. *Pletyukhov*, *V.A.* To the theory of particles of spin 3/2 / V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev // Russian Physics Journal. – 1985. – Vol. 28, № 1. – P. 91–95 (in Russian).

14. *Pletyukhov*, *V.A.* On the relationship between various formulations of particle theory with spin 3/2 / V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev // Proceedings of the Academy of Sciences of the BSSR. Physics and Mathematics series. – 1985. – Vol. 5. – P. 90–95 (in Russian).

15. *Johnson*, *K.* Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E.C.G. Sudarshan // Ann. Phys. N.Y. – 1961. – Vol. 13. – P. 121–145.

16. *Bender*, *C.M.* Peculiarities of a free massless spin 3/2 field theory / C.M. Bender, M. McCoy Barry // Phys. Rev. – 1966. – Vol. 148. – P. 1375–1380.

17. *Hagen*, *C.R.* Search for consistent interactions of the Rarita-Schwinger field / C.R. Hagen, L.P.S. Singh // Phys. Rev. D. – 1982. – Vol. 26. – P. 393–398.

18. *Loide*, *R.K.* Equations for a vector-bispinor / R.K. Loide // J. Phys. A. – 1984. – Vol. 17. – P. 2535–2550.

19. *Red'kov*, *V.M.* Particle fields in the Riemann space and the Lorentz group / V.M. Red'kov. – Minsk, Belorusian science Publ, 2009. – 486 p. (in Russian).

20. *Pletyukhov*, *V.A.* Relativistic wave equations and internal degrees of freedom / V.A. Pletyukhov, V.M. Red'kov, V.I. Strazhev. – Minsk, Belaruskaya Navuka Publ. – 2015. – 328 p. (in Russian).

21. *Elementary particles with internal structure in external fields.* I. *General theory.* II. *Physical problems.* / V.V. Kisel [et al.]. – New York: Nova Science Publishers Inc. – 2018. – 404 p., 402 p.

22. *Fradkin Equation for a Spin* 3/2 *Particle in Presence of External Electromagnetic and Gravitational Fields* / V.V. Kisel [et al.] // Ukr. J. Phys. – 2019. – Vol. 64, № 12. – P. 1112–1117.

23. *Ivashkevich*, *A.V.* Zero mass field with the spin 3/2: solutions of the wave equation and the helicity operator / A.V. Ivashkevich, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series. – 2019. – Vol. 55, № 3. – P. 338–354 (in Russian).

24. *Spherical solutions of the wave equation for a spin* 3/2 *particle* / A.V. Ivashkevich, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2019. – Vol. 63, № 3. – P. 282–290.

25. *Spin* 3/2 *particle*: *Pauli – Fierz theory*, *non-relativistic approximation* / A.V. Ivashkevich, Ya.A. Voynova, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series. – 2020. – Vol. 56, № 3. – P. 335–349.

Поступила в редакцию 11.08.2021.

Информация об авторах

Ивашкевич Алина Валентиновна – аспирант

ФИЗИКА

УДК 539.23 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_28

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ СЛОЕВ Zn_xMg_yO С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Ю.В. Никитюк, А.В. Семченко, В.В. Сидский, К.Д. Данильченко, В.А. Прохоренко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

PREDICTION OF THE PROPERTIES OF SEMICONDUCTOR Zn_xMg_yO SOL-GEL LAYERS USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

Y.V. Nikitjuk, A.V. Semchenko, V.V. Sidsky, K.D. Danilchenko, V.A. Prohorenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. С использованием искусственных нейронных сетей выполнено прогнозирование свойств полупроводниковых золь-гель пленок состава Zn_xMg_yO. Для формирования обучающего массива данных и массива данных для тестирования нейронных сетей золь-гель методом были сформированы пленки ZnO : Mg. Измерение фотоэлектрических характеристик золь-гель покрытий было выполнено на автоматизированном базовом лазерном испытательном комплексе в соответствии с ГОСТ-17772-88. Эксперименты были выполнены для 150 вариантов входных параметров, 135 из которых были использованы для обучения нейронных сетей. В работе выполнено исследование влияния архитектуры нейронных сетей на точность прогнозирования свойств полупроводниковых золь-гель пленок Zn_xMg_yO.

Ключевые слова: *нейронная сеть*, *золь-гель метод*, *тонкие пленки*.

Для цитирования: *Прогнозирование свойств полупроводниковых золь-гель слоев* Zn_xMg_yO *с помощью искусственных нейронных сетей* / Ю.В. Никитюк, А.В. Семченко, В.В. Сидский, К.Д. Данильченко, В.А. Прохоренко // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 28–32. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_28

Abstract. Using artificial neural networks, the properties of semiconductor sol-gel layers of Zn_xMg_yO were predicted. To form a training data set and a data set for testing neural networks by the sol-gel method, layers were formed based on ZnO : Mg films. The measurement of the photoelectric characteristics of the sol-gel coatings was carried out on an automated basic laser testing complex in accordance with National Standart-17772-88. The experiments were performed for 150 input parameters, 135 of which were used to train neural networks. In this work, we studied the influence of the architecture of neural networks on the accuracy of predicting the properties of Zn_xMg_yO semiconductor sol-gel layers.

Keywords: *neural network*, *sol-gel method*, *thin films.*

For citation: *Prediction of the properties of semiconductor* Zn_xMg_yO *sol-gel layers using artificial neural networks* / Y.V. Nikitjuk, A.V. Semchenko, V.V. Sidsky, K.D. Danilchenko, V.A. Prohorenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 28–32. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_28 (in Russian)

Введение

В последнее время ведется активное изучение материалов для датчиков ультрафиолетового излучения [1]–[2]. УФ-датчики обеспечивают возможность решения ряда задач медицинского, промышленного и экологического направлений. Широкое использование УФ-датчиков определено отсутствием их реакции на солнечное излучение и излучения от нагретых частей оборудования. Таким образом поиск и создание новых материалов для УФ-датчиков является актуальной задачей.

Известно, что тонкие пленки на основе ZnO обладают фоточувствительностью, что делает возможным их использование при формировании солнечных элементов и светоизлучающих диодов [3]–[6]. Перспективными являются пленки с селективной фоточувствительностью состава Zn_xMg_yO, полученные золь-гель методом. Одной из основных характеристик полупроводниковых материалов является ширина запрещенной зоны. Для варьирования ширины запрещенной зоны тонкие пленки ZnO легируют различными металлами, в том числе магнием. Радиус иона Mg^{2+} (0,57 A) сравним с радиусом иона Zn^{2+} (0,60 A), что делает магний подходящим в качестве легирующего элемента для замены Zn в его решетке и изменения ширины запрещённой зоны [7]–[11].

В настоящее время искусственные нейронные сети получили широкое применение в различных областях науки и техники [12]–[17]. В данной статье искусственные нейронные сети были применены для прогнозирования свойств полупроводниковых золь-гель пленок Zn_xMg_yO.

1 Методика получения золь-гель слоев ZnMgO

Золь-гель методом с использованием раздельного гидролиза были получены пленки ZnO : Mg. В качестве метода нанесения применялся метод центрифугирования (spin-coating). В качестве исходных материалов были использованы дигидрат ацетата цинка (ZnAc) $[Zn(CH_3COO)_2 \times 2H_2O]$, ацетат магния $(Mg(CH_3COO)_2)$, изопропиловый спирт, моноэтаноламин (MEA) $[C_2H_7NO]$. Плёнкообразующий раствор (ПОР) был приготовлен следующим образом: ацетат цинка и ацетат магния отдельно растворяли в изопропиловом спирте и перемешивали при 60° С в течение 10 минут. Затем в него был добавлен моноэтаноламин при молярном соотношении: MEA / ZnAc 1 : 1 и H_2O / ZnAc 2 : 1 соответственно. Аналогично изготавливался золь на основе ацетата магния. Затем золи смешивались в различных концентрациях для получения пленок с различным соотношением компонентов (1 : 1, 1 : 2 и 1 : 5). В золь дополнительно была добавлена азотная кислота. Осаждение пленки производилось методом центрифугирования со скоростью вращения 2000 об/мин в течение 40 секунд с последующей сушкой каждого слоя при 250° С в течение 5 минут. Окончательную термообработку производили при температурах 450° С в течение 60 минут. Подложками при осаждении слоев для измерения вольтамперных характеристик служили кремниевые пластины.

2 Методика измерений фотоэлектрических характеристик

Измерение фототока проводилось на автоматизированном базовом лазерном испытательном комплексе (рисунок 2.1) в соответствии с ГОСТ-17772-88 [18].

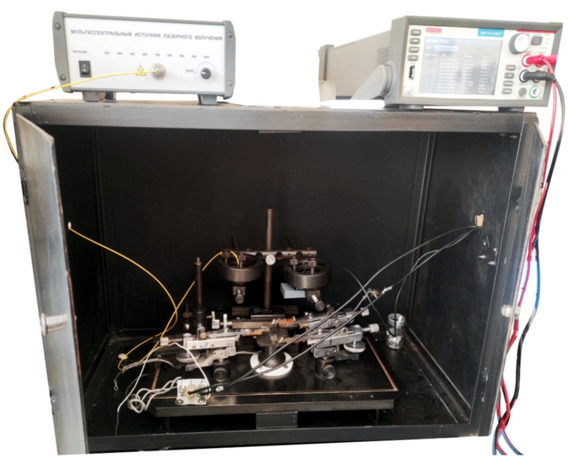


Рисунок 2.1 – Внешний вид светоизолирующего бокса с зондовой системой для измерения электрических и фотоэлектрических характеристик некорпусированных структур

Оптический модуль комплекса включает в себя систему позиционирования испытуемого образца, мультиспектральный источник лазерного излучения, представляющий собой набор из 9 лазерных диодов с длинами волн 405, 450, 520, 660, 780, 808, 905, 980 и 1064 нм с общим оптоволоконным выводом и платами управления, а также с калиброванной мощностью излучения порядка 2 мВт [19]. В качестве источника УФ (278 нм) использовался светодиод TO-3535BC-UVC265-30-6V-E мощностью 300 мкВт, размещенный в специализированной оснастке.

3 Применение нейронной сети

Искусственные нейронные сети являются адаптивными системами, которые изменяют свою структуру на основе информации, проходящей через них при обучении. Широкое использование искусственных нейронных сетей определяется тем, что они создавались для нахождения нелинейных зависимостей в многомерных массивах данных. Их особенностью является то, что они не программируются, а обучаются на множестве данных[13], [15].

На рисунке 3.1 представлена блок-схема процедуры моделирования с помощью искусственной нейронной сети (ИНС).

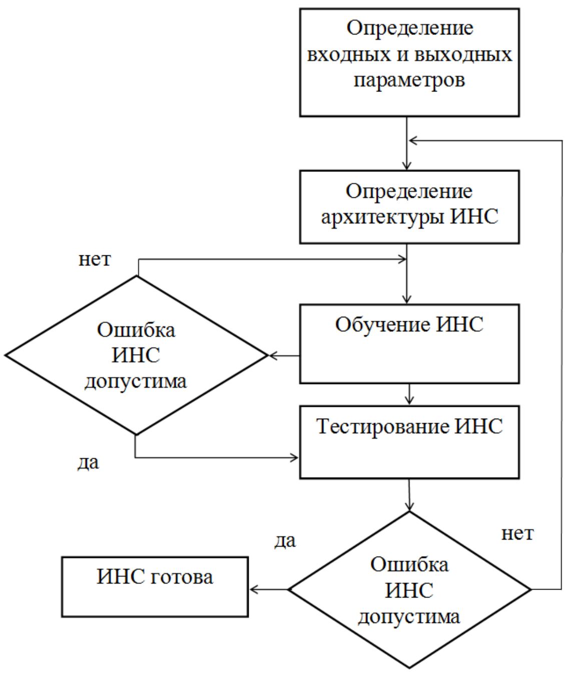


Рисунок 3.1 – Блок-схема процедуры моделирования с использованием нейронной сети

Обучающая и тестовая выборки размером в 135 и 15 наборов данных соответственно были сформированы в результате экспериментальных исследований по методикам, приведенным выше. Параметры тестовой выборки представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Тестовый набор данных

№	Мольное отношение		Напряжение смещения	Длина волны	Сила тока	Ширина запрещенной зоны
	Zn	Mg	U, В	λ, нм	I, А	E_g, эВ
1	1	2	8,4	376,8	–0,00144	3,21
2	1	2	7,2	371,6	–0,00168	3,21
3	1	5	–14,4	280,6	–0,00588	4,77
4	1	2	1,8	348,2	–0,00276	3,21
5	1	5	–6,6	314,4	–0,00432	4,77
6	1	5	–1,2	337,8	–0,00324	4,77
7	1	5	10,8	387,2	–0,00096	4,77
8	1	1	7,8	374,2	–0,00156	3,28 / 4,72
9	1	5	–0,6	340,4	–0,00312	4,77
10	1	1	9,6	382,0	–0,00120	3,28 / 4,72
11	1	5	–11,4	293,6	–0,00528	4,77
12	1	1	–9,6	301,4	–0,00492	3,28 / 4,72
13	1	1	–13,8	283,2	–0,00576	3,28 / 4,72
14	1	1	6,6	369,0	–0,00180	3,28 / 4,72
15	1	1	14,4	402,8	–0,00024	3,28 / 4,72

Таблица 3.2 – Результаты оценки нейросетевой модели для прогнозирования селективной фоточувствительности

№		Архитектура сети	R^2	*MAE*	*RMSE*	*MAPE*
1	*a*	[3-3-3-1]	0,9998	1,845e-05	2,656e-05	2,6
	b		0,9997	2,298e-05	2,977e-05	1,8
2	*a*	[3-5-3-1]	0,9999	1,036e-05	1,227e-05	0,7
	b		0,9999	8,770e-06	1,068e-05	0,6
3	*a*	[3-10-3-1]	0,9999	1,487e-05	2,042e-05	1,0
	b		0,9998	1,644e-05	2,149e-05	1,0
4	*a*	[3-20-3-1]	0,9997	2,574e-05	3,321e-05	3,3
	b		0,9999	1,484e-05	2,028e-05	1,3
5	*a*	[3-20-10-3-1]	0,9999	1,151e-05	1,424e-05	1,2
	b		0,9999	9,804e-06	1,129e-05	0,5
6	*a*	[3-30-10-3-1]	0,9999	1,752e-05	2,073e-05	0,8
	b		0,9998	1,958e-05	2,416e-05	1,0
7	*a*	[3-40-10-3-1]	0,9999	1,642e-05	2,162e-05	2,3
	b		0,9999	1,132e-05	1,695e-05	1,3
8	*a*	[3-30-20-3-1]	0,9998	2,062e-05	2,479e-05	1,2
	b		0,9999	1,467e-05	1,856e-05	0,7
9	*a*	[3-40-20-3-1]	0,9999	9,133e-06	1,160e-05	0,4
	b		0,9999	1,119e-05	1,611e-05	0,4
10	*a*	[3-50-20-3-1]	0,9998	1,319e-05	2,684e-05	0,6
	b		0,9999	4,467e-06	6,226e-06	0,3
11	*a*	[3-60-20-3-1]	0,9999	1,266e-05	1,491e-05	1,3
	b		0,9999	1,387e-05	1,528e-05	0,8

Для прогнозирования свойств полупроводниковых золь-гель слоев ZnMgO были применены полносвязанные нейронные сети прямого распространения с различными архитектурами, созданные в открытой программной библиотеке для машинного обучения TensorFlow [14].

При создании сетей для прогнозирования селективной фоточувствительности использовалась функция активации ReLu и оптимизатор Adam. Сети формировались с функцией потерь mse.

Количество эпох при обучении сетей равнялось 100, а их архитектура изменялась (таблица 3.2).

Для оценки эффективности работы нейронных сетей были использованы следующие критерии:

– коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2},$$

– средняя абсолютная ошибка (англ. Mean Absolute Error, *MAE*):

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|d_i - y_i\right|,$$

– среднеквадратичная ошибка (англ. Root Mean Square Error, *RMSE*):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - y_i\right)^2},$$

– средняя абсолютная процентная ошибка (англ. Mean Absolute Percentage Error, *MAPE*):

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{d_i - y_i}{d_i}\right|\cdot 100,$$

где d_i – желаемый выход сети, y_i – реальный выход сети.

Результаты оценки созданных нейронных сетей для тестовой и обучающей выборки приведены в таблице 3.2. В таблице 3.2 буквами *a* и *b* обозначены результаты, полученные для тестовой и обучающей выборки соответственно.

При тестировании лучшие результаты показал вариант 7 конфигурации нейронных сетей с тремя скрытыми слоями, обеспечивающий значения R^2 и *MAPE*, равные 0,9999 и 0,4% соответственно.

При формировании нейронных сетей, обеспечивающих прогнозирование ширины запрещенной зоны полупроводниковых золь-гель пленок Zn_xMg_yO, для решения задачи многоклассовой классификации применялся оптимизатор Adam, при этом для скрытых слоев использовалась функция активации ReLu, а для выходного слоя функция активации softmax. Нейронные сети создавались с функцией потерь mse для скрытых слоев и с функцией потерь categorical_crossentropy для выходного слоя. Количество эпох при обучении сетей равнялось 50 и 100. Архитектура искусственных нейронных сетей изменялась (таблица 3.3).

Таблица 3.2 – Результаты оценки нейросетевой модели для прогнозирования ширины запрещенной зоны

N		Архитектура сети	Эпохи	Точность
1	*a*	[3-1-3]	50	0,6
	b		50	0,7
2	*a*	[3-1-3]	100	0,8
	b		100	0,8
3	*a*	[3-2-3]	50	0,8
	b		50	0,7
4	*a*	[3-2-3]	100	0,9
	b		100	0,9
5	*a*	[3-3-3]	50	0,9
	b		50	0,8
6	*a*	[3-3-3]	100	1
	b		100	1

Для оценки эффективности работы нейронных сетей использовалась доля правильных ответов. Результаты оценки созданных нейронных сетей для тестовой и обучающей выборки приведены в таблице 3.3. В таблице 3.3 буквами *a* и *b* обозначены результаты, полученные для тестовой и обучающей выборки соответственно.

При тестировании лучшие результаты были получены с использованием 6 варианта конфигурации нейронных сетей с количеством эпох обучения равном 100. Нейронная сеть этого варианта без ошибок отработала на тестовой и обучающей выборках.

Заключение

В работе показана возможность определения селективной фоточувствительности и ширины запрещенной зоны полупроводниковых золь-гель пленок Zn_xMg_yO с использованием нейронных сетей. В результате численного эксперимента определены архитектуры нейронных сетей, обеспечивающие лучшие результаты при прогнозировании свойств данного материла. Для прогнозирования ширины запрещенной зоны оказалось достаточным использование нейронной сети с одним скрытым слоем, а для определения селективной фоточувствительности лучшие результаты были получены для нейронных сетей с несколькими скрытыми слоями. При этом средняя абсолютная процентная ошибка при определении силы тока составила 0,4%, а прогнозирование ширины запрещенной зоны выполнено без ошибок при использовании нейронных сетей с архитектурой [3-40-20-3-1] и [3-3-3] соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liu*, *K.* ZnO-Based Ultraviolet Photodetectors / K. Liu, M.Sakurai, M. Aono // Sensors. – 2010. – Vol. 10. – P. 8604–8634.

2. *Gradient bandgap narrowing in severely deformed* ZnO *nanoparticles* / Q. Yuanshen [et al.] // Materials Research Letters. – 2021. – Vol. 9. – P. 58–64.

3. *Effect of magnesium dopant on the structural*, *morphological and electrical properties of* ZnO *nanoparticles by sol-gel method* / S.J. Priscilla [et al.] // Materials Today: Proceedings. – 2021. – Vol. 36, Part 4. – P. 793–796. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.07.005

4. *Tailoring microstructure and optical properties of* MgZnO *film on glass by substrate temperature* / K. Gu [et al.] // Materials Letters. – 2020. – Vol. 278. – P. 128416.

5. *A comparative analysis for effects of solvents on optical properties of* Mg *doped* ZnO *thin films for optoelectronic applications* / F. Baig, M.W. Ashraf, A. Asif, M. Imran // Optik. – 2020. – Vol. 208. – P. 164534.

6. *Magnesium-doped zinc oxide nanorod-nanotube semiconductor / p-silicon heterojunction diodes* / Y. Caglar [et al.] // Applied Physics A. – 2016. – Vol. 122. – Article number 733. – DOI: https://doi.org/10.1007/s00339-016-0251-0

7. *Novel sputtering method to obtain wide band gap and low resistivity in as-deposited magnesium doped zinc oxide films* / M. Loeza-Poot [et al.] // Materials Science in Semiconductor Processing. – 2019. – Vol. 104. – P. 104646. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.mssp.2019.104646

8. *Maensiri*, *S.* Synthesis and optical properties of nanocrystalline ZnO powders by a simple method using zinc acetate dihydrate and poly (vinyl pyrrolidone) / S. Maensiri, P. Laokul, V. Promarak // Journal of Crystal Growth. – 2006. – Vol. 289. – P. 102–106.

9. *Beyer*, *W.* Transparent conducting oxide films for thin film silicon / W. Beyer, J. Hupkes, H. Stiebig // Thin Sol. Films. – 2007. – № 516. – P. 147.

10. *Structural and Optical Properties of* Mg *Doped* ZnO *Thin Films Deposited by DC Magnetron Sputtering* / A.Sh. Asvarov [et al.] // Journal of Nano- and Electronic Physics. – 2016. – Vol. 8. – P. 04053.

11. *Effects of oxygen / argon ratio and annealing on structural and optical properties of* ZnO *thin films* / B. Zhou [et al.] // Applied Surface Science. – 2012. – Vol. 258. – P. 5759–5764. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2012.02.088

12. *A review on applications of artificial intelligence in modeling and optimization of laser beam machining* / A.N. Bakhtiyari [et al.] // Optics & Laser Technology. – 2021. – Vol. 135. – P. 1–18.

13. *Головко*, *В.А.* Нейросетевые технологии обработки данных: учеб. пособие / В.А. Головко, В.В. Краснопрошин. – Минск: БГУ, 2017. – 263 с.

14. *Шолле*, *Ф.* Глубокое обучение на Python / Ф. Шолле. – СПб.: Питер, 2018. – 400 с.

15. *Кирьянов*, *И.И.* Прогнозирование химических сдвигов ЯМР ^{13}C производных фуллерена C_{60} с использованием искусственных нейронных сетей: автореферат дис. … канд. физ.-мат. наук: Уфа, 2021. – 24 с.

16. *Identification of crack-like defects in elastic structural elements on the basis of evolution algorithms* / A.A. Krasnoshchekov [et al.] // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 412–419.

17. *Применение искусственных нейронных сетей и метода конечных элементов для определения параметров обработки кварцевых золь-гель стекол эллиптическими лазерными пучками* / Ю.В. Никитюк [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 30–36.

18. *Фотоактивные свойства нанокомпозиционных покрытий* $ZnO_X : MgO$, *осажденных в вакууме и методом золь-гель синтеза* / В.В. Малютина-Бронская [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 39–44.

19. *Автоматизированный базовый лазерный испытательный комплекс для тестирования перспективных видов полупроводниковых фотоприемников* / В.В. Малютина-Бронская [и др.] // Сб. материалов 13-й международной научно-технической конференции «Приборостроение – 2020» (18–20 ноября 2020 г., г. Минск, Беларусь). – Минск: БИТУ. – 2020. – С. 391–392.

Поступила в редакцию 26.01.2022.

Информация об авторах

Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Семченко Алина Валентиновна – к.ф.-м.н., доцент
Сидский Виталий Валерьевич – к.т.н., доцент
Данильченко Константин Дмитриевич – мл. науч. сотр.
Прохоренко Владислав Александрович – старший преподаватель

УДК 621.38 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_33

СИНТЕЗ СИГНАЛОВ ЭЛЕКТРОСТИМУЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМИОГРАММ

А.Н. Осипов, И.О. Хазановский, Д.А. Котов, П.И. Балтрукович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, *Минск*

SYNTHESIS OF ELECTROSTIMULATION SIGNALS BASED ON TIME-FREQUENCY ANALYSES OF ELECTROMYOGRAMS

A.N. Osipov, I.O. Khazanovsky, D.A. Kotov, P.I. Baltrukovich

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, *Minsk*

Аннотация. Представлены результаты исследования характеристик поверхностных электромиограмм (ЭМГ) скелетных мышц человека, снятых при типичных движениях. Определены наиболее преобладающие частоты в спектре ЭМГ в момент воздействия на мышцу, выявлены закономерности изменений в спектре ЭМГ с увеличением развиваемого мышцей усилия. Предложено синтезировать сигналы электростимуляции в системе с биотехнической обратной связью с использованием выявленных закономерностей.

Ключевые слова: *синтез сигналов электростимуляции*, *частотно-временной анализ электромиограмм.*

Для цитирования: *Синтез сигналов электростимуляции на основе частотно-временного анализа электромиограмм* / А.Н. Осипов, И.О. Хазановский, Д.А. Котов, П.И. Балтрукович // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 33–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_33

Abstract. The research results of surface electromyograms (EMG) characteristics of human skeletal muscles, recorded during typical movements are introduced. The most dominant frequencies in the EMG spectrum, during the influence on a muscle, as well as the patterns of change in the EMG spectrum with an increase in the force developed by a muscle, are discovered. It was suggested to synthesize electrostimulation signals into a system with biotechnical feedback, using the discovered patterns.

Keywords: *synthesis of electrostimulation signals*, *time-frequency analysis of electromyograms.*

For citation: *Synthesis of electrostimulation signals based on time-frequency analyses of electromyograms* / A.N. Osipov, I.O. Khazanovsky, D.A. Kotov, P.I. Baltrukovich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 33–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_33 (in Russian)

Введение

Современный уровень информационно-коммуникационных технологий предоставляет обширные возможности для развития электронного здравоохранения с целью повышения качества и продолжительности жизни людей. Для лечения ряда заболеваний в настоящее время применяют электростимуляционные методики на базе компьютерных систем с обратной связью. Системы электростимуляции с обратной связью позволяют в режиме реального времени осуществлять индивидуальный контроль отдельных физиологических параметров, в соответствии с которыми вырабатывается терапевтическое воздействие [1]. Выработка оптимального воздействия осуществляется на основе анализа импедансных характеристик биотканей. Широко применяются в практике системы, в которых управляющее воздействие синтезируется на основе электромиограмм, снятых с мышц-доноров [2]. В данной работе приведены результаты частотно-временного анализа электромиограмм групп мышц, на основании которого предложен алгоритм корректировки параметров воздействия (частоты стимуляции) в зависимости от вызываемого мышечного усилия.

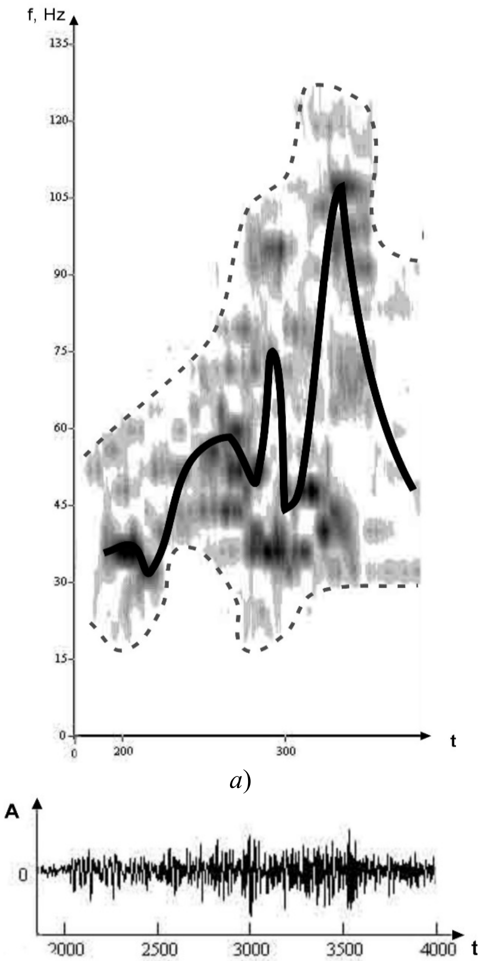
1 Частотно-временной анализ ЭМГ биотканей

Исследования интерференционных электромиограмм (ИЭМГ) различных мышечных групп, снятых при типичных движениях, проведены на электромиографе Compas фирмы NICOLET. Частота дискретизации ИЭМГ – 1000 Гц. Частотно-временной анализ значимой части суммарной электромиограммы выполняется в соответствии с алгоритмом быстрого оконного преобразования Фурье, описанным в [3], [4], [5]. С помощью программного пакета MatLab построены спектрограммы сигналов ИЭМГ. При построении использовано прямоугольное окно длиной 256 выборок. В исследовании участвовало 9 добровольцев в возрасте от 19 до 22 лет.

На рисунке 1.1, *а*) представлена электромиограмма, полученная при сокращении двуглавой мышцы плеча, а на рисунке 1.1, *б*) – соответствующая спектрограмма. На рисунках 1.2, *а*) и 1.2, *б*) – соответственно электромиограмма и спектрограмма сокращения дельтовидной мышцы, рисунке 1.3 – продольной мышцы живота, рисунке 1.4 – короткой мышцы, отводящей большой палец кисти. Для простоты восприятия отображаемые спектрограммы содержат только гармоники, которые имеют амплитуду не меньше 0,7 от максимальной амплитуды. Гармоники с максимальной амплитудой отображаются наиболее темным цветом. Таким образом, на рисунке представлены наиболее преобладающие в текущий момент времени частоты в спектре ИЭМГ.

Для крупных мышц (двуглавая мышца плеча, дельтовидная мышца, (рисунок 1.1, рисунок 1.2), основная энергия сигнала ИЭМГ приходится на частоты, не превышающие 150 Гц, для продольной мышца живота – 250 Гц. Для более мелких мышц (мышца, отводящая большой палец) – до 500 Гц.

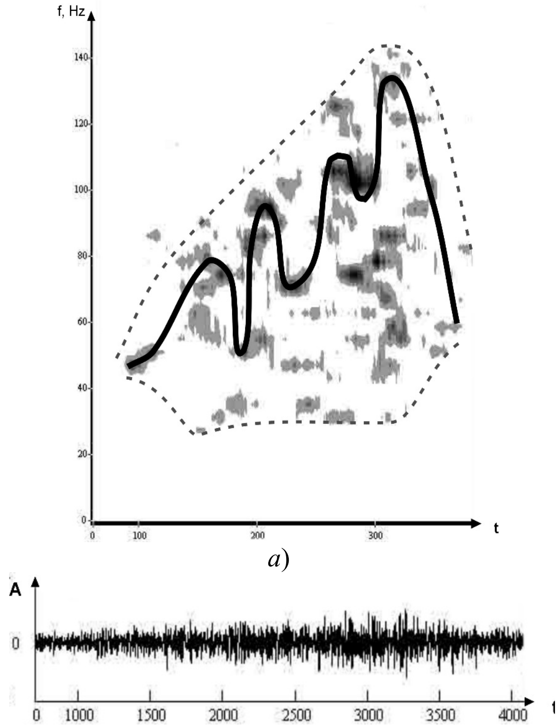
С увеличением усилия, развиваемого мышцей, наблюдаются следующие закономерности в спектре ИЭМГ всех испытуемых волонтеров. Первая – средняя частота спектра, которая преобладает в спектре в данный момент времени, возрастает.



а)

б)

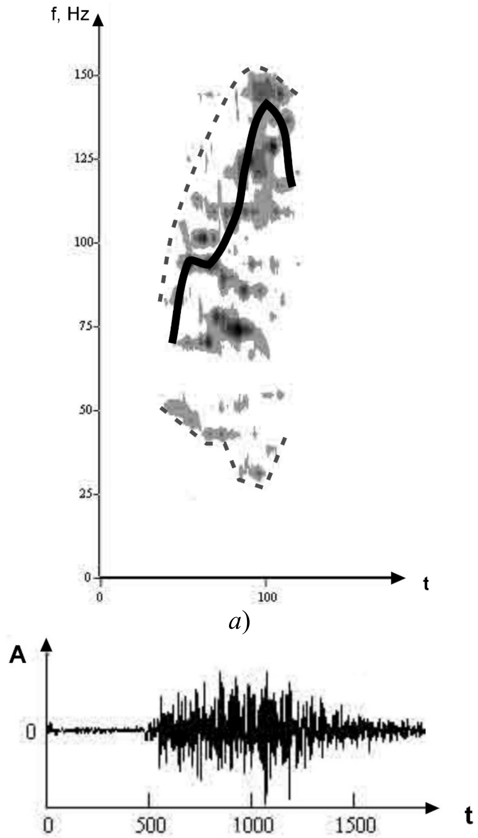
Рисунок 1.1 – Спектрограмма (*а*) и электромиограмма (*б*), полученная при сокращении двуглавой мышцы плеча



а)

б)

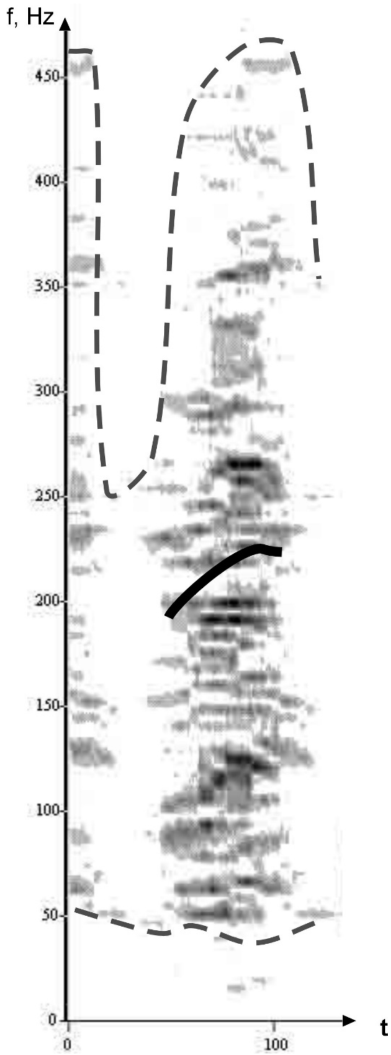
Рисунок 1.2 – Спектрограмма (*а*) и электромиограмма (*б*), полученная при сокращении дельтовидной мышцы



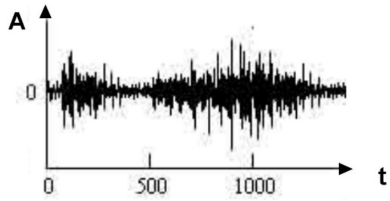
а)

б)

Рисунок 1.3 – Спектрограмма (*а*) и электромиограмма (*б*), полученная при сокращении продольной мышцы живота



а)



б)

Рисунок 1.4 – Спектрограмма (*а*) и электромиограмма (*б*), полученная при сокращении мышцы, отводящей большой палец кисти

Средняя частота спектра fср определена в эффективной полосе спектра сигнала fмакс-fмин [6], для которой энергия сигнала в полосе fмакс-fср равна энергии в полосе fср-fмин. Выявленная закономерность может быть объяснена линейной зависимостью между величиной изометрического напряжения мышцы и частотой импульсации двигательных единиц. При сокращении двуглавой мышцы плеча здорового человека, средняя частота спектра ЭМГ возрастает от 40–50 до 120–130 Гц. Время нарастания частоты составляет 0,5–1 с. При расслаблении мышцы наблюдается обратный процесс. Более мелкие мышцы, обеспечивающие в эксперименте более быстрое движение, характеризуются меньшим временем нарастания частоты (~50 мс). Вторая закономерность – с увеличением усилия, развиваемого мышцей, расширяется полоса преобладающих частот. Физиологической причиной этого, предположительно, является то, что с увеличением усилия увеличивается количество участвующих в сокращении тонических и фазических двигательных единиц.

2 Алгоритм управления несущей частотой стимула на основе минимума фазо-частотной характеристики

Выявленные закономерности предлагается ис-пользовать при синтезе оптимальных сигналов электростимуляции в системах электростимуляции с биотехнической обратной связью (рисунок 2.1).

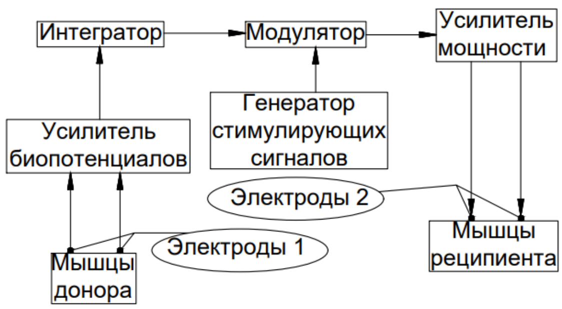


Рисунок 2.1 – Система электростимуляции с биотехнической обратной связью

Сигналы ИЭМГ, отводимые при выполнении движения от тех или иных мышц донора с помощью поверхностных электродов, используются для управления сигналами электростимуляции. Для этого сигнал электромиограммы, снятый с помощью электродов с нервно-мышечных групп донора через усилитель биопотенциалов, подается на интегратор 1, выполняющий выделение огибающей. Далее сигнал огибающей поступает на один из входов модулятора, на второй подается сигнал с генератора стимулирующих сигналов. Сигнал с выхода модулятора через усилитель мощности подается на электроды, расположенные на идентичных мышцах реципиента. Биоуправляющие сигналы в данном случае описываются выражением:

$$S(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \Theta),$$

где $A(t)$ – огибающая ИЭМГ, ω_0 – частота синусоидальных колебаний, Θ – начальная фаза колебаний.

Синтезированные таким образом стимулы содержат только низкочастотные гармоники спектра ИЭМГ. Для получения стимулирующего воздействия адекватного естественным сигналам, вызывающим активность мышц, необходимо учитывать компоненты ИМГ, соответствующие силе и скорости сокращения мышцы. Учитывая выявленные при анализе спектрограмм закономерности (рост средней частоты и расширение спектра преобладающих частот ИЭМГ с увеличением развиваемого мышцей усилия), сигнал электростимуляции предлагается синтезировать в соответствии с выражением:

$$S(t) = A(t)\sum_{i}^{n}\cos(\omega_0^i(t) + \omega_{\ddot{a}}(t))t,$$

где $i = 1+]f_{\text{A}}(t)[$, $f_{\text{A}}(t)$ – нормировочная функция, определяющая изменение ширины спектра сигнала при изменении мышечного усилия, $A(t)$, $\omega_{\ddot{a}}(t)$ – девиация частоты.

Заключение

Таким образом, установлена зависимость между силой, развиваемой мышцей, полосой преобладающих частот и средней частотой возбуждающих ее электрических потенциалов. Соответствующие частоты различаются для морфологически различных мышц. Время нарастания частоты пропорционально скорости сокращения мышечных волокон. С целью получения максимального терапевтического эффекта на основании полученных результатов предложен метод синтеза биоуправляющего сигнала. Результаты работы могут быть использованы при разработке аппаратов электростимуляции с биоуправлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Системы комплексной электромагнитотерапии*: учебное пособие для вузов; под редакцией А.М. Беркутова, В.И. Жулева, Г.А. Кураева, Е.М. Прошина. – Москва: Лаборатория Базовых знаний, 2000. – 376 с.

2. *Вовк, М.И.* Биотехнические системы управления двигательными функциями человека / М.И. Вовк // Кибернетика и вычислительная техника. – 2017. – № 1 (187). – С. 49–66.

3. *Method of time-frequency analysis of compound electromyogram in estimation of neurogenic control efficiency in human skeletal muscles* / A. Osipov [et al.] // Activitas Nervosa Superior Rediviva. – 2015. – Vol. 57, № 4. – P. 101–107.

4. *Time-Frequency Analysis of Global Electromyogram in Qualitative and Quantitative Estimation of Human Neuromuscular System Functional Condition* / M. Mezhennaya [et al.] // Biomedical electronics. – 2012. – № 2. – P. 3–11.

5. *The therapy and diagnostic hardware-software complex of total electromyography and electrical stimulation* / M. Mezhennaya, A. Osipov, N. Davydova, M. Davydov // Proceedings of Conference "Facilities of Medical Electronics and Novel Medical Technologies – MedElectronics-2014". – BSUIR. – 2014. – P. 268–272.

6. *Осипов, А.Н.* Спектральный анализ сигналов электростимуляции нервно-мышечной ткани / А.Н. Осипов, М.В. Давыдов // Доклады БГУИР. – 2005. – № 3 (11). – С. 53–58.

Поступила в редакцию 08.12.2021.

Информация об авторах

Осипов Анатолий Николаевич – к.т.н., доцент
Хазановский Игорь Олегович
Котов Дмитрий Анатольевич – к.т.н., доцент
Балтрукович Петр Иванович – к.т.н.

УДК 537.31:621.9.048.7:621.798:547.551.1:546.47-31 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_37

ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОГО СИНТЕЗА И ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГИБРИДНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ПОЛИАНИЛИНА И ОКСИДА ЦИНКА

А.А. Рогачёв[1], **А.М. Михалко**[2], **М.А. Ярмоленко**[2], **Джин Сюхуэй**[3], **Хонглианг Джанг**[3], **Хонгтао Цао**[4], **А.В. Рогачёв**[2]

[1]*Институт химии новых материалов Национальной Академии Наук Беларуси*, *Минск*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[3]*Пекинский технологический институт*
[4]*Институт технологии материалов и инженерии Китайской академии наук*, *Нинбо*

FEATURES OF ELECTRON-BEAM SYNTHESIS AND ELECTROPHYSICAL PROPERTIES OF HYBRID COATINGS BASED ON POLYANILINE AND ZINC OXIDE

A.A. Rogachev[1], **A.M. Mikhalko**[2], **M.A. Yarmolenko**[2], **Jin Xuhui**[3], **Hongliang Zhang**[3], **Hongtao Cao**[4], **A.V. Rogachev**[2]

[1]*Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus*, *Minsk*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*
[3]*Beijing Institute of Technology*
[4]*Institute of Materials Technology & Engineering Chinese Academy of Sciences*, *Ningbo*

Аннотация. Определены кинетические особенности осаждения и электрофизические свойства двухслойных покрытий на основе оксида цинка и полианилина (ПАНИ). Покрытия формировали путем последовательного воздействия в вакууме потока низкоэнергетических электронов на порошок ацетата цинка и механическую смесь порошков ПАНИ и оксида фосфора (V). Применение оксида фосфора приводит к возникновению линейных проводящих участков в структуре ПАНИ с высокой плотностью поляронных, делокализованых структур. Методами регистрации вольтамперных характеристик и импедансной спектроскопии установлены значения удельной проводимости, энергии активации носителей заряда для покрытий ZnO – ПАНИ + P_2O_5 толщиной до 200 нм в диапазоне температур от 20 до 100° C.

Ключевые слова: *гибридные покрытия*, *полианилин*, *оксид цинка*, *электрофизические свойства*, *электронно-лучевое диспергирование*.

Для цитирования: *Особенности электронно-лучевого синтеза и электрофизические свойства гибридных покрытий на основе полианилина и оксида цинка* / А.А. Рогачёв, А.М. Михалко, М.А. Ярмоленко, Джин Сюхуэй, Хонглианг Джанг, Хонгтао Цао, А.В. Рогачёв // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 37–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_37

Abstract. Kinetic features of deposition and electrophysical properties of two-layer coatings based on zinc oxide and polyaniline (PANI) are determined. The coatings were formed in vacuum by consistent influence of low-energy electrons stream on zinc acetate powder and a mechanical mixture of PANI and phosphorus (V) oxide powders. The application of phosphorus oxide leads to the appearance of linear conductive sections in the PANI structure with a high density of polaron, delocalized structures. For the ZnO – PANI + P_2O_5 coatings up to 200 nm thick in the temperature range from 20 to 100° C the values of specific conductivity, activation energy of charge carriers were determined.

Keywords: *hybrid coatings*, *polyaniline*, *zinc oxide*, *electrophysical properties*, *electron beam deposition*.

For citation: *Features of electron-beam synthesis and electrophysical properties of hybrid coatings based on polyaniline and zinc oxide* / A.A. Rogachev, A.M. Mikhalko, M.A. Yarmolenko, Jin Xuhui, Hongliang Zhang, Hongtao Cao, A.V. Rogachev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 37–43. – DOI: https://doi.org/ 10.54341/20778708_2022_1_50_37 (in Russian)

Введение

В числе перспективных методов формирования полупроводниковых материалов с регулируемыми функциональными свойствами отмечают синтез гибридных материалов (ГМ) с контролируемой наноструктурой. Такие материалы представляют собой систему, состоящую по крайней мере из двух компонентов, различной химической природы (органической и неорганической) [1], [2]. Выбор природы компонентов таких материалов, их фазового состава определяет в значительной степени свойства материала. Так, использование органических олигомеров или полимеров в качестве основной фазы ГМ позволяет наряду с особыми электрофизическими свойствами реализовать такие специфические характеристики как высокие механические, защитные свойства, гидрофобность или гидрофильность, селективное поглощение, влияющее на параметры фотоактивности.

Особый интерес представляет формирование ГМ на основе полупроводников и проводящих полимеров, в частности, полианилина. Данное направление активно развивается и находится на этапе интенсивного накопления информации о новых полимерных материалах, их свойствах и способах применения. Осаждение покрытий ПАНИ + полупроводник, как правило, производится с использованием жидких сред. При этом основным недостатком растворных способов является многостадийность и длительность, необходимость непрерывного контроля технологических параметров, использование токсичных соединений. Относительно свободным от отмеченных недостатков является метод формирования покрытий из газовой фазы, генерируемой воздействием потока низкоэнергетических электронов на ПАНИ (основание эмеральдина). Метод позволяет осуществлять допирование и протонирование осаждаемых слоев непосредственно при нанесении покрытия [3]–[5]. Приведенные в работах [5]–[8] результаты свидетельствуют о возможности эффективного управления процессами структурообразования в таких системах и, соответственно, изменения в широких пределах электрофизических свойств покрытий. На примере покрытий, сформированных электронно-лучевым диспергированием механических смесей порошков ПАНИ и солей благородных металлов, показана высокая перспективность метода для формирования ГМ с повышенными электропроводящими, фотовольтаическими и каталитическими свойствами [9]. Покрытия, осажденные из газовой фазы, характеризуются стабильными свойствами, могут проявлять специфические спектральные зависимости электропроводности, избирательного поглощения, что позволит их эффективно использовать в различных оптоэлектронных устройствах.

Целью настоящей работы является установление особенностей формирования из активной газовой фазы двухслойных структур на основе ПАНИ и оксида цинка, исследование молекулярной структуры и электрофизических свойств таких покрытий.

1 Методика эксперимента

Объектом исследования явились двухслойные покрытия на основе оксида цинка и ПАНИ. Покрытия формировали путем последовательного воздействия в вакууме потока низкоэнергетических электронов на порошок ацетата цинка и механическую смесь порошков ПАНИ и оксида фосфора (V). На мишень направлялся поток электронов с энергией 900 ÷ 1500 эВ и плотностью 0,01÷0,04 А/см^2. Начальное давление остаточных газов в вакуумной камере соответствовало 5–10 мПа. Схема осаждения гибридных покрытий представлена на рисунке 1.1. Для поворота электронного луча на 180° применялось постоянное магнитное поле, создаваемое электромагнитом. При послойном нанесении покрытия применялся поворотный столик с несколькими мишенями.

В качестве подложек для измерения электрофизических характеристик покрытий использовались диэлектрические пластины из керамики с проводящими графитовыми структурами в виде гребенчатого конденсатора встречно-штыревого типа, для спектроскопических исследований – кварцевые пластины, для регистрации спектров комбинационного рассеяния – кремниевые пластины, для проведения ИК-спектроскопических исследований – подложки NaCl.

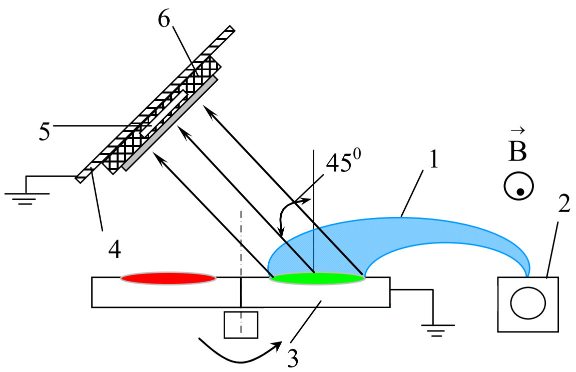


Рисунок 1.1 – Схема осаждения гибридных покрытий на основе полимеров и полупроводников из активной газовой фазы:
1 – электронный луч; 2 – электронно-лучевой испаритель с поворотом луча на 180°;
3 – столик с мишенями, 4 – подложкодержатель;
5 – кварцевый измеритель толщины; 6 – подложка

Термообработку покрытий ацетата цинка с целью получения оксида цинка проводили на воздухе при температуре 200°C в течение 60 минут.

Толщина формируемых слоев контролировалась непосредственно в процессе нанесения с помощью кварцевого измерителя толщины и не превышала 200 нм. При формирования композиционных слоев толщину покрытия определяли по плотности основного вводимого компонента, которая в случае ПАНИ принималась равной 1,36 г / см^3.

Электрофизические свойства композиционных и двухслойных покрытий на основе полианилина и оксида цинка определяли путем построения вольтамперных характеристик (ВАХ) и методом импедансной спектроскопии.

2 Результаты и их обсуждение

Кинетика электронно-лучевого диспергирования ПАНИ, оксида фосфора и их смеси, оцениваемая по скорости роста покрытия, давлении в вакуумной камере имеет нестационарный характер, что характерно для процесса нанесения органических соединений [10] (рисунок 2.1). Для процесса электронно-лучевого диспергирования ПАНИ характерно наличие индукционного периода (72 секунды), по истечении которого фиксировалось начало роста покрытия (рисунок 2.1, *а*).

