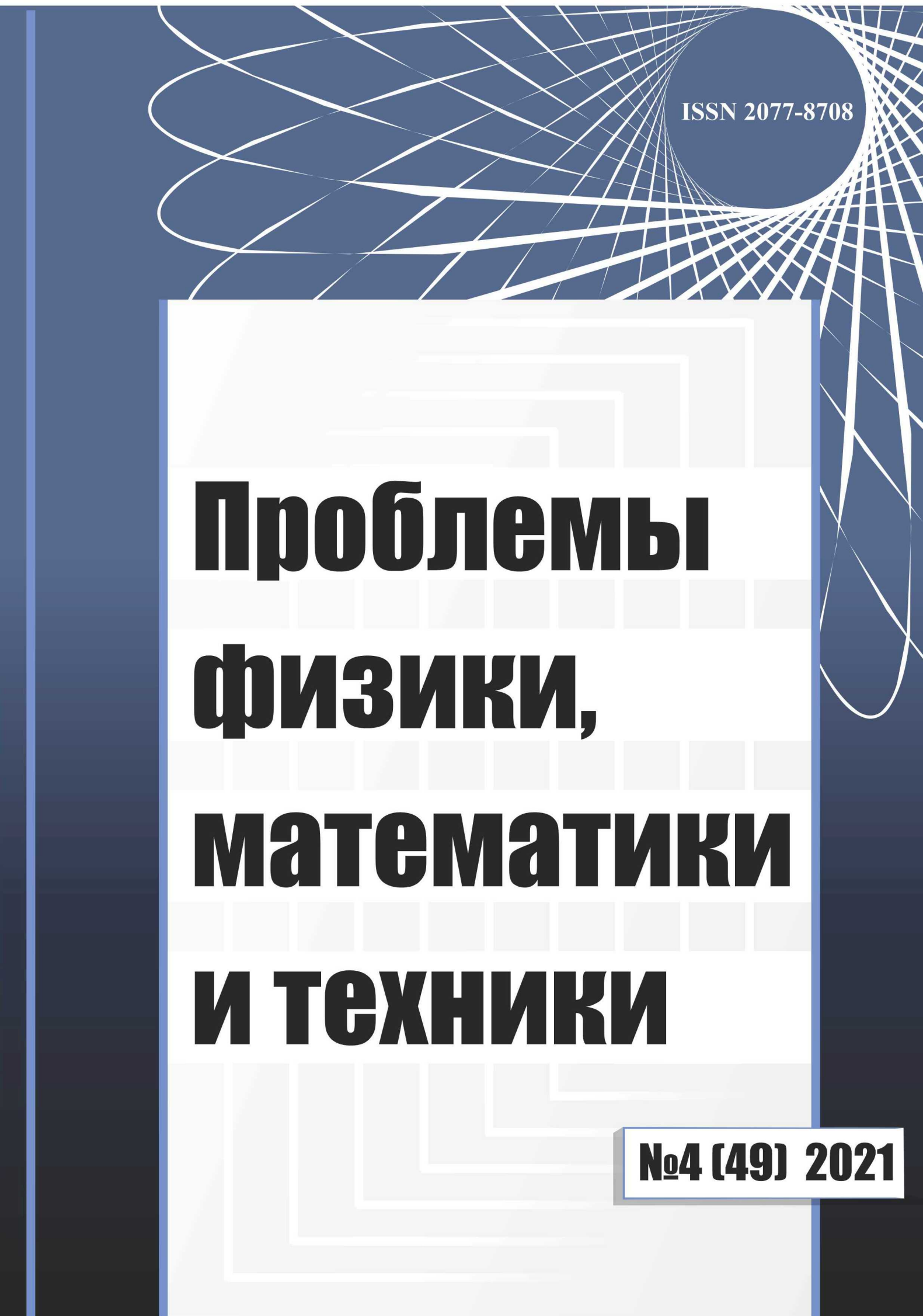




ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№4 (49) 2021

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (49) 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Князев М.А. Кинк модифицированного регуляризованного уравнения длинных волн	7
Коваленко Д.Л., Добромир М., Васькевич В.В., Семченко А.В., Сидский В.В., Тюленкова О.И., Косенок Я.А., Айвазян Г.Е., Лука Д. Разработка комбинированного метода формирования ZnO / TiO ₂ нанотрубок	11
Можаровский В.В., Кузьменков Д.С., Коляскин И.И. Расчёт напряженно-деформированного состояния шины на примере её контакта с дорожным покрытием	17
Никитюк Ю.В., Сердюков А.Н., Аушев И.Ю. Оптимизация параметров лазерного раскалывания кварцевого стекла	21
Пилипцов Д.Г. Влияние термообработки на механические свойства слоистых углеродных покрытий	29
Руденков А.С. Морфология и фазовый состав наноструктурированных углеродных покрытий, сформированных на подслое, содержащем политетрафторэтилен и формиат свинца	38
Хахомов С.А., Семченко А.В., Сидский В.В., Васькевич В.В., Маевский А.А., Тюленкова О.И., Гайшун В.Е., Коваленко Д.Л., Пахомов О.В., Еськов А.В., Старков А.А., Холкин А.Л., Пилипенко В.А. Влияние состава и условий золь-гель процесса на свойства сегнетоэлектрических тонких пленок титаната бария-стронция	45
Шиллов А.В., Сотский А.Б. К достижению выраженной структурной окраски фотонно-кристаллического волокна	51
Юревич В.А. Нелинейное отражение сверхкороткого оптического импульса низкоразмерным суперкристаллом	57

МАТЕМАТИКА

Бородич Р.В. О пересечении не $\mathfrak{F}$ -подгрупп, выделяемых подгрупповым функтором, в группах с операторами	64
Васильев А.Ф. О радикалах факторизуемых конечных $\mathfrak{X}$ -групп	69
Гальмак А.М. О порождающих множествах l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$. III	76
Дергачева И.М., Шабалина И.П., Задорожнюк Е.А. Критерии π -отделимости конечной группы	81
Дудин А.Н., Синюгина Ю.В. Система поллинга с двумя марковскими входными потоками, конечными буферами и фазовым распределением времен обслуживания и переключения	85
Казимиров Г.Н. Прямая и обратная теоремы теории приближений для обобщённого модуля гладкости некоторого класса функций	92
Коновалова М.Н., Монахов В.С., Сохор И.Л. О строго 2-максимальных подгруппах конечных групп	95
Лось И.П., Сафонов В.Г. Об однопорожденных и ограниченных тотально ω -композиционных формациях конечных групп	101

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- **технические;**
- **физико-математические.**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 15.12.21. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 11,34. Тираж 100 экз. Заказ № 664.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2021
© Проблемы физики, математики и техники, 2021
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2021

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 4 (49) 2021

CONTENTS

PHYSICS

Knyazev M.A. Kink for modified regularized long-wave equation	7
Kovalenko D.L., Dobromir M., Vaskevich V.V., Semchenko A.V., Sidski V.V., Tyulenкова O.I., Kosenok Y.A., Ayvazyan G.Y., Luca D. Development of a combined formation method of ZnO / TiO ₂ nanotube	11
Mozharovsky V.V., Kuzmenkov D.S., Kolyaskin I.I. Calculation of the stress-deformed state of a tire on the example of its contact with a road surface	17
Nikitjuk Y.V., Serdyukov A.N., Aushev I.Y. Optimization of the parameters of laser splitting of quartz glass	21
Piliptsov D.G. Influence of heat treatment on the mechanical properties of layered carbon coatings	29
Rudnikov A.S. Morphology and phase composition of nanostructured carbon coatings, formed on the sublayer based on polytetrafluoroethylene and lead formate	38
Khakhomov S.A., Semchenko A.V., Sidski V.V., Vaskevich V.V., Maevsky A.A., Tyulenкова O.I., Gaishun V.E., Kovalenko D.L., Pakhomov O.V., Es'kov A.V., Starkov A.A., Kholkin A.L., Pilipenko V.A. Influence of the composition and conditions of the sol-gel process on the properties of barium-strontium titanate ferroelectric thin films	45
Shilov A.V., Sotskiy A.B. To attainment of pronounced structural coloring of a photonic crystal fiber	51
Yurevich V.A. Supershot optical pulse nonlinear reflection by low-dimensional super-crystal	57

MATHEMATICS

Borodich R.V. On the intersection of non- $\mathfrak{F}$ -subgroups, distinguished by a subgroup function, in groups with operators	64
Vasil'ev A.F. On radicals of factorized finite $\mathfrak{X}$ -groups	69
Gal'mak A.M. On sets of generators of l -ary group $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$. III	76
Dergacheva I.M., Shabalina I.P., Zadorozhnyuk E.A. Criteria for π -separability of a finite group.	81
Dudin A.N., Sinyugina Y.V. Polling system with two markovian arrival processes, finite buffers and phase type distribution of service and switching times	85
Kazimirov G.N. Direct and inverse theorems of approximation theory for the generalized modulus of smoothness of some class of functions	92
Konovalova M.N., Monakhov V.S., Sokhor I.L. On strictly 2-maximal subgroups of finite groups.	95
Los I.P., Safonov V.G. On one-generated and bounded totally ω -composition formations of finite groups	101

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- Technics;**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Data-bases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 530.182

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_7КИНК МОДИФИЦИРОВАННОГО РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛИННЫХ ВОЛН

М.А. Князев

Белорусский национальный технический университет, Минск

KINK FOR MODIFICATED REGULARIZED LONG-WAVE EQUATION

M.A. Knyazev

Belarusian National Technical University, Minsk

Аннотация. Рассмотрена новая версия модифицированного регуляризованного уравнения длинных волн. Уравнения такого типа используются в качестве альтернативы уравнению Кортевега-де Фриза. Модификация уравнения заключается в учете слагаемого, описывающего взаимодействие процессов дисперсии и диссипации. При помощи прямого метода Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных построено решение типа кинка (антикинка) для модифицированного уравнения. Проанализирована возможность построения решения, описывающего связанное состояние кинка и антикинка.

Ключевые слова: регуляризованное уравнение длинных волн, кинк, антикинк, прямой метод Хироты.

Для цитирования: Князев, М.А. Кинк модифицированного регуляризованного уравнения длинных волн / М.А. Князев // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_7

Abstract. A new version of the modified regularized long-wave equation is considered. The equations of such a type are used as an alternative to the Korteweg-de Vries equation. A modification of the equation consists in an accounting the term which describes an interaction of dispersion and dissipation. Using the direct Hirota method for nonlinear equations in partial derivatives a kink-type (antikink-type) solution for modified equation is constructed. A possibility to construct a coupled solution of kink and antikink is analysed.

Keywords: regularized long-wave equation, kink, anti-kink, Hirota direct method.

For citation: Knyazev, M.A. Kink for modiflicated regularized long-wave equation / M.A. Knyazev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_7 (in Russian)

Введение

Регуляризованное уравнение длинных волн (RLW) в (1+1)-мерном случае записывается в виде

$$u_t + \gamma u_x - \alpha u_{xx} + 2\beta u u_x = 0, \quad (0.1)$$

где α, β, γ – положительные постоянные, $u_t = \partial u / \partial t$ и т. п. Оно было построено в качестве альтернативы уравнению Кортевега-де Фриза и позволяет описывать нелинейные среды в более широком динамическом диапазоне [1], [2]. Уравнение (0.1) широко используется для описания физических явлений в средах со слабой нелинейностью и дисперсией волн, включая волны на мелкой воде, ионно-акустические волны в плазме, магнитогидродинамические волны в холодной плазме, акустические волны в ангармонических кристаллах, а также распространение волн в упругих средах и оптических волокнах.

Математическая теория длинных волн малой, но конечной амплитуды в дисперсионных средах, в том числе и в водных каналах, подробно разработана в работах [3], [4]. Продемонстрировано, что RLW-уравнение является корректно определенным по Адамару в смысле соответствия

решений начальным значениям, их единственности и непрерывности. RLW-уравнение обладает топологически нетривиальными решениями солитонного типа. Проблема, однако, в том, что построить решение в аналитическом виде удастся только для ограниченного набора начальных и граничных условий, а также значений коэффициентов уравнения. Аналитическое выражение в явном виде получено только для односолитонного решения, хотя численные расчеты показывают, что возможно существование и связанных состояний [5]. В связи с вышеуказанным, обычно основное внимание уделяется численным методам, при помощи которых на начальном этапе исследований и было показано существование односолитонного и двухсолитонного решений уравнения RLW [6], [7].

Наряду с RLW уравнением определенное внимание привлекает более общее уравнение, так называемое обобщенное регуляризованное уравнение длинных волн (GRLW). Это уравнение имеет вид

$$u_t + u_x + p(p+1)u^p u_x - \mu u_{xx} = 0, \quad (0.2)$$

где μ – положительный постоянный коэффициент, p – целое положительное число. Ясно, что

уравнение (0.1) является частным случаем уравнения (0.2). Однако это уравнение не получило достаточно широкого распространения. Во-первых, оно допускает высокие порядки нелинейности, что значительно затрудняет аналитическое решение. Во-вторых, устойчивость его решений зависит от скорости их распространения [8]. Вследствие указанных причин основное внимание в исследовании уравнения GRLW уделяется численным методам. Достаточно полный обзор современного состояния работ по исследованию уравнения GRLW как аналитическими, так и численными методами, приведен в [9].

Значительно большее внимание привлекает введенное в работе [7] модифицированное регуляризованное уравнение длинных волн (mRLW). Это уравнение можно записать следующим образом:

$$q_{xxt} + 2q_{xx}q_t + 4q_{xt}^2 - q_{xt} - q_t = 0, \quad (0.3)$$

где $q(x, t)$ – вещественная функция такая, что солитон определяется соотношением $u = -q_{xt}$. При помощи прямого метода Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных [10] для уравнения (0.3) можно построить решения в виде одиночного солитона, а также связанного состояния двух солитонов (двухсолитонное решение). Дисперсионное соотношение при этом имеет вид $\omega = k/(1-k^2)$, где k и ω – параметры решения. Численные исследования указывают на возможность существования и трехсолитонного решения уравнения (0.3), однако в аналитической форме до настоящего времени получить его не удалось. mRLW-уравнение во многих чертах ведет себя подобно интегрируемому нелинейному уравнению, т. е. такому уравнению, для которого можно построить решение, описывающее связанное состояние произвольного числа солитонов или солитоноподобных объектов. Тем не менее, для него характерно наличие ряда неустойчивостей.

Возможны и другие модификации регуляризованного уравнения длинных волн. В частности, представляет интерес такая его модификация, в результате которой изменится характер решения и вместо солитона появится решение, имеющее вид кинка. Для такого случая уравнения можно записать в следующем виде

$$u_t + \gamma u_x - \alpha u_{xxt} + 2\beta u u_x - (u_t u)_x = 0. \quad (0.4)$$

В настоящей работе построено решение уравнения (0.4), описывающее состояние типа одиночного кинка (антикинка).

1 Метод решения

Для того, чтобы построить решение уравнения (0.4), соответствующее состоянию типа одиночного кинка, применим прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных [5], [11]. Введем новую зависимую переменную при помощи соотношения Коула – Хопфа

$$u = \sigma \frac{\partial}{\partial x} (\ln F), \quad (1.1)$$

где $F = F(x, t)$ – неизвестная функция, σ – постоянная, значение которой будет определено ниже. Подставим соотношение (1.1) в уравнение (0.4), проинтегрируем его по x и положим константу интегрирования равной нулю. В результате уравнение (0.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{F_t}{F} + \gamma \frac{F_x}{F} - \alpha \frac{F_{xxt}}{F} + \alpha \frac{F_t F_{xx}}{F^2} + \\ + 2\alpha \frac{F_x F_{xt}}{F^2} - 2\alpha \frac{F_t F_x^2}{F^3} + \\ + \beta \sigma \frac{F_x^2}{F^2} - \sigma \frac{F_{xt} F_x}{F^2} + \sigma \frac{F_x^2 F_t}{F^3} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Метод Хироты успешно применим в случае, когда, после введения новой зависимой переменной, уравнение становится билинейным, т. е. квадратичным по новой функции. В данном случае в уравнении имеются кубические (трилинейные) члены. Однако, поскольку мы строим частное решение, то можно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$(\sigma - 2\alpha) \frac{F_x^2 F_t}{F^3} = 0,$$

откуда сразу удастся определить значение параметра σ , а именно, $\sigma = 2\alpha$. Теперь уравнение (1.2) можно записать в билинейном виде

$$F_t F + \gamma F_x F - \alpha F_{xxt} F + \alpha F_t F_{xx} + 2\alpha \beta F_x^2 = 0. \quad (1.3)$$

Представим функцию F в виде формального ряда теории возмущений

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots, \quad (1.4)$$

где $f_i = f_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ – новые неизвестные функции, ε – вообще говоря, не малый параметр.

Если подставить соотношение (1.4) в уравнение (1.3) и приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , то в результате получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных. Только первое уравнение этой системы будет однородным. Все остальные уравнения – неоднородные. При этом каждая последующая функция f_i будет определяться только предыдущими функциями и их производными. Для примера выпишем в явном виде первые три уравнения этой системы:

$$f_{1,t} + \gamma f_{1,x} - \alpha f_{1,xxt} = 0, \quad (1.5)$$

$$f_{2,t} + \gamma f_{2,x} - \alpha f_{2,xxt} = -\alpha f_{1,t} f_{1,xx} - 2\alpha \beta f_{1,x}^2, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} f_{3,t} + \gamma f_{3,x} - \alpha f_{3,xxt} = & \alpha f_1 f_{2,xxt} - f_1 f_{2,t} - \\ & - \gamma f_1 f_{2,x} - \alpha f_{1,t} f_{2,xx} - \\ & - \alpha f_{1,xx} f_{2,t} - 4\alpha \beta f_{1,x} f_{2,x} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Последовательно решая данную систему, можно, в принципе, определить все функции f_i .

2 Одиночный кинк

Для того, чтобы построить решение в виде одиночного кинка, нам понадобятся уравнения (1.5) и (1.6). Представим функцию f_1 в виде

$$f_1 = \exp(k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^{(0)}), \quad (2.1)$$

где k_1 , ω_1 , $\eta_1^{(0)}$ – параметры решения. Параметр $\eta_1^{(0)}$ характеризует начальное положение солитона и без потери общности его можно положить равным нулю. Подставим соотношение (2.1) в уравнение (1.5). В результате получим дисперсионное соотношение вида

$$\omega_1 = \frac{\gamma k_1}{1 - \alpha k_1^2}. \quad (2.2)$$

Если подставить соотношение (2.1) в правую часть уравнения (1.6) и приравнять полученное выражение нулю, что необходимо для обрывания ряда (1.4) в методе Хироты, то удастся точно определить значение параметра ω_1 :

$$\omega_1 = 2\beta. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), находим квадратное уравнение для определения параметра k_1

$$2\alpha\beta k_1^2 + \gamma k_1 - 2\beta = 0,$$

решения которого

$$k_1^{(1)} = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 16\alpha\beta^2}}{4\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

$$k_1^{(2)} = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 16\alpha\beta^2}}{4\alpha\beta} \quad (2.5)$$

нам понадобятся для дальнейшего анализа.

Коэффициенты α , β и γ по условию задачи являются положительными константами. Следовательно, параметр $k_1^{(1)}$ является положительным, а $k_1^{(2)}$ – отрицательным. Известно, что положительное значение параметра k_1 соответствует решению типа кинка, а отрицательное значение этого параметра соответствует решению типа антикинка [12]. Однако для кинка и антикинка рассматриваемый параметр отличается только знаком. Что касается его абсолютных значений, то они равны друг другу. Если рассмотреть нелинейное уравнение движения, допускающее конфигурации типа кинка ϕ_k и антикинка ϕ_a , то последние будут связаны соотношением $\phi_k(kx - \omega t) = -\phi_a(-kx - \omega t)$. По сути дела, кинк и антикинк симметричны относительно начала координат. В рассматриваемом здесь случае $k_1^{(1)}$ и $k_1^{(2)}$ не равны по модулю. Таким образом, можно заключить, что полученные значения (2.4) и (2.5) параметра k_1 соответствуют разным кинку и антикинку. Для каждого из этих значений имеется свой антикинк и свой кинк соответственно.

Окончательно решение уравнения (0.4), описывающее состояние типа одиночного кинка (антикинка) для соответствующих значений параметра k_1 , принимает вид

$$u(x, t) = \sigma \frac{f_{1,x}}{1 + f_1} = \alpha k_1 \left[1 + \tanh \frac{k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^{(0)}}{2} \right]. \quad (2.6)$$

Поскольку ϵ в соотношении (1.4) является произвольным параметром, данное выражение получено при условии, что он равен единице. Как видно, соотношение (2.6) это не кинк (антикинк) согласно принятым соглашениям, а скорее объект типа кинка (антикинка), поскольку выражение содержит постоянную составляющую. Непосредственной подстановкой соотношения (2.6) в уравнение (0.4) можно убедиться, что оно является решением этого уравнения.

Заключение

Известная модификация уравнения RLW вида (0.3) допускает решение в виде солитона. В настоящей работе рассмотрена новая модификация регуляризованного уравнения длинных волн, в которой учитывается взаимодействие процессов дисперсии и диссипации. Построено решение уравнения, описывающее состояние типа одиночного кинка (антикинка). Параметры полученного решения принимают фиксированные значения. Это можно рассматривать как качественное указание на то, что полученное решение является устойчивым [12].

Решения типа солитона или кинка являются топологически различными. В тоже время сравнение показывает, что дисперсионные соотношения для них одинаковым образом зависят от параметра k_1 и совпадают, когда коэффициенты α и γ равны единице. Следовательно, фазовые скорости для них будут одинаковым образом зависеть от k_1 , а это, в свою очередь, означает, что в обеих моделях дисперсия волновых пакетов будет носить одинаковый характер.

Поскольку параметры $k_1^{(1)}$ и $k_1^{(2)}$ не равны по модулю, в качестве дальнейшего исследования данной задачи представляет интерес построение решения, которое описывало бы связанное состояние, например, кинка с $k_1 = k_1^{(1)}$ и антикинка с $k_1 = k_1^{(2)}$.

Благодарю рецензента статьи за полезные замечания, которые значительно способствовали её улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peregrine, D.H. Calculation of the development of an undular bore / D.H. Peregrine // J. Fluid Mech. – 1966. – Vol. 25. – P. 321–330.

2. *Peregrine, D.H.* Long waves on a beach / D.H. Peregrine // J. Fluid Mech. – 1967. – Vol. 25. – P. 815–827.
3. *Benjamin, T.B.* Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems / T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony // Phil. Trans. Royal Soc. London, A. – 1972. – Vol. 272. – P. 47–78.
4. *Bona, J.L.* A mathematical model for long waves generated by wavemakers in non-linear dispersive systems / J.L. Bona, P.J. Bryant // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1973. – Vol. 73. – P. 391–405.
5. *Додд, Р.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – Москва: Мир, 1984. – 694 с.
6. *Eilbeck, J.C.* Numerical study of the regularized long-wave equation I: Numerical methods / J.C. Eilbeck, G.R. McGuire // J. Computational Physics. – 1975. – Vol. 19. – P. 43–57.
7. *Gibbon, J.D.* A modified regularized long-wave equation with an exact two-soliton solution / J.D. Gibbon, J.C. Eilbeck, R.K. Dodd // J. Phys. A: Math. and General. – 1976. – Vol. 9. – P. L127–L130.
8. *Bona, J.L.* On the stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves / J.L. Bona, A. Soyeur // J. Nonlinear Sci. – 1994. – Vol. 4. – P. 449–470.
9. *Seydi Battal Gazi Karakoc.* Numerical approximation of the generalized regularized long wave equation using Petrov – Galerkin finite element method / Seydi Battal Gazi Karakoc, Samir Kumar Bhowmik // arXiv:1904.03354[math.NA]. – 28 p.
10. *ter Braak, F.* Aspects of the modified regularized long-wave equation / F. ter Braak, W.J. Zakrewski // arXiv:1707.00669[nlin.PS]. – 10 p.
11. *Абловиц, М.* Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – Москва: Мир, 1982. – 479 с.
12. *Раджараман, Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – Москва: Мир, 1985. – 416 с.

Поступила в редакцию 05.04.2021.

Информация об авторах

Князев Михаил Александрович – д.ф.-м.н., доцент

РАЗРАБОТКА КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА ФОРМИРОВАНИЯ ZnO / TiO₂ НАНОТРУБОК

Д.Л. Коваленко¹, М. Добромир², В.В. Васькевич¹, А.В. Семченко¹, В.В. Сидский¹,
О.И. Тюленкова¹, Я.А. Косенок¹, Г.Е. Айвазян³, Д. Лука²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Университет Александру Иоана Куза, Яссы

³Национальный политехнический университет Армении, Ереван

DEVELOPMENT OF A COMBINED FORMATION METHOD OF ZnO / TiO₂ NANOTUBE

D.L. Kovalenko¹, M. Dobromir², V.V. Vaskevich¹, A.V. Semchenko¹, V.V. Sidski¹,
O.I. Tyulenкова¹, Y.A. Kosenok¹, G.Y. Ayvazyan³, D. Luca²

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Alexandru Ioan Cuza University, Iasi

³National Polytechnic University of Armenia, Yerevan

Аннотация. Определены условия формирования наноструктурных материалов на основе ZnO наностержней и формируемых на их основе TiO₂ нанотрубок, оптимальные режимы нанесения и необходимая толщина затравочных ZnO слоев. Экспериментальным путем подобраны временные и температурные режимы для гидротермального синтеза столбчатых наноструктур на основе оксида цинка. Методом атомно-силовой микроскопии проведены исследования морфологии и субшероховатости поверхности. С использованием растрового электронного микроскопа проведено детальное изучение структуры и морфологии получаемых наноструктурированных материалов на каждом этапе синтеза. Установлены основные характеристики, влияющие на размер и форму получаемых ZnO / TiO₂ наноструктурных материалов.

Ключевые слова: гидротермальный метод, золь-гель метод, термообработка, ZnO наностержни, TiO₂ нанотрубки, морфология поверхности, структурные свойства.

Для цитирования: Разработка комбинированного метода формирования ZnO / TiO₂ нанотрубок / Д.Л. Коваленко, М. Добромир, В.В. Васькевич, А.В. Семченко, В.В. Сидский, О.И. Тюленкова, Я.А. Косенок, Г.Е. Айвазян, Д. Лука // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 11–16. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_11

Abstract. The conditions for the formation of nanostructured materials based on ZnO nanorods and TiO₂ nanotubes formed on their basis, the optimal modes of application and the required thickness of the seeding ZnO layers have been determined. The time and temperature regimes for hydrothermal synthesis of columnar nanostructures based on zinc oxide were selected experimentally. The method of atomic force microscopy was used to study the morphology and sub-roughness of the surface. Using a scanning electron microscope, a detailed study of the structure and morphology of the obtained nanostructured materials was carried out at each stage of synthesis. The main characteristics influencing the size and shape of the obtained ZnO / TiO₂ nanostructured materials have been established.

Keywords: hydrothermal method, sol-gel method, heat treatment, ZnO nano-rods, TiO₂ nanotubes, surface morphology, structural properties.

For citation: Development of a combined formation method of ZnO / TiO₂ nanotube / D.L. Kovalenko, M. Dobromir, V.V. Vaskevich, A.V. Semchenko, V.V. Sidski, O.I. Tyulenкова, Y.A. Kosenok, G.Y. Ayvazyan, D. Luca // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 11–16. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_11 (in Russian)

Введение

Получение материала в виде нанотрубок, наностержней и нановолокон позволяет создавать механически прочные трехмерные структуры с большой удельной площадью поверхности. Одним из перспективных и нетрадиционных методов получения нанотрубок TiO₂ является их синтез золь-гель методом на подслое наностержней ZnO, полученных гидротермальным методом [1]–[3]. Такой подход дает ряд преимуществ. Гидротермальный метод позволяет создавать

однородные слои ZnO наностержней и варьировать их пространственную структуру в широких пределах [4]–[5]. Как следствие, изменяя характеристики подслоя наностержней ZnO, можно изменять свойства получаемых TiO₂ нанотрубок.

Использование предлагаемого в работе подхода позволит расширить набор методов и приемов регулирования составом и свойствами наноматериалов, получить новые данные о структуре, морфологии и особенностях формирования наноструктурных ZnO / TiO₂ материалов.

Обладая широким спектром различных свойств, полученный материал может найти применение в солнечных элементах, фотокаталитических установках, антибактериальных покрытиях, оптоэлектронике, новых типах биоматериалов и др. [6]–[11].

1 Синтез ZnO / TiO₂ материалов с использованием гидротермального и золь-гель методов

Комбинирование современных методов синтеза открывает возможность получения новых перспективных материалов из TiO₂ нанотрубок, сформированных золь-гель методом с использованием в качестве подслоя матрицы на основе ZnO наностержней, полученной гидротермальным методом.

Весь механизм получения ZnO / TiO₂ наноструктурных материалов можно разделить на три этапа.

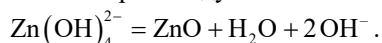
1. Формирование затравочного ZnO слоя на подложках.

Однородные тонкие слои ZnO наносили на поверхность подложек золь-гель методом. В качестве подложек использованы полированные пластины кремния и стеклянные пластины. Все подложки предварительно были тщательно очищены с помощью ультразвука в ацетоне, а затем в этаноле по 10 минут. Для формирования тонких ZnO плёнок приготовлен золь на основе ацетата цинка $\text{Zn}(\text{CH}_3\text{COO})_2$ в изопропиловом спирте. Созревание золя проходило при температуре окружающей среды (22 ± 2)°С в течение двух суток. Изопропиловый спирт использовался в качестве жидкой среды для поддержания стабильности раствора и создания необходимой вязкости. Формирование тонких затравочных слоев производили на установке методом центрифугирования при скорости вращения подложки 2000 об/мин с промежуточной обработкой между слоями 250°С в течение 10 минут и финишной термообработкой в муфельной печи при температуре 350°С в течение 60 минут. В результате были получены тонкие пленки ZnO толщиной от 40 нм (1 слой) до 150 нм (5 слоев).

2. Синтез ZnO наностержней гидротермальным методом.

Наноструктуры на основе оксида цинка синтезированы гидротермальным методом, который является наиболее привлекательным по следующим причинам: низкая стоимость, синтез при относительно низких температурах, возможность использования различных подложек, простота контроля параметров морфологии и свойств получаемого материала.

При нагревании свыше 100°С гидроксид цинка начинает терять воду:



При дальнейшем нагревании происходит формирование наночастиц цинка.

Для синтеза наностержней оксида цинка на подложках проводилось химическое осаждение из растворов. В первом случае из раствора ацетата цинка $\text{Zn}(\text{CH}_3\text{COOH})_2$. Подложки с нанесенным зародышевым слоем ZnO помещали в раствор. Реакционный сосуд в закрытом виде ставили на 2 ч в сушильный шкаф при температуре от 80°С до 110°С. По окончании синтеза образцы промывали дистиллированной водой и сушили на воздухе. Второй раствор для синтеза наностержней приготавливался на основе нитрата цинка $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ и гексаметиленetetрамина $(\text{CH}_2)_6\text{N}_4$. Подложки располагались в реакционных сосудах вертикально. Время и температура выдержки аналогичны первому варианту. По окончании роста полученные образцы вынимались из раствора, промывались дистиллированной водой, с целью смыть остаточные примеси с поверхности, и высушивались на воздухе. Для исследования влияния термического отжига на структуру получаемых ZnO наностержней часть образцов отожгли в муфельной печи при температуре 500°С в течение 60 минут. В результате были получены экспериментальные образцы массивов наностержней на основе оксида цинка.

Одним из главных недостатков гидротермального синтеза из водного раствора является то, что ZnO образуется на подложках и в объёме раствора одновременно. Образование оксида цинка в объёме приводит к быстрому обеднению раствора и, таким образом, понижает скорость роста наностержней на подложках. Более того, ZnO наноструктуры, выращенные на подложках, легко загрязняются ZnO наночастицами, полученными в объёме, понижая тем самым эффективность всего синтеза (рисунок 1.1).

Стоит отметить, что полученные нанокристаллы оксида цинка обладают повышенной долей площади удельной поверхности, что представляет практический интерес для катализа, фотокатализа и газочувствительных сенсоров.

Для получения относительно длинных наностержней необходимо неоднократно повторять синтез с погружением подложек в свежеприготовленный раствор. Для быстрого роста массивов ZnO наностержней проводить синтез необходимо исключительно на подложках с затравочным слоем.

3. Синтез TiO₂ нанотрубок на матрице из ZnO наностержней.

На завершающем этапе образцы подложек с сформированными наностержнями оксида цинка погружали в золь на основе изопропоксида титана $\text{Ti}[\text{OCH}(\text{CH}_3)_2]_4$. Для однородного и равномерного слоя подложки опускали в раствор методом окунания с выдержкой при температуре 25°С в течение 20 минут для улучшения однородности проникновения золя между наностержнями оксида цинка. После полного извлечения образцы подсушивали при комнатной температуре

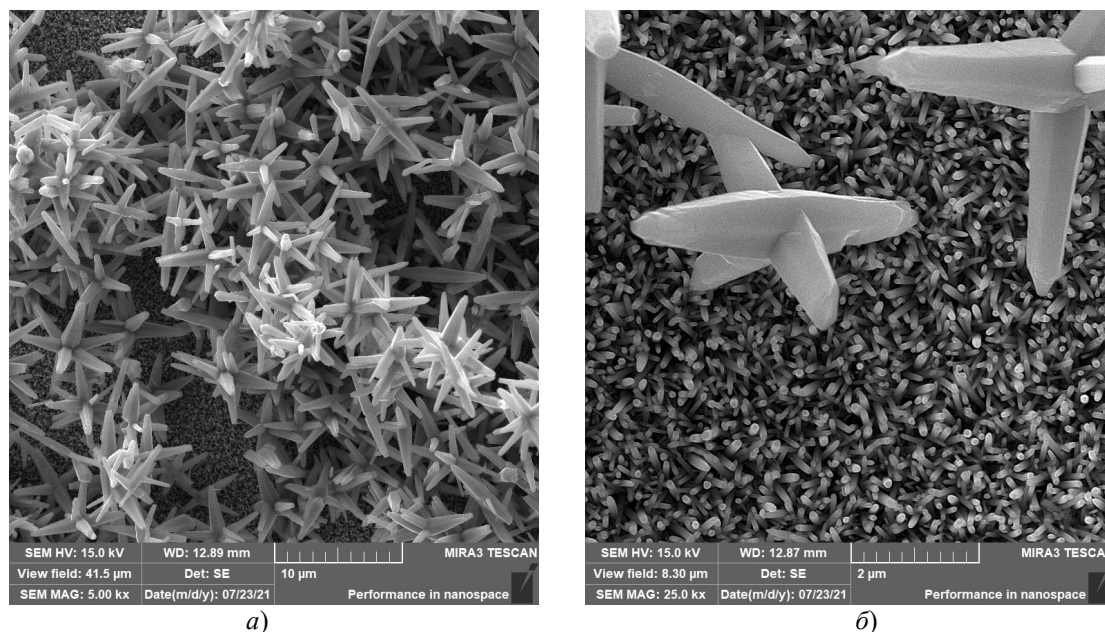


Рисунок 1.1 – СЭМ изображение:

a – покрытие подложки ZnO наночастицами из раствора (выдержка в растворе 2 суток);
б – ZnO осадками на поверхности массива из ZnO наночастиц (выдержка в растворе 2 часа)

в течение 30 минут и помещали в муфельную печь для термообработки при температуре 550°С в течение 60 минут с последующим остыванием до комнатной температуры вместе с печью. В результате были получены образцы ZnO / TiO₂ наноструктурных покрытий на стеклянных и кремниевых подложках.

2 Результаты исследования морфологии полученных наноструктур методами атомно-силовой и электронной микроскопии

Морфологию поверхности полученных образцов исследовали с помощью атомно-силового микроскопа высокого разрешения СОЛБЕР Про 47 (НТ-МДТ, Россия) и электронного растрового микроскопа HITACHI S-4800 (HITACHI, Япония). Для обработки изображений и анализа данных, полученных с помощью атомно-силового микроскопа, использовали модульную программу Gwyddion.

На рисунке 2.1 представлена морфология поверхности полученных ZnO наностержней. Как видно из рисунка, поверхность образована равномерно распределенными зернами, хорошей степенью кристалличности, четкими границами между зернами

Используя выделение трех наиболее высоких образований, были получены статистические величины и определен средний диаметр образований в образце. В таблице 2.1 представлены распределение частиц по размерам и субшероховатость ZnO наностержней на поверхности монокристаллического кремния.

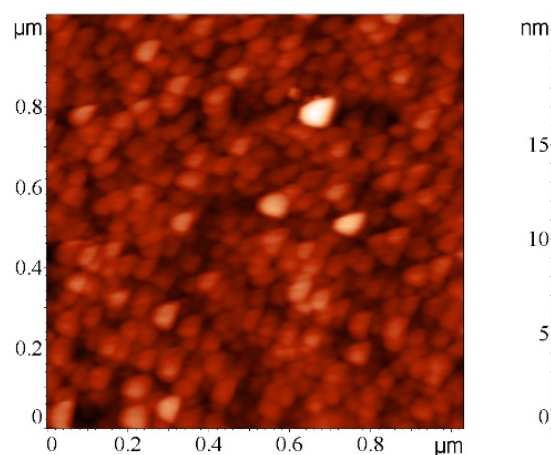


Рисунок 2.1 – АСМ-изображения (1×1 мкм) ZnO наностержней на поверхности монокристаллического кремния

Таблица 2.1 – Статистика ZnO наностержней

Характеристика	Значение
Число наностержней (в поле 1×1 мкм)	448
R_a (субшероховатость)	7,01 нм
Средний диаметр наностержней	78,0 нм

На рисунке 2.2 приведены обработанные АСМ-изображения, полученные на атомно-силовом микроскопе с использованием модульной программы Gwyddion.

Как видно из таблицы 2.1 и рисунка 2.2, средний диаметр наностержней составляет 78,0 нм, субшероховатость исследуемой поверхности составляет $R_a = 7$ нм.

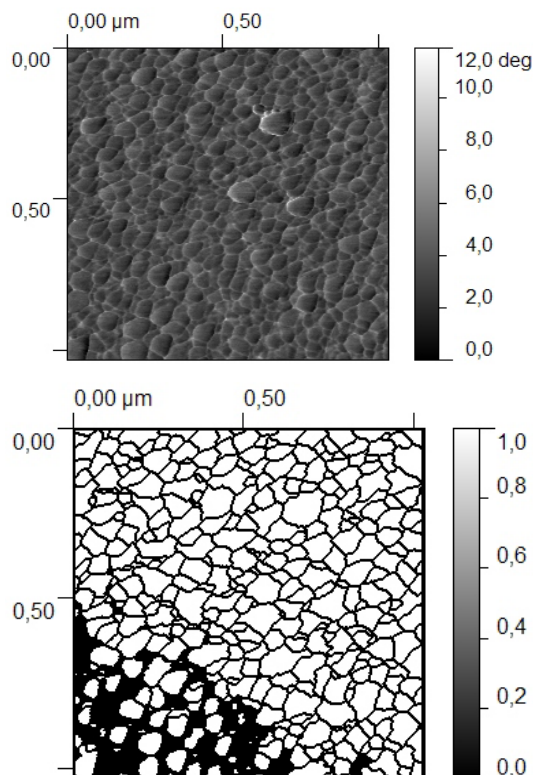


Рисунок 2.2 – Обработанные АСМ-изображения (1×1 мкм) ZnO наностержней

На рисунке 2.3 приведены АСМ-изображения ZnO / TiO₂ нанотрубок на поверхности монокристаллического кремния.

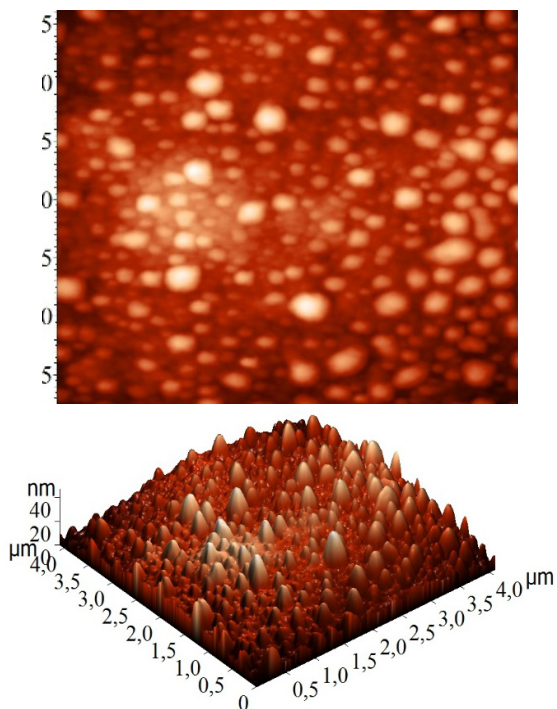


Рисунок 2.3 – АСМ-изображения ZnO / TiO₂ нанотрубок на поверхности монокристаллического кремния

Результаты исследования поверхности подтверждают наличие сферических структур на поверхности образца. Анализ данных подтверждает, что диаметр структур в основании составляет от 90 нм до 110 нм. Следует отметить, что проведение термообработки полученных образцов приводит к уплотнению структур и уменьшению диаметра сферических структур на 5–10% в объеме поверхности.

Для детального изучения структуры и морфологии получаемых наноструктурированных материалов на каждом этапе синтеза проводили исследования поверхности и сколов полученных материалов с использованием электронного растрового микроскопа.

На рисунке 2.4 показано РЭМ-изображение затравочного слоя оксида цинка на кремниевой подложке, осажденного с использованием золь-гель метода.

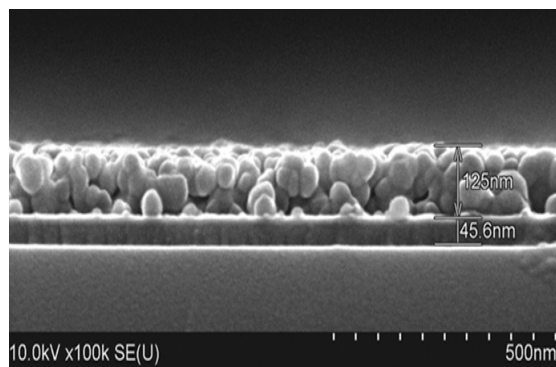


Рисунок 2.4 – РЭМ-изображение затравочного слоя оксида цинка на кремниевой подложке

Экспериментальный образец столбчатых наноструктур оксида цинка, представленный на рисунке 2.5, был сформирован на кремнии с затравочным слоем оксида цинка.

Полученные ZnO наностержни, имеют длину порядка 2,5 мкм и диаметр от 70 нм до 110 нм.

На рисунке 2.6 представлены изображения столбчатых наноструктур оксида цинка, выращенных на затравочных слоях толщиной 60 и 150 нм.

В ходе исследования установлено, что качество и морфология столбчатых наноструктур оксида цинка зависят от толщины зародышевого подслоя, лучшие результаты были получены при толщине 60 нм. Увеличение толщины затравочного слоя вызывает снижение однородности столбчатых структур. Кроме того, было обнаружено, что однородность кристаллической фазы затравочного слоя является необходимым условием для выращивания плотных массивов столбчатых наноструктур, ориентированных перпендикулярно подложке.

Столбчатые наноструктуры ZnO имеют преимущественно вертикальную ориентацию и хорошо растут на отожженных затравочных слоях. Отжиг затравочных слоев проводился в вакуумной печи при 450° С в течение часа. Более высокая

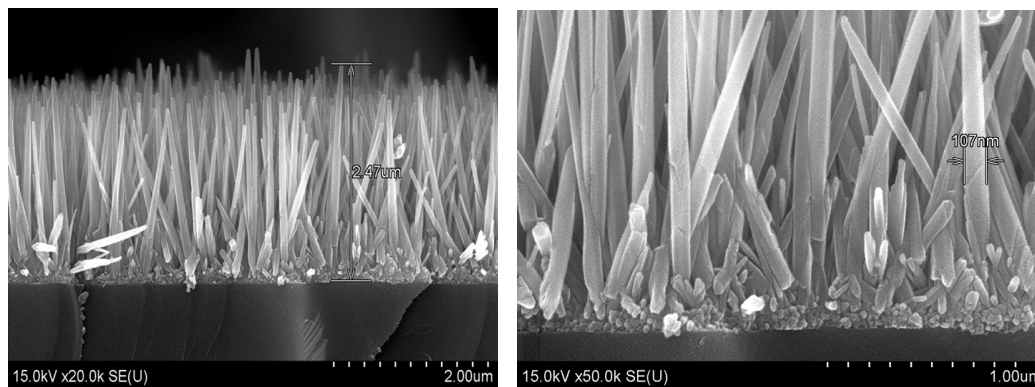


Рисунок 2.5 – РЭМ изображение наностержней оксида цинка

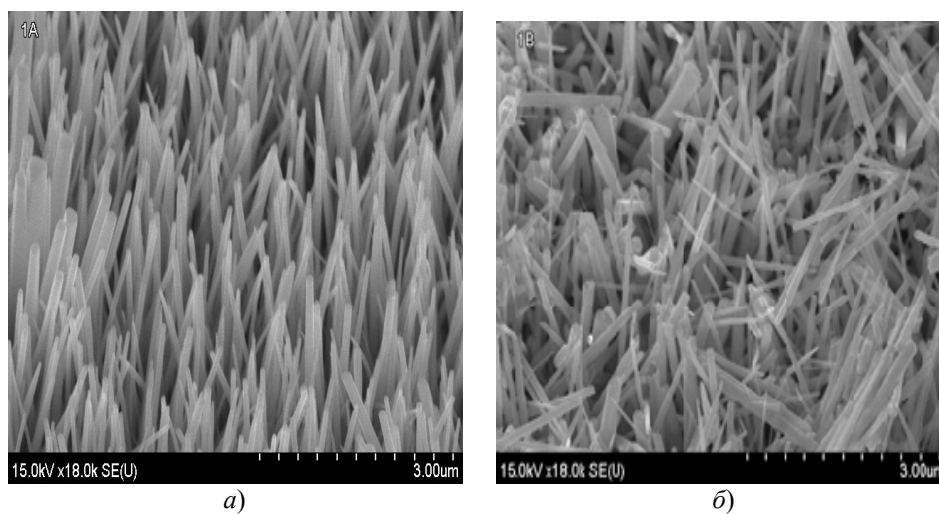


Рисунок 2.6 – РЭМ-изображение ZnO наностержней, выращенных на подложках с затравочным слоем ZnO различной толщины: *а* – 60 нм, *б* – 150 нм

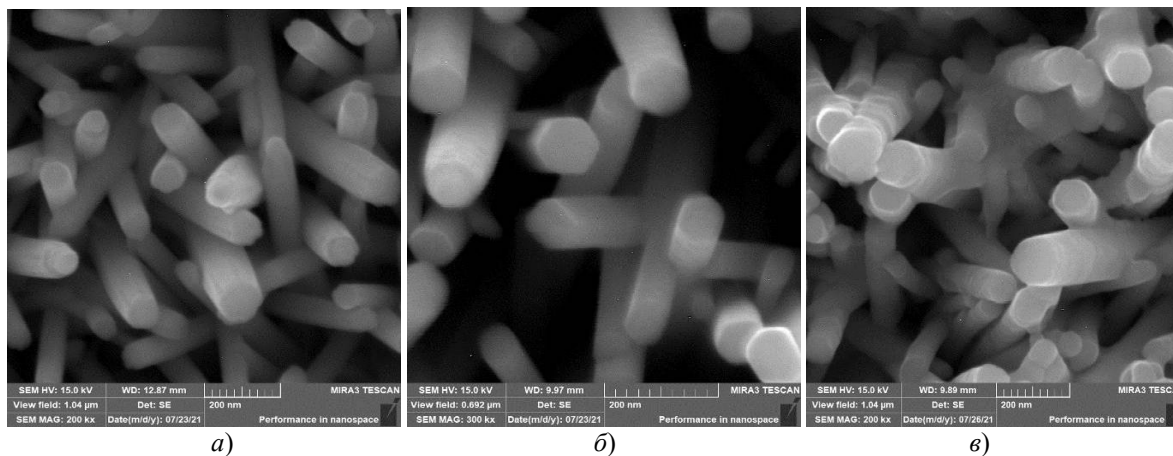


Рисунок 2.7 – РЭМ-изображение: *а* – наностержни ZnO (без термообработки), *б* – наностержни ZnO (термообработка – 550° С), *в* – наноструктуры ZnO / TiO₂ (термообработка – 550° С)

плотность дефектов наблюдается для столбчатых структур ZnO, выращенных на затравочном слое без предварительного отжига.

Температура гидротермального синтеза также влияет на изменение роста столбчатых наноструктур оксида цинка. При температуре синтеза ниже 80° С скорость роста снижается, а количество дефектов увеличивается, образуются на-

частицы ZnO, имеющие схожее строение с наностержнями, однако этой температуры недостаточно для формирования стержнеобразной структуры.

На рисунке 2.7 представлено РЭМ-изображение столбчатых ZnO структур и ZnO / TiO₂ структур на кремниевой подложке.

Из рисунка 2.7 видно, что полученные наностержни ZnO и наноструктуры ZnO / TiO₂

характеризуются гексагональной формой с диаметром от 70 нм до 100 нм. Слой оксида титана полностью покрывает ZnO наностержень формируя TiO₂ нанотрубку, заполненную оксидом цинка. Использование финишной термообработки полученных образцов приводит к уплотнению столбчатых ZnO наноструктур и уменьшению диаметра на 7%.

Заключение

Определены условия синтеза золь-гель методом TiO₂ нанотрубок на подслое ZnO наностержней, полученных гидротермальным методом. Температура гидротермального синтеза влияет на рост столбчатых наноструктур оксида цинка. При температуре синтеза ниже 80° С скорость роста уменьшается, количество дефектов увеличивается и образуются наночастицы ZnO, которые имеют структуру, аналогичную наностержням. Однако этой температуры недостаточно для образования стержневой структуры.

Проведены исследования морфологии поверхности полученных наноструктурных материалов ZnO / TiO₂ методом АСМ спектроскопии. Результаты исследования поверхности подтверждают наличие сферических структур на поверхности образца. Средний диаметр ZnO наностержней составляет 78 нм, субшероховатость исследуемой поверхности составляет $R_a = 7$ нм. Анализ ZnO / TiO₂ нанотрубок подтверждает, что диаметр структур в основании составляет от 90 нм до 110 нм. Проведение дополнительной термообработки приводит к уплотнению и уменьшению диаметра сферических структур на 5–10% в объеме поверхности.

По результатам исследования с помощью сканирующей электронной микроскопии установлено, что однородность и морфология столбчатых наноструктур оксида цинка зависят от толщины затравочного подслоя, оптимальное значение которой составляет 60 нм. Увеличение толщины затравочного подслоя вызывает снижение однородности столбчатых структур, кроме того, свойства наностержней значительно улучшаются при отжиге затравочного слоя в атмосфере кислорода.

Полученные наностержни ZnO и наноструктуры ZnO / TiO₂ имеют преимущественно вертикальную ориентацию и характеризуются гексагональной формой с диаметром от 70 нм до 100 нм. Слой оксида титана полностью покрывает ZnO наностержень формируя TiO₂ нанотрубку, заполненную оксидом цинка. Использование финишной термообработки полученных образцов приводит к уплотнению столбчатых ZnO наноструктур и уменьшению внешнего диаметра на 7%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eder, D. Morphology control of CNT-TiO₂ hybrid materials and rutile nanotubes / D. Eder, A.H. Windle // *Material Chemistry*. – 2008. – Vol. 18. – P. 2036–2043.

2. Kartini, I. Sol-gel derived ZnO nanorod templated TiO₂ nanotube synthesis for natural dye sensitized solar cell / I. Kartini, Evana, Sutarno, Chotima // *Advanced Materials Research*. – 2014. – Vol. 896. – P. 485–488.

3. The enhanced light harvesting performance of dye-sensitized solar cells based on ZnO nanorod-TiO₂ nanotube hybrid photoanodes / B.B. Cirak [et al.] // *Optik*. – 2020. – Vol. 203. – P. 163963.

4. Zinc oxide from fundamental properties towards novel applications / C.F. Klingshirn, B.K. Meyer, A. Waag, A. Hoffmann, J. Geurts // Springer – Verlag Berlin Heidelberg. – 2010. – 359 p.

5. A comprehensive review of ZnO materials and devices / U. Ozgur [et al.] // *Journal of Applied Physics*. – 2005. – Vol. 98. – P. 1–103.

6. Solvothermal synthesis of g-C₃N₄ and ZnO nanoparticles on TiO₂ nanotube as photoanode in DSSC / I. Mohammadia, F. Zeraatpisheha, E. Ashiria, K. Abdib // *International Journal of Hydrogen Energy*. – 2020. – Vol. 45 (38). – P. 18831–18839.

7. Conveniently fabricated heterojunction ZnO / TiO₂ electrodes using TiO₂ nanotube arrays for dye-sensitized solar cells / Rui Li, Wein-Duo Yang, Liang-Sheng Qiang, Hsin-Yi Li // *Journal of Power Sources*. – 2012. – Vol. 220. – P. 153–159.

8. Наноструктурированные фотокаталитические золь-гель покрытия на основе титана / В.В. Васильевич [и др.] // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2015. – № 4 (25). – P. 7–10.

9. Synthesis and characterization of ZnO and Ag nanoparticle-loaded TiO₂ nanotube composite layers intended for antibacterial coatings / A. Roguskaa, M. Pisareka, M. Andrzejczuk, M. Lewandowska // *Thin Solid Films*. – 2014. – Vol. 553. – P. 173–178.

10. Effects of ZnO / TiO₂ nanoparticle and TiO₂ nanotube additions to dense polycrystalline hydroxyapatite bioceramic from bovine bones / L.A. Pires [et al.] // *Dental Materials*. – 2020. – Vol. 36 (2). – P. e38–e46.

11. TiO₂ nanotubes antireflection coating design for GaAs solar cells / S. Saint-Andrea, D. Rodriguez, P. Perillo, M. Barrera // *Solar Energy Materials and Solar Cells*. – 2021. – Vol. 230. – P. 111201.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проекты №T20RA-019 и №T21APMG-004), АН Румынии (грант AR-FRBCF-2020-2021) и Комитета по науке Республики Армения (проекты № 21AG-2B011 и № 21SC-RBSCST-2B002).

Поступила в редакцию 18.10.2021.