При электронно-лучевом диспергировании оксида фосфора (рисунок 2.1, *б*) установлено первоначальное повышение давления в вакуумной камере до 12 мПа. При этом процесс осаждения покрытия не фиксировался. Данный факт, по-видимому, обусловлен нагревом электронным лучом мишени с оксидом фосфора и выделением летучих адсорбированных компонентов, в частности, связанной воды. Через 45 секунд начинается рост покрытия, давление в вакуумной камере ступенчато падает до 5 мПа и наблюдается значительное возрастание скорости роста покрытия. После 180-и секунд диспергирования скорость роста покрытия снижается, давление несколько возрастает до 7 мПа и после 210-и секунд рост покрытия прекращается.

При воздействии электронного луча на механическую смесь порошков ПАНИ и P_2O_5, кинетика диспергировании которого представлена на рисунке 2.1, *в*), было установлено начало роста покрытия после 40-й секунды. При этом наблюдался рост давления в вакуумной камере до 16 мПа при остаточном давлении 8 мПа. Данный факт связан, по-видимому, с образованием незначительного количества активных летучих фрагментов, имеющих высокую реакционную способность к пленкообразованию. При дальнейшем диспергировании имеет место практически линейный рост покрытия со скоростью порядка 0,15 нм/с. Наблюдаемый экспериментальный факт, по-видимому, обусловлен сложными процессами взаимодействия ацетата цинка, P_2O_5 и ПАНИ в мишени при воздействии потока электронов. В результате формируется поток летучих компонентов, имеющих высокую реакционную способность к пленкообразованию.

При электронно-лучевом диспергировании ацетата цинка установлено начало роста покрытия после 64 секунды. При этом наблюдался рост давления в вакуумной камере до 26 мПа. Высокое давление обусловлено, прежде всего, наличием связанной воды в исходных кристаллах ацетата цинка.

Методом комбинационного рассеяния (КР-спектроскопия) оценены изменения молекулярной структуры ПАНИ при введении в покрытие оксида фосфора. В КР-спектре исходного порошка ПАНИ (рисунок 2.2) регистрируются три наиболее интенсивные полосы поглощения при 1586 $см^{-1}$, 1472 $см^{-1}$ и 1160 $см^{-1}$, ответственные за валентные С - С колебания бензойных колец, валентные колебания групп С = N хинойдных участков и деформационные колебания С - Н группы в бензойдных и хинойдных кольцах соответственно [11], [12]. В спектре покрытия ПАНИ исчезает пик при 1472 $см^{-1}$, что свидетельствует, прежде всего, об изменении конформации макромолекулы из свернутой в вытянутую, а появление пика около 1600 $см^{-1}$, ответственного за валентные колебания С = С групп хиноидного фрагмента и его протонирование, – до восстановленной полухинойдной структуры [13]. Полученные данные соответствуют результатам ранее

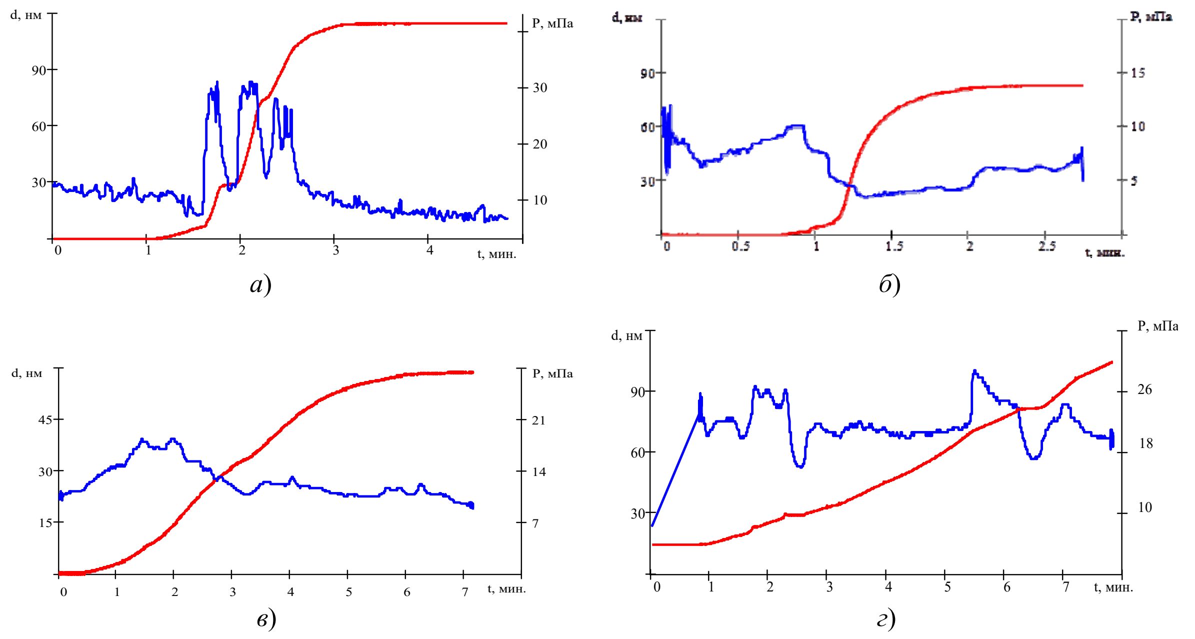


Рисунок 2.1 – Кинетические зависимости толщины покрытия (красная линия) и давления в камере (синяя линия) при электронно-лучевом диспергирования мишеней ПАНИ (*а*), P_2O_5 (*б*), ПАНИ+P_2O_5 (*в*), ацетата цинка (*г*)

проведенных ИК-спектроскопических исследований, свидетельствующим об образовании более восстановленной структуры покрытий ПАНИ по сравнению с исходным блочным полимером [4], [5], 14].

Анализ КР-спектров покрытий, получаемых диспергированием ПАНИ и оксида фосфора, указывает на высокую степень допирования формируемых покрытий на основе ПАНИ и формирование проводящей структуры (рисунок 2.2). На это указывает широкий пик около 1600 $см^{-1}$, одновременное появление интенсивного пика при 1368 $см^{-1}$, подтверждающего формирование делокализованных поляронных структур [15], [16]. Отметим, что при нанесении только покрытия ПАНИ, образование делокализованных поляронных структур выявлено не было, а установлено только исчезновение пика при 1480 $см^{-1}$.

Результаты проведенных исследований указывают на формирование при электронно-лучевом диспергировании порошка ПАНИ плоских вытянутых цепей с высоким значением разброса их по длине, причем в процессе нанесения данные покрытия преимущественно восстанавливаются. При допировании покрытия оксидом фосфора образуются проводящие участки ПАНИ, линейная структура которых практически не нарушается межмолекулярной сшивкой, но имеющие высокую плотность поляронных, делокализованых структур. Данная особенность структурного состояния наносимых покрытий электронно-лучевым диспергированием свидетельствует о возможности осаждения плоских упорядоченных слоев ПАНИ, которые могут служить основой для формирования полисопряженной структуры с облегченным межцепочечным переносом заряда, что должно увеличить проводимость всей тонкопленочной системы.

Особенности электрофизических свойств двухслойных покрытий на основе полианилина и оксида цинка исследовали путем построения вольтамперных характеристик (ВАХ) и методом импедансной спектроскопии. ВАХ однокомпонентного покрытия, формируемого электронно-лучевым диспергированием ацетатат цинка и по-следующего отжига при температуре $T_{отж} = 200$ °С, время отжига $t_{отж} = 1$ час при температуре от 20 до 100 °С представлены на рисунке 2.3, *а*.

Установлено, что ВАХ покрытия ZnO имеет линейный характер при напряжении до 1,5 В, который нарушается при более высоких напряжениях, что может свидетельствовать, прежде всего, о достаточно сложном механизме проводимости данного покрытия, близком к полупроводниковому типу при данных условиях формирования покрытия. С ростом температуры до 100 °С проводимость нанесенных слоев возрастает.

ВАХ двухслойного покрытия, формируемого электронно-лучевым диспергированием ацетата цинка и последующего отжига при температуре $T_{отж} = 200$ °С, (время отжига $t_{отж} = 1$ час) и нанесения второго слоя путем электронно-лучевым диспергированием смеси ПАНИ+P_2O_5 (покрытие маркируемое ZnO – ПАНИ + P_2O_5) при температуре от 20 до 100 °С с толщинами 80 и 100 нм соответственно, имеет линейный характер до значений напряжения 2,5 В. С ростом температуры до 100 °С проводимость нанесенных слоев изменяется достаточно сложно. При нагреве свыше 80 °С наблюдается резкий скачок проводимости данных тонкопленочных систем.

Электрофизические свойства нанокомпозиционных покрытий на основе оксида цинка и ПАНИ исследовали методом импедансной спектроскопии. Данные частотной зависимости полного (Z) и действительной части (Z') сопротивления покрытия ZnO толщиной 80 нм (рисунок 2.4, *а*, *б*) позволили установить, что на частотах от 25 до 10^4 Гц они имеют сопротивление порядка

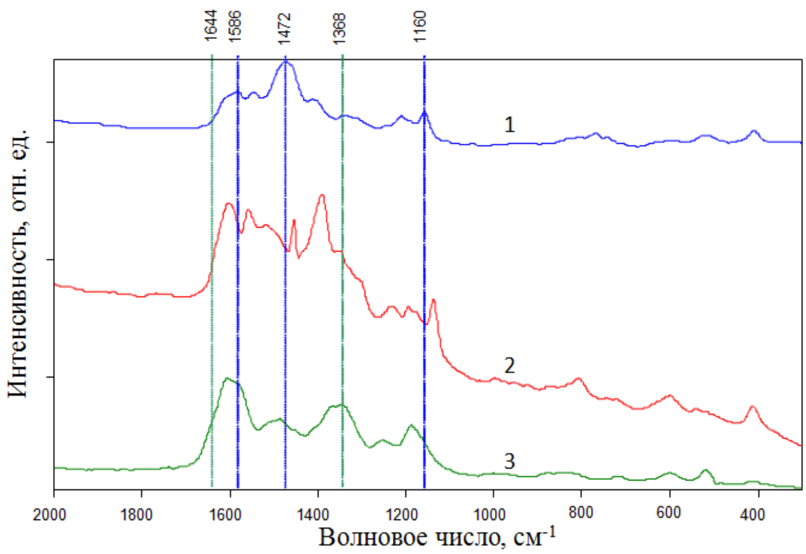


Рисунок 2.2 – КР-спектры покрытий на основе ПАНИ:
1 – исходный порошок ПАНИ; 2 – покрытие ПАНИ; 3 – покрытие ПАНИ+P_2O_5

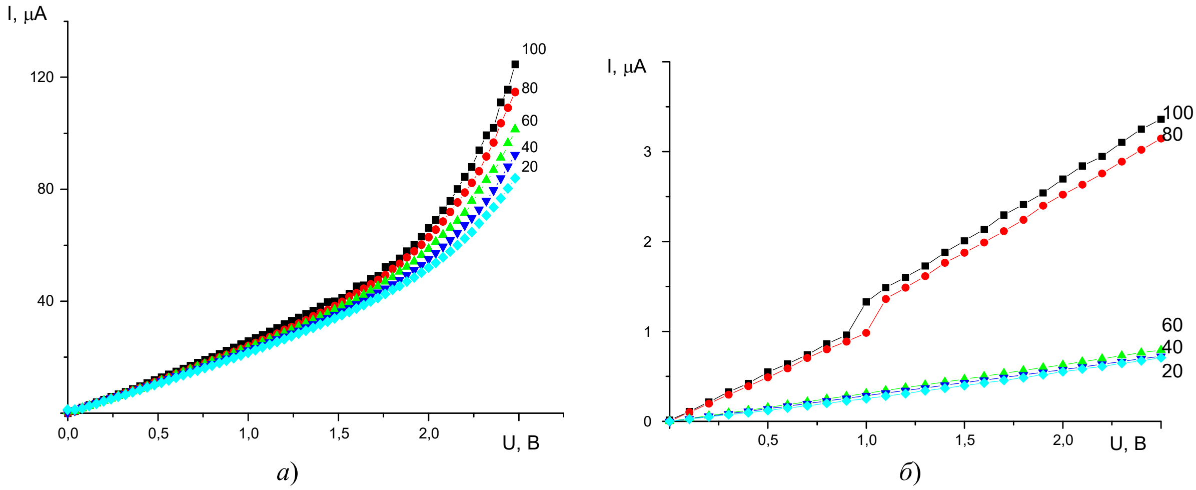


Рисунок 2.3 – ВАХ покрытия ZnO толщиной 80 нм (*а*) и ZnO – ПАНИ + P_2O_5 (*б*) с толщинами 80 и 100 нм соответственно при температуре от 20 до 100 °С

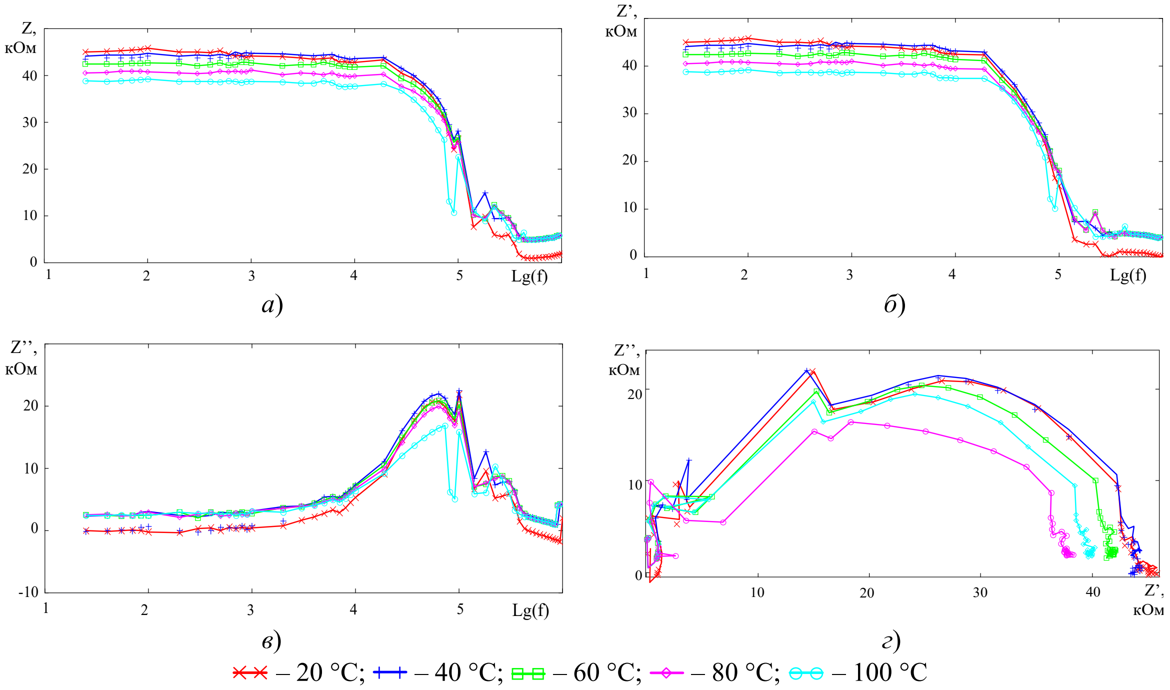


Рисунок 2.4 – Импедансная спектроскопия покрытия ZnO толщиной 80 нм при температуре от 20 до 100 °С: (*а*) – зависимость полного импеданса *Z* от логарифма частоты *f*; (*б*) – зависимость действительной части импеданса Z' от логарифма частоты *f*; (*в*) – зависимость мнимой части импеданса Z'' от логарифма частоты *f*; (*г*) – годограф

37–45 кОм, причем с ростом температуры от 20 до 100 °С полное сопротивление снижается. Расчет удельной проводимости указывает на значения порядка 3,16–2,78 См / см, которые с ростом температуры растут. Сложная форма пиков на кривых частотной зависимости мнимой части сопротивления (рисунок 2.4, *в*) свидетельствует о наличии релаксационных процессов. Максимумы данных пиков лежат в высокочастотной области. Годограф данных слоев представлен на рисунке 2.4, *г*, представляет собой суперпозицию как минимум двух полуокружностей, что также свидетельствует о достаточно сложной структуре формируемых тонкопленочных систем. С ростом температуры радиусы данных окружностей уменьшаются, но после 80 °С опять несколько увеличиваются.

Данные частотной зависимости полного (*Z*) и действительной части (Z') сопротивления двухслойного покрытия ZnO – ПАНИ + P_2O_5 с толщинами 80 и 100 нм соответственно при температуре от 20 до 100 ° представлены на рисунке 2.5, *а*, *б*.

Установлено, что полученные слои на частотах от 25 до 10^3 Гц имеют сопротивление порядка

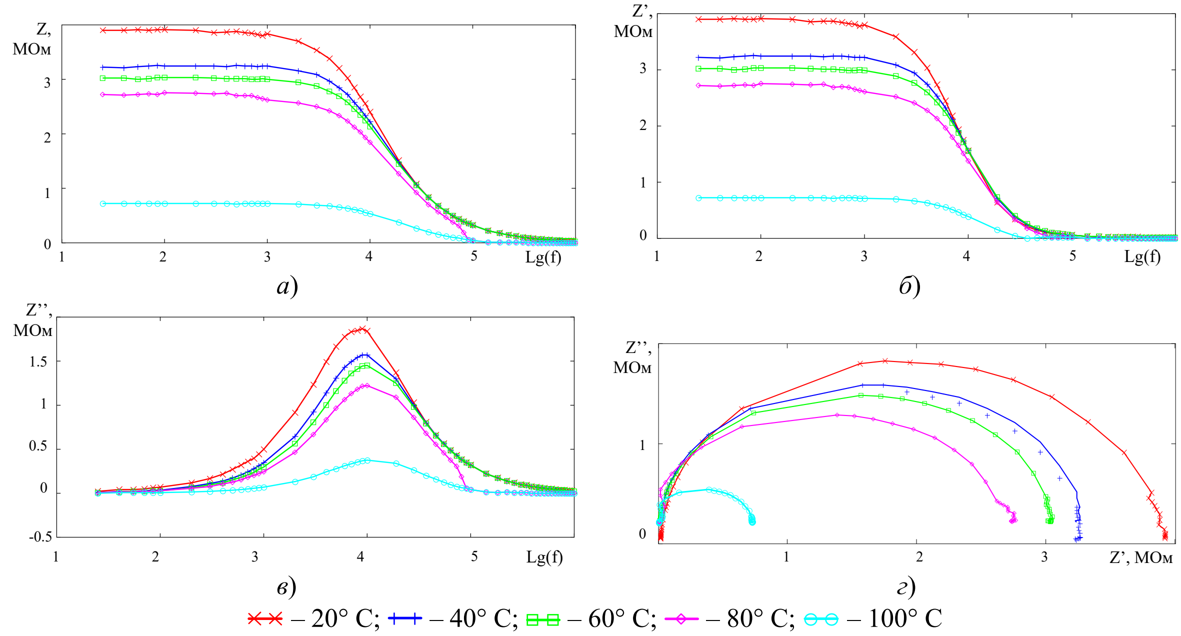


Рисунок 2.5 – Импедансная спектроскопия двухслойного покрытия ZnO – ПАНИ + P_2O_5 с толщинами 80 и 100 нм соответственно при температуре от 20 до 100 °С: (*а*) – зависимость полного импеданса *Z* от логарифма частоты *f*; (*б*) – зависимость действительной части импеданса Z' от логарифма частоты *f*; (*в*) – зависимость мнимой части импеданса Z'' от логарифма частоты *f*; (*г*) – годограф

0,8–4 МОм, и с ростом температуры от 20 до 100 °С полное сопротивление падает не равномерно. Расчет удельной проводимости указывает на значения порядка 61–100 мСм/см, которые с ростом температуры растут. Пики на кривых мнимой части сопротивления (рисунок 2.5, *в*) сдвинуты в область более низких значений частот. Годографы данных слоев, приведенные на рисунке 2.5, *г*, имеют форму, характерную для покрытий ZnO.

Более детальный анализ полученных температурных зависимостей импедансной спектроскопии показал, что температурная зависимость сопротивления при постоянном напряжении гибридных покрытий на основе ПАНИ и оксида цинка описываются выражением

$$1 / Z_{dc} = 1 / Z_{dc0} \cdot \exp(-E_{dc} / kT),$$

где Z_{dc0} – предэкспоненциальный множитель; E_{dc} – энергия активации носителей заряда постоянного тока; k – постоянная Больцмана.

Рассчитанная величина энергии активации носителей заряда постоянного тока покрытий ZnO составила $E_{dc} = 0{,}021$ эВ, что значительно ниже величины запрещенной зоны $E_{BG} = 3{,}34$ эВ, полученного для блочного ZnO [17], [18]. Данный факт, по-видимому, связан с неоднородной структурой полупроводника, создающей флуктуации потенциала, в которых происходит плавное искривление зон с образованием случайного потенциального рельефа. Электроны с энергией, превышающей некий критический уровень протекания, могут пройти над максимумами потенциального рельефа или обойти их [18].

Энергии активации носителей заряда постоянного тока покрытий ZnO – ПАНИ + P_2O_5 имеет значение $E_{dc} = 0{,}045$ эВ, что более чем в два раза больше ранее установленной величины для покрытия ZnO и опять же значительно ниже величины запрещенной зоны блочного ZnO. Отметим, что в этом случае экспоненциальный характер экспериментальных данных ВАХ менее выражен, чем в случае покрытий ZnO.

Выводы

Определены кинетические особенности осаждения из газовой фазы и электрофизические свойства двухслойных покрытий ZnO – ПАНИ + P_2O_5. Показано, что при диспергировании смеси ПАНИ и P_2O_5 кинетические зависимости давления и толщины покрытия имеют нестационарный характер, что может свидетельствовать о протекании в зоне диспергирования процессов химического взаимодействия. Методом КР-спектроскопии установлено, что допирование покрытий ПАНИ оксидом фосфора приводит к образованию линейных проводящих участков ПАНИ с высокой плотностью поляронных, делокализованых структур. Сделано заключение о возможности осаждения плоских упорядоченных слоев ПАНИ, которые могут служить основой для формирования полисопряженной структуры с облегченным межцепочечным переносом заряда, что должно увеличить проводимость всей тонкопленочной системы.

Методами регистрации вольтамперных характеристик и импедансной спектроскопии определены значения удельной проводимости, энер-гии активации носителей заряда для двухслойного покрытия покрытий ZnO – ПАНИ + P_2O_5 с толщиной каждого из слоев равной 80 и 100 нм соответственно в диапазоне температуры от 20 до 100° С.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hybrid materials based on conjugated polymers and inorganic semiconductors as photocatalysts: from environmental to energy applications* / M. Liras [et al.] // Chem. Soc. Rev. – 2019. – Vol. 48. – P. 5454–5487.
2. *Efficient Titanium Oxide/Conjugated Polymer Photovoltaics for Solar Energy Conversion* / Alexi C. Arango [et al.] // Adv. Mater. – 2000. – Vol. 12. – P. 1689–1692.
3. *Molecular structure, optical, electrical and sensing properties of PANI-based coatings with silver nanoparticles deposited from the active gas phase* / A.A. Ragachev [et al.] // Applied Surface Science. – 2015. – Vol. 351. – P. 811–818.
4. *Structure and properties of polyaniline nanocomposite coatings containing gold nanoparticles formed by low-energy electron beam deposition* / S. Wang [et al.] // Applied Surface Science. – 2018. – Vol. 428. – P. 1070–1078.
5. *Structure and electrical properties of polyaniline-based copperchloride or copper bromide coatings deposited via low-energy electron beam* / A.A. Rogachev [et al.] // Applied Surface Science. – 2019. – Vol. 483. – P. 19–25.
6. *Formation features, structure and properties of bioactive coatings based on phosphate-calcium layers, deposited by a low energy electron beam* / J. Xiao [et al.] // Surface & Coatings Technology. – 2019. – Vol. 359. – P. 6–15.
7. *Morphology and structure of antibacterial nanocomposite organic-polymer and metal-polymer coatings deposited from active gas phase* / A.V. Rogachev [et al.] // RSC Adv. – 2013. – Vol. 3. – P. 11226–11233.
8. *Heat treatment impact on molecular structure of polymer-based silver containing coatings deposited from the active gas phase* / A.A. Rogachev [et al.] // Progress in Organic Coatings. – 2015. – Vol. 81. – P. 80–86.
9. *Осаждение из газовой фазы легированных металлами покрытий полианилина, их молекулярная структура* / А.А. Рогачев [и др.] // Нанотехнологии: разработка, применение – XXI век. – 2021. – Т. 13, № 2. – С. 27–35.
10. *Микро- и нанокомпозиционные полимерные покрытия, осаждаемые из активной газовой фазы* / М.А. Ярмоленко [и др.]; под. ред. А.В. Рогачева. – Москва: Радиотехника, 2016. – 424 с.
11. *Bernard*, *M.C.* Goff Quantitative characterization of polyaniline films using Raman spectroscopy I: Polaron lattice and bipolaron / M.C. Bernard, A. Hugot-Le // Electrochimica Acta. – 2006. – Vol. 52. – P. 595–603.
12. *Abnormally enhanced thermoelectric transport properties of SWNT / PANI hybrid films by the strengthened PANI molecular ordering* / Qin Yao [et al.] // Energy Environ. Sci. – 2014. – Vol. 7. – P. 3801–3807.
13. *Raman spectroscopy of polyaniline and oligoaniline thin films* / M. Trchová [et al.] // Electrochimica Acta. – 2014. – Vol. 122. – P. 28–38.
14. *Regularities of Fluoropolymer Coating Growth on Pretreated Surfaces from Active Gas Phase* / A.A. Rogachev [et al.] // Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 970. – P. 55–62.
15. *Raman characterization of polyaniline induced conformational changes* / J.E. Pereira da Silva [et al.] // Synthetic Metals. – 1999. – Vol. 101. – P. 834–835.
16. *Chun-Guey*, *Wu.* Conducting Polyaniline Filaments in a Mesoporous Channel Host / Chun-Guey Wu, T. Bein // Science. – 1994. – Vol. 264. – P. 1757–1758.
17. *Synthesis and structure of antibacterial coatings formed by electron-beam dispersion of polyvinyl chloride in vacuum* / C. He [et al.] // Surface & Coatings Technology. – 2018. – Vol. 354. – P. 38–45.
18. *Воробьева*, *Н.А.* Проводимость нанокристаллического ZnO (Ga) / Н.А. Воробьева, М.Н. Румянцева, П.А. Форш, А.М. Гаськов // Физика и техника полупроводников. – 2013. – Т. 47. – С. 637–641.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*БРФФИ*), *договор* Х20ПТИ-011 «*Формирование гибридных наноразмерных слоев неорганических полупроводников и сопряженных полимеров из активной газовой фазы для оптоэлектронных применений*».

Поступила в редакцию 14.01.2022.

Информация об авторах

Рогачёв Александр Александрович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.т.н., профессор
Михалко Алексей Михайлович – аспирант
Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., доцент
Сюхуэй Джин – профессор
Джанг Хонглианг – профессор
Цао Хонгтао – профессор
Рогачёв Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.м., профессор

УДК 539.23:621.793.3:66.071.8:678.743.41 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_44

КИНЕТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОСАЖДЕНИЯ И ХИМИЧЕСКИЙ СОСТАВ ПОКРЫТИЙ, СФОРМИРОВАННЫХ ИЗ ЛЕТУЧИХ ПРОДУКТОВ ЛАЗЕРНОГО ДИСПЕРГИРОВАНИЯ ПОЛИТЕТРАФТОРЭТИЛЕНА

М.А. Ярмоленко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

KINETIC FEATURES OF DEPOSITION AND CHEMICAL COMPOSITION OF COATINGS, FORMED FROM VOLATILE PRODUCTS OF LASER DISPERSION OF POLYTETRAFLUOROETHYLENE

M.A. Yarmolenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Установлены закономерности влияния интенсивности импульсного лазерного излучения с $\lambda = 1064$ нм на параметры диспергирования политетрафторэтилена (ПТФЭ), скорость роста полимерных покрытий, их химический состав. Повышение интенсивности лазерного излучения вызывает возрастание скорости роста покрытия без заметного влияния на реакционную активность летучих продуктов диспергирования. Рост интенсивности лазерного излучения также приводит к повышению содержания в молекулярной структуре осаждаемого покрытия кислородсодержащих групп, фторсодержащих графитоподобных кластеров, снижению краевого угла смачивания водой. На основании анализа изменений химического состава покрытий сделан вывод о двухстадийном процессе диспергирования: на начальной стадии состав летучих продуктов не зависит от интенсивности лазерного излучения, на более поздней стадии он определяется степенью дефторирования материала мишени, зависящей от интенсивности излучения.

Ключевые слова: *лазерное диспергирование*, *полимерное покрытие*, *политетрафторэтилен*, *кинетика нанесения*, *химический состав.*

Для цитирования: *Ярмоленко*, *М.А.* Кинетические особенности осаждения и химический состав покрытий, сформированных из летучих продуктов лазерного диспергирования политетрафторэтилена / М.А. Ярмоленко // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 44–48. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_44

Abstract. Regularities for the influence of the pulsed laser radiation intensity with $\lambda = 1064$ nm on the dispersion parameters of polytetrafluoroethylene (PTFE), the growth rate of polymer coatings, and their chemical composition have been established. Increased intensity of laser radiation increases the rate of the coating deposition without a noticeable effect on the reactivity of volatile dispersion products. The increased intensity of laser exposure leads to an increase in the content of oxygen groups, fluorine-containing graphite-like clusters in the molecular structure of the deposited coating, and the decrease of the contact angle of water wetting. Based on the analysis of changes in the chemical composition of the coatings, a conclusion was made about a two-stage dispersion process: at the initial stage, the composition of volatile products is independent of the laser radiation intensity; at a later stage, it is determined by the degree of defluorination of the target material, which depends on the intensity of radiation.

Keywords: *laser dispersion*, *polymer coating*, *polytetrafluoroethylene*, *deposition kinetic*, *chemical composition*.

For citation: *Yarmolenko*, *M.A.* Kinetic features of deposition and chemical composition of coatings, formed from volatile products of laser dispersion of polytetrafluoroethylene / M.A. Yarmolenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 44–48. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_44 (in Russian)

Введение

Использование лазерного излучения с целью синтеза наночастиц, модифицирования полимерных материалов и нанесения покрытий является эффективным технологическим приемом [1], [2]. Так, в [3] приведен обзор исследований процессов формирования органических наночастиц в результате воздействия лазерного излучения на полимерные материалы, помещенные в жидкие среды. Показано, что размер наночастиц, производительность процесса их генерации определяется длиной волны излучения, значением флюенса, длительностью импульса, концентрацией полимера в растворе. Особый практический интерес представляет нанесение методом лазерного диспергирования однокомпонентных и композиционных покрытий на основе политетрафторэтилена, полиэтилена, формирование которых «растворными» методами невозможно [2]. Образование летучих продуктов диспергирования, при адсорбции и последующей полимеризации которых происходит образование полимерных покрытий, может протекать и в результате фототермического и/или фотохимического воздействия излучения на полимер. Механизм деструкции макромолекул полимеров при лазерной обработке в значительной степени определяется длиной волны излучения. Он влияет на химический состав летучих продуктов, их реакционную активность и, соответственно, молекулярную структуру и свойства покрытия. В работах [1], [2], [4] достаточно подробно изучены процессы лазерного осаждения покрытий при воздействии на ПТФЭ излучения CO_2 лазера (λ = 10,6 мкм). Показано, что процесс лазерного диспергирования полимера имеет селективный характер: в зоне воздействия излучения образуются микроволокна, степень кристалличности которых заметно превышает степень кристалличности исходного полимера. При этом генерируемые летучие продукты обладают низкой реакционной активностью и не образуют полимерные слои [1]. В [5] показано, что данные особенности процесса диспергирования, зависимость его параметров от интенсивности излучения могут быть описаны в рамках тепловой модели деструкции с учетом различия теплофизических свойств аморфной и кристаллической фаз ПТФЭ. Отметим, что при электроннолучевом диспергировании ПТФЭ вследствие дополнительной активации летучих продуктов формируются покрытия со структурой и составом практически идентичными исходному полимеру [6].

В отличие от электроннолучевого диспергирования и ионного распыления при лазерной обработке полимерной мишени поглощение излучения осуществляется в достаточно толстых слоях, что является причиной протекающих в них молекулярных и структурных изменений, формирования в объеме полостей из газовых продуктов, протекания процессов карбонизации, сшивки, которые оказывают значительное влияние на состав и реакционную активность летучих продуктов диспергирования а, соответственно, молекулярную структуру и свойства покрытий. Кинетика и интенсивность протекания этих процессов, помимо природы полимера, длины волны в значительной степени зависят от интенсивности излучения, мощности теплового воздействия [2].

В связи с вышеизложенным, изучение кинетических особенностей осаждения, химического состава и адсорбционных свойств покрытий, сформированных из летучих продуктов диспергирования ПТФЭ излучением с различной интенсивностью, представляет научный и практический интерес.

1 Методика формирования покрытий и исследования их структуры

Схема нанесения покрытий лазерным диспергированием представлена на рисунке 1.1. В качестве источника лазерного излучения использовался лазер LS-2147/2 (λ = 1064 нм, частота следования импульсов – 10 Гц, длительность импульса ~ 16 нс). Средняя энергия одиночных импульсов изменялась и составляла – 669, 730, 788 мДж. Средний диаметр пятна излучения – 1 мм. Вычисленные интенсивности лазерного излучения – $53{,}3\cdot10^{12}$; $58{,}1\cdot10^{12}$; $62{,}7\cdot10^{12}$ Вт/м^2. Эффективная толщина формируемых слоев контролировались непосредственно в процессе нанесения с помощью кварцевого измерителя толщины.

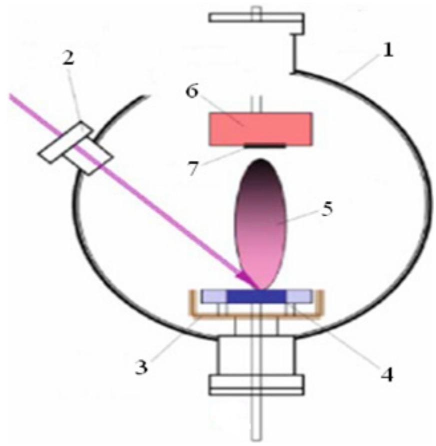


Рисунок 1.1 – Схема лазерного формирования покрытий: 1 – вакуумная камера; 2 – лазер; 3 – держатель мишени; 4 – вращающаяся мишень; 5 – продукты разрушения мишени; 6 – подложка; 7 – покрытие

Лазерному диспергированию подвергался спрессованный (150 атм.) порошок политетрафторэтилена (ГОСТ 10007-80), а также его механическая смесь с ацетатом меди (II) ($(CH_3COO)_2Cu\cdot H_2O$; Sinopharm Chemical Reagent Co., Ltd). Подложками при осаждении слоев служили полированные пластины монокристалла кремния.

Перед нанесением покрытий поверхность подложек подвергалась очистке органическими растворителями (бензином, ацетоном, спиртом) в ультразвуковой ванне с последующей промывкой в дистиллированной воде и сушкой в потоке теплового воздуха. В работе сравнительному анализу подвергались покрытия только с одинаковой эффективной толщиной.

Химический анализ осажденных покрытий определяли методом РФЭС. Измерения проводили на спектрометре PHI Quantera II Scanning XPS Microbrobe, используя Al Kα в качестве источника монохроматического рентгеновского излучения ($h\nu$ = 1486,6 эВ). Калибровку прибора осуществляли по линии C1s с энергией связи 284,6 эВ. Обработка полученных результатов осуществлялась с помощью математического приложения OriginPro.

Измерение значений краевых углов смачивания осуществляли при комнатной температуре с использованием Krüss DSA 100 гониометра. Каплю дистиллированной воды (5 мкл) наносили на поверхность покрытия. Период между осаждением покрытия и измерением краевого угла смачивания соответствовал 1 недели. Для каждого образца проводили измерение не менее 30 капель.

2 Результаты исследования и их обсуждение

На рисунке 2.1 представлены кинетические зависимости толщины покрытия и давления летучих продуктов лазерного диспергирования ПТФЭ в вакуумной камере. С увеличением интенсивности лазерного излучения в ряду 53,3·1012, 58,1·1012, 62,7·1012 Вт/м2 фиксируется рост средней скорости осаждения 0,068; 0,102; 0,134 нм/с соответственно.

Такие изменения скорости осаждения происходят на фоне увеличения давления в вакуумной камере газообразных продуктов деструкции фторопластовой мишени (таблица 2.1).

Важным является то, что наблюдается относительно согласованное, коррелированное изменение давления и скорости осаждения: отношение значений скорости осаждения V и создаваемого при этом давления паров ΔP на установившейся стадии диспергирования практически одинаково.

Для анализа кинетических закономерностей диспергирования в качестве критерия химической активности летучих продуктов диспергирования обосновано использование отношения значений скорости осаждения V и создаваемого при этом давления паров ΔP. Из таблицы 2.1 следует, что при нанесении покрытий при различных значениях интенсивности диспергирующего излучения отношение $V / \Delta P$ не изменяется, что однозначно свидетельствует об идентичности состава и реакционной активности летучих продуктов, т. е. одинаковом механизме разрушения макромолекул.

Таблица 2.1 – Параметры лазерного диспергирования ПТФЭ

	Плотность мощности излучения W, 10^{12}, Вт/см^2		
	53,3	58,1	62,7
Средняя скорость нанесения V, нм/с	0,068	0,102	0,134
Среднее давление паров, Ра	0,0050	0,0075	0,01
Отношение V / W, отн. ед.	1,27	1,75	2,13
Реакционная активность паров (отношение $V / \Delta P$), нм / (с·Ра)	13,6	13,6	13,4

Лазерное диспергирование композиционной мишени на основе ПТФЭ и ацетата меди имеет ряд особенностей. На начальной стадии воздействия лазерного излучения на мишень регистрируется заметно более низкое давление летучих продуктов (рисунок 2.1, *г*). По истечении некоторого промежутка времени диспергирования цвет мишени становился коричневым, наблюдалось значительное повышение давления в камере, что обусловлено разложением ацетата меди. При этом имеет место снижение скорости нанесения покрытия.

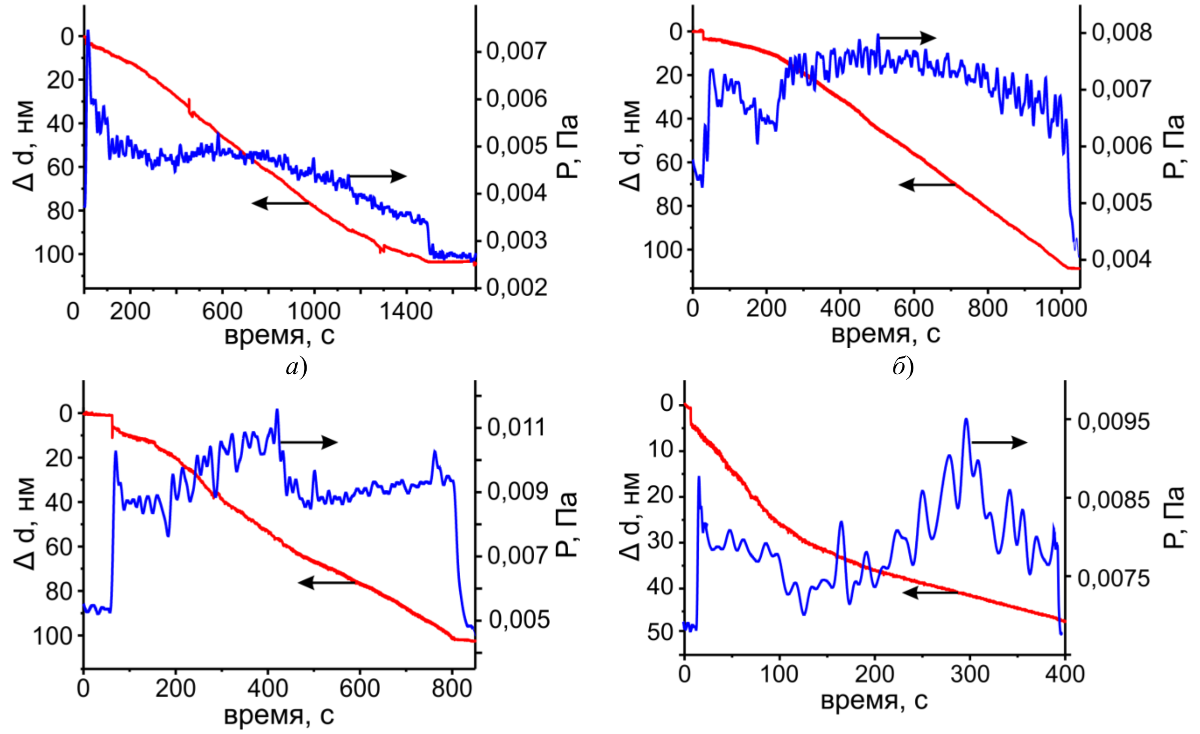


Рисунок 2.1 – Кинетические зависимости лазерного диспергирования ПТФЭ (*а*, *б*, *в*) и ПТФЭ + ацетат меди (5 : 1) (*г*) при плотности мощности излучения $53{,}3 \cdot 10^{12}$ (*а*), $58{,}1 \cdot 10^{12}$ (*б*),$62{,}7 \cdot 10^{12}$ Вт/м^2 (*в*, *г*)

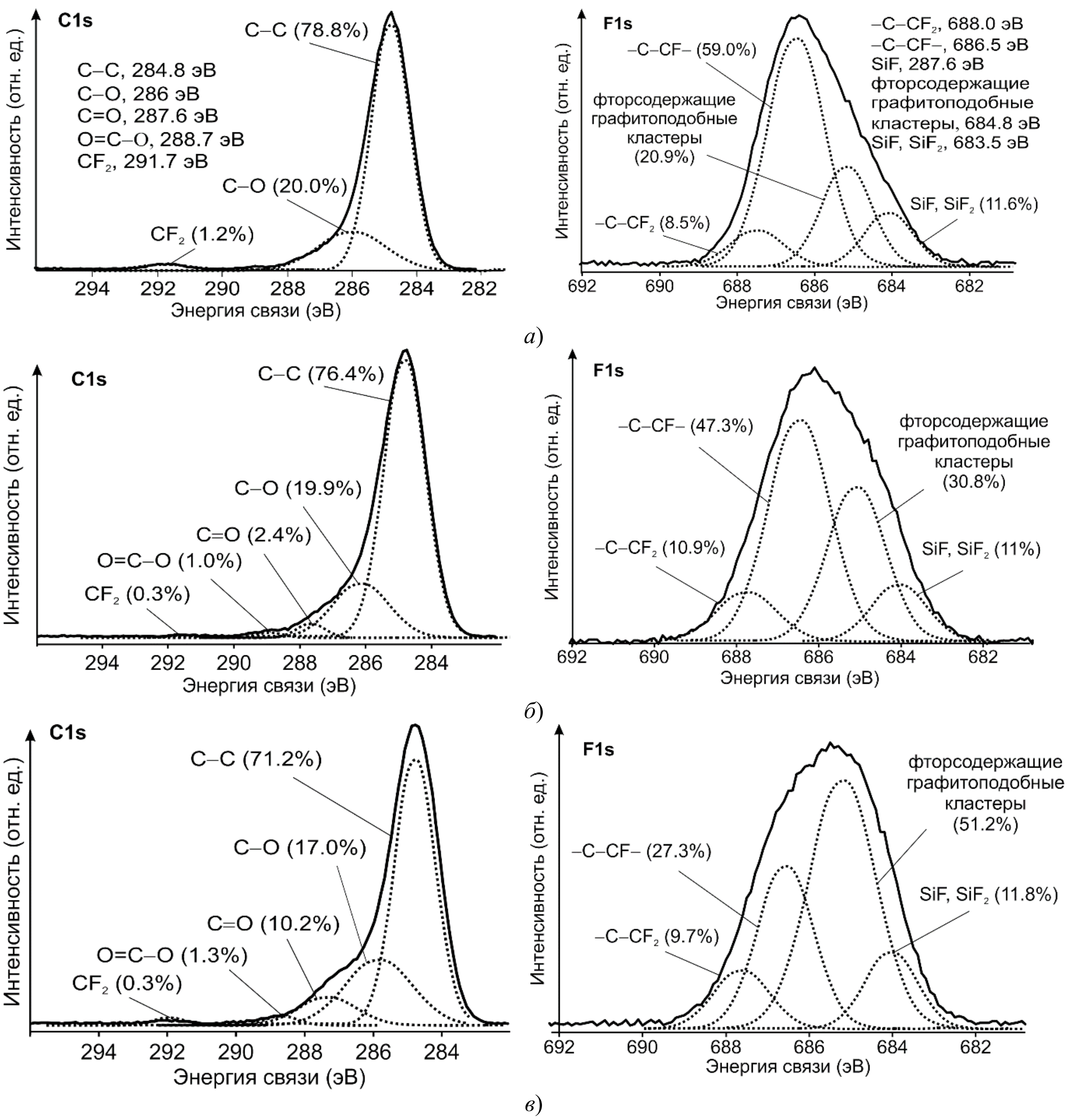


Рисунок 2.2 – РФЭ-спектры покрытий, сформированных при мощности излучения $53{,}3\cdot10^{12}$ (*а*), $58{,}1\cdot10^{12}$ (*б*), $62{,}7\cdot10^{12}$ Вт/м^2 (*в*)

Методом РФЭ-спектроскопии с учетом методических рекомендаций работ [7]–[10] определено влияние интенсивности излучения на химический состав покрытия (рисунок 2.2). Установлено, что возрастание интенсивности лазерного излучения сопровождается увеличением содержания кислородсодержащих групп в молекулярной структуре нанесенного покрытия. Данный результат обусловлен присутствием в осаждаемых слоях значительного количества свободных радикалов, взаимодействующих с кислородом воздуха при разгерметизации вакуумной камеры.

Использование при диспергировании лазерного излучения более высокой интенсивности увеличивает содержание фторсодержащих графитоподобных кластеров, снижает долю –C–CF– связей в общей массе фторсодержащих фрагментов деструкции полимера. При этом доля –C–CF_2 связей практически не зависит от интенсивности излучения. Это может быть связано с тем, что основная масса фторсодержащих фрагментов деструкции ПТФЭ осаждается в начальный период воздействия излучения на мишень. С течением времени воздействия лазерного излучения на мишень область диспергирования обедняется фтором. Чем выше интенсивность лазерного излучения, тем более выражены процессы дефторирования мишени. При длительном воздействии лазерного излучения на мишень покрытие формируют продукты деструкции не ПТФЭ, а модифицированной, дефторированной мишени.

Результаты оценки адсорбционной активности осажденных покрытий, проводимой путем регистрации краевого угла смачивания водой, полностью согласуются с данными РФЭС-исследования их состава. Покрытия, сформированные при использовании интенсивности лазерного излучения $53,3 \cdot 10^{12}$, $58,1 \cdot 10^{12}$, $62,7 \cdot 10^{12}$ Вт/м^2, характеризуются краевым углом смачивания 96°, 94°, 80°соответственно (± 2°).

Выводы

Определены кинетические особенности осаждения, химический состав и адсорбционные свойства покрытий, осажденных из летучих продуктов диспергирования ПТФЭ лазерным излучением ($\lambda = 1064$ нм, частота следования импульсов – 10 Гц, длительность импульса ~ 16 нс) различной интенсивности.

Показано, что при повышении мощности излучения скорость роста покрытий существенно возрастает, при этом реакционная способность летучих продуктов диспергирования, оцениваемая по отношению скорости роста к давлению, остается практически неизменной. Введение в полимерную мишень ацетата меди приводит к заметному снижению скорости осаждения покрытия. Методом РФЭС установлено увеличение содержания кислородсодержащих групп, фторсодержащих графитоподобных кластеров в молекулярной структуре нанесенного покрытия при увеличении интенсивности лазерного излучения. На основании анализа изменений химического состава покрытий сделан вывод о двухстадийном процессе диспергирования: на начальной стадии состав летучих продуктов не зависит от мощности излучения, на более поздней стадии он определяется степенью дефторирования материала мишени, зависящей от мощности излучения. Краевой угол смачивания покрытий водой при возрастании энергии диспергирующего излучения снижается, что связано с повышением содержания в покрытии полярных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский*, *А.М.* Получение тонких пленок распылением полимеров в вакууме / А.М. Красовский, Е.М. Толстопятов. – Минск: Наука и техника, 1989. – 181 с.

2. *Рогачев*, *А.А.* Физико-химия полимерных покрытий, осаждаемых из активной газовой фазы / А.А. Рогачев. – Москва: Научный мир, 2014. – 287 с.

3. *Zhang*, *D.* Perspective of laser-prototyping nanoparticle-polymer composites / D. Zhang, B. Gökce // Applied Surface Science. – 2017. – Vol. 392. – P. 991–1003.

4. *Лазерная абляция политетрафторэтилена* / П.Н. Гракович [и др.] // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). – 2008. – Т. LII, № 3. – С. 97–105.

5. *Кинетика диспергирования полимеров под действием концентрированных потоков энергии* / А.В. Рогачев, А.С. Строгий, М.В. Буй, В.П. Казаченко // Композиционные полимерные материалы. – 1989. – Вып. 43. – С. 8–14.

6. *Микро- и нанокомпозиционные полимерные покрытия*, *осаждаемые из активной газовой фазы* / М.А. Ярмоленко [и др.]. – Москва: Радиотехника, 2016. – 424 с.

7. *Deposition of double-layer coatings for preparing composite membranes with superhydrophobic properties* / L.I. Kravets [et al.] // High Temperature Material Processes. – 2019. – Vol. 23 (1). – P. 77–96.

8. *Tan*, *K.L.* Surface Modification of Plasma-Pretreated Poly (tetrafluoroethylene) Films by Graft Copolymerization / K.L. Tan, L.L. Woon, H.K. Wong // Macromolecules. – 1993. – Vol. 26. – P. 2832–2836.

9. *Wilson*, *D.J.* Plasma modification of PTFE surfaces Part I: Surfaces immediately following plasma treatment / D.J. Wilson, R.L. Williams, R.C. Pond // Surf. Interface Anal. – 2001. – Vol. 31. – P. 385–396.

10. *Angle-resolved XPS Study of Plasma-treated Teflon PFA Surfaces* / M.K. Shi [et al.] // Surf. Interface Anal. – 1995. – Vol. 23. – P. 99–104.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*БРФФИ*), *договор* Х20ПТИ-001 «*Стойкие к облучению нанокомпозиционные покрытия*: *синтез*, *структура и свойства*».

Поступила в редакцию 31.01.2022.

Информация об авторах

Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., доцент

УДК 539.375.5:678.07:544.032.65 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_49

ОСОБЕННОСТИ ДЕГРАДАЦИИ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ КОРОТКОВОЛНОВОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

М.А. Ярмоленко[1], А.А. Рогачёв[2], Имин Лю[1], А.В. Рогачёв[1], Лихун Гао[3], Чжуа Ма[3]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Институт химии новых материалов Национальной Академии Наук Беларуси*
[3]*Пекинский технологический институт*

FEATURES OF POLYMER MATERIALS DEGRADATION UNDER INFLUENCE OF SHORT-WAVE LASER RADIATION

M.A. Yarmolenko[1], A.A. Rogachev[2], Yiming Liu[1], A.V. Rogachev[1], Lihong Gao[3], Zhuang Ma[3]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus*
[3]*Beijing Institute of Technology*

Аннотация. Определены особенности деградации высокомолекулярных соединений (кремнийорганическая смола, политетрафторэтилен) их смесей с формиатом меди в условиях воздействия лазерного излучения с различной длиной волны. Проведена оценка реакционной активности генерируемых летучих продуктов деструкции. Исследована молекулярная структура и морфология осаждаемых покрытий. При одинаковой интенсивности воздействие более коротковолнового лазерного излучения ($\lambda = 266$ нм) на кремнийорганический полимер приводит к формированию покрытий с меньшей концентрацией Si – O – C групп по отношению к содержанию групп Si – C_6H_5 в сравнении с излучением с длиной волны 535 и 355 нм. Значение длины лазерного излучения не оказывает заметного влияния на молекулярную структуру покрытий на основе ПТФЭ и ПТФЭ + медь. Это может свидетельствовать о преимущественно фототермическом механизме деградации исходных мишеней.

Ключевые слова: *лазерное диспергирование*, *активная газовая фаза*, *полимер*, *кремнийорганика*, *покрытие*, *металл*, *молекулярная структура.*

Для цитирования: *Особенности деградации полимерных материалов при воздействии коротковолнового лазерного излучения* / М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачёв, Имин Лю , А.В. Рогачёв, Лихун Гао, Чжуа Ма // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 49–54. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_49

Abstract. The features of macromolecular compounds (organosilicon resin, polytetrafluoroethylene) of their mixtures with copper formate degradation under the influence of laser radiation with different wavelengths are determined. The reactivity of the generated volatile degradation products was evaluated. The molecular structure and morphology of deposited coatings were studied. At the same intensity, the influence of shorter-wavelength laser radiation ($\lambda = 266$ nm) on an organosilicon polymer leads to the formation of coatings with a lower concentration of Si – O – C groups relative to the content of Si – C_6H_5 groups compared to radiation with a wavelength of 535 and 355 nm. The value of the laser radiation length has no noticeable effect on the molecular structure of coatings based on PTFE and PTFE + copper. This may indicate a predominantly photothermal mechanism of the initial targets degradation.

Keywords: *laser dispersion*, *active gas phase*, *polymer*, *organosilicon*, *coating*, *metal*, *molecular structure*.

For citation: *Features of polymer materials degradation under influence of short-wave laser radiation* / M.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, Yiming Liu, A.V. Rogachev, Lihong Gao, Zhuang Ma // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 49–54. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_49 (in Russian)

Введение

Разработка функциональных нанокомпозиционных покрытий, характеризующихся высокой стабильностью состава, структуры и свойств, является крайне актуальной задачей. Сохранение исходных параметров таких материалов определяет эксплуатационный ресурс изделий микроэлектроники, элементов сенсоров, и других технических устройств, в которых используются функциональные материалы, содержащие в своей основе наночастицы металла или их соединения.

Известно, что воздействие на поверхность твердых тел частиц высоких энергий, включая фотоны, электроны, протоны, нейтроны, легкие и тяжелые ионы, сопровождается протеканием в твердых телах различных физико-химических процессов. Подобное воздействие приводит к значительным микро- и макроструктурным повреждениям поверхности. Характер повреждений в значительной степени зависит от условий и режимов воздействия, природы обрабатываемых материалов [1].

Облучение полимерных материалов быстрыми тяжелыми ионами, частицами высокой энергии приводит к значительным изменениям в их химической структуре и физических свойствах. Такое воздействие инициирует, например, образование новых химических связей и их разрыв, прививку макромолекул, рекристаллизацию, аморфитизацию, окисление и др. Известно, что наличие ароматических колец в полимерной цепи оказывает сильное стабилизирующее влияние на радиоиндуцированную сшивку или разложение за счет резонансных энергетических механизмов, а полимеры, например, полисилоксаны, несущие ароматические функциональные группы, особенно полезны в тех случаях, когда требуется высокая радиационная устойчивость [2]. При этом фторсодержащие полимеры, такие как политетрафторэтилен, поливинилденфторид, обладая высокой термической и химической стойкостью, имеют низкую радиационную стойкость.

Большой интерес представляет изучение радиационной стойкости нанокомпозиционных покрытий на основе полимеров. Для повышения радиационной стойкости предлагается использовать наночастицы металлов, имеющих высокую поглощающую способность Pb, Mo, W, Y, V и др. [3]. Отметим, что изменения в нанокомпозиционных системах под действием радиационного излучения имеют особенности, обусловленные специфическими свойствами наночастиц, сложным характером их поведения при радиационной обработке (процессами зарядки, электронной эмиссии, формированием межфазных слоев особой структуры и др.). Изучение этих процессов необходимо для выяснения механизма протекающих изменений и установления эффективных методов повышения работоспособности, долговечности нанокомпозиционных функциональных покрытий.

Отметим, что при воздействии достаточно мощного излучения на полимерные материалы протекают процессы диспергирования, образование летучих продуктов, которые при адсорбции на поверхности способны к вторичной полимеризации и образованию покрытия [4]. Изучение химического состава таких покрытий, их реакционной активности позволяет получить информацию об особенностях протекания процессов лазерной деградации полимеров. Более сложные процессы диспергирования протекают при использовании коротковолнового излучения. В таких случаях помимо нагрева полимерной мишени под действием квантов с энергией, превышающей энергию химической связи, могут протекать селективные процессы разрыва таких связей, фотохимическое модифицирование материала в достаточно толстых слоях, что приводит к изменению значения коэффициента поглощения и проявлению кинетических особенностей процесса нанесения, особенно, при диспергировании мишеней сложного состава. Такие особенности в [5] проиллюстрированы на примере сравнения параметров осаждения покрытий полиимида лазерным диспергированием с длиной волны 355 и 1064 нм. Прямой диссоциацией химической связи в результате возбуждения электронных состояний объясняется образование в зоне излучения концентрических морфологических структур, увеличение атомного соотношения O / C и N / C в обработанных УФ лазерным излучением полиимидных пленках. В числе важных особенностей процесса диспергирования ПТФЭ лазерным излучением отмечают увеличение коэффициента поглощения лазерного излучения, уменьшение времени термической релаксации при снижении длины волны [6], при использовании импульсного излучения на фотофрагментацию полимерных цепей влияют процессы многофотонного поглощения процессов [7].

Вместе с тем изучение физико-химических закономерностей лазерного диспергирования, формирования покрытий из летучих продуктов особенно при режимах, для которых характерно влияние фотохимических процессов, при воздействии коротких импульсов с высокой интенсивностью с учетом природы мишени, требует проведения дополнительных исследований.

Целью настоящей работы является изучение особенностей деградации, диспергирования нанокомпозиционных материалов на основе полисилоксанов, фторполимеров и наночастиц металлов при воздействии на них излучения с различной длиной волны с целью использования продуктов диспергирования для осаждения функциональных покрытий.

1 Методика формирования покрытий и исследования их структуры

Воздействие лазерного излучения на полимерные материалы производилось в вакууме с помощью устройства, схема которого приведена на рисунке 1.1. В качестве источника лазерного излучения использовался лазер L-2137U+HG-5, позволяющий генерировать излучение с длиной волны $\lambda_2 = 532$ нм, $\lambda_3 = 355$ нм, $\lambda_4 = 266$ нм. В режиме модулированной добротности длительность импульса 2-й гармоники – 6 нс, 3-й гармоники – 5 нс, 4-й гармоники – 6 нс. Максимальная энергия лазерного импульса в системе генератор-усилитель в режиме модулированной добротности составляет для λ_2 – 448 мДж, λ_2 – 222 мДж, λ_3 – 120 мДж. Расходимость лазерного излучения составляет 0,8 мРад. Лазерное излучение указанных гармоник является линейно-поляризованным.

При изучении влияния длины лазерного излучения на молекулярную структуру формируемых покрытий значение плотности мощности излучения устанавливали одинаковым. Это достигалось выбором режима генерации или же дополнительной расфокусировки лазерного излучения.

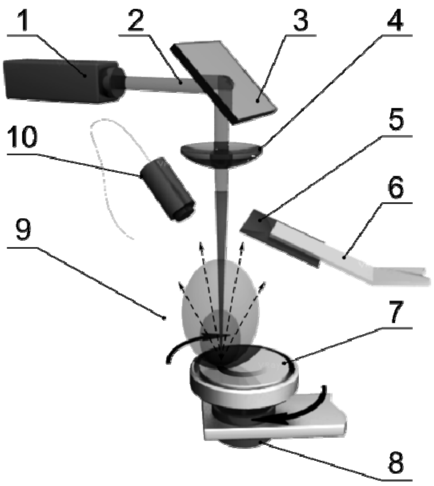


Рисунок 1.1 – Схема нанесения покрытий лазерным диспергированием мишени
1 – лазер;
2 – лазерный луч;
3 – поворотное зеркало;
4 – фокусирующая линза;
5 – подложка;
6 – держатель подложки;
7 – мишень;
8 – электродвигатель;
9 – лазерный эрозионный факел;
10 – кварцевый измеритель толщины

Контроль толщины осаждаемых тонкопленочных систем осуществляется с помощью кварцевого измерителя толщины. Сравнительному анализу подвергались покрытия с одинаковой эффективной толщиной.

Диспергированию подвергались порошки политетрафторэтилена (ПТФЭ, ГОСТ 10007-80), кремнийорганической смолы К-42, формиата меди. Композиционные мишени изготавливались в результате тщательного смешения с помощью вибромельницы порошков полимера и формиата меди в массовом соотношении 1 : 1.

Процесс осаждения покрытий производился при начальном давлении остаточных газов в вакуумной камере $\approx 5 \cdot 10^{-3}$ Па.

Исследование молекулярной структуры нанесенных покрытий производили на ИК-Фурье спектрофотометре Vertex-70 (Bruker) с использованием стандартной МНПВО приставки (многократное нарушенное полное внутреннее отражение). В качестве отражающей призмы применяли кристалл KRS-5 (угол при основании – 45°). Для проведения спектроскопических исследований покрытия из продуктов диспергирования осаждались на пленки металлизированного лавсана. Обработку полученных спектров проводили по стандартной методике с помощью программы OPUS.

2 Результаты исследования и их обсуждение

Методом ИК-спектроскопии установлено, что молекулярная структура покрытий, сформированных из летучих продуктов лазерного диспергирования кремнийорганической смолы К-42 в вакууме, в сравнении со структурой материала мишени заметно отличается. В области волновых чисел (1200 – 500) см$^{-1}$ регистрируется зависимость оп-тической плотности функциональных групп от длины волны лазерного излучения (рисунок 2.1). Согласно литературным данным [8], [9], в указанном частотном диапазоне поглощение вблизи 1135 см$^{-1}$ обусловлено $Si – C_6H_5$ связями, при 1000 см$^{-1}$ – Si – O – Si.

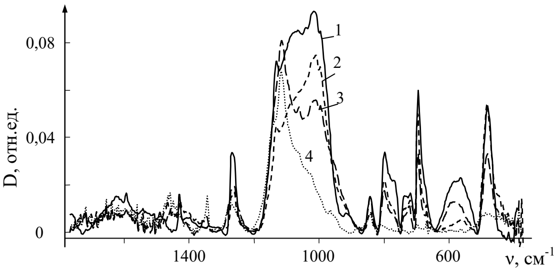


Рисунок 2.1 – Результаты ИК-спектроскопических исследований
1 – порошок К-42;
2 – покрытие К-42 (λ = 535 нм);
3 – покрытие К-42 (λ = 355 нм);
4 – покрытие К-42 (λ = 266 нм) (мишень – цельный кусок смолы)

Из таблицы 2.1 следует, что с уменьшением длины волны лазерного излучения в ИК-спектрах сформированных кремнийорганических покрытий фиксируется уменьшение значения соотношения оптических плотностей полос Si – O – C и $Si – C_6H_5$, Si – O – C и CH. С учетом данных ИК-спектра исходного полимера зависимости для первого соотношения является линейной, а для второго – экстремальной.

Таблица 2.1 – Зависимость относительной оптической плотности полос поглощения от длины волны лазерного излучения

Относительная оптическая плотность	Материал мишени	Длина волны λ, нм		
		535	355	266
D_{1000} / D_{1135}	1,8	1,75	0,82	0,45
D_{1000} / D_{2920}*	1,1	8,2	1,5	0,75

* 2920 см$^{-1}$ – валентные колебания CH в CH_2

Известно, что энергия химических связей Si – O – Si, $Si – C_6H_5$, $Si – CH_3$ равна 445, 310 и 314 кДж/моль соответственно [10]. По этой причине резонансное поглощение для каждой связи будет наблюдаться при значениях длин волн равных 269, 386 и 381 нм соответственно.

Следовательно, при воздействии излучения с длиной волны 266 нм деструкция кремнийорганического слоя может происходить вследствие фотохимического разрушения химических связей, а при воздействии излучения с λ = 535 нм – наиболее вероятным является фототермическое действие. Поэтому наблюдаемая интенсивная деструкция наиболее прочной Si – O – Si связи при лазерном воздействии с длиной волны 266 нм является вполне обоснованной. Следует отметить, что были также определены особенности лазерного диспергирования ксерогеля (SiO_2). Процесс диспергирования осуществляли на длинах волн 266 и 532 нм. Установлено, что не зависимо от плотности мощности лазерного излучения с длиной волны 532 нм, мишень из ксерогеля не разрушалась и покрытие не осаждалось. При этом под действием лазерного излучения с длиной волны 266 нм генерировалась газовая фаза с одновременным формированием покрытия, что подтверждает сделанные ранее выводы о влиянии длины излучения на молекулярную структуру формируемых покрытий.

Лазерное воздействие с λ = 535 нм на кремнийорганическую смолу в большей степени инициирует отщепление углеводородных заместителей от основной цепи кремнийорганической молекулы. С уменьшением длины волны (λ = 355 и 266 нм) происходит инверсия воздействия. УФ излучение в большей степени инициирует непосредственное разрушение основной цепочки по связи Si – O – Si.

Рассмотрены особенности лазерного диспергирования механической смеси порошков К-42 и формиата меди. Значения соотношения оптических плотностей D_{1135} / D_{1000} представлены на рисунке 2.2

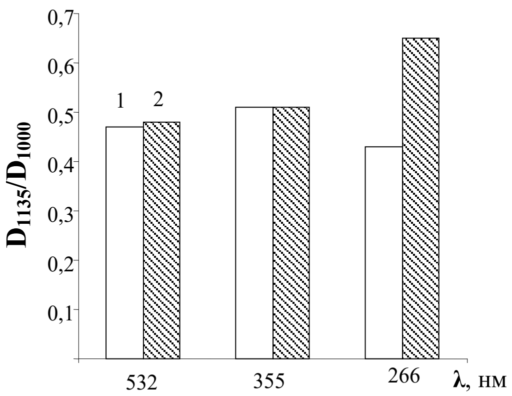


Рисунок 2.2 – Значения D_{1000} / D_{1135} для покрытий, осажденных лазерным диспергированием с различной длиной волны

1 – покрытие, сформированное лазерным диспергированием порошка К-42;

2 – покрытие, сформированное лазерным диспергированием порошков К-42 и формиата меди.

Как и следовало ожидать, лазерное излучение с длиной волны λ = 266 нм инициирует процессы разрушения прочной Si – O – Si связи. Медь, по-видимому, активирует указанный процесс (относительная концентрация групп Si – C_6H_5 заметно возрастает). Данный эффект можно объяснить взаимодействием меди с радикалами, образующимися при разрушении связи, что препятствует возможной последующей их рекомбинации.

Специфический характер деградации характерен и при воздействии лазерного излучения на политетрафторэтилен и смесь порошков политетрафторэтилена и формиата меди. Установлено, что при лазерном диспергировании с длиной волны λ = 355 нм формируется покрытие с наименьшим значением соотношения оптических плотностей полос 640 и 625 см$^{-1}$ (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Влияние длины волны излучения на относительную плотность полос поглощения функциональных групп

Длина волны λ, нм		$\frac{D_{640}}{D_{625}}$	$\frac{D_{700}}{D_{503}}$	$\frac{D_{720}}{D_{503}}$	$\frac{D_{740}}{D_{503}}$
ПТФЭ	532	1,27	0,141	0,049	0,018
	355	1,06	0,116	0,044	0,014
	266	1,43	0,139	0,056	0,018
ПТФЭ + Cu	532	1,06	0,076	0,038	0,014
	355	1,02	0,125	0,064	0,014
	266	1,02	0,064	0,033	0,012
Порошок ПТФЭ	–	1,25	0,022	0,013	0,005

Полосу поглощения с максимумом при 625 см$^{-1}$ связывают с наличием дефектной структуры (участки цепи, где происходят взаимные переходы между лево- и правовращающимися спиралями), образующейся в результате термического воздействия, полосу при 640 см$^{-1}$ – с наличием регулярной спирали [11]. Отметим, что резонансное поглощение связей C – C и C – F составляет ~ 350 и 272 нм соответственно. Таким образом, лазерное излучение с длиной волны λ = 355 нм не оказывает фотохимическое воздействие на деструкцию фторуглеродной цепи и, как следствие – низкое значение соотношения оптических плотностей полос поглощения D_{640} / D_{625}. Установленное вы-сокое значение этого соотношения для покрытий, сформированных лазерным диспергированием с длиной волны λ = 266 нм, может быть обусловлено фотохимической активацией продуктов диспергирования в газовой фазе.

Регистрируется также влияние длины излучения и на соотношение оптических полос поглощения при 700, 720, 740, 516 см$^{-1}$. Полосы поглощения с максимумами при 700, 720, 740 см$^{-1}$ связывают с наличием аморфных, а при 516 см$^{-1}$ –

кристаллических областей в полимере [11]. В ИК-спектре покрытий, сформированных лазерным диспергированием, наблюдается смещение полосы при 516 $см^{-1}$ в область низких частот (503 $см^{-1}$). Покрытия, сформированные лазерным излучением с $\lambda = 355$ нм, характеризуются меньшей долей аморфной фазы в сравнении с остальными рассматриваемыми полимерными слоями. Ранее нами было сделано предположение о том, что это может быть связано с низкой молекулярной массой формируемых покрытие продуктов лазерного диспергирования (разрушение по С – С связи).

В ИК-спектре покрытий, сформированных лазерным диспергированием композиционной мишени ПТФЭ – формиат меди, отсутствуют полосы поглощения, характерные для порошка формиата меди, что может указывать на полное разложение соли под действием лазерного излучения (таблица 2.2). При этом значения соотношения оптических плотностей рассматриваемых полос поглощения при диспергировании композиционной мишени практически не зависят от длины лазерного излучения, что свидетельствует о преимущественно фототермическом механизме деградации исходной мишени. В числе структурных особенностей таких покрытий следует отметить, что покрытия, сформированные лазерным излучением с $\lambda = 266$ нм, характеризуются более высокой упорядоченностью.

С целью оценки особенностей процессов лазерной деградации ПТФЭ был проведен сравнительный анализ ИК-спектров покрытий, сформированных лазерным (таблица 2.2) и электронно-лучевым (таблица 2.3) диспергированием исходного порошка ПТФЭ и его смеси с формиатом меди. Видно, что покрытия, формируемые электронно-лучевым методом, являются более аморфными в сравнении с покрытиями, осажденными из летучих продуктов лазерного диспергирования.

Медь, введенная в состав мишени, при электронно-лучевом диспергировании, в отличие от лазерного нанесения, снижает упорядоченность осаждаемого полимерного слоя. По-видимому, роль формиата меди при электронно-лучевом диспергировании в основном сводится к инициированию плазменного разряда вблизи мишени, который и влияет на молекулярную структуру покрытия. Исследование таких покрытий показало отсутствие или незначительное содержание меди в объеме наносимого слоя. При лазерном диспергировании наличие меди в полимерном слое фиксируется визуально.

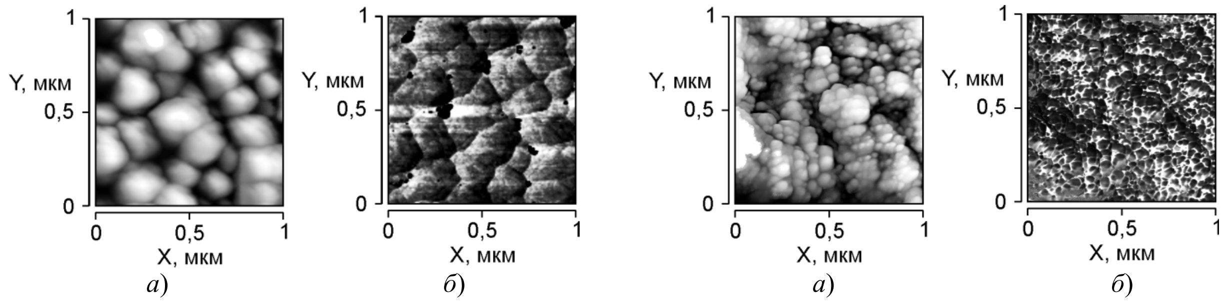
Таблица 2.3 – Значения относительной оптической плотности полос поглощения покрытий, осажденных методом электронно-лучевого диспергирования

Покрытие	$\frac{D_{640}}{D_{625}}$	$\frac{D_{700}}{D_{503}}$	$\frac{D_{720}}{D_{503}}$	$\frac{D_{740}}{D_{503}}$
ПТФЭ	1,42	0,053	0,123	0,104
ПТФЭ + Cu	1,48	0,054	0,151	0,111

Результаты исследования морфологии покрытий ПТФЭ, проведенные с помощью атомно-силовой микроскопии, представлены на рисунке 2.3.

Видно, что покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием ПТФЭ, состоит из сферических образований со средним диаметром частиц у основания 100 нм. При лазерном диспергировании ПТФЭ независимо от длины волны покрытие также формируют сферические образования, средний размер которых значительно меньше (около 40 нм). Высокая дисперсность молекулярных образований может быть следствием более интенсивного диспергирования. Несмотря на различие размеров частиц, можно утверждать о подобии морфологической структуры поверхности, что может указывать на схожесть механизмов вторичной полимеризации летучих продуктов лазерного и электронно-лучевого диспергирования.

Следует отметить высокую адгезию осаждаемых лазерным диспергированием покрытий как на основе ПТФЭ, так и на основе кремнийорганической смолы (особенно медьсодержащих), к стеклянным подложкам, что не характерно для подобных слоев, формируемых электронно-лучевым методом.



а) *б*) *а*) *б*)

электронно-лучевое нанесение лазерное нанесение

Рисунок 2.3 – Морфология покрытий ПТФЭ:
а) – морфология; *б*) – фазовый контраст

Выводы

Определены особенности деградации под действием лазерного излучения с различной длиной волны кремнийорганической смолы и ПТФЭ, а также механических смесей органических соединений с формиатом меди. Особенности деградации оценивали по реакционной активности образующихся продуктов диспергирования и их способности при адсорбции формировать покрытие. Уменьшение длины волны лазерного излучения от 535 до 266 нм сопровождается снижением соотношения оптической плотности связей Si – O – C и $Si – C_6H_5$, а также Si – O – C и CH в ИК-спектрах кремнийорганических покрытий. В легированных медью кремнийорганических слоях, сформированных диспергированием лазерным излучением с $\lambda = 266$ нм, наблюдается аномально высокое содержание групп $Si – C_6H_5$ в сравнении с содержанием групп Si – O – Si. Покрытия, осажденные диспергированием ПТФЭ излучением с $\lambda = 355$ нм, характеризуются меньшей долей аморфной фазы в сравнении с другими покрытиями. Молекулярная структура покрытий на основе ПТФЭ и формиата меди практически не зависит от длины лазерного излучения, что свидетельствует о преимущественно фототермическом механизме деградации исходной мишени. На основании анализа морфологии и молекулярной структуры покрытий ПТФЭ и ПТФЭ + Cu сделан вывод о схожести механизмов вторичной полимеризации летучих продуктов лазерного и электронно-лучевого диспергирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вилков*, *Ф.Е.* Разработка композитного радиационно-защитного покрытия для радиоэлектронной аппаратуры космических аппаратов / автореф. дис. … канд. техн. наук: 15.16.06 / Ф.Е. Вилков; ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)». – Москва, 2018. – 24 с.

2. *Drobny*, *J.G.* 7 – Radiation-Resistant Polymers and Their Applications / J.G. Drobny // Ionizing Radiation and Polymers Principles, Technology and Applications, A volume in Plastics Design Library. – 2013. – P. 213–224.

3. *Formation mechanism and the role of nanoparticles in* Fe-Cr *ODS steels developed for radiation tolerance* / L.L. Hsiung [et al.] // Physical Review B. – 2010. – Vol. 82. – P. 184103.

4. *Микро- и нанокомпозиционные полимерные покрытия, осаждаемые из активной газовой фазы* / М.А. Ярмоленко [и др.]; под. ред. А.В. Рогачева. – Москва: Радиотехника, 2016. – 424 с.

5. *Surface microstructure and chemistry of polyimide by single pulse ablation of picosecond laser* / Q. Du [et al.] // Applied Surface Science. – 2018. – Vol. 434. – P. 588–595.

6. *Laser Ablation of Polymers: A Review* / S. Ravi-Kumar [et al.] // Procedia Manufacturing. – 2019. – Vol. 34. – P. 316–327.

7. *Nanosecond and femtosecond UV laser ablation of polymers: Influence of molecular weight* / I.-A. Paun [et al.] // Applied Surface Science. – 2009. – Vol. 255. – P. 9856–9860.

8. *Беллами*, *Л.* Инфракрасные спектры сложных молекул / Л. Беллами. – Москва: Мир, 1963. – 592 с.

9. *Казицына*, *Л.А.* Применение УФ-, ИК- и ЯМР-спектроскопии в органической химии: учеб. пособие для вузов / Л.А. Казицына, Н.Б. Куплетская. – Москва: Высш. школа, 1971. – 264 с.

10. *Химическая энциклопедия*: в 5 т.: Даффа – Меди / редкол.: Кнунянц И.Л. (гл. ред.) и др. – Москва: Советская энциклопедия, 1990. – Т. 2 – 671 с.

11. *Инфракрасная спектроскопия полимеров*; под ред. И. Деханта. – Москва: Химия, 1972. – 472 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ), *договор* Х20ПТИ-001 «*Стойкие к облучению нанокомпозиционные покрытия*: *синтез*, *структура и свойства*».

Поступила в редакцию 24.01.2022.

Информация об авторах

Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., доцент
Рогачёв Александр Александрович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.т.н., профессор
Лю Имин – аспирант
Рогачёв Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.м., профессор
Гао Лихун – профессор
Ма Чжуа – профессор

МАТЕМАТИКА

УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_55

О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ *l*-АРНОЙ ГРУППЫ $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. IV

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

ON SETS OF GENERATORS OF *l*-ARY GROUP $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. IV

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В статье продолжается изучение связи между порождающими множествами группы A и порождающими множествами полиадической группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая определяется на k-ой декартовой степени произвольной группы A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества $\mathbf{S}_k$ всех подстановок множества $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Ключевые слова: *группа*, *l-арная группа*, *порождающее множество.*

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* О порождающих множествах l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. IV / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 55–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_55

Abstract. The article goes on with the studies on the described earlier relationship between sets of generators in group A and sets of generators in polyadic group $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ with l-ary operation $[\ ]_{l,\sigma,k}$, that is defined on Cartesian power A^k of group A for arbitrary integer $l \geq 2$ and arbitrary substitution σ from the set $\mathbf{S}_k$ of all substitutions of the set $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Keywords: *group*, *l-ary group*, *set of generators.*

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* On sets of generators of l-ary group $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. IV / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 55–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_55 (in Russian)

Введение

В данной статье продолжается изучение порождающих множеств l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, начатое в [1]–[3]. Поэтому в ней продолжена нумерация разделов, использовавшаяся в указанных статьях.

В [2], [3] для нахождения полиадических групп вида $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, которые порождаются множеством $\mathbf{U}_j(M)$, не содержащим элемент $\mathbf{e}$, были использованы линейные диофантовы уравнения со взаимно простыми коэффициентами. В данной статье показано, что для этих же целей могут быть использованы и некоторые другие результаты из теории чисел, в частности, теоремы Эйлера и Вильсона.

Как и прежде, всю необходимую информацию из теории полиадических групп можно найти в [4], [5].

13 Порождающие и теорема Эйлера

В этом разделе для нахождения полиадических групп вида $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, которые порождаются множеством $\mathbf{U}_j(M)$, не содержащим элемент $\mathbf{e}$, применяется теорема Эйлера, утверждающая, что *для любых взаимно простых натуральных чисел a и m разность $a^{\varphi(m)} - 1$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера*, *делится на m*.

***Теорема* 13.1**. *Пусть $a \geq 2$ и $m \geq 2$ – взаимно простые натуральные числа*, *d – делитель числа $a^{\varphi(m)}$*, *σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$. Если группа A порождается множеством M*, *в котором имеются элементы u и v такие*, *что*

$$u^d = v^m = 1, \tag{13.1}$$

то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = (a^{\varphi(m)} - 1)k + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Положим $r = a^{\varphi(m)} - 1$, тогда $r + 1 = a^{\varphi(m)}$. Так как по теореме Эйлера m делит $a^{\varphi(m)} - 1$, то $a^{\varphi(m)} - 1 = mq$ для некоторого натурального q. Кроме того, по условию $a^{\varphi(m)} = de$ для некоторого натурального e.

Так как ввиду (13.1),

$$u^{r+1} = u^{a^{\varphi(m)}} = u^{de} = (u^d)^e = 1,$$

$$v^r = v^{a^{\varphi(m)}-1} = v^{mq} = (v^m)^q = 1,$$

то по теореме 6.3 из [2] l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = (a^{\varphi(m)} - 1)k + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. □

Заметим, что теорема 13.1 может быть получена как следствие теоремы 6.5 из [2] при $c = m$ и теоремы Эйлера.

***Замечание* 13.1**. В теореме 13.1 функцию Эйлера $\varphi(m)$ можно заменить обобщённой функцией Эйлера $L(m)$ или функцией Люка $l(m)$, для каждой из которых справедлив аналог теоремы Эйлера [6].

Следующий результат получается из теоремы 13.1, если в ней положить $d = a^{\varphi(m)}$.

***Следствие* 13.1**. *Пусть* $a \geq 2$ *и* $m \geq 2$ *– взаимно простые натуральные числа*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^{a^{\varphi(m)}} = v^m = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $l = (a^{\varphi(m)} - 1)k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Следующий результат получается из теоремы 13.1, если в ней положить $d = a$.

***Следствие* 13.2**. *Пусть* $a \geq 2$ *и* $m \geq 2$ *– взаимно простые натуральные числа*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^a = v^m = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $l = (a^{\varphi(m)} - 1)k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Полагая в теореме 13.1 и следствиях 13.1–13.2 $m = p$ – простое, получим следующие результаты. Эти же результаты можно получить, воспользовавшись малой теоремой Ферма.

***Теорема* 13.2**. *Пусть простое* p *не делит натуральное* $a \geq 2$, d *– делитель числа* a^{p-1}, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^d = v^p = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $l = (a^{p-1} - 1)k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Заметим, что теорема 13.2 может быть получена как следствие теоремы 6.5 из [2] и малой теоремы Ферма.

Полагая в теореме 13.2 $d = a^{p-1}$, получим

***Следствие* 13.3**. *Пусть простое* p *не делит натуральное* $a \geq 2$, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^{a^{p-1}} = v^p = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $l = (a^{p-1} - 1)k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Полагая в теореме 13.2 $d = a$, получим

***Следствие* 13.4**. *Пусть простое* p *не делит натуральное* $a \geq 2$, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^a = v^p = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $l = (a^{p-1} - 1)k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Пример* 13.1**. Пусть как в примере 11.1 из [3], $\mathbf{S}_5$ – симметрическая группа, порождаемая тремя подстановками, имеющими порядки 4, 5 и 6 соответственно.

Полагая в следствии 13.4, $A = \mathbf{S}_5$, $p = 5$, $a = 4$, получим

$$l = (4^4 - 1)k + 1 = 255k + 1,$$

при этом $(255k + 1)$-арная группа $< \mathbf{S}_5^k, [\ ]_{255k+1,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$, где M такое же, как в примере 11.1 из [3].

В частности ($k = 2$), 511-арная группа $< \mathbf{S}_5^2, [\ ]_{511,(12),2} >$ порождается любым из двух множеств M_1, M_2 из примера 11.1 из [3].

Если p оставить прежним, а вместо $a = 4$ взять $a = 6$, то получим

$$l = (6^4 - 1)k + 1 = 1295k + 1,$$

при этом $(1295k + 1)$-арная группа $< \mathbf{S}_5^k, [\ ]_{1295k+1,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$, где M такое же, как в примере 11.1 из [3].

В частности, 2591-арная группа $< \mathbf{S}_5^2, [\ ]_{2591,(12),2} >$ порождается любым из двух множеств M_1, M_2 из примера 11.1 из [3].

***Замечание* 13.2**. Так как $511 = -40\cdot(-13) - 9$, то арность 511, полученная в предыдущем примере для $k = 2$ с помощью малой теоремы Ферма (следствие 13.4), содержится среди арностей (9.6) из примера 9.1 из [2], для получения которых для $k = 2$ использовались решения линейного диофантового уравнения с двумя неизвестными (теорема 8.2 из [2]). Аналогично, так как $2591 = -40\cdot(-65) - 9$, то арность 2591, из предыдущего примера также содержится среди арностей (9.6) из примера 9.1 из [2]. Так как все арности из (9.6) содержатся в (9.8), то арности 511 и 2591 содержатся и в (9.8).

Полагая в следствии 13.4 $a = p + 1$, получим

***Следствие* 13.5**. *Пусть* p *– простое*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^{p+1} = v^p = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = ((p + 1)^{p-1} - 1)k + 1, \tag{13.2}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Следующий, похожий на следствие 13.5 результат, вытекает из теоремы 8.2 из [2] при $a = u$, $b = v$, $r = p$, где $p \geq 2$ – простое.

***Следствие* 13.6**. *Пусть* p *– простое*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^{p+1} = v^p = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} p((p+1)i+1)k+1, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -(p+1)(1+pi)k+1, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases} \tag{13.3}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Равенство (13.2) из следствия 13.5 для данных p и k определяет на декартовой степени A^k с помощью цикла σ единственную арность, а равенство (13.3) из следствия 13.6 для тех же p и k на декартовой степени A^k с помощью того же цикла σ определяет бесконечно много арностей. Так как элементы u и v в следствиях 13.5 и 13.6 удовлетворяют одним и тем же равенствам, то возникает естественный вопрос: не содержатся ли арности (13.2) в (13.3)?

Ответ на этот вопрос даёт следующее предложение.

***Предложение* 13.1**. *Множество всех l-арных групп, определяемых следствием* 13.5, *входит во множество всех l-арных групп, определяемых следствием* 13.6.

Доказательство. Так как p делит $(p + 1)^{p-2} - 1$, то

$$i = \frac{1}{p}((p + 1)^{p-2} - 1) \qquad (13.4)$$

– целое число. Тогда

$$p((p + 1)i + 1) = p((p + 1)\frac{1}{p}((p + 1)^{p-2} - 1) + 1) =$$

$$= p(p + 1)\frac{1}{p}((p + 1)^{p-2} - 1) + p =$$

$$= (p + 1)^{p-1} - p - 1 + p = (p + 1)^{p-1} - 1,$$

то есть

$$(p + 1)^{p-1} - 1 = p((p + 1)i + 1),$$

откуда следует

$$((p + 1)^{p-1} - 1)k + 1 = p((p + 1)i + 1)k + 1,$$

где i определяется равенством (13.4). В полученном равенстве левая часть совпадает с правой частью равенства (13.2), а правая часть – с правой частью равенства (13.3) при $i > 0$, вычисляемом по формуле (13.4). □

***Замечание* 13.3**. При доказательстве предложения 13.1 установлено, что арности l, определяемые равенствами (13.2) и (13.3) совпадают при i, вычисляемом по формуле (13.4). Например, для $p = 2, 3, 5, 7$ соответственно имеем $i = 0, 1, 43, 4681$, а соответствующие арности имеют вид

$$2k + 1,\ 15k + 1,\ 1295k + 1,\ 262143k + 1,$$

которые при $k = 2$ равны соответственно

$$5,\ 31,\ 2591,\ 524287.$$

Полагая в следствии 13.4 $a = p - 1$, получим

***Следствие* 13.7**. *Пусть* p *– нечётное простое*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^{p-1} = v^p = 1,$$

то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = ((p - 1)^{p-1} - 1)k + 1, \qquad (13.5)$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Следующий, похожий на следствие 13.7 результат, вытекает из теоремы 8.2 из [2] при $a = v$, $b = u$, $r = p - 1$, где $p \geq 3$ – простое.

***Следствие* 13.8**. *Пусть* p *– нечётное простое*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^{p-1} = v^p = 1,$$

то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (p-1)(pi+1)k+1, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -p(1+(p-1)i)k+1, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases} \qquad (13.6)$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Так как элементы u и v в следствиях 13.7 и 13.8 удовлетворяют одним и тем же равенствам, то возникает естественный вопрос: не содержатся ли арности (13.5) в (13.6)?

Ответ на этот вопрос даёт следующее предложение.

***Предложение* 13.2**. *Множество всех l-арных групп, определяемых следствием* 13.7, *входит во множество всех l-арных групп, определяемых следствием* 13.8.

Доказательство. Так как $p - 2$ – нечётное, то p делит $(p - 1)^{p-2} + 1$, то есть

$$i = -\frac{1}{p}((p - 1)^{p-2} + 1) \qquad (13.7)$$

– целое число. Тогда

$$-p(1 + (p - 1)i) =$$

$$= -p(1 - \frac{1}{p}((p - 1)^{p-2} + 1)(p - 1)) =$$

$$= -p + ((p - 1)^{p-2} + 1)(p - 1) =$$

$$= -p + (p - 1)^{p-1} + p - 1 = (p - 1)^{p-1} - 1,$$

то есть

$$(p - 1)^{p-1} - 1 = -p(1 + (p - 1)i),$$

откуда следует

$$((p - 1)^{p-1} - 1)k + 1 = -p(1 + (p - 1)i)k + 1,$$

где i определяется равенством (13.7). В полученном равенстве левая часть совпадает с правой частью равенства (13.5), а правая часть – с правой частью равенства (13.6) при $i < 0$, вычисляемом по формуле (13.7). □

***Замечание* 13.4**. При доказательстве предложения 13.2 установлено, что арности l, определяемые равенствами (13.5) и (13.6) совпадают при i, вычисляемом по формуле (13.7). Например, для $p = 3, 5, 7, 11$ соответственно имеем $i = -1$, -13, -1111, -90909091, а соответствующие арности имеют вид

$$3k + 1,\ 255k + 1,\ 46655k + 1,\ 9999999999k + 1,$$

которые при $k = 2$ равны соответственно

$$7,\ 511,\ 93310,\ 19999999999.$$

Напомним, что натуральное число n называют псевдопростым по натуральному основанию a, если n делит $a^{n-1} - 1$.

Для псевдопростых чисел можно сформулировать аналог теоремы 13.2, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 13.1.

***Теорема* 13.3**. *Пусть n – псевдопростое число по основанию a, d – делитель числа a^{n-1}, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^d = v^n = 1,$$

то l-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, *где* $l = (a^{n-1} - 1)k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Следующий результат получается из теоремы 13.3, если в ней положить $d = a^{n-1}$.

***Следствие* 13.9**. *Пусть n – псевдопростое число по основанию a, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^{a^{n-1}} = v^n = 1,$$

то l-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, *где* $l = (a^{n-1} - 1)k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Следующий результат получается из теоремы 13.3, если в ней положить $d = a$.

***Следствие* 13.10**. *Пусть n – псевдопростое число по основанию a, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^a = v^n = 1,$$

то l-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, *где* $l = (a^{n-1} - 1)k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Следствия 13.9 и 13.10 можно рассматривать как аналоги следствий 13.3 и 13.4.

Напомним, что число *n* называют числом Кармайкла, если оно псевдопростое по любому основанию *a*, взаимно простому с *n*, то есть, если *n* делит $a^{n-1} - 1$ для любого *a* такого, что $(n, a) = 1$.

Следующая теорема может быть доказана аналогично предыдущей теореме, а может рассматриваться как её следствие.

***Теорема* 13.4**. *Пусть n – число Кармайкла, a – взаимно простое с ним число, d – делитель числа* a^{n-1}, *σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^d = v^n = 1,$$

то l-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, *где* $l = (a^{n-1} - 1)k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Можно сформулировать следствия из теоремы 13.4, аналогичные следствиям 13.9 и 13.10.

14 Порождающие и теорема Вильсона

В доказательстве следующей теоремы будет использована теорема Вильсона, утверждающая, что *любое простое p делит* $(p - 1)! + 1$.

***Теорема* 14.1**. *Пусть p – нечётное простое,* $d \geq 2$ *– делитель числа* $(p - 1)!$, *σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^p = v^d = 1, \tag{14.1}$$

то l-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, *где* $l = (p - 1)!k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Положим $r = (p - 1)!$, тогда $r + 1 = (p - 1)! + 1$. Так как по теореме Вильсона *p* делит $(p - 1)! + 1$, то $(p - 1)! + 1 = pq$ для некоторого натурального *q*. Кроме того, по условию $(p - 1)! = de$ для некоторого натурального *e*.

Ввиду (14.1),

$$u^{r+1} = u^{(p-1)!+1} = u^{pq} = (u^p)^q = 1,$$
$$v^r = v^{(p-1)!} = v^{de} = (v^d)^e = 1,$$

то есть верно равенство $u^{r+1} = v^r = 1$ из теоремы 6.3 из [2], согласно которой *l*-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, где $l = (p - 1)!k + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. □

Заметим, что теорема 14.1 может быть получена как следствие теоремы 6.5 из [2] и теоремы Вильсона.

Следующий результат получается из теоремы 14.1, если в ней положить $d = (p - 1)!$.

***Следствие* 14.1**. *Пусть p – нечётное простое, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^p = v^{(p-1)!} = 1,$$

то l-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, *где* $l = (p - 1)!k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Если в теореме 14.1 положить $d = 2$, то получим

***Следствие* 14.2**. *Пусть p – нечётное простое, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^p = v^2 = 1,$$

то l-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, *где* $l = (p - 1)!k + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Если в теореме 14.1 положить $d = p - 1$, то получим

***Следствие* 14.3**. *Пусть p – нечётное простое, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^p = v^{p-1} = 1,$$

то l-арная группа $<A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}>$, *где*

$$l = (p - 1)!k + 1, \tag{14.2}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Равенство (14.2) из следствия 14.3 для каждого *k* на декартовой степени A^k с помощью цикла σ определяет единственную арность, а равенство (13.6) из следствия 13.8 для каждого *k* на той же декартовой степени A^k с помощью того же цикла σ определяет бесконечно много арностей. Возникает естественный вопрос: не содержатся ли арности (14.2) в (13.6)?

Положительный ответ на этот вопрос даёт следующее предложение.

***Предложение* 14.1**. *Множество всех l-арных групп*, *определяемых следствием* 14.4, *входит во множество всех l-арных групп*, *определяемых следствием* 13.8.

Доказательство. По теореме Лейбница, являющейся следствием теоремы Вильсона, любое нечётное простое p делит $(p-2)!-1$, то есть

$$i = \frac{1}{p}((p-2)!-1). \qquad (14.3)$$

– целое число. Тогда

$$pi + 1 = p\frac{1}{p}((p-2)!-1)+1 = (p-2)!,$$

то есть $\qquad (p-2)! = pi + 1,$

откуда последовательно получаем

$$(p-2)!(p-1) = (p-1)(pi+1),$$
$$(p-1)! = (p-1)(pi+1),$$
$$(p-1)!k+1 = (p-1)(pi+1)k+1,$$

где i определяется равенством (14.3). В полученном равенстве левая часть совпадает с правой частью равенства (14.2), а правая часть – с правой частью равенства (13.6) при $i > 0$, которое определяется равенством (14.3). □

***Замечание* 14.1**. При доказательстве предложения 14.1 установлено, что арности l, определяемые равенствами (14.2) и (13.6) совпадают при i, вычисляемом по формуле (14.3). Например, для $p = 3, 5, 7, 11$ соответственно имеем $i = 0, 1, 17, 32989$, а соответствующие арности имеют вид

$$2k+1,\ 24k+1,\ 720k+1,\ 3628800k+1,$$

которые при $k = 2$ равны соответственно

$$5,\ 49,\ 1441,\ 7257601.$$

***Замечание* 14.2**. В замечаниях 13.3 и 14.1 имеется общая арность $2k + 1$, которая определяется равенством (13.2) при $p = 2$ и равенством (14.2) при $p = 3$. В связи с этим возникает естественный вопрос: имеются ли другие общие арности, определяемые равенствами (13.2) и (14.2), отличные от $2k + 1$.

Для ответа на этот вопрос сравним правую часть

$$((p+1)^{p-1}-1)k+1$$

равенства (13.2) и правую часть

$$(q-1)!k+1$$

равенства (14.2), где $p = q$ – простое.

Так как число $(p + 1)^{p-1} - 1$ – нечётное, а при $q \geq 3$ число $(q - 1)!$ – чётное, то указанная выше арность $2k + 1$ – единственная общая арность, определяемая равенствами (13.2) и (14.2). Другими словами, $(2k + 1)$-арная группа $< A^k, [\ ]_{2k+1,\sigma,k} >$ – единственная общая полиадическая группа, определяемая следствиями 13.5 и 14.3.

***Замечание* 14.3**. Для ответа на вопрос: имеются ли общие арности, определяемые равенствами (13.5) и (14.2), сравним правую часть

$$((p-1)^{p-1}-1)k+1$$

равенства (13.5) и правую часть

$$(q-1)!k+1$$

равенства (14.2) , где $p = q$ – простое.

Так как для $p \geq 3$ и $q \geq 3$ число $(p - 1)^{p-1} - 1$ является нечётным, а число $(q - 1)!$ – чётным, то

$$((p-1)^{p-1}-1)k+1 \neq (q-1)!k+1.$$

Следовательно, множество всех полиадических групп, определяемых следствием 13.7 и множество всех полиадических групп, определяемых следствием 14.3, не пересекаются.

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 14.1, в котором теорема Вильсона заменяется теоремой Лейбница.

***Теорема* 14.2**. *Пусть* $p \geq 5$ *– простое*, $d \geq 2$ *– делитель числа* $(p-2)!$, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^d = v^p = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $l = ((p-2)!-1)k+1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Заметим, что теорема 14.2 может быть получена как следствие теоремы 6.5 из [2] и теоремы Лейбница.

Для теоремы 14.2 можно сформулировать результаты, аналогичные следствиям 14.1–14.3. Ограничимся следствиями для $d = p - 2$ и $d = 2$.

***Следствие* 14.4**. *Пусть* $p \geq 5$ *– простое*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^{p-2} = v^p = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $l = ((p-2)!-1)k+1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Следствие* 14.5**. *Пусть* $p \geq 5$ *– простое*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* u *и* v *такие*, *что*

$$u^2 = v^p = 1,$$

то l*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $l = ((p-2)!-1)k+1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Замечание* 14.4**. В следствии 14.4 возможен случай, когда $p - 2$ и p – простые числа близнецы.

***Замечание* 14.5**. Что можно сказать об арностях

$$(p-1)!k+1,\ ((p-2)!-1)k+1$$

полиадических групп, фигурирующих в теоремах 14.1 и 14.2?

Если предположить наличие общей арности, то

$$(p-1)!k+1 = ((q-2)!-1)k+1$$

для некоторых простых $p \geq 3$ и $q \geq 5$, $p \neq q$, откуда

$$(p-1)! = (q-2)! - 1,$$
$$(q-2)! - (p-1)! = 1,$$
то есть $m! - n! = 1$, где
$$p - 1 = n \geq 2,\ q - 2 = m \geq 3.$$
При указанных m и n полученное равенство неверно, так как для них верно неравенство $m! - n! > 2$.

Следовательно, множество всех полиадических групп, определяемых теоремой 14.1 и множество всех полиадических групп, определяемых теоремой 14.2, не пересекаются.

15 Дальнейшие следствия

Перечень приведённых в предыдущих разделах примеров и следствий из полученных там результатов для полиадических групп вида $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, которые порождаются множеством $\mathbf{U}_j(M)$, не содержащим элемент $\mathbf{e}$, можно расширить.

Покажем, например, что арности указанных полиадических групп могут быть простыми числами Мерсенна.

***Пример* 15.1**. Пусть p – нечётное простое, для которого $2^p - 1$ – простое число, то есть $2^p - 1$ – простое число Мерсенна. Пусть, кроме того, группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что
$$u^2 = v^p = 1.$$
Тогда, полагая в следствии 13.4 $a = k = 2$, получим
$$l = (2^{p-1} - 1)2 + 1 = 2^p - 1.$$
Следовательно, l-арная группа $< A^2, [\ ]_{l,(12),2} >$, где $l = 2^p - 1$ – простое число Мерсенна, порождается любым из множеств $\mathbf{U}_1(M)$, $\mathbf{U}_2(M)$.