Информация об авторах

Коваленко Дмитрий Леонидович – к.ф.-м.н., доцент

Добромир Мариус – к.т.н

Васильевич Василий Васильевич – научный сотрудник

Семченко Алина Валентиновна – к.ф.-м.н., доцент

Сидский Виталий Валерьевич – к.т.н.

Тюленкова Ольга Ивановна – старший научный сотрудник

Косенок Янина Александровна – к.т.н.

Айвазян Гагик Ерджаникович – к.т.н., доцент

Лука Дмитру

РАСЧЁТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ШИНЫ НА ПРИМЕРЕ ЕЁ КОНТАКТА С ДОРОЖНЫМ ПОКРЫТИЕМ

В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, И.И. Коляскин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

CALCULATION OF THE STRESS-DEFORMED STATE OF A TIRE ON THE EXAMPLE OF ITS CONTACT WITH A ROAD SURFACE

V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, I.I. Kolyaskin

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается задача приближённого расчёта напряженно-деформированного состояния изотропного основания (покрытия) на примере контакта шины и дорожного покрытия. Представлены основные зависимости для расчета напряженно-деформированного изотропного основания. На основе представленных формул разработан алгоритм решения исследуемой задачи и создана программа для расчёта напряженно-деформированного состояния массивной шины при контакте её с дорожным покрытием.

Ключевые слова: покрытие, шина колеса, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов.

Для цитирования: Можаровский, В.В. Расчёт напряженно-деформированного состояния шины на примере её контакта с дорожным покрытием / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, И.И. Коляскин // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 17–20. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_17

Abstract. The problem of approximate calculation of the stress-strain state of an isotropic base (pavement) is considered using the example of the contact between a tire and a road surface. The main dependences for calculating the stress-strain isotropic base are presented. Based on the presented formulas, an algorithm for solving the problem under study has been developed and a program has been written to calculate the stress-strain state of a massive tire in contact with a road surface.

Keywords: coating, wheel tire, stress-strain state, method of final elements.

For citation: Mozharovsky, V.V. Calculation of the stress-deformed state of a tire on the example of its contact with a road surface / V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, I.I. Kolyaskin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 17–20. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_17 (in Russian)

Введение

В настоящее время задача определения напряженно-деформированного состояния покрытия на изотропном основании является достаточно актуальной. Одним из примеров таких задач является определение напряженно-деформированного состояния массивной шины при контакте с дорожным покрытием [1], [2]. Точный расчёт напряжений и перемещений, возникающих в массивной шине, необходим для определения физико-технических характеристик шины, оказывающих непосредственное влияние на её износостойчивость, долговечность, выбор способа армирования, определение оптимального рисунка протектора шины и др. Целью работы является расчёт напряженно-деформированного состояния шины при её контакте с дорожным покрытием.

1 Постановка задачи исследований. Основные зависимости для приближённого расчёта напряженно-деформированного состояния покрытия на изотропном основании и массивной шины

При исследовании напряженно-деформированного состояния покрытия на изотропном

основании на примере контакта шины и дорожного покрытия (рисунок 1.1) используем методы расчета, представленные в работах [3]–[7], в которых подробно показаны основные формулы для расчёта напряженно-деформированного состояния.

Так, например, если покрытие обладает ортотропными свойствами, то аналитические зависимости и методика реализации определения напряженно-деформированного состояния в покрытии и основании подробно изложены в [7]. Если же покрытие обладает изотропными свойствами и толщина его достаточно большая, то приближенно можно рассчитывать напряженно-деформированное состояние, как в покрытии, так и в изотропном основании с учётом граничных условий по ниже описанной методике, считая, что упругие свойства покрытия и основания близки. Также можно вводить корректирующие экспериментально-теоретические коэффициенты постели, как это делается в механике грунтов. Точное решение расчета будет в том случае, если упругие свойства покрытия и основания совпадают (или покрытие отсутствует). Дискретное распределение давлений, при контакте шины с

покрытием, определяется с помощью методов граничных или конечных элементов.

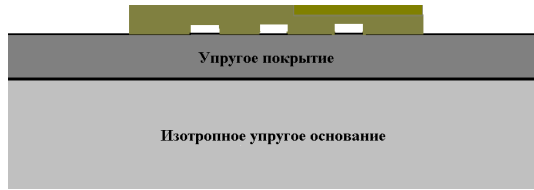


Рисунок 1.1 – Схема контактного взаимодействия шины с покрытием

Пусть на границу упругого полупространства $x_3 > 0$ действует сосредоточенная сила P , приложенная в точке $(y_1, y_2, 0)$ и направленная вдоль оси Ox_3 . Будем считать, что

$$V_0(y, x) = \frac{1}{R(y, x)},$$

$$W_0(y, x) = \ln(x_3 + R(y, x)), \quad (1.1)$$

где $R(y, x) = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2 \right)^{1/2}$ – расстояние от точки наблюдения M с координатами (x_1, x_2, x_3) до точки, к которой приложена сосредоточенная сила.

Ниже, на основании [4], изложена теоретическая методика расчёта напряжений и перемещений с целью программной реализации их расчёта.

Следовательно, формулы Буссинеска для перемещений точки M можно записать в следующем виде

$$u_i = -\frac{P}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V_0}{\partial x_i}(y, x) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial W_0}{\partial x_i}(y, x) \right), \quad i = 1, 2,$$

$$u_3 = -\frac{P}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V_0}{\partial x_3}(y, x) + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V_0(y, x) \right).$$

В случае, когда на упругое тело действует нормальная нагрузка, распределенная по площадке ω с плотностью $p(x_1, x_2)$ будем иметь [4, 6]:

$$u_i = -\frac{P}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial W}{\partial x_i}(x) \right), \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

$$u_3 = -\frac{P}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_3}(x) + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V(x) \right), \quad (1.3)$$

$$\text{где} \quad V(x) = \iint_{\omega} p(y) V_0(y, x) dy,$$

$$W(x) = \iint_{\omega} p(y) W_0(y, x) dy.$$

С учётом (1.1) получим

$$V(x) = \iint_{\omega} \frac{p(y)}{R(y, x)} dy, \quad (1.4)$$

$$W(x) = \iint_{\omega} p(y) \ln(x_3 + R(y, x)) dy.$$

Функции $V(x)$ и $W(x)$ называются потенциалом простого слоя и логарифмическим потенциалом соответственно [4].

Формулы (1.2), (1.3) для перемещений точек упругого полупространства можно записать в следующем виде

$$u_i = -\frac{1}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_3 \right), \quad i = 1, 2, \quad (1.5)$$

$$u_3 = -\frac{1}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_3} - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V \right). \quad (1.6)$$

Полно перемещений (1.5), (1.6) соответствуют следующие компоненты тензора напряжений [4, 6]:

$$\sigma_{11} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial V}{\partial x_3} +$$

$$+ \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} dx_3,$$

$$\sigma_{22} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial V}{\partial x_3} +$$

$$+ \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} dx_3,$$

$$\sigma_{33} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial x_3}, \quad (1.7)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} dx_3,$$

$$\sigma_{12} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

Здесь λ, μ – постоянные Ламе; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; u_i – перемещения, $i, j = 1, 2, 3$.

Исходя из этих аналитических зависимостей, перемещения и напряжения в упругой полуплоскости (или в достаточно толстом покрытии [4]) могут быть, с некоторым приближением, найдены по формулам Беляева (1.5)–(1.7), как только будет известна функция $V(x)$, определяемая выражением (1.4). В свою очередь, потенциал $V(x)$ может быть вычислен, как только будет определена плотность $p(x_1, x_2)$ распределения контактного давления.

2 Программная реализация расчетов напряженно-деформированного состояния массивной шины при контакте с покрытием на изотропном основании

В качестве примера рассмотрим систему «массивная шина – дорожное покрытие». Эпюру нагрузок на шину (см. левое изображение на рисунке 2.1) при её соприкосновении с дорожным покрытием можно получить, как экспериментально (для этого применяется специальная

чувствительная бумага), так и численно [2], [6]. Необходимо определить напряженно-деформированное состояние массивной шины.

На основе экспериментальных или численных данных рассчитывается зона контакта и распределение давления в ней. Был разработан алгоритм и создана программа для расчёта напряженно-деформированного состояния массивной шины при контакте с дорожным покрытием.

Для решения поставленной задачи был применён и запрограммирован метод конечных элементов, использовались прямоугольные конечные элементы [6].

На рисунке 2.1 изображено главное окно разработанного программного комплекса, в котором можно задать размеры параллелепипеда, количество узлов (конечных элементов), модуль Юнга, коэффициент Пуассона. Шаги по осям рассчитываются автоматически и считаются равными по величине. В этом же окне можно загрузить исходное изображение для последующего анализа (т. е. эпюра нагрузок на шину [6] при её соприкосновении с дорожным покрытием), исходное изображение находится слева, а справа находится изображение, составленное из конечных элементов, цвет которых максимально приближен к цвету соответствующей точки исходного изображения (берётся цвет средней точки в конечном элементе). Чтобы рассчитать давление, был использован только показатель оттенка цвета, т. е. яркость и насыщенность не использовались. В программе также предусмотрена

возможность «ручной» корректировки цвета конечного элемента с помощью мыши. Это связано с возможными погрешностями автоматического распознавания цветов.

С целью оптимизации работы программы (уменьшения времени её выполнения) при вычислении интегралов задаётся количество разбиений областей интегрирования, а не точность вычисления значения интеграла. Если по классическому алгоритму численного интегрирования задавать точность вычисления значения интеграла, то очень много времени занимает подбор программой требуемого количества разбиений областей интегрирования для достижения заданной точности. Для нахождения значений интегралов были использованы кубатурная и квадратурная формулы Симпсона. Для нахождения производных использовались центральные производные и сплайны.

Результаты работы программы (значения искомых напряжений и перемещений) и исходные показатели давления отображаются в главном окне программы непосредственно под исходными данными (изображениями эпюра, рисунок 2.1). В программе предусмотрена возможность изменения значений по каждой оси на различных срезах и просмотра полученных результатов (рисунок 2.2), графики напряжений и перемещений автоматически изменяются при изменении параметров среза, которые можно изменить в выпадающих списках.

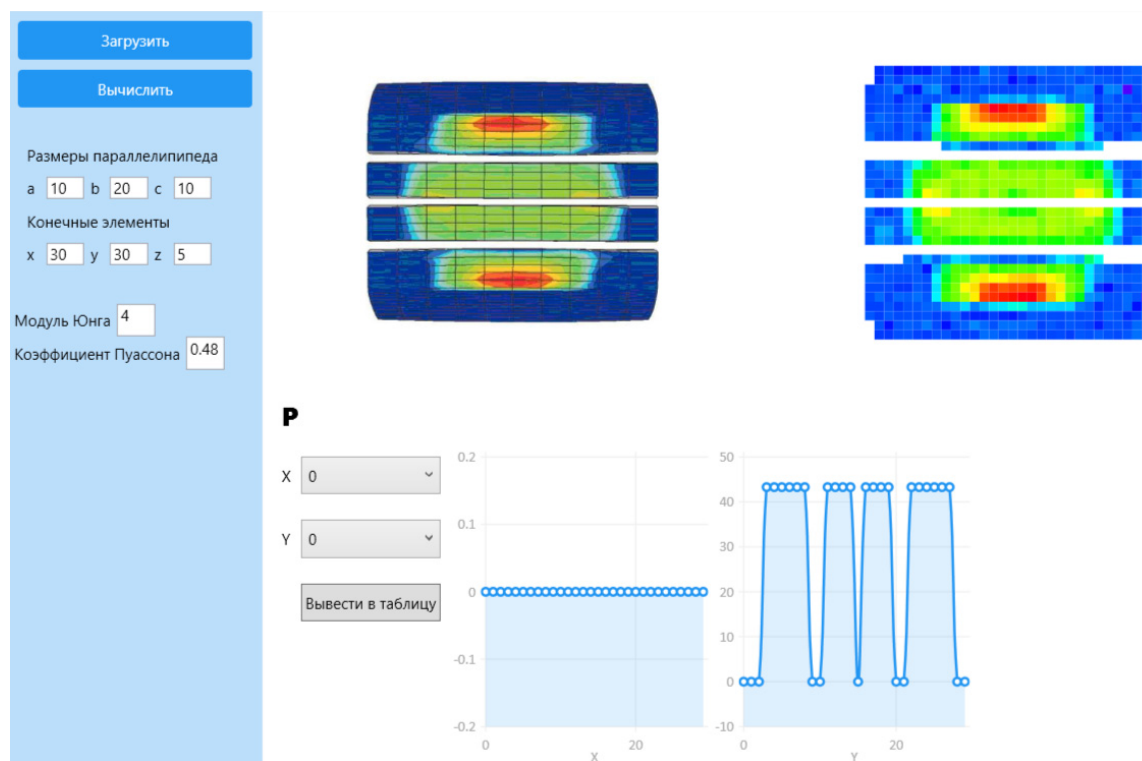
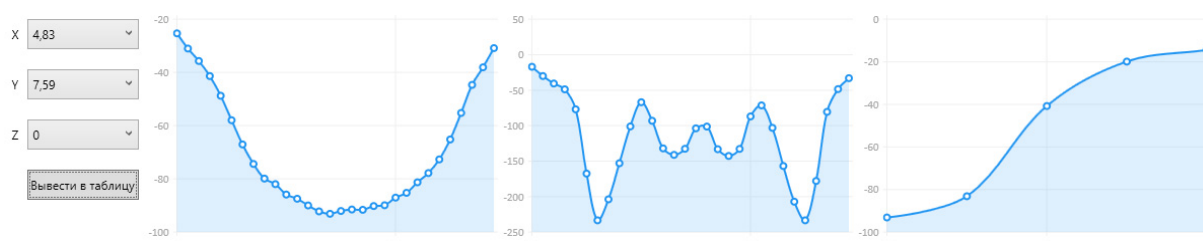
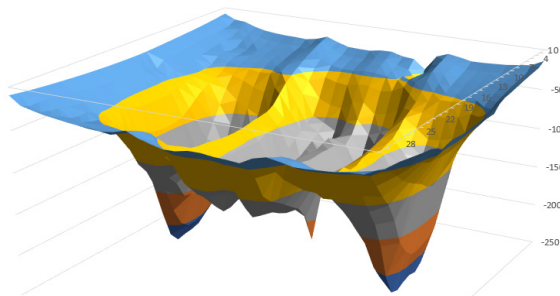


Рисунок 2.1 – Главное окно программы с выводом результатов

Рисунок 2.2 – Данные для выбранных срезов по разным осям для σ_{22}

В программе предусмотрен экспорт полученных результатов в файл в формате .csv. В файле автоматически будет создана таблица, в которой содержатся значения выбранного напряжения или перемещения по координатам x и y для заданного z . Полученные табличные данные могут быть использованы для дальнейшего анализа с помощью возможностей Microsoft Excel или другого программного обеспечения. Например, с помощью Microsoft Excel были построены трехмерные графики на основе табличных значений (рисунок 2.3).

Рисунок 2.3 – Трехмерный график значений σ_{11} для $z = 0$

Заключение

В статье рассмотрена задача о приближенном расчёте напряженно-деформированного состояния изотропного основания (покрытия) на примере контакта шины и дорожного покрытия. Разработан алгоритм решения исследуемой задачи, создана программа, реализующая расчёт напряженно-деформированного состояния массивной шины при контакте с дорожным основанием (покрытием). Универсальность разработанной программы состоит в том, что расчет напряжений, как в изотропном основании, так и в шине можно производить по одному алгоритму с последующей оценкой точности. Проведена серия численных экспериментов. Их результаты согласуются с данными, полученными в ходе натурных экспериментов. Разработанный алгоритм может быть легко адаптирован для решения подобных задач контактного взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В.В. Можаровский [и др.] // Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов. – 2007. – С. 135–142.
2. Рыжов, С.А. Проектирование шин с использованием программного комплекса ABAQUS / С.А. Рыжов, К.А. Ильин, А.Н. Варюхин // САПР и графика. – 2006. – № 1. – С. 20–40.
3. Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости. / А.И. Лурье. – Москва: Гиттл, 1955. – 492 с.
4. Аргатов, И.И. Основы теории упругого дискретного контакта / И.И. Аргатов, Н.Н. Дмитриев. – Минск: Политехника, 2003. – 233 с.
5. Можаровский, В.В. Реализация численного расчета напряженно-деформированного состояния в упругом теле под воздействием шины колеса / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // Проблемы безопасности на транспорте: матер. VIII межд. научн.-практ. конф. 23–24 ноября 2017 г. – Издательство Бел. гос. ун-та. транспорта. – Гомель, 2017. – С. 200–201.
6. Можаровский, В.В. Численная реализация методики по определению напряжений и перемещений в объемном теле применительно к техническим приложениям / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2014. – № 6 (87). – С. 161–165.
7. Реализация алгоритмов расчётов напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, И.И. Коляскин, Ю.В. Василевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 37–44.

Поступила в редакцию 03.09.2021.

Информация об авторах

Можаровский Валентин Васильевич – д.т.н., профессор
Кузьменков Дмитрий Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент
Коляскин Илья Игоревич – аспирант

УДК 539.3:621.373.8

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_21

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛАЗЕРНОГО РАСКАЛЫВАНИЯ КВАРЦЕВОГО СТЕКЛА

Ю.В. Никитюк¹, А.Н. Сердюков¹, И.Ю. Аушев²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск

OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS OF LASER SPLITTING OF QUARTZ GLASS

Y.V. Nikitjuk¹, A.N. Serdyukov¹, I.Y. Aushev²

¹Francisk Skorina Gomel State University

²University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk

Аннотация. Выполнена оптимизация параметров лазерного раскалывания кварцевых пластин. Оптимизационные расчеты проводились с использованием генетического алгоритма MOGA, реализованного в программе ANSYS.

Ключевые слова: лазерное раскалывание, кварцевая пластина, генетический алгоритм MOGA, программная система конечно-элементного анализа ANSYS.

Для цитирования: Никитюк, Ю.В. Оптимизация параметров лазерного раскалывания кварцевого стекла / Ю.В. Никитюк, А.Н. Сердюков, И.Ю. Аушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 21–28. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_21

Abstract. The parameters of laser splitting of quartz plates are optimized. Optimization calculations were carried out using the genetic algorithm MOGA, implemented in the ANSYS Workbench program.

Keywords: laser splitting, quartz plate, genetic algorithm MOGA, software system of finite element analysis ANSYS.

For citation: Nikitjuk, Y.V. Optimization of the parameters of laser splitting of quartz glass / Y.V. Nikitjuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev / Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 21–28. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_21 (in Russian)

Введение

Кварцевое стекло отличается высокой термостойкостью и прочностью, устойчиво к действию воды и кислот. Данный материал применяется при изготовлении окон фотоприемников, колб газоразрядных ламп и иллюминаторов космических кораблей. Из кварцевого стекла изготавливаются призмы для монохроматоров и спектрофотометров, линзы для передачи ультрафиолетового излучения [1].

Для обработки кварцевого стекла применяется резка гидроабразивной струей, алмазным инструментом и лазерное излучение в режиме испарения материала. Недостатком этих методов является высокая дефектность формируемых кромок и снижение прочности получаемых изделий [2].

Лазерное раскалывание, сущность которого заключается в разделении материала в результате формирования индуцированной трещины при последовательном лазерном нагреве и воздействии хладагента на обрабатываемую поверхность, является одним из эффективных методов обработки хрупких неметаллических материалов. К основным достоинствам этого метода относятся

высокие скорость и точность обработки, повышение прочности получаемых изделий [2]–[11]. Моделирование в рамках теории термоупругости и экспериментальные исследования лазерного раскалывания кварцевого стекла выполнены в работах [2], [8]–[12].

В работе [13] проведен анализ применения различных методов моделирования лазерной обработки материалов и представлены примеры оптимизации технологических параметров соответствующих процессов, в том числе с использованием генетических алгоритмов. Генетические алгоритмы являются частным случаем эволюционных методов, базирующихся на коллективном обучении внутри популяции и основанных на имитации естественного отбора. Генетические алгоритмы обеспечивают поиск лучших решений с помощью наследования и усиления полезных свойств множества объектов в процессе имитации их эволюции [14]–[15].

В работах [15]–[20] представлены результаты многокритериальной оптимизации параметров конструкций и технологических процессов в модуле DesignXplorer программы ANSYS Workbench. Многокритериальная оптимизация

это одновременная оптимизация двух и более целевых функций. Одним из методов решения таких задач является выявление совокупности оптимальных по Парето решений, которые не доминируют относительно друг друга, а улучшение одного параметра приводит к ухудшению других [15], [21]. При этом в работах [15]–[19] параметрическая оптимизация осуществлялась с использованием генетического алгоритма MOGA (Multi-Objective Genetic Algorithm), который в ряде публикаций называют алгоритмом FFGA (Fonseca and Fleming's Multiobjective Genetic Algorithm) [22], [23].

В связи с этим представляется целесообразным исследование лазерного раскалывания кварцевого стекла с использованием программы ANSYS при определении соответствующих тепловых и термоупругих полей и ее модуля DesignXplorer для решения соответствующих задач многокритериальной оптимизации.

1 Конечно-элементный анализ

Конечно-элементный расчет температурных полей и полей термоупругих напряжений проводился с использованием программы ANSYS. Моделирование выполнялось в рамках несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке [24], [25]. Для этого была подготовлена соответствующая расчётная программа на языке программирования APDL (ANSYS parametric design language).

Моделирование было выполнено для пластины с геометрическими размерами $20 \times 10 \times 2$ мм. На рисунке 1.1 приведена схема расположения лазерного пучка и хладагента. Для моделирования была сформирована конечно-элементная модель, состоящая из 56000 элементов и 61509 узлов (рисунок 1.2). Для теплового анализа применялись элементы Solid 70, для прочностного анализа применялись элементы Solid 185. При расчетах использовались свойства кварцевых стекол приведенные в таблице 1.1 [3], [26].

Таблица 1.1 – Свойства кварцевых стекол

Свойства материала	Значения
Теплопроводность, Вт/м·К	1,34
Удельная теплоемкость, Дж/кг·К	880
Плотность, кг/м ³	2200
Модуль Юнга, ГПа	78
Коэффициент Пуассона	0,17
Коэффициент линейного термического расширения, град·10 ⁻⁷	5

Параметры, примененные при моделировании лазерного раскалывания кварцевого стекла:

- мощность лазерного излучения P , 20 Вт;
- скорость резки V , 20 мм/с;
- радиус лазерного пучка R , 15 мм.

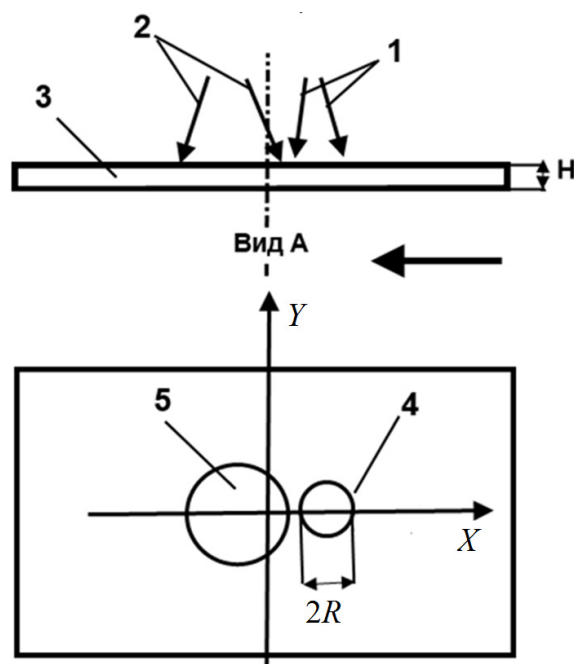


Рисунок 1.1 – Схема пространственного расположения зон воздействия лазерного излучения и хладагента:

- 1 – лазерный пучок с длиной волны 10,6 мкм,
- 2 – хладагент,
- 3 – обрабатываемая пластина из кварцевого стекла,
- 4 – сечение лазерного пучка 1 в плоскости обработки,
- 5 – зона воздействия хладагента.

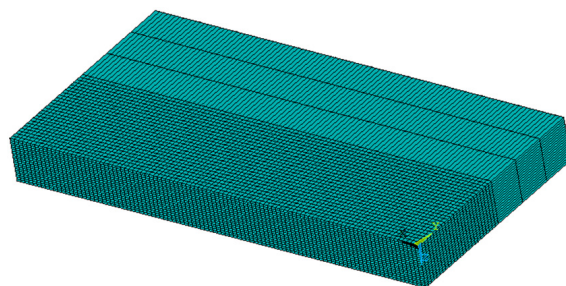


Рисунок 1.2 – Конечно-элементная модель

Полученные при моделировании распределения температурных полей и полей термоупругих напряжений представлены на рисунках 1.3, 1.4. На рисунке 1.4 видна характерная для лазерного раскалывания при использовании хладагента локализация термоупругих напряжений сжатия и растяжения в зоне обработки. При этом расчетные значения максимальных напряжений растяжения в зоне обработки σ_y и максимальные расчетные температуры в обрабатываемой пластине T равны соответственно 6,9 МПа и 993,7 К при выбранных расчетных параметрах обработки. Нужно отметить, что для реализации лазерного раскалывания кварцевого стекла

допустимы значения температуры не выше температуры стеклования, равной 1473 К для данного материала [3], [26]. При этом значения напряжений σ_y должны достигать как можно больших значений, так как в соответствии с критерием максимальных растягивающих напряжений для используемой схемы лазерного раскалывания пространственная локализация и величина напряжений σ_y определяют инициализацию и развитие лазерно-индуцированной трещины [27], [28].

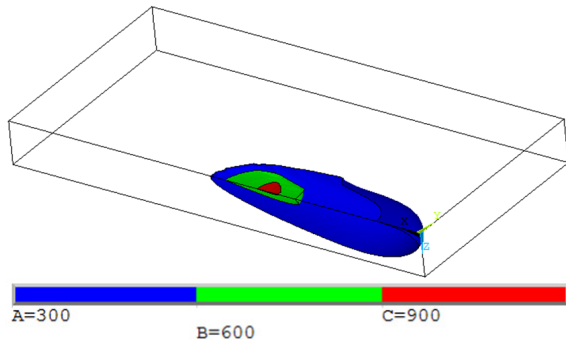


Рисунок 1.3 – Распределение температуры в объеме обрабатываемой кварцевой пластины, К ($V = 20$ мм/с, $P = 20$ Вт, $R = 1,5$ мм)

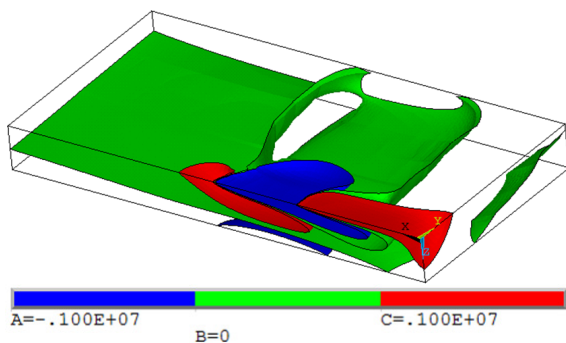


Рисунок 1.4 – Распределение напряжений σ_y в объеме обрабатываемой кварцевой пластины, Па ($V = 20$ мм/с, $P = 20$ Вт, $R = 1,5$ мм)

2 Определение оптимальных параметров процесса лазерного раскалывания кварцевого стекла

Для оптимизации параметров лазерного раскалывания кварцевого стекла был использован модуль Ansys DesignXplorer, интегрированный в расчетную среду Ansys Workbench. Оптимизация была реализована в соответствии с последовательностью действий, представленных на рисунке 2.1 [16].

При моделировании был использован трехфакторный факторно-центрованный вариант центрального композиционного плана эксперимента (ЦКП) [29], [30]. В качестве факторов эксперимента были выбраны скорость обработки V , мощность лазерного излучения P и радиус лазерного пучка R . При численных экспериментах

определялись следующие выходные параметры: максимальная температура в зоне лазерной обработки T , максимальные напряжения растяжения в зоне обработки σ_y , глубина лазерно-индуцированной трещины L (таблица 2.1).

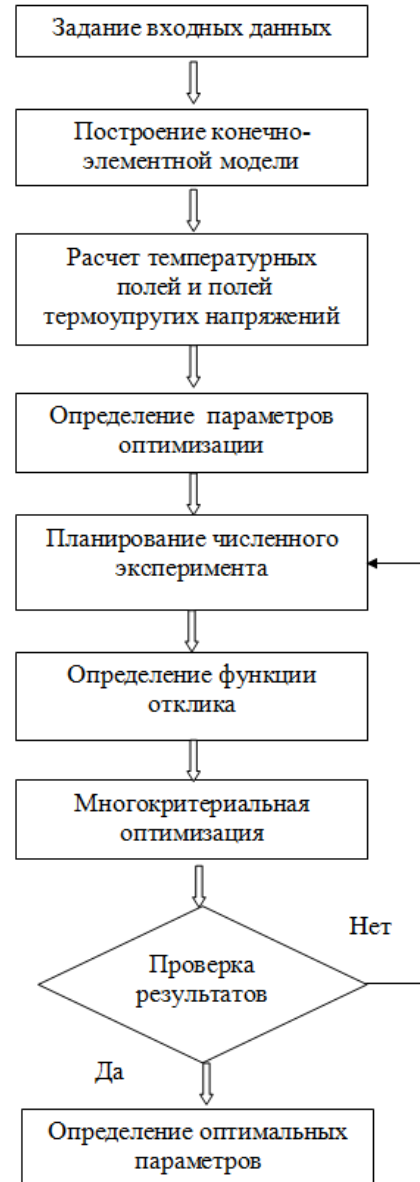


Рисунок 2.1 – Алгоритм оптимизации лазерного раскалывания кварцевого стекла

Глубина лазерно-индуцированной трещины L определялась с использованием программы, реализованной на APDL на основании данных о пространственной конфигурации термоупругих полей. При этом учитывалось, что рост трещины происходит в зоне напряжений растяжения, сформированных в результате воздействия хладагента на обрабатываемую поверхность, и прекращается в зоне напряжений сжатия [28]. Таким образом, параметр L , определяемый в результате моделирования, равен глубине расположения

границы растягивающих и сжимающих термоупругих напряжений под центром зоны воздействия хладагента, что можно интерпретировать как глубину лазерно-индуцированной трещины (изоперверхность $\sigma_y = 0$ на рисунке 1.4).

Таблица 2.1 – План эксперимента и результаты вычислений

N	P1 V , м/с	P2 P , Вт	P3 R , м	P4 L , м	P5 T , К	P6 σ_y , Па
1	0,02	20	0,0015	0,0002	994	6854967
2	0,01	20	0,0015	0,0004	1260	11668376
3	0,03	20	0,0015	0,0001	868	4715231
4	0,02	10	0,0015	0,0002	643	3427482
5	0,02	30	0,0015	0,0002	1344	10282451
6	0,02	20	0,001	0,0002	1554	11122372
7	0,02	20	0,002	0,0003	756	4707558
8	0,01	10	0,001	0,0003	1154	9018635
9	0,03	10	0,001	0,0001	811	3905169
10	0,01	30	0,001	0,0003	2877	27055907
11	0,03	30	0,001	0,0001	1846	11715511
12	0,01	10	0,002	0,0004	615	4070154
13	0,03	10	0,002	0,0002	483	1611775
14	0,01	30	0,002	0,0004	1259	12210462
15	0,03	30	0,002	0,0002	862	4835328

Моделью объекта исследования являлись функции отклика, связывающие выходные параметры (L , T , σ_y) с факторами (V , P , R), которые менялись в заданных пределах при проведении численных экспериментов (таблица 2.1). Полученные уравнения регрессии имеют следующий вид:

$$L = 3,775 \cdot 10^{-4} - 0,011V + 34,13R^2,$$

$$T = 1903 + 142,6P - 2,538 \cdot 10^6 R + 7,992 \cdot 10^8 R^2 - 1637VP + 7,703 \cdot 10^6 VR - 43370PR,$$

$$\sigma_y = -4,569 \cdot 10^5 - 2,167 \cdot 10^8 V + 1,538 \cdot 10^6 P - 1,893 \cdot 10^7 VP + 1,486 \cdot 10^{11} VR - 4,79 \cdot PR.$$

Об адекватности полученных регрессионных уравнений свидетельствуют данные, приведенные на рисунке 2.2. На представленном графике по оси абсцисс отложены значения конечно-элементного моделирования, а по оси ординат – значения, полученные при помощи соответствующих регрессионных уравнений. Чем ближе полученные точки находятся к диагонали, тем выше точность регрессионной модели.

Значения коэффициентов детерминации для выходных параметров L , T , σ_y принимают значения, равные 0,94519, 0,97603, 0,95159 соответственно, что можно интерпретировать как наличие необходимого соответствия регрессионной модели данным конечно-элементного анализа [29]–[31].

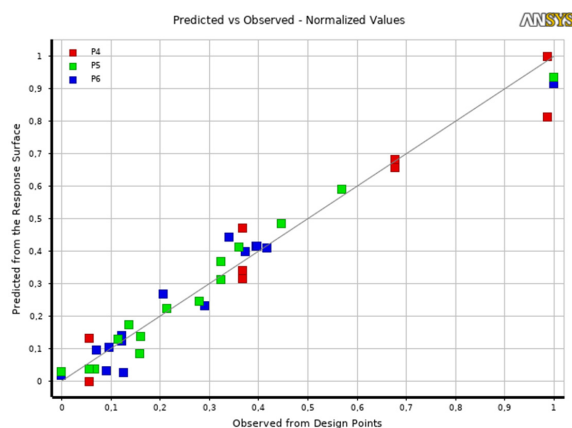


Рисунок 2.2 – Проверка адекватности уравнений регрессии при вычислительном эксперименте
P4 – L , P5 – T , P6 – σ_y

Для оценки чувствительности оптимизируемых параметров была построена диаграмма, отображающая влияние входных параметров на выходные параметры (рисунок 2.3). Глубина лазерно-индуцированной трещины в большей степени зависит от скорости обработки, на максимальную температуру в зоне лазерной обработки наибольшее воздействие оказывают мощность лазерного излучения и радиус лазерного пучка. На величину максимальных напряжений растяжения в зоне обработки приблизительно одинаково влияют все три фактора (V , P , R).

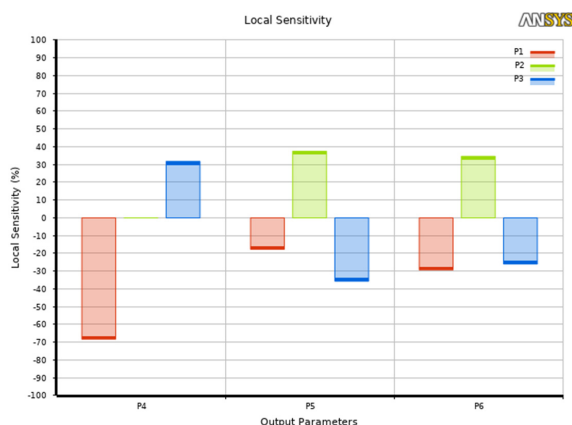


Рисунок 2.3 – Диаграмма чувствительности оптимизируемых параметров
P1 – V , P2 – P , P3 – R , P4 – L , P5 – T , P6 – σ_y

На рисунках 2.4–2.6 представлены зависимости максимальной температуры в зоне лазерной обработки T , максимальных напряжений растяжения в зоне обработки σ_y и глубины лазерно-индуцированной трещины L от скорости обработки V , мощности лазерного излучения P и радиуса лазерного пучка R .

При проведении оптимизации процесса лазерного раскалывания кварцевого стекла

использовался многокритериальный генетический алгоритм MOGA, встроенный в модуль DesignXplorer с числом индивидов начальной популяции равным 100, и числом индивидов за итерацию равным 100.

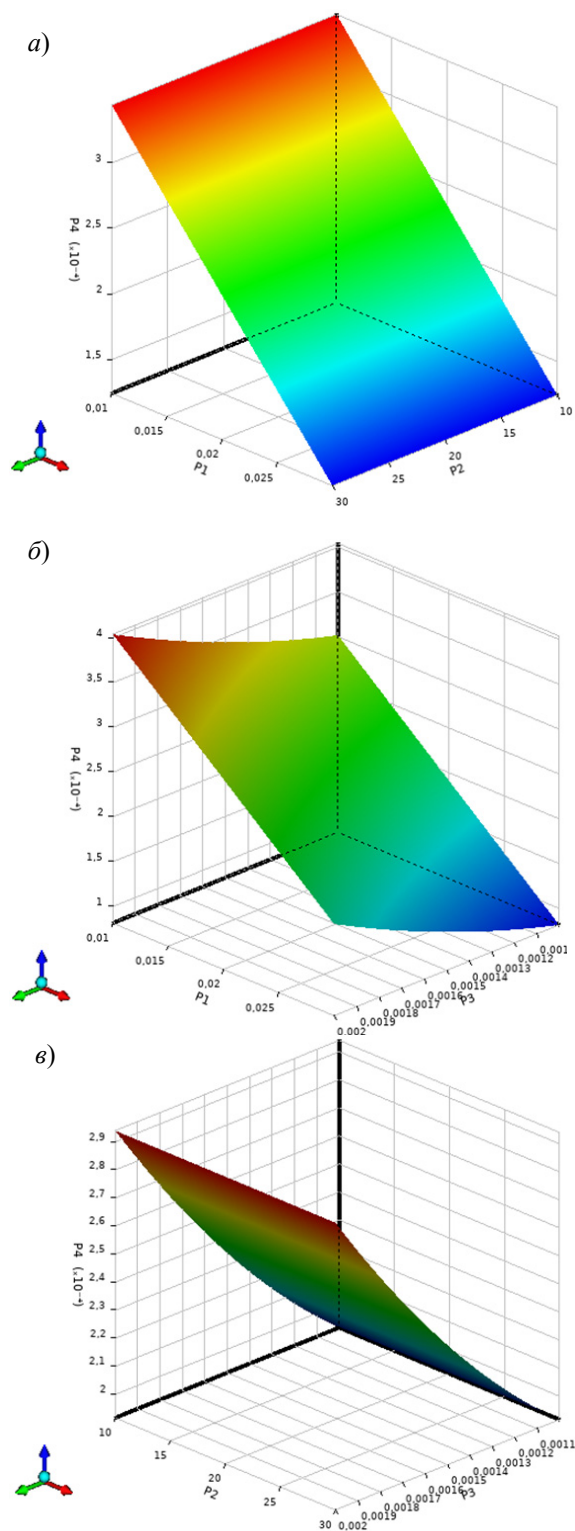


Рисунок 2.4 – Зависимость глубины трещины L от параметров обработки
а) $R - \text{const}$; б) $P - \text{const}$; в) $V - \text{const}$

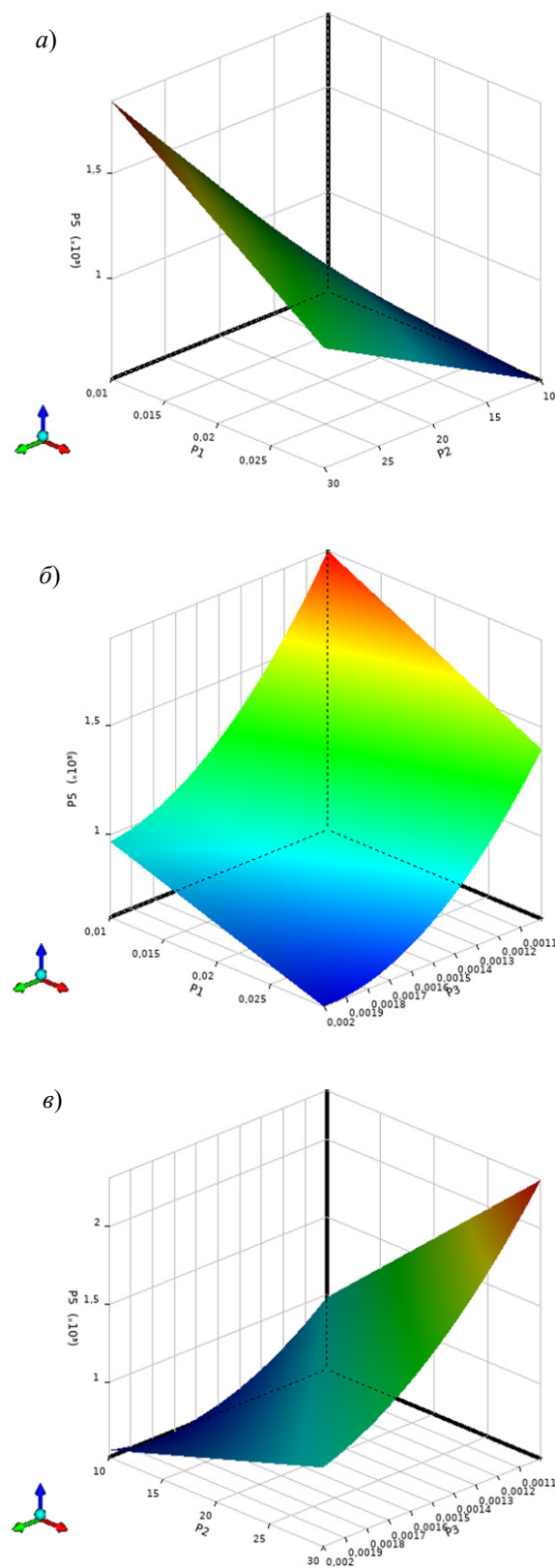


Рисунок 2.5 – Зависимость максимальной температуры T от параметров обработки
а) $R - \text{const}$; б) $P - \text{const}$; в) $V - \text{const}$

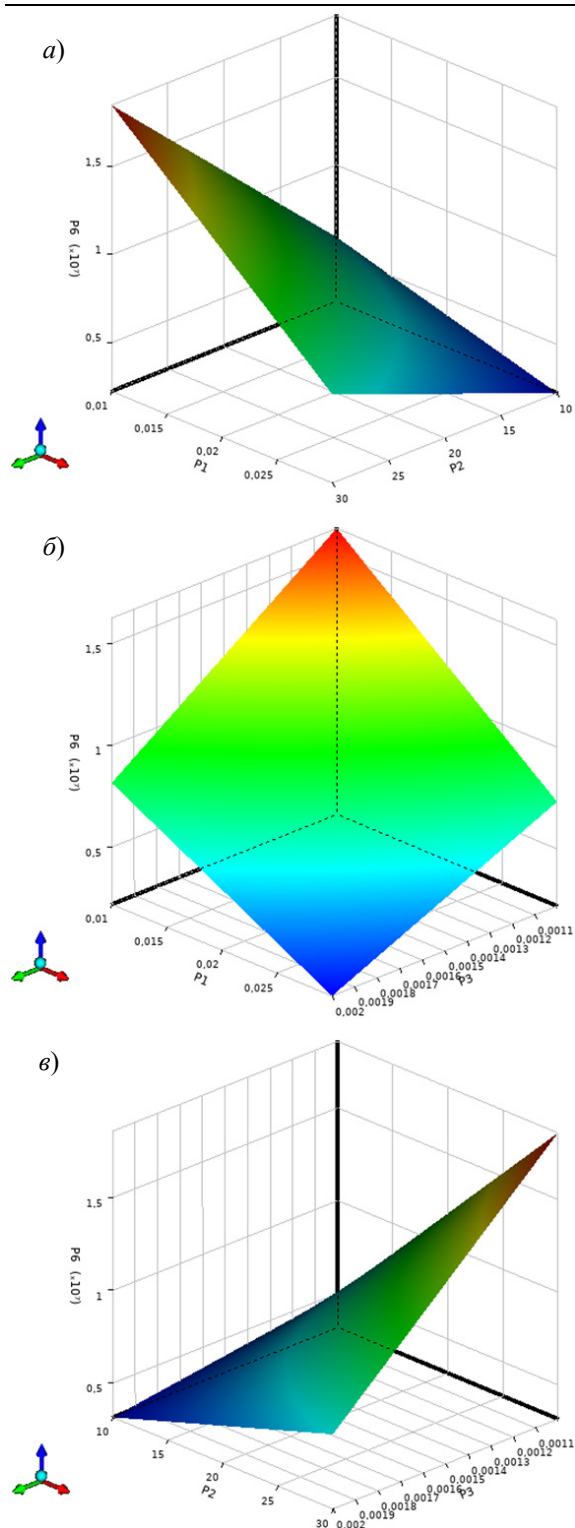


Рисунок 2.6 – Зависимость максимальных напряжений σ_y от параметров обработки

а) $R = \text{const}$; б) $P = \text{const}$; в) $V = \text{const}$

Оптимизация лазерного раскалывания кварцевого стекла осуществлялась для четырех вариантов постановки задачи:

1. По критерию максимума растягивающих напряжений $\sigma_y \rightarrow \max$ при задании значений

минимальной глубины трещины $L \geq 0,0001$ м и максимальной температуры в зоне обработки $T \leq 1473$ К.

2. По критериям максимума растягивающих напряжений $\sigma_y \rightarrow \max$ и максимума скорости обработки $V \rightarrow \max$ при задании значений минимальной глубины трещины $L \geq 0,0001$ м и максимальной температуры в зоне обработки $T \leq 1473$ К.

3. По критериям максимума растягивающих напряжений $\sigma_y \rightarrow \max$ и максимума глубины трещины $L \rightarrow \max$ при задании значений максимальной температуры в зоне обработки $T \leq 1473$ К.

4. По критериям максимума растягивающих напряжений $\sigma_y \rightarrow \max$, максимума скорости обработки $V \rightarrow \max$ и максимума глубины трещины $L \rightarrow \max$ при задании значений максимальной температуры в зоне обработки $T \leq 1473$ К.

Для каждого варианта оптимизации определялись по три лучших кандидата. Результаты оптимизации приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Результаты оптимизации

Вариант	N	P1 V , м/с	P2 P , Вт	P3 R , м	P4 L , м	P5 T , К	P6 σ_y , Па
1	1	0,010	24,2	0,0015	0,00034	1473	14082363
	2	0,010	24,3	0,0015	0,00034	1467	14042311
	3	0,010	23,8	0,0015	0,00034	1471	14017589
2	1	0,030	28,1	0,0012	0,00011	1386	8727077
	2	0,030	26,4	0,0012	0,00011	1351	8419683
	3	0,030	16,8	0,0012	0,00010	971	5427482
3	1	0,010	28,9	0,0019	0,00040	1259	12110659
	2	0,010	28,1	0,0018	0,00038	1339	12994961
	3	0,010	23,0	0,0015	0,00034	1444	13695210
4	1	0,029	29,6	0,0018	0,00017	945	5531391
	2	0,028	25,9	0,0019	0,00020	838	4770144
	3	0,028	21,9	0,0020	0,00021	736	3952147

Из анализа данных, приведенных в таблице 2.3, видно, что лучшие кандидаты, определенные для каждого варианта оптимизации, имеют небольшие различия. Высокая термостойкость кварцевого стекла (коэффициент линейного термического расширения кварцевых стекол на порядок меньше, чем у большинства промышленных силикатных стекол [3], [26]) обуславливает невысокие значения напряжений σ_y , что осложняет разделение этого материала методом лазерного раскалывания и делает наиболее перспективным для применения на практике набор технологических параметров первого варианта оптимизации.

Заключение

В работе с использованием центрального композиционного плана эксперимента получена регрессионная модель лазерной резки кварцевого стекла. Установлено наличие необходимого соответствия регрессионной модели результатам конечно-элементного моделирования. Выполнена оценка влияния параметров обработки на глубину лазерно-индуцированной трещины и на максимальные значения температуры и напряжений растяжения в кварцевых пластинах. Для четырех вариантов постановки задачи проведена оптимизация параметров лазерного раскалывания кварцевых пластин с использованием генетического алгоритма MOGA, встроенного в модуль DesignXplorer программы ANSYS Workbench. Определены наборы параметров обработки, реализация которых на практике обеспечит эффективную реализацию процесса резки кварцевых стекол методом лазерного раскалывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арбузов, В.И. Основы радиационного оптического материаловедения. – Санкт-Петербург: СПб ГУ ИТМО, 2008. – 284 с.
2. Борисовский, В.Е. Развитие теории и разработка комплекса технологий и оборудования для лазерной обработки кварцевого стекла: автореф. дис. докт. техн. наук: 05.11.14 / В.Е. Борисовский; МГУПИ. – Москва, 2011. – 36 с.
3. Мачулка, Г. А. Лазерная обработка стекла / Г.А. Мачулка. – Москва: Сов. радио, 1979. – 136 с.
4. Способ резки неметаллических материалов: пат. 2024441 РФ, МКИ 5 C03B33/02 / В.С. Кондратенко; заявитель В.С. Кондратенко; заявл. 04.02.92; опубл. 12.15.94
5. Nisar, S. Laser glass cutting techniques – A review / S. Nisar // Journal of laser applications. – 2013. – Vol. 25, № 4. – P. 042010-1–11.
6. Гиндин, П.Д. Разработка новых технологий и оборудования на основе метода лазерного управляемого термораскалывания для обработки деталей приборостроения, микро- и оптоэлектроники: автореф. дис. докт. техн. наук: 05.11.14 / П.Д. Гиндин; МГУПИ. – Москва, 2009. – 43 с.
7. Шалупаев, С.В. Термоупругие поля, формируемые в твердых телах световыми и звуковыми потоками: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.05 / С.В. Шалупаев. – Минск, 1987. – 157 с.
8. Шершнев, Е.Б. Разработка и внедрение новых эффективных процессов в производство стеклоизделий с применением лазерной технологии: дис. ... канд. техн. наук: 05.17.11 / Е.Б. Шершнев. – Москва, 1990. – 145 с.
9. Никитюк, Ю.В. Физические закономерности лазерного термораскалывания силикатных стекол и алюмооксидной керамики: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.21 / Ю.В. Никитюк. – Гомель, 2009. – 165 с.
10. Shalupaev, S.V. Silica gel glasses after laser radiation / S.V. Shalupaev, A.V. Semchenko, Y.V. Nikitjuk // Material Science. – 2003. – Vol. 21, № 4. – P. 495–501.
11. Шершнев, Е.Б. Особенности лазерного раскалывания кварцевого стекла / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 39–44.
12. Инновационные технологии и оборудование субмикронной электроники / А.П. Достанко [и др.]; под ред. акад. НАН Беларуси А.П. Достанко. – Минск: Беларуская навука, 2020. – 260 с.
13. Parandoush, P. A review of modeling and simulation of laser beam machining / P. Parandoush, A. Hossain // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2014. – № 85. – P. 135–145.
14. Емельянов, В.В. Теория и практика эволюционного моделирования / В.В. Емельянов, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
15. Красновская, С. В. Обзор возможностей оптимизационных алгоритмов при моделировании конструкций компрессорно-конденсаторных агрегатов методом конечных элементов / С.В. Красновская, В.В. Напрасников // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2016. – № 2. – С. 92–98.
16. Multi-Objective Optimization of Microstructure of Gravure Cell Based on Response Surface Method / S. Wu, J. Xing, L. Dong, H. Zhu // Processes. – 2021. – № 9 (2). – P. 403
17. Griffiths, J. Optimization of process parameters in laser transmission welding for food packaging applications / J. Griffiths, C. Dowding // Procedia CIRP. – 2018. – Vol. 74. – P. 528–532. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procir.2018.08.130>
18. Grebenişan, G. The multi-objective genetic algorithm optimization, of a superplastic forming process, using ansys / G. Grebenişan, N. Salem // MATEC Web of Conferences. – 2017. – № 126. – P. 03003.
19. Определение оптимизационных подходов при проектировании системы охлаждения газового термоэлектрического генераторного модуля / К.В. Кружаев, Д.П. Шматов, К.В. Зубарев, И.Г. Перевезенцев // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2018. – Т. 14, № 3. – С. 93–100.
20. Спицина, Е.Е. Идентификация холодопроизводительности и теплоотдачи ньютоновского теплоносителя в блоке термоэлектрического охлаждения: дис. канд. техн. наук: 01.04.14 / Е.Е. Спицина. – Воронеж, 2019. – 138 с.
21. Steuer, R.E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations, and Application / R.E. Steuer. – New York: John Wiley & Sons, Inc, 1986.
22. Fonseca, C. Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation discussion and generalization / C. Fonseca, P. Fleming //

In Proceedings of The 5th International Conference on Genetic Algorithms; Morgan Kaufmann Publishers. – Inc.: San Francisco, CA, USA, 1993. – P. 416–423.

23. *Грошев, С.В.* Эффективность популяционных алгоритмов Парето-аппроксимации. Экспериментальное сравнение / С.В. Грошев, А.П. Карпенко, В.А. Мартынюк // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2016. – Т. 8, № 4. – DOI: <http://dx.doi.org/10.15862/67EVN416>

24. *Введение в ANSYS: прочностной и тепловой анализ: учебное пособие* / А.С. Шалумов [и др.]. – Ковров: КГТА, 2002. – 52 с.

25. *Коваленко, Л.Д.* Основы термоупругости / Л.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.

26. *Стекло* / А.А. Апен [и др.]; под общ. ред. Н.М. Павлушкина. – Москва: Стройиздат, 1973. – 487 с.

27. *Карзов, Г.П.* Физико-механическое моделирование процессов разрушения / Г.П. Карзов, Б.З. Марголин, В.А. Шевцова. – Санкт-Петербург: Политехника, 1993. – 391 с.

28. *Левин, В.А.* Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В.А. Левин, Е.М. Морозов, Ю.Г. Матвиенко. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 408 с.

29. *Планирование и анализ результатов эксперимента: учебное пособие* / А.П. Моргунов, И.В. Ревина; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2014. – 343 с.

30. *Адлер, Ю.П.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – Москва: Наука. – 1976. – 278 с.

31. *Карпушкин, С.В.* Теория инженерного эксперимента: учебное пособие для студентов дневного и заочного отделения, обучающихся по направлениям 15.04.01 «Машиностроение», 15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» / С.В. Карпушкин, А.О. Глебов. – ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов, 2017. – 81 с.

Поступила в редакцию 13.08.2021.

Информация об авторах

Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Сердюков Анатолий Николаевич – чл.-корр. НАН Беларуси, д.ф.-м.н., профессор
Аушев Игорь Юрьевич – к.т.н., доцент

УДК 538.951:620.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_29

ВЛИЯНИЕ ТЕРМООБРАБОТКИ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛОИСТЫХ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ

Д.Г. Пилипцов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

INFLUENCE OF HEAT TREATMENT ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF LAYERED CARBON COATINGS

D.G. Piliptsov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Методами инструментального индентирования определено влияние режимов термообработки на механические свойства покрытий на основе углерода и композиционных нитридных слоев. Установлено увеличение твердости (Al-TiN) / a-C покрытия до 19,7 ГПа после отжига в вакууме при 400° С. Определены отношения H/E , H^3/E^2 , характеризующие упругие свойства покрытий. Установлено увеличение стойкости к пластической деформации для покрытий, содержащих в своем составе алюминий после термообработки в вакууме. Анализ поведения коэффициентов упругого восстановления η_{IT} , полученных при разных глубинах индентирования, указывает на формирование более однородной объемной структуры и снижение градиента механических свойств по толщине в сравнении с неотожженными покрытиями.