Следующая теорема получается из теоремы 6.5 из [2], если в ней положить $r = k = F_m - 1$, где $F_m = 2^{2^m} + 1$ – число Ферма.

***Теорема* 15.1**. *Пусть $d > 1$ – делитель числа Ферма F_m, $c > 1$ – делитель числа $F_m - 1$, σ – цикл длины $F_m - 1$ из $\mathbf{S}_{F_m-1}$. Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*
$$u^d = v^c = 1,$$
то F_{m+1}-арная группа $< A^{F_m-1}, [\ ]_{F_{m+1},\sigma,F_m-1} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, F_m - 1$.

Таким образом, согласно теореме 15.1, любое число Ферма $F_{m+1} \geq 5$, в том числе и простое, может быть арностью полиадической группы вида $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, которая порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$, не содержащим элемент $\mathbf{e}$. В частности, для $m = 0, 1, 2, 3$, получаем следующие полиадические группы простой арности:
$$< A^2, [\ ]_{5,(12),2} >,\ d = 3;$$
$$< A^4, [\ ]_{17,\sigma,4} >,\ d = 5,$$
где σ – цикл длины 4 из $\mathbf{S}_4$;
$$< A^{16}, [\ ]_{257,\sigma,16} >,\ d = 17,$$
где σ – цикл длины 16 из $\mathbf{S}_{16}$;
$$< A^{256}, [\ ]_{65537,\sigma,256} >,\ d = 257,$$
где σ – цикл длины 256 из $\mathbf{S}_{256}$.

Так как число Ферма F_5 делиться на 641, то арность полиадической группы
$$< A^{F_4-1}, [\ ]_{F_5,\sigma,F_4-1} >,$$
совпадающая с F_5, является составным числом. При этом можно считать $d = 641$, $c = 2$, а σ – любой цикл длины $F_4 - 1$ *из* S_{F_4-1}.

Полагая в теореме 15.1 $d = F_m$, $c = 2$, получим

***Следствие* 15.1**. *Пусть σ – цикл длины $F_m - 1$ из $\mathbf{S}_{F_m-1}$. Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*
$$d^{F_m} = v^2 = 1,$$
то F_{m+1}-арная группа $< A^{F_m-1}, [\ ]_{F_{m+1},\sigma,F_m-1} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, F_m - 1$.

Следующее предложение показывает, что в условиях теоремы 14.1 для любого простого $q > p$ найдутся такие k и l, что l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ имеет арность l, делящуюся на q, и порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. Для получения этого предложения достаточно в теореме 14.1 положить
$$k = p(p+1)\ \ldots\ (q-1) \qquad (15.1)$$
и заметить, что по теореме Вильсона q делит
$$l = (q-1)! + 1. \qquad (15.2)$$

***Предложение* 15.1**. *Пусть p и q – простые, p – нечётное, $q > p$, $d \geq 2$ – делитель числа* $(p-1)!$, k *и* l *определяются равенствами* (15.1) и (15.2), σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*
$$u^p = v^d = 1,$$
то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого
$$j = 1, 2, \ldots, p(p+1)\ \ldots\ (q-1),$$
при этом q делит l.

Для предложения 15.1 можно сформулировать результаты, аналогичные следствиям 14.1 – 14.3. Ограничимся следствиями для $d = p - 1$ и $d = 2$.

***Следствие* 15.2**. *Пусть p и q – простые, p – нечётное, $q > p$,* k и l *определяются равенствами* (15.1) и (15.2), σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*
$$u^p = v^{p-1} = 1,$$
то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого
$$j = 1, 2, \ldots, p(p+1)\ \ldots\ (q-1),$$
при этом q делит l.

***Следствие* 15.3**. *Пусть p и q – простые, p – нечётное, $q > p$,* k и l *определяются равенствами*

(15.1) и (15.2), σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^p = v^2 = 1,$$

то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого*

$$j = 1, 2, \ldots, p(p+1) \ldots + (q-1),$$

при этом q делит l.

***Теорема* 15.2**. *Пусть* $p = 4t + 1$ – *простое*, $t \geq 1$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^p = v^2 = 1,$$

то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = (1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1})k + 1, \quad (15.3)$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Используя малую теорему Ферма, можно показать (см., например, [6]), что простое число p делит сумму

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} + 1.$$

В сумме

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} \quad (15.4)$$

число чётных слагаемых совпадает с числом нечётных слагаемых и равно $\frac{p-1}{2}$. Поэтому, если $p = 4t + 1$, то число нечётных слагаемых в указанной сумме равно $2t$. Из чётности числа нечётных слагаемых следует чётность суммы (15.4).

Если теперь положить $c = 2$, $d = p = 4t + 1$ – простое, где $t \geq 1$,

$$r = 1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1},$$

то $c = 2$ делит r, $d = p$ делит $r + 1$. Поэтому по теореме 6.5 из [2] l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, арность которой определяется равенством (15.3), порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. □

При $k = 2$ из теоремы 15.2 вытекает

***Следствие* 15.4**. *Пусть* $p = 4t + 1$ – *простое*, $t \geq 1$. *Если группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что*

$$u^p = v^2 = 1,$$

то l-арная группа $< A^2, [\ ]_{l,(12),2} >$, *где*

$$l = 2(1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1}) + 1,$$

порождается любым из множеств $\mathbf{U}_1(M)$, $\mathbf{U}_2(M)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* О порождающих множествах l-арной группы. $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 69–78.

2. *Гальмак*, *А.М.* О порождающих множествах l-арной группы. $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 63–72.

3. *Гальмак*, *А.М.* О порождающих множествах l-арной группы. $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. III / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 76–80.

4. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

5. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

6. *Бухштаб*, *А.А.* Теория чисел / А.А. Бухштаб. – Москва: Просвещение, 1966. – 384 с.

Поступила в редакцию 08.02.2022.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

Проблемы физики, математики и техники, № 1 (50), 2022 ISSN 2077-8708

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.32 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_62

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОТРЕЗКЕ

Ф.Е. Ломовцев

Белорусский государственный университет, *Минск*

GLOBAL CORRECTNESS THEOREM TO THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS ON A SEGMENT

F.E. Lomovtsev

Belarusian State University, *Minsk*

Аннотация. Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для неоднородного общего телеграфного уравнения со всеми переменными коэффициентами в полуполосе плоскости доказана новым методом вспомогательных смешанных задач. Без явных продолжений данных смешанной задачи за пределы множества их задания выведены рекуррентные формулы типа Римана единственного и устойчивого классического решения для первой смешанной задачи на отрезке. Эта полуполоса плоскости разделена криволинейными характеристиками телеграфного уравнения на прямоугольники одинаковой высоты, а каждый прямоугольник – на три треугольника. Критерий корректности состоит из требований гладкости и условий согласования на правые части уравнения, начальных и граничных условий смешанной задачи. Требования гладкости необходимы и достаточны для дважды непрерывной дифференцируемости решения в этих треугольниках. Условия согласования вместе с требованиями гладкости необходимы и достаточны для дважды непрерывной дифференцируемости решения на неявных характеристиках в этих прямоугольниках.

Ключевые слова: *общее телеграфное уравнение*, *неявные характеристики уравнения*, *критерий корректности*, *требование гладкости*, *условие согласования*.

Для цитирования: *Ломовцев*, *Ф.Е.* Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке / Ф.Е. Ломовцев // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 62–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_62

Abstract. The global theorem to Hadamard correctness to the first mixed problem for inhomogeneous general telegraph equation with all variable coefficients in a half-strip of the plane is proved by a novel method of auxiliary mixed problems. Without explicit continuations of the mixed problem data outside set of mixed task assignments the recurrent Riemann-type formulas of a unique and stable classical solution for the first mixed problem on a segment are derived. This half-strip of the plane is divided by the curvilinear characteristics of a telegraph equation into rectangles of the same height, and each rectangle into three triangles. The correctness criterion consists of smoothness requirements and matching conditions on the right-hand side of the equation, initial and boundary conditions of the mixed problem. The smoothness requirements are necessary and sufficient for twice continuous differentiability of the solution in these triangles. The matching conditions together with these smoothness requirements are necessary and sufficient for twice continuous differentiability of solution on the implicit characteristics in these rectangles.

Keywords: *general telegraph equation*, *implicit characteristics of equation*, *correctness criterion*, *smoothness requirement*, *matching condition.*

For citation: *Lomovtsev*, *F.E.* Global correctness theorem to the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on a segment / F.E. Lomovtsev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 62–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_62

Introduction

In this work the global correctness theorem (Theorem 2.1) to the first mixed problem for inhomoge-neous general telegraph equation with all variable coefficients in a half-strip of the plane is proved by a novel method of auxiliary mixed problems [1] from Theorem 1.1. Without explicit continuations of the problem data outside a set of mixed task assignments the recurrent Riemann-type formulas of a unique and stable classical (twice continuous differentiable) solution for the first mixed problem on a segment are derived. The correctness criterion for this mixed problem consists of smoothness requirements and six matching conditions to mixed problem data. Theorem 1.1 to the auxiliary first mixed problem for inhomogeneous general telegraph equation with all variable coefficients in the first quarter of the plane was established by a modification of the Riemann method. Note that for the first time a different type formula for a solution was obtained and the existence of a unique and stable classical solution of this auxiliary mixed problem was shown by Schauder's method of continuation with respect to parameter and the author's theorems on increasing the smoothness of strong generalized solutions in the work [2]. This article indicates necessary and sufficient smoothness requirements for the boundary and initial data, only sufficient smoothness requirements for the right-hand side of the equation and necessary and sufficient matching conditions for the boundary and initial data and the right-hand side of the equation. For this auxiliary mixed problem, the necessary and sufficient smoothness requirements on the right-hand side of this general telegraph equation are found using the correcting Goursat problem by the author's correction method, as for the model telegraph equation at variable rate $a(x,t)$ in [3].

For a concise and accurate assessment of the results of scientific work, we introduced the concept of global (and hence local) solvability theorems for linear boundary value and initial boundary (mixed) problems in works [briefly 4 and in detail 5]. The global correctness theorem of the first mixed problem for a one-dimensional wave equation with constant rate $a(x,t) = a = const > 0$ in a half-strip of the plane has also been proven in [4], [5]. For the first time in this work, a critical analysis of the computation of explicit solutions of linear boundary value problems by modern methods is made. The possibility of deriving global theorems by special non-periodic continuations of the input data of these correctly posed boundary value problems is substantiated. Global theorems are understood as theorems with the weakest (necessary and sufficient) assumptions on the mixed problem data of these problems.

Definition [4], [5]. A solvability theorem of a boundary value problem in a pair of locally convex topological vector spaces is called *global* if its assumptions are necessary and sufficient conditions for the Hadamard correctness of this boundary value problem.

The global correctness theorem for a boundary value problem contains a criterion (necessary and sufficient conditions) for its correctness (according to Hadamard: existence, uniqueness and continuous dependence of a solution on a problem data). There is an infinite set of all possible extensions of the problem data for each boundary value problem. In fact, for each continuation method, we have our own solution, our own sufficient conditions for correctness and, thus, only a certain local correctness theorem of the boundary value problem. Local correctness theorems for the boundary value problem contain only sufficient conditions for their correctness. The non-continuation of the problem data of the boundary value problem serves as a sign of the globality of the derived theorem of their correctness. Nevertheless, using Zorn's lemma, we have proved a theorem on the possibility of deriving global correctness theorems by special extensions of problem data for linear boundary value problems.

Theorem [4], [5]. *Each well-posed linear boundary value problem for a partial differential equation has a global theorem of its correct Hadamard solvability in the corresponding pair of locally convex topological vector spaces*.

Our mixed problem (2.1)–(2.3) in theorem 2.1, due to the rate $a(x,t)$ dependent on x and t, does not admit the use of the Fourier method (separation of variables), the generalization of which is used to solve all mixed problems in [6]–[14]. In them, solutions of mixed problems for string vibration equation (2.1) with coefficients $a = 1$, $b = c = 0$ and a potential $q = q(x)$ are sought by the Khromov method, which is understood as a modification of the Fourier method by using the resolvent method, the ideas of A.N. Krylov on the acceleration of the convergence of Fourier series and L. Euler's ideas on divergent series. Here the obtained Fourier series express generalized (almost classical, continuously differentiable) solutions of mixed problems that satisfy the string vibration equations on a segment only almost everywhere. These generalized solutions are obviously not classical solutions and their uniqueness is not proved, but assumed. In this work only sufficient correctness conditions for the right-hand side of string vibration equation are shown.

1 An auxiliary first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line

We have proved a global [4] correctness theorem on $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ to the problem:

$$\begin{gathered} \mathcal{L}u \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) + \\ +c(x,t)u_x(x,t) + q(x,t)u(x,t) = \\ = f(x,t), (x,t) \in \dot{G}_\infty, \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x > 0, \tag{1.2}$$

$$u|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0, \tag{1.3}$$

where the subscripts of the function u denote its quotients derivatives of the corresponding orders with respect to the indices indicated variables, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ are real constants, coefficients and problem data f, φ, ψ, μ – given functions of their variables x and t.

Let $C^k(\Omega)$ be the set of k times continuously differentiable functions on the subset $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ and $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

***Definition* 1.1.** *The classical solution* to the mixed problem (1.1)–(1.3) on $\dot{G}_\infty$ is called the function $u \in C^2(G_\infty)$, which satisfies equation (1.1) in the usual sense on $\dot{G}_\infty$, and the initial conditions (1.2) and boundary regime (1.3) in the sense of the limits corresponding expressions from its values $u(\dot{x},\dot{t})$ in interior points $(\dot{x},\dot{t})\in\dot{G}_\infty$ for $\dot{x}\to x$, $\dot{t}\to t$ for all indicated boundary points (*x*, *t*).

The characteristic equations

$$dx-(-1)^i a(x,t)dt=0$$

give the implicit characteristics $g_i(x,t)=C_i, i=1,2.$ If $a(x,t)\ge a_0>0,$ then they decrease strictly in t at $i=1$ and increase at $i=2$ with increasing x. Therefore, the functions $y_i=g_i(x,t)$ have inverse functions $x=h_i\{y_i,t\}, t=h^{(i)}[x,y_i].$ If $a\in C^2(G_\infty),$ then the functions $g_i,h_i,h^{(i)}\in C^2$ to the variables $x,t,y_i,$ $i=1,2$ [2].

By the definition of inverse mappings, they satisfy the following inversion identities from [2]:

$$g_i(h_i\{y_i,t\},t)=y_i,\forall y_i,\quad h_i\{g_i(x,t),t\}=x,\ x\ge 0,\ i=1,2, \tag{1.4}$$

$$g_i(x,h^{(i)}[x,y_i])=y_i,\forall y_i,\quad h^{(i)}[x,g_i(x,t)]=t,\ t\ge 0,\ i=1,2, \tag{1.5}$$

$$h_i\{y_i,h^{(i)}[x,y_i]\}=x,\ x\ge 0,\quad h^{(i)}[h_i\{y_i,t\},y_i]=t,\ t\ge 0,\ i=1,2. \tag{1.6}$$

The critical characteristic $g_2(x,t)=g_2(0,0)$ divides the first quarter plane $G_\infty=[0,+\infty[\times\ [0,+\infty[$ into two sets $G_-=\{(x,t)\in G_\infty: g_2(x,t)>g_2(0,0)\}$ and $G_+=\{(x,t)\in G_\infty: g_2(x,t)\le g_2(0,0)\}$. By a modification of the Riemann method it has been proved

***Theorem* 1.1** [2], [3], [15]. *Let the coefficients of the equation* (1.1) *be* $a(x,t)\ge a_0>0,(x,t)\in G_\infty,$ $a\in C^2(G_\infty),$ $b,c,q\in C^1(G_\infty).$ *The first mixed problem* (1.1)–(1.3) *in the set* $\dot{G}_\infty$ *has a unique and stable according to* φ,ψ,f,μ *classical solution* $u\in C^2(G_\infty), G_\infty=[0,+\infty[\times[0,+\infty[,$ *if and only if the following smoothness requirements and matching conditions are true* :

$$\varphi\in C^2[0,+\infty[,\ \psi\in C^1[0,+\infty[,\quad \mu\in C^2[0,+\infty[,\ f\in C(G_\infty), \tag{1.7}$$

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)d\tau\in C^1(G_\infty), i=1,2, \tag{1.8}$$

$$\varphi(0)=\mu(0),\psi(0)=\mu'(0),\quad f(0,0)+a^2(0,0)\varphi''(0)-b(0,0)\psi(0)-c(0,0)\varphi'(0)-q(0,0)\varphi(0)=\mu''(0). \tag{1.9}$$

The classical solution $u\in C^2(G_\infty)$ *to the first mixed problem* (1.1)–(1.3) *in* $\dot{G}_\infty$ *is the function*

$$u_-(x,t)=\frac{1}{2a(x,t)}\Big((auv)(h_2\{g_2(x,t),0\},0)+(auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0)\Big)+\frac{1}{2a(x,t)}\int_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}[\psi(s)v(s,0)-\varphi(s)v_\tau(s,0)+b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds+\frac{1}{2a(x,t)}\int_0^t d\tau\int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} f(s,\tau)v(s,\tau)ds,(x,t)\in G_-, \tag{1.10}$$

$$u_+(x,t)=\frac{1}{2a(x,t)}\Big((auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0)-(auv)(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\},0)\Big)+\frac{1}{2a(x,t)}\int_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}[\psi(s)v(s,0)-\varphi(s)v_\tau(s,0)+b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds+\frac{1}{2a(x,t)}\int_0^t d\tau\int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau)ds+\mu(t)-\frac{1}{2a(0,t)}\int_0^t d\tau\int_{h_2\{g_2(0,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\tau\}}\breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau)ds,(x,t)\in G_+, \tag{1.11}$$

where the functions are

$$\breve{f}(x,t)=f(x,t)+f^{(0)}(x,t)-f_\mu(x,t),$$

$f_\mu(x,t)=\mathcal{L}\mu(t),$ *and* $f^{(0)}$ *is the restriction on the set* G_∞ *of the solution to the corresponding system of the Volterra integral equation of the second kind and the linear algebraic equation.*

In G_- the Riemann function $v(s,\tau)=v(s,\tau;x,t)$ is the solution to the Goursat problem:

$$v_{\tau\tau}(s,\tau)-(a^2(s,\tau)v(s,\tau))_{ss}-(b(s,\tau)v(s,\tau))_\tau-(c(s,\tau)v(s,\tau))_s+q(s,\tau)v(s,\tau)=0,\quad (s,\tau)\in\Delta MPQ, \tag{1.12}$$

$$v(s,\tau)=\exp\left\{\int_t^\tau k_1(h_1\{g_1(x,t),\rho\},\rho)d\rho\right\},\quad g_1(s,\tau)=g_1(x,t),$$

$$v(s,\tau)=\exp\left\{\int_t^\tau k_2(h_2\{g_2(x,t),\rho\},\rho)d\rho\right\},\quad g_2(s,\tau)=g_2(x,t),\ \tau\in[0,t], \tag{1.13}$$

where the functions

$$k_1(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)+3a(s,\tau)a_s(s,\tau)-a_\tau(s,\tau)+c(s,\tau)\}/4a(s,\tau)$$

on the curve *QM* and

$$k_2(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)-3a(s,\tau)a_s(s,\tau)-a_\tau(s,\tau)-c(s,\tau)\}/4a(s,\tau)$$

on the curve *MP* of the curvilinear characteristic triangle ΔMPQ (see Figure 1.1).

In G_+ the Riemann function $\check{v}(s,\tau)=\check{v}(s,\tau;x,t)$ is the solution to the Goursat problem:

$$\check{v}_{\tau\tau}(s,\tau)-(\check{a}^2(s,\tau)\check{v}(s,\tau))_{ss}-(\breve{b}(s,\tau)v(\check{s},\tau))_\tau-(\tilde{c}(s,\tau)\check{v}(s,\tau))_s+\check{q}(s,\tau)\check{v}(s,\tau)=0,\quad (s,\tau)\in\Delta MPQ, \tag{1.14}$$

$$\breve{v}(s,\tau)=\exp\left\{\int_t^\tau \breve{k}_1(h_1\{g_1(x,t),\rho\},\rho)d\rho\right\},$$

$$g_1(s,\tau)=g_1(x,t),$$

$$\breve{v}(s,\tau)=\exp\left\{\int_t^\tau \breve{k}_2(h_2\{g_2(x,t),\rho\},\rho)d\rho\right\}, \quad (1.15)$$

$$g_2(s,\tau)=g_2(x,t),\ \tau\in[0,t],$$

with functions $\breve{k}_1(s,\tau)$ on the curve *QM* and $\breve{k}_2(s,\tau)$ on the curve *MP*, respectively equal to the functions $k_1(s,\tau)$ and $k_2(s,\tau)$, in which the coefficients *a*, *b*, *c*, *q* are respectively replaced by their even in *x* extensions $\breve{a},\breve{b},\breve{q}$ and odd in *x* extension $\tilde{c}$ of the coefficients *a*, *b*, *c*, *q* (see Figure 1.2).

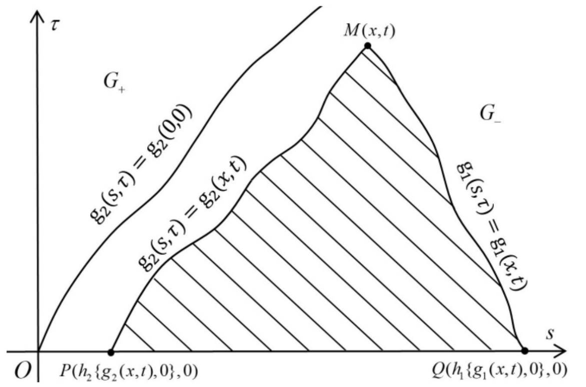


Figure 1.1 – Curvilinear characteristic triangle $\triangle MPQ$ for the vertex $M\in G_-$.

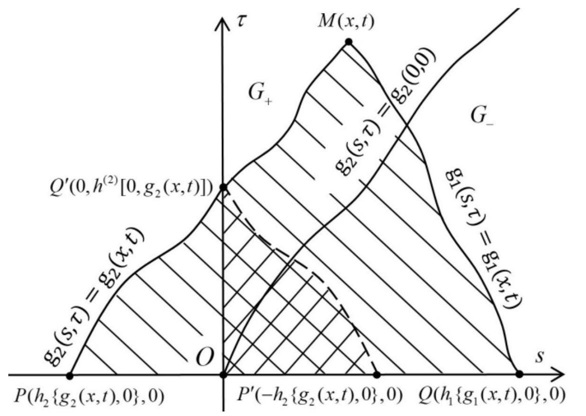


Figure 1.2 – Curvilinear characteristic and critical triangles $\triangle MPQ$ and $\triangle Q'PP'$ respectively for the vertex $M\in G_+$.

At each fixed point $M(x,t)\in G_\infty$ the tangent of the inclination angles of tangent lines to the curvilinear characteristics $g_i(x,t)=C_i, i=1,2,$ differ only in opposite signs $dx/dt=(-1)^i a(x,t), i=1,2,$ (see Figure 1.1, Figure 1.2). But since the extensions $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{q}$, $\tilde{f}$ are even and $\tilde{c}$ is odd along *s* relative to the axis $O\tau$ for any vertex $M(0,t), t>0,$ lying on the axis $O\tau$, curvilinear characteristic triangles $\triangle MPQ$ and, in the particular, the triangles $\triangle Q'PP'$ are "isosceles" (see Figure 1.2).

It is proved that the Goursat problems (1.12), (1.13) and (1.14), (1.15) with coefficients $a\in C^2(G_\infty)$, $b,c,q\in C^1(G_\infty)$ always have the only classical solutions $v\in C^2$ on G_- and G_+. The formula (1.11) of the classical solution u_+ to this problem on G_+ does not contain the values of the extensions $\breve{a},\breve{b}$, $\tilde{c},\breve{q},\breve{f},\breve{f}_\mu,\breve{f}^{(0)}$ for $x<0$, as in formula (1.10), therefore that these extensions turned out to be formal due to the modulus sign $|s|$ in the functions $\breve{f}(|s|,\tau)$ и $v(|s|,\tau)$. Therefore, in the solution (1.11), the first iterated integral, which is equal to the double integral over the characteristic triangle ΔMPQ, is actually taken over the curvilinear quadrangle $MQ'P'Q$ and twice over the triangle $\triangle Q'OP'$ of the critical triangle $\triangle Q'PP'$ of the product $\breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau)$.

***Corollary* 1.1.** *If the continuous right-hand side* $f\in C[0,+\infty[$ *depends only on x or t, then the assertion of this Theorem* 1.1 *is true without integral smoothness requirements* (1.8).

For a function *f* depending only on *x* or *t* and continuous in Q_n, the integral requirements (1.8) in Theorem 1.1 are automatically satisfied.

***Corollary* 1.2.** *Let the coefficients of the equation* (1.1) *be* $a(x,t)\geq a_0>0,(x,t)\in G_\infty$, $a\in C^2(G_\infty)$, $b,c,q\in C^1(G_\infty)$. *If the right-hand side f depends on x and t, then in the smoothness requirements* (1.8) *on* G_∞ *the belonging of integrals to a set* $C^1(G_\infty)$ *are equivalent to their belonging to sets* $C^{(0,1)}(G_\infty)$ *or* $C^{(1,0)}(G_\infty)$. *Here* $C^{(0,1)}(\Omega)$ $(C^{(0,1)}(\Omega))$ *is the set of all continuous* (*continuously differentiable*) *with respect to x and continuously differentiable* (*continuous*) *with respect to t functions on* Ω.

The proof of Corollary 1.2 is similar to its proof in the case of constant coefficients $a(x,t)=const>0$, $b=c=q=0$ of the equation (1.1) in chapter 2 of from the candidate dissertation [15].

***Remark* 1.1.** It was first proved the existence of a unique and stable classical solution to the mixed problem (1.1)–(1.3) by the Schauder's continuation method with respect to a parameter and the author's theorems on increasing the smoothness of strong solutions in the article [2].

2 The main first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on a segment

We need to decide and derive the correctness criterion on $\dot{Q}_n=]0,d[\times]0,d_{n+1}[$ of the problem:

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) + q(x,t)u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in \dot{Q}_n, \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), 0 < x < d, \tag{2.2}$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), u|_{x=d} = \mu_2(t), 0 < t < d_{n+1}, \quad d_n = (n-1)h^{(2)}[d/2, g_2(0.0)]. \tag{2.3}$$

Let us find in an explicit form the classical solutions of this mixed problem and the criterion for its Hadamard's correctness.

***Definition* 2.1.** *The classical solution* to the mixed problem (2.1)–(2.3) on $\dot{Q}_n$ is called the function $u \in C^2(Q_n)$, $Q_n = [0,d] \times [0, d_{n+1}]$, which satisfies equation (2.1) in the usual sense on $\dot{Q}_n$, and the initial conditions (2.2) and boundary regimes (2.3) in the sense of the limits corresponding expressions from its values $u(\dot{x},\dot{t})$ in interior points $(\dot{x},\dot{t}) \in \dot{Q}_n$ for $\dot{x} \to x$, $\dot{t} \to t$ for all indicated boundary points (x, t).

The statement of the mixed problem (2.1)–(2.3) and the definition 2.1 of its classical solutions $u \in C^2(Q_n)$ imply the obvious necessary smoothness requirements

$$f \in C(Q_n), \varphi \in C^2[0,d], \quad \psi \in C^1[0,d], \mu_1, \mu_2 \in C^2[0, d_{n+1}]. \tag{2.4}$$

To obtain the first four matching conditions the boundary regimes (2.3) with initial conditions (2.2) and equation (2.1) in equalities (2.3) and the first derivative with respect to t of these equalities, we set $t = 0$ and use the initial data

$$\varphi(\hat{d}_p) = \mu_p(0), \psi(\hat{d}_p) = \mu_{p'}(0), \quad \hat{d}_p = (p-1)d, \, p = 1,2. \tag{2.5}$$

To find two more matching conditions, we differentiate equalities (2.3) twice in t, we calculate the values of the derivatives of solutions u for $x = 0, t = 0$ and $x = d, t = 0$ using initial conditions (2.2) and equation (2.1) and we obtain

$$f(\hat{d}_p, 0) + a^2(\hat{d}_p, 0)\varphi''(\hat{d}_p) - b(\hat{d}_p, 0)\psi(\hat{d}_p) - c(\hat{d}_p, 0)\varphi'(\hat{d}_p) - q(\hat{d}_p, 0)\varphi(\hat{d}_p) = \mu_{p''}(0), \tag{2.6}$$
$$p = 1,2.$$

We denote by the number of strokes over functions with one variable the corresponding orders of their ordinary derivatives with respect to these variables.

A global correctness Theorem 2.1 to this first mixed problem (2.1)–(2.3) is derived from Theorem 1.1 "by the method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string (wave equation on a half-line)" from [1]. In the limit at $n \to +\infty$, bounded rectangles Q_n exhaust the half-strip $G = [0,d] \times [0, +\infty[$, unbounded along the time variable t. For global correctness Theorem 2.1, the half-strip G is divided into rectangles $G_n = [0,d] \times [d_n, d_{n+1}]$, where $d_n = (n-1)h^{(2)}[d/2, g_2(0,0)]$, $n = 1,2,3,...$, each of which is divided by the critical characteristics $g_2(x,t) = g_2(0,d_n)$, $g_1(x,t) = g_1(d,d_n)$, $n = 1,2,3,...$, into triangles:

$$\Delta_{3n-2} = \{(x,t) \in G : g_2(x,t) \geq g_2(0,d_n), \; g_1(x,t) \leq g_1(d,d_n), x \in [0,d], t \in [d_n, d_{n+1}]\},$$
$$\Delta_{3n-1} = \{(x,t) \in G : g_2(x,t) \leq g_2(0,d_n), \; x \in [0, d/2], t \in [d_n, d_{n+1}]\},$$
$$\Delta_{3n} = \{(x,t) \in G : g_1(x,t) \geq g_1(d,d_n), \; x \in [d/2, d], t \in [d_n, d_{n+1}]\}, n = 1,2,3,...$$

We have proved by a novel method of auxiliary mixed problems the following global correctness

***Theorem* 2.1.** *Let the coefficients of the equation* (2.1) *be* $a(x,t) \geq a_0 > 0, (x,t) \in Q_n$, $a \in C^2(Q_n)$, $b, c, q \in C^1(Q_n)$. *The first mixed problem* (2.1)–(2.3) *in the set* $\dot{Q}_n$ *has a unique and stable according to* $\varphi, \psi, f, \mu_1, \mu_2$ *classical solution* $u \in C^2(Q_n)$, $Q_n = [0,d] \times [0, d_{n+1}]$, *if and only if the following smoothness requirements are true* (2.4),

$$\int_{d_k}^{t} f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|, \tau) d\tau \in C^1(\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k-1}), \quad i = 1,2, \tag{2.7}$$

$$\int_{d_k}^{t} f(d - |d - h_i\{g_i(x,t),\tau\}|, \tau) d\tau \in C^1(\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k}), \quad i = 1,2, \tag{2.8}$$

for all indices $k = \overline{1,n}, n = 1,2,...,$ *and the matching conditions* (2.5), (2.6).

The classical solution to the first mixed problem (2.1)–(2.3) in rectangle $\dot{Q}_n$ is the function

$$u_{3k-2}(x,t) = \frac{1}{2a(x,t)}\Big((auv)(h_2\{g_2(x,t),d_k\}, d_k) + (auv)(h_1\{g_1(x,t),d_k\}, d_k)\Big) + \frac{1}{2a(x,t)} \int_{h_2\{g_2(x,t),d_k\}}^{h_1\{g_1(x,t),d_k\}} [\psi_k(s)v(s,d_k) - \varphi_k(s)v_\tau(s,d_k) + b(s,d_k)\varphi_k(s)v(s,d_k)]ds + \frac{1}{2a(x,t)} \int_{d_k}^{t} d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} f(s,\tau)v(s,\tau)ds, (x,t) \in \Delta_{3k-2}, \tag{2.9}$$

$$u_{3k-1}(x,t) = \frac{1}{2a(x,t)}\Big((auv)(h_1\{g_1(x,t),d_k\}, d_k) - (auv)(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),d_k\}, d_k)\Big) + \frac{1}{2a(x,t)} \int_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),d_k\}}^{h_1\{g_1(x,t),d_k\}} [\psi_k(s)v(s,d_k) - \varphi_k(s)v_\tau(s,d_k) + b(s,d_k)\varphi_k(s)v(s,d_k)]ds + \frac{1}{2a(x,t)} \int_{d_k}^{t} d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \breve{f}_1(|s|,\tau)v(|s|,\tau)ds + \mu_1(t) - \frac{1}{2a(0,t)} \int_{d_k}^{t} d\tau \int_{h_2\{g_2(0,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\tau\}} \breve{f}_1(|s|,\tau)v(|s|,\tau)ds, (x,t) \in \Delta_{3k-1}, \tag{2.10}$$

$$u_{3k}(x,t)=\frac{1}{2a(x,t)}\Big((auv)(h_2\{g_2(x,t),d_k\},d_k)-$$
$$-(auv)(h_2\{g_2(d,h^{(1)}[d,g_1(x,t)]),d_k\},d_k)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),d_k\}}^{h_2\{g_2(d,h^{(1)}[d,g_1(x,t)]),d_k\}}[\psi_k(s)v(s,d_k)-$$
$$-\varphi_k(s)v_\tau(s,d_k)+b(s,d_k)\varphi_k(s)v(s,d_k)]ds+ \tag{2.11}$$
$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{d_k}^{t}d\tau\int\limits_{d-h_1\{g_1(x,t),\tau\}}^{d-h_2\{g_2(x,t),\tau\}}\breve{f}_2(d-|s|,\tau)v(d-|s|,\tau)ds+$$
$$+\mu_2(t)-$$
$$-\frac{1}{2a(0,t)}\int\limits_{d_k}^{t}d\tau\int\limits_{d-h_1\{g_1(0,t),\tau\}}^{d-h_2\{g_2(0,t),\tau\}}\breve{f}_2(d-|s|,\tau)v(d-|s|,\tau)ds,$$
$$(x,t)\in\Delta_{3k},$$

for all indices $k=\overline{1,n},\ n=1,2,...$ *Here the functions* u_{3k-l} *are the restrictions of the solution* u *to the problem* (2.1)–(2.3) *on triangles* $\Delta_{3k-l},\ l=0,1,2,$ *and recurrent initial data are equal*

$$\varphi_1(x)=\varphi(x),\ \psi_1(x)=\psi(x),$$
$$x\in[0,d],\ \varphi_k(x)=u_{3k+j-4}\big|_{t=d_k}, \tag{2.12}$$
$$\psi_k(x)=\partial_t u_{3k+j-4}\big|_{t=d_k},\ x\in[j(d/2),(j+1)(d/2)],$$
$$j=0,1,\ k=\overline{2,n},\ n=1,2,...$$

The functions

$$\breve{f}_p(x,t)=f(x,t)+f_p^{(0)}(x,t)-f_{\mu_p}(x,t),$$
$$f_{\mu_p}(x,t)=\mathcal{L}\mu_p(t),$$

$f_p^{(0)}(x,t)$ *and Riemann functions* $v(x,t)$ *are the restrictions on triangles* Δ_{3k-l} *of the same functions from Theorem* 1.1.

Proof. Theorem 2.1 will be proved by the method of mathematical induction over rectangles Q_n. At the first step of mathematical induction for the mixed problem (2.1)–(2.3) on a rectangle $Q_1=G_1$ we will verify the existence of a unique and stable classical solution $u\in C^2(Q_1)$ of the form (2.9)–(2.11) with correctness criterion (2.4)–(2.8) for $k=n=1$. The restrictions of necessary and sufficient conditions (1.7)–(1.9) and formulas (1.10), (1.11) at $\varphi(x)=\varphi_1(x)$, $\psi(x)=\psi_1(x), x\in[0,d]$, $\mu(t)=\mu_1(t)$, $t\in[0,d_2]$, from Theorem 1.1 onto the trapezoid $\Delta_1\bigcup\Delta_2$, respectively, coincide with the correctness criterion (2.4)–(2.8) for $k=n=1$, $p=1$ and formulas (2,9), (2.10) from Theorem 2.1. In the trapezoid $\Delta_1\bigcup\Delta_2$, the correctness criterion consists of the smoothness requirements (2.4), (2.7) for $k=n=1$ and matching conditions (2.5), (2.6) at $p=1$.

To find the classical solution and the correctness criterion of the mixed problem consisting of the equation (2.1), initial conditions (2.2), and the second boundary regime from (2.3) at $x=d$ in the trapezoid $\Delta_1\bigcup\Delta_3$, we reduce it by replacing $x=d-\tilde{x},\ t=\tilde{t}$ to the equivalent mixed problem

$$\tilde{u}_{tt}(\tilde{x},t)-\tilde{a}^2(\tilde{x},t)u_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x},t)+\tilde{b}(\tilde{x},t)\tilde{u}_t(\tilde{x},t)+$$
$$+\tilde{c}(\tilde{x},t)\tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x},t)+\tilde{q}(\tilde{x},t)\tilde{u}(\tilde{x},t)= \tag{2.13}$$
$$=\tilde{f}(\tilde{x},t),(\tilde{x},t)\in\tilde{\Delta}_1\bigcup\tilde{\Delta}_2,$$
$$\tilde{u}\,|_{t=0}=\tilde{\varphi}(\tilde{x}),\ \tilde{u}_t\,|_{t=0}=\tilde{\psi}(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in[0,d], \tag{2.14}$$
$$\tilde{u}\,|_{\tilde{x}=0}=\mu_2(t),\ t\in[0,d_2], \tag{2.15}$$

relatively new function $\tilde{u}(\tilde{x},t)=u(d-\tilde{x},t)=u(x,t)$ with new coefficients $\tilde{a}(\tilde{x},t)=a(d-\tilde{x},t)=a(x,t)$, $\tilde{b}(\tilde{x},t)=b(d-\tilde{x},t)=b(x,t)$, $\tilde{c}(\tilde{x},t)=c(d-\tilde{x},t)=$ $=c(x,t)$, $\tilde{q}(\tilde{x},t)=q(d-\tilde{x},t)=q(x,t)$ and problem data $\tilde{f}(\tilde{x},t)=f(d-\tilde{x},t)=f(x,t)$, $\tilde{\varphi}(\tilde{x})=\varphi(d-\tilde{x})=$ $=\varphi(x)$, $\tilde{\psi}(\tilde{x})=\psi(d-\tilde{x})=\psi(x)$. Here the trapezoid $\tilde{\Delta}_1\bigcup\tilde{\Delta}_2$ is formed by two triangles

$$\tilde{\Delta}_1=\{(x,t)\in G_\infty: g_1(x,t)\ge g_1(0,0),$$
$$g_2(x,t)\le g_2(0,0),\ x\in[0,d],\ t\in[0,d_2]\},$$
$$\tilde{\Delta}_2=\{(x,t)\in G_\infty: g_1(x,t)\le g_1(0,0),\ x\in[0,d/2],$$
$$t\in[0,d_2]\},\ d_n=(n-1)h^{(1)}[d/2,g_1(d,0)].$$

After this non-degenerate replacement $x=d-\tilde{x}$, $t=\tilde{t}$ the implicit characteristic functions $y_i=g_i(x,t)=C_i,\ x,t\ge 0,$ and their inverse functions $x=h_i\{y_i,t\},\ t\ge 0,$ $t=h^{(i)}[x,y_i],\ x\ge 0,\ i=1,2,$ become the functions:

$$\tilde{y}_i=\tilde{g}_i(\tilde{x},t)=g_i(d-\tilde{x},t)=g_i(x,t),\ x,t\ge 0, \tag{2.16}$$
$$\tilde{x}=\tilde{h}_i\{\tilde{y}_i,t\}=d-h_i\{\tilde{y}_i,t\},\ t\ge 0, \tag{2.17}$$
$$t=\tilde{h}^{(i)}[\tilde{x},\tilde{y}_i]=h^{(i)}[d-\tilde{x},\tilde{y}_i]=h^{(i)}[x,\tilde{y}_i],$$
$$x\ge 0,\ i=1,2. \tag{2.18}$$

For them, analogous inversion identities are derived from the inversion identities (1.4)–(1.6) respectively:

$$\tilde{g}_i(\tilde{h}_i\{\tilde{y}_i,t\},t)=\tilde{y}_i,\ \forall\tilde{y}_i,\ \tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(\tilde{x},t),t\}=\tilde{x},$$
$$\tilde{x}\ge 0,\ i=1,2,$$
$$\tilde{g}_i(\tilde{x},\tilde{h}^{(i)}[\tilde{x},\tilde{y}_i])=\tilde{y}_i,\ \forall\tilde{y}_i,\ \tilde{h}^{(i)}[\tilde{x},\tilde{g}_i(\tilde{x},t)]=t,$$
$$t\ge 0,\ i=1,2,$$
$$\tilde{h}_i\{\tilde{y}_i,\tilde{h}^{(i)}[\tilde{x},\tilde{y}_i]\}=\tilde{x},\ \tilde{x}\ge 0,\ \tilde{h}^{(i)}[\tilde{h}_i\{\tilde{y}_i,t\},\tilde{y}_i]=t,$$
$$t\ge 0,\ i=1,2.$$

According to Theorem 1.1, the unique and stable classical solution $\tilde{u}(\tilde{x},t)$ to the mixed problem (2.13)–(2.15) in a triangle $\tilde{\Delta}_1$ is given by the restriction of the unique and stable classical solution $\tilde{u}_-(\tilde{x},t)$ to $\tilde{\Delta}_1$ the form (1.10), in which the characteristic functions $\tilde{g}_1,\tilde{h}_1,\tilde{h}^{(1)}$ are replaced respectively by functions $\tilde{g}_2,\tilde{h}_2,\tilde{h}^{(2)}$ and vice versa, the coefficients a, b, c, q – by the coefficients $\tilde{a},\tilde{b},-\tilde{c},\tilde{q}$ and the lateral sides MP, QM – by the lateral sides $\tilde{Q}\tilde{M}$, $\tilde{M}\tilde{P}$ of the characteristic triangles ΔMPQ and $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$. The vertices of these characteristic triangles are points $\tilde{M}(\tilde{x},t) = M(d-\tilde{x},t) = M(x,t)$,

$$\tilde{P}(\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(\tilde{x},t),0\},0) = P(d-\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(\tilde{x},t),0\},0) = P(h_2\{g_2(d-\tilde{x},t),0\},0) = P(h_2\{g_2(x,t),0\},\ 0),$$

$$\tilde{Q}(\tilde{h}_1\{\tilde{g}_1(\tilde{x},t),0\},0) = Q(d-\tilde{h}_1\{\tilde{g}_1(\tilde{x},t),0\},0) = Q(h_1\{g_1(d-\tilde{x},t),0\},0) = Q(h_1\{g_1(x,t),0\},0).$$

The last changes of the sides of the triangles ΔMPQ and $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ in the formula (1.10) mean the replacements of the functions k_1 and k_2, respectively, by the functions k_2 and k_1 in the Goursat problem (1.12), (1.13).

As a result, from formula (1.10) at $\varphi(x) = \varphi_1(x)$, $\psi(x) = \psi_1(x), x \in [0,d]$, for $(\tilde{x},t) \in \tilde{\Delta}_1$ we have the unique and stable classical solution

$$\tilde{u}_1(\tilde{x},t) = \frac{1}{2\tilde{a}(\tilde{x},t)}\Big((\tilde{a}\tilde{u}\tilde{v})(\tilde{h}_1\{\tilde{g}_1(\tilde{x},t),0\},0) + (\tilde{a}\tilde{u}\tilde{v})(\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(\tilde{x},t),0\},0)\Big) + \frac{1}{2\tilde{a}(\tilde{x},t)}\int\limits_{\tilde{h}_1\{\tilde{g}_1(\tilde{x},t),0\}}^{\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(\tilde{x},t),0\}} [\tilde{\psi}_1(s)\tilde{v}(s,0) - \tilde{\varphi}_1(s)\tilde{v}_\tau(s,0) + \tilde{b}(s,0)\tilde{\varphi}_1(s)\tilde{v}(s,0)]ds + \frac{1}{2\tilde{a}(\tilde{x},t)}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\tilde{h}_1\{\tilde{g}_1(\tilde{x},t),\tau\}}^{\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(\tilde{x},t),\tau\}} \tilde{f}(s,\tau)\tilde{v}(s,\tau)ds, (\tilde{x},t) \in \tilde{\Delta}_1. \quad (2.19)$$

Here the Riemann function $\tilde{v}(\tilde{s},\tau) = \tilde{v}(\tilde{s},\tau;\tilde{x},t)$ is classical solution on $\tilde{\Delta}_1$ to the Goursat problem:

$$\tilde{v}_{\tau\tau}(\tilde{s},\tau) - (\tilde{a}^2(\tilde{s},\tau)\tilde{v}(\tilde{s},\tau))_{\tilde{s}\tilde{s}} - (\tilde{b}(\tilde{s},\tau)\tilde{v}(\tilde{s},\tau))_\tau + (\tilde{c}(\tilde{s},\tau)\tilde{v}(\tilde{s},\tau))_{\tilde{s}} + \tilde{q}(\tilde{s},\tau)\tilde{v}(\tilde{s},\tau) = 0, \quad (\tilde{s},\tau) \in \Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}, \quad (2.20)$$

$$\tilde{v}(\tilde{s},\tau) = \exp\left\{\int\limits_t^\tau \tilde{k}_2(\tilde{h}_1\{\tilde{g}_1(\tilde{x},t),\rho\},\rho)d\rho\right\}, \quad \tilde{g}_1(\tilde{s},\tau) = \tilde{g}_1(\tilde{x},t),$$
$$\tilde{v}(\tilde{s},\tau) = \exp\left\{\int\limits_t^\tau \tilde{k}_1(\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(\tilde{x},t),\rho\},\rho)d\rho\right\}, \quad \tilde{g}_2(\tilde{s},\tau) = \tilde{g}_2(\tilde{x},t),\ \tau \in [0,t], \quad (2.21)$$

where the functions are

$$\tilde{k}_1(\tilde{s},\tau) = \{\tilde{a}(\tilde{s},\tau)\tilde{b}(\tilde{s},\tau) + 3\tilde{a}(\tilde{s},\tau)\tilde{a}_{\tilde{s}}(\tilde{s},\tau) - \tilde{a}_\tau(\tilde{s},\tau) - \tilde{c}(\tilde{s},\tau)\}/4\tilde{a}(\tilde{s},\tau)$$

on the curve $\tilde{M}\tilde{P}$ and

$$\tilde{k}_2(\tilde{s},\tau) = \{\tilde{a}(\tilde{s},\tau)\tilde{b}(\tilde{s},\tau) - 3\tilde{a}(\tilde{s},\tau)\tilde{a}_{\tilde{s}}(\tilde{s},\tau) - \tilde{a}_\tau(\tilde{s},\tau) + \tilde{c}(\tilde{s},\tau)\}/4\tilde{a}(\tilde{s},\tau)$$

on the curve $\tilde{Q}\tilde{M}$.

Since the derivative is $\tilde{a}_{\tilde{s}}(\tilde{s},\tau) = -a_s(s,\tau)$, then after the inverse replacement $\tilde{x} = d - x$ from the Goursat problem (2.20), (2.21) we arrive at the Goursat problem:

$$v_{\tau\tau}(s,\tau) - (a^2(s,\tau)v(s,\tau))_{ss} - (b(s,\tau)v(s,\tau))_\tau - (c(s,\tau)v(s,\tau))_s + q(s,\tau)v(s,\tau) = 0, \quad (s,\tau) \in \Delta MPQ, \quad (2.22)$$

$$v(s,\tau) = \exp\left\{\int\limits_t^\tau k_1(h_1\{g_1(x,t),\rho\},\rho)d\rho\right\}, \quad g_1(s,\tau) = g_1(x,t),$$
$$v(s,\tau) = \exp\left\{\int\limits_t^\tau k_2(h_2\{g_2(x,t),\rho\},\rho)d\rho\right\}, \quad g_2(s,\tau) = g_2(x,t),\ \tau \in [0,t], \quad (2.23)$$

because

$$\tilde{k}_1(\tilde{s},\tau) = \{a(s,\tau)b(s,\tau) - 3a(s,\tau)a_s(s,\tau) - a_\tau(s,\tau) - c(s,\tau)\}/4a(s,\tau) = k_2(s,\tau)$$

on the curve MP and

$$\tilde{k}_2(\tilde{s},\tau) = \{a(s,\tau)b(s,\tau) + 3a(s,\tau)a_s(s,\tau) - a_\tau(s,\tau) + c(s,\tau)\}/4a(s,\tau) = k_1(s,\tau)$$

on the curve QM in Goursat conditions (2.21). Here we have used relations (2.16), (2.17) and

$$\tilde{k}_i(\tilde{s},\tau) = k_i(d-\tilde{s},\tau) = k_i(s,\tau),$$
$$\tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(\tilde{s},\tau),\rho\} = d - h_i\{g_i(s,\tau),\rho\},$$
$$\tilde{k}_i\left(\tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(\tilde{x},t),\rho\},\rho\right) = k_i\left(d-\tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(\tilde{x},t),\rho\},\rho\right) = k_i\left(h_i\{\tilde{g}_i(\tilde{x},t),\rho\},\rho\right) = k_i\left(h_i\{g_i(x,t),\rho\},\rho\right), \quad i = 1,2. \quad (2.24)$$

So, in the formula (2.19) we make a change of variable $\tilde{x} = d - x$ using the following equalities:

$$(\tilde{a}\tilde{u}\tilde{v})(\tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(\tilde{x},t),0\},0) = (auv)(d-\tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(\tilde{x},t),0\},0) = (auv)(h_i\{\tilde{g}_i(\tilde{x},t),0\},0) = (auv)(h_i\{g_i(d-\tilde{x},t),0\},0) = (auv)(h_i\{g_i(x,t),0\},0),$$

$$\tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(\tilde{x},t),\tau\} = d - h_i\{\tilde{g}_i(\tilde{x},t),\tau\} = d - h_i\{g_i(d-\tilde{x},t),\tau\} = d - h_i\{g_i(d-x,t),\tau\},\ i = 1,2, \quad (2.25)$$

due to equalities (2.16), (2.17) and $\tilde{v}(\tilde{s},\tau) = v(d-\tilde{s},\tau) = v(s,\tau)$. By these substitution $\tilde{x} = d - x$ and transformations (2.25) from the classical solution (2.19) we find the classical solution

$$\tilde{u}_1(\tilde{x},t) = \frac{1}{2a(x,t)}\Big((auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0) + (auv)(h_2\{g_2(x,t),0\},0)\Big) + \frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{d-h_1\{g_1(x,t),0\}}^{d-h_2\{g_2(x,t),0\}} [\psi_1(d-s)v(d-s,0) - \varphi_1(d-s)v_\tau(d-s,0) + b(d-s,0)\varphi_1(d-s)v(d-s,0)]ds + \quad (2.26)$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int_0^t d\tau \int_{d-h_1\{g_1(x,t),\tau\}}^{d-h_2\{g_2(x,t),\tau\}} f(d-s,\tau)v(d-s,\tau)ds =$$
$$=u_1(x,t),(x,t)\in\Delta_1.$$

To substantiate the last equality in the two integrals of expression (2.26), we changed the integration variable $\nu=d-s$. In addition, we see that the Goursat problem (2.22), (2.23) coincides with the Goursat problem (1.12), (1.13).

Similar to the solution (2.19) from formula (1.11) at $\varphi(x)=\varphi_1(x)$, $\psi(x)=\psi_1(x), x\in[0,d]$, $\mu(t)=\mu_2(t)$, $t\in[0,d_2]$, for $(\tilde{x},t)\in\tilde{\Delta}_2$, we have the unique and stable classical solution

$$\tilde{u}_2(\tilde{x},t)=\frac{1}{2\tilde{a}(\tilde{x},t)}\Big((\tilde{a}\tilde{u}\tilde{v})(\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(\tilde{x},t),0\},0)-$$
$$-(\tilde{a}\tilde{u}\tilde{v})(\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(0,\tilde{h}^{(1)}[0,\tilde{g}_1(\tilde{x},t)]),0\},0)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2\tilde{a}(\tilde{x},t)}\int_{\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(0,\tilde{h}^{(1)}[0,\tilde{g}_1(\tilde{x},t)]),0\}}^{\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(\tilde{x},t),0\}} [\tilde{\psi}_1(s)\tilde{v}(s,0)- \tag{2.27}$$
$$-\tilde{\varphi}_1(s)\tilde{v}_\tau(s,0)+\tilde{b}(s,0)\tilde{\varphi}_1(s)\tilde{v}(s,0)]ds+$$
$$+\frac{1}{2\tilde{a}(\tilde{x},t)}\int_0^t d\tau\int_{\tilde{h}_1\{\tilde{g}_1(\tilde{x},t),\tau\}}^{\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(\tilde{x},t),\tau\}} \tilde{\tilde{f}}_2(|s|,\tau)\tilde{v}(|s|,\tau)ds+\mu_2(t)-$$
$$-\frac{1}{2\tilde{a}(0,t)}\int_0^t d\tau\int_{\tilde{h}_1\{\tilde{g}_1(0,t),\tau\}}^{\tilde{h}_2\{\tilde{g}_2(0,t),\tau\}} \tilde{\tilde{f}}_2(|s|,\tau)\tilde{v}(|s|,\tau)ds,(\tilde{x},t)\in\tilde{\Delta}_2.$$

Here the Riemann function $\tilde{v}(s,\tau)=\tilde{v}(s,\tau;x,t)$ is the classical solution to the Goursat problem of the form (1.14), (1.15). Using functions (2.16)–(2.18), we derive the following equalities:

$$(\tilde{a}\tilde{u}\tilde{v})(\tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(0,\tilde{h}^{(j)}[0,\tilde{g}_j(\tilde{x},t)]),0\},0)=$$
$$=(auv)(d-\tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(0,\tilde{h}^{(j)}[0,\tilde{g}_j(\tilde{x},t)]),0\},0)=$$
$$=(auv)(h_i\{\tilde{g}_i(0,\tilde{h}^{(j)}[0,\tilde{g}_j(\tilde{x},t)]),0\},0)=$$
$$=(auv)(h_i\{g_i(d,\tilde{h}^{(j)}[0,\tilde{g}_j(\tilde{x},t)]),0\},0)=$$
$$=(auv)(h_i\{g_i(d,h^{(j)}[d,\tilde{g}_j(\tilde{x},t)]),0\},0)=$$
$$=(auv)(h_i\{g_i(d,h^{(j)}[d,g_j(x,t)]),0\},0),$$
$$\tilde{h}_i\{\tilde{g}_i(0,\tilde{h}^{(j)}[0,\tilde{g}_j(\tilde{x},t)]),0\}=$$
$$=d-h_i\{\tilde{g}_i(0,\tilde{h}^{(j)}[0,\tilde{g}_j(\tilde{x},t)]),0\}=$$
$$=d-h_i\{g_i(d,\tilde{h}^{(j)}[0,\tilde{g}_j(\tilde{x},t)]),0\}=$$
$$=d-h_i\{g_i(d,h^{(j)}[d,\tilde{g}_j(\tilde{x},t)]),0\}=$$
$$=d-h_i\{g_i(d,h^{(j)}[d,g_j(x,t)]),0\}, \tag{2.28}$$
$$i\neq j, i,j=1,2.$$

In the solution (2.27) we apply the equalities (2.25), (2.28) and after a return replacement $\tilde{x}=d-x$ into the triangle Δ_3 becomes a solution

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2a(x,t)}\Big((auv)(h_2\{g_2(x,t),0\},0)-$$
$$-(auv)(h_2\{g_2(d,h^{(1)}[d,g_1(x,t)]),0\},0)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int_{d-h_2\{g_2(d,h^{(1)}[d,g_1(x,t)]),0\}}^{d-h_2\{g_2(x,t),0\}} [\psi_1(d-s)v(d-s,0)-$$
$$-\varphi_1(d-s)v_\tau(d-s,0)+$$
$$+b(d-s,0)\varphi_1(d-s)v(d-s,0)]ds+$$
$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int_0^t d\tau\int_{d-h_1\{g_1(x,t),\tau\}}^{d-h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \breve{f}_2(d-|s|,\tau)v(d-|s|,\tau)ds+$$
$$+\mu_2(t)-$$
$$-\frac{1}{2a(0,t)}\int_0^t d\tau\int_{d-h_1\{g_1(0,t),\tau\}}^{d-h_2\{g_2(0,t),\tau\}} \breve{f}_2(d-|s|,\tau)v(d-|s|,\tau)ds.$$

Here we carry out the reverse change of the integration variable $\rho=d-s$ and obtain the solution

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2a(x,t)}\Big((auv)(h_2\{g_2(x,t),0\},0)-$$
$$-(auv)(h_2\{g_2(d,h^{(1)}[d,g_1(x,t)]),0\},0)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_2\{g_2(d,h^{(1)}[d,g_1(x,t)]),0\}} [\psi_1(\rho)v(\rho,0)-$$
$$-\varphi_1(\rho)v_\tau(\rho,0)+b(\rho,0)\varphi_1(\rho)v(\rho,0)]d\rho+$$
$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int_0^t d\tau\int_{d-h_1\{g_1(x,t),\tau\}}^{d-h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \breve{f}_2(d-|s|,\tau)v(d-|s|,\tau)ds+$$
$$+\mu_2(t)-$$
$$-\frac{1}{2a(0,t)}\int_0^t d\tau\int_{d-h_1\{g_1(0,t),\tau\}}^{d-h_2\{g_2(0,t),\tau\}} \breve{f}_2(d-|s|,\tau)v(d-|s|,\tau)ds,$$

which coincides with the classical solution (2.11) at $k=n=1$ in triangle Δ_3 from theorem 2.1. Thus, the validity of Theorem 2.1 for mixed problem (2.1)–(2.3) on a rectangle Q_n is justified.

At the second step of mathematical induction, we assume that indicated in Theorem 2.1 the correctness criterion of the problem (2.1)–(2.3) and the formulas (2.9)–(2.11) for a unique and stable classical solution on Q_n are true and show that they are true on the rectangle Q_{n+1}. The mixed problem (2.1)–(2.3) in G_{n+1} for a function $u(x,t)$ by a nondegenerate change of variables $x=\hat{x}$, $t=\hat{t}+d_2$ is reduced for a function $\hat{u}(x,\hat{t})=u(x,\hat{t}+d_2)=u(x,t)$ in $\hat{G}_n$ to an equivalent mixed problem:

$$\hat{u}_{\hat{t}\hat{t}}(x,\hat{t})-\hat{a}^2(x,\hat{t})\hat{u}_{xx}(x,\hat{t})+\hat{b}(x,\hat{t})\hat{u}_{\hat{t}}(x,\hat{t})+$$
$$+\hat{c}(x,\hat{t})\hat{u}_x(x,\hat{t})+\hat{q}(x,\hat{t})\hat{u}(x,\hat{t})= \tag{2.29}$$
$$=\hat{f}(x,\hat{t}),(x,\hat{t})\in\hat{G}_n,$$

$$\hat{u}|_{\hat{t}=0}=\varphi_{n+1}(x),\ \hat{u}_{\hat{t}}|_{\hat{t}=0}=\psi_{n+1}(x),\ x\in[0,d], \tag{2.30}$$

$$\hat{u}|_{x=0}=\hat{\mu}_1(\hat{t}),\ \hat{u}|_{x=d}=\hat{\mu}_2(\hat{t}),\ \hat{t}\in[d_n,d_{n+1}],$$
$$d_n=(n-1)h^{(2)}[d/2,g_2(0.0)], \tag{2.31}$$

with the coefficient

$$\hat{a}(x,\hat{t})=a(x,\hat{t}+d_2)=a(x,t),$$
$$\hat{b}(x,\hat{t})=b(x,\hat{t}+d_2)=b(x,t),$$

$$\hat{c}(x,\hat{t}) = c(x,\hat{t}+d_2) = c(x,t),$$
$$\hat{q}(x,\hat{t}) = q(x,\hat{t}+d_2) = q(x,t),$$

the right-hand side $\hat{f}(x,\hat{t}) = f(x,\hat{t}+d_2) = f(x,t)$ of the equation and boundary data

$$\hat{\mu}_i(\hat{t}) = \mu_i(\hat{t}+d_2) = \mu_i(t), \ \ i=1,2.$$

After the non-degenerate replacement $x=\hat{x}$, $t=\hat{t}+d_2$, the characteristic functions $y_i = g_i(x,t)$ and their inverse functions $x = h_i\{y_i,t\}, t\ge 0$, $t = h^{(i)}[x,y_i], x\ge 0,$ turn into functions:

$$\hat{y}_i = \hat{g}_i(x,\hat{t}) = g_i(x,\hat{t}+d_2) = g_i(x,t), \quad x,t\ge 0, i=1,2, \tag{2.32}$$

$$x = \hat{h}_i\{\hat{y}_i,\hat{t}\} = h_i\{\hat{y}_i,\hat{t}+d_2\} = h_i\{\hat{y}_i,t\}, \quad t\ge 0, i=1,2, \tag{2.33}$$

$$\hat{t} = \hat{h}^{(i)}[x,\hat{y}_i] = h^{(i)}[x,\hat{y}_i] - d_2, x\ge 0, i=1,2. \tag{2.34}$$

By the definition of inverse mappings, they satisfy the following inversion identities:

$$\hat{g}_i(\hat{h}_i\{\hat{y}_i,\hat{t}\},\hat{t}) = \hat{y}_i, \forall \hat{y}_i,$$
$$\hat{h}_i\{\hat{g}_i(x,\hat{t}),\hat{t}\} = x, x\ge 0, i=1,2,$$
$$\hat{g}_i(x,\hat{h}^{(i)}[x,\hat{y}_i]) = \hat{y}_i, \forall \hat{y}_i,$$
$$\hat{h}^{(i)}[x,\hat{g}_i(x,\hat{t})] = \hat{t}, \hat{t}\ge 0, i=1,2,$$
$$\hat{h}_i\{\hat{y}_i,\hat{h}^{(i)}[x,\hat{y}_i]\} = x, x\ge 0,$$
$$\hat{h}^{(i)}[\hat{h}_i\{\hat{y}_i,\hat{t}\},\hat{y}_i] = \hat{t}, \hat{t}\ge 0, i=1,2.$$

According to the hypothesis of mathematical induction, from formula (2.9) in Theorem 2.1 at $k=n$ and initial data $\varphi_{n+1}(x)$, $\psi_{n+1}(x), x\in[0,d]$, from the initial conditions (2.30)), in triangle $\hat{\Delta}_{3n-2}$ we find the unique and stable classical solution

$$\hat{u}_{3n-2}(x,\hat{t}) = \frac{1}{2\hat{a}(x,\hat{t})}\Big((\hat{a}\hat{u}\hat{v})(\hat{h}_2\{\hat{g}_2(x,\hat{t}),d_n\},d_n) + ((\hat{a}\hat{u}\hat{v})(\hat{h}_1\{\hat{g}_1(x,\hat{t}),d_n\},d_n)\Big) + \frac{1}{2\hat{a}(x,\hat{t})}\int_{\hat{h}_2\{\hat{g}_2(x,\hat{t}),d_n\}}^{\hat{h}_1\{\hat{g}_1(x,\hat{t}),d_n\}} [\psi_{n+1}(s)\hat{v}(s,d_n) - \varphi_{n+1}(s)\hat{v}_\tau(s,d_n) + \hat{b}(s,d_n)\varphi_{n+1}(s)\hat{v}(s,d_n)]ds + \frac{1}{2\hat{a}(x,\hat{t})}\int_{d_n}^{\hat{t}} d\tau \int_{\hat{h}_2\{\hat{g}_2(x,\hat{t}),\tau\}}^{\hat{h}_1\{\hat{g}_1(x,\hat{t}),\tau\}} \hat{f}(s,\tau)\hat{v}(s,\tau)ds, (x,\hat{t})\in\hat{\Delta}_{3n-2}. \tag{2.35}$$

Applying the functions (2.32) (2.33), we derive the equalities

$$\hat{h}_i\{\hat{g}_i(x,\hat{t}),d_n\} = \hat{h}_i\{g_i(x,\hat{t}+d_2),d_n\} = h_i\{g_i(x,\hat{t}+d_2),d_n+d_2\} = h_i\{g_i(x,t),d_{n+1}\},$$
$$\hat{h}_i\{\hat{g}_i(x,\hat{t}),\tau\} = \hat{h}_i\{g_i(x,\hat{t}+d_2),\tau\} = h_i\{g_i(x,\hat{t}+d_2),\tau+d_2\} = h_i\{g_i(x,t),\tau+d_2\}, i=1,2,$$
$$(\hat{a}\hat{u}\hat{v})(\nu,d_n) = (auv)(\nu,d_n+d_2) = (auv)(\nu,d_{n+1}),$$
$$\hat{v}(\nu,d_n) = v(\nu,d_n+d_2) = v(\nu,d_{n+1}),$$
$$\hat{b}(\nu,d_n) = b(\nu,d_n+d_2) = b(\nu,d_{n+1}),$$

$$\int_{d_n}^{\hat{t}} d\tau \int_{\hat{h}_2\{\hat{g}_2(x,\hat{t}),\tau\}}^{\hat{h}_1\{\hat{g}_1(x,\hat{t}),\tau\}} \hat{f}(s,\tau)\hat{v}(s,\tau)ds = \int_{d_n}^{t-d_2} d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau+d_2\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau+d_2\}} f(s,\tau+d_2)v(s,\tau+d_2)ds = \int_{d_{n+1}}^{t} d\varrho \int_{h_2\{g_2(x,t),\varrho\}}^{h_1\{g_1(x,t),\varrho\}} f(s,\rho)v(s,\varrho)ds, \tag{2.36}$$

where we applied the change of the integration variable $\varrho = \tau + d_2$. Hence we see that after the reverse change $\hat{t} = t - d_2$, solution (2.35) becomes solution (2.9) for $k=n+1$ in the triangle Δ_{3n+1}.

According to the hypothesis of mathematical induction in a similar way from formula (2.10) in Theorem 2.1 at $k=n$ and initial data $\varphi_{n+1}(x)$, $\psi_{n+1}(x), x\in[0,d]$, from the initial conditions (2.30), in triangle $\hat{\Delta}_{3n-1}$ we find the unique and stable classical solution

$$\hat{u}_{3n-1}(x,\hat{t}) = \frac{1}{2\hat{a}(x,\hat{t})}\Big((\hat{a}\hat{u}\hat{v})(\hat{h}_1\{\hat{g}_1(x,t),d_n\},d_n) - (\hat{a}\hat{u}\hat{v})(\hat{h}_1\{\hat{g}_1(0,\hat{h}^{(2)}[0,\hat{g}_2(x,\hat{t})]),d_n\},d_n)\Big) + \frac{1}{2\hat{a}(x,\hat{t})}\int_{\hat{h}_1\{\hat{g}_1(0,\hat{h}^{(2)}[0,\hat{g}_2(x,\hat{t})]),d_n\}}^{\hat{h}_1\{\hat{g}_1(x,\hat{t}),d_n\}} [\psi_{n+1}(s)\hat{v}(s,d_n) - \varphi_{n+1}(s)\hat{v}_\tau(s,d_n) + \hat{b}(s,d_n)\varphi_{n+1}(s)\hat{v}(s,d_n)]ds + \frac{1}{2\hat{a}(x,\hat{t})}\int_{d_n}^{\hat{t}} d\tau \int_{\hat{h}_2\{\hat{g}_2(x,\hat{t}),\tau\}}^{\hat{h}_1\{\hat{g}_1(x,\hat{t}),\tau\}} \hat{\breve{f}}_1(|s|,\tau)\hat{v}(|s|,\tau)ds + \hat{\mu}_1(\hat{t}) - \frac{1}{2\hat{a}(0,\hat{t})}\int_{d_n}^{\hat{t}} d\tau \int_{\hat{h}_2\{\hat{g}_2(0,\hat{t}),\tau\}}^{\hat{h}_1\{\hat{g}_1(0,t),\tau\}} \hat{\breve{f}}_1(|s|,\tau)\hat{v}(|s|,\tau)ds, (x,\hat{t})\in\hat{\Delta}_{3n-1}. \tag{2.37}$$

Applying the functions (2.32)–(2.34), we come to the equalities

$$\hat{h}_i\{\hat{g}_i(0,\hat{h}^{(j)}[0,\hat{g}_j(x,\hat{t})]),d_n\} = \hat{h}_i\{\hat{g}_i(0,\hat{h}^{(j)}[0,g_j(x,\hat{t}+d_2)]),d_n\} = \hat{h}_i\{\hat{g}_i(0,h^{(j)}[0,g_j(x,t)]-d_2),d_n\} = \hat{h}_i\{g_i(0,h^{(j)}[0,g_j(x,t)]-d_2+d_2),d_n\} = h_i\{g_i(0,h^{(j)}[0,g_j(x,t)]),d_n+d_2\} = h_i\{g_i(0,h^{(j)}[0,g_j(x,t)]),d_{n+1}\}, i\ne j, i,j=1,2,$$

$$\hat{\breve{f}}_p(|s|,\tau) = \breve{f}_p(|s|,\tau+d_2), \ p=1,2, \quad \hat{v}(|s|,\tau) = v(|s|,\tau+d_2). \tag{2.38}$$

Owing to the equalities (2.36), (2.38), by changing the variable $\hat{t} = t - d_2$, the classical solution (2.37) is transformed into the classical solution (2.10) for $k=n+1$ in the triangle Δ_{3n+2}.

Just like above, from formula (2.11) in Theorem 2.1 at $k=n$ and initial data $\varphi_{n+1}(x)$, $\psi_{n+1}(x)$ from the initial conditions (2.30) in triangle $\hat{\Delta}_{3n}$ we find the unique and stable classical solution

$$\hat{u}_{3n}(x,\hat{t})=\frac{1}{2\hat{a}(x,\hat{t})}\Big((\hat{a}\hat{u}\hat{v})(\hat{h}_2\{\hat{g}_2(x,\hat{t}),d_n\},d_n)-$$
$$-(\hat{a}\hat{u}\hat{v})(\hat{h}_2\{\hat{g}_2(d,\hat{h}^{(1)}[d,\hat{g}_1(x,\hat{t})]),d_n\},d_n)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2\hat{a}(x,\hat{t})}\int\limits_{\hat{h}_2\{\hat{g}_2(x,\hat{t}),d_n\}}^{\hat{h}_2\{\hat{g}_2(d,\hat{h}^{(1)}[d,\hat{g}_1(x,\hat{t})]),d_n\}}[\psi_{n+1}(s)\hat{v}(s,d_n)-$$
$$-\varphi_{n+1}(s)\hat{v}_\tau(s,d_n)+\hat{b}(s,d_n)\varphi_{n+1}(s)\hat{v}(s,d_n)]ds+$$
$$+\frac{1}{2\hat{a}(x,\hat{t})}\int\limits_{d_n}^{\hat{t}}d\tau\int\limits_{d-\hat{h}_1\{\hat{g}_1(x,\hat{t}),\tau\}}^{d-\hat{h}_2\{\hat{g}_2(x,\hat{t}),\tau\}}\hat{\breve{f}}_2(d-|s|,\tau)\hat{v}(d-|s|,\tau)ds+$$
$$+\hat{\mu}_2(\hat{t})-$$
$$-\frac{1}{2\hat{a}(0,\hat{t})}\int\limits_{d_n}^{\hat{t}}d\tau\int\limits_{d-\hat{h}_1\{\hat{g}_1(0,\hat{t}),\tau\}}^{d-\hat{h}_2\{g_2(0,\hat{t}),\tau\}}\hat{\breve{f}}_2(d-|s|,\tau)\hat{v}(d-|s|,\tau)ds,$$
$$(x,\hat{t})\in\hat{\Delta}_{3n}. \qquad (2.39)$$

Using the functions (2.32)–(2.34), we find the equalities

$$\hat{h}_i\{\hat{g}_i(d,\hat{h}^{(j)}[d,\hat{g}_j(x,\hat{t})]),d_n\}=$$
$$=\hat{h}_i\{\hat{g}_i(d,\hat{h}^{(j)}[d,g_j(x,\hat{t}+d_2)]),d_n\}=$$
$$=\hat{h}_i\{\hat{g}_i(d,h^{(j)}[d,g_j(x,t)]-d_2),d_n\}=$$
$$=\hat{h}_i\{g_i(d,h^{(j)}[d,g_j(x,t)]-d_2+d_2),d_n\}=$$
$$=h_i\{g_i(d,h^{(j)}[d,g_j(x,t)]),d_n+d_2\}=$$
$$=h_i\{g_i(d,h^{(j)}[d,g_j(x,t)]),d_{n+1}\},\ i\neq j,\ i,j=1,2.$$
$$\int\limits_{d_n}^{\hat{t}}d\tau\int\limits_{d-\hat{h}_1\{\hat{g}_1(x,\hat{t}),\tau\}}^{d-\hat{h}_2\{\hat{g}_2(x,\hat{t}),\tau\}}\hat{\breve{f}}_2(d-|s|,\tau)\hat{v}(d-|s|,\tau)ds=$$
$$=\int\limits_{d_n}^{t-d_2}d\tau\int\limits_{d-h_1\{g_1(x,t),\tau+d_2\}}^{d-h_2\{g_2(x,t),\tau+d_2\}}\breve{f}_2(d-|s|,\tau+d_2)\times$$
$$\times v(d-|s|,\tau+d_2)ds=$$
$$=\int\limits_{d_{n+1}}^{t}d\delta\int\limits_{d-h_1\{g_1(x,t),\delta\}}^{d-h_2\{g_2(x,t),\delta\}}\breve{f}_2(d-|s|,\delta)v(d-|s|,\delta)ds, \qquad (2.40)$$

where we have implemented the replacement of the integration variable $\delta=\tau+d_2$.

Now it is easy to make sure with the help of equalities (2.36), (2.38), (2.40), that by inverse replacement $\hat{t}=t-d_2$ the solution (2.39) becomes a solution $u_{3n+3}(x,t)$ of the form (2.11) at $k=n+1$ in the triangle Δ_{3n+3}.

So, the validity of formulas (2.9)–(2.11) in triangles Δ_{3k-l}, $l=0,1,2$, $k=\overline{1,n}$, of the classical solution to the mixed problem (2.1)–(2.3) is substantiated by the method of mathematical intuition. It remains to prove a correctness criterion of this mixed problem.

By the assumption of the method of mathematical induction on the rectangle Q_n, the Hadamard correctness criterion for the mixed problem (2.1)–(2.3) on the rectangle $\hat{G}_n$ the following smoothness requirements (2.4), (2.7), (2.8) at $k=n$ from theorem 2.1:

$$\varphi\in C^2[0,d],\ \psi\in C^1[0,d],$$
$$\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2\in C^2[d_n,d_{n+1}],\ \hat{f}\in C(\hat{G}_n), \qquad (2.41)$$
$$\int\limits_{d_n}^{\hat{t}}\hat{f}\Big(|\hat{h}_i\{\hat{g}_i(x,\hat{t}),\tau\}|,\tau\Big)d\tau\in C^1(\hat{\Delta}_{3n-2}\bigcup\hat{\Delta}_{3n-1}), \qquad (2.42)$$
$$i=1,2,$$
$$\int\limits_{d_n}^{\hat{t}}\hat{f}\Big(d-|d-\hat{h}_i\{\hat{g}_i(x,\hat{t}),\tau\}|,\tau\Big)d\tau\in C^1(\hat{\Delta}_{3n-2}\cup\Delta_{3n}),$$
$$i=1,2. \qquad (2.43)$$

These smoothness grants twice continuous differentiability of the solution to the auxiliary mixed problem (2.29)–(2.31) in the triangles $\hat{\Delta}_{3n-2}$, $\hat{\Delta}_{3n-1}$, $\hat{\Delta}_{3n}$. Since after the inverse change $\hat{t}=t-d_2$, the corresponding transformations from (2.36), (2.38), (2.40) to the smoothness requirements (2.41)–(2.43) become the smoothness requirements (2.4), (2.7), (2.8) at $k=n+1$ from Theorem 2.1, then these smoothness requirements from Theorem 2.1 are equivalent to twice continuous differentiability of the solution to the mixed problem (2.1)–(2.3) in the triangles Δ_{3n+1}, Δ_{3n+2}, Δ_{3n+3}. In view of the assumption of mathematical induction, the smoothness requirement (2.41)–(2.43) together with the matching conditions (2.5), (2.6) from Theorem 2.1 gives twice continuous differentiability of a solution to the auxiliary mixed problem (2.29)–(2.31) on the characteristics $\hat{g}_2(x,\hat{t})=\hat{g}_2(0,d_2)$, $\hat{g}_1(x,\hat{t})=\hat{g}_1(d,d_2)$ of the equation (2.29) in $\hat{G}_n$. Thus, by the assumption of mathematical induction, a solution to the problem (2.29)–(2.31) is twice continuous differentiable on $\hat{G}_n$.

Due to the fact that above the functions u_{3n+1}, u_{3n+2}, u_{3n+3} were derived by us from the functions $\hat{u}_{3n-2}$, $\hat{u}_{3n-1}$, $\hat{u}_{3n}$ by the non-degenerate replacement $\hat{x}=x$, $\hat{t}=t-d_2$ then, therefore, these functions u_{3n+1}, u_{3n+2}, u_{3n+3} are twice continuous differentiable everywhere in G_{n+1} and, in particular, on the characteristics $g_2(x,t)=g_2(0,d_{n+1})$, $g_1(x,t)=g_1(d,d_{n+1})$ of the equation (2.1) in G_{n+1}, since by construction the recurrent initial data from (2.12) is $\varphi_{n+1}(x)$, $\psi_{n+1}(x)\in C^2[0,d]$. Therefore, we still need to show twice continuous differentiability of the solutions $u\in C^2(G_{n+1})$ and $u\in C^2(Q_n)$ on the common side $t=d_{n+1}$ of these rectangles G_{n+1} and Q_n.

By construction, on the common side $t=d_{n+1}$ of these rectangles, the equalities are true

$$u_{3n-j}(x,d_{n+1})=\varphi_{n+1}(x)=u_{3n+1}(x,d_{n+1}),$$

$$\frac{\partial u_{3n-j}(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=d_{n+1}} = \psi_{n+1}(x) = \frac{\partial u_{3n+1}(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=d_{n+1}} \quad (2.44)$$

for all $x \in [jd/2,(j+1)d/2]$, $j=0,1$, from recurrent initial data (2.12). Differentiating equalities (2.44) once and twice with respect to x and t using the equation (2.1), we calculate the values of the partial derivatives:

$$\frac{\partial u_{3n-j}(x,d_{n+1})}{\partial x} = \varphi'_{n+1}(x) = \frac{\partial u_{3n+1}(x,d_{n+1})}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u_{3n-j}(x,d_{n+1})}{\partial x^2} = \varphi''_{n+1}(x) = \frac{\partial^2 u_{3n+1}(x,d_{n+1})}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_{3n-j}(x,t)}{\partial x\partial t}\Big|_{t=d_{n+1}} = \psi'_{n+1}(x) = \frac{\partial^2 u_{3n+1}(x,t)}{\partial x\partial t}\Big|_{t=d_{n+1}},$$

$$\frac{\partial^2 u_{3n-j}(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{t=d_{n+1}} = f(x,d_{n+1}) + a^2(x,d_{n+1})\varphi''_{n+1}(x) - b(x,d_{n+1})\psi'_{n+1}(x) - c(x,d_{n+1})\varphi'_{n+1}(x) - q(x,d_{n+1})\varphi_{n+1}(x) = \frac{\partial^2 u_{3n+1}(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{t=d_{n+1}},\ x \in \left[j\frac{d}{2},(j+1)\frac{d}{2}\right],\ j=0,1.$$

Here, when deriving the last equality, we used all the previous equalities. These equalities imply twice continuous differentiability of functions (2.9)–(2.11) for $k=\overline{1,n}$ and $k=n+1$ at the intersection $t=d_{n+1}$ of rectangles G_{n+1} and Q_n. Theorem 2.1 is proved.

***Corollary* 2.1.** *If the right-hand side f depends only on x and is continuous in x, that is* $f \in C[0,d]$, *or depends only on t and is continuous in t, that is* $f \in C[0,d_{n+1}]$, *then the assertion of this theorem* 2.1 *is true without integral smoothness requirements* (2.7), (2.8).

When the function *f* depends only on *x* or *t* and is continuous in Q_n, then the integral requirements (2.7), (2.8) in the theorem 2.1 are automatically satisfied.

***Corollary* 2.2.** *Let the coefficients of the equation* (2.1) *be* $a(x,t) \ge a_0 > 0, (x,t) \in Q_n$, $a \in C^2(Q_n)$, $b,c,q \in C^1(Q_n)$. *If the right-hand side f depends on x and t, then in the smoothness requirements* (2.7), (2.8) *the belonging of integrals to the sets, respectively,* $C^1(\Delta_{3k-2}\bigcup\Delta_{3k-1})$ *and* $C^1(\Delta_{3k-2}\bigcup\Delta_{3k})$ *are equivalent to their belonging to sets, respectively,* $C^{(0,1)}(\Delta_{3k-2}\bigcup\Delta_{3k-1})$ *and* $C^{(0,1)}(\Delta_{3k-2}\bigcup\Delta_{3k})$ *or* $C^{(1,0)}(\Delta_{3k-2}\bigcup\Delta_{3k-1})$ *and* $C^{(1,0)}(\Delta_{3k-2}\bigcup\Delta_{3k})$, $k=\overline{1,n}$. *Here* $C^{(0,1)}(\Omega)$ $(C^{(0,1)}(\Omega))$ *is the set of all continuous* (*continuously differentiable*) *with respect to x and continuously differentiable* (*continuous*) *with respect to t functions on a set* Ω.

Corollary 2.2 is proved in the same way as for constant coefficients $a(x,t)=const$, $b=c=q=0$ in the candidate dissertation [16].

***Remark* 2.1.** The global theorem to the Hadamard correctness of the first mixed problem for inhomogeneous model telegraph equation (2.1) with variable coefficients

$$a(x,t) \ne const,\ b = -a_t(x,t)/a(x,t),$$
$$c = -a(x,t)a_x(x,t),\ q=0$$

in a rectangle Q_n is proved in author's articles [2], [3].

Conclusion

The global Theorem 2.1 to Hadamard correctness of the first mixed problem is proved for inhomoge-neous general telegraph equation (2.1) with variable coefficients in a rectangle Q_n which, in the limit at $n \to +\infty$, exhausts a half-strip $G=[0,d]\times[0,+\infty[$. Without explicitly continuing the problem data $f,\varphi,\psi,\mu_1,\mu_2$ outside an assignment set Q_n for the first mixed problem (2.1)–(2.3) in $\dot{Q}_n$, explicit recurrent Riemann-type formulas (2.9)–(2.11) of a unique and stable classical solution $u \in C^2(Q_n)$ are derived by a novel method of auxiliary mixed problems. The correctness criterion is established as inclusions (2.4)–(2.8). The smoothness requirements (2.4), (2,7), (2.8) are necessary and sufficient for twice continuous differentiability of functions (2.9)–(2.11) in triangles Δ_{3k-l}, $l=0,1,2$, $k=\overline{1,n}$. Six matching conditions (2.5), (2.6) together with the smoothness requirements (2.4), (2,7), (2.8) are necessary and sufficient for twice continuous differentiability of the solution (2.9)–(2.11) on characteristics $g_2(x,t)=g_2(0,d_k)$, $g_1(x,t)=g_1(d,d_k)$, $k=\overline{1,n}$, into Q_n.

REFERENCES

1. *Lomovtsev*, *F.E.* Method of auxiliary mixed problems for semi-bounded string / F.E. Lomovtsev // Sixth Bogdanov readings on ordinary differential equations: mater. Int. mat. conf. Minsk, BSU. 7–10 Dec 2015 at 2 pm / ed. S.G. Krasovsky. Minsk: IM NAS Belarus. – 2015. – Part 2. – P. 74–75.

2. *Lomovtsev*, *F.E.* First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line / F.E. Lomovtsev // Journal of the Belarusian State University. Mathemaatics and Informatics. – 2021. – № 1. – P. 18–38.

3. *Lomovtsev*, *F.E.* Conclusion of the Smoothness Criterion for the Right-Hand Side of the Model Telegraph Equation with the Rate *a*(*x*, *t*) by the Correction Method / F.E. Lomovtsev // Modern methods of the theory for boundary value problems: mater. Int. Conf.: XXXIV Voronezh Spring Mathematical School "Pontryagin Readings-XXXII", dedicated to the memory of A.D. Baeva. Voronezh, Voronezh State University. May 3–9, 2021. Voronezh: Voronezh State University. Publishing House. – 2021. – P. 284–287.

4. *Lomovtsev*, *F.E.* Global Correctness Theorem for the First Mixed Problem with the General Oscillation Equations of a Bounded String / F.E. Lomovtsev // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2018, Cambridge Scientific Publishers Ltd. – 2020. – Cottenham, Cambridge CB24 8QY UK. – P. 165–186.

5. *Lomovtsev*, *F.E.* Global Correctness Theorem of the First Mixed Problem for a Wave Equation in a Half-Band of the Plane / F.E. Lomovtsev // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Engineering and Management. – 2021. – Vol. 11, № 1. – P. 68–82.

6. *Khromov*, *A.P.* On the convergence of a formal solution by the Fourier method of a wave equation with a summable potential / V.V. Khromov // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki. – 2016. – Vol. 56, № 10. – P. 1795–1809.

7. *Kornev*, *V.V.* The resolvent approach to the Fourier method in the mixed problem for an inhomogeneous wave equation / V.V. Kornev, A.P. Khromov // Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. – 2016. – Vol. 16, № 4. – P. 403–413.

8. *Khromov*, *A.P.* A mixed problem for a wave equation with a summable potential and a nonzero initial velocity / A.P. Khromov // Doklady Akademii nauk. – 2017. – Vol. 474, № 6. – P. 668–670.

9. *Khromov*, *A.P.* On the classical solution of the mixed problem for a homogeneous wave equation with fixed ends and zero initial velocity / A.P. Khromov // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. – 2019. – Vol. 19, № 3. – P. 280–288.

10. *Kornev*, *V.V.* Classical and generalized solutions to the mixed problem for an inhomogeneous wave equation / V.V. Kornev, A.P. Khromov // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki. – 2019. – Vol. 59, № 2. – P. 107–121.

11. *Khromov*, *A.P.* Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation in the case of a summable potential / A.P. Khromov // Differential Equations. – 2019. – Vol. 55, № 5. – P. 717–731.

12. *Khromov*, *A.P.* Classical and generalized solutions of the mixed problem for an inhomogeneous wave-wave equation / A.P. Khromov, V.V. Kornev // Doklady Akademii nauk. – 2019. – Vol. 484, № 1. – P. 18–20.

13. *Kornev*, *V.V.* Divergent series and a generalized solution of one mixed problem for the wave equation / V.V. Kornev, A.P. Khromov // Materials of the International Mathematical Conference; Voronezh Spring Mathematical School: 2020 May 3–9; Voronezh, Russia. Voronezh: ANO Nauka-Unipress. – 2020. – P. 99–102.

14. *Lomov*, *I.S.* A generalized d'Alembert formula for the telegraph equation in the case of a substantially non-self-adjoint operator / I.S. Lomov // Voronezh Spring Mathematical School: Materials of the International Mathematical Conference; 2020 May 3–9; Voronezh, Russia. Voronezh: ANO Nauka-Unipress. – 2020. – P. 124–126.

15. *Lomovtsev*, *F.E.* Riemann Formula of the Classical Solution to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line / F.E. Lomovtsev // Tez. dokl. Seventh Bogdanov Readings on differential equations (Minsk, June 1–4, 2021). – Minsk. – 2021. – Part 2. – P. 201–203.

16. *Novikov*, *E.N.* Mixed problems for the equation of forced vibrations of a bounded string at unsteady boundary conditions with the first and second oblique derivatives / E.N. Novikov // Abstract of the thesis. dis. ... can-that physical-mat. Sciences (01.01.02). – Minsk: IM NAS Belarus. – 2017.

Поступила в редакцию 04.06.2021.

Информация об авторах

Ломовцев Фёдор Егорович – д.ф.-м.н., профессор

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_74

О СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С *Z*-ДОБАВЛЕНИЯМИ К НОРМАЛИЗАТОРАМ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

В.С. Монахов[1], **И.К. Чирик**[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Университет гражданской защиты МЧС Беларуси*, *Минск*

ON SUPERSOLVABILITY OF A FINITE GROUP WITH *Z*-SUPPLEMENTS TO THE NORMALIZERS OF SYLOW SUBGROUPS

V.S. Monakhov[1], **I.K. Chirik**[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus*, *Minsk*

Аннотация. Исследуется конечная группа, в которой нормализатор каждой силовской подгруппы обладает холловым добавлением с циклическими силовскими подгруппами. В частности, устанавливается, что такие группы сверхразрешимы.

Ключевые слова: *конечная группа*, *силовская подгруппа*, *нормализатор*, *циклическая подгруппа*, *добавление*.

Для цитирования: *Монахов*, *В.С.* О Сверхразрешимости конечной группы с *z*-добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 74–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_74

Abstract. We study a finite group in which the normalizer of each Sylow subgroup has a Hall supplement with cyclic Sylow subgroups. In particular, it is established that such groups are supersoluble.

Keywords: *finite group*, *Sylow subgroup*, *normalizer*, *cyclic subgroup*, *supplement.*

For citation: *Monakhov*, *V.S.* On supersolvability of a finite group with *z*-supplements to the Sylow normalizers / V.S. Monakhov, I.K. Chirik // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 74–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_74 (in Russian)

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения стандартны и соответствуют принятым в [1]–[2]. *Добавление* к подгруппе X в группе G называется подгруппа Y такая, что $G = XY$. Если $X \cap Y = 1$, то подгруппа Y называется *дополнением* к подгруппе X в группе G.

В 1967 г. В.А. Ведерников [3] установил разрешимость группы, у которой порядки всех классов сопряженных силовских подгрупп есть степени простых чисел. Поскольку порядок класса сопряженных подгрупп совпадает с индексом нормализатора любой подгруппы из этого класса, то теорему В.А. Ведерникова можно сформулировать так: *если нормализатор каждой силовской подгруппы обладает добавлением*, *которое является силовской подгруппой группы*, *то группа разрешима*. В 2005 г. Го Веньбинь и Шам [4], используя классификацию простых групп, показали, что в этой ситуации можно ограничиться только нормализаторами силовских 2- и 3-подгрупп. Строение группы с ограничениями на добавления к нормализаторам силовских подгрупп изучалось в работах [5]–[9]. Группы с холловыми добавлениями исследовались в работах [10]–[12].

Группа, в которой каждая силовская подгруппа циклическая, называется *z-группой*. Согласно теореме Цассенхауза [13, IV.2.11] коммутант *z*-группы является циклической холловой подгруппой и фактор-группа по коммутанту тоже циклическая.

В настоящей работе изучается группа, в которой нормализатор каждой силовской подгруппы обладает холловым *z*-добавлением. В частности, доказывается, что такая группа сверхразрешима.

1 Вспомогательные результаты

Добавление, которое является *z*-подгруппой, будем называть *z*-добавлением. Силовскую p-подгруппу группы X будем обозначать через X_p, а $\pi(X)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок группы X.

***Лемма* 1.1** [1, 1.65]. *Для группы G и ее силовской p-подгруппы G_p справедливы следующие утверждения*:

(1) *если N – нормальная подгруппа группы G, то $G_p \cap N$ – силовская p-подгруппа в N, а G_pN / N – силовская p-подгруппа в G / N*;

(2) $N_{G/N}(G_pN/N) = N_G(G_p)N/N$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа *H* группы *G* называется π-*холловой* подгруппой, если $\pi(H) \subseteq \pi$, а индекс $|G:H|$ не делится на простые числа из π. Подгруппа *H* группы *G* называется *холловой* подгруппой, если *H*– π-холлова подгруппа для некоторого множества π простых чисел. Циклическая группа порядка *m* обозначается через C_m, а запись $X \rtimes Y$ означает, что *XY* – группа, *X* и *Y* – ее подгруппы, *X* – нормальная подгруппа и $X \cap Y = 1$.

***Лемма* 1.2** [1, 4.34]. *Пусть в группе G существует* π*-холлова подгруппа* G_π. *Если N – нормальная подгруппа группы G, то* $G_\pi \cap N$ – π*-холлова подгруппа в N, а* $G_\pi N/N$ – π*-холлова подгруппа в* G/N.

***Лемма* 1.3.** *Пусть A и B – подгруппы группы G, подгруппа A холлова в G и G = AB.*

(1) *Если N – нормальная подгруппа группы G, то* $N = (N \cap A)(N \cap B)$ *и* $N \cap A$ – $\pi(A)$*-холлова подгруппа в N.*

(2) *Если группа G разрешима и H – подгруппа в G, то* $H = (A \cap H)^x (B \cap H)^y$ *для некоторых x и* $y \in G$, *где* $(A \cap H)^x$ – $\pi(A)$*-холлова подгруппа в H.*

Доказательство. (1) По лемме 1.2 подгруппа $A \cap N$ является $\pi(A)$-холловой подгруппой в *N*, поэтому $|N : A \cap N|$ не делится на простые числа из $\pi(A)$. Так как $|G| = |A||B|/|A \cap B|$ и $|BN| = |B||N|/|B \cap N|$, то

$$|G:B| = |A : A \cap B| = |G : BN||BN : B| = \\ = |G:BN||N : B \cap N|$$

и $|N : B \cap N|$ делится только на простые числа из $\pi(A)$. Таким образом, $A \cap N$ и $B \cap N$ – подгруппы взаимно простых индексов в *N*, значит, $N = (N \cap A)(N \cap B)$.

(2) Пусть $\pi = \pi(A)$ и H_π – π-холлова подгруппа в *H*. По условию группа *G* разрешима, поэтому $H_\pi \le A^x$ для некоторого $x \in G$ и $H_\pi = H \cap A^x$. Пусть $\pi' = \pi(G) \setminus \pi$ и $H_{\pi'}$ – π'-холлова подгруппа в *H*. Так как π'-холлова подгруппа $B_{\pi'}$ из *B* является π'-холловой подгруппой в *G*, то $H_{\pi'} \le (B_{\pi'})^y$ для некоторого $y \in G$ и $H_{\pi'} \le H \cap B^y$. Таким образом,

$$H = H_\pi H_{\pi'} \le (H \cap A^x)(H \cap B^y) \le H$$

и $H = (H \cap A^x)(H \cap B^y)$.

***Лемма* 1.4.** *Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Предположим, что нормализатор каждой силовской подгруппы группы G обладает холловым z-добавлением. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *нормализатор каждой силовской подгруппы из N обладает холловым в N z-добавлением*;

(2) *нормализатор каждой силовской подгруппы из* G/N *обладает холловым в* G/N *z-добавлением*;

(3) *если группа G разрешима и X – подгруппа группы G, то нормализатор каждой силовской подгруппы из X обладает холловым в X z-добавлением*.

Доказательство. (1) Пусть G_p – силовская *p*-подгруппа группы *G*. Тогда $N_p = G_p \cap N$ – силовская *p*-подгруппа в *N* по лемме 1.1 (1). По условию $G = N_G(G_p)K$, где *K* – холлово *z*-добавление к $N_G(G_p)$. По лемме 1.3 (1)

$$N = (N \cap N_G(G_p))(N \cap K).$$

Подгруппа $N \cap K$ является холловой в *N* и $N \cap K$ – *z*-подгруппа. Кроме того,

$$N \cap N_G(G_p) \le N_N(N_p),$$

поэтому $N = N_N(N_p)(N \cap K)$.

(2) Пусть G_pN/N – силовская *p*-подгруппа в группе G/N. По условию $G = N_G(G_p)K$, где *K* – холлова *z*-подгруппа. Так как

$$N_G(G_p)N/N = N_{G/N}(G_pN/N)$$

по лемме 1.1 (2), то

$$G/N = (N_{G/N}(G_pN/N))(KN/N).$$

Подгруппа KN/N холлова в G/N по лемме 1.2 и $KN/N \simeq K/K \cap N$ *z*-подгруппа.

(3) Пусть *X* – подгруппа разрешимой группы *G* и X_p – силовская *p*-подгруппа в *X*. Пусть G_p – силовская *p*-подгруппа группы *G*, содержащая X_p. По условию $G = N_G(G_p)K$, где *K* – холлова в *G* *z*-подгруппа. По лемме 1.3 (2) подгруппа $X = (X \cap N_G(G_p))^a (X \cap K)^b$ для некоторых $a, b \in G$ и $(X \cap K)^b$ – $\pi(K)$-холлова подгруппа в *X*. Поскольку подгруппа $(X \cap N_G(G_p))^a$ *p*-замкнута и X_p^a – силовская *p*-подгруппа в *X* и в $(X \cap N_G(G_p))^a$, то $(X \cap N_G(G_p))^a \le N_X(X_p^a)$ и $X = (N_X(X_p^a))((X \cap K)^b)$. □

***Замечание* 1.1.** Пусть $\mathfrak{X}$ – класс, состоящей из всех групп, в которых нормализатор каждой силовской подгруппы обладает холловым *z*-добавлением. Ясно, что каждая диэдральная группа принадлежит $\mathfrak{X}$. Группа $S_3 \times X$, где *X* – произвольная 2-группа, тоже принадлежит $\mathfrak{X}$. Здесь S_3 – симметрическая группа степени 3. Из леммы 1.4 следует, что $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф. В группе $S_3 \times S_3$ нормализатор силовской

2-подгруппы не обладает холловым z-добавлением, поэтому класс $\mathfrak{X}$ не замкнут относительно прямых произведений. В частности, $\mathfrak{X}$ не является формацией и не является классом Фиттинга.

***Пример* 1.1.** Группа $G = C_{28} \rtimes C_6$ ([14, SmallGroup(168,9)]) задается следующим образом:

$$G = \langle a, b, c \mid a^4 = b^7 = c^6 = 1,$$
$$ab = ba, cac^{-1} = a^{-1}, cbc^{-1} = b^5 \rangle.$$

В этой группе силовская 2-подгруппа $\langle a^4, c^3 \rangle$ является диэдральной группой порядка 8. Ее нормализатор совпадает с нормализатором силовской 3-подгруппы $\langle c^2 \rangle$ и является нильпотентной $\{2,3\}$-холловой подгруппой. Силовская 7-подгруппа $\langle b \rangle$ нормальна. Поэтому $G \in \mathfrak{X}$, причем группа G не является z-группой и ненильпотентна.

2 Сверхразрешимость группы с холловыми z-добавлениями к силовским нормализаторам

***Теорема* 2.1.** *Если в группе G нормализатор каждой силовской подгруппы обладает холловым z-добавлением, то группа G содержит холлову нормальную z-подгруппу H, фактор-группа* G/H *нильпотентна и каждая силовская подгруппа в* G/H *нециклическая. В частности, группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Если силовская 2-подгруппа G_2 группы G циклическая, то G 2-нильпотентна [13, IV.2.8]. Пусть G_2 нециклическая. Тогда холлово z-добавление к нормализатору каждой силовской подгруппы имеет нечетный порядок. По теореме Кондратьева [15], доказательство которой использует классификацию простых групп, группа G 2-нильпотентна. Поэтому G разрешима. Согласно лемме 1.4 (2,3) каждая подгруппа и каждая фактор-группа группы G удовлетворяет условию теоремы. По индукции каждая собственная в G подгруппа сверхразрешима. Если G несверхразрешима, то $G = P \rtimes U$, P – нециклическая силовская в G подгруппа и других нормальных в G силовских подгрупп нет [2, теорема 26.3]. Если Q – силовская подгруппа, отличная от P, то P не содержится в $N_G(Q)$, поэтому подгруппа P должна быть циклической, противоречие. Значит, группа G сверхразрешима.