Ключевые слова: углеродные покрытия, нитридные подслои, твердость, модуль упругости, наноиндентирование.

Для цитирования: Пилипцов, Д.Г. Влияние термообработки на механические свойства слоистых углеродных покрытий / Д.Г. Пилипцов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 29–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_29

Abstract. The influence of heat treatment modes on the mechanical properties of coatings based on carbon and composite nitride layers has been determined by the nanoindentation. An increase in the hardness of the (Al-TiN) / a-C coating to 19,7 GPa after annealing in vacuum at 400° C was established. The ratios H/E , H^3/E^2 were determined, which characterize the elastic properties of the coatings. An increase in the resistance to plastic deformation for coatings containing aluminum after heat treatment in vacuum has been established. The analysis of the elastic recovery coefficients η_{IT} obtained at different indentation depths indicates the formation of a more homogeneous structure and a decrease in the gradient of mechanical properties along the thickness in comparison with unannealed coatings.

Keywords: carbon coatings, nitride sublayers, hardness, elastic modulus, nanoindentation.

For citation: Piliptsov, D.G. Influence of heat treatment on the mechanical properties of layered carbon coatings / D.G. Piliptsov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 29–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_29 (in Russian)

Введение

В последние годы растет научный и коммерческий интерес к разработке и применению покрытий с нанокристаллической или аморфной структурой, сформированных с использованием вакуумных методов [1]–[3]. В зависимости от метода осаждения, химического состава и структуры возможно получать покрытия с высокой твердостью, достигающей значений 50–70 ГПа (например, кубический нитрид бора или алмазные покрытия) [2]–[4]. Однако покрытия с высокой твердостью имеют, как правило, и высокие значения модуля упругости (350–400 ГПа), который существенно снижает эксплуатационные свойства покрытий, осажденных на мягкие подложки. Углеродные покрытия (a-C) характеризуются уникальным набором механических свойств (высокая твердость, износостойкость, химическая стойкость и низкие значения коэффициента

трения) и широко используются в качестве защитных и упрочняющих покрытий [3]. Основные недостатки покрытий данной группы – это низкая адгезия к некоторым типам подложек, хрупкость, наличие высоких внутренних напряжений, а также термоокислительная деструкция, возникающая, в частности, в зоне фрикционного контакта при высокой температуре [5], [6]. Высокая хрупкость покрытий предъявляет дополнительные требования к условиям эксплуатации и конструкции рабочих узлов. Так, при осаждении покрытий на мягкие стальные подложки возможна их сильная пластическая деформация, приводящая к разрушению покрытий с их последующим откалыванием от подложки [7]. Поэтому актуальной является задача снижения модуля упругости при сохранении высоких значений твердости. Для определения перспективы применения разрабатываемых слоев в качестве

покрытий триботехнического назначения совместно с параметрами, характерными для кинетики трения, такими как коэффициент трения и износостойкость, важными являются стойкость к упругой деформации, определяемая как H/E (индекс пластичности) и стойкость к пластической деформации H^3/E^2 . Классификация материалов, согласно значениям данных параметров, позволяет охарактеризовать как структурное состояние, так и оценить износостойкость осажденных покрытий [6]–[8]. Эта закономерность была подтверждена теоретически и экспериментально [7], [9], [10].

Известно, что возникающие в области фрикционного контакта напряжения приводят не только к деформации покрытия, но и росту температуры, которая активизирует фазовые переходы и взаимодействие между элементами в покрытии [11]. Предварительная термообработка покрытий, особенно многокомпонентных, позволяет стабилизировать структуру и значительно уменьшить влияние высоких температур, возникающих при трении, на процессы химического взаимодействия между элементами покрытия [11]–[13].

Термообработка легированных а-С покрытий изменяет фазовый и химический состав углеродной компоненты покрытия и способствует формированию кластеров карбида металла, неоднородно распределённых по объёму аморфной углеродной матрицы; регулируя режимы термообработки многослойных композиционных покрытий, возможно изменять толщину диффузного слоя на границе металл/углерод и добиться полного растворения углерода в подслое металла с образованием твердых растворов, что приводит к изменению его механических свойств [10], [13], [14]. Параметры термообработки (температура отжига, длительность, наличие защитной атмосферы) оказывают неоднозначное влияние на структуру и механические свойства многокомпонентных и многослойных покрытий,

активируя формирование не только химических соединений, но и твердых растворов, промежуточные или тернарные фазы которых способствуют снижению внутренних напряжений, повышают трещиностойкость и снижают их хрупкость [3], [4], [14]–[17]. Таким образом, изучение процессов, протекающих при термообработке, и оценка их влияния на механические свойства покрытий на основе нитридов сложного состава и углерода представляется актуальной научной и практической задачей.

Целью данной работы является установление закономерностей влияния условий термообработки на механические свойства покрытий на основе аморфного углерода, осажденного на композиционные нитридные слои.

1 Методика эксперимента

На рисунке 1.1 представлена схема оборудования для осаждения композиционных покрытий.

Покрытия на основе аморфного углерода, содержащие композиционный нитридный (Cu-TiN , Al-TiN , Al-CrN , Cu-CrN , Cu-ZrN и Al-ZrN) подсло, были осаждены в вакууме при парциальном давлении азота $3 \cdot 10^{-2}$ Па. Осаждение композиционных нитридных слоев осуществляли из совмещенных потоков металлической плазмы (метод КИБ) (рисунок 1.1). Углеродная компонента покрытия осаждалась из потока углеродной плазмы, формируемой распылением графитового катода импульсной дугой при частоте 5 Гц и напряжении разряда 350 В.

В качестве подложек использовали полированные пластины монокристалла кремния (100). Перед размещением в вакуумной камере подложки очищали в ультразвуковой ванне в этаноле, а затем промывали в дистиллированной воде. Перед нанесением покрытий проводили очистку подложек аргоновой плазмой с плотностью тока 25 А/м^2 и энергией ионов аргона 150 эВ, генерируемой с помощью ионного источника типа АИДА.

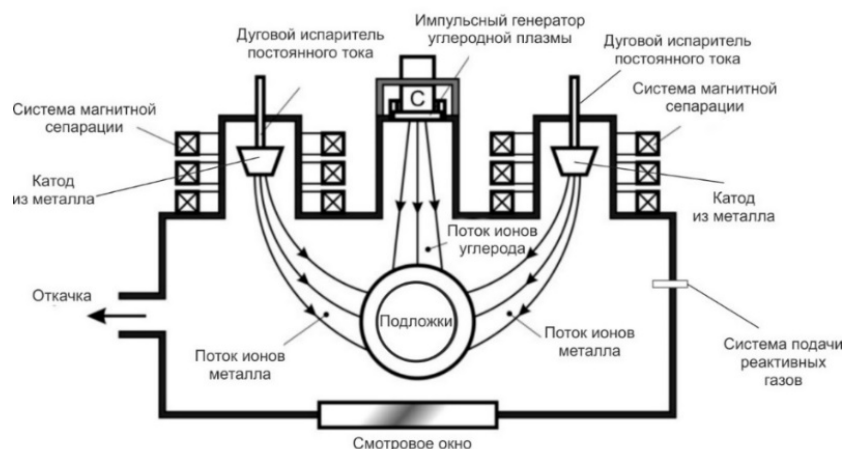


Рисунок 1.1 – Схема вакуумной установки для формирования покрытий на основе углерода, содержащих нитридные слои, легированные металлами

Элементный состав покрытий изучали с использованием сканирующего электронного микроскопа Stereoscan-360 (Cambridge Instruments, Англия), оснащенного приставкой для проведения рентгеновского микрозондового анализа (AN 10000 Link Analytical, Англия). Спектры были получены с площади 5×5 мкм в семи случайным образом выбранных точках каждого образца. Толщины покрытий лежали в диапазоне $700 \div 850$ нм.

Термообработку покрытий проводили при температурах 400°C и 200°C как в вакууме (Dentamatic 500/Chameleon-MX), при остаточном давлении 8 Па, так и на воздухе (SNOL 8.2/1100). Выбор температуры отжига определялся термостойкостью углеродной компоненты покрытия. Время отжига составляло 60 минут. После отжига образцы остывали вместе с печью, при использовании вакуумной печи остывание происходило при постоянном поддержании пониженного давления.

Механические параметры покрытий (твердость H и модуль упругости E) измерялись методом инструментального наноиндентирования («НаноСкан 4D» ФГБНУ «ТИСНУМ» г. Троицк, РФ) с использованием алмазного индентора типа Беркович с однократным нагружением и разгрузением в режиме с линейной разверткой прикладываемой силы. С целью обеспечения метрологически достоверных значений измеренных параметров, на каждом образце покрытий проводилось 15 измерений при идентичных условиях нагружения, затем результаты усредняли. Перед началом измерений проводилась калибровка податливости системы и формы индентора на эталонном образце с известным модулем упругости и твердостью (плавленый кварц) [18], [19].

Для характеристики упругих свойств покрытий использовали коэффициент упругого восстановления η_{IT} (%), показывающий относительный вклад изменения формы отпечатка, вызванный упругими свойствами материала и зависящий от способности материала сохранять форму отпечатка, полученного при максимальной нагрузке после отвода индентора от поверхности, и определяемый согласно выражению (1.1)

$$\eta_{IT} = \left(\frac{h_{\max} - \Delta h}{h_{\max}} \right) \cdot 100\%, \quad (1.1)$$

где $h_{\max}$ – максимальная глубина внедрения индентора, получаемая при достижении максимальной нагрузки $P_{\max}$, нм; Δh – величина полного восстановления, нм.

При высоких значениях η_{IT} исследуемое покрытие характеризуется высоким сопротивлением усталостного разрушения, особенно в циклических режимах нагружения, высокими демпфирующими свойствами, а также способностью материала упруго деформироваться без разрушения [20]. Для исследуемых покрытий коэффициент упругого восстановления определялся при разных нагрузках, а именно: $P_1 = 5$ мН, $P_2 = 15$ мН и $P_3 = 30$ мН, которые обеспечивали максимальные глубины вдавливания порядка 100 нм, 250 нм и 350 нм. Анализ величин, полученных методом наноиндентирования, позволит оценить перспективу трибологического применения покрытий [4], [7]–[9].

2 Результаты и их обсуждение

В таблице 2.1 приведен элементный состав покрытий, осажденных на подслои различного состава.

Согласно таблице 2.1 концентрация основного элемента нитридного слоя (Ti, Zr и Cr) не превышала 35 ат. %. Концентрация легирующего элемента (Cu, Al) достигала 12,8 ат. %. Количество азота в покрытиях позволило достичь максимальной его растворимости с образованием нитридных соединений. В случае малых концентраций азота наблюдается высокая концентрация металлической компоненты, не связанной с азотом, что, согласно [21], значительно снижает эксплуатационные свойства покрытий. При высоких концентрациях азота происходит образование нитридных соединений хрома, титана или циркония, характеризующихся высокой твердостью.

Известно [8], [9], [20], [21], что деформация, а соответственно, развитие трещин и разрушение покрытия при трении, определяются контактной нагрузкой, влияющей на толщину поверхностного деформированного слоя. Приведенные на рисунке 2.1 зависимости изменения глубины индентирования от приложенной нагрузки (кривые нагружения-разгрузки) позволяют установить свойства покрытий на различных расстояниях от поверхности.

Таблица 2.1 – Элементный состав покрытий, осажденных методом КИБ

Покрытие	Al, ат. %	Cu, ат. %	N, ат. %	Ti, ат. %	Cr, ат. %	Zr, ат. %	C, ат. %	O, ат. %
(Cu-TiN) / a-C	–	9,3	14,3	33,4	–	–	41,2	1,8
(Al-TiN) / a-C	10,6	–	11,3	29,5	–	–	46,1	2,5
(Al-CrN) / a-C	11,2	–	13,2	–	30,6	–	43,8	1,2
(Cu-CrN) / a-C	–	10,0	8,3	–	30,7	–	49,4	1,6
(Cu-ZrN) / a-C	–	9,6	15,3	–	–	27,6	45,3	2,2
(Al-ZrN) / a-C	12,8	–	10,7	–	–	31,2	42,5	2,8

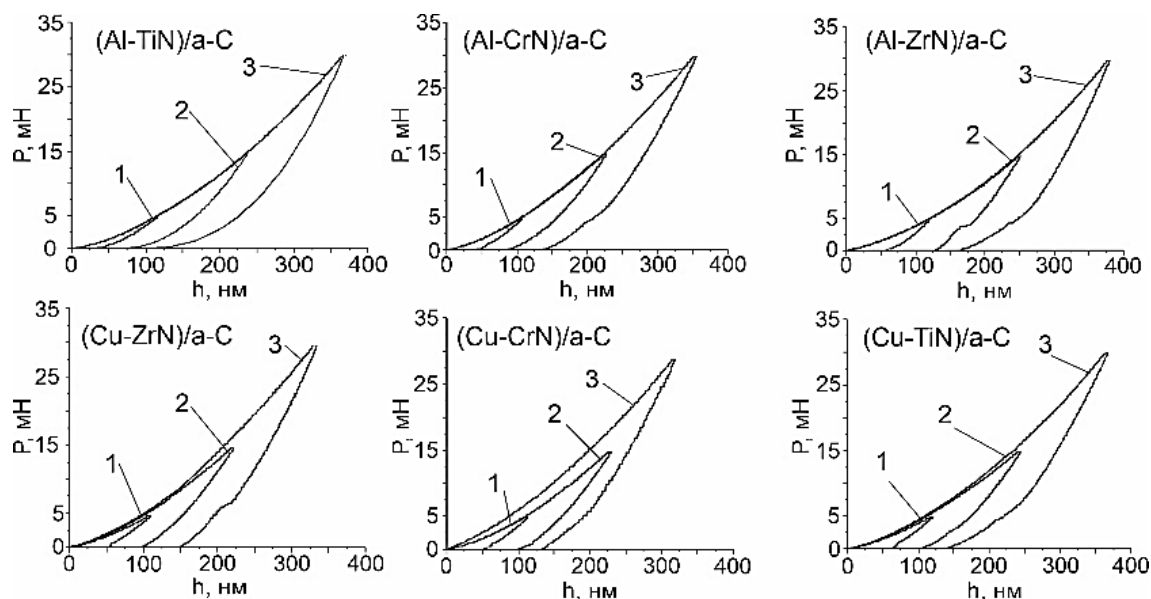


Рисунок 2.1 – Кривые (P–h) индентирования для покрытий при различной нагрузке:
1 – 5 мН, 2 – 15 мН, 3 – 30 мН

Таблица 2.2 – Результаты определения физико-механических свойств, композиционных покрытий сложного состава

Покрытие	H_{cp} , ГПа	E_{cp} , ГПа	H/E	H^3/E^2	η_{IT} , %		
					P_1 , мН	P_2 , мН	P_3 , мН
(Al-TiN) / a-C	16,9±1,1	223,6±15,6	0,08	0,097	67,0	68,2	70,0
(Al-CrN) / a-C	16,3±0,9	227,3±14,9	0,08	0,084	59,0	61,0	63,1
(Al-ZrN) / a-C	15,9±1,3	229,3±16,2	0,07	0,076	54,1	58,0	66,2
(Cu-ZrN) / a-C	14,9±1,9	206,1±13,4	0,07	0,078	50,6	52,0	55,7
(Cu-CrN) / a-C	14,7±1,2	218,6±14,7	0,07	0,066	50,0	54,4	59,2
(Cu-TiN) / a-C	14,9±2,0	207,1±15,3	0,07	0,077	49,0	55,6	58,8

Усредненные механические параметры покрытий приведены в таблице 2.2 и использовались для расчета упругих свойств покрытий. Согласно (1.1) определен коэффициент упругого восстановления η_{IT} покрытий при различных нагрузках на индентор (таблица 2.2).

Для однокомпонентных покрытий на основе аморфного углерода значения H/E находятся в диапазоне 0,08–0,1 (для нитридных TiN, CrN, ZrN покрытий $H/E \approx 0,08$). Введение легирующих металлов в объем композиционного покрытия позволяет уменьшить H/E , тем самым увеличив пластичность покрытий, оказав при этом незначительное влияние на твердость полученных слоев [7]–[9].

Как видно из таблицы 2.2, максимальные значения H^3/E^2 показывают покрытия, легированные алюминием, т. к. алюминий, согласно данным рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии, частично вступил в реакцию с азотом с образованием AlN, снизив при этом концентрацию металлической компоненты, что привело к росту индекса упругого восстановления. Характер кривых индентирования указывает на упругое восстановление области контакта для

Al-TiN/a-C покрытий. Рост значений η_{IT} при больших глубинах индентирования определяется влиянием механических свойств кремниевой подложки [5], [6], [20].

Значения η_{IT} полученных покрытий значительно меньше, чем для алмазоподобных покрытий, величина упругого восстановления которых, согласно [7], сильно зависит от метода получения и находится в диапазоне от 70 до 95%. Характер изменения η_{IT} с ростом глубины внедрения индентора указывает на влияние подслоя нитрида на упругие свойства покрытия, при этом установлено, что для покрытий, содержащих алюминий, наблюдаются более высокие значения данного коэффициента, что связано с формированием прочной карбидно-нитридной матрицы, способной более эффективно рассеивать энергию, приводящую к деформации покрытия под индентором. Для покрытий, осажденных на подслои нитридов, содержащих медь, при малых нагрузках на индентор (глубина индентирования не более 100 нм) наблюдается снижение η_{IT} до 50%, определяемое ростом концентрации металлической компоненты.

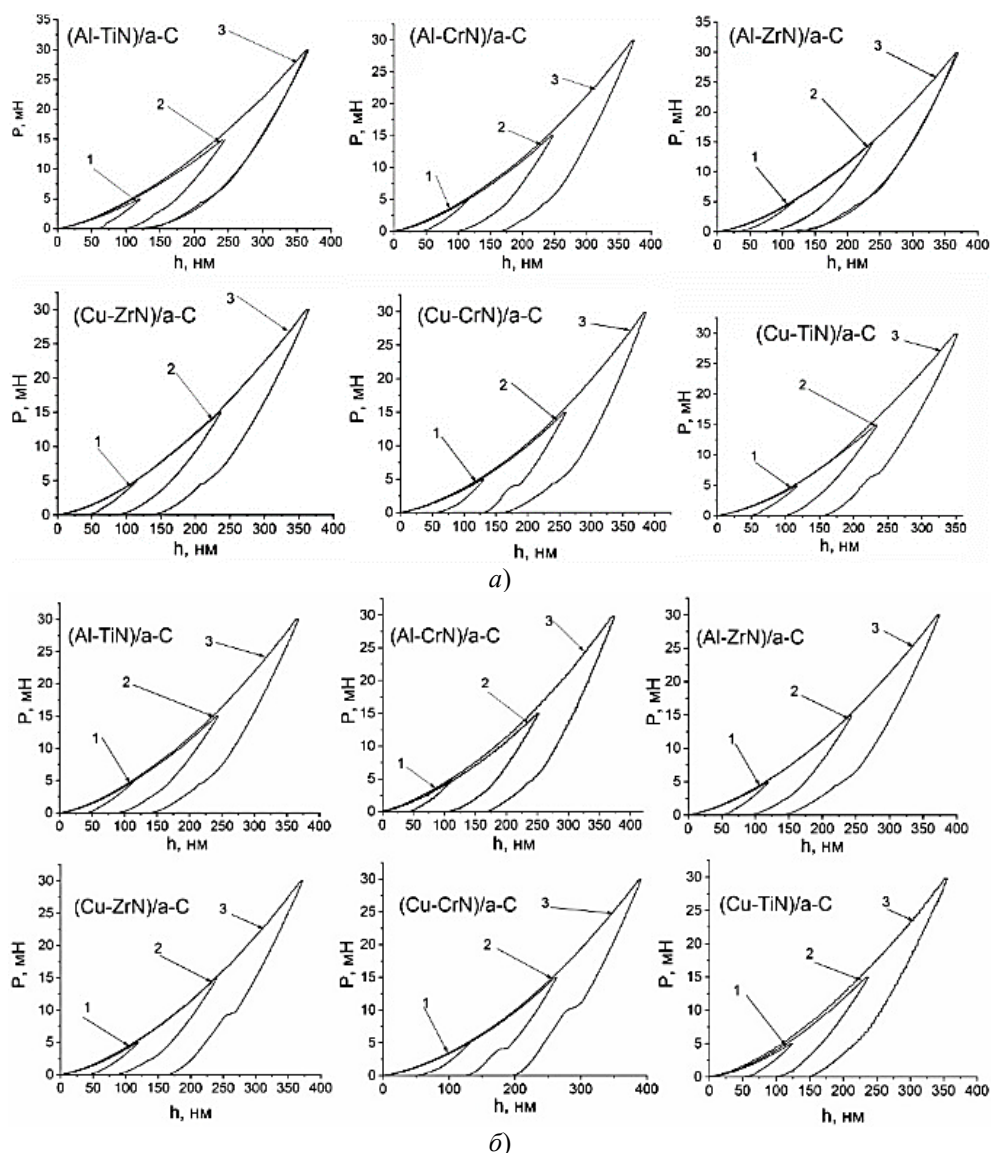


Рисунок 2.2 – Кривые (P–h) индентирования для покрытий после термообработки на воздухе при а) 400° С, б) 200° С (1 – 5 мН, 2 – 15 мН, 3 – 30 мН)

На рисунках 2.2–2.3 представлены результаты индентирования покрытий после проведения термообработки. Приведенные в таблицах 2.3–2.4 данные показывают изменение механических свойств покрытий за счет протекания процессов в верхнем углеродном слое, связанных с термоокислительной деструкцией и формированием диффузионных слоев на границе раздела а-С и $Me_1 - Me_2N$ компонент покрытия.

На рисунке 2.3 приведены P-h диаграммы для осажденных покрытий после термообработки на воздухе.

Результаты обработки кривых индентирования приведены в таблице 2.3. Стоит отметить, что наблюдается изменение формы кривых, в сравнении с рисунком 2.1, а также увеличение их гистерезиса.

Согласно таблице 2.3, при термообработке при 400° С на воздухе наблюдается снижение

твердости покрытий, содержащих композиционный нитридный подслои легированный медью, что связано с усилением процесса термоокислительной деструкции, приводящей к разрушению и выгоранию углеродной компоненты покрытия и снижению ее толщины [21], [22]. Наблюдаемое снижение η_{IT} для покрытий, содержащих медь, определяется ростом графитовой (sp^2) компоненты в углеродном слое как под воздействием температуры, так и за счет каталитического влияния меди на процессы формирования углеродной фазы с sp^2 гибридизованными связями, которая также являясь химически инертной по отношению к углероду и азоту, находится в объеме покрытия в виде металлических включений [14], [23]. Твердость покрытий, содержащих в своем составе нитридные слои, легированные медью, снижается, что, согласно работе [5], [14], [23], определяется перестройкой структуры углеродной

Таблица 2.3 – Механические свойства покрытий после термообработки на воздухе

Покрытие	H_{cp} , ГПа	E_{cp} , ГПа	H / E	H^3 / E^2	$\eta_{IT}, \%$		
					P_1 , мН	P_2 , мН	P_3 , мН
термообработка при 400° С							
(Al-TiN) / a-C	14,9 ± 1,9	160,1 ± 19,3	0,09	0,131	54,1	58,3	54,2
(Al-CrN) / a-C	15,7 ± 2,6	166,9 ± 18,8	0,09	0,139	41,1	60,2	56,2
(Al-ZrN) / a-C	15,1 ± 2,9	135,1 ± 19,2	0,12	0,188	32,2	34,4	33,7
(Cu-ZrN) / a-C	13,8 ± 2,3	140,6 ± 18,0	0,10	0,132	45,7	44,2	45,4
(Cu-CrN) / a-C	13,6 ± 2,5	153,6 ± 17,2	0,09	0,107	47,7	50,9	44,7
(Cu-TiN) / a-C	14,3 ± 1,8	166,5 ± 17,0	0,09	0,107	39,1	40,4	39,2
термообработка при 200° С							
(Al-TiN) / a-C	15,5 ± 4,2	163,5 ± 18,8	0,09	0,139	41,6	38,8	39,4
(Al-CrN) / a-C	15,9 ± 2,2	162,7 ± 15,4	0,10	0,151	42,7	44,4	46,2
(Al-ZrN) / a-C	14,4 ± 5,3	156,1 ± 19,5	0,09	0,122	44,5	39,3	40,1
(Cu-ZrN) / a-C	14,8 ± 1,9	154,1 ± 16,2	0,09	0,136	39,8	37,6	45,2
(Cu-CrN) / a-C	14,4 ± 1,0	159,1 ± 17,1	0,09	0,117	42,7	48,8	51,2
(Cu-TiN) / a-C	15,0 ± 1,9	164,5 ± 18,6	0,09	0,124	47,1	44,1	42,7

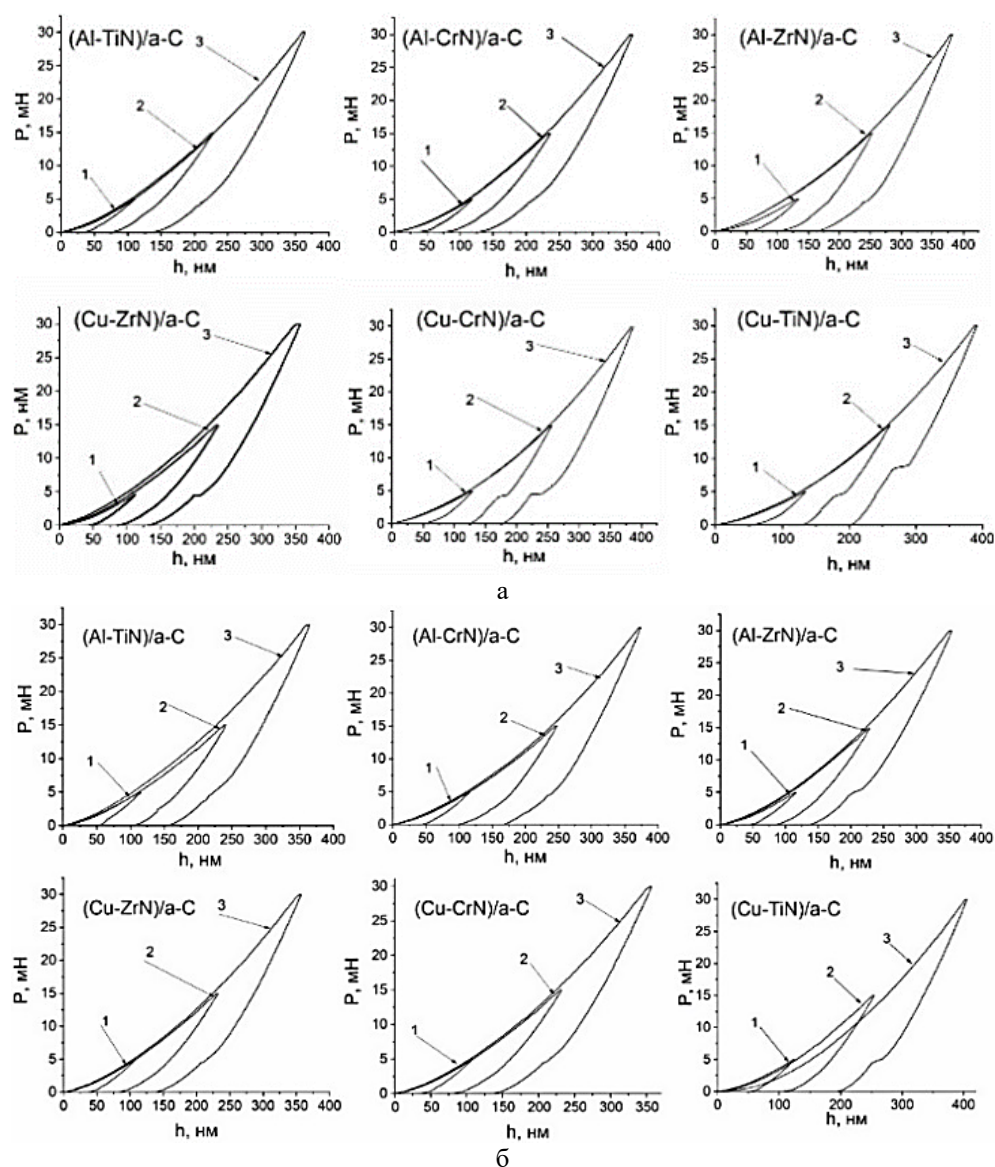
Рисунок 2.3 – Кривые (P–h) индентирования для покрытий после термообработки в вакууме при:
а) 400° С, б) 200° С (1 – 5 мН, 2 – 15 мН, 3 – 30 мН)

Таблица 2.4 – Результаты определения механических свойств композиционных покрытий после термообработки в вакууме

Покрытие	H_{cp} , ГПа	E_{cp} , ГПа	H / E	H^3 / E^2	η_{IT} , %		
					P_1 , мН	P_2 , мН	P_3 , мН
термообработка при 400° С							
(Al-TiN) / a-C	19,7 ± 3,4	167,5 ± 17,2	0,12	0,274	35,4	36,5	39,7
(Al-CrN) / a-C	18,2 ± 2,1	170,7 ± 19,3	0,12	0,206	38,7	36,4	37,3
(Al-ZrN) / a-C	17,7 ± 2,4	166,9 ± 15,9	0,12	0,198	46,6	43,8	44,5
(Cu-ZrN) / a-C	14,8 ± 3,5	156,1 ± 15,6	0,09	0,133	41,9	37,9	37,2
(Cu-CrN) / a-C	14,5 ± 1,3	152,1 ± 15,6	0,09	0,131	43,7	49,4	46,4
(Cu-TiN) / a-C	13,6 ± 1,5	152,5 ± 17,2	0,08	0,108	44,7	50,9	52,4
термообработка при 200° С							
(Al-TiN) / a-C	15,4 ± 2,4	150,1 ± 22,2	0,10	0,162	46,9	45,0	43,4
(Al-CrN) / a-C	18,0 ± 2,4	166,8 ± 16,5	0,11	0,210	45,1	43,1	42,3
(Al-ZrN) / a-C	14,2 ± 2,5	161,8 ± 17,7	0,08	0,109	42,6	39,9	39,7
(Cu-ZrN) / a-C	14,1 ± 1,9	158,0 ± 18,5	0,09	0,112	39,6	37,5	40,4
(Cu-CrN) / a-C	13,6 ± 1,6	145,8 ± 17,5	0,09	0,119	40,5	37,6	39,8
(Cu-TiN) / a-C	14,5 ± 1,4	151,8 ± 15,7	0,09	0,133	48,6	46,6	48,8

матрицы, заключающейся в увеличении количества и размера Csp^2 кластеров углерода. Изменение значений H^3/E^2 покрытий при нагреве носит не однозначный характер и определяется протеканием химических процессов как на поверхности покрытия, так и в его объёме, приводящих к изменению толщины диффузионного слоя [24].

Температура отжига на воздухе покрытий, содержащих в нитридном слое алюминий, не оказывает существенного влияния на изменение механических свойств. Термодеструкция верхнего углеродного слоя начинается при температуре 200° С, что приводит к снижению его толщины и изменению фазового состава, в частности, возрастанию sp^2/sp^3 отношения (известно [3], [22], [25], что sp^3 компонента покрытия характеризуется более низкой термостойкостью в сравнении с графитовой sp^2), следовательно при измерении твердости и упругости основной вклад на полученные значения оказывает влияние композиционный нитридных подслоев. Как показано в [11], [26], изменение механических свойств углеродных покрытий, содержащих слой алюминия или нитрида алюминия, связано с формированием оксидов алюминия, твердость и механические свойства которого существенно отличаются от алюминия и нитрида.

На рисунке 2.3 представлены P-h диаграммы для осажденных покрытий после проведения отжига в вакууме при разных температурах.

Данные таблицы 2.4 показывают, что термообработка покрытий в вакууме при температуре 400° С приводит к увеличению твердости слоев и снижению модуля упругости в сравнении с неотожжёнными покрытиями. Такое влияние может быть объяснено увеличением кристалличности покрытий и образованием новых фаз за счет диффузии углерода в объём нитридных слоев

и его связывания с атомами металла (алюминия) и азота с образованием тернарных соединений Al-Ti-N [15], [26]. При этом твердость покрытий, содержащих медь, находится на уровне, характерном для неотожжённых слоев (таблицы 2.2 и 2.3).

Твердость покрытий, содержащих алюминий, превышает твердость покрытий, легированных медью (таблица 2.4). Известно [8], [21], [27], что при отжиге углеродных покрытий, легированных карбидообразующими соединениями, происходит увеличение твердости. Повышение твердости (Al-TiN) / a-C и (Al-CrN) / a-C покрытий, при термообработке (400° С) при пониженном давлении происходит из-за восстановления наведенных дефектов и межатомных связей, сформированных на границе раздела слоев.

Покрытия с высокой твердостью и более высокими значениями H/E отношения (содержащие подслои нитридов, легированных алюминием) показывают высокую износостойкость при трении в диапазоне невысоких нагрузок, так как позволяют обеспечить необходимую жёсткость системы «покрытие – подложка», и, несмотря на низкую твердость подложки, перераспределить нагрузку в области контакта. При дальнейшем увеличении нагрузки в области контакта, покрытия с данным набором механических свойств испытывают хрупкое разрушение (определяется высокими значениями η_{IT}). Поэтому снижение значений H/E позволяет увеличить деформацию за счет рассеивания значительной нагрузки, вызывающей эту деформацию. Более мягкие покрытия, содержащие подслои нитридов, легированных медью способны более эффективно снимать возникающие напряжения в области контакта, и, за счет более высокой текучести, показывать более высокую трещиностойкость.

Твердость и модуль упругости, приведённые в таблицах 2.2–2.4, определялись как средние значения результатов индентирования, при этом стоит отметить, что при глубине индентирования, не превышающей 50 нм, значения H достигали значений 28 ГПа, а значения E находились на уровне 300–350 ГПа, что указывает на высокую твердость поверхностного углеродного слоя. С ростом температуры отжига при термообработке на воздухе наблюдалось уменьшение значений твердости и снижение толщины слоя, характеризующегося высоким значениями твердости, что подтверждает протекание процессов термодеструкции углеродного слоя.

Установлено, что независимо от режима термообработки наблюдается увеличение сопротивления пластической деформации (критерий H^3 / E^2) по сравнению с неотожжёнными покрытиями. После термообработки в вакууме при 400°С происходит снижение η_{IT} и разброса его значений в зависимости от глубины индентирования, что подтверждает предположение о формировании более однородной объёмной структуры в сравнении с неотожжёнными покрытиями и снижении градиента механических свойств по толщине.

Влияние термообработки многокомпонентных покрытий на твердость носит не однозначный характер и определяется как снижением размера зерна и образованием более плотных структур, так и протеканием процессов термоокислительной деструкции или образования карбидных соединений с твердостью ниже, чем у углеродной матрицы [17], [21], [27].

Рост H^3 / E^2 отношения для покрытий с низкими значениями индекса упругого восстановления указывает на увеличение трещиностойкости покрытия в зоне трения, тогда как хрупкие покрытия с высоким модулем упругости характеризуются развитием разрушения покрытия в зоне трения, начинающегося с области максимальных контактных нагрузок, и ростом трещин в радиальном направлении, которые при их последующем объединении приводят к откалыванию покрытия, при этом твердые осколки находящиеся в зоне трения, работают как абразив и разрушают поверхность контртела и приводят к увеличению глубины дорожки трения [24].

При легировании твердого нитридного (TiN, ZrN, CrN) покрытия металлом (Cu), который не вступает во взаимодействие как с углеродом, так и азотом, этот металл будет заполнять межзеренное пространство нитридной матрицы и препятствовать движению дислокаций в зоне трения или после термообработки при высокой температуре происходит формирование нанозернистой композитной структуры с повышенным сопротивлением пластической деформации и увеличению твердости за счет эффектов Холла – Петча. Как правило все механизмы разрушения покрытия

основаны на увеличении пластической деформации под действием нагрузки, следовательно для использования покрытий как защитных и износостойких нужно найти баланс между твердостью покрытий и их стойкостью к пластической деформации под действием контактных нагрузок.

Выводы

С использованием вакуумно-плазменных методов осаждены покрытия на основе аморфного углерода, содержащие нитридные слои (TiN, CrN, ZrN), легированные Al, Cu. Методами индентирования определена твердость, модуль упругости и коэффициент упругого восстановления в зависимости от режима термообработки (200°С и 400°С). Показано, что при отжиге покрытий на воздухе при температуре 400°С наблюдается снижение твердости до значений, характерных для нитридного слоя, при этом твердость покрытий, содержащих нитридные слои, легированные алюминием, превышает твердость покрытий, содержащих медь. Установлено увеличение твердости (Al-TiN) / а-С покрытия до 19,7 ГПа при их отжиге в вакууме при 400°С.

Определены индекс пластичности H / E , стойкость к пластической деформации H^3 / E^2 . Установлено увеличение H^3 / E^2 для покрытий, содержащих в своем составе алюминий после термообработки в вакууме. Термообработка покрытий уменьшила разницу значений коэффициентов упругого восстановления η_{IT} , полученных при разных глубинах индентирования, что свидетельствует о формировании более однородной объёмной структуры, снижении градиента механических свойств по толщине в сравнении с неотожжёнными покрытиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boxman, R.L. Vacuum arc deposition: Early history and recent developments / R.L. Boxman // Proceedings of the XIX International Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum (ISDEIV), Xi'an, China. – Xi'an, 2000. – P. 1–8.
2. Stanishevsky, A.V. Fabrication, characterization, and postprocessing of cathodic-arc-derived hydrogen-free tetrahedral amorphous carbon / A.V. Stanishevsky // Handbook of Surfaces and Interfaces of Materials; edited by H.S. Nalwa. – 2001. – 333 p.
3. Bewilogua, K.I. History of diamond-like carbon films – From first experiments to worldwide applications / K.I. Bewilogua, D. Hofmann // Surface and Coatings Technology. – 2014. – Vol. 242. – P. 214–225.
4. Properties of superhard nc-TiN/a-BN and nc-TiN/a-BN/a-TiB₂ nanocomposite coatings prepared by plasma induced chemical vapor deposition / P. Karvankova [et al.] // Surface and Coating Technology. – 2005. – Vol. 200. – P. 2978–2989.

5. Влияние природы подложки и термообработки алмазоподобных покрытий на их триботехнические свойства / Н.И. Саян [и др.] // Трение и износ. – 2005. – Т. 26, № 2. – С. 182–186.
6. Kalin, M. Differences in the tribological mechanisms when using non-doped, metal-doped (Ti, WC), and non-metal-doped (Si) diamond-like-carbon against steel under boundary lubrication, with and without oil additives / M. Kalin, J. Vizintin // Thin Solid Films. – 2006. – Vol. 515, № 4. – P. 2734–2747.
7. Charitidis, C.A. Nanomechanical and nanotribological properties of carbon-based thin films: A review / C.A. Charitidis // Int. Journal of Refractory Metals & Hard Materials. – 2010. – Vol. 28. – P. 51–70.
8. Charitidis, C.A. Indentation Hardness Measurements at Macro-, Micro-, and Nanoscale: A Critical Overview / C.A. Charitidis // Tribol. Lett. – 2017. – Vol. 65. – P. 23.
9. Investigating the correlation between nano-impact fracture resistance and hardness / modulus ratio from nanoindentation at 25–500° C and the fracture resistance and lifetime of cutting tools with $Ti_{1-x}Al_xN$ ($x = 0.5$ and 0.67) PVD coatings in milling operations / B.D. Beake [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2007. – Vol. 201. – P. 4585–4593.
10. Leyland, A. On the significance of the H/E ratio in wear control: a nanocomposite coating approach to optimised tribological behavior / A. Leyland, A. Matthews // Wear. – 2000. – Vol. 246. – P. 1–11.
11. Investigation of high temperature wear resistance of $TiCrAlCN/TiAlN$ multilayer coatings over M2 steel / E.E. Sukuroglu [et al.] // J. of Adhesion Science and Technology. – 2018. – Vol. 32. – P. 1428–1436.
12. Bonding structure and mechanical properties of carbon nitride bilayer films with Ti and TiN interlayer / B. Zhou [et al.] // Surface and Interface Analysis. – 2014. – Vol. 345–346. – P. 460–475.
13. The effect of annealing on mechanical and tribological properties of diamond-like carbon multilayer films / W. Zhang [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2004. – Vol. 13. – P. 2166–2169.
14. Onoprienko, A.A. Structure evolution on annealing of copper-doped carbon film / A.A. Onoprienko, N.I. Danilenko, I.A. Kossko // Thin Solid Films. – 2007. – Vol. 515. – P. 6672–6675.
15. Choe, H.J. Tribological properties and thermal stability of $TiAlCN$ coatings deposited by ICP-assisted sputtering / H.J. Choe, S.-H. Kwon, J.-J. Lee // Surface and Coatings Technology. – 2013. – Vol. 228. – P. 282–285.
16. Wu, W.J. Thermal stability of diamond-like carbon films with added silicon / W.J. Wu, M.H. Hon // Surface and Coatings Technology. – 1999. – Vol. 111. – P. 134–140.
17. Characterisation of thermally annealed diamond like carbon (DLC) and silicon modified DLC films by Raman spectroscopy / A.A. Ogwu [et al.] // Physica B. – 1999. – Vol. 269. – P. 335–344.
18. Oliver, W.C. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments / W.C. Oliver, G.M. Pharr // J. of Materials Research. – 1992. – Vol. 7. – P. 1564–1583.
19. BS EN ISO 14577-2:2015. Metallic materials. Instrumented indentation test for hardness and materials parameters. Verification and calibration of testing machines.
20. Головин, Ю.И. Наноиндентирование и механические свойства твердых тел, в субмикробемах, тонких приповерхностных слоях и тонких пленках (обзор) / Ю.И. Головин // Физика твердого тела. – 2008. – Т. 50, № 12. – С. 2113–2142.
21. Leyland, A. Design criteria for wear-resistant nanostructured and glassy-metal coatings / A. Leyland, A. Matthews // Surface and Coatings Technology. – 2004. – Vol. 177–178. – P. 317–324.
22. Рогачев, А.В. Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–292.
23. Structure and optical properties of Cu-DLC composite films deposited by cathode arc with double-excitation source / B. Zhou [et al.] // Diamond & Related Materials. – 2016. – Vol. 69. – P. 191–197.
24. Structure, mechanical and tribological properties of Ti-doped amorphous carbon films simultaneously deposited by magnetron sputtering and pulse cathodic arc / M.Y. Ming [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2017. – Vol. 77. – P. 1–9.
25. Thermal stability evaluation of diamond-like nanocomposite coatings / W.J. Yang [et al.] // Thin Solid Films. – 2003. – Vol. 434. – P. 49–54.
26. Buyanovskii, I.A. Application of titanium nitride and titanium aluminonitride as intermediate layer for diamond-like coatings of steel parts / I.A. Buyanovskii, V.D. Samusenko, V.A. Levchenko // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2020. – Vol. 996. – P. 012008.
27. The Structure and Properties of Bilayer Carbon Films with Various Layer Thickness / Y. Liu [et al.] // Materials Performance and Characterization. – 2021. – Vol. 10, № 1. – P. 585–593.

Поступила в редакцию 15.10.2021.

Информация об авторах

Пилипов Дмитрий Геннадьевич – к.т.н., доцент

МОРФОЛОГИЯ И ФАЗОВЫЙ СОСТАВ НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, СФОРМИРОВАННЫХ НА ПОДСЛОЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ПОЛИТЕТРАФТОРЭТИЛЕН И ФОРМИАТ СВИНЦА

А.С. Руденков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

MORPHOLOGY AND PHASE COMPOSITION OF NANOSTRUCTURED CARBON COATINGS, FORMED ON THE SUBLAYER BASED ON POLYTETRAFLUOROETHYLENE AND LEAD FORMATE

A.S. Rudenkov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Определены особенности морфологии, фазового состава углеродных покрытий, осажденных на подслое на основе политетрафторэтилена и формиата свинца различного состава. Установлено влияние массового соотношения компонентов исходной мишени, используемой для осаждения подслоя, и термообработки углеродных покрытий на их морфологию и фазовый состав. Оценена эффективность использования оксидов металлов и карбонизированных полимерных слоев для заданного изменения фазового состава, рельефа углеродных покрытий.

Ключевые слова: углеродные покрытия, свинец, политетрафторэтилен, карбонизация, морфология, фазовый состав.

Для цитирования: Руденков, А.С. Морфология и фазовый состав наноструктурированных углеродных покрытий, сформированных на подслое, содержащем политетрафторэтилен и формиат свинца / А.С. Руденков // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 38–44. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_38

Abstract. The features of the morphology and phase composition of carbon coatings deposited on sublayers based on polytetrafluoroethylene and lead formate of various compositions have been determined. The effect of the mass ratio of the components of the initial target used for the deposition of the sublayer and the heat treatment of carbon coatings on their morphology and phase composition has been established. The efficiency of using metal oxides and carbonized polymer layers for a given change in the phase composition and relief of carbon coatings is estimated.

Keywords: carbon coatings, lead, polytetrafluoroethylene, carbonation, morphology, phase composition.

For citation: Rudenkov, A.S. Morphology and phase composition of nanostructured carbon coatings, formed on the sublayer based on polytetrafluoroethylene and lead formate / A.S. Rudenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 38–44. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_38 (in Russian)

Введение

Наноматериалы, наноструктурированные покрытия в настоящее время являются предметом широкого спектра исследований в связи с их уникальными физико-химическими, механическими, триботехническими, электрофизическими свойствами, эффективным применением при решении проблем машиностроения, электроники, химических отраслей, медицинской техники [1]–[8]. Существует два основных подхода к формированию наноструктурированных покрытий: обработка поверхности ранее осажденных покрытий с помощью лазерного излучения и направленных плазменных потоков [3], [5], [6] и формирование текстурированного рельефа в процессе образования наноструктур различной природы на поверхности либо в объеме матрицы [1], [2], [7]. Благодаря ряду преимуществ, в первую очередь относительно низкой температуре процесса, большое распространение получили импульсные лазерные и плазменные технологии [5], [6].

Благодаря относительной простоте процесса синтеза, сочетанию уникальных физико-химических и механических свойств углеродные покрытия находятся в центре внимания ученых [9]–[12], а работы по их физическому и химическому модифицированию характеризуются высокой актуальностью [1], [3], [7]. Например, авторы [3] значительно улучшили триботехнические свойства углеродных покрытий путем создания на их поверхности сетки лунок при помощи фемтосекундного лазера.

Большой актуальностью, по нашему мнению, характеризуются исследования, направленные на разработку комбинированных технологий формирования планарно-структурированных углеродных покрытий на микрогетерогенных подслоях, содержащих, например, наноразмерные компоненты с различной пластичностью и каталитической активностью по отношению к углероду. При осаждении на такие слои углеродного покрытия создаются условия для образования

поверхностных структур с различным фазовым составом и, соответственно, механическими свойствами. Пластичные участки подслоев инициируют процессы релаксации внутренних напряжений, что в итоге приводит к созданию определенной текстуры углеродного покрытия.

Целью настоящей работы является определение особенностей морфологии, фазового состава углеродных покрытий, осажденных на подслои на основе политетрафторэтилена и формиата свинца различного состава, а также влияния на них последующей термообработки.

1 Методика эксперимента

Экспериментальные образцы наноструктурированных углеродных покрытий с подслоем на основе политетрафторэтилена (ПТФЭ) и формиата свинца ($\text{Pb}(\text{HCOO})_2$) были сформированы на кремниевой подложке при помощи методики, сочетающей лазерное диспергирование композиционной мишени на основе ПТФЭ + $\text{Pb}(\text{HCOO})_2$ и осаждение углеродных слоев из плазмы импульсного катодно-дугового разряда.

При формировании подслоя ПТФЭ + $\text{Pb}(\text{HCOO})_2$ методом лазерного диспергирования использовался L-2137U+HG-5 (длина волны лазерного излучения – 532 нм; длительность импульса накачки в режиме модулированной добротности – 6 нс; энергия импульса накачки – 43 мДж; энергия лазерного импульса – 450 мДж; диаметр пятна лазерного излучения – 6 мкм). Осаждение углеродных слоев осуществлялось из углеродной плазмы импульсного катодно-дугового разряда (2500 импульсов, частота следования импульсов 5 Гц, напряжение разряда 350 В).

В дальнейшем образцы подвергались термообработке на воздухе в течение 1 часа при температуре 250°С. Выбранное значение температуры позволяет избежать плавления ПТФЭ (температура плавления ПТФЭ – 327°С) [13] и интенсивной графитизации углеродного слоя (свыше 350°С) [14], но при этом обеспечивается разложение формиата свинца ($T_{\text{разл}} = 190^\circ\text{C}$) [15].

Молекулярный состав формируемых покрытий определялся при помощи инфракрасного (ИК) Фурье спектрофотометра Vertex-70 (Bruker): диапазон сканирования 4000–300 cm^{-1} , разрешение 4 cm^{-1} . В качестве внутреннего стандарта выступали спектры углеводородных покрытий по полосе δ (C – H) при 1465 cm^{-1} .

Топография и морфологические особенности полученных покрытий были изучены методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) при использовании Solver Pro (NT-MDT, Москва, Россия) в полуконтактном режиме, область сканирования 4×4 мкм. Анализ полученных данных был выполнен при помощи специализированного программного комплекса Gwyddion, позволяющего рассчитать среднее арифметическое отклонение всех точек профиля шероховатости от средней линии на длине оценки (R_a); параметр оценки рельефа поверхности (R_{ms}), определяемый как корень квадратный из среднего квадрата расстояний вершин неровностей профиля до его средней линии; количество, среднюю высоту, диаметр и распределение по размеру отдельных структурных образований (зерен).

Фазовый состав наноструктурированных углеродных покрытий определялся методами спектроскопии комбинационного рассеяния (КР) при помощи спектрометра Senterra (Bruker, Германия) (длина волны возбуждающего излучения 532 нм, мощность 5 мВт).

2 Результаты и их обсуждение

Установлено, что вновь образованные композиционные слои на основе ПТФЭ и формиата свинца интенсивно сорбируют влагу. На это указывает присутствие в ИК-спектрах покрытий (рисунок 2.1) широкой полосы поглощения в области 3600–3000 cm^{-1} (валентные колебания ОН-групп). Наиболее высокие значения оптической плотности характерны для полос поглощения при 1590 и 1370 cm^{-1} . Отмеченные полосы указывают на присутствие в молекулярной структуре композиционного слоя ионизированных карбоксильных групп (COO^-) [16], [17].

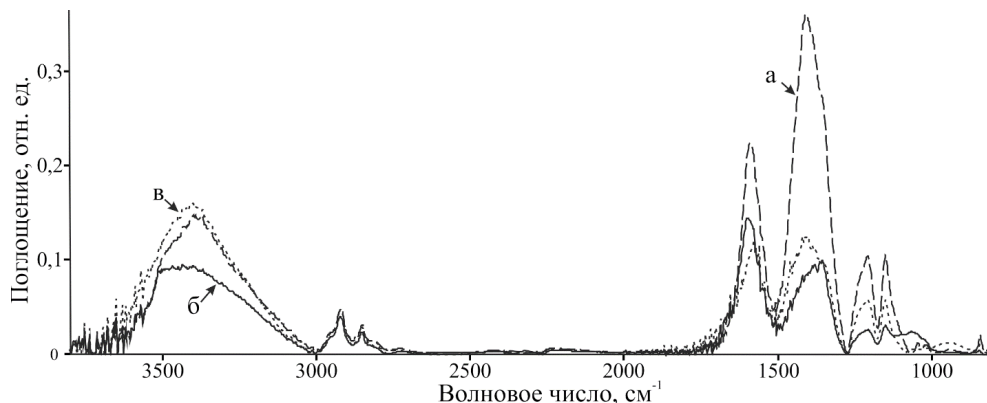


Рисунок 2.1 – ИК-спектры подслоя ПТФЭ + $\text{Pb}(\text{HCOO})_2$, сформированного путем лазерного диспергирования композиционной мишени с различным массовым соотношением компонентов: а – 1:1, б – 1:2, в – 2:1

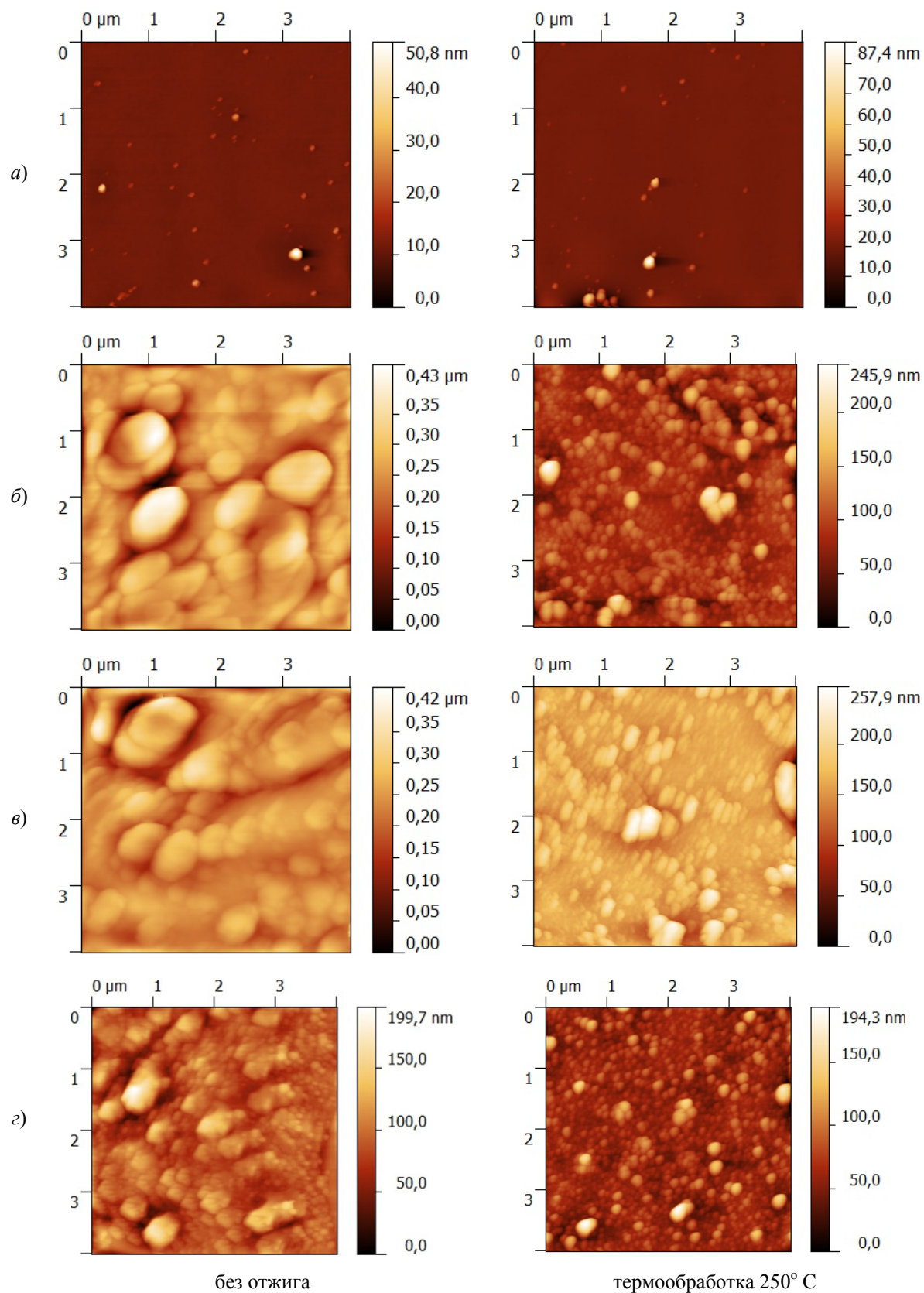


Рисунок 2.2 – АСМ изображения углеродных покрытий (а) и углеродных покрытий, сформированных на подслое ПТФЭ+ $\text{Rb}(\text{HCOO})_2$, полученном путем лазерного диспергирования композиционной мишени с различным массовым соотношением компонентов: б – 1:1, в – 1:2, г – 2:1

Поглощение в области волновых чисел (3000–2770 см⁻¹) вызвано валентными колебаниями С–Н связей. Все отмеченное выше является следствием присутствия в составе покрытия неразложившейся соли. Полосы поглощения при 1210 и 1150 см⁻¹ обусловлены валентными и деформационными колебаниями С–С и С–F (CF₂) связей [18].