Пусть группа G ненильпотентна и не является z-группой и пусть $\pi(G) = \tau \cup \sigma$, где τ – множество всех простых чисел r, для которых силовская r-подгруппа группы G циклическая, а $\sigma = \pi(G) \setminus \tau$. Так как G не является z-группой, то $\sigma \neq \varnothing$. Поскольку G ненильпотентна, то существует ненормальная в G силовская подгруппа Q и холлово z-добавление к $N_G(Q)$ будет неединичной подгруппой. Значит, $\tau \neq \varnothing$.

Пусть $G_{\{r \cup \sigma\}} = G_r G_\sigma$ – $\{r \cup \sigma\}$-холлова подгруппа в G для $r \in \tau$. Если G_r не нормальна в $G_r G_\sigma$, то холлово z-добавление к $N_{G_r G_\sigma}(G_r)$ в подгруппе $G_r G_\sigma$ содержит G_q для некоторого $q \in \sigma$ и подгруппа G_q должна быть циклическая, противоречие. Поэтому G_r нормальна в $G_r G_\sigma$. Если r – наибольшее в τ, то G_r нормальна в G_τ и G_r нормальна в G. Согласно лемме 1.4 (2) фактор-группа G/G_r удовлетворяет условию теоремы. По индукции G/G_r содержит холлову нормальную z-подгруппу H/G_r, фактор-группа $(G/G_r)/(H/G_r)$ нильпотентна и каждая силовская подгруппа в

$$(G/G_r)/(H/G_r) \cong G/H$$

нециклическая. Поэтому $H = G_\tau$ – нормальная в G холлова z-подгруппа и каждая силовская в G/G_τ подгруппа нециклическая. □

***Следствие* 2.1.1** [5]. *Если в группе G нормализатор каждой силовской подгруппы обладает циклическим холловым добавлением, то группа G сверхразрешима.*

***Замечание* 2.1.** В условиях теоремы ограничиться нормализаторами силовских 2- и 3-подгрупп нельзя. Примером служит простая группа $PSL(2,11)$, в которой нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп обладают холловыми z-дополнениями порядка 55.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 271 с.

3. *Ведерников*, *В.А.* О признаках разрешимости и сверхразрешимости конечных групп / В.А. Ведерников // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8, № 6. – С. 1236–1244.

4. *Guo*, *W.* A note on finite groups whose normalizers of Sylow 2-, 3-sugroups are prime power indices / W. Guo, K.P. Shum // J. Applied Algebra and Discrete Structures. – 2005. – Vol. 3, № 1. – P. 1–9.

5. *Buchthal*, *D.* On factorized groups / D. Buchthal // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 183. – P. 423–430.

6. *Perin*, *D.* Finite groups with nicely supplemented Sylow normalizers / D. Perin // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 183. – P. 431–435.

7. *Zhang*, *J.* Sylow numbers of finite groups / J. Zhang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 176. – P. 111–123.

8. *Го*, *Вэньбинь*. Конечные группы с заданными индексами нормализаторов силовских

подгрупп / Вэньбинь Го // Сибирский математический журнал. – 1996. – Т. 37, № 2. – С. 295–300.

9. *Chigiram*, *N*. Numbers of Sylow subgroups and *p*-nilpotency of finite groups / N. Chigiram // J. Algebra. – 1998. – Vol. 201, № 1. – P. 71–85.

10. *Монахов*, *В.С*. Конечные группы с холловыми добавлениями к примитивным подгруппам / В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 359–368.

11. *Монахов*, В.С. О разрешимости группы с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп / В.С. Монахов, Т.В. Бородич // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 2. – С. 227–233.

12. *Ли*, *Б*. Конечные группы, в которых нормализаторы силовских подгрупп имеют нильпотентные холловы добавления / Б. Ли, В. Го, X. Цзяньхун // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 50, № 4. – С. 841–849.

13. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

14. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.11.0 [Electronic resource]: A system for computational discrete algebra. – Mode of access: https://www.gap-system.org. – Date of Access: 29.02.2020.

15. *Кондратьев*, *А.С*. Критерий 2-нильпотентности конечных групп / А.С. Кондратьев // В кн.: Подгрупповая структура групп. Свердловск: УрО АН СССР. – 1988. – С. 82–84.

Поступила в редакцию 25.11.2021.

Информация об авторах

Монахов Виктор Степанович – д.ф.-м.н., профессор
Чирик Ирина Константиновна – к.ф.-м.н., доцент

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_78

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ А.Н. СКИБЫ В ТЕОРИИ σ-СВОЙСТВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, *Минск*

ON ONE QUESTION OF A.N. SKIBA IN THE THEORY OF σ-PROPERTIES OF FINITE GROUPS

I.N. Safonova

Belarusian State University, *Minsk*

Аннотация. Все рассматриваемые группы конечны. Пусть G – группа, σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, то есть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(|G|) \neq \varnothing\}$. Группа G называется σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i = i(G)$. Мы говорим, что G является σ-*башенной группой*, если либо $G = 1$, либо G имеет нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{n-1} < G_n = G$ такой, что G_k / G_{k-1} – σ_i-группа, $\sigma_i \in \sigma(G)$, а G / G_k и G_{k-1} являются $\sigma_{i'}$-группами для всех $k = 1,\ldots,n$. Подгруппа A группы G называется σ-*субнормальной* в G, если существует ряд подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$ такой, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо факторгруппа $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной, для всех $i = 1,\ldots,t$. В данной статье мы доказываем, что неединичная разрешимая группа G является σ-башенной группой, если для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$, где $|\sigma(G)| = n$, холлова σ_i-подгруппа группы G сверхразрешима и каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа группы G σ-субнормальна в G. Тем самым мы даем положительный ответ на вопрос 4.8 из [1] в классе всех разрешимых групп со сверхразрешимыми σ-холовыми подгруппами.

Ключевые слова: *конечная группа*, *разрешимая группа*, σ-*субнормальная подгруппа*, *группа с силловской башней*, σ-*башенная группа*.

Для цитирования: *Сафонова*, *И.Н.* Об одном вопросе А.Н. Скибы в теории σ-свойств конечных групп / И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 78–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/ 20778708_2022_1_50_78

Abstract. All considered groups are finite. Let G be a group, σ some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, i. e. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all $i \neq j$, $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(|G|) \neq \varnothing\}$. A group G is called σ-*primary* if G is a σ_i-group for some $i = i(G)$. We say that G is a σ-*tower group* if either $G = 1$ or G has a normal series $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{n-1} < G_n = G$ such that G_k / G_{k-1} is a σ_i-group, $\sigma_i \in \sigma(G)$, while G / G_k and G_{k-1} are $\sigma_{i'}$-groups for all $k = 1,\ldots,n$. A subgroup A of G is said to be σ-*subnormal* in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ-primary for all $i = 1,\ldots,t$. In this article, we prove that a non-identity soluble group G is a σ-tower group if for each $\sigma_i \in \sigma(G)$, where $|\sigma(G)| = n$, a Hall σ_i-subgroup of G is supersoluble and every $(n+1)$-maximal subgroups of G is σ-subnormal in G. Thus, we give a positive answer to Question 4.8 in [1] in the class of all soluble groups with supersoluble σ-Hall subgroups.

Keywords: *finite group*, *soluble group*, σ-*subnormal subgroup*, *Sylow tower group*, σ-*tower group*.

For citation: *Safonova*, *I.N.* On one question of A.N. Skiba in the theory of σ-properties of finite groups / I.N. Safonova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 78–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_78 (in Russian)

Mathematics Subject Classification (2010): 20D10, 20D15, 20D20.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы конечны и G всегда обозначает группу. Кроме того, $\mathbb{P}$ – это множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$; группа G называется π-замкнутой, если G имеет нормальную холлову π-подгруппу. Если n – целое число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$, множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

В дальнейшем σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Мы пишем

$\sigma(n)=\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G)=\sigma(|G|)$.

Напомним некоторые понятия теории σ-свойств группы (см., например, [1]–[12]).

Группа G называется: *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i=i(G)$; *σ-разрешимой*, если каждый главный фактор G является σ-примарным; *σ-нильпотентной*, если либо $G=1$, либо $\sigma(G)=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_t\}$ и $G=G_1\times\cdots\times G_t$, где G_i – холлова σ_i-подгруппа группы G для всех i.

Группу G называют *группой с силовской башней*, если $G=1$ или G имеет нормальный ряд $1=G_0<G_1<\cdots<G_{t-1}<G_t=G$ такой, что G_i/G_{i-1} – p-группа, $p\in\pi(G)$, G/G_i и G_{i-1} – p'-группы для всех $i=1,\ldots,t$..

Мы говорим, что G является σ-*башенной* группой, если либо $G=1$, либо G имеет нормальный ряд $1=G_0<G_1<\cdots<G_{t-1}<G_t=G$ такой, что G_i/G_{i-1} – σ_i-группа, $\sigma_i\in\sigma(G)$, а G/G_i и G_{i-1} являются $\sigma_{i'}$-группами для всех $i=1,\ldots,t$.

В классическом случае, когда $\sigma=\sigma^1=$ $=\{\{2\},\{3\},\ldots\}$: группа G σ^1-разрешима (соответственно σ^1-нильпотентна) тогда и только тогда, когда G разрешима (соответственно нильпотентна); G является σ^1-башенной группой тогда и только тогда, когда G является группой с силовской башней. Подгруппа A группы G является σ^1-субнормальной тогда и только тогда, когда она субнормальна в G.

Напомним, что подгруппа A группы G называется: *σ-субнормальной* в G [1], если существует цепь подгрупп

$$A=A_0\leq A_1\leq\cdots\leq A_t=G$$

такая, что либо $A_{i-1}\trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной группой, для всех $i=1,\ldots,t$ (здесь $(A_{i-1})_{A_i}$ – наибольшая нормальная подгруппа группы A_i, содержащаяся в A_{i-1}).

Если

$$M_n<M_{n-1}<\ldots<M_1<M_0=G, \qquad (0.1)$$

где M_i – максимальная подгруппа в M_{i-1} для всех $i=1,\ldots,n$, то цепь (0.1) называется *максимальной цепью группы G длины n*, а M_n $(n>0)$ является *n-максимальной подгруппой* группы G.

Пусть $\Pi\subseteq\sigma$ и $\Pi'=\sigma\setminus\Pi$. Подгруппа H группы G называется *холловой* Π*-подгруппой* группы G, если H является Π-группой (т. е. $\sigma(H)\subseteq\Pi$) и $|G:H|$ является Π'-числом (т. е. $\sigma(|G:H|)\subseteq\Pi'$); H называется *σ-холловой подгруппой* группы G, если H является холловой Π-подгруппой группы G для некоторого Π.

Целью данной работы является анализ ситуации, представленной в следующем вопросе (см. вопрос 4.8 в [1] или вопрос 7.22 в [13]):

Пусть G – σ-разрешимая группа и $|\sigma(G)|=n$. Предположим, что каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа группы G σ-субнормальна. Верно ли тогда, что G является σ-башенной группой?

Следуя [6], [14], мы говорим, что группа G имеет *σ-высоту Спенсера* $h_\sigma(G)$ равную n, если каждая максимальная цепь подгрупп из G длины n содержит σ-субнормальную подгруппу группы G и в группе G существует по крайней мере одна максимальная цепь длины $n-1$, которая не содержит σ-субнормальных подгрупп группы G.

Основными результатами работы являются следующие:

***Теорема* 0.1.** *Пусть группа G разрешима и для каждого $\sigma_i\in\sigma(G)$ холлова σ_i-подгруппа из G является сверхразрешимой. Тогда если*

$$h_\sigma(G)\leq|\sigma(G)|+1,$$

то G является σ-башенной группой.

***Теорема* 0.2.** *Пусть группа G разрешима и для каждого $\sigma_i\in\sigma(G)$ холлова σ_i-подгруппа из G является сверхразрешимой, где $|\sigma(G)|=n$. Тогда если каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа группы G σ-субнормальна в G, то G является σ-башенной группой.*

1 Вспомогательные результаты

***Лемма* 1.1** [1, Лемма 2.4]. *Пусть A, K и n – подгруппы группы G. Предположим, что A σ-субнормальна в G и n нормальна в G.*

(1) *$A\cap K$ σ-субнормальна в K.*

(2) *Если $N\leq K$ и K/N σ-субнормальна в G/N, то K σ-субнормальна в G.*

(3) *Если $K\leq E\leq G$, где K σ-субнормальна в E, тогда KN/N σ-субнормальна в NE/N.*

(4) *Если A является холловой Π-подгруппой в G, то A нормальна в G.*

(5) *Если B – σ-субнормальная подгруппа группы G, то $\langle A,B\rangle$ и $A\cap B$ σ-субнормальны в G.*

(6) *Если G – σ-разрешима и A является σ_i-группой для некоторого i, то $A\leq O_{\sigma_i}(G)$.*

***Лемма* 1.2** [15, Теорема 21.3].

(1) *В разрешимой неединичной группе минимальная нормальная подгруппа является элементарной абелевой p-подгруппой для некоторого простого p.*

(2) *В разрешимой неединичной группе максимальные подгруппы имеют примарные индексы.*

(3) *Главные факторы разрешимой неединичной группы являются элементарными абелевыми примарными группами.*

(4) *Композиционные факторы разрешимой неединичной группы имеют простые порядки.*

***Лемма* 1.3.** Пусть G – такая группа, что $h_\sigma(G) > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) *если M не является σ-субнормальной максимальной подгруппой группы G, то*
$$h_\sigma(M) \le h_\sigma(G) - 1;$$

(2) *если R – нормальная подгруппа группы G, то $h_\sigma(G/R) \le h_\sigma(G)$.*

Доказательство. (1) Пусть $n = h_\sigma(G)$. Поскольку M не является σ-субнормальной подгруппой в G, то в любой максимальной цепи
$$M_{n-1} < M_{n-2} < \ldots < M_1 < M_0 = M$$
из M длины $n-1$ некоторый элемент $\neq M$ является σ-субнормальной подгруппой в G и, следовательно, σ-субнормальной подгруппой в M по лемме 1.1 (1). Поэтому $h_\sigma(M) \le n-1$.

(2) Если
$$M_m / R < M_{m-1} / R < \ldots < M_1 / R < M_0 / R = G / R$$
максимальная цепь в G/R, все элементы которой не являются σ-субнормальными подгруппами в G/R, то все элементы $M_m, \ldots, M_1$ максимальной цепи $M_m < M_{m-1} < \ldots < M_1 < M_0 = G$ группы G не являются σ-субнормальными подгруппами в G по лемме 1.1 (2). Отсюда следует, что $h_\sigma(G/R) \le n$. □

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп, содержащий все группы единиц; $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех нормальных подгрупп n группы G с $G/N \in \mathfrak{F}$; $G_{\mathfrak{F}}$ есть произведение всех нормальных подгрупп n группы G с $N \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется: *формация* если для каждой группы G каждый гомоморфный образ $G/G^{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{F}$; *класс Фиттинга*, если для каждой группы G каждая нормальная подгруппа группы $G_{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется: *насыщенным*, если $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$; *наследственный* (А.И. Мальцев [16]), если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $H \le G \in \mathfrak{F}$.

***Лемма* 1.4** [2, Теорема 1.1]. *Класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга.*

Пусть теперь ψ – некоторый линейный порядок на σ. Запись $\sigma_i \psi \sigma_j$ означает, что σ_i предшествует σ_j в ψ и $i \neq j$. Мы говорим, что G является σ-башенной группой *типа* ψ, если либо $G = 1$, либо $\sigma(G) = \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_t}\}$, где $\sigma_{i_1} \psi \sigma_{i_2} \psi \cdots \psi \sigma_{i_t}$ и G имеет нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{t-1} < G_t = G$, в котором для любых $j = 1, \ldots, t$ фактор G_j / G_{j-1} является σ_{i_j}-группой, а G_{j-1} и G/G_j являются $\sigma_{i_j'}$-группами.

***Лемма* 1.5.** *Имеют место следующие утверждения*:

(1) *класс всех σ-башенных групп замкнут относительно взятия гомоморфных образов*;

(2) *класс всех σ-башенных групп типа ψ является наследственной насыщенной формацией Фиттинга.*

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

2 Основной результат

Доказательство теоремы 0.1. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда любой собственный фактор H/K группы G такой, что $h_\sigma(H/K) \le |\sigma(H/K)| + 1$ является σ-башенной группой.

Заметим, что поскольку G разрешима, то G имеет холлову π-подгруппу для всех $\pi \subseteq \pi(G)$ и, следовательно, G имеет холлову Π-подгруппу для любого $\Pi \subseteq \sigma(G)$.

Пусть n – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда n – p-группа для некоторого $p \in \sigma_i$, где $\sigma_i \in \sigma(G)$.

(1) *Если n – холлова σ_i-подгруппа группы G, то каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая n, не является σ-субнормальной в G.*

Предположим, что G имеет σ-субнормальную максимальную подгруппу M такую, что $G = NM$. Тогда факторгруппа G/M_G σ-примарна и, следовательно, G/M_G является p-группой. Предположим, что $h_\sigma(G) < |\sigma(G)| + 1$ и n является холловской σ_i-подгруппой группы G. Тогда $G = NM_G$ и $N \cap M_G = 1$, поэтому $G = N \times M_G$. Следовательно, поскольку G не является σ-нильпотентной по выбору G, M_G не является σ-нильпотентной по лемме 1.4. Поэтому $k := h_\sigma(M_G) > 1$, M_G обладает максимальной цепью
$$M_{k-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M_G$$
длины $k-1$, где M_j не является σ-субнормальной в M_G для всех $j = 1, \ldots, k-1$ и во всякой максимальной цепи подгрупп
$$L_k < L_{k-1} < \cdots < L_1 < L_0 = M_G$$
M_G длины k некоторая подгруппа $L_j \neq M_G$ является σ-субнормальной в M_G. Рассмотрим ряд
$$M_{k-1} < \cdots < M_1 < NM_1 < G.$$
Покажем, что если для некоторой собственной подгруппы L группы G имеет место либо $NM_1 < L < G$, либо $M_1 < L \le NM_1$, то подгруппа L не является σ-субнормальной в G.

Вначале предположим, что

$$NM_1 < L < G = N \times M_G.$$

Тогда $M_1 \leq L \cap M_G \leq M_G$. Но M_1 – максимальная подгруппа M_G, поэтому либо $L \cap M_G = M_G$, либо $M_1 = L \cap M_G$. В первом случае $M_G \leq L$ и $G = NM_G \leq L$, противоречие. Следовательно, $M_1 = L \cap M_G$. Но тогда L не является σ-субнормальной в G по лемме 1.1 (1), так как M_1 не является σ-субнормальной подгруппой M_G.

Теперь предположим, что $M_1 < L \leq NM_1$. Тогда $L = L \cap NM_1 = (L \cap N)M_1$. Поэтому

$$L \cap M_G = (L \cap N)M_1 \cap M_G =$$
$$= (L \cap N \cap M_G)M_1 = M_1.$$

Следовательно, L не является σ-субнормальной подгруппой G.

Поэтому G имеет максимальную цепь длины $t > k$, в которой каждый неединичный элемент $\neq G$ не является σ-субнормальным в G. Отсюда следует, что $h_\sigma(M_G) \leq h_\sigma(G) - 1$. Тогда

$$h_\sigma(M_G) \leq h_\sigma(G) - 1 \leq |\sigma(G)|.$$

Поскольку $|\sigma(G)| - 1 \leq |\sigma(M_G)| \leq |\sigma(G)|$ по лемме 1.2 (2), то $h_\sigma(M_G) \leq |\sigma(M_G)| + 1$. Поэтому M_G является σ-башенной группой по выбору G. Но $G = NM_G$ и n – нормальная холлова σ_i-подгруппа группы G. Следовательно, G является σ-башенной группой, противоречие.

(2) *Всякая не σ-субнормальная максимальная подгруппа группы G является σ-башенной группой.*

Пусть M – не σ-субнормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда ввиду леммы 1.3 (1) имееет место $h_\sigma(M) \leq h_\sigma(G) - 1$. Поскольку при этом по условию теоремы $h_\sigma(G) - 1 \leq |\sigma(G)|$, то $h_\sigma(M) \leq |\sigma(G)|$. В силу разрешимости группы G имеют место неравенства $|\sigma(G)| - 1 \leq |\sigma(M)| \leq |\sigma(G)|$. Поэтому $h_\sigma(M) \leq |\sigma(M)| + 1$ и M является σ-башенной группой по выбору G.

(3) *Если* $\sigma_j \in \sigma(G)$, *то всякая холлова* σ_j*-подгруппа группы G не является σ-субнормальной в G.*

Пусть H – холлова σ_j-подгруппа группы G. Допустим, что H σ-субнормальна в G. Тогда в силу леммы 1.1 (4) подгруппа H нормальна в G. Поскольку $\sigma_j \in \sigma(G)$ и $H \neq 1$, то в группе G найдется минимальная нормальная подгруппа K такая, что $K \leq H$.

Предположим, что $K < H$. Тогда

$$\sigma(G/K) = \sigma(G) \text{ и } h_\sigma(G/K) \leq h_\sigma(G)$$

по лемме 1.3 (2). Значит, предположение верно для G/K, поэтому G/K является σ-башенной группой. Следовательно, ввиду леммы 1.5 (1), σ-башенной группой является также и группа G/H. Но тогда G – σ-башенная группа, так как H – холлова σ_j-подгруппа группы G. Противоречие. Следовательно, $K = H$. Тогда для некоторой максимальной подгруппы M группы G имеем $G = KM$. Если M – σ-башенная группа, то $G/H = G/K \simeq M/(M \cap K)$ – σ-башенная группа по лемме 1.5 (1). И снова G является σ-башенной группой, так как H – холлова σ_j-подгруппа в G, противоречие. Поэтому M не является σ-башенной группой, а значит, M σ-субнормальна в G ввиду утверждения (2).

Рассуждая так же, как в утверждении (1), получаем $h_\sigma(M_G) < h_\sigma(G)$. Но тогда

$$h_\sigma(M_G) + 1 \leq h_\sigma(G) \leq |\sigma(G)| + 1$$

и $|\sigma(M_G)| = |\sigma(G)| - 1$, так как K является холловой σ_j-подгруппой группы G. Значит,

$$h_\sigma(M_G) \leq |\sigma(M_G)| + 1.$$

Поэтому M_G является σ-башенной группой по выбору G. Но, $G = KM_G$ и K – нормальная холлова σ_j-подгруппа группы G. Следовательно, G является σ-башенной группой. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (3).

(4) *Для любой минимальной нормальной подгруппы n группы G группа* G/N *является σ-башенной, поэтому* $\Phi(G) = 1$.

В силу утверждения (3) и леммы 1.3(2) имеем $\sigma(G/N) = \sigma(G)$ и $h_\sigma(G/N) \leq h_\sigma(G)$. Тогда имеет место

$$h_\sigma(G/N) \leq h_\sigma(G) \leq |\sigma(G)| + 1 = |\sigma(G/N)| + 1.$$

Следовательно, G/N является σ-башенной группой по выбору G.

Если теперь $\Phi(G) \neq 1$, то в группе G найдется минимальная нормальная подгруппа $K \leq \Phi(G)$. Тогда G/K является σ-башенной группой и, значит, $G/\Phi(G)$ является σ-башенной группой по лемме 1.5 (1). Но тогда $G/\Phi(G)$ является σ-башенной группой типа ψ для некоторого подходящего линейного порядка ψ на σ. Применяя теперь лемму 1.5 (2) заключаем, что G является σ-башенной группой типа ψ. Это противоречие показывает, что $\Phi(G) = 1$ и завершает доказательство утверждения (4).

(5) *Если n – минимальная нормальная* σ_j*-подгруппа в G, M – такая максимальная подгруппа в G, что* $G = NM$, *то M имеет нормальный ряд* $M_{n-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M$, *где* M_k / M_{k+1} – σ_{i_k}*-группа простого порядка, а* M_{k+1} *и* M/M_k

являются $\sigma_{i_k'}$ -группами для всех $k = 0,1,\ldots,n-2$. Кроме того, M_{n-1} является холловой циклической σ_m-подгруппой порядка q^s для некоторого $q \in \sigma_m \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_j\}$ и максимальная подгруппа в M_{n-1} σ-субнормальна в G. Поэтому M и G/N сверхразрешимы.

Предположим, что M σ-субнормальна в G. Тогда G/M_G является σ-примарной группой, поэтому G/M_G является σ-башенной группой типа ψ для любого линейного порядка ψ на σ. Тогда $G \simeq G/(N \cap M_G)$ является σ-башенной группой по утверждению (4) и лемме 1.5 (2). Это противоречие показывает, что M не является σ-субнормальной в G. Поэтому M – σ-башенная группа по утверждению (2).

Из утверждения (3) следует, что

$$n = |\sigma(G)| = |\sigma(M)|.$$

Тогда M имеет ряд подгрупп

$$1 = M_n < M_{n-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M,$$

где M_k – нормальная подгруппа группы M и M_k / M_{k+1} является σ_{i_k} -группой и M_{k+1} и M/M_k являются $\sigma_{i_k'}$ -группами для всех $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Если M_{n-1} – σ_j-группа, то NM_{n-1} – нормальная холлова σ_j-подгруппа группы G, что противоречит утверждению (3). Следовательно, M_{n-1} является холловой σ_m-подгруппой группы G для некоторого $m \neq j$. Значит, M_{n-1} не является σ-субнормальной в G в силу утверждения (3). Поэтому всякая подгруппа A группы M, содержащая M_{n-1}, не является σ-субнормальной в G, так как M_{n-1} нормальна в A. В частности, M_k не является σ-субнормальной в G для всех $k < n-1$. Следовательно,

$$h_\sigma(G) = |\sigma(G)| + 1 = n + 1 = |\sigma(M)| + 1.$$

Предположим, что для некоторого $t < n-1$ факторгруппа M_t / M_{t+1} не имеет простой порядок. Тогда для некоторой σ-субнормальной подгруппы W группы G и некоторой n-максимальной подгруппы V группы M имеем

$$M_{n-1} \le V \le W < M.$$

Последнее невозможно ввиду замечания из предыдущего абзаца. Следовательно, M_k / M_{k+1} имеет простой порядок для всех $k = 0,\ldots,n-2$. Поэтому

$$M_{n-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M < G$$

– максимальная цепь подгрупп группы G длины n. Отсюда следует, что каждая максимальная подгруппа в M_{n-1} является σ-субнормальной в G, поскольку $h_\sigma(G) = |\sigma(G)| + 1 = n+1$. Так как при этом M_{n-1} не является σ-субнормальной в G, то ввиду леммы 1.1 (5) M_{n-1} имеет единственную максимальную подгруппу. Поэтому M_{n-1} является циклической группой порядка q^s для некоторого $q \in \sigma_m \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_j\}$. Следовательно, группы M и $G/N \simeq M/(M \cap N)$ сверхразрешимы. Значит, утверждение (5) верно.

(6) *R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, поэтому $C_G(R) = R$.*

Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$. Тогда ввиду утверждения (4) для некоторых максимальных подгрупп M и L группы G имеют место равенства $G = RL = NM$. Кроме того, $G \simeq G/(R \cap N)$ сверхразрешима по утверждению (5), поэтому R и n – группы простого порядка.

Если $|R| \neq |N|$, то $R \le M$. Из утверждения (5) следует, что M имеет нормальный ряд $M_{n-1} < \cdots < M_1 < M_0 = M$, где M_k / M_{k+1} – σ_{i_k} -группа простого порядка, а M_{k+1} и M/M_k являются $\sigma_{i_k'}$ -группами для всех $k = 0,1,\ldots,n-2$. Кроме того, M_{n-1} является холловой циклической σ_s-подгруппой порядка q^m для некоторого $q \in \sigma_s \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$. Если $R \not\le M_{n-1}$, то R – холлова σ_i-подгруппа группы G, что противоречит утверждению (3). Значит, $R \le M_{n-1}$ и $p = q$. Тогда поскольку $M_{n-1} \le G = RL$, то

$$M_{n-1} = M_{n-1} \cap RL = R(M_{n-1} \cap L).$$

Если теперь $M_{n-1} \cap L = 1$, то $M_{n-1} = R$ – холлова σ_s-подгруппа G, последнее невозможно в силу утверждения (3). Поэтому $M_{n-1} \cap L \neq 1$ и для циклической примарной группы M_{n-1} имеет место $M_{n-1} = R(M_{n-1} \cap L)$, где $M_{n-1} \cap L$ – неединичная p-группа и $R \cap (M_{n-1} \cap L) = 1$, так как $R \cap L = 1$. Противоречие.

Поэтому $|R| = |N|$ и RN является нормальной холловой σ_i-подгруппой группы G, поскольку порядок холловой σ_i-подгруппы в L является простым числом по утверждению (5). Это противоречие показывает, что R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $C_G(R) = R = O_p(G)$ в силу [17, Гл. А, 15,6]. Поэтому выполняется (6).

Заключительное противоречие. Из утверждения (4) следует, что для некоторой максимальной подгруппы M группы G имеем $G = R \rtimes M$. Пусть p – силовская q-подгруппа группы M, где $q \in \sigma_i$. Из пунктов (3) и (5) следует, что $|P| = q$ и $V = RP$ – не σ-субнормальная холлова σ_i-подгруппа группы G. Кроме того, из пункта (5) и [17, Гл. A, 1.6 (b)] следует, что V это пересечение всех максимальных подгрупп группы G, содержащих V. Следовательно, некоторая максимальная подгруппа L группы G, содержащая V, не является σ-субнормальной в G по лемме 1.1 (5). Значит, L является σ-башенной группой по утверждению (2), и тогда V нормальна в L, так как $C_G(R)=R$ по утверждению (6). Отсюда следует, что каждая подгруппа в L, содержащая V, не является σ-субнормальной в G. Но V – $(n-1)$-максимальная подгруппа в G, поэтому любая 2-максимальная подгруппа V содержится в некоторой такой собственной подгруппе W группы V, которая σ-субнормальна в G. Если $|V|>pq$, то p содержится в некоторой σ-субнормальной подгруппе G, содержащейся в V, так как холлова σ_i-подгруппа группы G сверхразрешима по предположению. Следовательно, $|V|=pq$, поэтому $|R|=p$ и, значит, $G/R=G/C_G(R)$ циклическая, откуда следует, что $V=RP$ нормальна в G, противоречие. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

2. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

3. *Beidleman*, *J.C.* On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.

4. *Huang*, *J.* Finite groups all of whose subgroups are σ-subnormal or σ-abnormal / J. Huang, B. Hu, X. Wu // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 1. – P. 4542–4549.

5. *Guo*, *W.* On σ-supersoluble groups and one generalization of *CLT*-groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.

6. *Guo*, *W.* Finite groups whose *n*-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Science in China. Math. – 2019. – Vol. 62, № 7. – P. 1355–1372.

7. *Yi*, *X.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2020. – Vol. 560, № 15. – P. 181–191.

8. *Heliel*, *Abd El-Rahman.* On the σ-length of maximal subgroups of finite σ-soluble groups / Abd El-Rahman Heliel, M. Al-Shomrani, A. Ballester-Bolinches // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, № 12. – P. 2165. – DOI: https://doi.org/10.3390/math8122165

9. *On σ-subnormality criteria in finite σ-soluble groups* / A. Ballester-Bolinches [et al.] // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4

10. *G-covering subgroup systems for some classes of σ-soluble groups* / A-Ming Liu [et al.] // J. Algebra. – 2021. – Vol. 582. – P. 280–293.

11. *Ballester-Bolinches*, *A.* On σ-subnormality criteria in finite groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, X. Yi // J. Pure Appl. Algebra. – 2022. – Vol. 226, № (2). – P. 106822. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2021.106822

12. *A generalization of σ-permutability* / Z. Wang [et al.] // Commun. Math. Stat. – in Press.

13. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

13. *Spencer*, *A.E.* Maximal non-normal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 27. – P. 167–173.

14. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Высшая школа, 2003.

15. *Mal'cev*, *A.I.* Algebraic Systems / A.I. Mal'cev. – Moscow: Nauka, 1970.

16. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*проект* 20211328).

Поступила в редакцию 22.01.2022.

Информация об авторах

Сафонова Инна Николаевна – к.ф.-м.н., доцент

Проблемы физики, математики и техники, № 1 (50), 2022 **ISSN 2077-8708**

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_84

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

В.М. Селькин[1], **В.С. Закревская**[1], **Н.С. Косенок**[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации*, *Гомель*

FINITE GROUPS WITH GIVEN SCHMIDT SUBGROUPS

V.M. Sel'kin[1], **V.S. Zakrevskaya**[1], **N.S. Kosenok**[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Belarusian Trade and Economic University of Consumer Cooperatives*, *Gomel*

Аннотация. В статье рассматриваются только конечные группы. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{U}_p$ *-нормальной* в G (p – простое число), если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является либо циклическим, либо p'-группой. В статье доказывается, что если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то производная подгруппа G' группы G p-нильпотентна. Также обобщаются некоторые известные результаты.

Ключевые слова: *конечная группа*, *нильпотентная группа*, *субнормальная подгруппа*, $\mathfrak{U}_p$*-нормальная подгруппа*, *группа Шмидта*.

Для цитирования: *Селькин*, *В.М.* Конечные группы с заданными подгруппами Шмидта / В.М. Селькин, В.С. Закревская, Н.С. Косенок // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 84–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_84

Abstract. Throughout the article, all groups are finite and G always denotes a finite group. A subgroup H of the group G is called $\mathfrak{U}_p$*-normal* in G (p is a prime) if every chief factor of the group G between H^G and H_G is either cyclic or a p'-group. In this article, we prove that if each Schmidt subgroup of the group G is either subnormal or $\mathfrak{U}_p$-normal in G, then the derived subgroup G' of G is p-nilpotent. Some well-known results are generalized.

Keywords: *finite group*, *nilpotent group*, *subnormal subgroup*, $\mathfrak{U}_p$*-normal subgroup*, *Schmidt group.*

For citation: *Sel'kin*, *V.M.* Finite groups with given Schmidt subgroups / V.M. Sel'kin, V.S. Zakrevskaya, N.S. Kosenok // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 84–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_84 (in Russian)

Введение

В данной статье мы рассматриваем только конечные группы; подгруппа A группы G называется *модулярной* в G [2], если выполняются следующие условия:

(i) $\langle X, A\cap Z\rangle = \langle X, A\rangle \cap Z$ для всех $X \le G$, $Z \le G$ таких, что $X \le Z$ и

(ii) $\langle A, Y\cap Z\rangle = \langle A, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G$, $Z \le G$ таких, что $A \le Z$.

Мы говорим, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{U}_p$*-нормальной* [3] в G, если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является либо циклическим, либо p'-группой.

Напомним также, что G называется *группой Шмидта*, если сама группа G не является нильпотентной, но каждая её собственная подгруппа нильпотентна. Изучение групп Шмидта и их применение нашло своё отображение в большом числе работ (см., например, [4]–[7] и, в первую очередь это обосновано тем, что каждая ненильпотентная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта. Поэтому изучение таких групп является важной задачей общей теории конечных групп.

В.Н. Семенчук в своей работе [8] доказал, что если каждая подгруппа Шмидта ненильпотентной группы G субнормальна в G, то G метанильпотентна, т. е. $G/F(G)$ нильпотентна. Это важное наблюдение было развито в различных направлениях. Так, например, В.С. Монахов и В.Н. Княгина в статье [9] доказали, что в группах G, в которых выполняется такое условие, производная подгруппа G' будет нильпотентной. А в работе [10] В.А. Ведерников получил полное описание групп с субнормальными подгруппами Шмидта. В работе [11] И.В. Близнец и В.М. Селькин доказали, что если в ненильпотентной группе

G каждая подгруппа Шмидта модулярна в G, то производная подгруппа G' нильпотентна.

В течение последних лет исследования большого числа авторов (см., в частности, [13]–[24]) были связаны с изучением и применениями σ-субнормальных подгрупп [13]. Напомним, что подгруппа A в G называется *σ-субнормальной* в G [13], если в G существует цепь подгрупп $A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_n = G$, где либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной, т. е. $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ_i-группой для некоторого i, для всех $i = 1, \ldots, n$.

Приведённые выше результаты [8], [9], [11] получают дальнейшее развитие также в теории σ-субнормальных подгрупп. Так, например, в работе [15] К.А. Аль-Шаро и А.Н. Скиба доказали, что если каждая подгруппа Шмидта группы G σ-субнормальна, то G' является σ-нильпотентной группой, т. е. является прямым произведением σ-примарных групп. Развивая этот результат, в статье [22] утверждается и доказывается, что в каждой группе G, удовлетворяющей такому условию, имеется нормальная σ-нильпотентная подгруппа N с циклической факторгруппой G/N. Более того, согласно работе [16], G' является σ-нильпотентной группой и в случае, когда каждая подгруппа Шмидта группы G является либо σ-субнормальной, либо модулярной в G.

В этой работе мы докажем следующий результат в данном направлении.

***Теорема* 0.1.** *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то производная подгруппа G' группы G является p-нильпотентной.*

Следствиями данной теоремы являются несколько известных результатов.

***Следствие* 0.2** [9, теорема]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то производная подгруппа G' нильпотентна.*

***Следствие* 0.3** [9, теорема]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G, то производная подгруппа G' группы G нильпотентна.*

***Следствие* 0.4** [8, теорема 2]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то $G/F(G)$ нильпотентна.*

***Следствие* 0.5** [12, теорема 1.9]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо $\mathfrak{U}$-нормальна, либо субнормальна в G, то производная подгруппа G' нильпотентна.*

1 Вспомогательные результаты

При построении доказательства основной теоремы были использованы следующие леммы.

***Лемма* 1.1.** *Пусть A и $N \le E$ – подгруппы группы G, где N – нормальна и A – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G. Тогда*:

(1) *AN/N – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G/N.*

(2) *Если E/N – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G/N, то E – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G.*

(3) *$A \cap E$ – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в E.*

(4) *Если E $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то $\langle A, E\rangle$ – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G.*

Доказательство. См. доказательство предложения 1.8 и леммы 3.3 в [1] или доказательство теоремы 1.1 и леммы 2.2 в [25]. □

***Лемма* 1.2** [26, глава A, леммы 14.1, 14.2, 14.3 и теорема 14.4]. *Пусть A и $N \le E$ являются подгруппами в G, где N является нормальной и A субнормальной подгруппами группы G. Тогда*:

(1) *AN/N – субнормальна в G/N.*

(2) *Если $A \le E$, то A является субнормальной в E.*

(3) *Если E/N является субнормальной в G/N, то E является субнормальной в G.*

(4) *Если E является субнормальной в G, то $\langle A, E\rangle$ – субнормальна в G}.*

***Лемма* 1.3** [4, III, теорема 5.2] или [5, VI, теорема 24.2]. *Если G – группа Шмидта, тогда $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ – силовская p-подгруппа в G и $Q = \langle x\rangle$ – циклическая силовская q-подгруппа группы G, $p \ne q$. Помимо этого, $\langle x^q\rangle \le \Phi(G)$ и p имеет экспоненту p или* 4 (*если p – неабелева 2-группа*).

Факт, который мы приведём дальше, хорошо известен (в частности, см. [5, I, следствие 7.7.2]). Здесь он доказан без применения теории формаций.

***Лемма* 1.4.** *Если A является субнормальной подгруппой группы G, то для каждого простого p $O_p(A) \le O_p(G)$.*

Доказательство. Согласно условию существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_{t-1} \le A_t = G$$

такая, что A_i нормальна в A_{i+1} для всех $i = 1, \ldots, t-1$. Тогда по индукции мы получаем $O_p(A) \le O_p(A_{t-1})$. С другой стороны, $O_p(A_{t-1})$ характеристична в A_{t-1} и поэтому нормальна в $A_t = G$. Следовательно, $O_p(A_{t-})\le O_p(G)$. □

2 Доказательство теоремы 1.1

Доказательство. Предположим, что эта утверждение неверно, и пусть G будет контрпримером минимального порядка.

(1) *Если E является собственной подгруппой группы G, тогда $E' \le F_p(E)$* (исходя из леммы 1.2 (2) и выбора G).

(2) *Если N является минимальной нормальной подгруппой группы G, тогда $(G/N)' \le F_p(G/N)$. Следовательно, $N \le G'$ and $O_{p'}(G) = 1$.*

Здесь используется цепочка рассуждений из работы [27] А.Н. Скибы (см. также в статье [12] доказательство теоремы 1.9).

Если G/N является p-нильпотентной, тогда это очевидно. Но предположим, что G/N не p-нильпотентна, и пусть E/N является произвольной подгруппой Шмидта в G/N. Пусть H является минимальным добавлением к N в E. Тогда $H/(H\cap N)\simeq HN/N=E/N$ – группа Шмидта и $H\cap N\le \Phi(H)$. Пусть $\Phi=\Phi(H)$ и A является подгруппой Шмидта в H.

Мы получаем из леммы 1.3, что

$$(H/(H\cap N))/\Phi(H/(H\cap N))=$$
$$=(H/(H\cap N))/(\Phi/(H\cap N))\simeq H/\Phi=P\rtimes Q,$$

где p является силовской p-подгруппой, q является силовской q-подгруппой в H/Φ и $|Q|=q$ для некоторых простых чисел $p\ne q$. Тогда, опять же по лемме 1.3, получаем, что $A=A_p\rtimes A_q$, где $A=(A_q)^A$. Тогда $A_q\nleq\Phi$, так как Φ нильпотентна. Следовательно, $\Phi A_q/\Phi$ является силовской q-подгруппой в H/Φ, и поэтому

$$(\Phi A_q/\Phi)^{H/\Phi}=(A_q)^H\Phi/\Phi=H/\Phi.$$

Следовательно, $(A_q)^H=H$, поэтому

$$E=HN=(A_q)^H N.$$

Согласно леммам 1.1 (4) и 1.2 (4), $(A_q)^H=A^H$ является либо субнормальной либо $\mathfrak{U}_p$-нормальной подгруппой в G и, следовательно, $E/N=(A_q)^H NN$ является либо субнормальной, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальной в G/N, согласно леммам 1.1 (1) и 1.2 (1).

Тогда гипотеза будет верной для G/N, соответственно, из выбора G мы имеем $G'N/N=(G/N)'\le F_p(G/N)$. Если $N\cap G'=1$, то $G'N/N\simeq G'/(G'\cap N)=G'/1\simeq G'$ является p-нильпотентной группой, что противоречит выбору группы G. Следовательно, $N\le G'$.

Предположим, что $N\le O_{p'}(G)$. Тогда $F_p(G/N)=F_p(G)/N$ и $G'N/N=G'/N$, поэтому $G'/N=(G/N)'\le F_p(G/N)$ и тогда $G'\le F_p(G)$. Этим противоречием мы завершаем доказательство утверждения (2).

(3) *Группа G – p-разрешима.*

Согласно пунктам (1) и (2) нам нужно лишь показать, что группа G не является неабелевой простой группой. Допустим предположение, что это утвеждение является неверным, и пусть A будет произвольной подгруппой Шмидта группы G. Согласно условию подгруппа A является либо субнормальной, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальной в группе G. С другой стороны, G является неабелевой простой группой. Тогда A $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G и $A_G=1$. Но тогда $1<A^G$ и каждый главный фактор G ниже $A^G=G$ будет либо циклическим, либо p'-группой. Из этого следует, что G не является неабелевой простой группой. Это противоречие заканчивает доказательство пункта (3).

(4) *Если R является минимальной нормальной подгруппой группы G, то* $R\nleq\Phi(G)$ *и* $R=C_G(R)=O_p(G)=F_p(G)$. *Помимо этого,* $|R|>p$ *и для некоторой максимальной подгруппы M группы G правдиво равенство* $G=R\rtimes M$.

Вначале отметим, что, ввиду утверждений (2) и (3), имеет место $R\le O_p(G)$. Согласно пункту (2) производная подгруппа

$$(G/R)'=G'R/R\simeq G'/(G'\cap R)$$

группы G/R является p-нильпотентной. Допустим, что в G существует минимальная нормальная подгруппа $L\ne R$. Значит, $G'/(G'\cap L)$ является p'-нильпотентной и тогда

$$G'\simeq G'/((G'\cap R)\cap(G'\cap L))=G'/(R\cap L)$$

является p-нильпотентной. Поэтому $G/F(G)$ является абелевой, что противоречит выбору G. Следовательно, R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $R\nleq G'$. Помимо этого, $R\nleq\Phi(G)$, иначе, в противном случае, G' нильпотентна согласно [26, глава A, лемма 13.2]. Значит, $R=C_G(R)=O_p(G)=F(G)$ согласно [26, глава A, теорема 15.6 (2)]. Заметим также, что R не циклическая группа, потому что иначе группа $G/C_G(R)=G/R=G/F(G)$ является циклической. Следовательно, мы имеем (4).

(5) $M\simeq G/R$ *p-замкнута. Следовательно, R – силовская p-подгруппа группы G.*

Допустим, что M не является p-замкнутой группой, и пусть H – минимальная не q-нильпотентная подгруппа в M для некоторого простого числа $q\ne p$, делящего $|M|$. Тогда H – группа Шмидта ввиду [4, IV, теорема 5.4] и поэтому H либо субнормальна, либо является $\mathfrak{U}_p$-нормальной в G.

В первом случае для некоторого простого числа q имеет место $O_q(H)\ne 1$. Тогда $O_q(H)\le O_q(G)\le R$ по утверждению (4) и лемме 1.4, поэтому $R\cap M\ne 1$. Это противоречие показывает, что, H $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G.

Помимо этого очевидно, что $H_G=1$, а, значит, каждый главный фактор G ниже H^G либо цикличен, либо является p'-группой. Но $R\le H^G$ по утверждению (4) и, следовательно, R является циклической, что противоречит утверждению (4). Это противоречие показывает, что

$M \simeq G / R$ q-нильпотентна для всех простых чисел $q \neq p$, делящих $|M|$. Тогда $O_p(M)R \leq O_p(G) = R$. Следовательно, $O_p(M) = 1$, поэтому утверждение (5) выполнено.

(6) *M – группа Миллера – Морено (т. е. M не является абелевой, но каждая собственная подгруппа в M является абелевой группой). Более того, M является q-группой для некоторого простого числа $q \neq p$.*

Вначале заметим, что M – холлова p'-подгруппа группы G, что очевидно из пунктов (4) и (5).

Тогда пусть S является произвольной максимальной подгруппой в M. Значит $RS / F_p(RS)$ будет абелевой согласно утверждения (1). Сдедовательно $R = (RS)'$, исходя из пунктов (4) и (5), и, очевидно, $S \simeq RS / R$ является абелевой. Тогда из выбора G и пункта (5) мы получаем (6).

Заключительное противоречие. Исходя из утверждения (6), $Z(M) \cap \Phi(M) \neq 1$. Пусть Z является подгруппой порядка q в $Z(M) \cap \Phi(M)$ и пусть $E = RZ$. Тогда E не нильпотентна (из пункта (4)). Однако $R = R_1 \times \cdots \times R_t$, где R_k является минимальной нормальной подгруппой в E для всех $k = 1, \ldots, t$ по теореме Машке. Следовательно, для некоторого i подгруппа $R_i \rtimes Z$ не будет нильпотентной, а, значит, эта подгруппа будет содержать подгруппу Шмидта вида $A = A_p \rtimes Z$.

Допустим, что $A < E$. Следовательно $|A_p| < |R|$ и $A_G = 1$. Следуя гипотезе, A либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G. Вначале допустим, что A является субнормальной в G. Тогда в E существует такая собственная подгруппа V, что $A \leq V$ и V является нормальной в E. Так как $Z \leq V < E$, то для некоторого k имеем $R_k \not\leq V$. Тогда $R_k \cap V = 1$, следовательно, $R_k \leq C_E(V)$, поэтому $R_k \leq N_G(Z) = M$, где M является максимальной в G, получаем противоречие. Значит, A не субнормальна в G. Также очевидно, что $A_G = 1$, поэтому $R \leq T^G$ ввиду утвеждения (4). Но в этом случае R является либо циклической группой, либо p'-группой, что невозможно ввиду пунктов (2) и (4).

Значит, $A = E$, следовательно $R = A_p$ и Z действует неприводимо на R. Очевидно, что $Z \leq \Phi(M)$, значит, каждая собственная подгруппа группы M действует неприводимо на R. Из этого факта получаем, что каждая максимальная подгруппа из M – циклическая. Значит, $q = 2$ и, следовательно, $|R| = p$, что противоречит пункту (4). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hu*, *B*. Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.

2. *Schmidt*, *R*. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.

3. *Skiba*, *A.N*. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.

4. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967. – 796 p.

5. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

6. *Шеметков*, *Л.А*. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 256 с.

7. *Ballester-Bolinehes*, *A*. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinehes, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006.

8. *Семенчук*, *В.Н*. Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп, в книге: Подгрупповое строение конечных групп / В.Н. Семенчук. – Наука и Техника, Минск, 1981. – С. 138–149.

9. *Монахов*, *В.С*. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45 (6). – P. 1316–1322.

10. *Ведерников*, *В.А*. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46 (6). – С. 669–687.

11. *Близнец*, *И.В*. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И.В. Близнец, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 36–38.

12. *Хуан*, Ц. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Ц. Хуан, Б. Ху, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62 (1). – С. 201–220.

13. *Skiba*, *A.N*. On a-subnormal and a-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

14. *Beidleman*, *J.C*. On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.

15. *Al-Sharo*, *K.A*. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / K.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.

16. *Hu*, *B*. On finite groups with generalized σ-subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 46, № 2. – P. 1–8.

17. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble PσT-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.

18. *Skiba*, *A.N.* On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – Vol. 3. – P. 35–47.

19. *Guo*, *W.* Finite groups whose n-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Sci. China Math. – 2019. – Vol. 62. – P. 1355–1372.

20. *On* σ-*subnormality criteria in finite* σ-*soluble groups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // RACSAM. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4

21. *On* σ-*subnormal subgroups of factorised finite groups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, X. Yi // J. Algebra. – 2020. – Vol. 559. – P. 195–202.

22. *Yi*, *X.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2020. – Vol. 560. – P. 181–191.

23. *Kamornikov*, *S.F.* On σ-subnormal subgroups of finite groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Siberian Math. J. – 2020. – Vol. 60, № 2. – P. 337–343.

24. *Kamornikov*, *S.F.* On σ-subnormal subgroups of finite 3'-groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Ukranian Math. J. – 2020. – Vol. 72, № 6. – P. 806–811.

25. Chi, Z. On a lattice characterization of finite soluble PST-groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 2020. – Vol. 101 (2). – P. 247–254. – DOI: https://doi.org/10.1017/S0004972719000741.

26. *Doerk*, *K.* Finite Soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

27. *Skiba*, *A.N.* Finite groups with abnormal Schmidt subgroup / A.N. Skiba // Preprint, 2021.

Поступила в редакцию 26.01.2022.

Информация об авторах

Селькин Вадим Михайлович – д.ф.-м.н., доцент
Закревская Виктория Сергеевна – аспирантка
Косенок Николай Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент

МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_89

ПОЛИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

POLYORTHOGONAL SYSTEMS OF FUNCTIONS

A.P. Starovoitov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В статье введены в рассмотрение кратные аналоги определителей и матриц Грама, изучается возможность построения полиортогональных систем функций с помощью процесса полиортогонализации произвольной конечной подсистемы линейно независимой системы функций $\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...\}$ в предгильбертовых функциональных пространствах, порождённых мерами $\mu_1,...,\mu_k$. Доказанные утверждения являются обобщением теоремы Грамма – Шмидта об ортогонализации.

Ключевые слова: *аппроксимации Padé*, *полиортогональные многочлены*, *нормальный индекс*, *совершенная система*, *определители Грама*.

Для цитирования: *Старовойтов*, *А.П.* Полиортогональные системы функций / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 89–93. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_89

Abstract. This article introduces multiple analogs of determinants and Gram matrices, studies the possibility of constructing polyorthogonal systems of functions using the process of polyorthogonalization of an arbitrary finite subsystem of a linearly independent system of functions $\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...\}$ in Pre-Hilbert function spaces generated by measures $\mu_1,...,\mu_k$. The proven statements are a generalization of the Gram – Schmidt orthogonalization theorem.

Keywords: *Padé approximations*, *polyorthogonal polynomials*, *normal index*, *perfect system*, *Gram determinant*.

For citation: *Starovoitov*, *A.P.* Polyorthogonal systems of functions / A.P. Starovoitov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 89–93. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_89 (in Russian)

Введение

В работах [1], [2] найдены явные детерминантные представления полиортогональных многочленов I и II типов, обобщающие классическую формулу Грама – Шмидта [3, гл. 4, § 1] для представления ортогонального многочлена, полученного в результате ортогонализации линейно независимой системы функций $\{1,x,...,x^n\}$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ [4]. Доказательство формулы Грама – Шмидта в случае произвольной линейно независимой системы функций

$$\varphi^n=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$$

(см., например, монографию [3, гл. 3, § 1]) существенно опирается на свойствах определителей и матриц, введенных в рассмотрение Й. Грамом [5]. В данной статье определены кратные аналоги определителей и матриц Грама и изучается возможность построения полиортогональных систем функций с помощью процесса *полиортогонализации* произвольной конечной подсистемы линейно независимой системы функций

$$\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...\}$$

в предгильбертовых функциональных пространствах, порождённых мерами $\mu_1,...,\mu_k$.

Выбор функциональных пространств объясняется лишь желанием приблизить формулировки утверждений к классическим. На самом деле, все основные результаты статьи справедливы и в случае, когда предгильбертовы пространства задаются произвольными скалярными произведениями.

1 Полиортогональные функции

Будем придерживаться терминалогии монографии [6]. Пусть $\mu_1,...,\mu_k$ – положительные борелевские меры на вещественной прямой, носителями которых являются отрезки $\Delta_1,...,\Delta_k$. Рассмотрим систему функций

$$\varphi=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...\},$$

каждая из которых измерима на отрезке Δ_j относительно меры μ_j при всех $j=1,...,k$. Будем считать, что система φ линейно независима на каждом из отрезков Δ_j и

$$\int_{\Delta_j}|\varphi_p(x)|^2\,d\mu_j(x)<+\infty,\ j=1,...,k;\ p=0,1,.... \quad (1.1)$$

Если выполняются условия (1.1), то кратко будем писать, что $\varphi\in L^2_\mu$, $\mu=\{\mu_1,...,\mu_k\}$. Скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ_j, обозначим через

$$(f,g)^j = \int_{\Delta_j} f(x)g(x)d\mu_j(x).$$

Везде в дальнейшем предполагаем, что $\varphi \in L^2_\mu$. Множество k-мерных мультииндексов (индексов) $n=(n_1,...,n_k)$, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}^k_+$. Порядок мультииндекса $n=(n_1,...,n_k)$ – это сумма $|n|:=n_1+...+n_k$.

***Определение* 1.1.** *Пусть* $n=(n_1,...,n_k)\in\mathbb{Z}^k_+$ – *ненулевой мультииндекс. Тогда*

$$\psi_n(x)=\alpha_0\varphi_0(x)+...+\alpha_{|n|}\varphi_{|n|}(x),$$

где $\alpha_j\in\mathbb{R}$ *и* $\alpha_0^2+...+\alpha_{|n|}^2\neq 0$, *будем называть n-ой полиортогональной функцией для набора мер* μ, *порожденной системой* φ, *если*

$$\int_{\Delta_j}\psi_n(x)\varphi_p(x)d\mu_j(x)=0, \quad p=0,1,...,n_j-1;\ j=1,...,k. \tag{1.2}$$

Здесь предполагается, что $n_j\neq 0$. *Если* $n_{j_0}=0$, *то в* (1.2) *индекс j пробегает значения* $\{1,...,j_0-1,j_0+1,....,k\}$, *т. е. мера* μ_{j_0} *в определении полиортогональной функции* $\psi_n(x)$ *не учитывается.*

В том случае, когда $\varphi=\{1,x,x^2,...\}$, каждой мере μ_j можно поставить в соответствие марковскую функцию

$$f_j(z)=\int_{\Delta_j}\frac{d\mu_j(x)}{z-x}, z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j, j=1,...,k \tag{1.3}$$

разложение которой в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид

$$f_j(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{s_p^j}{z^{i+1}},$$

где

$$s_p^j=(x^\alpha,x^\beta)^j=\int_{\Delta_j}x^p d\mu_j(x)(p=0,1,...)$$

– последовательность степенных моментов меры μ_j (предполагается, что $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^1_+$, $\alpha+\beta=p$). При этом n-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ является n-ым полиортогональным многочленом $Q(x)=Q_{|n|}(x)$ и соотношения ортогональности (1.2) примут вид

$$\int_{\Delta_j}Q(x)\cdot x^p d\mu_j(x)=0, p=0,1,...,n_j-1; j=1,2,...,k.$$

Если в определении 1.1 положить $k=1$ (либо, что тоже самое, индекс $n=(n_1,0,...,0)$), то отождествляя меру μ_1 с μ, а n_1 с $n\in\mathbb{Z}^1_+$, будем находится в классической ситуации, т. е. n-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ является n-ой ортогональной функцией и для неё имеет место формула Грама – Шмидта [3, гл. 3, § 1]

$$\psi_n(x)=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \dots & (\varphi_n,\varphi_0)\\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_n,\varphi_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\varphi_0,\varphi_{n-1}) & (\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \dots & (\varphi_n,\varphi_{n-1})\\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x)\end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

В представлении

$$\psi_n(x)=\alpha_0\varphi_0(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x),$$

которое легко получить из формулы (1.4), коэффициент α_n равен определителю Грама

$$G_n=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \dots & (\varphi_{n-1},\varphi_0)\\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-1},\varphi_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\varphi_0,\varphi_{n-1}) & (\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \dots & (\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})\end{vmatrix} \tag{1.5}$$

системы функций $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_{n-1}(x)\}$. Хорошо известно [3, гл. 3, § 1], что определитель Грама G_n системы $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_{n-1}(x)\}$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда эта система линейно независима на отрезке Δ.

Полиортогональная функция условиями (1.2) определяется не однозначно, а с точностью до числового множителя. Эта неединственность может быть и более существенной. Приведём соответствующий пример.

***Пример* 1.1.** Пусть $k=2$, $n=(2,1)$, $d\mu_1(x)=dx$, $d\mu_2(x)=xdx$, где dx – мера Лебега, носитель которой $\Delta=[0,1]$. Тогда

$$\psi_n(x)=ax^3+bx^2-\left(b+\frac{9a}{10}\right)x+\frac{a}{5}+\frac{b}{6}$$

где a и b – любые действительные числа не равные нулю одновременно.

***Определение* 1.2.** *Будем говорить, что n-я полиортогональная функция* $\psi_n(x)$ *однозначно определяется условиями* (1.2), *если для любых двух таких функций* $\psi_n(x)$, $\psi_n^*(x)$ *найдётся действительное число* λ, *что* $\psi_n(x)\equiv\lambda\psi_n^*(x)$ *на всех отрезках* Δ_j.

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n\in\mathbb{Z}^k_+$ и систему $\mu=\{\mu_1,...,\mu_k\}$, при которых n-я полиортогональная функция определяется однозначно. В одномерном случае однозначность вытекает из линейной независимости системы φ. Пример 1.1 показывает, что уже при $k=2$ это не так. Далее будет установлено, что n-ая полиортогональная функция всегда существует, а её однозначность равносильна условию, при котором соответствующая кратная матрица Грама имеет максимальный ранг.

2 Критерий единственности. Теорема о полиортоганализации

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Для каждого $n_j \neq 0$ определим матрицу порядка $n_j \times (|n|+1)$

$$F^j = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)^j & (\varphi_1, \varphi_0)^j & \dots & (\varphi_{|n|}, \varphi_0)^j \\ (\varphi_0, \varphi_1)^j & (\varphi_1, \varphi_1)^j & \dots & (\varphi_{|n|}, \varphi_1)^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{n_j-1})^j & (\varphi_1, \varphi_{n_j-1})^j & \dots & (\varphi_{|n|}, \varphi_{n_j-1})^j \end{vmatrix},$$

а затем определим матрицу порядка $|n| \times (|n|+1)$

$$F_n = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k \end{bmatrix}^T := \begin{bmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^k \end{bmatrix}.$$

При $n_j = 0$ матрица F_n не содержит блок-матрицу F^j. Если, например, мультииндекс $n = (n_1, 0, ..., 0)$, то матрица F_n состоит только из одного блока F^1 и является матрицей Грама: она состоит из элементов определителя (1.4), стоящих выше последней строки этого определителя.

Если к матрице F_n добавить в качестве последней строки строку

$$E(x) = \left(\varphi_0(x)\varphi_1(x)...\varphi_{|n|}(x)\right),$$

то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы имеет вид

$$det\begin{bmatrix} F_n \\ E(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)^1 & (\varphi_1, \varphi_0)^1 & \dots & (\varphi_{|n|}, \varphi_0)^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{n_1-1})^1 & (\varphi_1, \varphi_{n_1-1})^1 & \cdots & (\varphi_{|n|}, \varphi_{n_1-1})^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_0)^k & (\varphi_1, \varphi_0)^k & \cdots & (\varphi_{|n|}, \varphi_0)^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{n_k-1})^k & (\varphi_1, \varphi_{n_k-1})^k & \cdots & (\varphi_{|n|}, \varphi_{n_k-1})^k \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_{|n|}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

***Определение* 2.1.** *Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ будем называть слабо нормальным для μ, если ранг матрицы F_n максимальный, т.е. равен $|n|$.*

В примере 1.1 индекс $n = (2,1)$, а $\text{rang}F_n = 2$. Поэтому этот индекс не является слабо нормальным для рассматриваемых в этих примерах мер.

***Определение* 2.2.** *Систему мер $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$ будем называть слабо совершенной, если все ненулевые индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются слабо нормальными для μ.*

Сформулируем и докажем основной результат.

***Теорема* 2.1.** *Для того, чтобы для ненулевого индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и системы мер $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$ n-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ определялась условиями* (1.2) *однозначно, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был слабо нормальным для μ, т. е. $\text{rang}F_n = |n|$.*

Если $\text{rang}F_n = |n|$, то при определённом выборе нормирующего множителя n-ая полиортогональная функция представима в виде

$$\psi_n(x) = det\begin{bmatrix} F_n \\ E(x) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть функция

$$\psi_n(x) = b_0\varphi_0(x) + ... + b_{|n|}\varphi_{|n|}(x),$$

где $b_0^2 + ... + b_{|n|}^2 \neq 0$, удовлетворяет условиям (1.2). В силу того, что $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...\}$ линейно независима на каждом из отрезков Δ_j, а коэффициенты $b_0, ..., b_{|n|}$ все одновременно не равны нулю, функция $\psi_n(x)$ на каждом из отрезков Δ_j тождественно не равна нулю. Тогда условия (1.2) равносильны системе линейных уравнений для определения $b_0, ..., b_{|n|}$, которая в матричной форме примет вид:

$$F_n \cdot b^T = \theta^T, \quad (2.3)$$

где $b = (b_0, b_1, \dots, b_{|n|})$ – матрица-строка, а θ – матрица-строка порядка $1 \times (|n|+1)$, все элементы которой равны нулю. Поскольку система (2.3) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то, согласно теореме Кронекера – Капелли, она имеет ненулевое решение, а множество всех её линейно независимых решений состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\text{rang}F_n = |n|$. В этом случае все её ненулевые решения можно получить умножением фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Первая часть теоремы 2.1 доказана.

Пусть теперь $\text{rang}F_n = |n|$. Покажем, что в этом случае функция $\psi_n(x)$, определённая формулой (2.2), действительно является *n*-ой полиортогональной функцией. Разлагая определитель в (2.2) по элементам последней строки и, учитывая, что $\text{rang}F_n = |n|$, легко заметить, что справедливо представление

$$\psi_n(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + ... + \alpha_{|n|}\varphi_{|n|}(x) \text{ и } \alpha_0^2 + ... + \alpha_{|n|}^2 \neq 0.$$

Остаётся доказать, что эта функция $\psi_n(x)$ удовлетворяет условиям (1.2). Для этого, предположив, что $n_j \neq 0$, умножим последнюю строку определителя в (2.2) на $\varphi_p(x)$ и применим оператор интегрирования $J_j f := \int_{\Delta_j} f(x) d\mu_j(x)$ к последней строке полученного в результате домножения определителя. Таким образом приходим к равенству

$$\int_{\Delta_j} \psi_n(x)\varphi_p(x)d\mu_j(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0,\varphi_0)^j & (\varphi_1,\varphi_0)^j & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^j \\ (\varphi_0,\varphi_1)^j & (\varphi_1,\varphi_1)^j & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_1)^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_j-1})^j & (\varphi_1,\varphi_{n_j-1})^j & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_j-1})^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0,\varphi_p)^j & (\varphi_1,\varphi_p)^j & \cdots & (\varphi_{|n|},\varphi_p)^j \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

При $p = 0,1,...,n_j - 1$ определитель в (2.4) имеет две одинаковые строки. Поэтому он равен нулю. Следовательно условия (1.2) для функции $\psi_n(x)$ выполняются. □

3 Замечания и следствия

В первую очередь отметим, что если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ не является слабо нормальным для μ, то функция, определённая равенством (2.3), не являются n-ой полиортогональной функцией для μ. Так, для набора $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ из примера 1.1 при $n = (2,1)$

$$\psi_n(x) = ax^3 + bx^2 - \left(b + \frac{9a}{10}\right)x + \frac{a}{5} + \frac{b}{6},$$

однако, если эту функцию находить по формуле (2.3), то получим, что $\psi_n(x) \equiv 0$.

Из теоремы 2.1 легко получить

Следствие. *Полиортогональная функция* $\psi_n(x)$ *определяется однозначно для всех ненулевых мультииндексов* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *тогда и только тогда, когда система* μ *является слабо совершенной.*

Заметим, что компонента n_j мультииндекса $n = (n_1, \ldots, n_k)$ определяет насколько значима мера μ_j в определении полиортогональной функции: чем больше n_j, тем больше условий в (1.2) с участием меры μ_j. Таким образом, число n_j количественно характеризует вклад меры μ_j в построение n-ой полиортогональной функции $\psi_n(x)$. В частности, если, например, $n = (n_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то мы находимся в условиях теоремы Грама – Шмидта, и формула (2.2) в точности совпадает с классической формулой (1.4).

Рассмотрим мультиндексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$, имеющие заданный порядок m. Число таких мультииндексов равно C_{m+k-1}^m. Поэтому при $k > 1$ на множестве всех n-ых полиортогональных функций с фиксированным порядком индекса n нельзя ввести естественную нумерацию, как это имеет место, когда $k = 1$.

Подробнее рассмотрим случай, когда $\varphi = \{1, x, x^2, ...\}$. Тогда n-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ является n-ым полиортогональным многочленом $Q(x) = Q_{|n|}(x)$. Особый интерес представляет набор мер $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$, при которых система $\mathbf{f} = \{f_1(x), ..., f_k(x)\}$, состоящая из функций Маркова (1.3), является совершенной.

***Определение* 3.1.** *Пусть* $\varphi = \{1, x, x^2, ...\}$. *Индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *называют нормальным для набора* μ *(для системы марковских функций* $\mathbf{f}$*), если для любого n-го полиортогонального многочлена* $Q_{|n|}(x)$ *имеем* $\deg Q_{|n|} = |n|$.

Систему мер μ *(систему марковских функций* $\mathbf{f}$*) называют совершенной, если все ненулевые индексы* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *являются нормальными для* μ.

Отметим, что при $n \in \mathbb{Z}_+^1$ n-ый ортогональный многочлен $Q(x)$ является знаменателем n-ой подходящей дроби (или, что тоже самое, n-ой аппроксимации Паде) так называемой чебышёвской непрерывной дроби марковской функции. Точно также при $n \in \mathbb{Z}_+^k$ n-ый полиортогональный многочлен $Q_{|n|}(x)$ можно определить (см., например, [6]) как общий знаменатель совместных аппроксимаций Паде для системы $\mathbf{f}$. Для некоторых известных совершенных систем $\mathbf{f}$ полиортогональные многочлены хорошо изучены и нашли применение в различных областях алгебры, анализа, теоретической физики, в том числе, в рамках теории аппроксимаций Паде (см., например, [7]–[16]).

Доказано [6, с. 158], что n-ый полиортогональный многочлен $Q_{|n|}(x)$ имеет ровно n_j простых нулей внутри отрезка Δ_j, $j = 1,...,k$. Поэтому, если отрезки $\{\Delta_j\}_{j=1}^k$ попарно не перекрываются (не имеют общих внутренних точек), то система $\mathbf{f}$, состоящая из марковских функций (1.3), совершенна.

Приведём пример несовершенной системы марковских функций, носители мер которых перекрываются.

***Пример* 3.1.** Пусть $k = 2$, $n = (1,1)$,

$$d\mu_1(x) = dx, \ \Delta_1 = [0,1];$$

$$d\mu_2(x) = \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \ \Delta_2 = [0,1],$$

где dx – мера Лебега. Тогда при определённом выборе нормирующего множителя

$$Q_2(x) = \frac{1}{24}x - \frac{1}{48}.$$

Поскольку $\deg Q_2 = 1$, то индекс $n = (1,1)$ не является нормальным, а соответствующая система $\mathbf{f} = \{f_1(x), f_1(x)\}$ марковских функций не является совершенной.

Как уже было сказано, система функций $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x)\}$ линейно независима на отрезке ортогональности Δ тогда и только тогда, когда определитель Грама $G_n \neq 0$. Кратным аналогом определителя G_n является определитель

$$G_n^k = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)^1 & (\varphi_1, \varphi_0)^1 & \cdots & (\varphi_{|n|-1}, \varphi_0)^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_{n_1-1})^1 & (\varphi_1, \varphi_{n_1-1})^1 & \cdots & (\varphi_{|n|-1}, \varphi_{n_1-1})^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_0)^k & (\varphi_1, \varphi_0)^k & \cdots & (\varphi_{|n|-1}, \varphi_0)^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_{n_k-1})^k & (\varphi_1, \varphi_{n_k-1})^k & \cdots & (\varphi_{|n|-1}, \varphi_{n_k-1})^k \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $G_n^1 = G_n$. Можно показать, что если $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{|n|-1}(x)\}$ линейна зависима на каждом из отрезков Δ_j, то $G_n^k = 0$. Обратное утверждение не верно. В подтверждение приведем пример.

***Пример* 3.2.** Пусть $k=2$, $d\mu_1(x) = dx$, $\Delta_1 = [0,1]$; $d\mu_2(x) = dx$, $\Delta_2 = [-1,1]$, а $\varphi = \{1, x, x^2, ...\}$, где dx – мера Лебега. Тогда для мультиндексов n равных (1,2), (1,4), (1,6) определитель $G_n^2 = 0$.

В заключении сделаем ещё одно замечание. В [1] доказано, что индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным для системы марковских функций (1.3) тогда и только тогда, когда $G_n^k \neq 0$. Если $G_n^k \neq 0$, то $\operatorname{rang} F_n = |n|$. Поэтому любой нормальный индекс для системы $\mathbf{f}$ марковских функций (1.3) является слабо нормальным для $\mathbf{f}$, а любая совершенная система $\mathbf{f}$ является слабо совершенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Старовойтов*, *А.П.* О явном виде полиортогональных многочленов / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Известия вузов. Математика. – 2021. – № 4. – С. 80–89.

2. *Старовойтов*, *А.П.* Аналоги формулы Шмидта для полиортогональных многочленов первого типа / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 424–433.

3. *Натансон*, *И.П.* Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

4. *Schmidt*, *E.* Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener / E. Schmidt // Math. Ann. – 1907. – Vol. 63. – P. 433–476.

5. *Gram*, *I.P.* Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate / I.P. Gram // Journ. für Math. – 1883. – Vol. 94. – P. 41–73.

6. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.

7. *Beukers*, *F.* A note on the irrationality of $\zeta(1.2)$ and $\zeta(1.3)$ / F. Beukers // Bull. London Math. Soc. – 1979. – Vol. 11. – P. 268–272.

8. *Сорокин*, *В.Н.* Аппроксимации Эрмита – Паде для систем Никишина и иррациональность числа $\zeta(1.3)$ / В.Н. Сорокин // УМН. – 1994. – Т. 49, № 2. – С. 167–168.

9. *Калягин*, В.А. Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сб. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.

10. *Aptekarev*, *A.I.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.

11. *Daems*, *E.* Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions / E. Daems, A.B.J. Kuijlaars // J. Approx. Theory. – 2007. – Vol. 146, № 1. – P. 91–114.

12. *Kuijlaars*, *A.B.J.* Singular values of products of Ginibre random matrices, multiple orthogonal polynomials and hard edge scalings / A.B.J. Kuijlaars, L. Zhang // Comm. Math. Phys. – 2014. – Vol. 332, № 2. – P. 750–781.

13. *Mukhin*, *E.* Multiple orthogonal polynomials and a counterexample to the Gaudin Bethe Ansatz conjecture / E. Mukhin, A. Varchenko // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – Vol. 359, № 11. – P. 5383–5418.

14. *Суетин*, *С.П.* Полиномы Эрмита – Паде и квадратичные аппроксимации Шафера для многозначных аналитических функций / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2020. – Т. 75, № 4 (454). – С. 213–214.

15. *Икономов*, *Н.Р.* Алгоритм Висковатова для полиномов Эрмита – Паде ряда / Н.Р. Икономов, С.П. Суетин // Матем. сб. – 2021. – Т. 212, № 9. – С. 94–118.

16. *Сорокин*, *В.Н.* Аппроксимации Эрмита – Паде функции Вейля и её производной для дискретных мер / В.Н. Сорокин // Матем. сб. – 2020. – Т. 211, № 10. – С. 139–156.

Поступила в редакцию 17.12.2021.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_94

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ ФОРМАЦИОННЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

А.К. Фурс

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

FINITE GROUPS WITH A GIVEN SYSTEM OF FORMATION MAXIMAL SUBGROUPS

A.K. Furs

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе изучаются конечные группы, которые имеют три или четыре попарно несопряженные максимальные подгруппы, принадлежащие данной насыщенной формации. Получены новые признаки принадлежности конечной группы насыщенным формациям сверхразрешимого типа.

Ключевые слова: *конечная группа*, *максимальная подгруппа*, *ненормальная подгруппа*, *сверхразрешимая группа*, w-*сверхразрешимая группа*, *насыщенная формация.*

Для цитирования: *Фурс*, *А.К.* Конечные группы с заданной системой формационных максимальных подгрупп / А.К. Фурс // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 94–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_94

Abstract. We study finite groups that have three or four pairwise non-conjugate maximal subgroups belonging to a given saturated formation. New criteria for the belonging of a finite group to saturated formations of a supersoluble type are obtained.

Keywords: *finite group*, *maximal subgroup*, *non-normal subgroup*, *supersoluble group*, w-*supersoluble group*, *saturated formation*.

For citation: *Furs*, *A.K.* Finite groups with a given system of formation maximal subgroups / A.K. Furs // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 94–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_94 (in Russian)

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Для лучшего понимания и удобства чтения работы можно использовать монографии [1], [2]. Максимальные подгруппы занимают центральное место при изучении влияния свойств заданной системы подгрупп на строение группы. В [3] В.А. Белоноговым был получен замечательный результат: если группа G имеет 3 попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы, то G нильпотентна. Отметим, что Б. Хефлинг для данного натурального числа $n \geq 3$ привел пример [4, Example 2.4] несверхразрешимой группы, которая имеет n классов попарно несопряженных сверхразрешимых максимальных подгрупп. С другой стороны, А.Ф. Васильевым в [5] было доказано, что если разрешимая группа содержит три попарно несопряженные ненормальные сверхразрешимые максимальные подгруппы, то она сверхразрешима. В настоящей работе нами получено следующее обобщение этого результата.

***Теорема* А.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, состоящая из групп с нильпотентным коммутантом. Если разрешимая группа G имеет* 3 *попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы*, *принадлежащие $\mathfrak{F}$*, *то G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Из теоремы А можно извлечь новые, ранее неизвестные следствия для конкретных формаций. Приведем некоторые из них. Напомним [6], что подгруппа H группы G называется модулярной в G, если:

1) $\langle X, H \cap V\rangle = \langle X, H\rangle \cap V$ для всех $X \leq G$, $V \leq G$ таких, что $X \leq V$;

2) $\langle H, W \cap V\rangle = \langle H, W\rangle \cap V$ для всех $W \leq G$, $V \leq G$ таких, что $H \leq V$.

Подгруппа R группы G называется субмодулярной в G [7], если R можно соединить с G рядом подгрупп $R = R_0 \leq R_1 \leq \ldots \leq R_{t-1} \leq R_t = G$ таких, что R_{i-1} модулярна в R_i для $i = 1,\ldots,t$.

Сверхразрешимая группа называется сильно сверхразрешимой [8], если ее любая силовская подгруппа субмодулярна в ней.

Согласно [8] класс $s\mathfrak{U}$ всех сильно сверхразрешимых групп образует S-замкнутую насыщенную формацию.

***Следствие* А.1.** *Если в разрешимой группе G имеется по крайней мере* 3 *попарно* *несопряженные ненормальные сильно сверхразрешимые максимальные подгруппы, то сама G сильно сверхразрешима.*

***Следствие* A.2.** *Если в разрешимой группе G имеется по крайней мере 3 попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, то сама G имеет нильпотентный коммутант.*

Для формулировки следующей теоремы B приведем необходимые сведения из работы [9].

Подгруппа *R* группы *G* является $\mathbb{P}$-субнормальной в *G*, если либо $R = G$, либо R можно соединить с *G* цепью подгрупп

$$R = R_0 < R_1 < \cdots < R_{k-1} < R_k = G$$

такой, что $|R_{j+1} : R_j|$ – простое число для любого $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Группа *G* называется w-сверхразрешимой [9], если любая силовская подгруппа группы *G* является $\mathbb{P}$-субнормальной в *G*. Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ всех w-сверхразрешимых групп образует наследственную насыщенную формацию.

***Теорема* B**. *Если группа G имеет* 3 *попарно несопряженные* w-*сверхразрешимые максимальные подгруппы и ее обобщенный коммутант* $G^{\mathcal{A}}$ *нильпотентен, то группа G является* w-*сверхразрешимой.*

Исходным результатом заключительной теоремы C работы служит следующая теорема, полученная А.Ф. Васильевым в заметке [10]: Если группа *G* содержит 4 попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы, из которых 2 нормальны, а 2 ненормальны в *G*, то *G* сверхразрешима.

***Теорема* C.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, составленная из метанильпотентных групп. Если группа G имеет* 4 *попарно несопряженные максимальные подгруппы, принадлежащие* $\mathfrak{F}$, *из которых* 2 *нормальны, а* 2 *ненормальны в G, то G принадлежит* $\mathfrak{F}$.

***Следствие* C.1.** *Если группа G имеет* 4 *попарно несопряженные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, причем* 2 *из них нормальны, а* 2 *ненормальны в G, то G имеет нильпотентный коммутант.*

***Следствие* C.2.** *Если группа G имеет* 4 *попарно несопряженные метанильпотентные максимальные подгруппы, из которых* 2 *нормальны, а* 2 *ненормальны в G, то G метанильпотентна.*

1 Предварительные сведения

В основе работы лежат стандартные обозначения и определения, которые можно найти [1], [2]. Для удобства читателя мы приведем некоторые из них.

Символ $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если *G* – группа, то $\pi(G)$ обозначает множество всех простых делителей порядка *G*. Подгруппа *H* группы *G* называется π-подгруппой, если $\pi(H) \subseteq \pi$. $O_p(G)$ – наибольшая нормальная *p*-подгруппа *G*, $O_{p',p}(G)$ – наибольшая нормальная *p*-нильпотентная подгруппа *G* (*p*-нильпотентный радикал *G*) для $p \in \mathbb{P}$; $F(G)$ – наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа (подгруппа Фиттинга) группы *G*; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы *G*; $G = N \rtimes M$ – полупрямое произведение подгрупп *M* и *n* ($N \trianglelefteq G$ и $N \cap M = 1$); 1 – единичная группа (подгруппа).

Пусть для класса групп $\mathfrak{F}$ выполняется,

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ называется формацией. Из определения формации следует, что в любой группе *G* всегда найдется наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ такая, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *S*-замкнутым (наследственным), если из $L \le G \in \mathfrak{F}$ получаем $L \in \mathfrak{F}$.

Напомним [11, с. 751], что *A*-группой называется разрешимая группа с абелевыми силовскими подгруппами. Класс $\mathcal{A}$ всех *A*-групп образует наследственную формацию.

$\mathcal{A}$-корадикал $G^{\mathcal{A}}$ группы *G* называется также обобщенным коммутантом [9].

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп;

$\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ – класс всех групп, имеющих нильпотентный коммутант

$\mathfrak{N}^2$ – класс всех метанильпотентных групп.

$\mathfrak{G}$ – класс всех групп,

$\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех разрешимых π-групп для $\pi \subseteq \mathbb{P}$,

$\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_\pi$ для $\pi = \{p\}$;

$\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп;

$\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп.

Отображение $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется локальной функцией. С помощью *f* определяется класс групп $LF(f)$, который состоит из всех групп *G*, у которых $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для каждого главного фактора H/K и любого $p \in \pi(H/K)$. Если формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторой локальной функции *f*, то $\mathfrak{F}$ называется локальной.

Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$. Локальная функция f – внутренняя для $\mathfrak{F}$, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждого простого числа *p*; внутренняя функция *H* локальной формации $\mathfrak{F}$ называется кононической локальной функцией для $\mathfrak{F}$, если $H(p)=\mathfrak{N}_p H(p)$ для каждого простого p. Важное свойство кононической локальной функции H: для любой внутренней локальной функции f, задающей $\mathfrak{F}=LF(f)$ выполняется $f(p)\subseteq H(p)$ для каждого простого p.

***Лемма* 1.1** [1, А. Теорема 15.6]. *Пусть G – примитивная разрешимая группа и M – максимальная подгруппа с* $M_G=1$.

(1) *В G есть только одна минимальная нормальная подгруппа N,* $N=C_G(N)=F(G)$ *и* $G=N\rtimes M$.

(2) *Если* $p\in\pi(N)$, *то* $O_p(M)=1$.

(3) *Все дополнения к N в G сопряжены в G.*

***Лемма* 1.2** [2, лемма 4.5]. *Пусть f – локальная функция определяет локально формацию* $\mathfrak{F}$. *Тогда и только тогда группа* $G\in\mathfrak{F}$, *когда* $G/O_{p',p}(G)\in f(p)$ *для каждого* $p\in\pi(G)$.

***Лемма* 1.3** [9, Предложение 2.8]. *Любая* w*-сверхразрешимая группа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа* (*дисперсивна по Оре*).

***Лемма* 1.4** [9, Теорема 2.13]. *Пусть группа G –* w*-сверхразрешимая группа. Тогда*:

(1) *Каждая метанильпотентная подгруппа G сверхразрешима.*

(2) *Каждая бипримарная подгруппа G сверхразрешима.*

(3) *G имеет нильпотентный обобщенный коммутант.*

***Лемма* 1.5** [9, Теорема 2.10]. *Формация* $\mathrm{w}\mathfrak{U}=LF(f)$, *где f – локальная функция такая, что* $f(p)$ *совпадает с формацией всех разрешимых групп, имеющих абелевы силовские подгруппы, экспонента которых делит* $p-1$ *для каждого простого p.*

2 Доказательства теорем

Доказательство теоремы А. Пусть разрешимая группа G – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда в G имеются три попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3 такие, что $M_i\in\mathfrak{F}$ для каждого $i\in\{1,2,3\}$, но $G\notin\mathfrak{F}$. Ясно, что G ненильпотентна.

Из разрешимости G следует, что любая ее минимальная нормальная подгруппа является абелевой. Зафиксируем K одну из таких подгрупп. Покажем, что $G/K\in\mathfrak{F}$. Возможны два случая.

1. Пусть $G=KM_i$ для некоторого $i\in\{1,2,3\}$. Тогда $G/K=KM_i/K\simeq M_i/M_i\cap K\in\mathfrak{F}$.

2. Пусть $K\subseteq M_i$ для любого $i=1,2,3$. Заметим, что M_1/K, M_2/K, M_3/K – попарно несопряженные максимальные подгруппы факторгруппы G/K. Из $M_i\in\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – формация следует, что $M_i/K\in\mathfrak{F}$ для любого $i=1,2,3$. Учитывая $|G/K|\lhd|G|$ и выбор группы G, получаем $G\in\mathfrak{F}$.

Итак, для каждой минимальной нормальной подгруппы K группы G имеет место $G^{\mathfrak{F}}\subseteq K$. Это возможно только в одном случае, если K – единственная минимальная нормальная подгруппа G. Отсюда и насыщенности формации $\mathfrak{F}$ заключаем, что $\Phi(G)=1$. Пусть R – максимальная подгруппа G, дополняющая K в G. Нетрудно видеть, что $R_G=1$. Тогда G – примитивная группа. Ввиду (1) леммы 1.1 $G=K\rtimes R$, где K – минимальная нормальная подгруппа G, являющаяся p-подгруппой для некоторого простого числа p, при этом $K=C_G(K)=F(G)$ и $R\in\mathfrak{F}$ – максимальная подгруппа G с $R_G=1$.

По (3) леммы 1.1 все дополнения к K являются максимальными подгруппами в G и сопряжены в ней. Учитывая эти факты, будем полагать, что $K\subseteq M_i$, где $i=1,2$. Применяя тождество Дедекинда, имеем

$$M_i=M_i\cap K\rtimes R=K(M_i\cap R)$$

для каждого $i=1,2$. Из $K=C_G(K)$ и $K\subseteq M_i$ вытекает, что $O_{p',p}(M_i)$ является p-группой для любого $i=1,2$.

Вспомним, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Класс $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ ввиду [1, IV (b), пример 3.4] является насыщенной формацией и может быть задан локальной внутренней функцией g со значениями $g(p)=\mathfrak{A}$ для каждого простого p. Отсюда и $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ следует, что локальная формация $\mathfrak{F}$ определяется внутренней локальной функцией f, у которой $f(p)\subseteq\mathfrak{A}$. Рассмотрим локальную функцию H, имеющую значения $H(p)=\mathfrak{N}_p f(p)$ для каждого простого p. Тогда по [1, IV (a), предложение 3.8] получаем, что H – каноническое локальное задание формации $\mathfrak{F}$.

Учитывая, что $M_i=K\rtimes(M_i\cap R)\in\mathfrak{F}$ по лемме 1.2 получаем, что $M_i\cap R\in H(p)=\mathfrak{N}_p f(p)$ для $i=1,2$. Теперь из свойств формации $H(p)$ вытекает p-замкнутость подгруппы $M_i\cap R$ для $i=1,2$. Далее заметим, что $M_1\cap R$ и $M_2\cap R$ являются попарно несопряженными ненормальными максимальными подгруппами в R. Из разрешимости R и несопряженности $M_1\cap R$ и $M_2\cap R$ по теореме Оре получаем, что

$$R=(M_1\cap R)(M_2\cap R).$$

Пусть R_p – силовская p-подгруппа, $R_{p'}$ – холлова p'-подгруппа группы R. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $R_p \subseteq M_i \cap R,\ \ i=1,2.$ Тогда подгруппа R_p является нормальной подгруппой в двух несопряженных максимальных подгруппах группы *R*. Из $R=(M_1\cap R)(M_2\cap R)$ следует, что $O_p(R)=R_p.$ Ввиду леммы 1.1 получаем, что $O_p(R)=R_p=1.$ Следовательно, $M_i\cap R$ является p'-подгруппой $M_i\cap R\in f(p)\subseteq\mathfrak{A}$ для $i=1,2.$ В этом случае $R=(M_1\cap R)(M_2\cap R)$ является произведением двух ненормальных абелевых подгрупп *R*. Из [12] следует, что *R* нильпотентна. Но тогда максимальная подгруппа $M_i\cap R$ является нормальной в *R*. Получили противоречие с ненормальностью $M_i\cap R$ в *R*. Этот случай не возможен.

2. Предположим, что $R_{p'}\subseteq M_i,\ \ i=1,2.$ Из $M_i\cap R\in H(p)\subseteq\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$ следует, что $R_{p'}\in f(p)\subseteq\mathfrak{A}.$ Отсюда следует, что $M_i\cap R$ является *p*-замкнутой группой для $i=1,2.$ В этом случае по лемме 11.6 из [2] получаем, что

$$R_p=(M_1\cap R)_p(M_2\cap R)_p.$$

Из $R_{p'}\subseteq N_G(R_p)$ следует, что R_p нормальна в *R*. Из леммы 1.1 вытекает, что $R_p=1.$ Следовательно, $R=R_{p'}\in f(p)\subseteq H(p).$ Из $G/K\in\mathfrak{F}$ и $F_p(G)=K$ по лемме 1.2 получаем, что $G\in\mathfrak{F}.$

3. Пусть $R_p\subseteq M_1\cap R$ и $R_{p'}\subseteq M_2\cap R.$ Если R_p нормальна в *R*, то по лемме 1.1 получаем $R_p=1.$ Тогда $M_i\cap R$ является p'-подгруппой для $i=1,2.$ Далее, рассуждая как и в случае 1, получаем противоречие. Пусть R_p не является нормальной подгруппой в *R*. Пусть $(M_i\cap R)_R$ – ядро подгруппы $M_i\cap R$ в *R*, $i=1,2.$ Для краткости обозначим $A=(M_1\cap R)_R$ и $B=(M_2\cap R)_R.$ Предположим, что $A\neq 1$ и $B\neq 1.$ Возможны два случая.

а) Пусть $A\cap B=1.$ Рассмотрим $R/A.$ Так как максимальные подгруппы $M_1\cap R$ и $M_2\cap R$ не сопряжены в *R*, по теореме Оре получаем, что $(M_2\cap R)A=R.$ Откуда следует,

$$R/A=(M_2\cap R)A/A\simeq$$
$$\simeq M_2\cap R/M_2\cap R\cap A\in H(p).$$

Аналогично доказывается, что $R/B\in H(p).$ Отсюда и из $H(p)$ – формация следует, что $R/A\cap B\simeq R\in H(p).$ Рассуждая, как и выше получаем, $G\in\mathfrak{F}.$ Получили противоречие.

б) Будем считать, что $A\cap B\neq 1.$ Возьмем $S\subseteq A\cap B$ – минимальную нормальную подгруппу *R*. Из $O_p(R)=1$ следует, *S* – *q*-группа, где $q\neq p.$ Рассматривая нормальную подгруппу *K* как R/S-модуль над полем F_p из *p* элементов мы можем перейти к новой группе $T=[K]R/S.$ Учитывая выполнимость для *T* условий теоремы, из $|T|<|G|$ и выбора группы *G*, получаем, что $T=[K](R/S)\in\mathfrak{F}.$

Тогда по лемме 1.2 следует $T/F_p(T)\in H(p).$ Заметим, что $F_p(T)$ является *p*-группой. Ввиду $H(p)=\mathfrak{N}_pH(p)$ получаем, что $R/S\in H(p)=\mathfrak{N}_pf(p).$ Учитывая, что $f(p)\subseteq\mathfrak{A},$ имеем $R_pS/S\lhd R/S.$ Тогда $R_pS\lhd R.$ По лемме Фраттини $N_R(R_p)S=R.$ Вспомним, что $N_R(R_p)=M_1\cap R$ и $S\subseteq M_1\cap R.$ Получили противоречие.

Будем считать, что либо $A=1,$ либо $B=1.$ В этом случае *R* является примитивной группой. Тогда *R* имеет единственную минимальную подгруппу *L*, причем $L=C_R(L).$ Из $O_p(R)=1$ следует, что L – q-подгруппа, где $q\neq p.$ Предположим, что $A=1.$ Из несопряженности подгрупп $M_1\cap R$ и $M_2\cap R$ получаем, что $L\subseteq M_2\cap R.$ Ввиду $M_2\cap R\in H(p)=\mathfrak{N}_pf(p)$ следует, что $O_p(M_2\cap R)=1$ и $M_2\cap R$ – абелева группа. Из $L=C_R(L)$ следует, что $M_2\cap R=L.$ Получили противоречие с тем, что $M_2\cap R$ является ненормальной максимальной подгруппой в *R*. Предположим, что $B=1.$ Тогда из $R_p\subseteq M_1\cap R$ и $L=C_R(L)$ следует, что $R_p=1.$ Далее, рассуждая как и выше, получаем противоречие. □

Доказательство теоремы B. Пусть разрешимая группа *G* – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда в *G* имеются три попарно несопряженные максимальные подгруппы $M_1,\ M_2,\ M_3,$ принадлежащие $\mathrm{w}\mathfrak{U},$ но сама *G* не является w-сверхразрешимой группой.

Рассматривая минимальную нормальную подгруппу *L* группы *G*, мы, как и в теореме *A*, можем рассмотреть следующие два случая:

1) $G=LM_i$ для некоторого $i=1,2,3$ и

2) $L\subseteq M_i$ для любого $i=1,2,3.$

Рассуждая аналогично теореме *A*, получим $G/L\in\mathrm{w}\mathfrak{U}$ для любой минимальной нормальной подгруппы *L* группы *G*.

По лемме 1.5 формация $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ насыщена. Применяя стандартное рассуждение, получаем $\Phi(G)=1$ и L – единственная минимальная нормальная подгруппа *G*, причем *L* дополняется в *G* максимальной подгруппой *R* с $R_G=1.$ Это означает, что *G* – примитивная группа. По лемме 1.1 $G=L\rtimes R,$ где L – *p*-подгруппа для некоторого простого числа *p*, причем *L* – самоцентрализуемая подгруппа, совпадающая с подгруппой Фиттинга $F(G)$. Еще отметим, что $R \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Зафиксируем q – наибольший простой делитель среди всех делителей $|G|$. Из $M_i \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и леммы 1.3 следует, что подгруппа M_i является дисперсивной по Оре, $i = 1, 2, 3$. В частности, M_i будет q-замкнутой для любого $i = 1, 2, 3$. Заметим, $G = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1$. Тогда, согласно известному результату Кегеля, группа G также будет q-замкнутой. Учитывая, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, получаем $q = p$. Тогда из $G = L \rtimes R$ и леммы 1.1 вытекает, что L – силовская p-подгруппа, а R – p'-подгруппа в G.

Ранее было установлено, что все дополнения к L в G имеют единичное ядро. По теореме Оре они сопряжены в G. Поэтому дальше будем предполагать, что $L \subseteq M_i$ для $i = 1, 2$.

Применяя тождество Дедекинда, получим $M_i = M_i \cap [L]R = [L](M_i \cap R)$ для каждого $i = 1, 2$. Из $L = C_G(L)$ и $L \subseteq M_i$ следует, что $O_{p',p}(M_i)$ является p-группой для любого $i = 1, 2$.

По лемме 1.5 формация $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ может быть задана локальной функцией f такой, что $f(q) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(q-1))$ для каждого простого числа q.

Поэтому из w-сверхразрешимости M_i и леммы 1.2 вытекает, что $M_i \cap R \in f(p)$ для $i = 1, 2$. Из $O_p(M_i \cap R) = 1$ следует $(M_i \cap R)_q \in \mathfrak{A}_{(p-1)}$ для любой силовской q-подгруппы группы $M_i \cap R$ и $i = 1, 2$. Далее заметим, что $M_1 \cap R$, $M_2 \cap R$ являются несопряженными максимальными подгруппами в R. Следовательно, $R = (M_1 \cap R)(M_2 \cap R)$. По условию обобщенный коммутант $G^{\mathcal{A}}$ нильпотентен. Из $L = F(G)$ и минимальности L следует, что $G^{\mathcal{A}} = L$. Отсюда получаем, что все силовские подгруппы R являются абелевыми. Учитывая этот факт и то, что $R = (M_1 \cap R)(M_2 \cap R)$, и любая силовская q-подгруппа R по лемме 11.6 из [2] может факторизована подходящими силовская q-подгруппами из $M_1 \cap R$ и $M_2 \cap R$ для любого $q \in \pi(G)$ получаем, что $R \in f(p)$. Из $G/L \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $G/O_{p',p}(G) \simeq R \in f(p)$ по лемме 1.2 выводим $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Получили заключительное противоречие. □

Доказательство теоремы C. Пусть G – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда в G имеются четыре попарно несопряженные максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3, M_4, принадлежащие $\mathfrak{F}$. Для определенности будем считать, что M_1 и M_2 нормальны, а M_3 и M_4 ненормальны в группе G. При этом сама группа G формации $\mathfrak{F}$ не принадлежит.

Из M_1 и M_2 нормальны в G следует, что $G = M_1M_2$. Хорошо известно, что класс $\mathfrak{N}^2$ является формацией Фиттинга. Из метанильпотентности нормальных подгрупп M_1 и M_2 вытекает метанильпотентность, значит, разрешимость группы G.

Зафиксируем какую-нибудь минимальную нормальную подгруппа L группы G. Пусть $L \subseteq M_i$ для каждого $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда все условия нашей теоремы для G/L реализуются. Поэтому из выбора группы G следует $G/L \in \mathfrak{F}$. Случай $G = LM_i$ для некоторого $i = 1, 2, 3, 4$ разбирается аналогично, как в теоремах A и B. В итоге мы получаем следующие свойства минимального контрпримера G:

а) $L = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа G, L – p-группа для некоторого простого p и $L = C_G(L) = F(G)$.

б) $\Phi(G) = 1$ и $G = L \rtimes M$, причем $M \in \mathfrak{F}$.

Из L – единственная минимальная нормальная подгруппа G, следует, что $L \subseteq M_i$ для $i = 1, 2$. Учитывая, что все максимальные подгруппы G, не содержащие L, сопряжены в G, то можно считать, что $L \subseteq M_3$.

Применяя тождество Дедекинда, имеем

$$M_i = M_i \cap LM = L(M_i \cap M)$$

для каждого $i = 1,2,3$. Из $L = C_G(L)$ и $L \subseteq M_i$ получаем, что $O_{p',p}(M_i)$ – p-группа для каждого $i = 1, 2, 3$.

Вспомним, что формация $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$. В этом случае $\mathfrak{F}$ имеет каноническое локальное задание функцией H со значениями $H(q) = \mathfrak{N}_q f(q)$, где $f(p) \subseteq \mathfrak{N}$ для любого простого q. Здесь f – некоторая внутренняя локальная функция, определяющая локально $\mathfrak{F}$.

Поэтому из $M_i = [L](M_i \cap M) \in \mathfrak{F}$ и леммы 1.2 вытекает, что $M_i \cap M \in \mathfrak{N}_p f(p)$ для $i = 1,2,3$. Отсюда и из строения формации $H(p)$ следует, что $M_i \cap M$ является p-замкнутой группой для $i = 1, 2, 3$. Далее заметим, что $M_1 \cap M, M_2 \cap M$, $M_3 \cap M$ – попарно несопряженные максимальные подгруппы в M. Следовательно,

$$R = (M_1 \cap R)(M_2 \cap R).$$

Учитывая это и фиттинговость формации всех p-замкнутых групп получаем p-замкнутость M. По (2) леммы 1.1 получаем, что $O_p(M) = 1$.

Следовательно, $O_p(M_i) \cap M = 1$. Это означает, что $M_i \cap M \in f(p)$ для каждого $i = 1,2,3$.