В дальнейшем соотносили значения оптической плотности полос поглощения при 1590 и 1210 см⁻¹. Это необходимо для количественного анализа соотношения соли и фторсодержащего компонента. С этой целью составную полосу с максимумом при 1210 см⁻¹ раскладывали на составляющие полосы поглощения. Связано это с тем, что в области волновых чисел 1250–1200 см⁻¹, помимо полос, характерных для фторуглерода, присутствуют полосы поглощения СН₃ групп. Соотношение D₁₅₉₀ / D₁₂₁₀ равно 11,0, 3,0 и 3,1 для покрытий с исходным соотношением ПТФЭ и формиата свинца 1:2, 1:1 и 2:1 соответственно. Увеличение доли фторопласта в исходной мишени не сопровождается прогнозируемым снижением величины указанного соотношения. Следует отметить, что полоса при 1210 см⁻¹ в ИК-спектре ПТФЭ обусловлена валентными колебаниями С–С и С–F (CF₂) связей [17]. Лазерное воздействие способствует разрушению С–F связей, что и повышает долю углеродных структур (карбонизированных) в составе осаждаемого слоя. Таким образом, при увеличении в мишени доли фторопластового компонента, в зоне воздействия лазерного излучения в наибольшей степени реализуются процессы карбонизации фторуглеродного компонента.

Результаты АСМ (рисунок 2.2) свидетельствуют о том, что углеродные покрытия, сформированные на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂, обладают более развитой морфологией, чем углеродные покрытия без подслоя.

Статистический анализ данных АСМ (таблица 2.1) позволяет сделать вывод о том, что

основной вклад в структурирование углеродных покрытий вносит формиат свинца. Установлено, что углеродные покрытия, сформированные на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂, осаждаемом путем лазерного диспергирования исходной композиционной мишени с меньшим содержанием формиата свинца, характеризуются меньшими значениями субшероховатости, средней высоты и диаметра отдельных структурных образований.

Вышеуказанный вывод подтверждают и результаты атомно-силовой микроскопии углеродных покрытий после отжига. Наибольшим структурным изменениям вследствие термообработки оказались подвержены покрытия, формирование подслоя ПТФЭ + Pb(HCOO)₂ для которых осуществлялось путем лазерного диспергирования композиционной мишени с более высоким содержанием формиата свинца. После отжига субшероховатость снижается в 2 раза, количество зерен на площади сканирования увеличивается в 5–6 раз, диаметр отдельных структурных образований снижается почти в 3 раза, что может объясняться дальнейшим разложением формиата свинца:



Наличие неразложившегося формиата свинца в подслое подтверждается приведенными выше данными ИК-спектроскопии.

При этом необходимо отметить, что, несмотря на выделение газов в результате реакции, отслаивания покрытия не наблюдается. Данный факт может объясняться пористостью покрытия, а также высокой сорбционной активностью карбонизированного подслоя на основе ПТФЭ.

Таким образом, использование ПТФЭ + Pb(HCOO)₂ в качестве подслоя в сочетании с последующей термообработкой позволяет структурировать углеродные покрытия и повысить их дисперсность.

Таблица 2.1 – Анализ морфологии углеродных покрытий, сформированных на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂

Образец	Соотношение ПТФЭ к Pb(HCOO) ₂ в исходной мишени	Средняя высота, нм	R _a , нм	R _{ms} , нм	Плотность зерен, шт.	Средний диаметр зерен, нм
С	–	11,9 / 21,08	0,4 / 0,7	1,5 / 2,9	48 / 34	62 / 66
ПТФЭ + Pb(HCOO) ₂ / С	1:1	253,8 / 94,4	37,2 / 18,2	51,3 / 25,3	35 / 198	345 / 113
ПТФЭ + Pb(HCOO) ₂ / С	1:2	235,8 / 165,3	29,6 / 13,3	39,3 / 19,5	28 / 185	358 / 116
ПТФЭ + Pb(HCOO) ₂ / С	2:1	92,2 / 66	15,4 / 13,4	20,8 / 19,2	101 / 297	178 / 102
* до / после термообработки						

Таблица 2.2 – Анализ КР спектров углеродных покрытий, сформированных на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂

Образец	Соотношение ПТФЭ к Pb(HCOO) ₂ в исходной мишени	D-пик		G-пик		I_D / I_G
		Положение, см ⁻¹	Ширина, см ⁻¹	Положение, см ⁻¹	Ширина, см ⁻¹	
С	–	1410 / 1417	194 / 200	1580 / 1585	214 / 206	0,33 / 0,37
ПТФЭ + Pb(HCOO) ₂ / С	1:1	1451 / 1475	226 / 243	1567 / 1570	191 / 188	0,42 / 0,69
ПТФЭ + Pb(HCOO) ₂ / С	1:2	1461 / 1472	243 / 238	1569 / 1572	184 / 186	0,55 / 0,72
ПТФЭ + Pb(HCOO) ₂ / С	2:1	1434 / 1435	229 / 244	1566 / 1575	192 / 187	0,36 / 0,41

* до / после термообработки

Анализ спектров комбинационного рассеяния углеродных покрытий (таблица 2.2), характеризующихся наличием широкого пика в диапазоне от 1800 см⁻¹ до 1000 см⁻¹, был выполнен по стандартной методике [19], [20], согласно которой углеродный пик раскладывается на две гауссианы – D- и G-пик. D-пик (1450 см⁻¹ – 1350 см⁻¹) соотносится с матрицей, представляющей собой сетку sp²-гибридизированных атомов углерода с включениями sp³-кластеров. G-пик расположен вблизи 1580 см⁻¹ и соответствует sp²-кластерам углерода [20]–[22].

Показано, что предварительное формирование подслоя на основе ПТФЭ + Pb(HCOO)₂, в общем случае, способствует сужению G-пика (рисунок 2.3) и его смещению в область низких волновых чисел, что свидетельствует об увеличении степени упорядоченности sp²-кластеров и снижении уровня внутренних напряжений, соответственно [20].

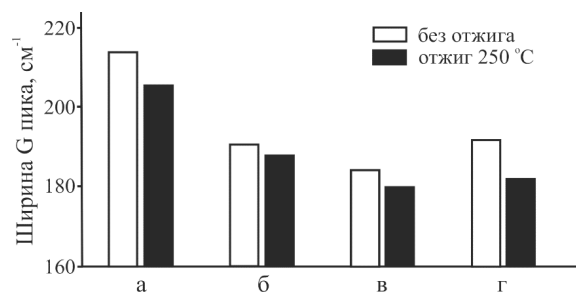


Рисунок 2.3 – Влияние термообработки на ширину G-пика углеродных покрытий (а) и углеродных покрытий, сформированных на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂, полученном путем лазерного диспергирования композиционной мишени с различным массовым соотношением компонентов: б – 1:1, в – 1:2, г – 2:1

Термообработка не вызывает существенных изменений ширины G-пика, т. е. степень структурной упорядоченности sp²-кластеров практически не изменяется.

Смещение положения D-пика в область более высоких волновых чисел в случае формирования углеродных покрытий на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂ и после термообработки может свидетельствовать о росте содержания нанокристаллического графита [21], что может быть следствием карбонизации подслоя в процессе лазерного диспергирования. Кроме того, такое смещение может быть обусловлено наличием С – Н связей, источником которых может являться фторопласт.

Соотношение интенсивностей I_D / I_G углеродных покрытий, сформированных на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂ выше (рисунок 2.4), чем у углеродных покрытий без подобного подслоя. Кроме того, показано, что указанное соотношение возрастает с увеличением содержания формата свинца в составе композиционной мишени, используемой при осаждении подслоя. Более высокие значения I_D / I_G в случае покрытий с подслоем могут быть обусловлены воздействием карбонизированных слоев ПТФЭ и наличием частиц оксида свинца, выступающих в роли активных центров для образования кластеров нанокристаллического графита [4].

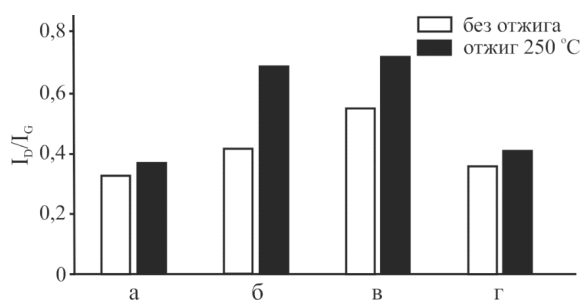


Рисунок 2.4 – Влияние термообработки на соотношение интенсивностей I_D / I_G углеродных покрытий (а) и углеродных покрытий, сформированных на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂, полученном путем лазерного диспергирования композиционной мишени с различным массовым соотношением компонентов: б – 1:1, в – 1:2, г – 2:1

Последующая термообработка углеродных покрытий, сформированных на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂, приводит к дальнейшему росту соотношения I_D / I_G , а значит и росту содержания sp²-кластеров. Однако температура отжига недостаточна для термоактивации интенсивных процессов графитизации [14]. На основании вышесказанного можно предположить, что оксид свинца, являющийся продуктом разложения формиата свинца при термообработке и в результате лазерного воздействия на мишень, может способствовать образованию sp²-кластеров как на стадии осаждения углеродных слоев, так и инициировать фазовые трансформации при отжиге, понижая температуру графитизации. Кроме того, высокому содержанию sp²-гибридизированных связей в углеродных покрытиях может способствовать карбонизация ПТФЭ в процессе лазерного диспергирования исходной мишени.

Выводы

Показано, что при формировании слоев ПТФЭ + Pb(HCOO)₂ методом лазерного диспергирования при увеличении в мишени доли фторопластового компонента в зоне воздействия лазерного излучения в наибольшей степени реализуются процессы карбонизации фторуглеродного компонента.

Установлено, что основной вклад в структурирование углеродных покрытий, нанесенных на подслой ПТФЭ + Pb(HCOO)₂, вносит формиат свинца. Углеродные покрытия, осаждаемые на подслои, сформированные путем лазерного диспергирования композиционной мишени с более высоким массовым содержанием формиата свинца, характеризуются большими значениями субшероховатости, средней высоты и диаметра отдельных структурных образований. Последующая термообработка позволяет существенно повысить дисперсность покрытий вследствие разложения формиата с образованием оксида свинца.

Формирование углеродных покрытий на подслое ПТФЭ + Pb(HCOO)₂ и последующая термообработка полученной бислойной системы приводит к росту соотношения интенсивностей I_D / I_G , сужению G-пиков их КР-спектров, а значит, к росту содержания sp²-кластеров и к увеличению степени их упорядоченности соответственно. Сделан вывод о том, что частицы оксида свинца могут способствовать формированию углеродных наноструктур и приводить к снижению температуры графитизации углеродных покрытий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nanostructured carbon materials for enhanced nitrobenzene adsorption: Physical vs. chemical surface properties* / A. Dasgupta [et al.] // Carbon. – 2018. – Vol. 139. – P. 833–844.

2. *Features of the formation of nanoparticles based on copper in thin-layer systems* / A.V. Rogachev [et al.] // Applied Surface Science. – 2014. – Vol. 317. – P. 449–456.

3. *Tribological behavior of hard carbon coatings on steel substrates* / F.E. Kennedy [et al.] // Wear. – 2003. – Vol. 255. – P. 854–858.

4. *Recent advances and future perspectives for carbon nanostructures reinforced organic coating for anti-corrosion application* / A. Hosseinpour [et al.] // Surfaces and Interfaces. – 2021. – Vol. 23. – Article 100994.

5. *Dependence of the specific features of two PAPVD methods: Impulse Plasma Deposition (IPD) and Pulsed Magnetron Sputtering (PMS) on the structure of Fe – Cu alloy layers* / K. Nowakowska-Langier [et al.] // Applied Surface Science. – 2013. – Vol. 275. – P. 14–18.

6. Wang, Z. Friction reduction of steel by laser-induced periodic surface nanostructures with atomic layer deposited TiO₂ coating / Z. Wang, Q-Z. Zhao // Surface and Coatings Technology. – 2018. – Vol. 344. – P. 269–275.

7. *A double layer nanostructure SiC coating for anti-oxidation protection of carbon / carbon composites prepared by chemical vapor reaction and chemical vapor deposition* / X. Yang [et al.] // Ceramics International. – 2013. – Vol. 39. – P. 5053–5062.

8. *Molecular structure, optical, electrical and sensing properties of PANI-based coatings with silver nanoparticles deposited from the active gas phase* / A.A. Rogachev [et al.] // Applied Surface Science. – 2015. – Vol. 351. – P. 811–818.

9. *Donnet, C. Tribology of Diamond-like Carbon Films: Fundamentals and Applications* / C. Donnet, A. Erdemir. – Springer Science & Business Media, 2007. – 680 p.

10. *Ferrari, A.C. Diamond-like carbon for magnetic storage disks* / A.C. Ferrari // Surface and Coatings Technology. – 2004. – Vol. 180–181. – P. 190–206.

11. *Yang, W. Catalytic chemical vapor deposition of methane to carbon nanotubes: copper promote defect of Ni / MgO catalysts* / W. Yang, Y. Feng, W. Chu // Journal of Nanotechnology. – 2014. – Vol. 8. – P. 547030–547035.

12. *Growth Mechanism of Single-Walled Carbon Nanotubes on Iron – Copper Catalyst and Chirality Studies by Electron Diffraction* / M. He [et al.] // Chemistry Materials. – 2012. – Vol. 24. – P. 1796–1801.

13. *Панишин, Ю.А. Фторопласты* / Ю.А. Панишин, С.Г. Малкевич, Ц.С. Дунаевская. – Москва: Химия, 1978. – 231 с.

14. *Stress reduction and bond stability during thermal annealing of tetrahedral amorphous carbon* / A.C. Ferrari [et al.] // Journal of Applied Physics. – 1999. – Vol. 85. – P. 7191–7197.

15. *CRC Handbook of Chemistry and Physics* / Ed. by J. Rumble. – Taylor & Francis Group, 2021. – 1624 p.
 16. *Growth feature of PTFE coatings on rubber substrate by low-energy electron beam dispersion* / Zhubo Liu, Bing Zhou, A.V. Rogachev, M.A. Yarmolenko // *Polymers for Advanced Technologies*. – 2016. – Vol. 27. – P. 823–829.
 17. *Features of electron beam deposition of polymer coatings with the prolonged release of the drug component* / Beibei Li [et al.] // *Materials Science & Engineering C*. – 2020. – Vol. 110. – Article 110730.
 18. *Инфракрасная спектроскопия полимеров*; под ред. И. Деханта. – Москва: Химия, 1972. – 472 с.
 19. *Robertson, J.* Electronic and atomic structure of amorphous carbon / J. Robertson, E.P. O'Reilly // *Physical Review B*. – 1987. – Vol. 35. – P. 2946–2957.
 20. *Ferrari, A.C.* Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon / A.C. Ferrari, J. Robertson // *Physical Review B*. – 2000. – Vol. 61. – P. 4095–4107.
 21. *Raman spectroscopy on amorphous carbon films* / J. Shwan [et al.] // *Journal of Applied Physics*. – 1996. – Vol. 80. – P. 440–447.
 22. *Ultraviolet Raman spectroscopy characterizes chemical vapor deposition diamond film growth and oxidation* / R.W. Bormett [et al.] // *Journal of Applied Physics*. – 1995. – Vol. 77. – P. 5916–5923.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «Разработка основ комбинированной технологии формирования планарно-структурированных углеродных покрытий из импульсной катодной углеродной плазмы и продуктов лазерного диспергирования полимерных материалов», комплексное 1.12 задание «Синтез наноконпозиционных пленочных структур, формирование материалов с высокими функциональными свойствами с использованием электронно-лучевых, ионных, лазерных методов обработки» ГПНИ «Фотоника и электроника для инновации», подпрограмма «Фотоника и ее применения».

Поступила в редакцию 17.09.2021.

Информация об авторах

Руденков Александр Сергеевич – к.т.н., доцент

ВЛИЯНИЕ СОСТАВА И УСЛОВИЙ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПРОЦЕССА НА СВОЙСТВА СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОНКИХ ПЛЕНОК ТИТАНАТА БАРИЯ-СТРОНЦИЯ

С.А. Хахомов¹, А.В. Семченко¹, В.В. Сидский¹, В.В. Васькевич¹, А.А. Маевский¹,
О.И. Тюленкова¹, В.Е. Гайшун¹, Д.Л. Коваленко¹, О.В. Пахомов², А.В. Еськов²,
А.А. Старков², А.Л. Холкин², В.А. Пилипенко³

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Университет ИТМО, Санкт-Петербург

³ОАО «ИНТЕГРАЛ», Минск

INFLUENCE OF THE COMPOSITION AND CONDITIONS OF THE SOL-GEL PROCESS ON THE PROPERTIES OF BARIUM-STRONTIUM TITANATE FERROELECTRIC THIN FILMS

S.A. Khakhomov¹, A.V. Semchenko¹, V.V. Sidsky¹, V.V. Vaskevich¹, A.A. Maevsky¹,
O.I. Tyulenкова¹, V.E. Gaishun¹, D.L. Kovalenko¹, O.V. Pakhomov², A.V. Es'kov²,
A.A. Starkov², A.L. Kholkin², V.A. Pilipenko³

¹Francisk Skorina Gomel State University

²ITMO University, St. Petersburg

³JSC «INTEGRAL», Minsk

Аннотация. Представлены результаты исследования влияния особенностей синтеза золь-гель методом, состава и термообработки на микроструктуру, топографию поверхности и сегнетоэлектрические свойства тонких золь-гель пленок $\text{Ba}_x\text{Sr}_{1-x}\text{TiO}_3$ ($x = 0,8; 0,9; 1$).

Ключевые слова: пленки BST, золь-гель метод, сегнетоэлектрики, гидролиз, поликонденсация, отжиг, сегнетоэлектрические свойства.

Для цитирования: Влияние состава и условий золь-гель процесса на свойства сегнетоэлектрических тонких пленок титаната бария-стронция / С.А. Хахомов, А.В. Семченко, В.В. Сидский, В.В. Васькевич, А.А. Маевский, О.И. Тюленкова, В.Е. Гайшун, Д.Л. Коваленко, О.В. Пахомов, А.В. Еськов, А.А. Старков, А.Л. Холкин, В.А. Пилипенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 45–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_45

Abstract. The results of study of the influence of the features of sol-gel synthesis, composition and thermal treatment on the microstructure, surface topography and ferroelectric properties of $\text{Ba}_x\text{Sr}_{1-x}\text{TiO}_3$ ($x = 0,8; 0,9; 1$) thin sol-gel films are presented.

Keywords: BST films, sol-gel method, ferroelectrics, hydrolysis, polycondensation, annealing, ferroelectric properties.

For citation: Influence of the composition and conditions of the sol-gel process on the properties of barium-strontium titanate ferroelectric thin films / S.A. Khakhomov, A.V. Semchenko, V.V. Sidsky, V.V. Vaskevich, A.A. Maevsky, O.I. Tyulenкова, V.E. Gaishun, D.L. Kovalenko, O.V. Pakhomov, A.V. Es'kov, A.A. Starkov, A.L. Kholkin, V.A. Pilipenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 45–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_45 (in Russian)

Введение

Среди множества материалов в последние годы особое внимание исследователей привлекают сегнетоэлектрические тонкие пленки. Сегнетоэлектрики в виде тонких пленок являются удобными объектами как для исследования размерных эффектов, так и для технических приложений. Перовскитные тонкие пленки титаната бария-стронция с общей формулой $\text{Ba}_x\text{Sr}_{1-x}\text{TiO}_3$ (BST) с составом, близким к фазовой границе, являются перспективными сегнетоэлектрическими материалами для широкого круга практических приложений [1]–[3]. Тонкие пленки

титанатов типа перовскита, такие как BaTiO_3 и $\text{Ba}_x\text{Sr}_{1-x}\text{TiO}_3$ широко используются в различных интегрированных устройствах (динамическая память с произвольным доступом (DRAM), разделительные конденсаторы, пьезоэлектрические инфракрасные (ИК) датчики и пьезоэлектрические микроактюаторы). Диэлектрические и сегнетоэлектрические свойства $\text{Ba}_x\text{Sr}_{1-x}\text{TiO}_3$ существенно зависят от содержания бария. При комнатной температуре $\text{Ba}_x\text{Sr}_{1-x}\text{TiO}_3$ является сегнетоэлектриком, если содержание бария находится в диапазоне $x = 0,7–1$, и параэлектриком, если содержание бария находится в диапазоне $x = 0–0,7$ [4].

Тонкие пленки BST могут быть синтезированы различными методами [1], [2]. Золь-гель метод имеет преимущества перед другими методами в чистоте, однородности, стоимости, контроле процесса и возможности осаждения тонких пленок на подложках большой площади.

Целью настоящего исследования являлось получение сегнетоэлектрических тонких пленок $Ba_xSr_{1-x}TiO_3$ (BST) золь-гель методом и исследование влияния содержания Ba и дополнительного отжига на микроструктуру, поверхность и сегнетоэлектрические свойства полученных тонких пленок $Ba_xSr_{1-x}TiO_3$ ($x = 1; 0,9; 0,8$).

1 Методика проведения синтеза и измерений

Золь-гель методом были синтезированы тонкие пленки $Ba_xSr_{1-x}TiO_3$ с различным соотношением Ba и Sr ($x = 0,8; 0,9; 1$). В качестве исходных соединений использовались ацетат бария Ba $(CH_3CHOO)_2$ (99,5%, BDH Chemicals), ацетат стронция $Sr(CH_3CHOO)_2$ (99%, Aldrich) и изопропоксид титана (IV) (97%, Aldrich). В качестве растворителя использовали уксусную кислоту CH_3COOH (99,8%, Merck), в качестве стабилизатора был выбран 2-метоксиэтанол. На первой стадии ацетаты бария и стронция растворяли в уксусной кислоте и в 2-метоксиэтаноле отдельно (раздельный гидролиз (РГ)) или в одной ёмкости (общий гидролиз (ОГ)) [3], затем перемешивали при 60° С в течение 60 мин на «плите-мешалке». Состав плёнообразующих растворов приведён в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Составы плёнообразующих растворов

Состав пленки	Краткое обозначение	Ba, моль	Sr, моль	№ образца (вид гидролиза)
$Ba_{0,8}Sr_{0,2}TiO_3$	BST 0,8	0,8	0,2	1 (РГ)
$Ba_{0,9}Sr_{0,1}TiO_3$	BST 0,9	0,9	0,1	2 (РГ)
$Ba_{0,9}Sr_{0,1}TiO_3$	BST 0,9	0,9	0,1	2 (ОГ)
$BaTiO_3$	BT	1	0	3 (РГ)

Полученные растворы наносили методом центрифугирования на поверхность пластин монокристаллического кремния с платиновым подслоем. После каждого нанесения слоя плёнки предварительно сушили в печи (SNOL) в течение 5 минут при температуре 250° С. После нанесения пятого слоя проводили отжиг при температуре 550° С в течении часа.

Морфология поверхности пленок была определена при помощи металлографического микроскопа XJM500, а фотографии были сделаны с помощью цифровой камеры Levenhuk M1400 PLUS.

Сегнетоэлектрические свойства полученных образцов исследованы по методике, описанной в [3].

2 Результаты исследований и их обсуждение

Представлены исследования топографии поверхности и остаточной поляризации многослойных образцов титаната бария-стронция в зависимости от методики получения (раздельный гидролиз и общий гидролиз всех компонентов), содержания бария и от дополнительного отжига.

Суть металлографического метода обнаружения дефектов заключается в получении информации о дефектном составе путем визуального и микроскопического анализа особенностей рельефа его поверхности (рисунок 2.1).

В результате применения раздельного гидролиза наблюдается уменьшение количества дефектов на поверхности плёнок и, как следует из рисунков 2.2–2.3, рост остаточной поляризации для полученных BST и BT пленок. Это связано с тем, что на стадии приготовления золя при использовании одного и того же растворителя раздельный гидролиз проходит полностью для каждого из соединений металлов в отличие от совместного гидролиза, где из-за различных скоростей реакции некоторые металлы гидролизуются не полностью, что приводит к увеличению результативности внешних воздействий, приводящих к растрескиванию пленки (рисунок 2.2). При неполной гидролизации металлов наблюдается нарушение целостности поверхности пленки BST. В процессе формирования (при применении раздельного гидролиза) тонких сегнетоэлектрических пленок BST происходит релаксация механических напряжений вследствие перехода послойного механизма роста к островковому, за счет чего снижается растрескивание пленки.

На рисунке 2.2 приведены петли гистерезиса для BST-пленок, полученных без дополнительного отжига. В целом, тонкие пленки, состоящие из более крупных зерен, имеют лучшие петли гистерезиса поляризации электрического поля с более высокой остаточной поляризацией, незначительно растущей с увеличением содержания Ba. Результаты остаточной поляризации $P_{ост}$ и коэрцитивной силы $E_{коэр}$ представлены в таблице 2.1.

После дополнительного отжига тонких пленок BST значения $P_{ост}$ и $E_{коэр}$ существенно увеличились (рисунок 2.3), за исключением пленки, синтезированной с применением общего гидролиза. Значения остаточной поляризации $P_{ост}$ и коэрцитивной силы $E_{коэр}$ представлены в таблице 2.1.

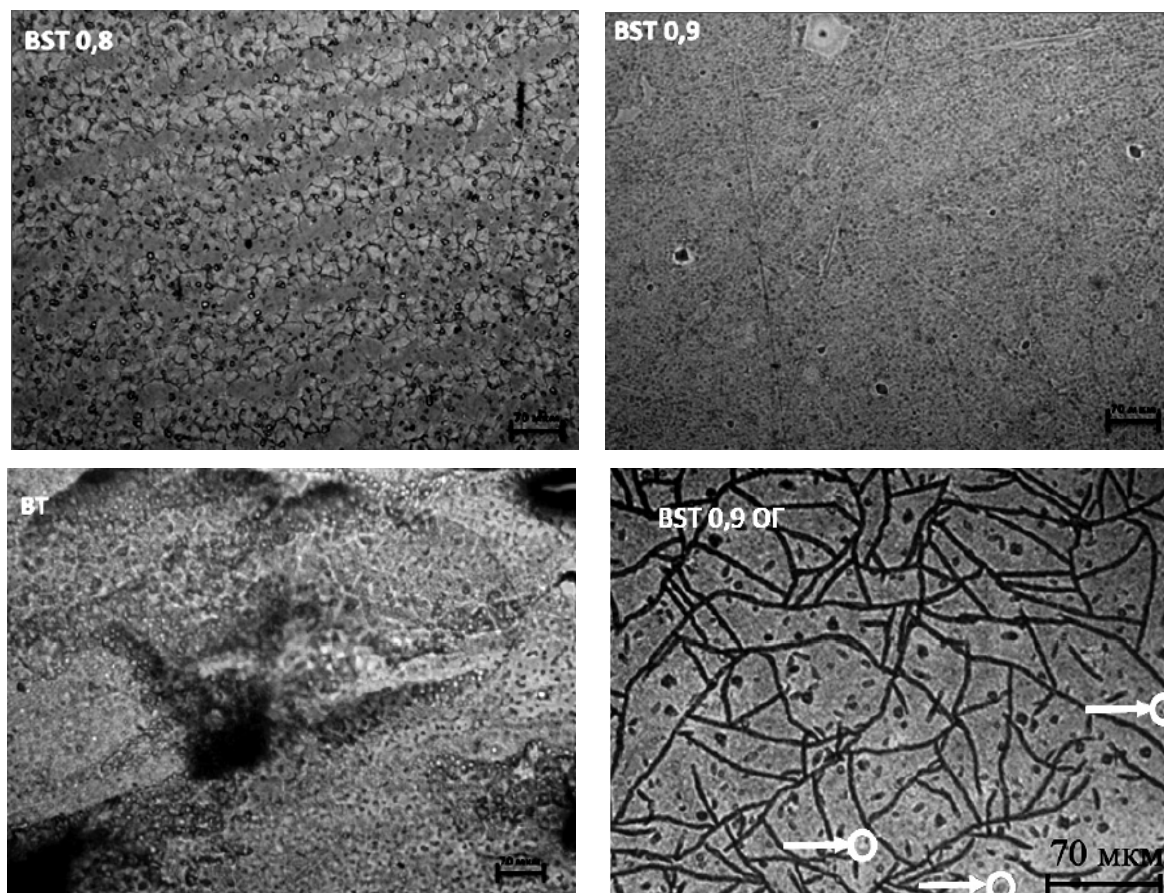


Рисунок 2.1 – Микрофотографии золь-гель пленок $\text{Ba}_x\text{Sr}_{1-x}\text{TiO}_3$ с различным соотношением Ba и Sr ($x = 0,8; 0,9; 1$), полученные с использованием раздельного (РГ) и общего гидролиза (ОГ)

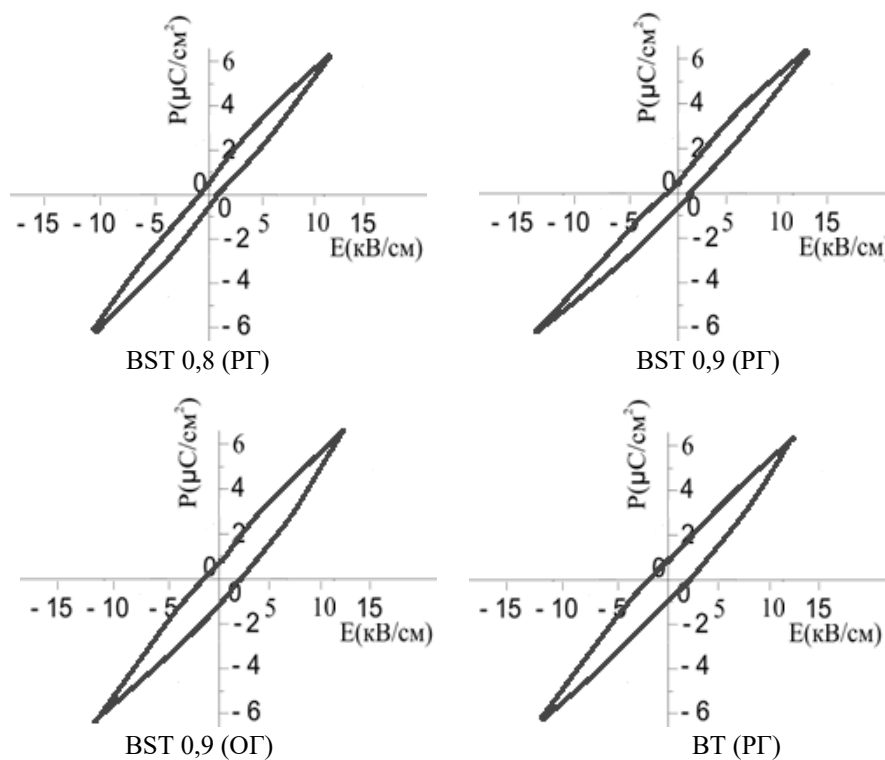


Рисунок 2.2 – Петли гистерезиса BST-пленок (без дополнительного отжига) с использованием раздельного (РГ) и общего гидролиза (ОГ)

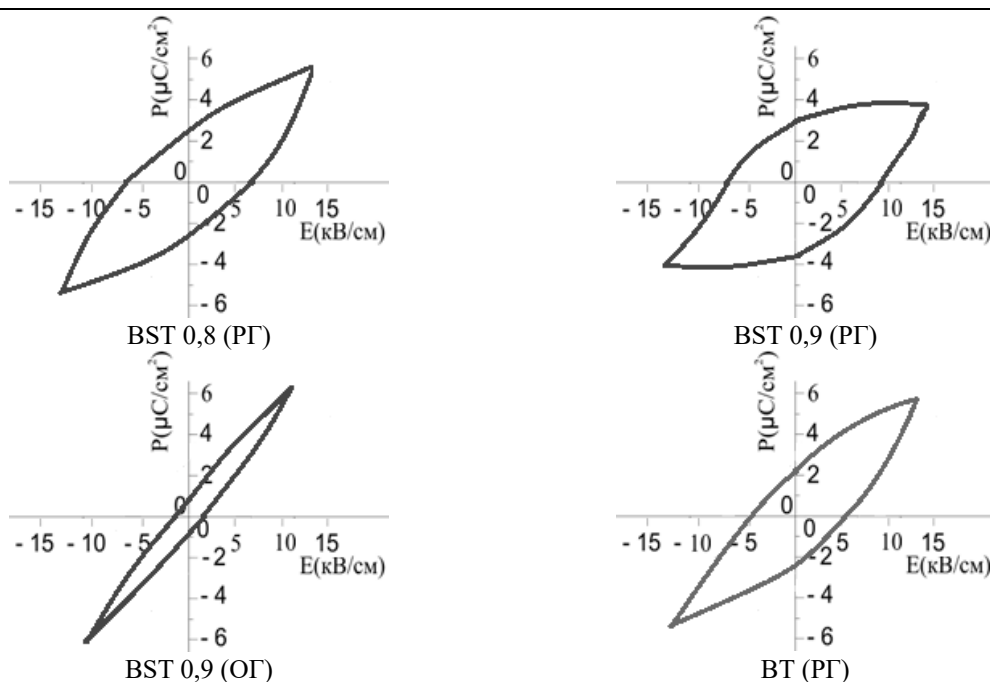


Рисунок 2.3 – Петли гистерезиса BST-пленок (с дополнительным отжигом) с использованием раздельного (РГ) и общего гидролиза (ОГ)

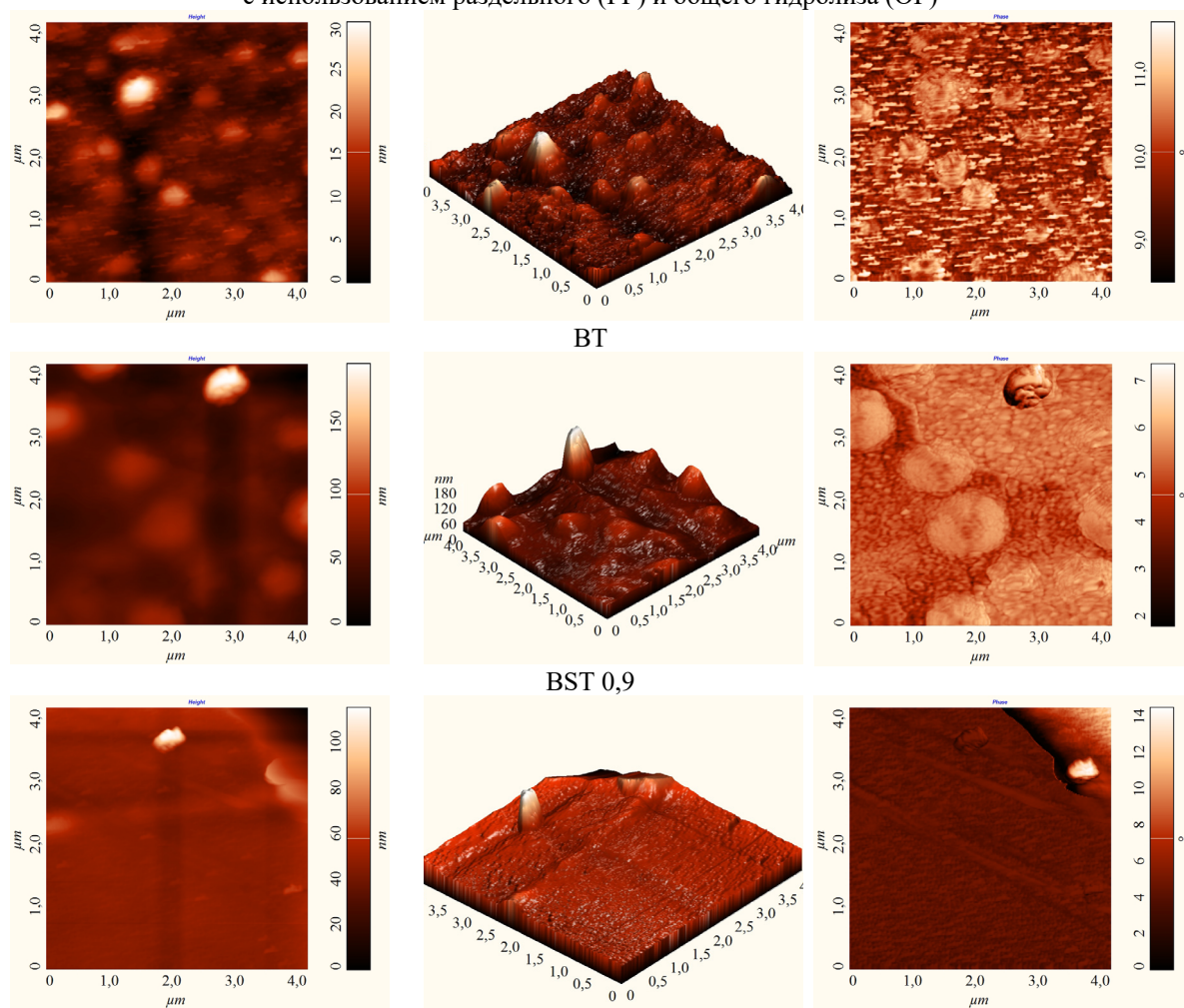


Рисунок 2.4 – АСМ изображения топографии поверхности BST-пленок, синтезированных с применением раздельного гидролиза (с дополнительным восстановительным отжигом)

Таблица 2.1 – Сегнетоэлектрические свойства BST-пленок, полученных золь-гель методом без дополнительного отжига с дополнительным отжигом

Образец	BST 0,8	BST 0,9 (ОГ)	BST 0,9	ВТ
$P_{ост}$, мкКл/см ²	<u>0,6</u> 2,6	<u>0,8</u> 0,8	<u>1,2</u> 3,2	<u>1,2</u> 2,2
$E_{коэр}$, кВ/см	<u>1</u> 7	<u>1,5</u> 1,0	<u>1,5</u> 8,0	<u>2</u> 5

На рисунке 2.4 приведены АСМ изображения топографии поверхности BST-пленок с различными концентрациями бария-стронция, полученных с применением раздельного гидролиза и с дополнительным восстановительным отжигом. Видно, что пленка BST 0,9 имеет крупнозернистую структуру. Характер поверхности определяется в значительной степени соотношением между свободной энергией свободной поверхности и свободной энергией межзеренных границ (ионы в области границ зерен и в приповерхностном слое обладают избыточной свободной энергией по сравнению с ионами в объеме зерен). Одной из причин формирования зерен в слое BST является рассогласование в параметрах кристаллических решеток с подложкой. Минимизация энергии упругих механических напряжений в системе «зародыш – подложка» может приводить к некоторой азимутальной разориентации стабильных островков, формирующихся на начальной стадии роста сегнетоэлектрического слоя по механизму, близкому к эпитаксиальному [6]. Наблюдающаяся зависимость сегнетоэлектрических свойств от размера зерен согласуется с данными [7].

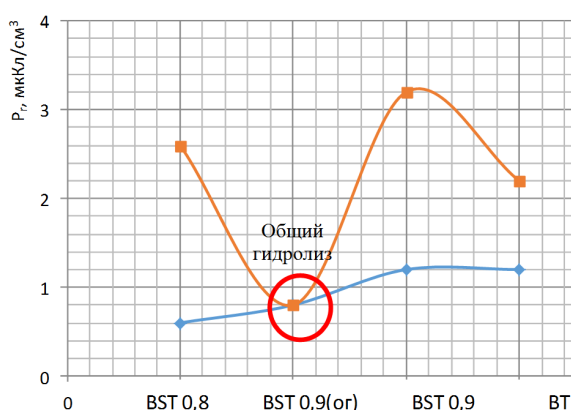


Рисунок 2.5 – Зависимость остаточной поляризации от вида гидролиза, состава пленки пленок $Ba_xSr_{1-x}TiO_3$ ($x = 0,8; 0,9; 1$) и от наличия восстановительного отжига (— ромб — до отжига, — квадрат — после отжига)

График зависимости остаточной поляризации от концентрации Ва в тонких золь-гель пленках BST и от дополнительного отжига (рисунок 2.5) был составлен на основании таблицы 2.1. Из него следует, что оптимальные характеристики имеет тонкая пленка BST с составом BST 0,9 [8], синтезированная с применением раздельного гидролиза, отожженная при 550° С и дополнительно восстановленная при 400° С.

Выводы

Проведено исследование влияния исходного состава золя и режимов температурной нагрузки на характеристики тонкопленочных сегнетоэлектриков $Ba_xSr_{1-x}TiO_3$ с различными соотношениями Ва и Sr ($x = 0,8; 0,9; 1$), синтезированных золь-гель методом. Установлено, что в результате применения раздельного гидролиза наблюдается рост остаточной поляризации для полученных BST и ВТ пленок. Как сегнетоэлектрические свойства, так и топография поверхности существенно зависят от содержания Ва, которое может быть связано с эффектом размера зерна. Для пленок BST, синтезированных с применением раздельного гидролиза, применение восстановительного отжига приводит к росту остаточной поляризации в 2,5–4 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Developing history and present situation of sol-gel science* / R.X. Che, H. Gao, H.B. Zhao, J.X. Fang // Journal of Yunnan University. – 2005. – № 27 (3A). – P. 378–383.
2. *Wang, J. Basic Principle, Advance and Current Application Situation of Sol-Gel Method* / J. Wang, Ch. Li, B. Xu // Chemical industry and engineering. – 2009. – № 26 (3). – P. 273–277.
3. *Influence of the Annealing Temperature on the Structure and Properties of Bismuth Ferrites* / V. Korskanov [et al.] // Journal of Nano-and Electronic Physics. – 2021. – № 13 (5). – P. 05004-1–05004-7.
4. *Влияния дополнительного отжига в вакууме на структуру, электрические и оптические свойства ZnO:Al пленок, синтезированных золь-гель методом* / В.В. Сидский, А.В. Семченко, В.Е. Гайшун, Д.Л. Коваленко, А.С. Ханна // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 44–46.
5. *Влияние температуры отжига на структуру тонких золь-гель пленок $BiFeO_3$, легированных самарием* / С.А. Хахомов, А.В. Семченко, В.В. Сидский, О.И. Тюленкова, А.Н. Морозовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 71–74.
6. *Диэлектрический отклик эпитаксиальных пленок $Ba_{0,75}Sr_{0,25}TiO_3$ на электрическое поле и температуру* / Ю.А. Бойков, Д. Эртс,

Т. Клаесон, А.Ю. Бойков // Физика твердого тела. – 2002. – Т. 44, № 11. – С. 2061–2068.

7. Зависимость диэлектрических свойств керамики титаната бария и композита на его основе от температуры спекания / О.В. Малышкина, А.И. Иванова, Г.С. Шишков, А.А. Мартынов // Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. – 2021. – Т. 24, № 1. – С. 40–47. – DOI: <https://doi.org/10.17073/1609-3577-2021-1-40-47>

8. Влияние механических напряжений на диэлектрический отклик тонких сегнетоэлектрических пленок PZT / Р.А. Лалетин, А.И. Бурханов, Л.В. Жога, А.В. Шильников, А.С. Сигов, К.А. Воротилов // Физика твердого тела. – 2006. – Т. 48, № 6. – С. 1109–1110.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант №Т20Р-359) и РФФИ (проект № 20-58-00061 Бел_а).

Поступила в редакцию 22.10.2021.

Информация об авторах

Хахомов Сергей Анатольевич – д.ф.-м.н., доцент
Семченко Алина Валентиновна – к.ф.-м.н., доцент
Сидский Виталий Валерьевич – к.т.н., доцент
Васькевич Василий Васильевич – научный сотрудник
Маевский Александр Артурович – магистр технических наук
Тюленкова Ольга Ивановна – старший научный сотрудник
Гайшун Владимир Евгеньевич – к.ф.-м.н., доцент
Коваленко Дмитрий Леонидович – к.ф.-м.н., доцент
Пахомов Олег Всеволодович – к.т.н., доцент
Еськов Андрей Владимирович – к.т.н.
Старков Александр Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент
Холкин Андрей Леонидович – к.ф.-м.н., доцент
Пилипенко Владимир Александрович – д.т.н., профессор

УДК 535.662:681.7.068

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_51

К ДОСТИЖЕНИЮ ВЫРАЖЕННОЙ СТРУКТУРНОЙ ОКРАСКИ ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВОЛОКНА

А.В. Шилов, А.Б. Сотский*Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова*

TO ATTAINMENT OF PRONOUNCED STRUCTURAL COLORING OF A PHOTONIC CRYSTAL FIBER

A.V. Shilov, A.B. Sotsky*A.A. Kuleshov Mogilev State University*

Аннотация. Определены условия получения выраженной структурной окраски фотонно-кристаллического волокна с гексагональной внутренней симметрией. Показано, что параметры волокна должны выбираться в соответствии с конфигурацией запрещенных зон двумерного фотонного кристалла, сформированного заполняющими волокно воздушными каналами. Выводы зонной теории подтверждены расчетом поперечных сечений рассеяния фотонно-кристаллических волокон с круговой внешней границей.

Ключевые слова: структурная окраска, фотонно-кристаллическое волокно, зонная теория, поперечное сечение рассеяния.

Для цитирования: Шилов, А.В. К достижению выраженной структурной окраски фотонно-кристаллического волокна / А.В. Шилов, А.Б. Сотский // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 51–56. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_51

Abstract. The conditions for obtaining pronounced structural coloring of a photonic crystal fiber with hexagonal symmetry are defined. It is shown that the parameters of the fiber should be selected in accordance with the configuration of the bandgaps of a two-dimensional photonic crystal formed by air channels filling the fiber. The conclusions of the band theory are confirmed by calculating the scattering cross sections of photonic crystal fibers made of polyethylene terephthalate with a circular outer boundary.

Keywords: structural coloring, photonic-crystal fiber, band theory, scattering cross section.

For citation: Shilov, A.V. To attainment of pronounced structural coloring of a photonic crystal fiber / A.V. Shilov, A.B. Sotsky // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 51–56. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_51 (in Russian)

Введение

В настоящее время известно несколько способов создания структурной (без использования красителей) окраски материалов. Так, в [1] структурная окраска синтетического волокна осуществлялась введением в его оболочку чередующихся сдвоенных полимерных (PMMA/PS) слоев, работающих как брэгговский резонатор, отражая определенные длины волн из падающего на них света. Однако контрастность такой окраски была незначительна, и авторы пришли к выводу о необходимости торцевого возбуждения вытекающих мод волокон, изготовленных прототипов тканей с помощью мощных излучателей и наблюдения рассеянных полей мод.

Другим способом является нанесение различными методами на стандартные текстильные нити или готовые фабричные ткани коллоидных наночастиц [2], [3], что приводит к образованию на их поверхности двумерных (2D), либо трехмерных (3D) фотонных кристаллов. В [2] представлены результаты создания покрытий

текстильных нитей наночастицами SiO_2 / PEI методами гравитационной седиментации с вертикальным осаждением. В [3] сообщается об изготовлении фотонно-кристаллических структур на поверхности черных хлопчатобумажных тканей за счет распыления водного раствора наночастиц сложной конфигурации (гидрофобное PS ядро и гидрофильная PMMA-AA оболочка). Для большего контакта наночастиц с тканью в раствор добавлялись карбоксильные (SiO_2) частицы размером ~ 30 нанометров. После испарения деионизированной воды изначально аморфное покрытие приобретало упорядоченную структуру 3D фотонного кристалла, способную отражать определенные частоты падающего света, определяемые размерами наночастиц. Недостатком данного способа получения структурной окраски волокон либо тканей является сложность технологии и, как следствие, ее дороговизна. Действительно, анализ характерного размера рассеивающих частиц или неоднородностей поверхности, выполненный в [1]–[7], показал, что для

интенсивного рассеивания некоторого достаточно узкого участка видимого спектра (шириной порядка 100–150 нм) размер частиц должен быть в несколько раз меньше, чем длина волны света. Например, в работе [7], исследовав микроскопическую структуру чешуек крыла бабочки вида *Morpho sulkowskyi*, авторы определили, что эффективное рассеяние узкого спектрального диапазона с центральной длиной волны 495 нм, придающее крылу яркую сине-голубую структурную окраску, достигается периодическим чередованием пластинок с воздушными прослойками толщиной 65 нм и 150 нм соответственно.

Еще следует отметить, что нанесение нанопокровов на ткани и волокна требует использования химических реагентов. Это почти уравнивает данную технологию по негативному воздействию на окружающую среду с химической окраской тканей.

С позиций упрощения и удешевления технологии в [8] было предложено использовать фотонно-кристаллические волокна (ФКВ). Их структурная окраска возникает за счет селективного брэгговского отражения света от периодической системы параллельных воздушных каналов в диэлектрической матрице. В [8] разработан метод расчета погонных дифференциального и интегрального сечений рассеяния света при поперечном освещении ФКВ с произвольными параллельными воздушными каналами плоскими волнами ТМ и ТЕ поляризации. Однако ввиду значительного объема необходимых вычислений, условия достижения контрастной структурной окраски ФКВ в [8] определены не были. Целью настоящей работы является восполнение данного пробела. Здесь найдена внутренняя структура ФКВ с гексагональной симметрией, обеспечивающая его выраженную структурную окраску. Результат достигнут за счет дополнения метода [8] элементами зонной теории 2D фотонных кристаллов.

1 Зонная диаграмма для 2D фотонного кристалла

Физической причиной структурной окраски ФКВ является селективное отражение света от его внутренней области, представляющей собой ограниченный двумерный фотонный кристалл. Согласно экспериментальным данным [9] и расчетам [10], [11], ключевую роль при таком отражении играет зонная структура фотонного кристалла. Ниже представлен расчет границ запрещенных зон 2D фотонного кристалла с гексагональной симметрией при его поперечном освещении монохроматическим светом.

На рисунке 1.1, а представлена схема возбуждения плоской волной полуограниченного 2D фотонного кристалла.

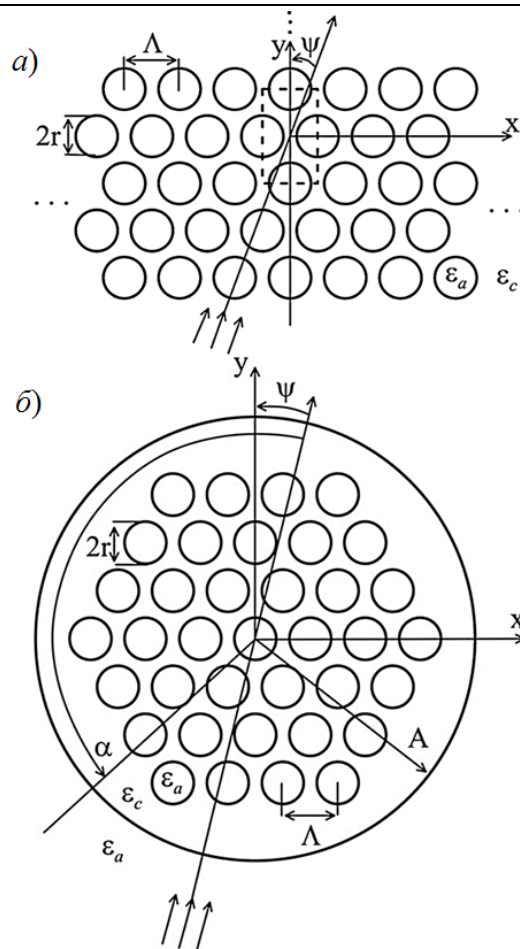


Рисунок 1.1 – Схемы 2D фотонного кристалла (а) и фотонно-кристаллического волокна (б) с гексагональной симметрией.

Кристалл образован круговыми воздушными каналами с радиусом r и диэлектрической проницаемостью ϵ_a , находящимися в диэлектрической матрице с проницаемостью ϵ_c . Величины ϵ_a и ϵ_c считаются вещественными. Центры каналов находятся в узлах гексагональной решетки с периодом Λ . Рассматривается двумерная дифракционная задача, в которой зависимость оптического поля от координаты z отсутствует. Нормаль к волновому фронту падающей волны составляет угол ψ с осью Oy . Штриховыми линиями на рисунке 1.1 выделена элементарная ячейка фотонного кристалла, которая представляет собой прямоугольник. Стороны прямоугольника, ориентированные вдоль оси Oy , имеют длину $2a_y = \Lambda\sqrt{3}$, а вдоль оси x – длину $2a_x = \Lambda$.

В рассматриваемой структуре возможно раздельное распространение волн ТМ и ТЕ поляризации [12]. Исследуем монохроматические компоненты данных типов волн с зависимостью от времени $\exp(i\omega t)$.

Волны ТМ поляризации с единственной отличной от нуля компонентой магнитного поля H_z во всем пространстве подчиняются уравнению [8]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \varepsilon - \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) H_z = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2\pi / \lambda$ – волновое число вакуума. В согласии с теоремой Блоха решения уравнения (1.1) допускают представление [13]

$$H_z = h_z(x, y) \exp(-i\gamma_x x - i\gamma_y y), \quad (1.2)$$

где $\gamma_x = k_0 \sqrt{\varepsilon_c} \sin \psi$, γ_y – некоторая константа, $h_z(x, y)$ – периодическая функция x и y с периодами $2a_x$ и $2a_y$, соответственно. Эта функция может быть задана в виде ряда Фурье

$$h_z(x, y) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \hat{h}_{nm} \exp\left(\frac{i\pi n x}{a_x} + \frac{i\pi m y}{a_y}\right), \quad (1.3)$$

где N – порядок редукции ряда, $\hat{h}_{nm}$ – некоторые коэффициенты.

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.1) и используя схему Галеркина в области элементарной ячейки фотонного кристалла, приходим к однородной алгебраической системе относительно $\hat{h}_{nm}$:

$$\sum_{v=-N}^N \sum_{\mu=-N}^N H_{nmv\mu} \hat{h}_{v\mu} = 0, \quad (1.4)$$

где $n = -N, N$, $m = -N, N$,

$$H_{nmv\mu} = a_x a_y (k_0^2 \varepsilon_c - \xi_n^2 - \eta_m^2) \delta_{nv} \delta_{m\mu} + T \cdot P_{nmv\mu} + S_{nmv\mu}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} P_{nmv\mu} = & -2 \ln \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_c} \right) [\cos[\pi(\mu - m)] + \cos[\pi(v - n)]] \times \\ & \times \left\{ \xi_v \int_0^{\sqrt{r}} duu \cos \left[\frac{\pi(\mu - m)(u^2 - r)}{a_y} \right] \times \right. \\ & \times \sin \left[\frac{\pi(v - n)u\sqrt{2r - u^2}}{a_x} \right] + \\ & + \eta_\mu \int_0^{\sqrt{r}} duu \cos \left[\frac{\pi(v - n)(u^2 - r)}{a_x} \right] \times \\ & \times \sin \left[\frac{\pi(\mu - m)u\sqrt{2r - u^2}}{a_y} \right] \Big\}, \\ S_{nmv\mu} = & 2k_0^2 (\varepsilon_a - \varepsilon_c) \times \left\{ \frac{a_y \cos[\pi(v - n)]}{\pi(\mu - m)} \times \right. \\ & \times \int_0^{\sqrt{r}} duu \cos \left[\frac{\pi(v - n)(u^2 - r)}{a_x} \right] \times \\ & \times \sin \left[\frac{\pi(\mu - m)u\sqrt{2r - u^2}}{a_y} \right] + \frac{a_x \cos[\pi(\mu - m)]}{\pi(v - n)} \times \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^{\sqrt{r}} duu \cos \left[\frac{\pi(\mu - m)(u^2 - r)}{a_y} \right] \times \\ & \times \sin \left[\frac{\pi(v - n)u\sqrt{2r - u^2}}{a_x} \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\xi_n = \pi n a_x^{-1} - \gamma_x, \quad \eta_m = \pi m a_y^{-1} - \gamma_y, \quad (1.8)$$

δ_{nv} – дельта-символ Кронекера, $T = 1$. При получении (1.4)–(1.8) учтены свойства ортогональности гармоник Фурье, симметрия элементарной ячейки фотонного кристалла и то, что дифференцирование $\ln \varepsilon$ в (1.1) приводит к появлению дельта-функций Дирака на границах воздушных каналов.

Система (1.4) представляет собой задачу на собственные функции и собственные значения со спектральным параметром γ_y , описывающую моды 2D фотонного кристалла. Возможные значения γ_y находятся из условия

$$\det[M_{\rho\sigma}(\gamma_y)] = 0, \quad (1.9)$$

где $\det[M_{\rho\sigma}]$ – определитель квадратной матрицы $M_{\rho\sigma} = H_{nmv\mu}$, записанной с использованием комбинированных индексов

$$\rho = (n + N)(2N + 1) + m + N + 1,$$

$$\sigma = (v + N)(2N + 1) + \mu + N + 1,$$

пробегающих значения от 1 до $(2N + 1)^2$.

Согласно (1.5)–(1.8), $\det[M_{\rho\sigma}(\gamma_y)]$ представляет собой полином степени $2(2N + 1)^2$ с вещественными коэффициентами. Нули данного полинома могут быть либо вещественными, либо попарно сопряженными комплексными числами. Но из (1.5)–(1.8) можно заключить, что коэффициенты $H_{nmv\mu}$ инвариантны относительно замен $\gamma_y \rightarrow -\gamma_y$, $m \rightarrow -m$, $\mu \rightarrow -\mu$. Отсюда следует, что если γ_y является корнем уравнения (1.9), то $-\gamma_y$ также является корнем данного уравнения. Физической причиной этого является симметрия элементарной ячейки фотонного относительно оси x (рисунок, 1.1 а). Следовательно, комплексные корни уравнения (1.9) могут быть только чисто мнимыми. Соответствующие им моды описывают поля, испытывающие полное отражение от фотонного кристалла [10], [11].

За проникновение световой энергии в фотонный кристалл отвечают его моды с вещественными γ_y . Из отмеченного выше свойства симметрии корней уравнения (1.9) и выражений (1.2), (1.3) следует, что для отыскания всех таких мод достаточно исследовать перепады знака вещественной функции $\det[M_{\rho\sigma}(\gamma_y)]$ на промежутке $0 \leq \gamma_y \leq \pi / a_y$.

Волны ТЕ поляризации с единственной отличной от нуля компонентой электрического

поля E_z во всем пространстве описываются уравнением [8]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon \right) E_z = 0.$$

Анализ этого уравнения может быть выполнен по рассмотренной выше схеме. Единственное отличие расчета ТЕ мод фотонного кристалла от расчета его ТМ мод состоит в том, что для ТЕ мод в (1.5) следует положить $T = 0$.

Если пренебречь дисперсией ϵ_c , то функции $\det[M_{ps}(\gamma_y)]$ для мод фотонного кристалла обеих поляризаций будут полностью определяться относительными размерами r/Λ , Λ/λ (см. (1.5)). Область на плоскости переменных r/Λ , Λ/λ , в которой уравнения (1.9) для ТМ и ТЕ волн имеют вещественные корни, назовем разрешенной зоной фотонного кристалла, а область, где таких корней нет – запрещенной зоной. Очевидно, что структурная окраска фотонного кристалла, освещаемого естественным светом, будет определяться длинами волн, попадающими в его запрещенную зону, поскольку излучение с данными длинами волн будет эффективно отражаться кристаллом. Селективность такой окраски зависит от ширины запрещенной зоны в направлении изменения переменной Λ/λ : чем меньше эта ширина, тем более контрастной окраски фотонного кристалла можно ожидать.

О запрещенных зонах фотонного кристалла позволяет судить рисунок 1.2. Стабильные результаты для границ этих зон получены в результате подсчета числа вещественных корней уравнений (1.9) для ТМ и ТЕ мод при $N \geq 7$. Здесь и в дальнейших вычислениях использованы значения $\epsilon_a = (1,0003)^2$, $\epsilon_c = (1,576)^2$ (материал диэлектрической матрицы – полиэтилентерефталат).

Согласно рисунку 1.2, конфигурация запрещенных зон зависит от угла падения излучения на фотонный кристалл. Но поскольку ориентация ФКВ относительно фронта падающего на него излучения может быть произвольной, основной практический интерес представляет область параметров фотонного кристалла, в которой запрещенные зоны для разных углов падения излучения на кристалл либо близки между собой, либо налагаются друг на друга. При наложении запрещенных зон, отвечающим углом падения излучения на фотонный кристалл $\psi = \pm 30^\circ$ и $\psi = \pm 60^\circ$ на рисунке 1.2 возникает зеленый тон, углам $\psi = 0^\circ$ и $\psi = \pm 30^\circ$ – красный тон, углам $\psi = 0^\circ$ и $\psi = \pm 60^\circ$ – синий тон, а при наложении запрещенных зон, отвечающим всем рассмотренным углам падения – черный тон. Основным практический интерес представляет область параметров фотонного кристалла, в которой

запрещенные зоны для разных углов падения либо близки между собой, либо налагаются друг на друга. Для получения выраженной структурной окраски ФКВ данная область должна быть достаточно узкой в направлении изменения переменной Λ/λ . Как следует из рисунка 1.2, указанным требованиям отвечает область

$$0,45 \leq \Lambda/\lambda \leq 0,5, \quad 0,3 \leq r/\Lambda \leq 0,4. \quad (1.10)$$

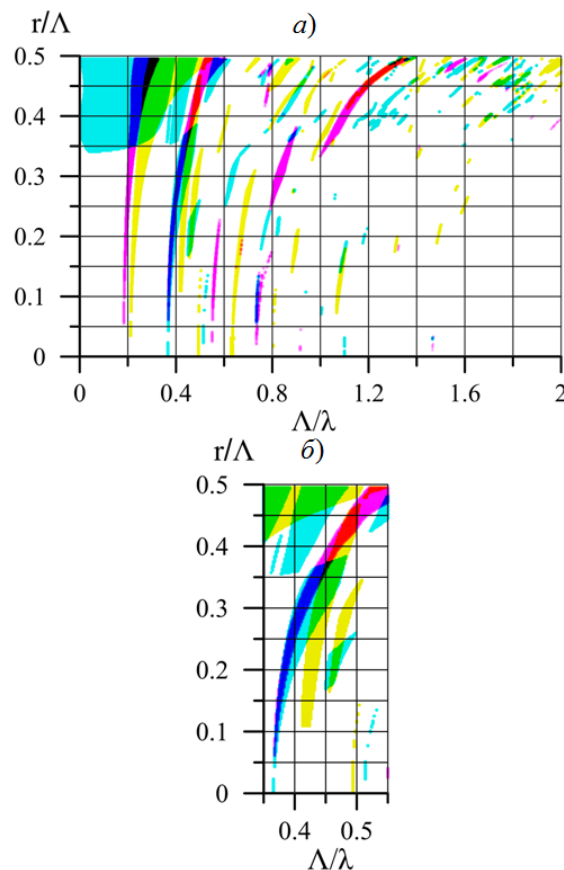


Рисунок 1.2 – Зонная диаграмма для двумерного фотонного кристалла с гексагональной симметрией в нормальном (а) и увеличенном (б) масштабах переменной Λ/λ . Фоновые области – запрещенные зоны фотонного кристалла при углах падения излучения на кристалл $\psi = 0^\circ$ (розовый тон), $\psi = \pm 30^\circ$ (желтый тон), $\psi = \pm 60^\circ$ (голубой тон)

Выполненный в настоящем разделе анализ имеет оценочный характер, поэтому применимость его выводов об условиях получения выраженной структурной окраски ФКВ нуждается в количественной проверке. Соответствующие расчеты представлены в следующем разделе.

2 Поперечные сечения рассеяния ФКВ

Поперечное сечение рассматриваемых ФКВ представлено на рисунке 1.1, б. Внутренняя область волокна содержит круговые воздушные каналы радиуса r . Центральный канал окружен

N_c гексагональными кольцами таких же каналов (для определенности на рисунке 1.1, b $N_c = 3$). ФКВ имеет внешний радиус $A = (N_c + 1)\Lambda$ и находится в воздухе с диэлектрической проницаемостью ϵ_a .

Оценки структурной окраски волокна предполагают исследование углового распределения интенсивности рассеянного света в дальней зоне при освещении волокна не поляризованным светом, создаваемым удаленным точечным источником [8]. Данное распределение может быть охарактеризовано погонным дифференциальным поперечным сечением рассеяния [8]

$$\sigma(\alpha) = 0, 5[\sigma_p(\alpha) + \sigma_s(\alpha)], \quad (2.1)$$

где α – угол наблюдения, отсчитанный от нормали к волновому фронту падающей на ФКВ плоской волны (рисунок 1.1 б), $\sigma_p(\alpha)$ и $\sigma_s(\alpha)$ – погонные дифференциальные поперечные сечения рассеяния плоских волн ТМ и ТЕ поляризации, определяемые по формулам

$$\sigma_p(\alpha) = \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (|H_z^{(i)}|^2 \rho)}{2A|H_z^{(i)}|^2}, \quad \sigma_s(\alpha) = \frac{\lim_{\rho \rightarrow \infty} (|E_z^{(i)}|^2 \rho)}{2A|E_z^{(i)}|^2},$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от волокна до точки наблюдения, $H_z^{(i)}$ и $E_z^{(i)}$ – компоненты поля падающих на волокно плоских волн ТМ и ТЕ поляризации.

Для интегральной оценки отражательной способности ФКВ в диапазоне углов $\alpha_2 \geq \alpha \geq \alpha_1$ может быть использовано погонное интегральное поперечное сечение рассеяния [8]

$$\sigma_i = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sigma(\alpha) d\alpha, \quad (2.2)$$

которое равно световой мощности, рассеянной волокном в интервал углов $\alpha_2 \geq \alpha \geq \alpha_1$, нормированной на мощность падающего на волокно света. Основным практическим интересом представляет описание отражения света от волокна, что соответствует выбору в (2.2) $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 270^\circ$. Эти значения использованы в дальнейших расчетах.

С позиций исследования окраски тканей актуальна ситуация, когда ориентация ФКВ относительно фронта падающей плоской волны является случайной. В этом случае структурную окраску ФКВ можно охарактеризовать поперечными сечениями $\sigma(\alpha)$ и σ_i , усредненными по ψ [8]:

$$\bar{\sigma}(\alpha), \bar{\sigma}_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\alpha), \sigma_i d\psi. \quad (2.3)$$

Представленные ниже расчеты функций (2.1)–(2.3) выполнены строгим методом, основанным на теореме Грина и теореме сложения цилиндрических функций Графа [8], [14].

В таблице 2.1 приведены результаты численного решения задачи об отыскании максимума

отражательной способности ФКВ, где в качестве целевой выбрана функция двух переменных $\bar{\sigma}_i(\Lambda/\lambda, r/\Lambda)$. Для числа воздушных каналов в ФКВ использовано обозначение k .

Таблица 2.1 – Максимизация отражательной способности ФКВ

N_c	k	Λ/λ	r/Λ	$\bar{\sigma}_{i\max}$
2	19	0,472	0,376	0,704
3	37	0,469	0,390	0,753
4	61	0,462	0,380	0,778

Табличные значения Λ/λ , r/Λ – координаты максимумов $\bar{\sigma}_i$, обозначенных через $\bar{\sigma}_{i\max}$. Как и следовало ожидать, эти координаты находятся в области (1.10), а $\bar{\sigma}_{i\max}$ возрастает с увеличением поперечного размера волокна, приближающим его к полуограниченному фотонному кристаллу.

Более детальную информацию об отражательной способности ФКВ дает рисунок 2.1. На нем сопоставлены погонные дифференциальные сечения рассеяния, полученные в [8] без оптимизации структуры ФКВ и рассчитанные с использованием относительных размеров волокна, приведенных в таблице 2.1.

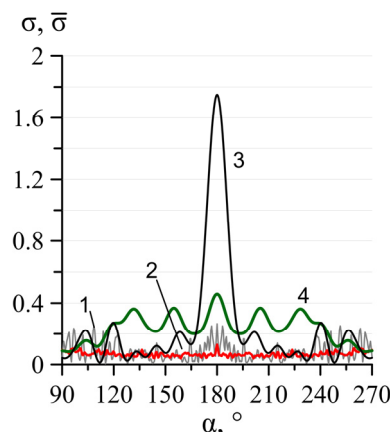


Рисунок 2.1 – Дифференциальные сечения рассеяния ФКВ с $N_c = 3$ при фиксированном угле ориентации $\psi = 0^\circ$ ($\sigma(\alpha)$, кривые 1, 3) и с усреднением по ψ ($\bar{\sigma}(\alpha)$, кривые 2, 4): 1 и 2 соответствуют параметрам $\Lambda/\lambda = 4,43$, $r/\Lambda = 0,12$ из [8]; 3 и 4 – $\Lambda/\lambda = 0,469$, $r/\Lambda = 0,39$ (данные таблицы 2.1)

Из рисунка 2.1 можно заметить, что оптимизация параметров волокна существенно усиливает его отражательную способность. Этот эффект наблюдается в узком диапазоне углов отражения в окрестности 180° при $\psi = 0^\circ$ и в более широком диапазоне углов отражения при усреднении по ψ . Наличие боковых максимумов на распределении 1 и многопиковый характер

распределения 3 объясняются резонансным возбуждением стоячих волн между фотонным кристаллом во внутренней области ФКВ и его внешней границей.

О структурной окраске ФКВ позволяет судить рисунок 2.2. На нем приведены спектры усредненной по ориентации волокна интегральной отражательной способности ФКВ. Кривая 1 – данные работы [8], кривые 2 и 3 рассчитаны с использованием данных таблицы 2.1 для длины волны $\lambda = 0,564$ мкм, соответствующей максимуму чувствительности человеческого глаза.

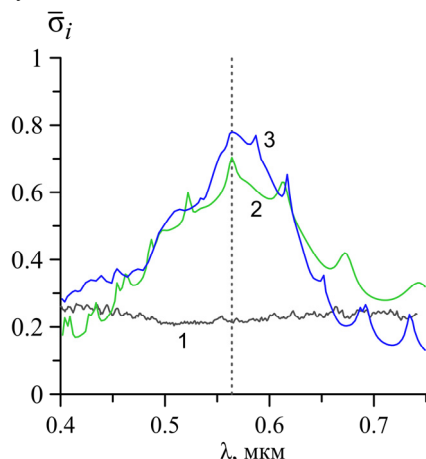


Рисунок 2.2 – Спектры погонного интегрального поперечного сечения рассеяния, усредненные по ориентации ФКВ:

кривая 1 – $N_c = 3$, $\Lambda = 2,5$ мкм, $r = 0,3$ мкм [8],

2 – $N_c = 2$, $\Lambda = 0,266$ мкм, $r = 0,100$ мкм,

3 – $N_c = 4$, $\Lambda = 0,261$ мкм, $r = 0,099$ мкм

Рисунок 2.2 подтверждает возможность получения выраженной окраски ФКВ за счёт оптимизации его внутренней структуры. Эффект окраски усиливается с ростом N_c . В частности, при $N_c = 4$ ширина спектра $\bar{\sigma}_i(\lambda)$, определенная из условий $\bar{\sigma}_i(\lambda) = 0,5\bar{\sigma}_{i,\max}$, составляет 0,153 мкм.

Заключение

Согласно представленным данным, для достижения выраженной структурной окраски ФКВ его параметры должны выбираться в соответствии со структурой запрещенных зон двумерного фотонного кристалла, образованного воздушными каналами, находящегося внутри ФКВ. Из этих соображений период решетки воздушных каналов ФКВ должен составлять примерно половину длины волны излучения нужного цвета (согласно рисунку 1.2 и таблице 2.1). В работе рассмотрен случай распространенных ФКВ с гексагональной симметрией. Дальнейшая оптимизация внутренней структуры ФКВ предполагает исследование 2D фотонных кристаллов с иными типами симметрии. Соответствующие расчеты могут быть выполнены на основе описанной вычислительной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Color-changing and color-tunable photonic bandgap fiber textiles* / B. Gauvreau [et al.] // OPTICS EXPRESS. – 2008. – Vol. 16, № 20. – P. 15677–15693.

2. *Shao, J. Biomimetic nanocoatings for structural coloration of textiles* / J. Shao, G. Liu, L. Zhou // Active Coatings for Smart Textiles. – 2016. – P. 269–299.

3. *Rapid fabrication of robust, washable, self-healing superhydrophobic fabrics with non-iridescent structural color by facile spray coating* / Q. Zeng [et al.] // RSC Advances. – 2017. – Vol. 7, № 14. – P. 8443–8452.

4. *Aguirre, C.I. Colloidal Photonic Crystal Pigments with Low Angle Dependence* / C.I. Aguirre, E. Reguera, A. Stein // ACS Applied Materials & Interfaces. – 2010. – Vol. 2, № 11. – P. 3257–3262.

5. *Nanoparticle-tuned structural color from polymer opals* / O. Pursiainen [et al.] // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, № 15. – P. 9553–9561.

6. *Fan, H. Natural photonic materials for textile coatings.* / H. Fan, N. Lin, X. Y. Liu // Active Coatings for Smart Textiles. – 2016. – P. 137–156.

7. *Theoretical and experimental analysis of the structural pattern responsible for the iridescence of Morpho butterflies* / R. H. Siddique [et al.] // Optic Express. – 2013. – Vol. 21, № 12. – P. 14351–14361.

8. *Сотский, А.Б. Моделирование структурной окраски фотонно-кристаллического волокна* / А.Б. Сотский, О.А. Бельская, Л.И. Сотская // Оптика и спектроскопия. – 2015. – Т. 118, № 5. – С. 847–854.

9. *New slant on photonic crystal fibers* / H.C. Nguyen [et al.] // Optic Express. – 2004. – Vol. 12, № 8. – P. 1528–1539.

10. *Сотский, А.Б. Расчет оптических свойств фотонно-кристаллических волокон с поллой сердцевинной* / А.Б. Сотский, Л.И. Сотская // ЖПС. – 2009. – Т. 76, № 2. – С. 312–321.

11. *Сотский, А.Б. Высшие моды фотонно-кристаллических волокон* / А.Б. Сотский, О.А. Бельская, Л.И. Сотская // Оптика и спектроскопия. – 2011. – Т. 110, № 3. – С. 500–506.

12. *Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах* / Е.А. Иванов. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.

13. *Bjarklev, A. Photonic Crystal Fibres* / A. Bjarklev, J. Broeng, A. Sanchez Bjarklev. – Springer, 2003. – 159 p.

14. *Сотский, А.Б. Дифракция светового пучка на микроструктурном волокне* / А.Б. Сотский, О.А. Бельская, Л.И. Сотская // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 11–19.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь 1.15 «Фотоника и электроника для инноваций».

Поступила в редакцию 21.07.2021.

Информация об авторах

Шилов Артур Владимирович – старший преподаватель
Сотский Александр Борисович – д.ф.-м.н., профессор

УДК 535.23; 621.378.825

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_57

НЕЛИНЕЙНОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕРХКОРОТКОГО ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА НИЗКОРАЗМЕРНЫМ СУПЕРКРИСТАЛЛОМ

В.А. Юревич*Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв*

SUPERSHOT OPTICAL PULSE NONLINEAR REFLECTION BY LOW-DIMENSIONAL SUPER-CRYSTAL

V.A. Yurevich*Belarussian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev*

Аннотация. Исследована динамика энергообмена низкоразмерной планарной решётки, образованной квантовыми точками, с резонансным световым полем зондирующего извне импульса. В приближении однородного поля решена задача описания коллективного эффекта сверхизлучения в рассматриваемом квазидвумерном суперкристалле (СК). Принципиальным в расчёте реакции СК является учёт диполь-дипольного взаимодействия активных центров в присутствии поглощения в квазирезонансных переходах – типичных для полупроводниковых СК механизмов нелинейности, вызывающих автомодуляционное смещение резонансной частоты поглощения (усиления).

Ключевые слова: суперкристаллы квантовых точек, диполь-дипольное взаимодействие, оптические коллективные эффекты, формализм вектора Блоха.

Для цитирования: Юревич, В.А. Нелинейное отражение сверхкороткого оптического импульса низкоразмерным суперкристаллом / В.А. Юревич // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 57–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_57

Abstract. The dynamics of energy exchange of a low-dimensional planar lattice formed by quantum dots with a resonant light field of a pulse probing from the outside has been investigated. In the average field approximation, the problem of describing the collective effect of superradiance in the considered quasi-two-dimensional super-crystal (SC) is solved. In the estimation of SC response to a resonant field, the dipole-dipole interaction is taken into account, which also occurs under conditions of absorption in quasi-resonant transitions. Both mechanisms of phase nonlinearity are typical for semiconductor SC and cause a self-modulation shift of the resonance frequency of the absorption (gain) spectral line.

Keywords: super-crystals of quantum dots, dipole-dipole interaction, optical collective effects, Bloch vector formalism.

For citation: Yurevich, V.A. Supershot optical pulse nonlinear reflection by low-dimensional super-crystal / V.A. Yurevich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 57–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_57 (in Russian)

Введение

Одно из развиваемых в последнее время направлений современной оптики и радиофизики – разработка новых типов искусственных сред, которые названы метаматериалами, поскольку обладают физическими свойствами, отсутствующими у составляющих их исходных природных материалов [1], [2]. К объектам этого рода относят и особым образом составленные квазидвумерные структуры, именуемые метаповерхностями [2], [3] и образованные излучающими или активно реагирующими на излучение элементами – метаатомами, то есть образованиями, превышающими обычный размер атома. Допуская более или менее простую модельную форму (например, элементарного диполя), эти активные центры при размере до нескольких нанометров обладают дискретными свойствами энергетического спектра. При условии их плотной упаковки в среде низкоразмерный

слой приобретает выраженную способность нелинейного резонансного рассеяния внешнего электромагнитного излучения. Установлено, что планарные структуры такого формата из регулярно расположенных дипольных центров (в частности, квантовых точек) представляют собой один из примеров подобных объектов, а именно квазидвумерных суперкристаллов [4], [5], с эффективной возможностью контроля их оптических свойств при изменении формы и химического состава образующих элементов, а также геометрии их структуры. Упорядоченным ансамблем квантовых точек можно представить внутреннюю структуру многих квазикристаллов, среди которых дихалькогениды переходных металлов (например, MoSe_2 , WSe_2) [6], суперкристаллы полупроводниковых квантовых точек [7], [8], фосфорены [9] и органические полимеры [10].

Определённое преимущество квазидвумерных суперкристаллов (СК) во многом выражено тем, что в подавляющем большинстве их материалы – полупроводники, энергетическая структура которых может легко управляться внешним воздействием, что делает их в высшей степени перспективными в применении в устройствах нанофотоники. Квантовые переходы с поглощением или излучением, совершаемые в этих ансамблях в экситонной области спектра, характеризуются гигантскими силами осциллятора, что приводит к результативному проявлению нелинейных оптических эффектов при умеренных уровнях интенсивности действующего в среде когерентного излучения. В силу существования дополнительных степеней свободы в схеме резонансного взаимодействия с когерентным излучением (например, возбуждения соседних с основным переходом и взаимодействия квантовых точек) СК, обладая наноразмерной толщиной, характеризуются уникальными оптическими свойствами. Суперкристалл, например, способен нелинейно, с проявлением гистерезиса, отразить световое поле в определённом спектральном диапазоне [11], т. е. является критичным к частоте и интенсивности внешнего сигнала эффективным зеркалом нанометровой толщины. Поэтому изучение закономерностей нелинейной динамики материального отклика образованных квантовыми точками СК при резонансном отражении представляется актуальным и целесообразным с практической позиции.

1 Постановка задачи и основные уравнения

В настоящей работе поставлена задача анализа баланса мощности излучения и структуры из активных центров, образующих слой СК, при условии, что характерная длительность внешних оптических сигналов значительно меньше времени действия релаксационных механизмов в среде. Взаимодействие структуры и светового поля тогда когерентно (то есть, оказываются согласованными осцилляции резонансной поляризованности ансамбля активных центров и порождаемого им волнового поля), и среди обусловленных этой корреляцией коллективных эффектов особо выделяют световую индукцию и сверхизлучение [12]. В ходе световой индукции оптический сигнал способен существенно трансформироваться из-за оптической нутации. В явлении сверхизлучения, как и при световой индукции, существенным образом проявляется самопроизвольная фазовая корреляция (согласование фаз) первоначально независимых активных центров. Появление фазовой корреляции объясняют двумя факторами – взаимодействием диполей через излучаемое ими электромагнитное поле и нелинейностью осцилляторных движений электронов внутри активных центров.

Влиянием диполь-дипольного взаимодействия и реакцией на поле переходов, близких к

основному, по мере резонансных вариаций населённости определяется смещение центра спектральной линии усиления и автомодуляционный дрейф частоты высвечиваемого поля. Этими особенностями, присущими резонансному взаимодействию ввиду относительно плотной упаковки активных центров в структуре суперкристалла и высоких значений дипольных моментов, может определяться самодефазировка ансамбля элементарных излучателей в ходе формирования поля. В настоящих расчётах учтено влияние на обмен энергией поля и среды именно этих стимулирующих внутреннюю неустойчивость системы факторов динамики нелинейного отклика квазидвумерного суперкристалла в когерентном режиме взаимодействия.

Квантоворазмерные структуры обладают свойствами материалов, образуемых активными центрами, для характеристики реакции которых на электромагнитное поле излучения используют дипольную модель. Поэтому к их расчётному анализу применимы представления двухуровневой схемы взаимодействия вещества с резонансным световым полем. Обобщение двухуровневой схемы в рассматриваемой далее задаче состоит в учете влияния на поляризуемость поглощения в квазирезонансных переходах. Обычно это выражено допущением различия (дефекта) поляризуемостей дипольных частиц α_1 и α_2 в основном и возбуждённом состоянии [13]. При перераспределении частиц по уровням перехода в ходе вынужденного излучения тогда возможны нелинейные резонансные вариации преломления, что также существенно в полупроводниковых экситонных средах.

В расчётах также рассмотрено поляризующее влияние на диэлектрическую восприимчивость вещества ближних полей диполей в рамках представления действующего поля, учитывающего локальную поправку Лоренца. При оценке динамических следствий диполь-дипольного взаимодействия принято пренебрегать относительно статичным нерезонансным вкладом в локальное поле. Амплитуда напряжённости действующего на активные центры поля тогда представляется с учётом локальной поправки Лоренца, включающей только динамическую составляющую поляризованности. Такого рода поправка описывает малоинерционное смещение спектральной линии, «следящее» за изменением разности населённостей и типичное именно для сред с относительно высокой плотностью активных центров [14].

Оптическое плосковолновое поле, инициируемое полем, нормально падающим извне на поверхность слоя суперкристалла, естественно, предполагается однородным в направлении его толщины l . Поле, действующее на активные центры, и вероятность поляризации (резонансной поляризованности ρ) представляются в виде

квази-гармонических волн с несущей частотой ω , близкой к частоте основного перехода ω_0 , и относительно медленными (слабо изменяющимися за период светового колебания) комплексными амплитудами $E(t)$ и $i\rho(t)$, то есть $E(t) = E(t) \exp(i\omega t)$, $\rho(t) = i\rho(t) \exp(i\omega t)$. Кроме поляризованности $\rho(t)$ в квантовомеханическом описании отклика слоя используется вещественная переменная вероятности разности населённостей уровней основного перехода $n(t)$.

Задача об энергообмене среды суперкристалла и светового поля в процессе СИ может быть решена в допущении сверхтонкого граничного слоя [15], в сущности, для резонансно поглощающей планарной плёнки, также и отражающей с поверхности. При этом вместо волновых уравнений допускается применение граничных электродинамических условий, используемых в уравнениях Максвелла и записанных для действующего на атомы и отражённого слоем плосковолновых полей. Ниже соотношения для связи полей приведены с учётом локальной поправки Лоренца и представления динамического компонента макроскопической поверхностной поляризованности P в обобщённой двухуровневой схеме:

$$\begin{aligned} E &= t_0 E_i + \frac{\omega l}{\varepsilon_0 c} P(i + \gamma), \\ E_r &= -r_0 E_i + i \frac{\omega l}{\varepsilon_0 c} P, \\ P &= N \left[i\mu\rho + 2\pi\Delta\alpha\varepsilon_0 (n_0 - n) E \right], \end{aligned} \quad (1.1)$$

где E_i и E_r – амплитуды напряжённости внешнего и отражённого полей, t_0 и r_0 – френелевы коэффициенты пропускания и отражения поверхности квазикристалла, μ – средний дипольный момент активных центров, N – их объёмная концентрация в слое, $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ – дефект поляризуемости, n_0 – начальное значение разности населённостей, $\gamma = c / 3\omega l$ – нормирующий коэффициент в составляющей, которая определена учётом локального поля.

Соотношения для условий (1.1) содержат дополнительные компоненты, учитывающие резонансную поляризацию в граничном слое, которые именуют сверхизлучательными, этими компонентами выражена связь действующего поля и резонансного отклика среды. Нелинейные составляющие в отражённых и прошедших волнах в отличие от нерезонансных френелевых компонент описывают послесвечение поверхности квазикристалла в течение времени фазовой памяти [16]. Ещё в работе [15] отмечалось, что их существование может привести к нетривиальному эффекту полного отражения особо короткого импульса, зондирующего приповерхностный слой среды с резонансной поляризованностью при определённой концентрации активных центров.

Квантовомеханические уравнения движения для отклика среды квазикристалла, которыми

должны быть дополнены соотношения (1.1), в этом случае могут быть сведены к так называемым оптическим уравнениям Блоха [12]. Вывод аналогов этих материальных уравнений для условия однородного уширения спектральной линии поглощения достаточно обоснован в литературе. Применим далее их модификацию для вещественных переменных напряжённости поля в случае точного резонанса ($\omega = \omega_0$), предложенную, например, в [17]. Масштабирование переменных напряжённости поля, проведенное таким образом: $e_i = \mu E_i / \hbar$, $e = \mu \text{Re} E / \hbar$, с учётом представления (1.1), позволяет такую предварительную запись рассматриваемой далее системы уравнений Максвелла – Блоха:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{[1 - \beta\gamma(n_0 - n)] t_0 e_i(t) - \rho / \tau_R}{[1 - \beta\gamma(n_0 - n)]^2 + \beta^2 (n_0 - n)^2}, \\ \frac{d\rho}{dt} &= ne, \quad \frac{dn}{dt} = -\rho e. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Введены нормирующие коэффициенты

$$\beta = 2\pi\Delta\alpha\omega N l / c \text{ и } \tau_R = \varepsilon_0 \hbar c / \mu^2 \omega N l$$

(τ_R известен как время сверхизлучения [18]). При записи (1.2) сразу учитывается, что поле E , входящее в материальные уравнения, отличается от среднего макроскопического поля E_i в местах нахождения активных центров на величину локальной поправки. Релаксационными процессами, приводящими к распаду поляризации и означающими возможность спонтанных переходов, в приближении когерентного взаимодействия в (1.2) пренебрегается. Однако в соотношениях (1.2) учтено нелинейное смещение частоты резонанса, означающее дефазировку ансамбля образующих квазикристалл диполей. Частотный дрейф развивается как следствие взаимного влияния ближних полей активных центров и насыщаемого поглощения в переходах, близких к основному. В принципе, это автомодуляционное смещение способно принимать обратимый характер из-за зависимости от резонансной вариации разности населённости, возникающей из-за насыщения поглощения в основном переходе.

2 Решение задачи о отражении для координат вектора Блоха

Балансом энергии зондирующего извне импульса и материального отклика вещества слоя обеспечен уровень отражения и поглощения импульса. Динамика дополнительных компонентов, присутствующих в соотношениях (1.1) для связи полей и материальных переменных среды СК, вскрывает особую нелинейность этих процессов. Показана, в частности, роль нелинейных фазовых эффектов в проявлении гистерезисных свойств отражения и поглощения в случае непрерывного возбуждения [19] при ограниченном влиянии релаксационных механизмов распада поляризации.

Рассмотрим далее случай импульсного возбуждения суперкристалла. Можно допустить, что в начальный момент $n(t=0) = n_0 = 1$, то есть ансамбль активных центров, образующих СК, находится в основном состоянии при том, что корреляции в ансамбле отсутствуют – $\rho(t=0) = 0$. В литературе, посвящённой теоретическому анализу коллективных эффектов, признано удобным использовать формализм вектора Блоха. Переменные уравнений, подобных системе (1.2), но рассчитываемых в распределённых схемах взаимодействия, тогда рассматриваются в виде координат (составляющих) так называемого вектора Блоха: $X = \text{Re}\rho$, $Y = \text{Im}\rho$, $Z = n$. Известно, что в этом случае из материальных уравнений системы (1.2) следует интеграл вида: $\rho^2 + n^2 = 1$, именуемый как закон сохранения вектора Блоха [18]. Решение (1.2) для действительных материальных переменных допускает полуаналитическое представление при любой зависимости действующего поля $e(t)$ [18]:

$$\rho(t) = \sin \Theta, \quad n(t) = \cos \Theta, \quad \Theta(t) = \int_{-\infty}^t e(t) dt. \quad (2.1)$$

Величина полярного угла вектора Блоха $\Theta(t)$ выражается «площадью» импульса нормированной амплитуды напряжённости действующего поля и описывает поворот материальных переменных за время действия импульса. В представлении (2.1) с однородным полем в слое квазикристалла поворот совершается в плоскости (ρ, n) .

Используя первое соотношение системы (1.2) и полуаналитические соотношения (2.1) для ρ и n , записываем уравнение для $\Theta(t)$:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{[1 - \beta\gamma(1 - \cos \Theta)]t_0 e_i(t) - \sin \Theta / \tau_R}{[1 - \beta\gamma(1 - \cos \Theta)]^2 + \beta^2(1 - \cos \Theta)^2}. \quad (2.2)$$

Решением этого уравнения определяются нормированные напряжённости среднего макроскопического поля в среде квазикристалла e_i и отражённого поля e_r :

$$e_i = \frac{t_0 e_i(t) - \sin \Theta / (\tau_R (1 - \beta\gamma(1 - \cos \Theta)))}{1 + (\beta(1 - \cos \Theta) / (1 - \beta\gamma(1 - \cos \Theta)))^2}, \quad (2.3)$$

$$e_r = e_i - e_i.$$

Уравнение (2.2) можно рассматривать как формулировку «теоремы площадей» МакКола и Хана [20] применительно к случаю низкоразмерного суперкристалла из квантовых точек. Нелинейное смещение резонанса поглощения, специфичное для подобных сред с повышенной плотностью активных центров, способно снизить результативность проявления рассмотренного авторами [20] и позднее интенсивно исследуемого коллективного эффекта самоиндуцированной прозрачности.

Количественная оценка отражения и изменения формы оптических сигналов, взаимодействующих со слоем квазикристалла, проводилась на основе численного интегрирования (2.2)

относительно $\Theta(t)$ для заданного поля $e_i(t)$, действующего извне (зондирующего) импульса. Временная зависимость напряжённости для него определялась функцией $e_i(t) = e_m \text{sech} [(t - t_0) / \tau_R]$. Выбор этой функции для входного сигнала не случаен – форма $e_i(t)$ при $e_m = 1 / \tau_R$ соответствует решению (2.2) для $e(t)$ в задаче о сверхизлучении в квазикристаллах без учёта фазовой нелинейности, то есть для $\beta = 0$ и при отсутствии инициирующего поля ($e_r(t) = 0$).

В выборе параметров, определяющих величины коэффициентов (2.2) для полупроводниковых квантоворазмерных структур, в основном, ориентировались по данным, известным, например, из работ [21], [22]. Примерный масштаб явлений соответствовал пиковой интенсивности светового поля импульсов порядка $(1 \dots 5) \cdot 10^7 \text{ Вт/см}^2$, концентрации активных центров $N \sim (2 \dots 8) \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, среднему элементарному дипольному моменту $\mu \sim 3.3 \cdot 10^{-28} \text{ Кл}\cdot\text{м}$, длине волны оптического поля $\sim 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$. Непосредственно численным расчётом (2.2), (2.3) определялись зависимости нормированной интенсивности излучения $S(t) = (\tau_R e_i)^2$ и $S_r(t) = (\tau_R e_r)^2$. На рисунках 2.1 δ – z , a' – z' иллюстрированы характерные временные развёртки интенсивности отражённого и действующего в слое СК светового поля и показана зависимость этих развёрток от пикового значения мощности зондирующего импульса $S_{im} = \tau_R^2 e_i^2(t=t_0)$. В трёх вариантах, приводимых на рисунках 2.1, δ – z входные импульсы с формой, для примера изображённой на рисунке 2.1, a , различались только нарастающим значением параметра S_{im} (в пояснениях указанным в относительных единицах), величины S и S_r на зависимостях нормированы также по этому параметру.

Многочисленные расчёты, примеры которых демонстрирует рисунок 2.1, позволили заключить следующее. Отсутствие нелинейности, типичной для СК, не приводит к качественному изменению в развёртке импульса. Отражённый импульс, естественно, снижается по пиковой мощности и, не изменяясь по длительности, приобретает некоторую асимметрию (рисунок 2.1, a'), то же изменение характерно для действующего в среде поля. «Включение» нелинейности, вызывающей перестройку резонанса поглощения в слое СК, должно приводить к снижению длительности отражённого импульса (рисунок 2.1, δ) и стимуляции явления световой индукции в действующем внутри СК поле (рисунок 2.1, δ'). Выраженная световая индукция в виде серии контрастных затухающих пульсаций свойственна протяжённым средам [18]. В особо тонком активном слое СК из-за сильного затухания оптического поля и наличия фазовой модуляции световая индукция представлена сдвоенным импульсом. Сравнение развёрток, изображённых на рисунках 2.1, δ' – z' , показывает, что положение

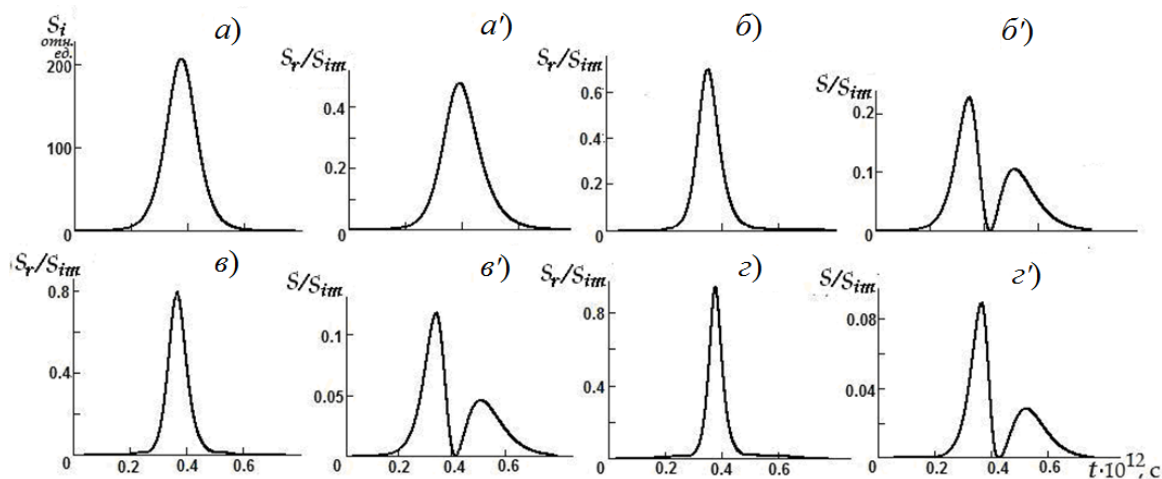


Рисунок 2.1 – Зависимости нормированной интенсивности светового поля инициирующего (а), отражённого (а', б – з), действующего на активные центры СК (б' – з') импульсов: $S_{im} = 200$ (а, а', б, б'), 300 (е, е'), 500 (з, з'), $\beta = 0$ (а, а'), 0,05 (б – з, б' – з'), $t_0 = 0,434$, $\gamma = 2,34$, $\tau_R = 5 \cdot 10^{-13}$ с

образующих «сдвоенную» структуру импульсов действующего поля на временной шкале примерно соответствует фронтам входного импульса. В «пиковой» части импульса из-за фазовой отстройки резонансное поглощение снижается, поэтому отражённый импульс формируется с незначительной асимметрией фронтов, но как более короткий по длительности (рисунок 2.1, б – е). Влияние фазовой перестройки, величина которой определяется резонансной вариацией населённости, приводит, в сущности, к «обрезанию» фронтов результирующего отражённого импульса. Отмечается также, что тенденция к подобному существенному сужению импульса усиливается с увеличением мощности входного импульса, при этом значительно возрастает и оцениваемый в динамике эффективный коэффициент отражения СК.

Таким образом, решение задачи для координат вектора Блоха (2.1), приводящее к относительно простой схеме расчёта полей (2.2), (2.3), даёт возможность моделировать нестационарный процесс резонансного отражения света низкоразмерным СК с учётом типичной для этих объектов нелинейности отклика. Результатами моделирования предсказываются следствия её проявления.

3 Решение задачи о сверхизлучении в СК

Использование соотношения (2.2) даёт возможность приближённого аналитического расчёта временной развёртки импульса сверхизлучения (СИ) с учётом автомодуляционной отстройки резонанса, обусловленной взаимным влиянием ближних полей элементарных дипольных излучателей. Эффект СИ представляет результат их фазовой корреляции с характерным временем τ_R из-за взаимодействия диполей через излучаемое ими электромагнитное поле [18]. Среда при

этом максимально инвертирована, и процесс вынужденного излучения развивается в условиях сброса инверсии. Предполагается, что релаксационные механизмы дефазировки диполей, стимулированные взаимодействием активных диполей со структурными элементами матрицы материала, как и во всех коллективных эффектах, проявляются слабо. Полупроводниковые структуры с квантоворазмерными эффектами используются как инверсные среды; в виде планарных слоёв эти материалы применяются в качестве активных поверхностных плёнок, способных модулировать резонансное излучение. В полупроводниковых средах СИ развивается как коллективная спонтанная рекомбинация [22]. В процессе формирования импульса СИ фазы отдельных экситонов, представляемых диполями, спонтанно синхронизируются, в результате чего в пределах суперкристалла формируется коллективный диполь с относительно малым временем излучательной рекомбинации.

Анализ динамических следствий происходящей в процессе СИ самопроизвольной дефазировки активных центров в условиях влияния ближних полей и наличия квазирезонансной поляризованности возможен на основе модификации уравнения (2.2):

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\tau_R} \frac{\sin \Theta}{[1 + \beta\gamma(1 - \cos \Theta)]^2 + \beta^2(1 - \cos \Theta)^2}. \quad (3.1)$$

При записи (3.1) учтено, что инициирующее извне поле в задаче о СИ считается отсутствующим. Переменной n , и в этом случае выражаемой из решений (2.1), то есть тригонометрической функцией полярного угла $\Theta(t)$, описывается инверсия. В реальной схеме возбуждения СИ действует накачка и обычно считается [12], [18], что к «стартовому» моменту развития СИ инверсия должна достигать максимального значения.

Уже указывалось, что в отсутствие резонансной нелинейности решение (3.1) для полярного угла вектора Блоха описывает функцию излучаемого поля в виде гиперболического секанса. В рассматриваемом более общем случае взаимодействия уравнение (3.1) приводится к виду:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\tau_R} \left\{ \frac{1}{\sin \Theta} + 2\beta \left[\gamma + \beta(1 + \gamma^2) \right] \operatorname{tg} \Theta/2 - \beta^2 (1 + \gamma^2) \sin \Theta \right\}^{-1}.$$

Несложно показать, что интеграл уравнения, который неявно выражает функцию полярного угла вектора Блоха $\Theta(t)$, представляется следующим соотношением, включающим нелинейные компоненты:

$$\exp[(t - t_0)/\tau_R] = \operatorname{tg} \Theta/2 \left[1 + \operatorname{tg}^2 \Theta/2 \right]^{-2\beta[\gamma + \beta(1 + \gamma^2)]} \times \exp \left[\beta^2 (1 + \gamma^2) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \Theta/2}{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta/2} \right]. \quad (3.2)$$

В предположении сравнительно малого коэффициента резонансной нелинейности ($\beta \ll 1$) оба нелинейных степенных сомножителя в соотношении (3.2) по величинам могут быть признаны относительно близкими к единице. Тогда с применением аппроксимационных формул выражение (3.2) сводится к линейному уравнению относительно $\operatorname{tg} \Theta/2$. В результате его решения получаем, что функция поля может быть выражена такой зависимостью:

$$e(t) = \frac{1}{\tau_R} \frac{1 + \Delta + F/D}{\operatorname{ch}[(t - t_0)/\tau_R] + \Delta(1 + \Delta/2)G}, \quad G = \exp[(t - t_0)/\tau_R], \quad (3.3)$$

$$\Delta = \{mG \operatorname{ch}[(t - t_0)/\tau_R] + k \operatorname{sh}[(t - t_0)/\tau_R]\} / D,$$

$$D = (1 - 2mG^2) \operatorname{ch}[(t - t_0)/\tau_R] + k \operatorname{sh}[(t - t_0)/\tau_R] - 2(k + mG^2)G, \\ F = m \{ 2 \operatorname{ch}[(t - t_0)/\tau_R] + \operatorname{sh}[(t - t_0)/\tau_R] \} G + k \operatorname{ch}[(t - t_0)/\tau_R] - \Delta \{ (k - 4mG^2) \operatorname{ch}[(t - t_0)/\tau_R] + (1 - 2mG^2) \operatorname{sh}[(t - t_0)/\tau_R] - 2(k + 3mG^2)G \}, \\ m = 2\beta[\gamma + \beta(1 + \gamma^2)], \quad k = \beta^2(1 + \gamma^2).$$

На рисунках 3.1, а, в для сравнения приведены импульсные профили интенсивности СИ с учётом и без учёта вызванной нелинейностью фазовой автомодуляции, которые рассчитаны на основе выражений (3.3).

Отметим, что пиковая интенсивность импульсов светового поля, излучаемых в условиях действия нелинейных механизмов смещения резонанса, должна снижаться. Это напрямую связано с тем, что сброс инверсии, происходящий при распаде сфазированного состояния ансамбля диполей и, собственно, определяющий динамику СИ, представляет присущее вынужденному излучению резонансное свойство. Отстройка резонанса, зависящая от темпа сброса инверсии, и, следовательно, от интенсивности, выступает в рассматриваемом случае фактором отрицательной обратной связи – эффективное усиление снижается. Этот фактор, не определяя критических следствий для формирования импульсов СИ, способен, однако, в зависимости от характеристик нелинейности, привести к снижению их пиковой мощности и резкой асимметрии фронтов. Развёртки импульсов на рисунках 3.1, б и 3.1, г демонстрируют эту тенденцию для ряда значений параметра резонансной нелинейности β и времени сверхизлучения τ_R

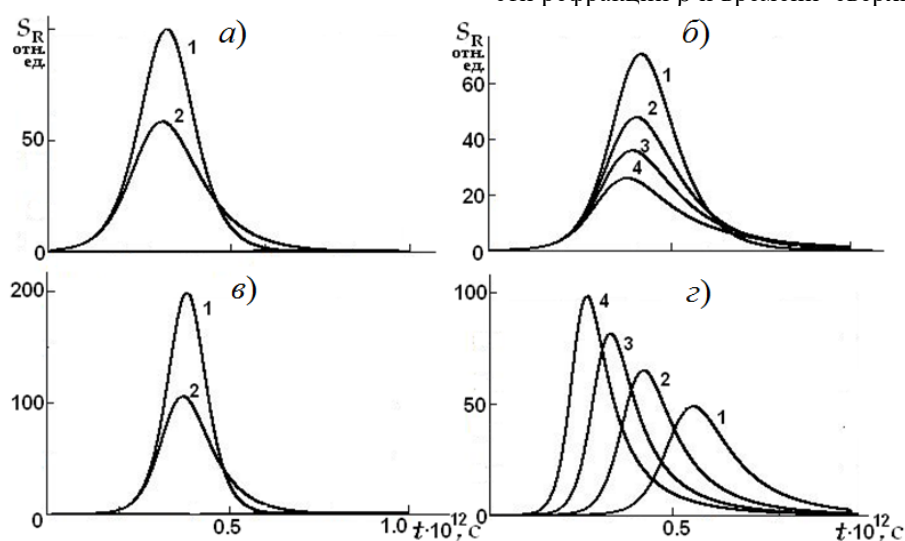


Рисунок 3.1 – Зависимости нормированной интенсивности сверхизлучения:
 $\beta = 0$ (кривая 1, а, кривая 1, в), 0,025 (2) (а), 0,02 (1), 0,03 (2), 0,04 (3), 0,05 (4), $\tau_R = 4 \cdot 10^{-13}$ с (а, б);
 $\beta = 0,03$ (2, в, г), $\tau_R = 8 \cdot 10^{-13}$ с (1), $6 \cdot 10^{-13}$ с (2), $5 \cdot 10^{-13}$ с (3), $4 \cdot 10^{-13}$ с (4) (г), $\gamma = 1,17$

(последняя характеристика здесь варьировалась в зависимости от концентрации активных центров N).