Из M_i нормальна в *G* вытекает $M_i \cap M$ нормальна в *M* для $i = 1,2$. Из

$$M = (M_1 \cap R)(M_2 \cap M)$$

и $M_i \cap M \in \mathfrak{N}$ $(i = 1,2)$ получаем $M \in \mathfrak{N}$. Ввиду того, что M_3 – ненормальная максимальная подгруппа в G и $N \subseteq M_3$, нетрудно видеть, что $M_3 \cap M$ – ненормальная максимальная подгруппа в *M*. Учитывая нильпотентность *M* и $M_3 \cap M \neq 1$, приходим к окончательному противоречию с тем, что $M_3 \cap M$ является ненормальной максимальной подгруппой в *M*. □

3 Заключительные замечания

Приведем примеры показывающие существенность условий в доказанных выше теоремах. В теореме A условие разрешимости нельзя отбросить. Например, в знакопеременной группе A_5 степени 5 имеется три попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, но коммутант A_5 не является нильпотентным. Отметим, что в теореме A число рассматриваемых попарно несопряженных максимальных подгрупп не может быть уменьшено. Например, в симметрической группе S_4 степени 4 имеется две несопряженные ненормальные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант (силовская 2-подгруппа и максимальная подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3). Но сама группа S_4 имеет ненильпотентный коммутант, изоморфный знакопеременной группе A_4.

В теореме *B* требование нильпотентности обобщенного коммутанта является существенным, на что указывает следующий пример.

***Пример* 3.1.** Пусть *P* – экстраспециальная группа порядка 3^3. Нетрудно проверить, *P* имеет по крайней мере три абелевы нормаль-ные максимальные подгруппы P_i порядка 3^2, но сама группа *P* неабелева. Пусть $F = F_{19}$ – поле из 19 элементов. Согласно [1, теорема B, 10.7], P имеет точный неприводимый *FP*-модуль *L*. Пусть $G = [L]P$ – полупрямое произведение *P* с *L*. Тогда в $G = [L]P$ имеется по крайней мере три попарно несопряженные максимальные подгруппы $M_i = [L]P_i$. По теореме Машке *L* – вполне приводимый FP_i-модуль для каждого *i*, т. е. $L = L_1 \times \ldots \times L_k$, где L_j – неприводимый FP_i-модуль для любого $j = 1,\ldots k$. Из 3^2 делит 19-1 следует, что поле *F* содержит примитивный корень степени 3^2. Тогда по [1, теорема B, 9.2] неприводимый FP_i-модуль L_j имеет размерность 1. Это означает, что подгруппа $M_i = [L]P_i$ сверхразрешима, а значит, w-сверхразрешима для каждого *i*. Таким образом, в группе *G* имеется по крайней мере три попарно несопряженные w-сверхразрешимые максимальные подгруппы. С другой стороны, из $L = F(G)$ и неабелевости *P* следует, что обобщенный коммутант $G^{\mathcal{A}}$ группы $G = [L]P$ не является нильпотентным, а сама *G* не w-сверхразрешима.

Пример 3.1 также указывает на существенность требования наличия двух несопряженных ненормальных максимальных подгрупп, принадлежащих формации $\mathfrak{F}$ в теореме C. Рассматривая случай $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, нетрудно проверить, что в группе $G = [L]P$ из примера 3.1 имеется по крайней мере четыре попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы, из которых три нормальны, одна ненормальна в *G*, но сама группа *G* не является сверхразрешимой.

***Пример* 3.2.** Пусть $H \simeq S_3$ – симметрическая группа степени 3 и *V* – точный неприводимый *FH*-модуль над полем $F = F_7$. Существование такого модуля гарантирует [1, B, теорема 10.6]. Возьмем группу $G = [V]H$. Из свойств модуля *V* вытекает, что $V = F(G)$. Отсюда и неабелевости *H* следует, что группа *G* несверхразрешима. Рассмотрим подгруппы $R_1 = VG_2$, $R_2 = VG_3$ и $R_3 = H$, где G_2 и G_3 – силовские 2,3-подгруппы группы G соответственно. Непосредственной проверкой устанавливаем, что R_1, R_2 и R_3 являются попарно несопряженными сверхразрешимыми максимальными подгруппами группы *G*, причем R_1, R_3 ненормальны, а R_2 нормальна в *G*. Поэтому требование существования двух нормальных сверхразрешимых максимальных подгрупп в теореме C является существенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk*, *K*. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

3. *Белоногов*, *В.А*. Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп / В.А. Белоногов // Докл. Акад. наук СССР. – 1965. – Т. 161, № 6. – С. 1255–1256.

4. *Höfling*, *B*. On the number of conjugacy classes of maximal subgroups in a finite soluble group / B. Höfling // Arch. Math. – 1999. – Vol. 72. – P. 1–8.

5. *Васильев*, А.Ф. О некоторых свойствах локальных формаций / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 4–9.

6. *Schmidt*, *R*. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.

7. *Zimmermann*, *I*. Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

8. *Васильев*, *В.А*. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.

9. *Васильев*, *А.Ф*. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

10. *Васильев*, *А.Ф*. О конечных группах с заданной системой сверхразрешимых максимальных подгрупп / А.Ф. Васильев // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 154–155.

11. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 794 s.

12. *Vasil'ev*, *A.F*. On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups / A.F. Vasil'ev // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – Vol. 85, № 1. – P. 305–311.

Поступила в редакцию 19.10.2021.

Информация об авторах

Фурс Андрей Константинович – аспирант

Проблемы физики, математики и техники, № 1 (50), 2022 **ISSN 2077-8708**

ИНФОРМАТИКА

УДК 51-73; 531.3; 796.01 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_101

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЫШЕЧНОЙ СИСТЕМЫ СПОРТСМЕНА

А.Е. Покатилов

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилев*

THE STUDY OF THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF AN ATHLETE'S MUSCULAR SYSTEM

A.E. Pokatilov

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В работе рассмотрена новая, выявленная при биомеханическом анализе целенаправленного движения спортсмена, закономерность, связывающая управляющий момент мышечной системы со скоростью его изменения. Показано, что в разных фазах спортивного упражнения эти динамические характеристики достигают экстремальных значений. При этом наблюдаемые экстремумы моментов и их динамических скоростей всегда идут парами, обычно имея временной интервал между собой в доли секунды, редко больше. Анализ характера изменений значений управляющих моментов и их динамических скоростей на экспериментальном и теоретическом уровнях показал: во-первых, наличие такой закономерности в разных видах спорта и в разных упражнениях, например, в спортивной гимнастике и в тяжелой атлетике; во-вторых, представил сложный характер влияния различных силовых факторов на смещение пиков значений управляющего момента и скорости его изменения как сумму таких влияний на общий результат.

Ключевые слова: *биомеханический анализ*, *динамика*, *динамическая скорость*, *локомоции*, *управляющий момент.*

Для цитирования: *Покатилов*, *А.Е.* Исследование динамических характеристик мышечной системы спортсмена / А.Е. Покатилов // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 101–110. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_101

Abstract. The paper considers a new pattern, revealed during the biomechanical analysis of the purposeful movement of an athlete, linking the control moment of the muscular system with the speed of its change. It is shown that in different phases of a sports exercise, these dynamic characteristics reach extreme values. At the same time, the observed extremes of moments and their dynamic velocities always go in pairs, usually having a time interval between them in fractions of a second, rarely more. The analysis of the nature of changes in the values of control moments and their dynamic speeds at the experimental and theoretical levels showed: firstly, the presence of such a pattern in different sports, and in different exercises, for example, in gymnastics and weightlifting; secondly, the analysis presented the complex nature of the influence of various power factors on the displacement of the peaks of the values of the control moment and the speed of its change, as the sum of such influences on the overall result.

Keywords: *biomechanical analysis*, *dynamics*, *dynamic velocity*, *locomotion*, *control moment.*

For citation: *Pokatilov*, *A.E.* The study of the dynamic characteristics of an athlete’s muscular system / A.E. Pokatilov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 101–110. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_101 (in Russian)

Введение

Большую роль играют такие физические качества спортсмена, как сила, скорость и их совместное проявление – мощность [1], [2]. Высокий уровень скоростно-силовых возможностей обеспечивает достижение высоких результатов во многих видах спорта. Для оценки этих качеств спортсмена существуют как специальные тесты, так и специальные силоизмерительные устройства. Используемые методы для такой оценки скоростно-силовых качеств мышечной системы спортсмена основаны на применении изометрического, изотонического, изокинетического и эксцентрического режимов работы. Общим для всех этих методов и применяемых устройств является специальный характер работы мышц спортсмена и направленность на достижение определенной и достаточно узкой цели. Другими словами, есть спортивные упражнения и есть отдельно тесты и оборудование для развития и оценки этих специальных качеств мышечной системы вне соревновательной программы.

В литературе, например, на примере скоростно-силовой подготовки бегунов-спринтеров, описана структура скоростно-силовых качеств спортсмена:

1. Абсолютная сила.

2. Стартовая сила – способность мышц к быстрому развитию рабочего усилия в начальный момент напряжения.

3. Ускоряющая сила – способность мышц к быстрому наращиванию рабочего усилия в условиях начавшегося их сокращения.

4. Абсолютная быстрота сокращения мышц.

Отмечено, что в случае проявления скоростно-силовых качеств ведущее место занимает градиент силы (прирост силы в единицу времени). Скорость может быть общей и специальной.

Скорость движений, частота и скорость реакции зависят от уровня спортивной техники.

При этом в настоящее время, как в научной литературе, так и на практике, уже существует огромный массив экспериментальных и расчетных данных по кинематике и динамике движения спортсменов, всесторонне описывающих технику различных спортивных упражнений [3]–[5] во всей ее полноте, и не несущих специального и изолированного характера. Но при этом, полностью характеризуя спортивные упражнения, они не используются для решения ряда задач по биомеханике движения в связи с отсутствием соответствующих методик, теорий и осознания проблем и задач биомеханического анализа движения спортсмена. Это же касается и оценки скоростно-силовых свойств его мышечной системы.

Проблема еще состоит и в том, что при биомеханическом анализе не всегда удается тем или иным способом определить именно управляющие силы мышц и их локализацию. Достаточно часто при таком анализе на динамическом уровне удается рассчитать не силы, а моменты управляющих сил мышечной системы. Это требует как соответствующих механико-математических моделей, так и алгоритмов их расчета.

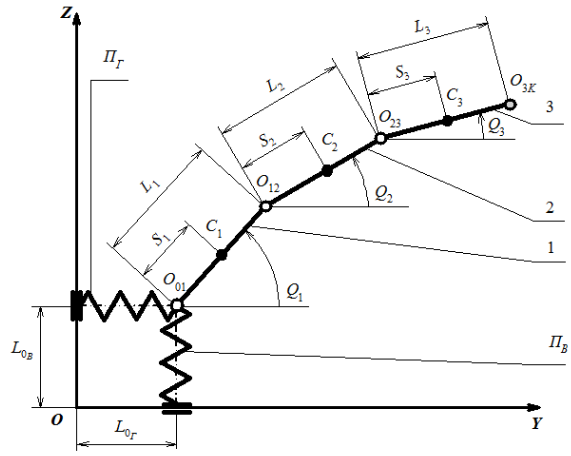
1 Моделирование структуры биомеханической системы и организация натурного и вычислительного эксперимента

Принято биомеханическую систему (БМС) для целей биомеханического анализа моделировать с помощью кинематической цепи. При этом возможны разные варианты такой цепи, зависящие от целей исследования. Цепь может быть плоской или пространственной, она может быть простой или сложной, а также возможно в состав кинематической цепи включать пружины, моделирующие упругие свойства спортивного снаряда.

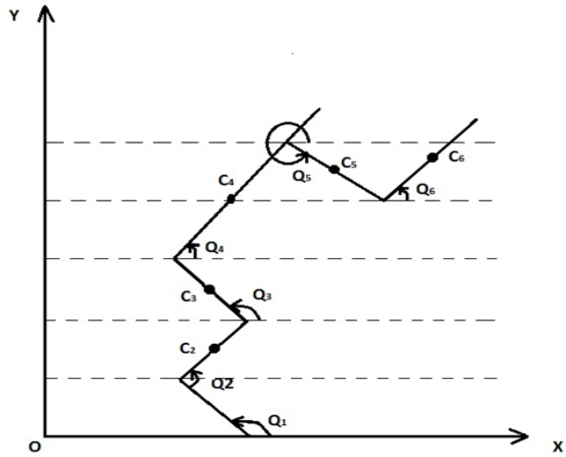
На рисунке 1.1, *а*) представлена модель биомеханической системы, применяемой при биомеханическом анализе большого оборота назад на перекладине с учетом взаимодействия спортсмена со спортивным снарядом. Применяемая модель является 3-х звенником.

На рисунке 1.1 *б*) показана кинематическая цепь, являющаяся 6-ти звенником и моделирующая спортсмена в тяжелой атлетике при выполнении рывка штанги [6].

Получаемые на основании использования кинематических моделей БМС по рисункам 2.1, *а*) и *б*) уравнения сворачивают по одноименным параметрам, получая систему уравнений в рекуррентной, т. е. компактной форме для БМС с произвольным числом степеней свободы.



а) 3-х звенная модель БМС с упругой опорой



б) 6-ти звенная модель БМС

Рисунок 1.1 – Кинематические модели биомеханической системы

На рисунке 1.2 показаны фрагменты видеосъемки натурного эксперимента в тяжелой атлетике при выполнении рывка штанги.

Рисунок 1.2 – Рывок штанги (фрагмент видеосъемки)

2 Динамические уравнения движения спортсмена и его динамическая скорость по управляющему моменту

На основании схемы по рисунку 1.1, *а*) уравнения для управляющих моментов в общем виде с помощью принципа Даламбера можно записать как

$$M_{i,i-1} = g\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\cos Q_j - \ddot{L}_{0_Г}\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\sin Q_j + $$
$$+\ddot{L}_{0_В}\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\cos Q_j + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}\ddot{Q}_k\cos\left(Q_k - Q_j\right) -$$
$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}\dot{Q}_k^2\sin\left(Q_k - Q_j\right). \qquad (2.1)$$

Здесь j, k – буквенные индексы. Коэффициенты A_{jk} и C_{ij} отражают геометрию масс тела спортсмена. А параметры $\ddot{L}_{0_Г}$, $\ddot{L}_{0_В}$, Q_j, $\dot{Q}_k$, $\ddot{Q}_k$ – это обобщенные координаты БМС и их производные.

Перепишем управляющий момент мышечных сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$ через сумму моментов, зависящих от упругих свойств опоры (спортивного снаряда) и непосредственно биомеханической системы:

$$M_{i,i-1} = M_{i,i-1}^{ОП} + M_{i,i-1}^{БМС}. \qquad (2.2)$$

Здесь управляющий момент выделенной опоры $M_{i,i-1}^{ОП}$ равен

$$M_{i,i-1}^{ОП} = -\ddot{L}_{0_Г}\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\sin Q_j + \ddot{L}_{0_В}\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\cos Q_j, \qquad (2.3)$$

а управляющий момент выделенной БМС $M_{i,i-1}^{БМС}$ запишем как

$$M_{i,i-1}^{БМС} = g\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\cos Q_j +$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}\ddot{Q}_k\cos\left(Q_k - Q_j\right) -$$
$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}\dot{Q}_k^2\sin\left(Q_k - Q_j\right). \qquad (2.4)$$

Если опора не влияет на локомоции БМС, то динамические уравнения движения принимают вид момента по выражения (2.4) для выделенной БМС

$$M_{i,i-1} = g\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\cos Q_j +$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}\ddot{Q}_k\cos\left(Q_k - Q_j\right) -$$
$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}\dot{Q}_k^2\sin\left(Q_k - Q_j\right). \qquad (2.5)$$

Система уравнений (2.5) подходит для биомеханического анализа локомоций при выполнении рывка штанги в тяжелой атлетике.

Для исследования скоростно-силовых качеств спортсмена введем понятие динамической скорости по управляющему моменту [7]. В общем виде запишем ее как первую производную управляющего момента по времени

$$V_{M_{i-1,i}} = \frac{dM_{i,i-1}}{dt} \text{ (Н·м/с).} \qquad (2.6)$$

Здесь размерность динамической скорости по уравнению (2.6) имеет размерность мощности, но ею не является.

3 Результаты вычислительного эксперимента

Отметим, что исследуемая закономерность изменения динамической скорости по управляющему моменту обнаружена и по результатам проведения видеосъемки упражнений и вычислительного эксперимента.

Спортивная гимнастика.

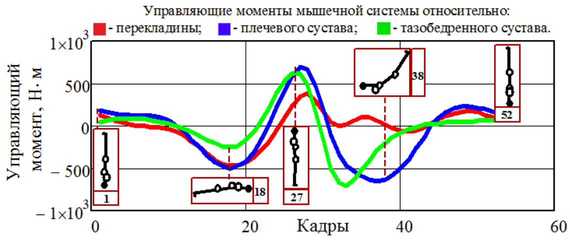


Рисунок 3.1 – Управляющие моменты БМС

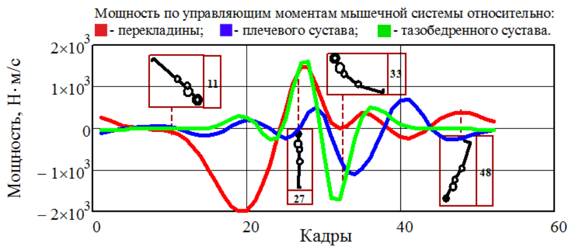


Рисунок 3.2 – Мощность управляющих моментов мышечной системы

Рисунок 3.3 – Динамическая скорость по управляющему моменту

На рисунках 3.1–3.3 показаны положения тела спортсмена и номера позиций по кинетограмме большого оборота назад на перекладине, соответствующие экстремальным значениям исследуемых характеристик движения.

Сравнительный анализ рисунков 3.1–3.3 показывает: во-первых, различие в значениях мощности и динамической скорости; во-вторых, несовпадение и по фазам: локальные экстремумы динамической скорости не совпадают ни с графиками мощности по рисунку 3.2, ни с графиками управляющего момента 3.3.

4 Теоретическое исследование динамической скорости по управляющему моменту мышечной системы

Продифференцировав уравнение (2.1) согласно выражению (2.6), получим

$$\begin{aligned} V_{M_{i,i-1}} &= \frac{dM_{i,i-1}}{dt} = -\dddot{L}_{0_Г} \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \sin Q_j - \\ &-\ddot{L}_{0_Г} \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \dot{Q}_j \cos Q_j + \dddot{L}_{0_В} \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \cos Q_j - \\ &-\ddot{L}_{0_В} \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \dot{Q}_j \sin Q_j - g \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \dot{Q}_j \sin Q_j + \\ &+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \dddot{Q}_k \cos\left(Q_k - Q_j\right) - \\ &-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \ddot{Q}_k \left(\dot{Q}_k - \dot{Q}_j\right) \sin\left(Q_k - Q_j\right) - \\ &-2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \dot{Q}_k \ddot{Q}_k \sin\left(Q_k - Q_j\right) - \\ &-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \dot{Q}_k^2 \left(\dot{Q}_k - \dot{Q}_j\right) \cos\left(Q_k - Q_j\right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) имеет 9 слагаемых, отражающих влияние того или иного силового фактора на динамическую скорость управляющего момента. С целью удобства, выражение (4.1) сгруппировано по примеру уравнения (2.2) таким образом, чтобы сразу отделить часть, зависящую от деформации опоры, и часть, зависящую от движения только БМС.

Введем следующие обозначения слагаемых формулы (4.1)

$$V^{(1)}_{M_{i,i-1}} = -\dddot{L}_{0_Г} \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \sin Q_j, \quad (4.2)$$

$$V^{(2)}_{M_{i,i-1}} = -\ddot{L}_{0_Г} \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \dot{Q}_j \cos Q_j, \quad (4.3)$$

$$V^{(3)}_{M_{i,i-1}} = \dddot{L}_{0_В} \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \cos Q_j, \quad (4.4)$$

$$V^{(4)}_{M_{i,i-1}} = -\ddot{L}_{0_В} \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \dot{Q}_j \sin Q_j, \quad (4.5)$$

$$V^{(5)}_{M_{i,i-1}} = -g \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \dot{Q}_j \sin Q_j, \quad (4.6)$$

$$V^{(6)}_{M_{i,i-1}} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \dddot{Q}_k \cos\left(Q_k - Q_j\right), \quad (4.7)$$

$$V^{(7)}_{M_{i,i-1}} = -\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \ddot{Q}_k \left(\dot{Q}_k - \dot{Q}_j\right) \sin\left(Q_k - Q_j\right), \quad (4.8)$$

$$V^{(8)}_{M_{i,i-1}} = -2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \dot{Q}_k \ddot{Q}_k \sin\left(Q_k - Q_j\right), \quad (4.9)$$

$$V^{(9)}_{M_{i,i-1}} = -\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \dot{Q}_k^2 \left(\dot{Q}_k - \dot{Q}_j\right) \cos\left(Q_k - Q_j\right). \quad (4.10)$$

Ввиду уравнений (4.2)–(4.10) динамическая скорость принимает вид

$$V_{M_{i,i-1}} = \sum_{s=1}^{9} V^{(s)}_{M_{i,i-1}}. \quad (4.11)$$

Здесь выражения (4.2)–(4.5) отражают влияние динамической деформации спортивного снаряда на динамическую скорость, а выражения (4.6)–(4.10) – влияние непосредственно самой БМС. С учетом этого уравнение (4.11) можно разбить на две части: на часть, зависящую от деформации опоры (спортивного снаряда), и часть, зависящую только от движения спортсмена. Имеем

$$V_{M_{i,i-1}} = \sum_{s=1}^{4} V^{(s)}_{M_{i,i-1}} + \sum_{s=5}^{9} V^{(s)}_{M_{i,i-1}} = V^{ОП}_{M_{i,i-1}} + V^{БМС}_{M_{i,i-1}}. \quad (4.12)$$

Отметим, что выражение (4.12) подходит для упражнений, выполняемых на упругой опоре, например, для упражнений на перекладине в спортивной гимнастике. Вторая часть выражения (4.12) $V^{БМС}_{M_{i,i-1}}$, зависящая от движения только спортсмена, подходит для исследования рывка штанги в тяжелой атлетике:

$$\begin{aligned} V_{M_{i,i-1}} &= -g \sum_{j=i}^{N} C_{ij} \dot{Q}_j \sin Q_j + \\ &+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \dddot{Q}_k \cos\left(Q_k - Q_j\right) - \\ &-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \ddot{Q}_k \left(\dot{Q}_k - \dot{Q}_j\right) \sin\left(Q_k - Q_j\right) - \\ &-2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \dot{Q}_k \ddot{Q}_k \sin\left(Q_k - Q_j\right) - \\ &-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk} \dot{Q}_k^2 \left(\dot{Q}_k - \dot{Q}_j\right) \cos\left(Q_k - Q_j\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Тогда полная динамическая скорость по управляющему моменту через формулы (4.6)–(4.10) принимает вид

$$V_{M_{i,i-1}} = \sum_{s=5}^{9} V^{(s)}_{M_{i,i-1}}. \quad (4.14)$$

Здесь суммирование начинается со скорости $V^{(5)}_{M_{i,i-1}}$, отражающей действие сил тяжести.

5 Анализ и обсуждение закономерности изменения динамической скорости по управляющему моменту

Выполним биомеханический анализ динамики целенаправленного движения спортсмена по результатам натурного и вычислительного экспериментов для упражнений спортивной гимнастики и тяжелой атлетики.

Общим замечанием будет упоминание того факта, что с точки зрения математики сдвиг локальных экстремумов динамической скорости по управляющему моменту и самого момента обусловлен как наличием функций sin и cos в уравнении моментов (2.1), так и их взаимном преобразовании при дифференцировании по формулам (4.2)–(4.10), так как синусоида и косинусоида сдвинуты по отношению друг к другу вдоль оси абсцисс. Но это не раскрывает биомеханических причин такой взаимосвязи моментов и их динамических скоростей: математика отражает лишь функциональную связь, но не показывает механизмы зависимости, т. е. каким образом и какими ресурсами мышечная система спортсмена обеспечивает это явление, и какие силовые факторы в первую очередь влияют на смещение локального экстремума скорости относительно экстремума момента, то есть их несовпадение во времени.

На основании формул (2.1) и (4.2)–(4.10) запишем в таблице 5.1 в упрощенной форме уравнения для управляющих моментов и их производных по времени, то есть динамических скоростей. Так как за смещение локальных экстремумов отвечают тригонометрические функции, а множители при них лишь изменяют значение функций по ординате, то несущественные параметры в формулах обозначим через коэффициенты A_i и B_j. Смещение локальных экстремумов (отставание или опережение функций моментов и их скоростей) происходит в случае изменение $\cos Q_j$ на $\sin Q_j$ или наоборот. Таким образом, сравнение уравнений и скоростей по таблице 5.1 показывает, что в случае большого оборота назад на перекладине сдвиг функций происходит для пяти слагаемых формулы (4.1), а для четырех слагаемых этой же формулы таких изменений нет.

Для упражнений в тяжелой атлетике деформация опоры не учитывается, то есть п. 1 и п. 2 отбрасывается, а исследуются только п. 3–п. 5. В этом случае 2 члена формулы (4.13) не смещаются, а 3 имеют такое смещение из-за изменения тригонометрических функций. Эти варианты представлены в таблице 5.2.

Отметим важный момент: исследование перехода отдельных тригонометрических функций не дает полной картины явления смещения моментов и их изменений во времени. Предварительный анализ формул из системы уравнений (4.2)–(4.10) показывает, что даже в тех выражениях, где тригонометрические формулы не изменяются, сами выражения являются суммами функций $\sin Q_j$ или $\cos Q_j$, что тоже должно давать смещение локальных экстремумов.

Таблица 5.1 – Смещение локальных экстремумов моментов и скоростей относительно друг друга с учетом деформации опоры

№	Силовые факторы	Уравнения моментов	Уравнения скоростей	Сдвиг единичных функций
1	Момент сил инерции от горизонтальной деформации перекладины	$M_1 = -A_1 \sin Q_j$	$V_1 = -B_1 \sin Q_j$	Нет
			$V_2 = -B_2 \cos Q_j$	Есть
2	Момент сил инерции от вертикальной деформации перекладины	$M_2 = A_2 \cos Q_j$	$V_3 = B_3 \cos Q_j$	Нет
			$V_4 = -B_4 \sin Q_j$	Есть
3	Момент от сил тяжести звеньев БМС	$M_3 = A_3 \cos Q_j$	$V_5 = -B_5 \sin Q_j$	Есть
4	Момент от нормальных сил инерции звеньев БМС	$M_4 = A_4 \cos(Q_k - Q_j)$	$V_6 = B_6 \cos(Q_k - Q_j)$	Нет
			$V_7 = -B_7 \sin(Q_k - Q_j)$	Есть
5	Момент от касательных сил инерции звеньев БМС	$M_5 = -A_5 \sin(Q_k - Q_j)$	$V_8 = -B_8 \sin(Q_k - Q_j)$	Нет
			$V_9 = -B_9 \cos(Q_k - Q_j)$	Есть

Таблица 5.2 – Смещение локальных экстремумов моментов и скоростей относительно друг друга в условиях жесткой опоры

№	Силовые факторы	Уравнения моментов	Уравнения скоростей	Сдвиг функций
1	Момент от сил тяжести звеньев БМС	$M_6 = A_6 \cos Q_j$	$V_{10} = -B_{10} \sin Q_j$	Есть
2	Момент от нормальных сил инерции звеньев БМС	$M_7 = A_7 \cos(Q_k - Q_j)$	$V_{11} = B_{11} \cos(Q_k - Q_j)$	Нет
			$V_{12} = -B_{12} \sin(Q_k - Q_j)$	Есть
3	Момент от касательных сил инерции звеньев БМС	$M_8 = -A_8 \sin(Q_k - Q_j)$	$V_{13} = -B_{14} \sin(Q_k - Q_j)$	Нет
			$V_{14} = -B_{14} \cos(Q_k - Q_j)$	Есть

Причины несовпадения во времени пика динамической скорости и пика мышечных усилий необходимо искать в биомеханическом анализе целенаправленного движения, выполняемого на основании как экспериментального материала, включая вычислительный эксперимент, так и на основании теоретических знаний из спортивной педагогики и физиологии.

Спортивная гимнастика. Проанализируем результаты вычислительного эксперимента для большого оборота назад на перекладине, исходя из структур механико-математических моделей по уравнениям (2.1) для управляющего момента [9]–[11] и из уравнений (4.2)–(4.10) для динамических скоростей по этому же моменту. Для управляющего момента относительно плечевого сустава имеем по рисункам 5.1, *а*) и *б*) и формулам (4.2) и (4.3) графики соотношения управляющих моментов и составляющих динамической скорости, зависящих от деформации спортивного снаряда в горизонтальном положении.

На данных рисунках 5.1, *а*) и *б*) и всех последующих график 1 обозначает управляющий момент по соответствующему силовому фактору, а график 2 – динамическую скорость его изменения.

На рисунках 5.2 *а*) и *б*) представлены графики изменения динамических параметров по уравнениям (2.1) и (4.4) и (4.5) в вертикальном направлении при деформации опоры.

На рисунке 5.3 показано соотношение графиков управляющего момента, возникающего от действия сил тяжести, и динамической скорости этого силового фактора.

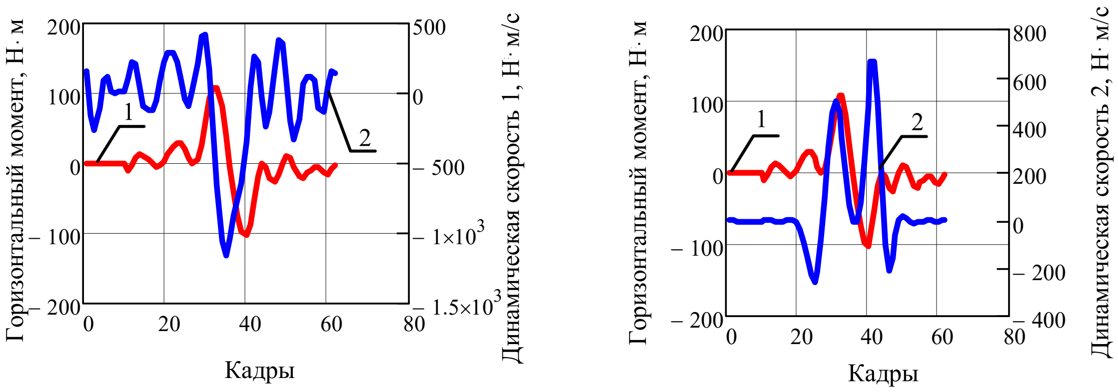
Как и на предыдущих рисунках здесь четко прослеживается относительный сдвиг локальных экстремумов скорости и управляющего момента.

На рисунках 5.4, *а*) и *б*) показано соотношение управляющих моментов по инерционной нагрузке от нормальных ускорений и их изменений во времени (скорости).

На рисунках 5.5, *а*) и *б*) представлены графики управляющего момента в части инерционной нагрузки по касательным ускорениям и динамических скоростях по данному фактору в соответствии с уравнениями (4.9) и (4.10).

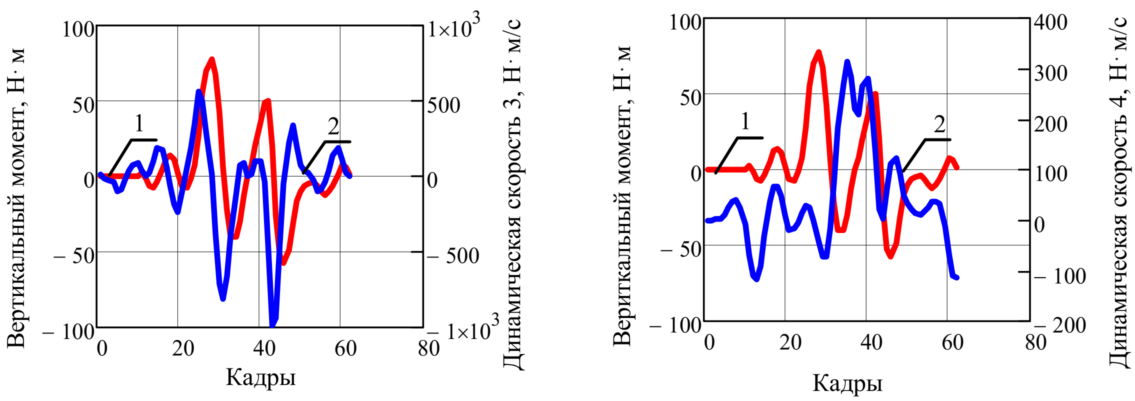
Анализ рисунков 5.1–5.5 показывает наличие несовпадения пиков скоростей и пиков моментов во всех случаях.

Смещение происходит независимо от взаимного перехода тригонометрических функций. Предположительно здесь сказывается суммарный эффект одноименных тригонометрических функций, отражающий сложную модель БМС со многими степенями свободы.



а) *б*)

Рисунок 5.1 – Динамическая нагрузка от горизонтальной пружины



а) *б*)

Рисунок 5.2 – Динамическая нагрузка от вертикальной пружины

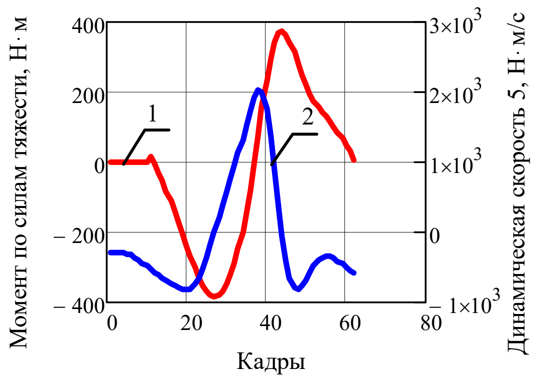
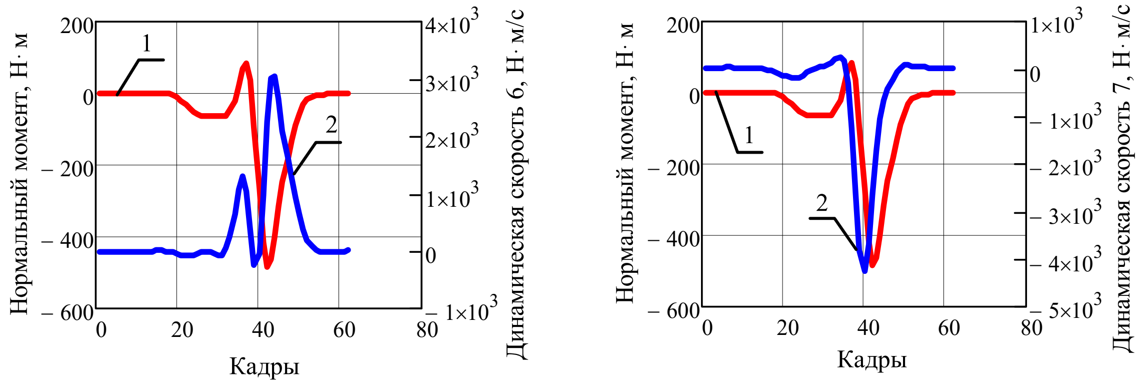
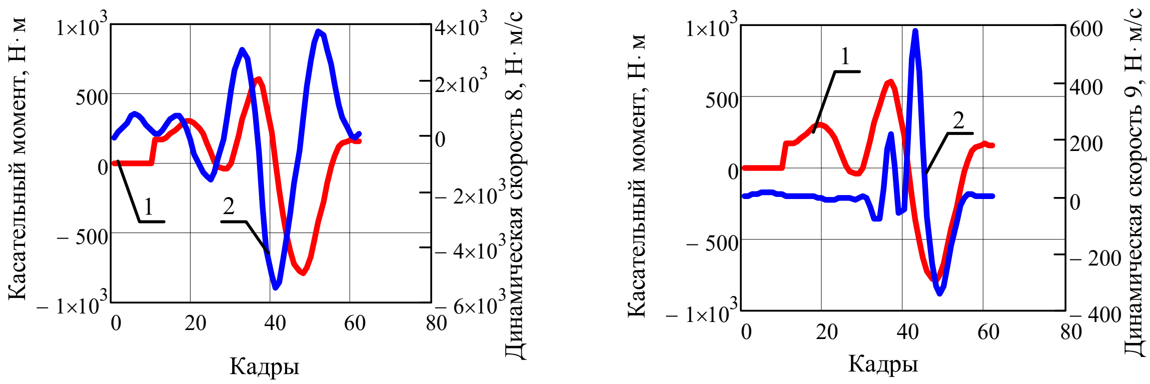


Рисунок 5.3 – Динамическая нагрузка от силы тяжести



а) *б*)

Рисунок 5.4 – Динамическая нагрузка от нормальных сил инерции



а) *б*)

Рисунок 5.5 – Динамическая нагрузка от касательных сил инерции

Тяжелая атлетика. Для экспериментов в тяжелой атлетике принята модель БМС по рисунку 1.1, *б*).

Рассмотрим изменение управляющего момента относительно локтевого сустава при выполнении рывка штанги весом 140 кг. На рисунке 5.6 представлены изменения управляющего момента по силам тяжести и его динамическая скорость.

Отметим смещение локальных экстремумов обеих функций за все время видеосъемки. Согласно таблицы 5.2 по п. 1 имеется переход функций: $\cos Q_j$ в $-\sin Q_j$.

На рисунках 5.7 *а*) и *б*) представлены изменения динамических скоростей по уравнениям (4.7) и (4.8) для управляющего момента по нормальным силам инерции. Отметим два неожиданных факта: во-первых, на обоих графиках есть несовпадение локальных экстремумов; во-вторых, графики для обеих частей уравнения по скоростям выглядят одинаково.

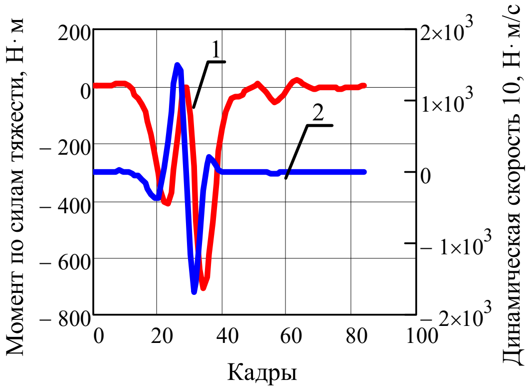


Рисунок 5.6 – Динамическая нагрузка от силы тяжести

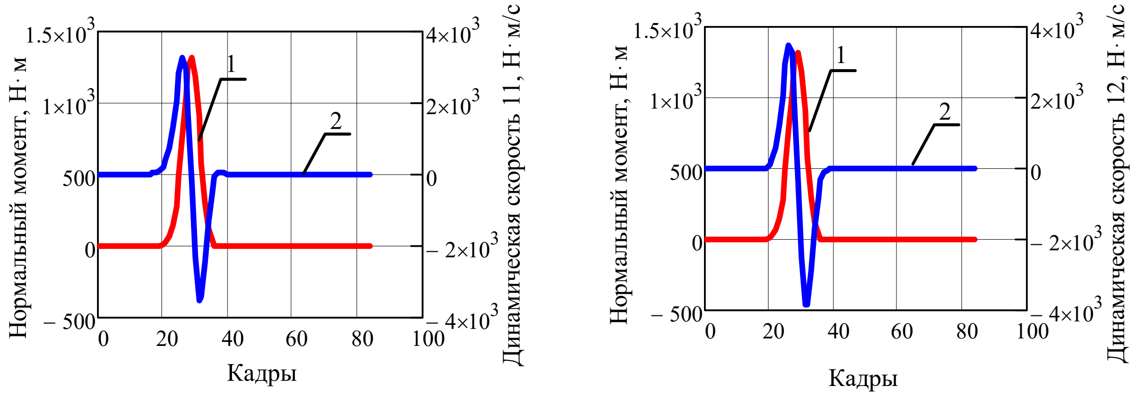
Для прояснения последнего момента приведем графики по управляющему моменту и его динамической скорости в части нормальных сил инерции для коленного сустава в том же упражнении: рывке штанги весом 140 кг. Эти графики показаны на рисунках 5.8, *а*) и *б*).

Анализ рисунков 5.8, *а*) и *б*) на примере управляющего момента относительно коленного сустава спортсмена показывает различие графиков динамических скоростей по формулам (4.7) и (4.8). Это означает, что для локтевого сустава по рисункам 5.7, *а*) и *б*) графики тоже верны.

На рисунках 5.9, *а*) и *б*) показано соотношение управляющего момента и динамических скоростей в части, зависящей от касательных сил инерции.

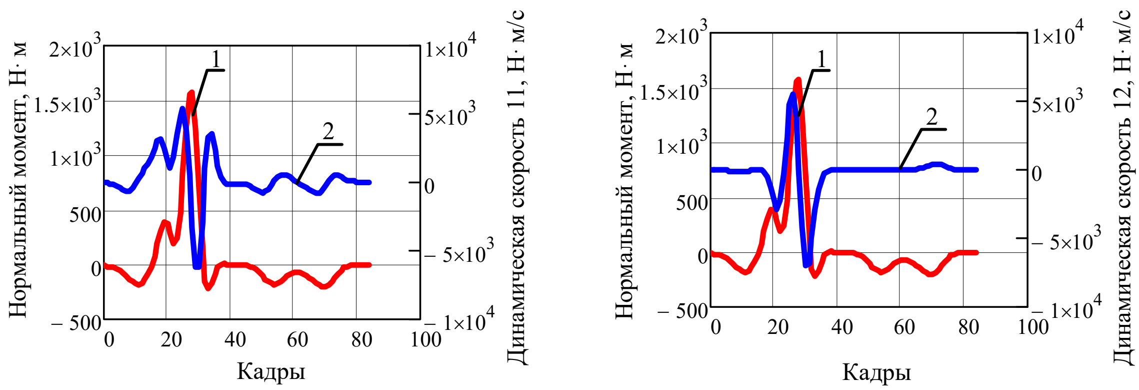
Анализ всех зависимостей по рисункам 5.7–5.10 позволяет сделать вывод, что сдвиг пиков усилий и их динамических скоростей наблюдается по всем силовым факторам независимо от взаимного перехода тригонометрических функций при дифференцировании.

Полный управляющий момент и его динамическая скорость по уравнению (4.14) для рывка штанги 140 кг показана на рисунке 5.10. Общая сумма составляющих динамической скорости по выражениям (4.6)–(4.10) и уравнению (4.14) приводит к сдвигу пиков динамической скорости и управляющего момента в каждом суставе спортсмена.



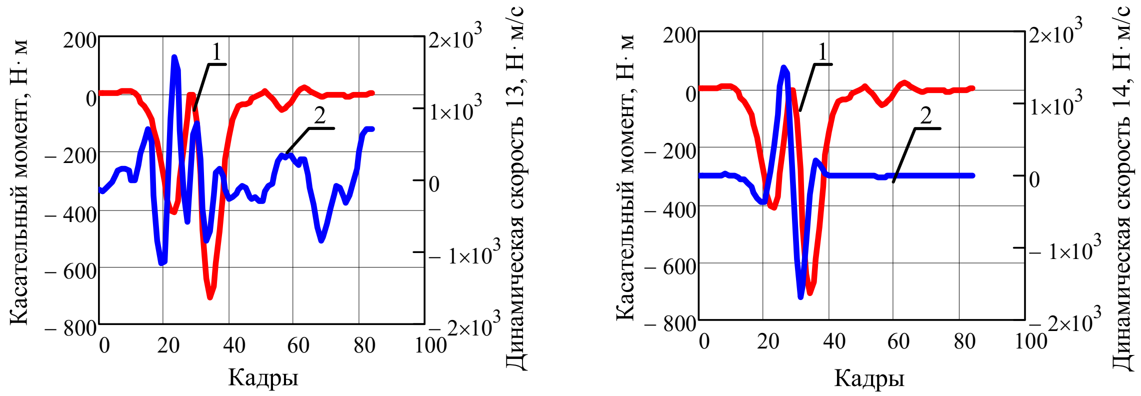
а) *б*)

Рисунок 5.7 – Динамическая нагрузка от нормальных сил инерции



а) *б*)

Рисунок 5.8 – Динамическая нагрузка от нормальных сил инерции



а) *б*)

Рисунок 5.9 – Динамическая нагрузка от касательных сил инерции

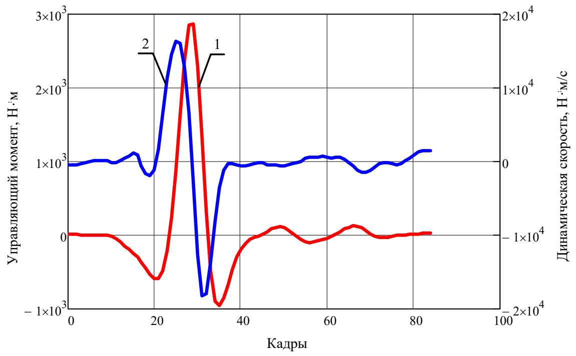


Рисунок 5.10 – Сдвиг динамической скорости по отношению к управляющему моменту для локтевого сустава

Заключение

Огромный массив существующих данных по кинематике и динамике локомоций спортсмена [4], [5], 12] позволяет выполнить оценку скоростно-силовых качеств мышечной системы. В этом случае нет необходимости использования специальных тренажеров и соответствующих методик проведения измерений. Исследования выполняются параллельно с решением обычных задач биомеханического анализа по динамике спортивных упражнений и с использованием аппарата математического анализа через дифференцирование динамических характеристик целенаправленного движения биомеханической системы. Для этого введено понятие динамической скорости управляющего момента мышечной системы. При этом возможны несколько путей исследования скоростно-силовых закономерностей движения: с использованием дифференцирования экспериментальных данных по времени, полученных по результатам видеосъемки и последующего вычислительного эксперимента в области динамики движения; с использованием для динамического анализа на теоретическом уровне специальных механико-математических моделей.

Проведенный анализ целенаправленного движения спортсмена выявил новую, ранее неизвестную закономерность в динамике локомоций. Вычислительный эксперимент в области спортивной гимнастики и тяжелой атлетики показал, что в различных упражнениях, и в различных видах спорта происходит относительный сдвиг пиков значений динамических скоростей и управляющих моментов мышечной системы. При этом такие пики моментов и их скоростей всегда идут парами и в определенной последовательности. Это означает, что в определенные фазы упражнений управляющие моменты достигают своих экстремальных значений, с небольшой разбежкой во времени своего экстремума достигают и скорости изменения этих моментов. Промежутки времени между пиковыми значения силовых и скоростно-силовых характеристик составляют доли секунды и обычно соответствуют нескольким кадрам видеосъемки.

Исследованиями выявлен и поставлен вопрос о причинах такого сдвига в изучаемых характеристиках движения, и о том, что первично: достижение максимальных усилий, начало их спада и в этот момент достижение максимальной динамической скорости, или же наоборот – пик скорости опережает пик усилий в каждой исследуемой фазе спортивного упражнения. Все это требует дальнейших и более глубоких исследований динамики целенаправленного движения спортсмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бомпа*, *Т.* Периодизация спортивной тренировки / Т. Бомпа, К. Буццичелли. – Москва: Спорт, 2016. – 384 с.

2. *Рябинин*, *С.П.* Скоростно-силовая подготовка в спортивных единоборствах / С.П. Рябинин, А.П. Шумилин. – Красноярск: Институт естественных и гуманитарных наук СФУ, 2007. – 153 с.

3. *Бегун*, *П.И.* Моделирование в биомеханике: учеб. пособие / П.И. Бегун, П.Н. Афонин. – Москва: Высш. шк., 2004. – 390 с.

4. *Воронович*, *Ю.В*. Биомеханика тяжелоатлетических упражнений: монография / Ю.В. Воронович, Д.А. Лавшук, В.И. Загревский; М-во внутр. дел Респ. Беларусь, учреждение образования «Могилевский институт Министерства внутренних дел Республики Беларусь». – Могилев: Могилев. институт МВД, 2015. – 196 с.

5. *Загревский*, *В.И.* Биомеханика физических упражнений: учебное пособие / В.И. Загревский. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2003. – 140 с.

6. *Воронович*, *Ю.В*. Методика организации промера тяжелоатлетических упражнений по материалам видеосъемки / Ю.В. Воронович, Д.А. Лавшук // Ученые записки: сб. науч. тр. – Белорус. гос. ун-т физ. культуры; редкол.: М.Е. Кобринский (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2011. – Вып. 14. – С. 142–151.

7. *К вопросу оценки скоростно-силовых качеств мышечной системы спортсмена* / А.Е. Покатилов, М.А. Киркор, Ю.В. Воронович, Д.А. Лавшук // Биомеханика двигательных действий и биомеханический контроль в спорте: материалы VII Всероссийской с международным участием научно-практической конференции, 21–22 ноября 2019 г., Москва. – Рос. гос. акад. физ. культуры, спорта и туризма, Моск. гос. акад. физ. Культуры; ред.-сост. А.Н. Фураев. – Москва: Малаховка, 2019. – С. 108–112.

8. *Покатилов*, *А.Е.* Проблемы исследования механики движения опорно-двигательного аппарата человека / А.Е. Покатилов, М.А. Киркор // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 59–67.

9. *Гавердовский*, *Ю.К.* Техника гимнастических упражнений. Популярное учебное пособие / Ю.К. Гавердовский. – Москва: Терра-Спорт, 2002. – 512 с.

10. *Киркор*, *М.А*. Математические модели движения в биомеханике спорта / М.А. Киркор, А.Е. Покатилов, А.М. Гальмак // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля: материалы Междунар. науч. пр. конф., 25 октября 2019 г., Гомель. – Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта». – Гомель: БелГУТ, 2019. – С. 18–21.

11. *Смолевский*, *В.М*. Спортивная гимнастика / В.М. Смолевский. – Киев: Олимпийская литература, 1999. – 194 с.

12. *Попов*, *Г.И*. Биомеханика двигательной деятельности: учебник для студентов учреждений высшего профессионального образования / Г.И. Попов, А.В. Самсонова. – Москва: ИЦ Академия, 2013. – 320 с.

Поступила в редакцию 08.07.2021.

Информация об авторах

Покатилов Алексей Евгеньевич – старший преподаватель

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

– соответствовать профилю журнала;

– являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

– содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

– сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

– сведения об авторах;

– экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

– договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу http://pfmt.gsu.by.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal “Problems of Physics, Mathematics and Technics” the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author’s commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).