Заключение

Планарные нанометрические слои квазикристалла с относительно большой концентрацией активных центров, в сущности, представляя собой метаповерхности, способные эффективно изменять фазу зондирующего извне излучения, перспективны для использования в качестве модулирующих (или усиливающих) элементов в компактных оптических устройствах. Определено, что особенности резонансного отражения в условиях проявлений специфической нелинейности отклика СК и когерентных оптических эффектов могут обусловить существенное сокращение длительности действующего импульса. Проведенные оригинальные расчётные оценки временного хода процессов энергообмена поля и среды СК при отражении или формирования импульсов СИ с учётом типичных для резонансного отклика нелинейностей могут быть использованы при разработке методик получения и профилирования оптических импульсов в субпикосекундном диапазоне длительностей в современных устройствах нанопотоники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Soukoulis, C.M. Optical Metamaterials – More Bulky and Less Lossy / C.M. Soukoulis, M. Wegener // *Science*. – 2010. – Vol. 330. – P. 1633–1634.
2. *Метаматериалы и метаповерхности* / И.В. Семченко [и др.] // *Наука и инновации*. – 2020. – № 8 (210). – С. 23–27.
3. Ремнев, М.А. Метаповерхности новый взгляд на уравнения Максвелла и новые методы управления светом / М.А. Ремнев, В.В. Климов // *УФН*. – 2018. – Т. 188, вып. 2. – С. 169–205.
4. *Low-Dimensional Semiconductor Superlattices Formed by Geometric Control over Nanocrystal Attachment* / W.H. Evers [et al.] // *Nano Letters*. – 2013. – Vol. 13, № 6. – P. 2317–2323.
5. *Nonlinear optical dynamics of a 2D semiconductor quantum dot super-crystal: Emerging multistability, self-oscillations and chaos* / V.A. Malyshev [et al.] // *Journal of Physics: Conf. Series*. – 2018. – Vol. 1220. – P. 012006–1–4.
6. *Large Excitonic Reflectivity of Monolayer MoSe₂ Encapsulated in Hexagonal Boron Nitride* / G. Scuri [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2018. – Vol. 120. – P. 037402–7.
7. *Long-range orientation and atomic attachment of nanocrystals in 2D honeycomb superlattices* / M.P. Boneschanscher [et al.] // *Science*. – 2014. – Vol. 344. – P. 1377–1380.
8. Mak, K.F. Photonics and optoelectronics of 2D semiconductor transition metal dichalcogenides / K.F. Mak, J. Shan // *Nature Photonics*. – 2016. – Vol. 10. – P. 216–226.
9. *Black phosphorus field-effect transistors* / L. Li [et al.] // *Nature Nanotechnology*. – 2014. – Vol. 9. – P. 372.
10. *A two-dimensional conjugated aromatic polymer via C–C coupling reaction* / W. Liu [et al.] // *Nature Chemistry*. – 2017. – Vol. 9. – P. 563.
11. *Realization of an Electrically Tunable Narrow-Bandwidth Atomically Thin Mirror Using Monolayer MoSe₂* / P. Back [et al.] // *Phys. Rev. Letts.* – 2018. – Vol. 120. – P. 037401.
12. Андреев, В.А. Кооперативные эффекты в оптике: Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы / А.В. Андреев, В.И. Емельянов, Ю.А. Ильинский. – Москва: Наука, 1988. – 288 с.
13. Апанасевич, П.А. Основы теории взаимодействия света с веществом / П.А. Апанасевич. – Минск: Навука і тэхніка, 1977. – 496 с.
14. Гадомский, О.Н. Эффект ближнего поля в сверхтонкой плёнке резонансных атомов / О.Н. Гадомский, С.В. Сухов // *Квантовая электроника*. – 1998. – Т. 25, № 6. – С. 529–534.
15. Рупасов, В.И. О граничных задачах в нелинейной оптике резонансных сред / В.И. Рупасов, В.И. Юдсон // *Квантовая электроника*. – 1982. – Т. 9, № 11. – С. 2179–2186.
16. Гадомский, О.Н. Эхо-спектроскопия поверхности / О.Н. Гадомский, Р.А. Власов. – Минск: Навука і тэхніка, 1990. – 216 с.
17. Macomber, J.D. Laws of optics at high irradiance. I. Steady-state theory of a saturable slab / J.D. Macomber, W.H. Thomason // *J. Opt. Soc. Amer.* – 1977. – Vol. 67, № 4. – P. 453–464.
18. Allen, L. Optical Resonance and Two-level Atoms / L. Allen, J.H. Eberly. – New-York: Wiley, 1975. – 256 p.
19. Timoshchenko, E.V. Resonance reflection of light by a thin layer of a dense nonlinear medium / E.V. Timoshchenko, V.A. Yurevich, Yu.V. Yurevich // *Technical Physics*. – 2013. – Vol. 58. – P. 251–254.
20. McCall, S.L. Self-Induced Transparency / S.L. McCall, E.L. Hahn // *Phys. Rev.* – 1969. – Vol. 183, № 2. – P. 457–485.
21. *Optical Stark effect in a quantum dot: Ultrafast control of single exciton polarizations* / T. Unold [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol. 92, № 15. – P. 157401–1–4.
22. *Формирование сверхизлучения в наногетероструктурах с квантовыми точками* / А.В. Савельев [и др.] // *ФТП*. – 2008. – Т. 42, вып. 6. – С. 730–735.

Поступила в редакцию 12.07.2021.

Информация об авторах

Юревич Владимир Антонович – д.ф.-м.н., доцент

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ НЕ $\mathfrak{F}$ -ПОДГРУПП, ВЫДЕЛЯЕМЫХ ПОДГРУППОВЫМ ФУНКТОРОМ, В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р.В. Боролич

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON THE INTERSECTION OF NON- $\mathfrak{F}$ -SUBGROUPS, DISTINGUISHED BY A SUBGROUP FUNCTION, IN GROUPS WITH OPERATORS

R.V. Borodich

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается строение подгруппы, связанной с пересечением ядер максимальных A -допустимых подгрупп, которые не содержат $\mathfrak{F}$ -корадикал и не принадлежат формации $\mathfrak{F}$, индексы которых имеют ограничения. Установлены свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.

Ключевые слова: конечная группа, формация, $\mathfrak{F}$ -корадикал.

Для цитирования: Боролич, Р.В. О пересечении не $\mathfrak{F}$ -подгрупп, выделяемых подгрупповым функтором, в группах с операторами / Р.В. Боролич // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 64–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_64

Abstract. The structure of a subgroup associated with the intersection of kernels of maximal A -admissible subgroups that do not contain the $\mathfrak{F}$ -residual and do not belong to the $\mathfrak{F}$ formation whose indices have restrictions are considered. The properties of the corresponding generalized Frattini subgroup are established.

Keywords: finite group, formation, $\mathfrak{F}$ -residual.

For citation: Borodich, R.V. On the intersection of non- $\mathfrak{F}$ -subgroups, distinguished by a subgroup function, in groups with operators / R.V. Borodich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 64–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_64 (in Russian)

Введение

Группы, рассматриваемые в статье, предполагаются конечными. В теории групп к объектам экстремально расположенным в группе уделяется особое внимание. Одними из представителей таких объектов являются максимальные подгруппы, свойства которых могут многое сказать о строении самой группы. Часто рассматривают не сами максимальные подгруппы, а пересечения их некоторых семейств. Основоположающим результатом этого подхода явилась работа Г.Фраттини [1]. Введенная им подгруппа, названная его именем, дала импульс для развития теории пересечений максимальных подгрупп (см. монографии [2], [3], [9]).

Настоящая работа посвящена рассмотрению обобщенно максимальных подгрупп в группах с операторами. Данная работа является продолжением исследований, отраженных в работах [4], [10], [11].

1 Определения и обозначения

Используемые в статье объекты и определения являются классическими. Ознакомиться с ними можно в вышеуказанных работах.

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная формация. Введем следующие обозначения: $D_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ ($\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$) – пересечение ядер всех максимальных A -допустимых θ -подгрупп группы G , не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G (и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$), индексы которых делятся на простые числа из π .

При отсутствии подгрупп с определенными свойствами будем считать, что эти объекты равны G .

Заметим, что не всякая максимальная подгруппа обязана являться максимальной A -допустимой и не любая максимальная из A -допустимых подгрупп группы будет являться максимальной подгруппой в самой группе [11].

2 Основной результат

Теорема 2.1. Пусть подгрупповый функтор θ является абнормально полным, а группа G обладает группой операторов A , такой, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – локальная S_{π} -замкнутая формация, которая содержит все нильпотентные группы, $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$ и подгруппа $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$

π -разрешима. Тогда в подгруппе $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ найдется нормальная π' -подгруппа T такая, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Допустим, что группа G – контрпример минимального порядка. Очевидно, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ не будет принадлежать формации $\mathfrak{F}$, а иначе в качестве подгруппы T можно положить единичную подгруппу.

Так как подгруппа $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ отлична от G , то из работы [4] заключаем, что $G \neq \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Но $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Отсюда следует, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subset \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Значит, в группе G существует такая максимальная A -допустимая θ -подгруппа M , не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ и $M \not\subseteq G^{\mathfrak{F}}$, что $G = M\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Если $|\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)|$ – π -число, то $|G : M| = |\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)| : |\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap M|$ – π -число. Получили противоречие с тем, что $G = M\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) = M$. Значит, порядок подгруппы $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ делится на простые числа из π' .

Обозначим через Σ множество, содержащее все максимальные A -допустимые в группе G θ -подгруппы, не принадлежащие формации $\mathfrak{F}$, не содержащие $G^{\mathfrak{F}}$, с индексами в G , являющимися π -числами.

Допустим, что в подгруппе $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ может существовать неединичная π' -подгруппа T , являющаяся нормальной в группе G . Пусть в G/T существует такая подгруппа M/T , что M из Σ и M/T принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда будет выполняться $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T \in \mathfrak{F}$, так как формация $\mathfrak{F}$ является замкнутой относительно нормальных подгрупп. И вновь получено противоречие с предположением. Если в G/T существует максимальная A -допустимая θ -подгруппа $H/T \not\subseteq (G/T)^{\mathfrak{F}}$, не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ и не принадлежащая Σ , с индексом в G/T , являющимся π -числом, то $H \in \mathfrak{F}$. Из этого следует, что $H/T \in \mathfrak{F}$. И снова получено противоречие. Получаем, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/T, A) = \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T$. Так как выполняется $G/T \neq \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/T, A) = \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T$, то для фактор-группы G/T по допущению теорема верна. Тогда в подгруппе $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T$ можно отыскать нормальную в G/T π' -подгруппу T^*/T такую, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T/T^*/T \in \mathfrak{F}$. Отсюда будет следовать, что T^* – π' -подгруппа и $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/T^* \in \mathfrak{F}$, что снова противоречит предположению.

Сделаем допущение, что $\Phi_0(G, A) \neq 1$. Если при этом $M/\Phi_0(G, A) \in \mathfrak{F}$, где $M \in \Sigma$, то $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi_0(G, A) \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая формация. На основании результата работы [4] подгруппа $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обязана принадлежать формации $\mathfrak{F}$, что, как видно, противоречит предположению. Отсюда следует, что в группе $G/\Phi_0(G, A)$ все максимальные A -допустимые θ -подгруппы $M/\Phi_0(G, A)$, где M из Σ , не принадлежат формации $\mathfrak{F}$, значит,

$$\begin{aligned} G/\Phi_0(G, A) &\neq \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_0(G, A)) = \\ &= \bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi_0(G, A). \end{aligned}$$

Так как порядки соответствующих групп $|G/\Phi_0(G, A)| < |G|$, то в $G/\Phi_0(G, A)$ обязана найтись нормальная π' -подгруппа $T^*/\Phi_0(G, A)$, такая, что $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Phi_0(G, A)/T^*/\Phi_0(G, A) \in \mathfrak{F}$. Если предположить, что $\mathfrak{F}$ является формацией всех π' -групп, то на основании работы [4] получим, что $T^* = T_1^* \times T_2^*$, где T_1^* – π -подгруппа, а T_2^* – π' -подгруппа. Отсюда вытекает, что в G будет существовать нормальная π' -подгруппа, что, как можем видеть, противоречит предположению.

Далее в рассуждениях предполагаем, что $\Phi_0(G, A) = 1$.

Допустим, что подгруппа N_1 является минимальной нормальной в G и одновременно содержится в $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Так как в группе G не существует нормальных π' -подгрупп, $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ является π -разрешимой подгруппой и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то отсюда следует, что N_1 является собственной π -подгруппой $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$.

Так как подгруппа $\Phi_0(G, A)$ отлична от единицы, то в группе G обязана существовать максимальная A -допустимая θ -подгруппа M с таким свойством, что $G = MN_1$. Если M не содержит $\mathfrak{F}$ -корадикала, то $M \in \mathfrak{F}$, так как $|G : M| = |N_1|$ является π -числом. Отсюда вытекает, что $G/N_1 \in \mathfrak{F}$, а это влечет $G/\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Отсюда будет следовать, произвольная максимальная A -допустимая в G θ -подгруппа, которая будет содержать подгруппу $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, будет являться подгруппой, которая содержит $G^{\mathfrak{F}}$, а это будет противоречить выбору подгруппы $\bar{D}_{0_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$.

Из вышесказанного заключаем, что M является максимальной A -допустимой θ -подгруппой

группы G , которая будет содержать $\mathfrak{F}$ -корадикал. Таким образом, каждая из максимальных A -допустимых в группе G функторных подгрупп, не содержащих нормальную подгруппу N_1 , одновременно содержат $\mathfrak{F}$ -корадикал. Из этого заключения следует, что N_1 будет являться $\mathfrak{F}$ -гиперцентральной нормальной подгруппой группы G , а это означает, что

$$G / C_G(N_1) \in f(p) \cap \mathfrak{F},$$

где p является делителем порядка N_1 . Из того, что $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая формация, следует, что

$$\begin{aligned} \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)C_G(N_1) / C_G(N_1) &\cong \\ &\cong \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / C_G(N_1) \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) = \\ &= \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / C_{\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)}(N_1) \in f(p) \cap \mathfrak{F}, \end{aligned}$$

где p делит $|N_1|$.

Допустим, что L / H – произвольный главный фактор подгруппы $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$, такой, что $L \subseteq N_1$. Так как $C_{\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)}(N_1) \subseteq C_{\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)}(L / N)$, то $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / C_{\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)}(L / N) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, где p делит $|L / N|$. Отсюда следует, что подгруппа N_1 будет являться $\mathfrak{F}$ -гиперцентральной в подгруппе $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$.

Допустим, что $M_G \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} M_G(M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)) / M_G &\cong \\ &\cong M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cap M_G = \\ &= M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Но $M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cong \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1$, так как

$$\begin{aligned} \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 &= G \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 = \\ &= MN_1 \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 = \\ &= (M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A))N_1 / N_1 \cong \\ &\cong M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cap N_1 = \\ &= M \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A). \end{aligned}$$

Так как N_1 является $\mathfrak{F}$ -гиперцентральной в $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ подгруппой и подгруппа $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1$ принадлежит $\mathfrak{F}$, то $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$, что, как видим, противоречит предположению.

Отсюда будет следовать, что пересечение $M_G \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ отлично от единицы. Так как $N_1 \cap M_G \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) = 1$, то в подгруппе $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ можно отыскать минимальную нормальную в G π -подгруппу N_2 , отличную от единицы.

Проверим, что условия теоремы выполнимы для подгрупп G / N_1 и G / N_2 . Предположим, что

найдется хотя бы по одной фактор-группе $M_k / N_1 \in \mathfrak{F}$ и $M_l / N_2 \in \mathfrak{F}$, где M_k и M_l из Σ , что влечет выполнение $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 \in \mathfrak{F}$ и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2 \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – формация, замкнутая относительно нормальных подгрупп. Отсюда будет следовать, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$, а это не соответствует предположению.

Предположим теперь, что в G / N_1 найдётся как минимум одна максимальная A -допустимая функторная подгруппа $M_i / N_1 \in \mathfrak{F}$, $M_i \in \Sigma$, а в G / N_2 все подгруппы M_j / N_2 не принадлежат формации $\mathfrak{F}$, где $M_j \in \Sigma$. Следовательно, $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G / N_2, A) = \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2$, т. е. для G / N_2 теорема будет верна, а это значит, что в $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2$ обязана существовать нормальная в G / N_2 π' -подгруппа T^* / N_2 , причем такая, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2 / T^* / N_2 \cong \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / T^* \in \mathfrak{F}$. Но и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 \cap T^* \in \mathfrak{F}$. Если бы $N_1 \subseteq T^*$, то $N_2 / N_2 \neq N_1 N_2 / N_2 \subseteq T^* / N_2$ и $N_1 N_2 / N_2$ – π' -подгруппа, а это будет противоречить тому, что N_1 – π -подгруппа. Остаётся заключить, что $N_1 \cap T^* = 1$. Отсюда $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Снова получили противоречие с нашим предположением. Такие же рассуждения проводятся, предполагая, что в G / N_2 найдётся как минимум одна максимальная A -допустимая функторная подгруппа $M / N_2 \in \mathfrak{F}$, где $M \in \Sigma$, а в G / N_1 любая максимальная A -допустимая функторная подгруппа H / N_1 не будет принадлежать формации $\mathfrak{F}$, где $H \in \Sigma$.

Следовательно, в фактор-группах G / N_1 и G / N_2 не может существовать ни одной максимальной A -допустимой функторной подгруппы, не содержащей $\mathfrak{F}$ -корадикал, которая одновременно принадлежит формации $\mathfrak{F}$ и в качестве своего индекса в соответствующей фактор-группе π -число. Значит,

$$G / N_1 \neq \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G / N_1, A) = \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1$$

и $G / N_2 \neq \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G / N_2, A) = \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2$. Используя допущение, получим, что в подгруппах $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1$ и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2$ будут существовать соответственно в G / N_1 и G / N_2 нормальные π' -подгруппы T_1 / N_1 и T_2 / N_2 такие, что

$$\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_1 / T_1 / N_1 \in \mathfrak{F}$$

и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / N_2 / T_2 / N_2 \in \mathfrak{F}$. Непосредственно отсюда получаем, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / T_1 \cap T_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $T_1 \cap T_2 = T$ – неединичная подгруппа. Подгруппа N_1 не содержится в подгруппе T_2 , так как N_1 – π -подгруппа, а T_2 / N_2 – π' -подгруппа. Проводя аналогичные рассуждения заключаем, что N_2 не содержится в T_1 , так как N_2 – π -подгруппа, а T_1 / N_1 – π' -подгруппа. Отсюда непосредственно будет следовать, что $T_1 \cap T_2$ – π' -подгруппа. По предположению в подгруппе $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ не существует нормальных в группе G π' -подгрупп. Отсюда вытекает, что $T_1 \cap T_2 = 1$ и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие окончательно доказывает теорему.

В случае, если формация $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией нильпотентных групп, то из теоремы 2.1 можно получить следующее

Следствие 2.1.1. Пусть у группы G имеется группа операторов A , такая, что $(|G|, |A|) = 1$, подгрупповый функтор θ является абнормально полным и в группе G существует ненильпотентная максимальная A -допустимая θ -подгруппа, индекс которой в G есть π -число. Если $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$ – π -разрешимая подгруппа, тогда в группе G существует нормальная π' -подгруппа T , такая, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / T \in \mathfrak{N}$.

Следствие 2.1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, содержащая все нильпотентные группы, подгрупповый функтор θ является абнормально полным, $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G) \neq G$ и $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G)$ – π -разрешимая подгруппа. Тогда в $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G)$ найдется π' -подгруппа T , нормальная в G , такая, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G) / T \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.1.3. Пусть θ является абнормально полным подгрупповым функтором и в группе G найдется ненильпотентная A -допустимая максимальная θ -подгруппа, индекс которой в G есть π -число. Если $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G)$ – π -разрешимая подгруппа, то в группе G существует нормальная π' -подгруппа T , такая, что $\bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G) / T \in \mathfrak{N}$.

Теорема 2.2. Пусть θ является абнормально полным подгрупповым функтором, а группа операторов A группы G такая, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация, такая, что $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$. Если L – нормальная π -подгруппа группы G и $L \subseteq \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$, то либо $L \in \mathfrak{F}$, либо $G^\mathfrak{F} \subseteq L$.

Доказательство. Предположим, что группа G имеет наименьший порядок, теорема для которой не выполняется.

Если подгруппа $L = 1$, то $L \in \mathfrak{F}$. Следовательно, можно допустить, что в L существует минимальная нормальная в группе G не единичная подгруппа K . Так как

$$L / K \subseteq \bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / K \subseteq \bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G / K, A),$$

то для группы G / K теорема будет выполняться. Значит, в группе G / K или $G^\mathfrak{F} K / K \subseteq L / K$, или $L / K \in \mathfrak{F}$. Если выполняется $G^\mathfrak{F} K / K \subseteq L / K$, то $G^\mathfrak{F} \subseteq L$, что противоречит предположению теоремы. Остаётся заключить, что $L / K \in \mathfrak{F}$.

Допустим, что $K \subseteq \Phi_0(G, A)$. Тогда из работы [4] подгруппа $L \in \mathfrak{F}$. Следовательно, K не будет содержаться в $\Phi_0(G, A)$.

Если допустить, что каждая максимальная A -допустимая функторная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K , содержит $G^\mathfrak{F}$, то из работы [4] получим, что $L \in \mathfrak{F}$. Опять получено противоречие. Значит, в G будет существовать такая максимальная A -допустимая функторная подгруппа H , не содержащая $G^\mathfrak{F}$, что $G = HK$. Если H принадлежит формации $\mathfrak{F}$, то $G^\mathfrak{F} \subseteq K \subseteq L$. Получили противоречие. Значит, H не принадлежит замкнутой относительно нормальных подгрупп формации $\mathfrak{F}$.

Так как подгруппа K является π -подгруппой, то H может только быть максимальной A -допустимой функторной подгруппой группы G , не принадлежащей формации $\mathfrak{F}$ и не содержащей $\mathfrak{F}$ -корадикал, с индексом в G , являющимся π -числом, но в связи с условием $L \subseteq \bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A)$. Откуда будет следовать, что $G = H$. Полученное в заключении противоречие доказывает теорему. $\square$

В случае, когда группа A тривиальна, то в качестве следствия теоремы 3.2 получают результаты В.А. Ведерникова и Е.Т. Огаркова [7], Л.И. Шидова [6], В.В. Шлыка [5], М.В. Селькина [3].

Теорема 2.3. Пусть θ является абнормально полным подгрупповым функтором, а группа операторов A группы G такая, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация. Если L является нормальной A -допустимой π -подгруппой группы G и $L / L \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \in \mathfrak{F}$, тогда $L = L_1 \times L_2$, где множители удовлетворяют условиям:

- 1) $L_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(L_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $L_2 \subseteq \Phi_0(G, A)$.

Доказательство. Предположим, что группа G имеет наименьший порядок, теорема для которой не выполняется.

Если $L \cap \bar{D}_{0_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) = 1$, то теорема выполняется. Допустим K является не единичной

минимальной нормальной в G подгруппой, которая будет содержаться в $L \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Так как

$$\begin{aligned} L/K / L/K \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G/K, A) &= \\ = L/K / L/K \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A)/K &= \\ = L/K / L \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A)/K &\cong L/L \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}, \end{aligned}$$

то для группы G/K теорема выполняется, значит, $L/K \in \mathfrak{F}$. Если предположить, что $K \subseteq \Phi_0(G, A)$, то на основании результатов из [4] подгруппа $L \in \mathfrak{F}$, а это не согласуется с предположением. Следовательно, подгруппа K не может содержаться в $\Phi_0(G, A)$.

Если допустить, что любая максимальная A -допустимая функторная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K , содержит $G^{\mathfrak{F}}$, то, используя работу [4], получим, что $L \in \mathfrak{F}$. Снова столкнулись с противоречием. Значит, в группе G существует такая максимальная A -допустимая функторная подгруппа H , не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, что $G = HK$. Если предположить, что $H \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq L$, а это снова будет противоречить предположению. Из этого следует, что подгруппа H не принадлежит нормально наследственной формации $\mathfrak{F}$.

Так как K — π -подгруппа группы G , то H является максимальной A -допустимой функторной подгруппой группы G , не принадлежащей формации $\mathfrak{F}$ и не содержащей $G^{\mathfrak{F}}$, с индексом в G , который является π -числом. Из последнего будет следовать, что $K \subseteq L$. Последнее противоречие окончательно доказывает теорему. $\square$

Следствие 2.3.1. Пусть θ является абнормально полным подгрупповым функтором, а группа операторов A группы G такая, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ — S_n -замкнутая локальная формация, такая, что $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$. Если L является нормальной π -подгруппой группы G и $L/L \cap D_{0_n}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $L \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда $A=1$, то из теоремы 2.3 будут следовать результаты работ [3], [5], [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini, G.* Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. — 1885. — Vol. 1. — P. 281–285.
2. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. — Москва: Наука, 1978. — 267 с.
3. *Селькин, М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 144 с.
4. *Бородич, Р.В.* О пересечении абнормальных A -допустимых подгрупп с ограничениями на индексы, не содержащих $\mathfrak{F}$ -корадикал / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. — 2019. — № 4 (39). — С. 39–43.
5. *Шлык, В.В.* О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Математические заметки. — 1973. — Т. 14, № 3. — С. 429–439.
6. *Шидов, Л.И.* О максимальных подгруппах конечных групп / Л.И. Шидов // Сибирский математический журнал. — 1971. — Т. 12, № 3. — С. 682–683.
7. *Ведерников, В.А.* Об обобщённой подгруппе Фраттини конечной группы / В.А. Ведерников, Т.Т. Огарков // IV Всесоюзный симпозиум по теории групп. — Новосибирск. — 1973. — С. 22–23.
8. *Ведерников, В.А.* Конечные группы с обобщённой подгруппой Фраттини / В.А. Ведерников, Н.Г. Дука // IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум. — Гомель. — 1968. — С. 44.
9. *Скиба, А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 240 с.
10. *Бородич, Р.В.* О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р.В. Бородич // Украинский математический журнал. — 2019. — Т. 71, № 11. — С. 1455–1465.
11. *Borodich, R.V.* A generalized Frattini subgroup / R.V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 14, № 2. — P. 2150026. — DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793557121500261>

Поступила в редакцию 04.11.2021.

Информация об авторах

Бородич Руслан Викторович — к.ф.-м.н., доцент

О РАДИКАЛАХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ КОНЕЧНЫХ $\mathfrak{X}$ -ГРУПП

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON RADICALS OF FACTORIZED FINITE $\mathfrak{X}$ -GROUPS

A.F. Vasil'ev

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Пусть $\mathfrak{X}$ – насыщенная S -замкнутая формация конечных разрешимых групп, содержащая класс $\mathfrak{N}^k$ всех групп, нильпотентная длина которых не превосходит k , где $k \geq 3$. В работе получено конструктивное описание всех формаций Фиттинга $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$ таких, что для любой $\mathfrak{X}$ -группы $G = AB$ выполняется $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная длина, ди- $\mathfrak{F}$ -группа, $\mathfrak{F}$ -радикал, формация Фиттинга, радикальная формация с условием Монахова в классе $\mathfrak{X}$.

Для цитирования: Васильев, А.Ф. О радикалах факторизуемых конечных $\mathfrak{X}$ -групп / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 69–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_69

Abstract. Let $\mathfrak{X}$ be a saturated S -closed formation of finite soluble groups containing the class $\mathfrak{N}^k$ of all groups whose nilpotent length does not exceed k , where $k \geq 3$. In this paper, we obtain a constructive description of all Fitting formations $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{X}$ such that for any $\mathfrak{X}$ -group $G = AB$, there is $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Keywords: finite group, nilpotent length, di- $\mathfrak{F}$ -group, $\mathfrak{F}$ -radical, Fitting formation, radical formation with the Monakhov condition in the class $\mathfrak{X}$.

For citation: Vasil'ev, A.F. On radicals of factorized finite $\mathfrak{X}$ -groups / A.F. Vasil'ev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 69–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_69 (in Russian)

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Класс групп $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, содержащий единичную группу, называется радикальным в $\mathfrak{X}$, если всякая $\mathfrak{X}$ -группа G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$ -подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$, называемую $\mathfrak{F}$ -радикалом группы G . S_n -замкнутый класс (формация) $\mathfrak{F}$, радикальный в $\mathfrak{X}$, называется классом (формацией) Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Классическими примерами радикалов группы G являются наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа $F(G)$ (подгруппа Фиттинга) и ее наибольшая нормальная π -подгруппа $O_{\pi}(G)$, где π – некоторое множество простых чисел, которые относятся к радикальным классам $\mathfrak{M}$ всех нильпотентных групп и $\mathfrak{G}_{\pi}$ всех π -групп соответственно.

Отметим, что рассмотрение радикальных классов в данном классе $\mathfrak{X}$ является содержательной задачей. Например, класс $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп не является радикальным в классе всех (разрешимых) групп. С другой стороны, в [1] установлена радикальность $\mathfrak{U}$

в классе $\mathfrak{MA}$ всех расширений нильпотентных групп с помощью групп с абелевыми силовскими подгруппами.

Пусть группа $G = AB$ является произведением своих подгрупп A и B . В работе [2] В.С. Монахов установил, что для подгрупп Фиттинга A , B и G соответственно, выполняется $F(A) \cap F(B) \subseteq F(G)$. Джонсон [3] доказал, что для разрешимой группы $G = AB$ для каждого множества простых чисел π имеет место $O_{\pi}(A) \cap O_{\pi}(B) \subseteq O_{\pi}(G)$. Амберг и Л.С. Казарин [4] показали, что результат Джонсона неверен в общем случае и нашли условия его справедливости в классе всех групп. В работе [5] нами в классе всех разрешимых групп было получено конструктивное описание формаций Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых для каждой группы $G = AB$ выполняется $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. В настоящей статье мы продолжаем исследования в отмеченном выше направлении.

Определение 1. Класс групп $\mathfrak{F}$ назовем радикальным классом с условием Монахова в классе групп $\mathfrak{X}$ (кратко, радикальным $\mathfrak{M}$ -классом в $\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}$ радикален в $\mathfrak{X}$ и для любой $\mathfrak{X}$ -группы $G = AB$ выполняется $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

В настоящей работе мы исследуем следующую проблему.

Проблема 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – насыщенная S -замкнутая формация. Конструктивно описать все радикальные $\mathcal{M}$ -формации в $\mathfrak{X}$.

Нами получена следующая теорема. В дальнейшем ди- $\mathfrak{F}$ -группой называется группа $G = AB$ с $\mathfrak{F}$ -подгруппами A и B .

Теорема А. Пусть $\mathfrak{X}$ – разрешимая насыщенная S -замкнутая формация, содержащая $\mathfrak{N}^k$, $k \geq 3$, и $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны.

(1) $\mathfrak{F}$ является формацией с условием Монова в $\mathfrak{X}$.

(2) Для каждой ди- $\mathfrak{F}$ -группы $G = AB$, принадлежащей $\mathfrak{X}$, имеет место $A \cap B \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

(3) Существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$.

Следствие [5]. Пусть $\mathfrak{F}$ – подформация Фиттинга в $\mathfrak{S}$. Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны.

(1) Для каждой разрешимой группы $G = AB$ имеет место $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

(2) Для каждой разрешимой ди- $\mathfrak{F}$ -группы $G = AB$ имеет место $A \cap B \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

(3) Существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$.

1 Необходимые сведения и результаты

В основе работы лежат определения, обозначения и результаты из [6] и [7]. Выделим некоторые обозначения:

π – некоторое множество простых чисел;

π' – множество всех простых чисел, отличных от $p \in \pi$;

C_p – группа, порядок которой равен простому числу p ;

F_p – поле из p элементов;

$\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка $|G|$ группы G ;

$\pi(\mathfrak{F}) = \cup \{\pi(G) \mid G \in \mathfrak{F}\}$; $O_{\pi}(G)$ – наибольшая нормальная π -подгруппа в G ;

$F_p(G)$ – p -нильпотентный радикал группы G ;

$[L]K$ – полупрямое произведение с нормальной подгруппой L ;

если G – группа, то $S(G)$ обозначает множество всех ее подгрупп;

$\mathfrak{S}_{\pi}$ – класс всех разрешимых π -групп;

$\mathfrak{N}_{\pi}$ – класс всех nilпотентных π -групп;

$\mathfrak{X}^S$ – максимальный S -замкнутый подкласс класса $\mathfrak{X}$.

Напомним [7], что nilпотентной длиной разрешимой группы G (обозначается $l(G)$) называется наименьшее неотрицательное целое число k такое, что $F_k(G) = G$, где подгруппа $F_i(G)$ определяется рекурсивно следующим образом: $F_0(G) = 1$ и $F_i(G) / F_{i-1}(G) = F(G / F_{i-1}(G))$ для всех $i \geq 1$. Класс $\mathfrak{N}^k = (G \in \mathfrak{S} \mid l(G) \leq k)$ является насыщенной S -замкнутой формацией Фиттинга.

Пусть I – непустое множество. Для каждого $i \in I$ пусть $\mathfrak{F}_i$ – насыщенная S -замкнутая формация. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ для всех $i, j \in I$, $i \neq j$. Обозначим $\pi_i = \pi(\mathfrak{F}_i)$, $i \in I$. Следуя [7], определим конструкцию следующего класса:

$$\times_{i \in I} \mathfrak{F}_i = (G = O_{\pi_1}(G) \times \dots \times O_{\pi_n}(G) \mid O_{\pi_j}(G) \in \mathfrak{F}_i, \\ 1 \leq j \leq n, \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I).$$

Лемма 1.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – насыщенная S -замкнутая формация разрешимых групп, $\mathfrak{F}$ – насыщенная S_n -замкнутая (S -замкнутая) формация, радикальная в $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{Y} = \times_{i \in I} \mathfrak{F}_{\pi_i}$ для некоторого разбиения $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) $\mathfrak{Y}$ – насыщенная S_n -замкнутая (S -замкнутая) формация, радикальная в $\mathfrak{X}$;

(2) $\mathfrak{Y}$ определяется локальной функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}_{\pi_i}$ для любого $p \in \pi_i$ и $f(p) = \emptyset$ для любого $p \in \pi'$.

Доказательство. (1) Утверждение осуществляется проверкой соответствующих определений.

(2) Пусть формация $\mathfrak{Y}^*$ определяется локальной функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}_{\pi_i}$ для каждого $p \in \pi_i$ и $f(p) = \emptyset$ для каждого $p \in \pi'$.

Нетрудно проверить $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}^*$. Предположим, что $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Y}^*$. Пусть G – группа из $\mathfrak{Y}^* \setminus \mathfrak{Y}$, имеющая минимальный порядок. Ввиду того, что $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y}^*$ – насыщенные формации, выводим, что в G подгруппа Фраттини тривиальная и цокль совпадает с минимальной нормальной подгруппой $K = G^{\mathfrak{Y}}$. Из разрешимости формации $\mathfrak{X}$ следует разрешимость $\mathfrak{F}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Из строения локальной функции f получаем, что $\mathfrak{Y}^* \subseteq \mathfrak{S}$. Из полученного выше следует, что K – p -группа, где p – некоторое простое число, и $K = C_G(K)$. Из $G \in \mathfrak{Y}^*$ вытекает, что $G / C_G(K) = G / K \in f(p) = \mathfrak{F}_{\pi_i}$, где $p \in \pi_i$. Учитывая, что $\mathfrak{F}$ – насыщенная S -замкнутая формация, имеем $\mathfrak{F}_{\pi_i} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_{\pi_i}$ – насыщенная S -замкнутая формация. Отсюда следует, что

$G \in \mathfrak{F}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{Y}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{Y}^* \setminus \mathfrak{Y} = \emptyset$, а значит, $\mathfrak{Y}^* = \mathfrak{Y}$. $\square$

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Согласно [7] группа G называется S -критической для $\mathfrak{X}$, если $G \notin \mathfrak{X}$, а все ее подгруппы $H \neq G$ принадлежат $\mathfrak{X}$. Класс всех S -критических групп для $\mathfrak{X}$ обозначается через $\text{Crit}_s(\mathfrak{X})$. Всякая S -критическая группа для $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ иначе называется группой Шмидта [6]. Строение групп Шмидта можно найти в [6, теоремы 26.2, 26.2]. Через $E(q/p)$ обозначается группа Шмидта наименьшего порядка с нормальной силовой p -подгруппой и ненормальной циклической q -подгруппой. Она существует и единственна [7].

Лемма 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация групп. Тогда:

- 1) $\text{Crit}_s(\mathfrak{F}) = \text{Crit}_s(\mathfrak{F}^S)$;
- 2) $\mathfrak{F}^S$ – формация;
- 3) если $\mathfrak{F}$ – разрешимая насыщенная формация, то $\mathfrak{F}^S$ – насыщенная формация.

Доказательство. Справедливость утверждений (1) и (2) осуществляется проверкой. Утверждение (3) получается из [6, теорема 25.3].

Лемма 1.3. Для разрешимой S_n -замкнутой формации $\mathfrak{F}$ всегда $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F}^S)$.

Доказательство. Достаточно установить, что $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{F}^S)$. Предположим, что существует $\mathfrak{F}$ -группа G такая, что $p \in \pi(G)$, но $p \notin \pi(\mathfrak{F}^S)$. Возьмем среди таких групп группу G минимального порядка. Тогда $|G| > p$. Из разрешимости G следует, что G имеет неединичную нормальную максимальную подгруппу M . Если $|G:M| = p$, то из $G/M \simeq C_p \in \mathfrak{F}^S$ получаем противоречие с $p \notin \pi(\mathfrak{F}^S)$. Допустим, что $|G:M| \neq p$. Тогда $p \in \pi(M)$. Из S_n -замкнутости формации $\mathfrak{F}$ и $M \trianglelefteq G$ следует, что $M \in \mathfrak{F}$. Так как $|M| < |G|$ по выбору G имеем $p \in \pi(\mathfrak{F}^S)$. Получили противоречие. $\square$

Напомним, что формацией с условием Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$ (кратко, $\tilde{S}$ -формацией в $\mathfrak{X}$) называется формация $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, для которой любая S -критическая $\mathfrak{X}$ -группа для $\mathfrak{F}$ является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Нам понадобится следующий результат о таких формациях [9].

Лемма 1.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная S -замкнутая формация, h – ее каноническая локальная функция, $\mathfrak{X}$ – насыщенная S -замкнутая формация, x – ее максимальная S -замкнутая локальная функция. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является $\tilde{S}$ -формацией в $\mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{F}$ определяется локальной функцией f такой, что

$$f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(h(p))} \cap x(p), \text{ если } p \in \pi(\mathfrak{F});$$

$$f(p) = \emptyset, \text{ если } p \notin \pi(\mathfrak{F}), \text{ и } f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$$

для любого простого p .

2 Доказательство теоремы А

Для доказательства нашей теоремы А нам потребуются некоторые свойства формаций Фиттинга в $\mathfrak{X}$, которые устанавливаются в следующих леммах.

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – разрешимая насыщенная S -замкнутая формация, содержащая $\mathfrak{N}^k$, $k \geq 3$, x – ее максимальная S -замкнутая локальная функция. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга в $\mathfrak{X}$ и для $\mathfrak{F}$ выполняется утверждение (2) теоремы А. Если $\mathfrak{F}^S$ – насыщенная $\tilde{S}$ -формация в $\mathfrak{X}$, то существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F}^S = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{Y} = \mathfrak{F}^S$. По лемме 1.3 множества $\pi(\mathfrak{Y})$ и $\pi(\mathfrak{F})$ совпадают. По лемме 1.4 имеется определяющая формацию $\mathfrak{Y}$ локальная функция f : $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(h(p))} \cap x(p)$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \emptyset$, если $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p . При этом h – каноническая локальная функция формации $\mathfrak{Y}$. Отметим, что $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.

Предположим, что $\pi(\mathfrak{Y}) = \{p\}$. Ввиду насыщенности формации $\mathfrak{Y}$ получаем, что $\mathfrak{Y} = \mathfrak{N}_p$, и утверждение леммы выполняется.

Допустим, что $|\pi(\mathfrak{Y})| \geq 2$. Тогда в $\pi(\mathfrak{Y})$ найдутся два различных простых числа p и q . Пусть $p \in \pi(f(q))$. Докажем, что $q \in \pi(f(p))$. Предположим, что $q \notin \pi(f(p))$. Рассмотрим группу $X = [V]C_p$, где V – точный неприводимый $F_q C_p$ -модуль над полем F_q , который существует ввиду [7, следствие 10.7.B]. Поскольку $C_p \in f(q)$, группа $X \in \mathfrak{F}$. Обозначим $Z = [W]X$, где W – точный неприводимый $F_p X$ -модуль над F_p . Тогда $Z \in \mathfrak{X}$, так как $\mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{X}$, $k \geq 3$. Установим, что $Z \notin \mathfrak{F}$. Допустим, что $Z \in \mathfrak{F}$. Из S_n -замкнутости $\mathfrak{F}$ следует, что $H = [W]V \in \mathfrak{F}$. Ясно, что $H \in \mathfrak{N}^2$. По [7, теорема 2.1.XI] $\mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{F} = S$ -замкнутая формация Фиттинга. Поэтому $S(H) \subseteq \mathfrak{F}$ и $H \in \mathfrak{Y} = \mathfrak{F}^S$. Заметим, что $C_Z(W) = C_H(W) = W$. Тогда $W \subseteq F_p(H) \neq H$. Ввиду [6, лемма 4.5] имеем $H / F_p(H) \in f(p)$. Значит, $q \in \pi(f(p))$. Полученное противоречие показывает, что $Z \notin \mathfrak{F}$.

Заметим, что $Z_{\mathfrak{F}} \leq H$, $X = VC_p \in \mathfrak{F}$ и $Y = WC_p \in \mathfrak{F}$. Тогда $Z = XY$ – ди- $\mathfrak{F}$ -группа и $X \cap Y \leq Z_{\mathfrak{F}}$. Так как $C_p \leq X \cap Y$ и $C_p \not\leq Z_{\mathfrak{F}}$, получили противоречие. Итак, если $p \in \pi(f(q))$, то $q \in \pi(f(p))$.

Теперь установим, что если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$. Возьмем число $r \neq p$ и $r \in \pi(f(p)) \setminus \pi(f(q))$. Пусть $R = [U]C_p$, где U – точный неприводимый $F_r C_p$ -модуль (он существует по [7, следствие 10.7.B]). По доказанному выше из $r \in \pi(f(p))$ следует, что $p \in \pi(f(r))$. Ясно, $r \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $R \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Рассмотрим группу $G = [L]R$, где L – точный неприводимый $F_q R$ -модуль. Рассуждая, как выше, получим, что $G \notin \mathfrak{F}$ и $G_{\mathfrak{F}} \leq LU$, причем $G = MN$, где $M = LC_p$ и $N = UC_p$. Так как $M \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, подгруппа $C_p \leq M \cap N$. Ввиду $C_p \not\leq G_{\mathfrak{F}}$ получили противоречие. Итак, $\pi(f(p)) \subseteq \pi(f(q))$. Значит, если $q \in \pi(f(p))$, то $\pi(f(p)) = \pi(f(q))$.

Итак, установлено, что в том и только в том случае $\pi(f(p)) = \pi_i$ для некоторого разбиения $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$, когда $p \in \pi_i$. Теперь из $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(h(p))} \cap x(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и леммы 1.1 следует утверждение $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – разрешимая насыщенная S -замкнутая формация и $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Если существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F}^S = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$.

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{F}^S \neq \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^S \neq \emptyset$, так как $\mathfrak{F}^S \subseteq \mathfrak{F}$. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^S$ группу G наименьшего порядка. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G . Из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}^S$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^S$ – формации, N является единственной минимальной нормальной подгруппой G , причем N совпадает с $G^{\mathfrak{F}^S}$. Так как $\mathfrak{F}^S$ – насыщенная формация по лемме 1.1, заключаем, что $\Phi(G) = 1$. Тогда G – примитивная группа и в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, причем $\text{Core}_G(M) = 1$. Из разрешимости G следует, что N абелева, $|N| = p^m$ для некоторого простого числа p , $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N) = F(G)$.

Так как $G/N \cong M \in \mathfrak{F}^S$, подгруппа $M = M_1 \times \dots \times M_t$, где $M_i \in \mathfrak{X}_{\pi_{ij}}$, $j = 1, \dots, t$.

Допустим, что $t \geq 2$. По лемме 1.1 $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F}^S)$. Тогда из $G \in \mathfrak{F}$ заключаем, что $p \in \pi(\mathfrak{F}^S)$. Значит, для некоторого $i_0 \in I$ число $p \notin \pi_{i_0}$ и $M_{i_0} \neq 1$.

Так как $NM_{i_0} \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая формация, заключаем, что $NM_{i_0} \in \mathfrak{F}$. Из $|NM_{i_0}| < |G|$ следует, что $NM_{i_0} \in \mathfrak{F}^S$. Ввиду строения $\mathfrak{F}^S$ имеем $NM_{i_0} = N \times M_{i_0}$. Поэтому $M_{i_0} \leq C_G(N) = N$. Полученное противоречие говорит, что случай $t \geq 2$ невозможен.

Пусть теперь $t = 1$. Тогда найдется $i \neq j$ из I такое, что $p \in \pi_i$ и $\pi(M) \subseteq \pi_j$. Если предположить, что в M есть собственная нормальная подгруппа $R \neq 1$, то $NR \leq G$, и рассуждая, как выше, получаем противоречие $1 \neq R \leq C_G(N) = N$. Таким образом, в M все собственные нормальные подгруппы равны 1. Так как M разрешима, это возможно только, когда $|M|$ – простое число, причем оно отлично от p . Отсюда и из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $S(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Но $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F}^S)$, поэтому $G \in \mathfrak{F}^S$. Получили противоречие с выбором G . Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая разрешимая S -замкнутая радикальная формация и $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{X})$. Тогда класс $\mathfrak{X}_{\pi} = \mathfrak{S}_{\pi} \cap \mathfrak{X}$ является радикальной M -формацией в $\mathfrak{X}$.

Доказательство. По условию $\mathfrak{X}$ является разрешимой S -замкнутой радикальной формацией. Такими свойствами обладает и класс $\mathfrak{S}_{\pi}$. Следовательно, класс $\mathfrak{X}_{\pi} = \mathfrak{S}_{\pi} \cap \mathfrak{X}$ также является разрешимой S -замкнутой радикальной формацией в $\mathfrak{X}$. Покажем, что $\mathfrak{X}_{\pi}$ является M -формацией в $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ -группа $G = AB$, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$. Так как G – разрешимая $\mathfrak{X}$ -группа, нетрудно заметить, что $G_{\mathfrak{X}_{\pi}} = O_{\pi}(G)$, $A_{\mathfrak{X}_{\pi}} = O_{\pi}(A)$, $B_{\mathfrak{X}_{\pi}} = O_{\pi}(B)$. Применяя теорему 1 из [3], получаем

$$A_{\mathfrak{X}_{\pi}} \cap B_{\mathfrak{X}_{\pi}} \subseteq G_{\mathfrak{X}_{\pi}}.$$

Следовательно, $\mathfrak{X}_{\pi}$ является M -формацией в $\mathfrak{X}$. $\square$

Лемма 2.4. Пусть $\mathfrak{X}$ – S_n -замкнутая радикальная формация, $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – семейство M -формаций Фиттинга в $\mathfrak{X}$ таких, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ для всех $i \neq j$ из I . Тогда формация $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ также является M -формацией Фиттинга в $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. По лемме 2.1 $\mathfrak{F}$ является формацией Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Мона-

хова. Пусть группа $G = AB$ – произведение подгрупп A и B . Заметим, что

$$\pi(G) \cap (\cup_{i \in I} \pi_i) = \cup_{i \in I} (\pi(G) \cap \pi_i).$$

Так как $\pi(G)$ – конечное множество, то

$$\pi(G) = \cup_{k=1}^t (\pi(G) \cap \pi_{i_k}),$$

где $\{\pi(G) \cap \pi_{i_k} \mid k=1, \dots, t\}$ является разбиением $\pi(G)$. Сейчас $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}_{i_1}} \times \dots \times G_{\mathfrak{F}_{i_t}}$, $A_{\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}_{i_1}} \times \dots \times A_{\mathfrak{F}_{i_t}}$, $B_{\mathfrak{F}} = B_{\mathfrak{F}_{i_1}} \times \dots \times B_{\mathfrak{F}_{i_t}}$, так как $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и $\pi(\mathfrak{F}_l) \cap \pi(\mathfrak{F}_k) = \emptyset$ для всех $l \neq k$ из I . Ясно, что $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} = (A_{\mathfrak{F}_{i_1}} \cap B_{\mathfrak{F}_{i_1}}) \times \dots \times (A_{\mathfrak{F}_{i_t}} \cap B_{\mathfrak{F}_{i_t}})$. Учитывая $A_{\mathfrak{F}_{i_j}} \cap B_{\mathfrak{F}_{i_j}} \subseteq G_{\mathfrak{F}_{i_j}}$, $j=1, \dots, k$, получаем, что $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. $\square$

Доказательство теоремы А. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $G = AB$ – $\mathfrak{X}$ -группа, где A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы G . Из $A = A_{\mathfrak{F}}$ и $B = B_{\mathfrak{F}}$ и утверждения (1) следует, что $A \cap B \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Вначале покажем, что $\mathfrak{F}^S$ является $\bar{S}$ -формацией в $\mathfrak{X}$. Пусть $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F}^S) \cap \mathfrak{X}$. По лемме 1.2 получаем, что $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{X}$.

Допустим, что $G \in \mathfrak{N}$. Если $|\pi(G)| \geq 2$, то в G все силовские подгруппы и их произведение принадлежат $\mathfrak{F}$, так как $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга $\mathfrak{X}$. Но это противоречит тому, что $G \notin \mathfrak{F}$. Значит, $|\pi(G)| = 1$ и G – p -группа для некоторого простого числа p . Возьмем в G подгруппу P , для которой $|P| = p$. Предположим, что $P \neq G$. Тогда $P \in \mathfrak{F}$ по выбору G . Заметим, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$ ввиду насыщенности формации $\mathfrak{X}$. По условию $\mathfrak{F}$ – радикальный класс в $\mathfrak{X}$. Поэтому $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{F}$ – S -замкнутая формация, радикальная в $\mathfrak{N}_p$. Дословно повторяя рассуждения из доказательстве леммы 1.8 из [7, с. 565], получаем $\mathfrak{N}_p \subseteq S_n N_0(P) \subseteq \mathfrak{F}_p$. Откуда $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$. Значит, $|G| = p$, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Предположим, что $G \notin \mathfrak{N}$. Тогда $G = F(G)H$ для некоторой максимальной подгруппы H из G . Ввиду того, что $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – радикальная формация в $\mathfrak{X}$, $G_{\mathfrak{F}}$ является единственной нормальной максимальной подгруппой группы G . Тогда $|G : G_{\mathfrak{F}}| = p$ для некоторого простого числа p . Отсюда и из $F(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ следует, что $p \in \pi(H)$ и любая силовская p -подгруппа H_p из H не содержится в $G_{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим подгруппу $S = F(G)H_p$.

Пусть $S \neq G$. Так как $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$, $S_{\mathfrak{F}} = S$ и $H_{\mathfrak{F}} = H$. Заметим, что $G = HS$. Из утверждения (3) теоремы следует, что $S \cap H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Получили противоречие с тем, что $H_p \subseteq S \cap H$ и $H_p \not\subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Допустим, что $G = F(G)H_p$. Установим, что $F(G)$ – q -группа для некоторого простого числа q . Так как $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, $\Phi(G) \neq F(G)$. Поэтому для некоторого простого числа q в $F(G)$ имеется силовская q -подгруппа Q , которая не содержится в $\Phi(G)$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа W такая, что $G = QW$. Из $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$ следует, что $W \in \mathfrak{F}$ и $G/Q = W/W \cap Q \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\bar{S}} \subseteq Q$ и $G^{\bar{S}}$ – q -группа. Случай $q = p$ невозможен, так как $G \notin \mathfrak{N}$. Значит, $q \neq p$ и в G существует группа Шмидта R с нормальной силовской q -подгруппой и ненормальной циклической силовской p -подгруппой.

Предположим, что $R \neq G$. Тогда $R \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$. По [7, теорема 2.5.XI] всякое расширение q -группы с помощью группы простого порядка p принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Ввиду [7, предложение 2.4.XI] заключаем, что $\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда следует противоречие $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, $R = G$ – группа Шмидта, а $\mathfrak{F}^S$ – $\bar{S}$ -формация.

Докажем насыщенность $\mathfrak{F}^S$. Допустим, что существуют группы G , для которых $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}^S$, а $G \notin \mathfrak{F}^S$. Пусть G – группа минимального порядка среди них. Так как $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – насыщенная формация, получаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Возьмем в G минимальную нормальную подгруппу N . Из $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G)N \in \mathfrak{F}^S$ заключаем, что $G/N/\Phi(G/N) \in \mathfrak{F}^S$. Из $|G/N| < |G|$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}^S$. Поскольку $\mathfrak{F}^S$ – формация, G не имеет отличных от N минимальных нормальных подгрупп. Тогда

$$N \subseteq \Phi(G) \subseteq F(G) \in \mathfrak{N}_p$$

и $O_{p'}(G) = 1$ для некоторого простого числа p .

Так как G не принадлежит $\mathfrak{F}^S$, в G найдется подгруппа H , которая является S -критической для $\mathfrak{F}^S$. Из $G \in \mathfrak{X}$ и S -замкнутости формации $\mathfrak{F}^S$ следует, что $H \in \mathfrak{X}$. Тогда по доказанному выше H является группой Шмидта. Из $G/N \in \mathfrak{F}^S$, следует $HN/N \in \mathfrak{F}^S$. Если $H \cap N = 1$, то $H \in \mathfrak{F}^S$. Противоречие с выбором H . Поэтому будем считать, что $H \cap N \neq 1$. Отсюда и строения групп

Шмидта следует, H является (p, q) -группой Шмидта, т. е. H имеет нормальную силовскую p -подгруппу и ненормальную циклическую q -подгруппу, $p \neq q$.

Предположим, что HN/N ненильпотентна. Тогда HN/N является (p, q) -группой Шмидта, принадлежащей $\mathfrak{F}^S$. Тогда единственная наименьшая (p, q) -группа Шмидта $E(q/p)$ является гомоморфным образом HN/N , а значит, $E(q/p) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$. Заметим, что класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ является формацией Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Отсюда и из $\mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{X}$ получаем, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ – формация Фиттинга в $\mathfrak{N}^2$. Так как $\mathfrak{N}^2$ – формация Фиттинга в классе всех групп, то нетрудно видеть, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ – формация Фиттинга в классе всех групп. Теперь, применяя последовательно теорему 2.5 и предложение 2.4 из [7, с. 785–786], получаем, что $\mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_q \subseteq \mathfrak{F}^S$. Откуда следует, что $H \in \mathfrak{F}^S \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Будем считать, что HN/N нильпотентна для любой (p, q) -подгруппы Шмидта H . Рассмотрим подгруппу $R = QF(G)$, где Q – силовская q -подгруппа группы G . Можно считать, что $H \subseteq R$. Так как

$$\begin{aligned} R/N &= (QN/N)(F(G)/N) = \\ &= (QN/N)F(G/N) \in \mathfrak{N}, \end{aligned}$$

то $QN/N \subseteq C_{G/N}(F(G)/N) \subseteq F(G)/N$.

Получили противоречие. Поэтому, $R = QF(G)$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Получили окончательное противоречие. Таким образом, доказано, что формация $\mathfrak{F}^S$ является насыщенной. Теперь утверждение (3) теоремы следует из лемм 2.1 и 2.2.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $\mathfrak{X}$ – разрешимая насыщенная S -замкнутая формация такая, что $\mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{X}$, $k \geq 3$ и $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$ для некоторого разбиения $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$. Применяя последовательно леммы 2.3 и 2.4, получаем, что $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}$ является $\mathcal{M}$ -формацией Фиттинга в $\mathfrak{X}$. $\square$

Доказательство следствия. Нетрудно видеть, что из (1) $\Rightarrow$ (2). Покажем, что из (2) $\Rightarrow$ (3). Допустим, что формация Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет (2). Тогда формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^k$ удовлетворяет (2) в $\mathfrak{N}^k$ для любого натурального k . Ввиду $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S} = \cup \mathfrak{N}^k$, имеем $\mathfrak{F} = \cup (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^k)$, где $k \in \mathbb{N}$.

Будем рассматривать $k \geq 3$. Тогда по теореме А существует разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^k = \times_{i \in I} \mathfrak{N}_{\sigma_i}^k$.

Рассмотрим формацию $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^{k+1}$. Ввиду теоремы А существует разбиение $\tau = \{\tau_j \mid j \in J\}$ множества $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ такое, что

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^{k+1} = \times_{j \in J} \mathfrak{N}_{\tau_j}^{k+1}.$$

Покажем, что разбиения σ и τ множества π совпадают. Пусть σ_i – элемент разбиения σ для некоторого $i \in I$. Предположим, что найдутся номера j_1 и j_2 такие, что $\sigma_i \cap \tau_{j_1} \neq \emptyset$ и $\sigma_i \cap \tau_{j_2} \neq \emptyset$. Возьмем $p \in \sigma_i \cap \tau_{j_1}$ и $q \in \sigma_i \cap \tau_{j_2}$. Тогда существует (p, q) -группа Шмидта R такая, что $R \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}^k \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^k$. Заметим, что

$$R \notin \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^{k+1} = \times_{j \in J} \mathfrak{N}_{\tau_j}^{k+1}.$$

Отсюда следует, что $\sigma_i \subseteq \tau_j$ для некоторого $j \in J$. Рассуждая аналогично для τ_j по отношению к элементам разбиения σ_i , получим, что $\sigma_i = \tau_j$. Таким образом, разбиения σ и τ совпадают. Заметим, что

$$\mathfrak{F} = \cup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^n) = \cup_{n \in \mathbb{N}} (\times_{i \in I} \mathfrak{N}_{\sigma_i}^n) = \times_{i \in I} (\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{N}_{\sigma_i}^n).$$

Теперь из $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{N}_{\sigma_i}^n = \mathfrak{S}_{\sigma_i}$ следует, что $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\sigma_i}$. $\square$

3 Заключительные замечания. Открытые вопросы

(1) Решение проблемы 1 в случае произвольной насыщенной S -замкнутой формации $\mathfrak{X}$, даже в случае $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ является трудной задачей. Поэтому для решения общей проблемы необходимо накопление результатов для конкретных формаций $\mathfrak{X}$. Отметим без доказательства следующий, полученный нами результат.

Теорема В. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^2$ и $\mathfrak{F}$ – подформация Фиттинга в $\mathfrak{X}$. Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны.

(1) $\mathfrak{F}$ является формацией с условием Монахова в $\mathfrak{X}$.

(2) Если $G = AB$ – $\mathfrak{X}$ -группа, A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы G , то $A \cap B \subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

(3) $\mathfrak{F}$ является насыщенной S -замкнутой формацией и задается полной локальной функцией f со значениями $f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \emptyset$, если $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.

Отметим ряд открытых проблем.

Проблема 2. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга (разрешимых) групп. Найти (конструктивно описать) все $\mathcal{M}$ -классы Фиттинга в $\mathfrak{X}$.

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ проблема 2 записана в Коуровскую тетрадь [9] под номером 14.29 в следующей редакции.

Проблема 3. Существует ли разрешимый класс Фиттинга конечных групп $\mathfrak{F}$, не являющийся

формацией и такой, что $A_{\mathfrak{F}} \cap B_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ для любой конечной разрешимой группы вида $G = AB$?

Напомним, что классом Шунка называется непустой примитивно замкнутый гомоморф.

Проблема 4. Найти (конструктивно описать) все радикальные (разрешимые) классы Шунка с условием Монахова.

(2) Хорошо известно, если группа $G = AB$ является диабелевой, то $A \cap B \subseteq Z(G)$, где $Z(G)$ – центр группы. В случае динильпотентной группы $G = AB$ Пеннингтон в [10] доказала аналогичный результат для $F(G)$. В [11] Хайнекен установил, что в такой группе для любой непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ имеет место $A \cap B \subseteq H$, где H – некоторый $\mathfrak{F}$ -проектор G . Отмеченная выше линия исследований была продолжена в работе [12].

Проблема 5. Найти все насыщенные S -замкнутые (разрешимые) формации $\mathfrak{F}$ такие, что для каждой ди- $\mathfrak{F}$ -группы $G = AB$ выполняется: $A \cap B$ содержится в некотором $\mathfrak{F}$ -проекторе G .

(3) Для формулировки следующей проблемы, напомним [13], что подгруппа R группы $G = AB$ называется факторизуемой, если $R = (A \cap R)(B \cap R)$ и $A \cap B \subseteq R$.

Исследованию факторизуемых подгрупп (радикалов, проекторов, инъекторов и др.) динильпотентных групп посвящены работы [11], [14], [15]. В [16]–[19] изучались факторизуемые подгруппы различных произведений из $\mathfrak{F}$ -групп.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Класс $\mathfrak{F}$ назовем радикальным классом с условием Пеннингтон в $\mathfrak{X}$ (кратко, радикальным $\mathcal{P}$ -классом в $\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}$ – радикальный класс в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ -радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является факторизуемой подгруппой для любой $\mathfrak{X}$ -группы $G = AB$.

Проблема 6. Пусть $\mathfrak{X}$ – насыщенная S -замкнутая формация и $\mathfrak{F}$ – радикальный в $\mathfrak{X}$ класс (формация) групп. Найти все $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$, для которых выполняется следующее утверждение: $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{M}$ -классом ($\mathcal{M}$ -формацией) в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{P}$ -классом ($\mathcal{P}$ -формацией) в $\mathfrak{X}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Известия вузов. Серия Математика. – 1997. – Т. 426, № 11. – С. 10–14.
2. Монахов, В.С. О трижды факторизуемых группах / В.С. Монахов // Известия академии наук БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1981. – № 6. – С. 18–22.
3. Johnson, P.M. A property of factorisable groups / P.M. Johnson // Arch. Math. – 1993. – Vol. 60. – P. 414–419.

4. Amberg, B. On finite products of soluble groups / B. Amberg, L.S. Kasarin // Israel J. Math. – 1999. – Vol. 106. – P. 93–108.

5. Vasil'ev, A.F. On radicals of products of finite soluble groups / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 2000. – № 3 (16). – С. 43–47.

6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

8. Халимончик, И.Н. Формации Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$ / И.Н. Халимончик // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – Т. 55, № 4. – С. 219–223.

9. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – 14-е изд. – Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 1999. – 135 с.

10. Pennington, E.A. On products of finite nilpotent groups / E.A. Pennington // Math. Z. – 1973. – Bd. 134. – S. 81–83.

11. Heineken, H. Products of finite nilpotent groups / H. Heineken // Mat. Ann. – 1990. – Vol. 287. – P. 643–652.

12. Васильев, А.Ф. О пересечении факторов конечных разрешимых произведений групп / А.Ф. Васильев // Труды Института математики. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 20–27.

13. Amberg, B. Products of Groups / B. Amberg, S. Franciosi and F. De Giovanni. – Oxford, 1992. – 220 p.

14. Heineken, H. The products of two finite nilpotent groups its Fitting series / H. Heineken // Arch. Math. – 1992. – Vol. 59. – P. 209–214.

15. Amberg, B. On finite products of nilpotent groups / B. Amberg, B. Höfling // Arch. Math. – 1994. – Vol. 63. – P. 1–8.

16. Васильев, А.Ф. О факторизуемых инъекторах конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2005. – № 4 (38). – С. 108–111.

17. Васильев, А.Ф. О факторизаторах подгрупп конечных разрешимых ди- $\mathfrak{F}$ -групп / А.Ф. Васильев // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2006. – № 4. – С. 55–60.

18. Васильева, Т.И. О свойствах подгрупп конечных π -разрешимых ди- π -разложимых групп / Т.И. Васильева, Е.А. Рябченко // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 15–19.

19. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Walter de Gruyter, Berlin. – 2010. – 334 p.

Поступила в редакцию 24.07.2021.

Информация об авторах

Васильев Александр Фёдорович – д.ф.-м.н., доцент

О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ l -АРНОЙ ГРУППЫ $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. III

А.М. Гальмак

*Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв*ON SETS OF GENERATORS OF l -ARY GROUP $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. III

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение связи между порождающими множествами группы A и порождающими множествами полиадической группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$, которая определяется на k -ой декартовой степени произвольной группы A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества S_k всех подстановок множества $\{1, 2, \dots, k\}$.

Ключевые слова: группа, l -арная группа, порождающее множество.

Для цитирования: Гальмак, А.М. О порождающих множествах l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. III / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 76–80. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_76

Abstract. The article goes on with the studies on the earlier described relationship between sets of generators in group A and sets of generators in polyadic group $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ with l -ary operation $[]_{l, \sigma, k}$ that is defined on Cartesian power A^k of group A for arbitrary integer $l \geq 2$ and arbitrary substitution σ from the set S_k of all substitutions of the set $\{1, 2, \dots, k\}$.

Keywords: group, l -ary group, set of generators.

For citation: Gal'mak, A.M. On sets of generators of l -ary group $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. III / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 76–80. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_76 (in Russian)

Введение

Данная статья, посвящённая изучению порождающих множеств l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, является продолжением статей [1], [2] и составляет с ними единое целое. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [2]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], [2], все они остаются в силе и в новой статье.

В [1] получен следующий результат (теорема 4.1) для l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$: пусть группа A порождается множеством M , σ – цикл длины k из S_k , k делит $l-1$. Тогда для любого $j = 1, 2, \dots, k$ l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M) \cup \{e\}$, где $e = (\underbrace{1, \dots, 1}_k)$,

1 – единица группы A . Аналогичный результат справедлив для l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$.

В [2] найдены условия, позволяющие заменить в указанных выше результатах порождающее множество $U_j(M) \cup \{e\}$ порождающим множеством $U_j(M)$, то есть исключить элемент e из порождающих множеств как l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, так и l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ (теоремы 6.1 и 6.2): пусть группа (полугруппа) A порождается множеством M , σ – цикл длины k из S_k , $r \geq 2$, существуют элементы

$$u_1, u_2, \dots, u_{r+1}, v_1, v_2, \dots, v_r \in M$$

такие, что

$$u_1 u_2 \dots u_{r+1} = v_1 v_2 \dots v_r = 1.$$

Тогда для любого $j = 1, 2, \dots, k$ l -арная группа (l -арная полугруппа) $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = rk + 1$, порождается множеством $U_j(M)$.

Всю необходимую информацию из теории полиадических групп можно найти в [3], [4].

10 Обобщение теоремы 8.3

В [2, теорема 8.3] для нахождения полиадических групп вида $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, которые порождаются множеством $U_j(M)$, не содержащим элемент e , использовались решения линейного диофантового уравнения с двумя неизвестными. Покажем, что для этих же целей могут быть использованы решения линейного диофантового уравнения

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_v x_v = 1 \quad (10.1)$$

с числом неизвестных больше двух, которое, как известно (см., например, [5]), для взаимно простых целых коэффициентов $n_1, n_2, \dots, n_v$ имеет бесконечно много решений.

Ясно, что если $(x_1, x_2, \dots, x_v)$ – решение диофантового уравнения (10.1), то в его левой части имеются слагаемые разных знаков.

Теорема 10.1. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_v$ – взаимно простые целые числа, $(x_1, x_2, \dots, x_v)$ – какое-либо

решение диофантового уравнения (10.1), $d_1, d_2, \dots, d_v$ – делители соответственно слагаемых $n_1x_1, n_2x_2, \dots, n_vx_v$, причём

$$|d_1| \geq 2, |d_2| \geq 2, \dots, |d_v| \geq 2, \quad (10.2)$$

σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы $u_1, u_2, \dots, u_v$ такие, что

$$u_1^{|d_1|} = u_2^{|d_2|} = \dots = u_v^{|d_v|} = 1, \quad (10.3)$$

то найдётся такое l , что l -арная группа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Доказательство. Пусть $n_{s_1}x_{s_1}, \dots, n_{s_\mu}x_{s_\mu}$ – все положительные слагаемые в левой части равенства (10.1), $n_{t_1}x_{t_1}, \dots, n_{t_\eta}x_{t_\eta}$ – все отрицательные слагаемые в левой части равенства (10.1), где $\mu + \eta = v$.

Так как

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_vx_v = (n_{s_1}x_{s_1} + \dots + n_{s_\mu}x_{s_\mu}) + (n_{t_1}x_{t_1} + \dots + n_{t_\eta}x_{t_\eta}),$$

то из (10.1) следует

$$n_{s_1}x_{s_1} + \dots + n_{s_\mu}x_{s_\mu} = -n_{t_1}x_{t_1} - \dots - n_{t_\eta}x_{t_\eta} + 1 = |n_{t_1}x_{t_1}| + \dots + |n_{t_\eta}x_{t_\eta}| + 1,$$

то есть

$$|n_{s_1}x_{s_1}| + \dots + |n_{s_\mu}x_{s_\mu}| = |n_{t_1}x_{t_1}| + \dots + |n_{t_\eta}x_{t_\eta}| + 1.$$

Из последнего равенства, введя обозначение

$$r = |n_{t_1}x_{t_1}| + \dots + |n_{t_\eta}x_{t_\eta}|,$$

получим

$$r + 1 = |n_{s_1}x_{s_1}| + \dots + |n_{s_\mu}x_{s_\mu}|.$$

Положим

$$u_{s_1} = \dots = u_{s_1|n_{s_1}x_{s_1}|} = u_{s_1},$$

$$u_{s_2} = \dots = u_{s_2|n_{s_2}x_{s_2}|} = u_{s_2},$$

...

$$u_{s_\mu} = \dots = u_{s_\mu|n_{s_\mu}x_{s_\mu}|} = u_{s_\mu},$$

$$u_{t_1} = \dots = u_{t_1|n_{t_1}x_{t_1}|} = u_{t_1},$$

$$u_{t_2} = \dots = u_{t_2|n_{t_2}x_{t_2}|} = u_{t_2},$$

...

$$u_{t_\eta} = \dots = u_{t_\eta|n_{t_\eta}x_{t_\eta}|} = u_{t_\eta}.$$

Тогда в силу (10.3) и равенств

$$n_{s_1}x_{s_1} = d_{s_1}c_{s_1}, \quad n_{s_2}x_{s_2} = d_{s_2}c_{s_2}, \quad \dots, \quad n_{s_\mu}x_{s_\mu} = d_{s_\mu}c_{s_\mu},$$

верных для некоторых целых $c_{s_1}, c_{s_2}, \dots, c_{s_\mu}$, будем иметь

$$\begin{aligned} & (u_{s_1} \dots u_{s_1|n_{s_1}x_{s_1}|})(u_{s_2} \dots u_{s_2|n_{s_2}x_{s_2}|}) \\ & \dots \\ & (u_{s_\mu} \dots u_{s_\mu|n_{s_\mu}x_{s_\mu}|}) = u_{s_1}^{|n_{s_1}x_{s_1}|} u_{s_2}^{|n_{s_2}x_{s_2}|} \dots u_{s_\mu}^{|n_{s_\mu}x_{s_\mu}|} = \\ & = u_{s_1}^{|d_{s_1}c_{s_1}|} u_{s_2}^{|d_{s_2}c_{s_2}|} \dots u_{s_\mu}^{|d_{s_\mu}c_{s_\mu}|} = \end{aligned}$$

$$= (u_{s_1}^{|d_{s_1}|})^{c_{s_1}} (u_{s_2}^{|d_{s_2}|})^{c_{s_2}} \dots (u_{s_\mu}^{|d_{s_\mu}|})^{c_{s_\mu}} = 1,$$

то есть в порождающем множестве M группы A имеется $r + 1$ элементов

$$u_{s_1}, \dots, u_{s_1|n_{s_1}x_{s_1}|}, \dots, u_{s_\mu}, \dots, u_{s_\mu|n_{s_\mu}x_{s_\mu}|},$$

произведение которых равно её единице.

Аналогично, так как ввиду (10.3) и равенств

$$n_{t_1}x_{t_1} = d_{t_1}e_{t_1}, \quad n_{t_2}x_{t_2} = d_{t_2}e_{t_2}, \quad \dots, \quad n_{t_\eta}x_{t_\eta} = d_{t_\eta}e_{t_\eta},$$

верных для некоторых целых $e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_\eta}$, будем иметь

$$\begin{aligned} & (u_{t_1} \dots u_{t_1|n_{t_1}x_{t_1}|})(u_{t_2} \dots u_{t_2|n_{t_2}x_{t_2}|}) \\ & \dots \\ & (u_{t_\eta} \dots u_{t_\eta|n_{t_\eta}x_{t_\eta}|}) = u_{t_1}^{|n_{t_1}x_{t_1}|} u_{t_2}^{|n_{t_2}x_{t_2}|} \dots u_{t_\eta}^{|n_{t_\eta}x_{t_\eta}|} = \\ & = u_{t_1}^{|d_{t_1}e_{t_1}|} u_{t_2}^{|d_{t_2}e_{t_2}|} \dots u_{t_\eta}^{|d_{t_\eta}e_{t_\eta}|} = \\ & = (u_{t_1}^{|d_{t_1}|})^{e_{t_1}} (u_{t_2}^{|d_{t_2}|})^{e_{t_2}} \dots (u_{t_\eta}^{|d_{t_\eta}|})^{e_{t_\eta}} = 1, \end{aligned}$$

то в порождающем множестве M группы A имеется r элементов

$$u_{t_1}, \dots, u_{t_1|n_{t_1}x_{t_1}|}, \dots, u_{t_\eta}, \dots, u_{t_\eta|n_{t_\eta}x_{t_\eta}|},$$

произведение которых равно её единице. По теореме 6.1 l -арная группа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = rk + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$. $\square$

Следующий результат получается из теоремы 10.1, если в ней положить

$$d_1 = n_1x_1, d_2 = n_2x_2, \dots, d_v = n_vx_v.$$

Теорема 10.2. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_v$ – взаимно простые целые числа, $(x_1, x_2, \dots, x_v)$ – какое-либо решение диофантового уравнения (10.1), причём

$$|n_1x_1| \geq 2, |n_2x_2| \geq 2, \dots, |n_vx_v| \geq 2,$$

σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы $u_1, u_2, \dots, u_v$ такие, что

$$u_1^{|n_1x_1|} = u_2^{|n_2x_2|} = \dots = u_v^{|n_vx_v|} = 1,$$

то найдётся такое l , что l -арная группа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Следующий результат получается из теоремы 10.1, если в ней положить

$$d_1 = n_1, d_2 = n_2, \dots, d_v = n_v.$$

Теорема 10.3. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_v$ – взаимно простые целые коэффициенты диофантового уравнения (10.1), причём

$$|n_1| \geq 2, |n_2| \geq 2, \dots, |n_v| \geq 2,$$

σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы $u_1, u_2, \dots, u_v$ такие, что

$$u_1^{|n_1|} = u_2^{|n_2|} = \dots = u_v^{|n_v|} = 1,$$

то найдётся такое l , что l -арная группа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Для положительных $n_1, n_2, \dots, n_v$ теорема 10.3 принимает следующий вид.

Теорема 10.4. Пусть $n_1 \geq 2, n_2 \geq 2, \dots, n_v \geq 2$ – взаимно простые коэффициенты диофантового уравнения (10.1), σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы $u_1, u_2, \dots, u_v$ такие, что

$$u_1^{n_1} = u_2^{n_2} = \dots = u_v^{n_v} = 1,$$

то найдётся такое l , что l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Замечание 10.1. В теоремах 10.2–10.4 арность l такая же, как и в теореме 10.1, то есть $l = rk + 1$, где число r определяется тем же равенством, что и в доказательстве теоремы 10.1.

Замечание 10.2. Согласно теоремам 10.1–10.4 каждому решению диофантового уравнения (10.1) ставится в соответствие своя арность. Перебрав все решения уравнения (10.1), мы получим все возможные арности l , соответствующие данному уравнению, для которых l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Доказательство следующей теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 10.1. Только вместо теоремы 6.1 из [2] используется теорема 6.2 из [2].

Теорема 10.5. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_v$ – взаимно простые целые числа, $(x_1, x_2, \dots, x_v)$ – какое-либо решение диофантового уравнения (10.1), $d_1, d_2, \dots, d_v$ – делители соответственно слагаемых $n_1x_1, n_2x_2, \dots, n_vx_v$, причём

$$|d_1| \geq 2, |d_2| \geq 2, \dots, |d_v| \geq 2,$$

σ – цикл длины k из S_k . Если полугруппа A порождается множеством M , не содержащим её единицу, в котором имеются элементы $u_1, u_2, \dots, u_v$ такие, что

$$u_1^{|d_1|} = u_2^{|d_2|} = \dots = u_v^{|d_v|} = 1,$$

то найдётся такое l , что l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

11 Следствия и примеры

Проиллюстрируем теоремы из раздела 10 примерами.

Пример 11.1. Рассмотрим симметрическую группу S_5 из примера 9.1 из [2], которая порождается [6] тремя подстановками,

$$(1\ 2\ 3\ 4), (5\ 4\ 3\ 2\ 1), (1\ 2)(3\ 4\ 5),$$

имеющими порядки 4, 5 и 6 соответственно.

Так как одним из решений диофантового уравнения

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1$$

является тройка $(-2, 3, -1)$, то по теореме 10.1 имеем

$$r = |n_1x_1| + |n_3x_3| = |4(-2)| + |6(-1)| = 14,$$

соответственно $l = rk + 1 = 14k + 1$. Таким образом, считая в теореме 10.3 или теореме 10.4

$n_1 = 4, n_2 = 5, n_3 = 6$, видим, что $(14k + 1)$ -арная группа $\langle S_5^k, []_{14k+1, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$, где

$$M = \{(1\ 2\ 3\ 4), (5\ 4\ 3\ 2\ 1), (1\ 2)(3\ 4\ 5)\}.$$

В частности $(k = 2)$, 29-арная группа $\langle S_5^2, []_{29, (12), 2} \rangle$ порождается любым из двух следующих трёхэлементных множеств:

$$M_1 = \{((1\ 2\ 3\ 4), \varepsilon), ((5\ 4\ 3\ 2\ 1), \varepsilon), ((1\ 2)(3\ 4\ 5), \varepsilon)\},$$

$$M_2 = \{(\varepsilon, (1\ 2\ 3\ 4)), (\varepsilon, (5\ 4\ 3\ 2\ 1)), (\varepsilon, (1\ 2)(3\ 4\ 5))\},$$

где ε – тождественная подстановка.

Замечание 11.1. В примере 9.1 из [2] указаны арности (9.6) и (9.7) полиадических групп $\langle S_5^2, []_{l, (12), 2} \rangle$, которые порождаются этими же трёхэлементными множествами. Заметим, что арности 29 среди этих арностей нет. Это означает, что теоремы 10.3 и 10.4 позволяют находить новые арности, отличные от арностей, существование которых гарантирует теорема 8.2 даже в случае, когда фигурирующие в этих теоремах полиадические группы порождаются одним и тем же множеством.

Можно заметить, что арность 29 содержится среди арностей (9.8) полиадических групп $\langle S_5^2, []_{l, (12), 2} \rangle$ из того же примера 9.1, которые порождаются двухэлементными множествами.

Пример 11.2. В следствии 9.6 из [2] для группы Матве M_{24} , порождаемой трёхэлементным множеством M , состоящим из подстановок γ, β и α порядков 2, 5 и 23 соответственно [7], указаны арности (9.9) – (9.11) полиадических групп $\langle M_{24}^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, которые порождаются трёхэлементным множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

При $k = 2$ формулы (9.9)–(9.11) принимают вид (9.12)–(9.14).

Так как одним из решений диофантового уравнения

$$2x_1 + 5x_2 + 23x_3 = 1$$

является тройка $(-6, -2, 1)$, то по теореме 10.3 или по теореме 10.4 имеем

$$r = |n_1x_1| + |n_2x_2| = |2(-6)| + |5(-2)| = 22,$$

соответственно $l = rk + 1 = 22k + 1$. Таким образом, согласно теореме 10.3 или теореме 10.4, $(22k + 1)$ -арная группа $\langle M_{24}^k, []_{22k+1, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

В частности $(k = 2)$, 45-арная группа $\langle M_{24}^2, []_{45, (12), 2} \rangle$ порождается любым из двух следующих трёхэлементных множеств $U_1(M)$ и $U_2(M)$: $\{(\alpha, \varepsilon), (\beta, \varepsilon), (\gamma, \varepsilon)\}, \{(\varepsilon, \alpha), (\varepsilon, \beta), (\varepsilon, \gamma)\}$.

Заметим, что арность 45 содержится среди арностей (9.12).

Так как $(9, -8, 1)$ – ещё одно решение диофантового уравнения

$$2x_1 + 5x_2 + 23x_3 = 1,$$

то согласно теореме 10.3 или теореме 10.4, имеем

$$r = |n_2x_2| = |5(-8)| = 40,$$

соответственно $l = rk + 1 = 40k + 1$. Таким образом, согласно теореме 10.3 или теореме 10.4, $(40k + 1)$ -арная группа $\langle M_{24}^k, []_{40k+1, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

В частности ($k = 2$), 81-арная группа $\langle M_{24}^2, []_{81, (12), 2} \rangle$ порождается любым из двух указанных выше трёхэлементных множеств $U_1(M)$ и $U_2(M)$.

Заметим, что арности 81 среди арностей (9.12)–(9.14) нет.

При $v = 2$ уравнения (10.1) принимает вид

$$tx + ny = 1, \quad (11.1)$$

где t и n взаимно простые целые числа. Если (x_0, y_0) – одно из решений этого уравнения, то множество всех его решений имеет вид

$$\{(x_0 + ni, y_0 - ti) \mid i \in \mathbb{Z}\}. \quad (11.2)$$

Ясно, что в левой части (11.1) одно из слагаемых является положительным, а другое – отрицательным.

При $v = 2$ теоремы 10.1–10.4 могут быть сформулированы в виде следующих следствий.

Следствие 11.1. Пусть t и n – взаимно простые целые числа, (x, y) – какое-либо решение диофантового уравнения (11.1), d и c – делители соответственно слагаемых tx и ny , причём, $|d| \geq 2$, $|c| \geq 2$, σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^{|d|} = v^{|c|} = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где

$$l = \begin{cases} -nyk + 1, & \text{если } tx > 0, \\ -txk + 1, & \text{если } tx < 0, \end{cases} \quad (11.3)$$

порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Следствие 11.2. Пусть t и n – взаимно простые целые числа, (x, y) – какое-либо решение диофантового уравнения (11.1), причём $|tx| \geq 2$, $|ny| \geq 2$, σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^{|mx|} = v^{|ny|} = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где арность l определяется формулой (11.3), порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Следствие 11.3. Пусть t и n – взаимно простые целые числа, (x, y) – какое-либо решение диофантового уравнения (11.1), причём $|m| \geq 2$, $|n| \geq 2$, σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^{|m|} = v^{|n|} = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где арность l определяется формулой (11.3), порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Следствие 11.4. Пусть $m \geq 2$ и $n \geq 2$ – взаимно простые, (x, y) – какое-либо решение диофантового уравнения (11.1), σ – цикл длины k из

S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^m = v^n = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где

$$l = \begin{cases} -nyk + 1, & \text{если } x > 0, \\ -txk + 1, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (11.4)$$

порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Подставив в (11.4) решение (11.2), получим теорему 8.3 из [2].

Для l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ можно сформулировать результаты, аналогичные следствиям 11.1–11.4. Для этого достаточно в указанных следствиях группу заменить полугруппой, а l -арную группу – l -арной полугруппой.

12 Применение теорем 6.3 и 6.5

Применим теоремы 6.3 и 6.5 из [2] для получения новых результатов о полиадических группах вида $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, которые порождаются множеством $U_j(M)$, не содержащим элемент e .

Теорема 12.1. Пусть $a \geq 2$ и $n \geq 2$ – натуральные числа, d – делитель числа a^n , t – делитель числа $a^n - 1$, σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^d = v^m = 1, \quad (12.1)$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = (a^n - 1)k + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Доказательство. Положим $r = a^n - 1$, тогда $r + 1 = a^n$. Так как t делит $a^n - 1$, то $a^n - 1 = tc$ для некоторого натурального c . Кроме того, по условию $a^n = de$ для некоторого натурального e .

Так как ввиду (12.1),

$$u^{r+1} = u^{a^n} = u^{de} = (u^d)^e = 1,$$

$$v^r = v^{a^n-1} = v^{mc} = (v^m)^c = 1,$$

то по теореме 6.3 из [2] l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = (a^n - 1)k + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$. $\square$

Так как

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1),$$

то в качестве делителя t числа $a^n - 1$ в теореме 12.1 можно взять произведение $t = t_1 t_2$, где t_1 и t_2 – делители чисел $a - 1$ и

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1$$

соответственно.

Полагая в теореме 12.1 $t = a - 1$, получим

Следствие 12.1. Пусть $a \geq 2$ и $n \geq 2$ – натуральные числа, d – делитель числа a^n , σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^d = v^{a-1} = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = (a^n - 1)k + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Так как при чётном $n = 2t$ верно разложение $a^{2t} - 1 = (a + 1)(a^{2t-1} - a^{2t-2} + \dots + a - 1)$, то в качестве делителя m числа $a^n - 1$, в теореме 12.1 ($n = 2t$) можно взять произведение $m = m_1 m_2$, где m_1 и m_2 – делители чисел $a + 1$ и $a^{2t-1} - a^{2t-2} + \dots + a - 1$ соответственно. В частности, для $m_1 = a + 1$, $m_2 = a - 1$ имеем $m = a^2 - 1$. В следующем следствии из теоремы 12.1 $n = 2t$, $m_2 = 1$, $m = m_1 = a + 1$.

Следствие 12.2. Пусть $a \geq 2$ и t – натуральные числа, d – делитель числа a^{2t} , σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^d = v^{a+1} = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = (a^{2t} - 1)k + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Так как для нечётного натурального $b \geq 3$ число $b + 2$ делит $(b + 1)^{b-1} - 1$, то, полагая в теореме 12.1 $a = d = b + 1$, $m = b + 2$, $n = b - 1$, получим

Следствие 12.3. Пусть b – нечётное, σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^{b+1} = v^{b+2} = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = ((b + 1)^{b-1} - 1)k + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Следующая теорема может быть получена из теоремы 6.5 из [2], если в ней положить $r = a^{2t+1}$.

Теорема 12.2. Пусть $a \geq 2$ и t – натуральные числа, d – делитель числа $a^{2t+1} + 1$, m – делитель числа a^{2t+1} , σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^d = v^m = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = a^{2t+1}k + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Так как $a^{2t+1} + 1 = (a + 1)(a^{2t} - a^{2t-1} + \dots + a^2 - a + 1)$, то в качестве делителя d числа $a^{2t+1} + 1$ в теореме 12.2 можно взять произведение $d = d_1 d_2$, где d_1 и d_2 – делители чисел $a + 1$ и $a^{2t} - a^{2t-1} + \dots + a^2 - a + 1$ соответственно.

Полагая в теореме 12.2 $d = a + 1$, получим

Следствие 12.4. Пусть $a \geq 2$ и t – натуральные числа, m – делитель числа a^{2t+1} , σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^{a+1} = v^m = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = a^{2t+1}k + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Полагая в следствии 12.4 $a = m = b - 1$, $2t + 1 = b \geq 3$, получим

Следствие 12.5. Пусть $b \geq 3$ – нечётное число, σ – цикл длины k из S_k . Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^b = v^{b-1} = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = (b - 1)^b k + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

В следствии 12.5 арность l может делиться на b . Для этого достаточно в этом следствии положить $k = (b - 1)^{2s}$, где $s \geq 1$. В этом случае $l = (b - 1)^{b+2s} + 1$, при этом нечётное b делит l . В частности, если $s = 1$, то $k = (b - 1)^2$, $l = (b - 1)^{b+2} + 1$. Таким образом, из следствия 12.5 вытекает

Следствие 12.6. Пусть $b \geq 3$ – нечётное число, σ – цикл длины k из S_k , где $k = (b - 1)^{2s}$, $s \geq 1$. Если группа A порождается множеством M , в котором имеются элементы u и v такие, что

$$u^b = v^{b-1} = 1,$$

то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где $l = (b - 1)^{b+2s} + 1$, порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$, при этом b делит l .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О порождающих множествах l -арной группы. $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 69–78.
2. Гальмак, А.М. О порождающих множествах l -арной группы. $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 63–72.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. Бухштаб, А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – Москва: Просвещение, 1966. – 384 с.
6. Коксетер, Г.С.М. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер. – Москва: Наука, 1980. – 240 с.
7. Горенштейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенштейн. – Москва: Мир, 1985. – 352 с.

Поступила в редакцию 09.10.2021.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

КРИТЕРИИ π -ОТДЕЛИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

CRITERIA FOR π -SEPARABILITY OF A FINITE GROUP

I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. В данной статье все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Группа G называется π -отделимой, если каждый ее главный фактор является либо π -группой, либо π' -группой. Подгруппа A группы G является π, π' -субнормальной в G , если в G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является π -отделимой группой для всех $i = 1, \dots, n$. В данной статье изучается влияние π, π' -субнормальных подгрупп на строение основной группы.

Ключевые слова: конечная группа, π -отделимая группа, π, π' -субнормальная подгруппа, холлова подгруппа.

Для цитирования: Дергачева, И.М. Критерии π -отделимости конечной группы / И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 81–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_81

Abstract. Throughout this paper all groups are finite and G always denotes a finite group. The group G is said to be π -separable if every chief factor of G is either a π -group or a π' -group. A subgroup A of G is said to be π, π' -subnormal in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a π -separable group for all $i = 1, \dots, n$. In this paper we study the influence of π, π' -subnormal subgroups on the structure of the group.

Keywords: finite group, π -separable group, π, π' -subnormal subgroup, Hall subgroup.

For citation: Dergacheva, I.M. Criteria for π -separability of a finite group / I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 81–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_81 (in Russian)

Введение

В данной статье все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – целое число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n ; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок группы G .

Группа G называется: π -отделимой, если каждый ее главный фактор является либо π -группой, либо π' -группой; π -разложимой, если $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$.

Мы говорим, что подгруппа A группы G является π, π' -субнормальной в G , если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является π -отделимой группой для всех $i = 1, \dots, n$.

В данной работе мы докажем следующий результат, дающий новые характеристики π -отделимых групп в терминах π, π' -субнормальности.

Теорема 0.1. Следующие утверждения попарно эквивалентны.

- (i) Группа G является π -отделимой.
- (ii) Каждая подгруппа группы G является π, π' -субнормальной в G .
- (iii) Каждая ненильпотентная максимальная подгруппа группы G является π, π' -субнормальной в G .
- (iv) Каждая нециклическая силовская подгруппа группы G является π, π' -субнормальной в G .
- (v) В G имеется π, π' -субнормальная холлова π -подгруппа H .
- (vi) Каждая подгруппа Шмидта группы G является π, π' -субнормальной в G .

1 Некоторые предварительные результаты

Мы используем $\mathfrak{S}_{\pi, \pi'}$ для обозначения класса всех π -отделимых групп.

Первая лемма может быть доказана прямой проверкой.

Лемма 1.1. Класс $\mathfrak{S}_{\pi, \pi'}$ замкнут относительно взятия прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Более того, всякое расширение

π -отделимой группы при помощи π -отделимой группы является π -отделимой группой.

Из леммы 1.1. и основного результата работы [1] вытекает следующая лемма.

Лемма 1.2. Множество всех π, π' -субнормальных подгрупп группы G формирует подрешетку в решетке всех подгрупп группы G .

Лемма 1.3. Пусть A, K и N – подгруппы в G , где A, π, π' -субнормальна в G и N нормальна в G .

(1) Подгруппа $A \cap K$ π, π' -субнормальна в K .

(2) Если K является π, π' -субнормальной подгруппой в A , то K является π, π' -субнормальной подгруппой в G .

(3) Если K π, π' -субнормальна в G , то $A \cap K$ и $\langle A, K \rangle$ – π, π' -субнормальные подгруппы в G .

(4) Подгруппа AN/N является π, π' -субнормальной в G/N .

(5) Если $N \leq K$ и подгруппа K/N π, π' -субнормальна в G/N , то подгруппа K π, π' -субнормальна в G .

(6) Если $K \leq A$ и группа A π -отделима, то подгруппа K π, π' -субнормальна в G .

Доказательство. Предположим, что данная лемма не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Согласно условию, в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$$

такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – π -отделимая группа для всех $i = 1, \dots, r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Мы можем считать, не теряя общности, что $M \neq G$.

(1) Рассмотрим цепь подгрупп

$$K_0 = K \cap A_0 \leq K \cap A_1 \leq \dots \leq K \cap A_r = K$$

в группе K . Если A_{i-1} нормальна в A_i , тогда $K \cap A_{i-1}$ нормальна в $K \cap A_i$. Пусть теперь $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – π -отделимая группа. Тогда

$$(A_i \cap K)(A_{i-1})_{A_i} / (A_{i-1})_{A_i} \cong A_i \cap K / (A_{i-1})_{A_i} \cap K$$

π -отделима, где $(A_{i-1})_{A_i} \cap K$ нормальна в $A_i \cap K$ и поэтому

$$(A_{i-1})_{A_i} \cap K \leq (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}.$$

Следовательно, $(K \cap A_i)/(K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ – π -отделимая группа. Таким образом, $A \cap K$ π, π' -субнормальна в K .

Утверждения (2) и (5) очевидны.

(3) Данное утверждение является следствием леммы 1.2.

(4) Рассмотрим цепь подгрупп

$AN/N = A_0N/N \leq A_1N/N \leq \dots \leq A_rN/N = G/N$ в группе G/N . Предположим, что $A_{i-1}N/N$ не является нормальной подгруппой в A_iN/N .

Тогда $L = A_{i-1}$ не является нормальной подгруппой в $T = A_i$ и поэтому T/L_T – π -отделимая группа согласно условию. Тогда

$$\begin{aligned} (T/L_T)/(L_T(T \cap N)/L_T) &= \\ = (T/L_T)/((T \cap NL_T)/L_T) &\cong T/(T \cap NL_T) \cong \\ TN/L_TN &\cong (TN/N)/(L_TN/N) \end{aligned}$$

– π -отделимая группа. При этом имеет место включение $L_TN/N \leq (LN/N)_{TN/N}$. Следовательно, $(TN/N)/(LN/N)_{TN/N}$ – π -отделимая группа и поэтому AN/N – π, π' -субнормальная подгруппа в G/N .

(6) Так как A π -отделима, то каждая подгруппа группы A π, π' -субнормальна в A . Таким образом, данное утверждение является следствием утверждения (2). $\square$

Напомним, что G называется группой Шмидта, если группа G ненильпотентна, но все ее собственные подгруппы нильпотентны.

Лемма 1.4 [3, III, теорема 5.2]. [4, VI, теорема 24.2]. Если G является группой Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\text{st}}$ – силовская p -подгруппа группы G и $Q = \langle x \rangle$ является циклической силовской q -подгруппой в G , $p \neq q$. Кроме того, $\langle x^q \rangle \leq \Phi(G)$ и P имеет экспоненту p или 4 (если P – неабелева 2-группа).

2 Доказательство основного результата

Поскольку все импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii), (ii) $\Rightarrow$ (iv), (ii) $\Rightarrow$ (v) и (ii) $\Rightarrow$ (vi) являются очевидными, нам достаточно лишь доказать справедливость импликаций (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Rightarrow$ (i), (iv) $\Rightarrow$ (i), (v) $\Rightarrow$ (i) и (vi) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Пусть $H \leq M \leq G$, где M – максимальная подгруппа в G . Тогда M и G/M_G – π -отделимые группы согласно лемме 1.1. Таким образом, M π, π' -субнормальна в G . С другой стороны, H π, π' -субнормальна в M по индукции и поэтому H π, π' -субнормальна в G ввиду леммы 1.3 (2). Таким образом, обе импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и (i) $\Rightarrow$ (iii) являются верными.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G и M/R – ненильпотентная максимальная подгруппа в G/R . Тогда M максимальна в G и M не является нильпотентной группой, поэтому M π, π' -субнормальна в G по условию. Следовательно, M/R π, π' -субнормальна в G/R ввиду леммы 1.3(4). Таким образом, условие (iii) выполнено для G/R и поэтому G/R является π -отделимой группой ввиду выбора группы G . Следовательно, R не является

π -группой и не является π' -группой по лемме 1.1, снова ввиду выбора группы G . Это означает, что $R \not\leq \Phi(G)$ и $|\pi(R)| > 1$.

Если в G имеется минимальная нормальная подгруппа $N \neq R$, тогда ввиду G -изоморфизма $NR/R \simeq N/1$ подгруппа N является либо π -группой, либо π' -группой, что невозможно ввиду доказанного выше. Таким образом, R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G .

Пусть p – произвольное нечетное простое число, делящее $|R|$, и R_p – силовская p -подгруппа в R . Ввиду аргумента Фраттини имеет место $G = RN_G(R_p)$, где $G \neq N_G(R_p)$ поскольку R не является абелевой группой. Тогда для максимальной подгруппы M группы G , содержащей $N_G(R_p)$, имеет место $R \not\leq M$ и поэтому мы имеем $G = RM$ и $M_G = 1$. Более того, если $R_p \leq G_p$, где G_p – силовская p -подгруппа группы G , то $R_p = R \cap G_p$ и поэтому $G_p \leq N_G(R_p) \leq M$. Следовательно, p не делит $|G : M|$ и $M_G = 1$.

Предположим, что пересечение $D := M \cap R$ является нильпотентным. Тогда D – нильпотентная нормальная подгруппа в M и K_p является силовской p -подгруппой в D . Более того, K_p нормальна в M , поскольку D нильпотентна и, следовательно, подгруппа $Z(J(K_p))$ нормальна в M . Поскольку $M_G = 1$, то $N_G(Z(J(K_p))) = M$. Тогда $N_K(Z(J(K_p))) = D$ – нильпотентная группа. Отсюда следует, что K p -нильпотентна по теореме Глаубермана – Томпсона о нормальных p -дополнениях [2, гл. 8, теорема 3.1]. Но тогда K является p -группой, что противоречит доказанному выше. Следовательно, $D := M \cap R$ не является нильпотентным и поэтому M не является нильпотентной группой. Но тогда M π, π' -субнормальна в G и, следовательно,

$$G \simeq G / M_G = G / 1$$

– G является π -отделимой группой, что противоречит выбору этой группы. Таким образом, импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) является верной.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G и пусть P/R – нециклическая силовская p -подгруппа в G/R для некоторого простого числа p . Тогда для некоторой силовской p -подгруппы G_p группы G имеет место $G_p R / R = P/R$ и G_p не является циклической группой. Следовательно, G_p π, π' -субнормальна в G и поэтому $P/R = G_p R / R$ π, π' -субнормальна

в G/R согласно лемме 1.3 (4). Таким образом, гипотеза верна для G/R и поэтому G/R является π -отделимой группой ввиду выбора группы G .

Прежде покажем, что $R < G$. Действительно, предположим, что $R = G$ – неабелева простая группа и пусть P – силовская p -подгруппа в G , где p – наименьший простой делитель числа $|G|$. Тогда P не является циклической группой и поэтому, ввиду условия, в G имеется цепь подгрупп $P = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$ такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ – π -отделимая группа для всех $i = 1, \dots, r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Мы можем считать, не теряя общности, что $M \neq G$. Но тогда $G \simeq G / M_G = G / 1$ – π -отделимая группа, что противоречит выбору группы G . Значит, R – собственная подгруппа в G .

Покажем теперь, что R также является π -отделимой группой. Прежде заметим, что для любой нециклической силовской подгруппы P группы R в G имеется нециклическая силовская подгруппа G_p такая, что $P = G_p \cap R$. Но тогда P π, π' -субнормальна в R согласно лемме 1.3 (1). Таким образом, условие (iv) выполнено для R и поэтому R является π -отделимой группой ввиду выбора группы G . Но тогда G является π -отделимой группой поскольку π -отделима группа G/R . Полученное противоречие завершает доказательство импликации (iv) $\Rightarrow$ (i).

(v) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка. Тогда $1 < H < G$. Так как H π, π' -субнормальна в G , в группе G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$$

такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ – π -отделимая группа для всех $i = 1, \dots, r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Мы можем считать, не теряя общности, что $M \neq G$ поскольку $H < G$. Понятно, что условие выполнено для (M, H) , поэтому M π -отделима в силу выбора группы G . Понятно также, что $|G : M|$ – π' -число. Это влечет π -отделимость группы G в случае, если M нормальна в G . Таким образом, M не является нормальной в G и поэтому G / M_G – π -отделимая группа. Но в этом случае группа G является π -отделимой поскольку M_G – π -отделимая группа, что противоречит выбору G . Таким образом, импликация (v) $\Rightarrow$ (i) также является верной.

(vi) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . Прежде мы покажем, что G/N –

π -отделимая группа. Если G/R нильпотентна, то это очевидно. Предположим, что фактор группа G/R не является нильпотентной и пусть E/R – подгруппа Шмидта в G/R . Пусть H – минимальное добавление к N в E . Тогда

$$H/(H \cap N) \cong HN/N = E/N$$

– группа Шмидта и $H \cap N \leq \Phi(H)$. Пусть $\Phi = \Phi(H)$ и A – подгруппа Шмидта в H .

Из леммы 1.4 вытекает, что

$$\begin{aligned} & (H/(H \cap N))/\Phi(H/(H \cap N)) = \\ & = (H/(H \cap N))/(\Phi/(H \cap N)) \cong H/\Phi = P \rtimes Q, \end{aligned}$$

где P – силовская p -подгруппа, Q – силовская q -подгруппа в H/Φ и $|Q| = q$ для некоторых простых чисел $p \neq q$. Отсюда, снова по лемме 1.4, следует, что $A = A_p \rtimes A_q$, где $A = (A_q)^A$. Тогда $A_q \not\leq \Phi$, так как Φ нильпотентна. Следовательно, $\Phi A_q/\Phi$ является силовской q -подгруппой в H/Φ , и поэтому

$$(\Phi A_q/\Phi)^{H/\Phi} = (A_q)^H \Phi/\Phi = H/\Phi.$$

Следовательно, $(A_q)^H = H$, поэтому

$$E = HN = (A_q)^H N.$$

Согласно лемме 1.3 (3), $(A_q)^H = A^H$ является π, π' -субнормальной подгруппой в G и, следовательно,

$$E/N = (A_q)^H N/N$$

π, π' -субнормальна в G/N по лемме 1.3 (4). Следовательно, гипотеза верна для G/N , поэтому выбор G подразумевает, что G/N – π -отделимая группа.

Рассуждая теперь, как при доказательстве импликации (vi) $\Rightarrow$ (i), можно показать, что N – π -отделимая группа. Но тогда G является π -отделимой группой. Полученное противоречие завершает доказательство импликации (vi) $\Rightarrow$ (i). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.
2. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – Harper & Row Publishers, New York – Evanston – London, 1968.
3. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 01.10.2021.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент

УДК 519.872

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_85

СИСТЕМА ПОЛЛИНГА С ДВУМЯ МАРКОВСКИМИ ВХОДНЫМИ ПОТОКАМИ, КОНЕЧНЫМИ БУФЕРАМИ И ФАЗОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕН ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

А.Н. Дудин¹, Ю.В. Синюгина²¹Белорусский государственный университет, Минск²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

POLLING SYSTEM WITH TWO MARKOVIAN ARRIVAL PROCESSES, FINITE BUFFERS AND PHASE TYPE DISTRIBUTION OF SERVICE AND SWITCHING TIMES

A.N. Dudin¹, Y.V. Sinyugina²¹Belarusian State University, Minsk²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается система поллинга с двумя очередями с ограниченным числом мест в буферах. В каждую очередь поступает марковский поток требований. Времена обслуживания запросов и переключения между очередями распределены по фазовому закону. Дисциплина обслуживания очередей – шлюзовая. Получены формулы для нахождения стационарных вероятностей состояний системы в произвольный момент времени, а также формулы для вычисления основных характеристик производительности системы. Найдены выражения для преобразований Лапласа – Стилтеса распределений времен ожидания в буферах.

Ключевые слова: система поллинга, марковский входной поток, фазовое обслуживание, стационарное распределение, время ожидания.

Для цитирования: Дудин, А.Н. Система поллинга с двумя марковскими входными потоками, конечными буферами и фазовым распределением времен обслуживания и переключения / А.Н. Дудин, Ю.В. Синюгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 85–91. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_85

Abstract. A polling system with two queues with a limited number of places in buffers are considered. Each queue receives markovian flow of requests. The times of servicing the requests and switching between the queues have phase type distribution. The queuing discipline is gated. The formulas for finding the stationary probabilities of system states at an arbitrary moment in time, and the formulas for computing the main performance measures for the system are obtained. The expressions for the Laplace – Stieltjes transforms of waiting time distributions in buffers are found.

Keywords: polling system, markovian arrival process, phase type service, stationary distribution, waiting time.

For citation: Dudin, A.N. Polling system with two markovian arrival processes, finite buffers and phase type distribution of service and switching times / A.N. Dudin, Y.V. Sinyugina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 85–91. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_85 (in Russian)

Введение

Система поллинга в классическом варианте представляет собой систему массового обслуживания с одним обслуживающим устройством и несколькими очередями. Обслуживание очередей в системе поллинга происходит в порядке, который определяется дисциплиной опроса очередей. Рассматриваемая в работе система состоит из двух очередей, которые прибор обслуживает друг за другом. Длительность непрерывного обслуживания очереди определяется дисциплиной обслуживания. В данной работе предполагается шлюзовое обслуживание очередей. Более подробно познакомиться с системами поллинга, методами их исследования и их практическим применением можно, например, в [1]–[7]. В качестве процесса поступления требований в данной

работе рассматривается марковский входной поток (см., например, [8]–[10]), а времена обслуживания требований и времена переключения между очередями предполагаются распределенными по фазовому закону (см., например, [8]).

В работе дается описание изучаемой модели, строится цепь Маркова, которая характеризует состояния системы в произвольный момент времени, приводятся формулы для нахождения стационарных вероятностей состояний системы, а также формулы для вычисления основных характеристик производительности системы, находят преобразования Лапласа – Стилтеса распределения времен ожидания в буферах.

1 Описание системы

Рассмотрим систему поллинга с одним обслуживающим устройством и двумя очередями с

числом мест в буферах N_1 и N_2 соответственно. В каждую очередь поступает свой МАР-поток требований. Поведение k -го потока, $k = 1, 2$, полностью определяется матрицами $D_l^{(k)}$, $l = 0, 1$, которые задают интенсивности переходов управляющего процесса $v^{(k)}(t), t \geq 0$, между состояниями $0, 1, \dots, W_k$ с генерацией l требований. Матрица $D^{(k)} = D_0^{(k)} + D_1^{(k)}$ является генератором управляющего процесса. Средняя скорость поступления требований $\lambda^{(k)}$ определяется как $\lambda^{(k)} = \theta^{(k)} D_1^{(k)} e$, где $\theta^{(k)}$ – вектор стационарного распределения состояний управляющего процесса, который является единственным решением системы уравнений $\theta^{(k)} D^{(k)} = 0$, $\theta^{(k)} e = 1$, где 0 – вектор-строка, состоящая из нулей, e – вектор-столбец, состоящий из единиц.

Время обслуживания требования из k -ой очереди имеет фазовое распределение с M_k фазами и неприводимым представлением $(\beta^{(k)}, S^{(k)})$, $k = 1, 2$, где вектор $\beta^{(k)} = (\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \dots, \beta_M^{(k)})$ задает начальное состояние управляющего процесса, матрица $S^{(k)}$ определяет интенсивности переходов управляющего процесса между состояниями $1, \dots, M_k$, а вектор $S_0^{(k)} = -S^{(k)} e$ задает интенсивности переходов в поглощающее состояние $M_k + 1$. Время подключения обслуживающего прибора к k -ой очереди также имеет фазовое распределение с M_{-k} фазами и неприводимым представлением $(\beta^{(-k)}, S^{(-k)})$, $k = 1, 2$.

Дисциплина обслуживания очередей – шлюзовая. Это означает, что после подключения прибора к очереди обслуживание получают только те требования, которые находились в буфере этой очереди в момент завершения подключения к ней прибора. Остальные требования будут обслужены только после следующего подключения прибора к очереди.

Для анализа описанной системы введем в рассмотрение случайный процесс

$$\xi(t) = \{r(t), j(t), i^{(1)}(t), i^{(2)}(t), m(t), v^{(1)}(t), v^{(2)}(t)\}, \\ t \geq 0,$$

где $r(t)$ характеризует состояние обслуживающего устройства в момент времени t , $t \geq 0$:

$$r(t) = \begin{cases} k, & \text{если прибор обслуживает} \\ & \text{требования из } k\text{-ой очереди,} \\ -k, & \text{если прибор подключается} \\ & \text{к } k\text{-ой очереди, } k=1,2; \end{cases}$$

$j(t)$ описывает число требований, которые еще необходимо обслужить при текущем подключении; $i^{(k)}(t)$ описывает число требований в буфере k -ой очереди; $m(t)$ определяет текущую фазу

соответствующего процесса обслуживания или подключения; $v^{(k)}(t)$ характеризует состояние управляющего процесса поступления требований в соответствующую очередь. Очевидно, процесс $\xi(t), t \geq 0$, полностью характеризует состояния системы в произвольный момент времени t , $t \geq 0$. Как видно, данный процесс является цепью Маркова с непрерывным временем, стационарное распределение которой нам необходимо найти.

2 Стационарное распределение вероятностей состояний системы

Очевидно, что цепь Маркова

$$\xi(t) = \{r(t), j(t), i^{(1)}(t), i^{(2)}(t), m(t), v^{(1)}(t), v^{(2)}(t)\}, \\ t \geq 0,$$

неприводима, регулярна и имеет конечное пространство состояний, поэтому существует единственное стационарное распределение вероятностей состояний этой цепи, которое совпадает с эргодическим (предельным) распределением:

$$\pi^{(r)}(j, i^{(1)}, i^{(2)}, m, v^{(1)}, v^{(2)}) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{r(t) = r, j(t) = j, i^{(1)}(t) = i^{(1)}, i^{(2)}(t) = i^{(2)}, \\ m(t) = m, v^{(1)}(t) = v^{(1)}, v^{(2)}(t) = v^{(2)}\},$$

где $r = \pm k$, $j = \overline{1, N_r}$ при $r = k$ и $j = 0$ при $r = -k$, $i^{(k)} = \overline{0, N_k}$, $m = \overline{1, M_r}$, $v^{(k)} = \overline{0, W_k}$, $k = 1, 2$.

Сформируем из этих вероятностей вектор-строки, записав вероятности в лексикографическом порядке по компонентам $r(t)$, $j(t)$, $i^{(1)}(t)$, $i^{(2)}(t)$, $m(t)$, $v^{(1)}(t)$, $v^{(2)}(t)$:

$$\pi^{(k)}(j, i^{(1)}, i^{(2)}) = (\pi^{(r)}(j, i^{(1)}, i^{(2)}, 1, 0, 0), \dots,$$

$$\pi^{(r)}(j, i^{(1)}, i^{(2)}, M_r, W_1, W_2)), r = k,$$

$$q^{(k)}(i^{(1)}, i^{(2)}) = (\pi^{(r)}(0, i^{(1)}, i^{(2)}, 1, 0, 0), \dots,$$

$$\pi^{(r)}(0, i^{(1)}, i^{(2)}, M_r, W_1, W_2)), r = -k,$$

$$\pi = (\pi^{(1)}(1, 0, 0), \dots, \pi^{(1)}(N_1, N_1, N_2),$$

$$\pi^{(2)}(1, 0, 0), \dots, \pi^{(2)}(N_2, N_1, N_2),$$

$$q^{(1)}(0, 0), \dots, q^{(1)}(N_1, N_2), q^{(2)}(0, 0), \dots, q^{(2)}(N_1, N_2)).$$

Для нахождения стационарных вероятностей состояний цепи Маркова $\xi(t)$, $t \geq 0$, составим систему уравнений Чепмена – Колмогорова.

Введем следующие обозначения:

$$R^{(k)}(i_1, i_2) = I_{M_r} \otimes D_0^{(1)} \otimes I_{W_2} (1 - \delta_{i_1 N_1}) + I_{M_r} \otimes D^{(1)} \delta_{i_1 N_1} \otimes I_{W_2} + \\ + I_{M_r} \otimes I_{W_1} \otimes D_0^{(2)} (1 - \delta_{i_2 N_2}) + I \\ + I_{M_r} \otimes I_{W_1} \otimes D^{(2)} \delta_{i_2 N_2} + S^{(r)} \otimes I_{W_1 W_2}, r = k, \\ Q^{(k)}(i_1, i_2) = I_{M_r} \otimes D_0^{(1)} \otimes I_{W_2} (1 - \delta_{i_1 N_1}) + \\ + I_{M_r} \otimes D^{(1)} \delta_{i_1 N_1} \otimes I_{W_2} +$$

$$+I_{M_r} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_0^{(2)} (1 - \delta_{i_2 N_2}) + I_{M_r} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D^{(2)} \delta_{i_2 N_2} + \\ + S^{(r)} \otimes I_{\overline{W_1 W_2}}, r = -k, i_k = \overline{0, N_k},$$

где I – единичная матрица заданной размерности, $\otimes$ – символ кронекерова произведения матриц, δ_{ij} – дельта Кронекера.

Можно показать, что справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} & \pi^{(1)}(j, i^{(1)}, i^{(2)}) R^{(1)}(i_1, i_2) + \\ & + \pi^{(1)}(j, i^{(1)} - 1, i^{(2)}) (I_{M_1} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}) (1 - \delta_{i_1 0}) + \\ & + \pi^{(1)}(j, i^{(1)}, i^{(2)} - 1) (I_{M_1} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_1^{(2)}) (1 - \delta_{i_2 0}) + \\ & + \pi^{(1)}(1 + j, i^{(1)}, i^{(2)}) (1 - \delta_{j N_1}) S_0^{(1)} \mathbf{p}^{(1)} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes I_{\overline{W_2}} + \\ & + \mathbf{q}^{(1)}(j, i^{(2)}) S_0^{(-1)} \mathbf{p}^{(1)} \delta_{i_1 0} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes I_{\overline{W_2}} = \mathbf{0}, j = \overline{1, N_1}, \\ & \pi^{(2)}(j, i^{(1)}, i^{(2)}) R^{(2)}(i_1, i_2) + \\ & + \pi^{(2)}(j, i^{(1)} - 1, i^{(2)}) (I_{M_2} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}) (1 - \delta_{i_1 0}) + \\ & + \pi^{(2)}(j, i^{(1)}, i^{(2)} - 1) (I_{M_2} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_1^{(2)}) (1 - \delta_{i_2 0}) + \\ & + \pi^{(2)}(j + 1, i^{(1)}, i^{(2)}) (1 - \delta_{j N_2}) S_0^{(2)} \mathbf{p}^{(2)} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes I_{\overline{W_2}} + \\ & + \mathbf{q}^{(2)}(i^{(1)}, j) S_0^{(-2)} \mathbf{p}^{(2)} \delta_{i_2 0} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes I_{\overline{W_2}} = \mathbf{0}, j = \overline{1, N_2}, \\ & \mathbf{q}^{(1)}(i^{(1)}, i^{(2)}) \mathcal{Q}^{(1)}(i_1, i_2) + \\ & + \mathbf{q}^{(1)}(i^{(1)} - 1, i^{(2)}) (I_{M_{-1}} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}) (1 - \delta_{i_1 0}) + \\ & + \mathbf{q}^{(1)}(i^{(1)}, i^{(2)} - 1) (I_{M_{-1}} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_1^{(2)}) (1 - \delta_{i_2 0}) + \\ & + \pi^{(2)}(1, i^{(1)}, i^{(2)}) S_0^{(2)} \mathbf{p}^{(-1)} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes I_{\overline{W_2}} + \\ & + \mathbf{q}^{(2)}(i^{(1)}, 0) S_0^{(-2)} \mathbf{p}^{(-1)} \delta_{i_2 0} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes I_{\overline{W_2}} = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{q}^{(2)}(i^{(1)}, i^{(2)}) \mathcal{Q}^{(2)}(i_1, i_2) + \\ & + \mathbf{q}^{(2)}(i^{(1)} - 1, i^{(2)}) (I_{M_{-2}} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}) (1 - \delta_{i_1 0}) + \\ & + \mathbf{q}^{(2)}(i^{(1)}, i^{(2)} - 1) (I_{M_{-2}} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_1^{(2)}) (1 - \delta_{i_2 0}) + \\ & + \pi^{(1)}(1, i^{(1)}, i^{(2)}) S_0^{(1)} \mathbf{p}^{(-2)} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes I_{\overline{W_2}} + \\ & + \mathbf{q}^{(1)}(0, i^{(2)}) S_0^{(-1)} \mathbf{p}^{(-2)} \delta_{i_1 0} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes I_{\overline{W_2}} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Добавляя условие нормировки $\mathbf{p}\mathbf{e} = 1$, получим систему уравнений, единственным решением которой является вектор стационарных вероятностей $\mathbf{p}$. Для решения полученной системы уравнений можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в [11].

Зная распределение вероятностей, можно найти среднее число требований в буфере k ,

$k = 1, 2$, по формуле $L_k = \sum_{i=1}^{N_k} i \pi_k(i) \mathbf{e}$, где

$$\pi_1(i) \mathbf{e} = \sum_{i_2=0}^{N_2} \left(\sum_{j=1}^{N_1} \pi^{(1)}(j, i, i_2) \mathbf{e} + \sum_{j=1}^{N_2} \pi^{(2)}(j, i, i_2) \mathbf{e} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{q}^{(1)}(i, i_2) \mathbf{e} + \mathbf{q}^{(2)}(i, i_2) \mathbf{e} \right),$$

$$\pi_2(i) \mathbf{e} = \sum_{i_1=0}^{N_1} \left(\sum_{j=1}^{N_1} \pi^{(1)}(j, i_1, i) \mathbf{e} + \sum_{j=1}^{N_2} \pi^{(2)}(j, i_1, i) \mathbf{e} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{q}^{(1)}(i_1, i) \mathbf{e} + \mathbf{q}^{(2)}(i_1, i) \mathbf{e} \right),$$

и вероятность потери требования, поступающего в буфер k , по формуле

$$P_1^{loss} = \sum_{i_2=0}^{N_2} \left(\sum_{j=1}^{N_1} \pi^{(1)}(j, N_1, i_2) \frac{I_{M_1} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}} \mathbf{e} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_2} \pi^{(2)}(j, N_1, i_2) \frac{I_{M_2} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}} \mathbf{e} +$$

$$+ \mathbf{q}^{(1)}(N_1, i_2) \frac{I_{M_{-1}} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}} \mathbf{e} +$$

$$\left. + \mathbf{q}^{(2)}(N_1, i_2) \frac{I_{M_{-2}} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\overline{W_2}}}{\lambda^{(1)}} \mathbf{e} \right),$$

$$P_2^{loss} = \sum_{i_1=0}^{N_1} \left(\sum_{j=1}^{N_1} \pi^{(1)}(j, i_1, N_2) \frac{I_{M_1} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}} \mathbf{e} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_2} \pi^{(2)}(j, i_1, N_2) \frac{I_{M_2} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}} \mathbf{e} +$$

$$+ \mathbf{q}^{(1)}(i_1, N_2) \frac{I_{M_{-1}} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}} \mathbf{e} +$$

$$\left. + \mathbf{q}^{(2)}(i_1, N_2) \frac{I_{M_{-2}} \otimes I_{\overline{W_1}} \otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}} \mathbf{e} \right).$$

3 Преобразование Лапласа – Стилтеса времени ожидания произвольного требования

Пусть $W_k(x)$, $x \geq 0$, есть функция распределения времени ожидания произвольного требования в буфере k , $k = 1, 2$, а

$$w_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} dW_k(t),$$

$Res > 0$ – ее преобразование Лапласа – Стилтеса. Будет полагать, что требования обслуживаются в порядке их поступления в буфер. Для нахождения функций $w_k(s)$ будем использовать метод катастроф (см., например, [12]), согласно которому $w_k(s)$ есть вероятность того, что за время ожидания требования в буфере k не наступит ни одна «катастрофа». Для нахождения функций $w_k(s)$ проанализируем сначала возможные состояния системы в момент прихода произвольного требования в k -ый буфер.

Наблюдаемое требование поступает в заполненный буфер. В этом случае требование теряется, а вероятность ненаступления «катастрофы» за время ожидания этого требования равняется 1.

Требование поступает в буфер очереди в момент подключения прибора к этой очереди. В этом случае время ожидания требования будет состоять из оставшегося времени подключения и времени обслуживания тех запросов, которые поступили в буфер раньше наблюдаемого требования.

Требование поступает в буфер в момент, когда прибор занят обслуживанием запросов из другой очереди. В этом случае время ожидания требования будет состоять из оставшегося времени обслуживания текущего запроса, времени обслуживания запросов, которые еще требуется обслужить, времени подключения прибора к очереди, в буфер которой поступило требование, времени обслуживания запросов, которые поступили в буфер раньше наблюдаемого требования.

Требование поступает в буфер в момент подключения прибора к другой очереди. В этом случае время ожидания требования будет состоять из оставшегося времени подключения, времени обслуживания тех запросов, которые находились в буфере в момент прихода наблюдаемого требования, а также тех запросов, которые поступили в буфер за оставшееся время подключения, времени переключения к очереди, в буфер которой поступило требование, времени обслуживания тех запросов, которые поступили в буфер раньше наблюдаемого требования.

В момент прихода требования прибор занят обслуживанием запросов из очереди, в буфер которой поступило требование. В этом случае время ожидания требования будет состоять из оставшегося времени обслуживания текущего запроса, времени обслуживания запросов, которые еще требуется обслужить, времени на переключение к другой очереди, времени обслуживания запросов, имевшихся в буфере другой очереди в момент прихода наблюдаемого требования, а также тех запросов, которые поступили в буфер за время обслуживания оставшихся запросов из буфера первой очереди и за время подключения прибора ко второй очереди, времени переключения к очереди, в буфер которой поступило требование, времени обслуживания запросов, которые поступили в буфер раньше наблюдаемого требования.

Для нахождения функций $w_k(s)$ введем в рассмотрение следующие функции. Вектор, состоящий из преобразований Лапласа – Стильтеса оставшегося времени обслуживания текущего запроса или оставшегося времени текущего подключения при фиксированном текущем состоянии управляющего процесса соответствующего распределения $L^{(k)}(s) = (sI - S^{(k)})^{-1} S_0^{(k)}$, $k = \pm 1, \pm 2$. Преобразование Лапласа – Стильтеса полного времени обслуживания запроса из k -ой очереди $\beta^{(k)}(s) = \beta^{(k)}(sI - S^{(k)})^{-1} S_0^{(k)}$, $k = 1, 2$.

Матрица вероятностей того, что за время t , $t \geq 0$, в m -ую очередь поступит l запросов $P_m(l, t)$, $m = 1, 2$, $l \geq 0$.

Лемма 3.1. Преобразование Лапласа – Стильтеса оставшегося времени обслуживания текущего запроса из k -ой очереди, $k = 1, 2$, в течение которого в m -ую очередь, $m = 1, 2$, поступит l запросов, $l \geq 0$, задается формулой

$$F_l^{(k)}(m, s) = z_l^{(k)}(m, s) \left(S_0^{(k)} \otimes I_{\bar{W}_m} \right),$$

преобразование Лапласа – Стильтеса оставшегося времени подключения к k -ой очереди, в течение которого в m -ую очередь поступит l запросов, задается формулой

$$\Phi_l^{(k)}(m, s) = \phi_l^{(k)}(m, s) \left(S_0^{(-k)} \otimes I_{\bar{W}_m} \right),$$

преобразование Лапласа – Стильтеса полного времени обслуживания запроса из k -ой очереди, в течение которого в m -ую очередь поступит l запросов, задается формулой

$$P_l^{(k)}(m, s) = d_l^{(k)}(m, s) \left(S_0^{(k)} \otimes I_{\bar{W}_m} \right),$$

где

$$\begin{aligned} z_0^{(k)}(m, s) &= \\ &= - \left((-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes I_{\bar{W}_m} \right) \left(I + (-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes D_0^{(m)} \right)^{-1}, \\ z_l^{(k)}(m, s) &= - \sum_{i=0}^{l-1} z_i^{(k)}(m, s) \left((-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes D_{l-i}^{(m)} \right) \times \\ &\quad \times \left(I + (-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes D_0^{(m)} \right)^{-1}, \\ \phi_0^{(k)}(m, s) &= - \left((-sI + S^{(-k)})^{-1} \otimes I_{\bar{W}_m} \right) \times \\ &\quad \times \left(I + (-sI + S^{(-k)})^{-1} \otimes D_0^{(m)} \right)^{-1}, \\ \phi_l^{(k)}(m, s) &= - \sum_{i=0}^{l-1} \phi_i^{(k)}(m, s) \left((-sI + S^{(-k)})^{-1} \otimes D_{l-i}^{(m)} \right) \times \\ &\quad \times \left(I + (-sI + S^{(-k)})^{-1} \otimes D_0^{(m)} \right)^{-1}, \\ d_0^{(k)}(m, s) &= - \left(\beta^{(k)}(-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes I_{\bar{W}_m} \right) \times \\ &\quad \times \left(I + (-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes D_0^{(m)} \right)^{-1}, \\ d_l^{(k)}(m, s) &= - \sum_{i=0}^{l-1} d_i^{(k)}(m, s) \left((-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes D_{l-i}^{(m)} \right) \times \\ &\quad \times \left(I + (-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes D_0^{(m)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Доказательство. По определению для функции $F_l^{(k)}(m, s)$ будем иметь

$$\begin{aligned} F_l^{(k)}(m, s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{S^{(k)}t} S_0^{(k)} \otimes P_m(l, t) I_{\bar{W}_m} dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-st} e^{S^{(k)}t} \otimes P_m(l, t) dt \left(S_0^{(k)} \otimes I_{\bar{W}_m} \right) = \\ &= z_l^{(k)}(m, s) \left(S_0^{(k)} \otimes I_{\bar{W}_m} \right). \end{aligned}$$

Аналогично для функции $z_l^{(k)}(m, s)$ имеем

$$\begin{aligned} z_l^{(k)}(m, s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{S^{(k)}t} \otimes P_m(l, t) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{(S^{(k)} - sI)t} \otimes P_m(l, t) dt = \\ &= -\left((-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes I_{\overline{W}_m}\right) \delta_{l,0} \times \\ &\times - \int_0^\infty e^{(S^{(k)} - sI)t} (-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes \sum_{i=0}^l P_m(i, t) D_{l-i}^{(m)} dt = \\ &= -\left((-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes I_{\overline{W}_m}\right) \delta_{l,0} - \\ &- \sum_{i=0}^l z_0^{(i)}(m, s) \left((-sI + S^{(k)})^{-1} \otimes D_{l-i}^{(m)}\right). \end{aligned}$$

Откуда получаем доказываемые формулы для $F_l^{(k)}(m, s)$ и $z_l^{(k)}(m, s)$.

Аналогично получаются формулы для функций $P_l^{(k)}(m, s)$, $d_l^{(k)}(m, s)$, $\Phi_l^{(k)}(m, s)$ и $\phi_l^{(k)}(m, s)$. $\square$

Лемма 3.2. Преобразование Лапласа – Стилтеса времени обслуживания n запросов, $n \geq 1$, из k -ой очереди, $k = 1, 2$, за которое в m -ую очередь, $m = 1, 2$, поступит l запросов, $l \geq 0$, определяется по формуле

$$P_l^{(n,k)}(m, s) = h_{l,n}^{(k)}(m, s) \left(\Gamma_{0,k}^{(n)} \otimes I_{\overline{W}_m} \right),$$

где

$$\begin{aligned} h_{0,n}^{(k)}(m, s) &= -\left(\gamma_k^{(n)} (-sI + \Gamma_k^{(n)})^{-1} \otimes I_{\overline{W}_m} \right) \times \\ &\times \left(I + (-sI + \Gamma_k^{(n)})^{-1} \otimes D_0^{(m)} \right)^{-1}, \\ h_{l,n}^{(k)}(m, s) &= -\sum_{i=0}^{l-1} h_{i,n}^{(k)}(m, s) \left((-sI + \Gamma_k^{(n)})^{-1} \otimes D_{l-i}^{(m)} \right) \times \\ &\times \left(I + (-sI + \Gamma_k^{(n)})^{-1} \otimes D_0^{(m)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_k^{(n)}$ и $\Gamma_k^{(n)}$ – параметры фазового распределения суммы n независимых случайных величин, одинаково распределенных по фазовому закону с неприводимым представлением $(\beta^{(k)}, S^{(k)})$.

Лемма 3.3. Преобразование Лапласа – Стилтеса $w_1^{(-1)}(s, i_1)$ условного распределения времени ожидания требования в первом буфере при условии, что в момент поступления этого требования прибор подключается к первой очереди, в буфере которой находится i_1 запросов, определяется по формуле

$$w_1^{(-1)}(s, i_1) = L^{(-1)}(s) (\beta^{(1)}(s))^{i_1}.$$

Доказательство. Учитывая вероятностную интерпретацию преобразования Лапласа – Стилтеса, легко увидеть, что функция $w_1^{(-1)}(s, i_1)$ представляет собой произведение вероятностей ненаступления «катастрофы» за оставшееся время текущего подключения прибора к первой

очереди $L^{(-1)}(s)$ и за время обслуживания i_1 запросов, находившихся в буфере в момент прихода наблюдаемого требования $(\beta^{(1)}(s))^{i_1}$. $\square$

Лемма 3.4. Преобразование Лапласа – Стилтеса $w_1^{(2)}(s, j, i_1, i_2)$ условного распределения времени ожидания требования в первом буфере при условии, что в момент поступления этого требования прибор обслуживает запросы из второй очереди, причем j запросов еще требуется обслужить, в первом буфере находится i_1 запросов, а во втором – i_2 , определяется по формуле

$$w_1^{(2)}(s, j, i_1, i_2) = L^{(2)}(s) (\beta^{(2)}(s))^{j-1} \beta^{(-1)} w_1^{(-1)}(s, i_1).$$

Доказательство. Используя вероятностную интерпретацию преобразования Лапласа – Стилтеса, получаем, что функция $w_1^{(2)}(s, j, i_1, i_2)$ есть произведение вероятностей ненаступления «катастрофы» за оставшееся время обслуживания текущего запроса $L^{(2)}(s)$ и за время обслуживания остальных $j-1$ запросов $(\beta^{(2)}(s))^{j-1}$, умноженное на произведение распределения вероятностей состояний управляющего процесса при подключении прибора к первой очереди $\beta^{(-1)}$ на вероятность ненаступления «катастрофы» за оставшееся с момента начала подключения время ожидания наблюдаемого требования $w_1^{(-1)}(s, i_1)$. $\square$

Лемма 3.5. Преобразование Лапласа – Стилтеса $w_1^{(-2)}(s, i_1, i_2)$ условного распределения времени ожидания требования в первом буфере при условии, что в момент поступления этого требования прибор подключается ко второй очереди, в буфере первой очереди находится i_1 запросов, а в буфере второй очереди – i_2 запросов, определяется как

$$\begin{aligned} w_1^{(-2)}(s, i_1, i_2) &= \\ &= \sum_{l=0}^{N_2-i_2-1} \Phi_l^{(2)}(2, s) \beta^{(2)} w_1^{(2)}(s, i_2 + l, i_1, 0) + \\ &+ \sum_{l=N_2-i_2}^{\infty} \Phi_l^{(2)}(2, s) \beta^{(2)} w_1^{(2)}(s, N_2, i_1, 0). \end{aligned}$$

Доказательство. Исходя из вероятностного смысла преобразования Лапласа – Стилтеса, функция $w_1^{(-2)}(s, i_1, i_2)$ есть вероятность того, что «катастрофа» не наступит за оставшееся время подключения прибора ко второй очереди и за это время во вторую очередь поступит l запросов $\Phi_l^{(2)}(2, s)$, умноженная на произведение распределения вероятностей состояний управляющего процесса для обслуживания первого запроса из второго буфера $\beta^{(2)}$ и вероятности ненаступления «катастрофы» в будущем $w_1^{(2)}(s, i_2 + l, i_1, 0)$. $\square$

Лемма 3.6. Преобразование Лапласа – Стилтеса $w_1^{(1)}(s, j, i_1, i_2)$ условного распределения времени ожидания требования в первом буфере при условии, что в момент поступления этого требования прибор обслуживает запросы из первой очереди, если еще требуется обслужить j запросов, при этом в первом буфере находится i_1 запросов, а во втором – i_2 , определяется как

$$\begin{aligned} w_1^{(1)}(s, j, i_1, i_2) = & \sum_{l=0}^{N_2-i_2-1} \sum_{m=0}^{N_2-i_2-1-l} F_l^{(1)}(2, s) P_m^{(*j-1,1)}(2, s) \times \\ & \times \beta^{(-2)} w_1^{(-2)}(s, i_1, i_2 + l + m) + \\ & + \sum_{l=0}^{N_2-i_2-1} \sum_{m=N_2-i_2-l}^{\infty} F_l^{(1)}(2, s) P_m^{(*j-1,1)}(2, s) \times \\ & \times \beta^{(-2)} w_1^{(-2)}(s, i_1, N_2) + \\ & + \sum_{l=N_2-i_2}^{\infty} F_l^{(1)}(2, s) (\beta^{(1)}(s))^{j-1} \beta^{(-2)} w_1^{(-2)}(s, i_1, N_2). \end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая вероятностный смысл преобразования Лапласа – Стилтеса, получаем, что функция $w_1^{(1)}(s, j, i_1, i_2)$ есть произведение вероятности того, что «катастрофа» не наступит за оставшееся время обслуживания запроса из первой очереди и за это время во вторую очередь поступит l запросов $F_l^{(1)}(2, s)$ на вероятность того, что «катастрофа» не наступит за время обслуживания остальных запросов из первой очереди и за это время придёт m запросов во вторую очередь $P_m^{(*j-1,1)}(2, s)$ на произведение начального распределения вероятностей состояний управляющего процесса подключения ко второму буферу $\beta^{(-2)}$ и вероятности ненаступления «катастрофы» в будущем $w_1^{(-2)}(s, i_1, i_2)$.

Теорема 3.1. Преобразование Лапласа – Стилтеса $w_1(s)$ распределения времени ожидания произвольного требования в первом буфере вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} w_1(s) = & P_1^{loss} + \\ & + \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \left(q^{(1)}(i_1, i_2) \frac{I_{M-1} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\bar{W}_2}}{\lambda^{(1)}} e w_1^{(-1)}(s, i_1) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{N_1} \pi^{(1)}(j, i_1, i_2) \frac{I_{M_1} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\bar{W}_2}}{\lambda^{(1)}} e w_1^{(1)}(s, j, i_1, i_2) + \\ & + q^{(2)}(i_1, i_2) \frac{I_{M-2} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\bar{W}_2}}{\lambda^{(1)}} e w_1^{(-2)}(s, i_1, i_2) + \\ & \left. + \sum_{j=1}^{N_2} \pi^{(2)}(j, i_1, i_2) \frac{I_{M_2} \otimes D_1^{(1)} \otimes I_{\bar{W}_2}}{\lambda^{(1)}} e w_1^{(2)}(s, j, i_1, i_2) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Вытекает из формулы полной вероятности и лемм 3.3–3.6. $\square$

Аналогичным образом доказывается

Теорема 3.2. Преобразование Лапласа – Стилтеса $w_2(s)$ распределения времени ожидания произвольного требования во втором буфере вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} w_2(s) = & P_2^{loss} + \\ & + \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \sum_{i_1=0}^{N_1} \left(q^{(2)}(i_1, i_2) \frac{I_{M-2} \otimes I_{\bar{W}_1} \otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}} e w_2^{(-2)}(s, i_2) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{N_2} \pi^{(2)}(j, i_1, i_2) \frac{I_{M_2} \otimes I_{\bar{W}_1} \otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}} e w_2^{(2)}(s, j, i_1, i_2) + \\ & + q^{(1)}(i_1, i_2) \frac{I_{M-1} \otimes I_{\bar{W}_1} \otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}} e w_2^{(-1)}(s, i_1, i_2) + \\ & \left. + \sum_{j=1}^{N_1} \pi^{(1)}(j, i_1, i_2) \frac{I_{M_1} \otimes I_{\bar{W}_1} \otimes D_1^{(2)}}{\lambda^{(2)}} e w_2^{(1)}(s, j, i_1, i_2) \right), \end{aligned}$$

где соответствующие функции определяются как

$$\begin{aligned} w_2^{(-2)}(s, i_2) = & L^{(-2)}(s) (\beta^{(2)}(s))^{i_2}, \\ w_2^{(1)}(s, j, i_1, i_2) = & L^{(1)}(s) (\beta^{(1)}(s))^{j-1} \beta^{(-2)} w_2^{(-2)}(s, i_2), \\ w_2^{(-1)}(s, i_1, i_2) = & \sum_{l=0}^{N_1-i_1-1} \Phi_l^{(1)}(1, s) \beta^{(1)} w_2^{(1)}(s, i_1 + l, 0, i_2) + \\ & + \sum_{l=N_1-i_1}^{\infty} \Phi_l^{(1)}(1, s) \beta^{(1)} w_2^{(1)}(s, N_1, 0, i_2), \\ w_2^{(2)}(s, j, i_1, i_2) = & \sum_{l=0}^{N_1-i_1-1} \sum_{m=0}^{N_1-i_1-1-l} F_l^{(2)}(1, s) P_m^{(*j-1,2)}(1, s) \times \\ & \times \beta^{(-1)} w_2^{(-1)}(s, i_1 + l + m, i_2) + \\ & + \sum_{l=0}^{N_1-i_1-1} \sum_{m=N_1-i_1-l}^{\infty} F_l^{(2)}(1, s) P_m^{(*j-1,2)}(1, s) \times \\ & \times \beta^{(-1)} w_2^{(-1)}(s, N_1, i_2) + \\ & + \sum_{l=N_1-i_1}^{\infty} F_l^{(2)}(1, s) (\beta^{(2)}(s))^{j-1} \beta^{(-1)} w_2^{(-1)}(s, N_1, i_2). \end{aligned}$$

Следствие 3.1. Среднее время ожидания произвольного требования W_k в буфере k , $k = 1, 2$,

вычисляется по формуле $W_k = -\frac{dw_k(s)}{ds} \Big|_{s=0}$.

Среднее время ожидания требования, принятого в k -ый буфер, W_k^{accept} вычисляется по

$$\text{формуле } W_k^{accept} = \frac{W_k}{1 - P_k^{loss}}.$$

Доказательство. Формула для W_k вытекает из свойств преобразования Лапласа – Стилтеса. Для вывода формулы для W_k^{accept} заметим, что среднее время ожидания произвольного требования в k -ом буфере также учитывает среднее время ожидания потерянных требований:

$$W_k = W_k^{loss} P_k^{loss} + W_k^{accept} P_k^{accept},$$

где $W_k^{loss} = 0$ – среднее время ожидания потерянного требования в k -ом буфере, P_k^{accept} – вероятность принятия требования в k -ом буфере.

Учитывая тот факт, что $P_k^{loss} + P_k^{accept} = 1$, получаем

$$W_k^{accept} = \frac{W_k}{P_k^{accept}} = \frac{W_k}{1 - P_k^{loss}}. \quad \square$$

Заключение

Исследована система массового обслуживания с дисциплиной поллинга и двумя потоками запросов, которая может быть использована для рекуррентного вычисления характеристик системы с произвольным числом потоков запросов при весьма общих предположениях о входном потоке и распределениях времен обслуживания запросов и времен переключения прибора между потоками. Модель MAP входного потока позволяет учитывать возможную корреляцию интервалов между моментами поступления запросов и произвольное значение дисперсии длин этих интервалов. Распределение фазового типа времен обслуживания запросов и времен переключения прибора между потоками может быть использовано для аппроксимации произвольного распределения. Основным результатом статьи являются формулы для вычисления преобразований Лапласа – Стильеса распределений времен ожидания запросов. Для их вывода использована техника метода введения дополнительного события (метода катастроф), использующего вероятностную интерпретацию преобразования Лапласа – Стильеса. Результаты могут быть обобщены на случай наличия взаимной корреляции входных потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневецкий, В.М. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях / В.М. Вишневецкий, О.В. Семёнова. – Москва: Техносфера, 2007. – 312 с.
2. Vishnevsky, V. Polling Systems and Their Application to Telecommunication Networks / V. Vishnevsky, O. Semenova // Mathematics. – 2021. – № 9 (117). – DOI: doi.org/10.3390/math9020117
3. Boon, M.A.A. Applications of polling systems / M.A.A. Boon, R.D. van der Mei, E.M.M. Winands // Surveys in Operations Research and Management Science. – 2011. – Vol. 16, № 2. – P. 67–82.

4. Takagi, H. Queuing Analysis of Polling Models / H. Takagi // ACM Computing Surveys. – 1988. – № 20 (1). – P. 5–28.

5. Levy, H. Analysis of Cyclic Polling Systems with Binomial-gated Service / H. Levy // Performance of Distributed Parallel Systems; eds. T. Hasegawa, H. Takagi, Y. Takahashi. – Amsterdam: Elsevier, 1989. – P. 127–139.

6. Altman, E. Stability, monotonicity and invariant quantities in general polling systems / E. Altman, P. Konstantopoulos, Z. Liu // Queueing Systems. – 1992. – Vol. 11. – P. 35–57.

7. Altman, E. Gated polling with stationary ergodic walking times, Markovian routing and random feedback / E. Altman // Annals of Operations Research. – 2012. – № 198. – P. 145–164.

8. Dudin, A.N. The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows / A.N. Dudin, V.I. Klimenok, V.M. Vishnevsky. – Heidelberg: Springer, 2020. – 430 p.

9. Lucantoni, D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process / D.M. Lucantoni // Communications in Statistics. Part C: Stochastic Models. – 1991. – № 7 (1). – P. 1–46.

10. Chakravarty, S. The batch Markovian arrival process: a review and future work / S. Chakravarty // Advances in Probability Theory and Stochastic Processes; eds. A. Krishnamoorthy, N. Raju, V. Ramaswami. – Branchburg: Notable, 2001. – P. 21–49.

11. Dudin, S.A. Call center operation model as a MAP/PH/N/R-N system with impatient customers / S.A. Dudin, O.S. Dudina // Problems of Information Transmission. – 2011. – № 47 (4). – P. 364–377.

12. Климов, Г.П. Стохастические системы обслуживания / Г.П. Климов. – Москва: Наука, 1966. – 244 с.

Поступила в редакцию 26.10.2021.

Информация об авторах

Дудин Александр Николаевич – д.ф.-м.н., профессор
Синюгина Юлия Васильевна – старший преподаватель

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Г.Н. Казимиров

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

DIRECT AND INVERSE THEOREMS OF APPROXIMATION THEORY FOR THE GENERALIZED MODULUS OF SMOOTHNESS OF SOME CLASS OF FUNCTIONS

G.N. Kazimirov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В статье доказывается совпадение обобщённых модулей гладкости k -го порядка, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига типа Гегенбауэра, с разными и одинаковыми сдвигами и как следствие получены прямая и обратная теоремы теории приближений алгебраическими многочленами.

Ключевые слова: наилучшее приближение алгебраическими многочленами, оператор обобщённого сдвига, обобщённый модуль гладкости.

Для цитирования: Казимиров, Г.Н. Прямая и обратная теоремы теории приближений для обобщённого модуля гладкости некоторого класса функций / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 92–94. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_92

Abstract. This article proves the coincidence of generalized moduli of smoothness of the k -s order, defined with the help of Gegenbauers generalized shift operator, with different and identical shifts and, as a consequence, direct and inverse theorems of approximation theory by algebraic polynomials are obtained.

Keywords: the best approximation by algebraic polynomials, Gegenbauers generalized shift operator, generalized modulus of smoothness.

For citation: Kazimirov, G.N. Direct and inverse theorems of approximation theory for the generalized modulus of smoothness of some class of functions / G.N. Kazimirov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 92–94. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_92 (in Russian)

Введение

Ранее были доказаны теоремы о связи между наилучшими приближениями алгебраическими многочленами и обобщёнными модулями гладкости, определяемых с помощью операторов обобщённых сдвигов, предложенных Потаповым М.К. [1]. Но в этих теоремах рассматриваются обобщённые модули гладкости, в которых обобщённые сдвиги берутся с разными шагами для каждой следующей обобщённой разности. В настоящей работе для некоторого класса функций получены прямые и обратные теоремы для обобщённых модулей, в которых каждая следующая разность берётся с одним и тем же шагом.

1 Основные определения

Будем говорить, что $f \in L_q$, $1 \leq q < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\|f\|_q = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^q dx \right)^{1/q} < +\infty,$$

а для $q = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Через $L_{q,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f , что $f(x)(1-x)^\alpha(1-x)^\beta \in L_q$ и

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1-x)^\beta\|_q.$$

Рассмотрим оператор обобщённого сдвига типа Гегенбауэра, предложенный в [1]. Положим для $v > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} T_t(f, x, v) &= \\ &= \frac{1}{\gamma(v)} \int_{-1}^1 f \left(x \cos t + y \sqrt{1-x^2} \sin t \right) (1-y^2)^{v-\frac{1}{2}} dy, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\gamma(v) = \int_{-1}^1 (1-y^2)^{v-\frac{1}{2}} dy$.

Введём также обозначения:

$$\Delta_t^1(f, x, v) = T_t(f, x, v) - f(x),$$

$$\Delta_t^k(f, x, v) = \Delta_t^1(\Delta_t^{k-1}(f, x, v), x, v), \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$\Delta_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x, v) = \Delta_{t_k}^1(\Delta_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1}(f, x, v), x, v),$$

$$k = 2, 3, \dots,$$

$$\tilde{\omega}_k(f, \delta)_{q, \alpha, \beta} = \sup_{|t_i| \leq \delta, i=1, \dots, k} \|\Delta_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x)\|_{q, \alpha, \beta},$$

$$\omega_k(f, \delta, v)_{q, \alpha, \beta} = \sup_{|t| \leq \delta} \|\Delta_t^k(f, x, v)\|_{q, \alpha, \beta}.$$

Обозначим через $\Lambda_{q, \alpha, \beta}^1$ класс функций $f \in L_{q, \alpha, \beta}$ таких, что $\Delta_t^1(f, x, v) = h(x)g(t)$ $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall t \in [-\pi, \pi]$, где $h \in L_{q, \alpha, \beta}$ и $\sup_{|t| \leq \pi} |g(t)| < +\infty$. Будем говорить, что $f \in \Lambda_{q, \alpha, \beta}^k$ ($k = 2, 3, \dots$), если $\Delta_t^1(f, x, v) = h(x)g(t)$, где $h \in \Lambda_{q, \alpha, \beta}^{k-1}$ и функция g одна и та же во всех классах $\Lambda_{q, \alpha, \beta}^l$ ($l = 1, 2, 3, \dots$).

Через $E_n(f)_{q, \alpha, \beta}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{q, \alpha, \beta}$ при помощи алгебраических многочленов P_n степени не выше, чем $n - 1$, в метрике $L_{q, \alpha, \beta}$, т. е.

$$E_n(f)_{q, \alpha, \beta} = \inf_{P_n \in P} \|P_n(x) - f(x)\|_{q, \alpha, \beta},$$

где P – множество алгебраических многочленов степени не выше, чем $n - 1$, $n = 1, 2, \dots$.

2 Вспомогательные утверждения

Лемма 2.1. Пусть числа q, α, β такие, что

$1 \leq q \leq \infty$, $-\frac{1}{2} < \alpha \leq v$ и $-\frac{1}{2} < \beta \leq v$ при $q = 1$,
 $-\frac{1}{2q} < \alpha < v + \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$ и $-\frac{1}{2q} < \beta < v + \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$ при
 $1 < q < \infty$, $0 \leq \alpha < v + \frac{1}{2}$ и $0 \leq \beta < v + \frac{1}{2}$ при
 $q = \infty$. Тогда, если $f \in L_{q, \alpha, \beta}$ то $T_t(f, x, v) \in L_{q, \alpha, \beta}$
 и $\|T_t(f, x, v)\|_{q, \alpha, \beta} \leq C \|f\|_{q, \alpha, \beta}$, где постоянная C не
 зависит от f и t .

Лемма 2.1 доказана в [1, с. 235–236].

3 Основные результаты

Теорема 3.1 Пусть даны числа q, v, k такие, что $1 \leq q \leq \infty$, $v > -\frac{1}{2}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Пусть числа α и β выбраны по правилу: $-\frac{1}{2} < \alpha \leq v$ и $-\frac{1}{2} < \beta \leq v$ при $q = 1$, $-\frac{1}{2q} < \alpha < v + \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$ и $-\frac{1}{2q} < \beta < v + \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$ при $1 < q < \infty$, $0 \leq \alpha < v + \frac{1}{2}$ и $0 \leq \beta < v + \frac{1}{2}$ при $q = \infty$. Тогда для $f \in \Lambda_{q, \alpha, \beta}^k$ справедливо равенство:

$$\tilde{\omega}_k(f, \delta)_{q, \alpha, \beta} = \omega_k(f, \delta)_{q, \alpha, \beta}.$$

Доказательство: Заметим, что

$$T_{-t}(f, x) = T_t(f, x).$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $t \in [0, \pi]$. В силу Леммы 2.1 числа $\tilde{\omega}_k(f, \delta)_{q, \alpha, \beta}$ и $\omega_k(f, \delta)_{q, \alpha, \beta}$ существуют. В силу условия

$$\Delta_t^1(f, x) = h_1(x)g(t),$$

$$\Delta_t^k(f, x) = h_1(x) \cdot \dots \cdot h_k(x)(g(t))^k,$$

$$\Delta_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x) = h_1(x) \cdot \dots \cdot h_k(x)g(t_1) \cdot \dots \cdot g(t_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_k(f, \delta)_{q, \alpha, \beta} &= \\ &= \sup_{0 \leq t_i \leq \delta, i=1, \dots, k} |g(t_1) - 1| \cdot \dots \cdot |g(t_k) - 1| \|f\|_{q, \alpha, \beta}, \\ \omega_k(f, \delta)_{q, \alpha, \beta} &= \sup_{0 \leq t \leq \delta} |g(t) - 1|^k \|f\|_{q, \alpha, \beta}. \end{aligned}$$

Поскольку для $a \geq 0$

$$\sup_{a \leq z \leq b} z^k = \sup_{a \leq z_i \leq b, i=1, \dots, k} z_1 \cdot \dots \cdot z_k,$$

то теорема доказана. $\square$

Примеры функций, принадлежащих классу $\Lambda_{q, \alpha, \beta}^k$:

1) полиномы Якоби [3, с. 469];

2) функция $f(x) = \sin(\arccos x)$, которая не является многочленом.

Действительно. Сделаем в (1.1) замену $x = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $\theta = \arccos x$, $y = \cos \gamma$. Тогда, используя формулы сферической тригонометрии, получим

$$\begin{aligned} T_t(f, \cos \theta, v) &= \frac{1}{\gamma(v)} \int_0^\pi f(\cos c) \sin^{2v} \gamma d\gamma = \\ &= T_t(f, \cos \theta, v) = \frac{1}{\gamma(v)} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \sin^{2v+1} \gamma d\gamma = \\ &= f(x) \frac{1}{\gamma(v)} \int_0^\pi \frac{\sin^{2v+1} \gamma}{\sin \alpha} d\gamma. \end{aligned}$$

Теорема 3.2. Пусть даны числа q, v, k та-

кие, что $1 \leq q \leq \infty$, $v > -\frac{1}{2}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Пусть

числа α и β выбраны по правилу: $-\frac{1}{2} < \alpha \leq v$ и $-\frac{1}{2} < \beta \leq v$ при $q = 1$, $-\frac{1}{2q} < \alpha < v + \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$ и $-\frac{1}{2q} < \beta < v + \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$ при $1 < q < \infty$, $0 \leq \alpha < v + \frac{1}{2}$ и $0 \leq \beta < v + \frac{1}{2}$ при $q = \infty$. Тогда для $f \in \Lambda_{q, \alpha, \beta}^k$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} C_1 E_n(f)_{q, \alpha, \beta} &\leq \omega_k \left(f, \frac{1}{n}, v \right)_{q, \alpha, \beta} \leq \\ &\leq \frac{C_2}{n^{2r}} \sum_{m=1}^n m^{2r-1} E_m(f)_{q, \alpha, \beta}, \end{aligned}$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n ($n=1, 2, 3, \dots$).

Доказательство: Следует из теоремы 3.1 и ранее полученного результата в [2, с. 37–38].

Заключение

В статье доказано совпадение обобщённых модулей гладкости, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига вида (1.1), в которых обобщённые разности рассматриваются с разными и одинаковыми шагами для функций из класса $\Lambda_{q,\alpha,\beta}^k$. Как следствие, получены прямая и обратная теоремы о приближении алгебраическими многочленами непериодических функций из этого класса. Ранее аналогичный результат был получен в работе [4] для оператора обобщённого сдвига

$$T_t(f, x) = \frac{1}{2} \left[f \left(x \cos t + \sqrt{1-x^2} \sin t \right) + f \left(x \cos t - \sqrt{1-x^2} \sin t \right) \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов, М.К. Об условиях совпадения некоторых классов функций / М.К. Потапов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1981. – Вып. 6. – С. 223–238.
2. Казимиров, Г.Н. О теоремах Джексона для k -го обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров. – 40 с. – Деп. в ВИНТИ РАН 27.12.94, № 3054-В94. – С. 1–40.
3. Виленкин, Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. – Москва: «Наука», 1965.
4. Казимиров, Г.Н. О совпадении обобщённых модулей гладкости на некотором классе функций / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 69–70.

Поступила в редакцию 28.06.2021.

Информация об авторах

Казимиров Григорий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент

О СТРОГО 2-МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

М.Н. Коновалова¹, В.С. Монахов², И.Л. Сохор³¹Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Брянск²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины³Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

ON STRICTLY 2-MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

M.N. Konovalova¹, V.S. Monakhov², I.L. Sokhor³¹Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Bryansk²Francisk Skorina Gomel State University³Brest State A.S. Pushkin University

Аннотация. Приводятся примеры конечных разрешимых и простых групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной. Доказывается, что если в группе G существует строго 2-максимальная подгруппа порядка 2, то группа является сверхразрешимой группой порядка $2pq$, где p и q – простые числа, не обязательно различные, либо G изоморфна знакопеременной группе A_4 . Устанавливается строение конечной группы, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является холловой. Для наследственной насыщенной решеточной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы, и группы $G \notin \mathfrak{F}$ доказывается, что требование $\mathfrak{F}$ -субнормальности всех строго 2-максимальных подгрупп совпадает с требованием субнормальности всех 2-максимальных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, 2-максимальная подгруппа, строго 2-максимальная подгруппа, холлова подгруппа, решеточная формация.

Для цитирования: Коновалова, М.Н. О строго 2-максимальных подгруппах конечных групп / М.Н. Коновалова, В.С. Монахов, И.Л. Сохор // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 95–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_95

Abstract. We give examples of finite soluble and simple groups in which every 2-maximal subgroup is strictly 2-maximal. We prove that if in a group G there is a strictly 2-maximal subgroup of order 2, then G is a supersoluble group of order $2pq$, where p and q are primes, not necessarily distinct, or G is isomorphic to the alternating group A_4 . We establish the structure of a finite group in which every 2-maximal subgroup is a Hall subgroup. We prove that the requirement of $\mathfrak{F}$ -subnormality of all strictly 2-maximal subgroups coincides with the requirement of subnormality of all 2-maximal subgroups of a group G for a subgroup-closed saturated lattice formation $\mathfrak{F}$ containing all nilpotent groups and $G \notin \mathfrak{F}$.

Keywords: finite group, 2-maximal subgroup, strictly 2-maximal subgroup, Hall subgroup, lattice formation.

For citation: Konovalova, M.N. On strictly 2-maximal subgroups of finite groups / M.N. Konovalova, V.S. Monakhov, I.L. Sokhor // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 95–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_95 (in Russian)

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Запись $H \leq G$ ($H < G$) означает, что H – подгруппа (собственная подгруппа) группы G . Подгруппа M группы G называется максимальной подгруппой, обозначается $M < G$, если $M < G$ и из включений $M \leq H \leq G$ следует, что $M = H$ или $H = G$.

Пусть G – группа и H – подгруппа группы G . Будем использовать обозначение:

$$\text{Max}(G, H) = \{M < G \mid H \leq M\}.$$

Если $H = 1$ – единичная подгруппа группы G , то вместо $\text{Max}(G, 1)$ пишем $\text{Max}(G)$, где $\text{Max}(G)$ – множество всех максимальных подгрупп группы G . Следует отметить, что $\text{Max}(G) = \emptyset$ в точности тогда, когда $G = 1$.

Подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой группы G , если существует подгруппа $M \in \text{Max}(G, H)$ такая, что $H < M$; n -максимальной подгруппой группы G для $n \geq 3$, если существует подгруппа $M \in \text{Max}(G, H)$ такая, что $H = (n-1)$ -максимальная подгруппа в M .

Существуют группы, в которых одна и та же подгруппа одновременно является 2-максимальной и n -максимальной подгруппой для $n \geq 3$. Например, в группе $L_2(8)$ [1, IdGroup(504,156)] подгруппа C_2 является 2-максимальной, 3-максимальной и 4-максимальной подгруппой:

$$C_2 < D_{14} < L_2(8),$$

$$C_2 < S_3 < D_{18} < L_2(8),$$

$$C_2 < C_2^2 < C_2^3 < C_2^3 \rtimes C_7 < L_2(8).$$

Монахов В.С. и Княгина В.Н. [2, пример 3] привели пример групп, в которых для любого $n \geq 3$ некоторая 2-максимальная подгруппа является n -максимальной.

Вместе с тем, существуют ситуации, когда 2-максимальная подгруппа остается 2-максимальной в любых цепочках подгрупп. Подгруппа H группы G называется строго 2-максимальной подгруппой группы G , если $H \leq M$ для всех $M \in \text{Max}(G, H)$. Ясно, что строго 2-максимальная подгруппа группы G 2-максимальна в G и не является n -максимальной в G ни для какого $n \geq 3$.

Через $\text{Max}_2(G)$ будем обозначать множество всех 2-максимальных подгрупп группы G , через $\text{Max}_2^*(G)$ – множество всех строго 2-максимальных подгрупп группы G . Если

$$H \in \text{Max}_2(G) \setminus \text{Max}_2^*(G),$$

то согласно [3] подгруппа H называется слабо 2-максимальной подгруппой группы G .

Ясно, что $\text{Max}_2(G) = \emptyset$ в точности тогда, когда $G = 1$ или $|G|$ – простое число. Из леммы об индексах следует, что 2-максимальная подгруппа наименьшего индекса будет строго 2-максимальной, см. лемму 2.1. Поэтому $\text{Max}_2^*(G) \neq \emptyset$ для любой группы $G \neq 1$ непростого порядка.

Второй автор данной работы сформулировал следующую проблему: «Каковы главные факторы конечной группы, в которой каждая 2-максимальная подгруппа не является n -максимальной для любого $n \geq 3$?» [4, 19.54]. Эта проблема рассматривалась в [3], [5], [6].

Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G не является n -максимальной для $n \geq 3$, то $\text{Max}_2(G) = \text{Max}_2^*(G)$, т. е. каждая 2-максимальная подгруппа группы G строго 2-максимальна. Поэтому указанная проблема может быть сформулирована следующим образом: «Каковы главные факторы конечной группы, в которой $\text{Max}_2(G) = \text{Max}_2^*(G)$?»

В разделе 2 мы приводим примеры групп, в которых $\text{Max}_2(G) = \text{Max}_2^*(G)$, и некоторые наблюдения о строго 2-максимальных подгруппах.

В разделе 3 мы рассматриваем свойства групп с 2-максимальной подгруппой порядка 2. Такими группами являются, например, группы $L_2(8)$ и $L_2(13)$. В случае, когда в группе существует строго 2-максимальная подгруппа порядка 2, группа является сверхразрешимой группой порядка $4p$, $2pq$ или $2p^2$, где p и q – различные простые числа, либо изоморфна A_4 , см. теорему 3.1.

В разделе 4 мы изучаем группу, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является холловой, см. теорему 4.1. Опираясь на результаты Масловой Н.В. и Ревина Д.О. [7], мы получаем

разрешимость группы, а затем применяем описание из [8].

Ю.В. Луценко и А.Н. Скиба [9] показали, что в ненильпотентной группе с субнормальными 2-максимальными подгруппами все собственные подгруппы абелевы. Этот результат остается верным, если субнормальными являются строго 2-максимальные подгруппы [10]. Группы с формационно субнормальными подгруппами исследовались в [11]–[14]. В разделе 5 мы рассматриваем группы с формационно субнормальными строго 2-максимальными подгруппами в случае, когда формация решеточная. В этой ситуации требование $\mathfrak{F}$ -субнормальности всех строго 2-максимальных подгрупп совпадает с требованием субнормальности всех 2-максимальных подгрупп, см. теорему 5.1.

1 Вспомогательные результаты

Лемма 1.1 [15, теорема 1.39]. Пусть $H \leq K \leq G$ и G – группа. Если T – правая трансверсаль H в K , а S – правая трансверсаль K в G , то TS – правая трансверсаль H в G . В частности, $|G : H| = |G : K| |K : H|$.

Лемма 1.2 [16, лемма 4.1], [17, II.3.10]. Пусть A – неприводимая абелева группа автоморфизмов группы B , $|B| = p^m > 1$. Тогда A – циклическая группа и m – наименьшее натуральное число такое, что $|A|$ делит $p^m - 1$.

Лемма 1.3 [17, IV.2.6]. Пусть p – силовская p -подгруппа группы G такая, что $P \leq Z(N_G(P))$ (т. е. $C_G(P) = N_G(P)$ и поэтому P абелева). Тогда существует нормальная подгруппа N группы G такая, что $G/N \cong P$.

Лемма 1.4 [17, IV.2.8]. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G . Если группа G имеет циклическую силовскую p -подгруппу P , то существует нормальная подгруппа N группы G такая, что $G/N \cong P$.

Лемма 1.5 [17, II.8.17]. Пусть G – группа порядка 12 или 24. Если G содержит элементарную абелеву нормальную подгруппу порядка 4 и $C_G(N) = N$, то либо $G \cong A_4$, либо $G \cong S_4$.

Лемма 1.6 [17, IV.7.4]. Пусть H – максимальная подгруппа группы G . Если H нильпотентна и $Z(P) \leq P'$, где p – силовская 2-подгруппа из H , то группа G разрешима.

Лемма 1.7. Если в группе M существует максимальная подгруппа K порядка 2, то $|M| = 2p$, p – простое, $p \geq 2$.

Доказательство. Если K нормальна в M , то $|M| = 2p$, p – простое, $p \geq 2$. Пусть K не нормальна в M . Тогда K – силовская 2-подгруппа группы M , $M = N \rtimes K$ и по лемме 1.4 $N \leq M$. Поскольку K действует неприводимо на N , то $|N| = p$ по лемме 1.2. $\square$

Лемма 1.8. Если G – несверхразрешимая группа порядка $4p$, p – простое, то $G \cong A_4$.

Доказательство. Пусть p и q – силовские p - и 2 -подгруппы группы G . Если $Q = N_G(Q)$, то p нормальна в G по лемме 1.3 и G сверхразрешима [17, VI.9], противоречие с условием. Поэтому Q нормальна в G . Если в G существует нормальная подгруппа Q_1 порядка 2 , то $|G/Q_1| = 2p$ и G сверхразрешима [17, VI.9], противоречие с условием. Поэтому Q – минимальная нормальная в G подгруппа, $Q = C_G(Q)$ и P действует неприводимо на Q . По лемме 1.2 $p = 3$ и $G \cong A_4$ по лемме 1.5. $\square$

2 О группах, в которых $\text{Max}_2(G) = \text{Max}_2^*(G)$

Лемма 2.1. Если G – неединичная группа не простого порядка, то $\text{Max}_2^*(G) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть G – неединичная группа не простого порядка и H – ее 2-максимальная подгруппа наименьшего индекса среди всех 2-максимальных подгрупп группы G . Предположим, что H не является строго 2-максимальной подгруппой. Тогда существует подгруппа $M \in \text{Max}(G, H)$ такая, что H не является максимальной подгруппой в M . Значит, в M существует подгруппа K такая, что $H < K < M$. По лемме 1.1

$$|G:H| = |G:K| |K:H|, \\ |K:H| \neq 1, |G:K| < |G:H|.$$

Таким образом, K – 2-максимальная подгруппа группы G и $|G:K| < |G:H|$, что противоречит выбору H . Отсюда заключаем, что H является строго 2-максимальной подгруппой в G . $\square$

Лемма 2.2. Пусть H – 2-максимальная подгруппа группы G , $H < M < G$. Если индексы $|G:M|$ и $|M:H|$ – простые числа, то H – строго 2-максимальная подгруппа группы G . В частности, если G – сверхразрешимая группа, то

$$\text{Max}_2(G) = \text{Max}_2^*(G).$$

Доказательство. Предположим, что H – 2-максимальная подгруппа группы G , $H < M < G$ и индексы $|G:M|$ и $|M:H|$ – простые числа. Допустим, что H не является строго 2-максимальной подгруппой группы G . Тогда в G есть подгруппа K такая, что $H < K < G$ и H 2-максимальна в K . Следовательно, существует подгруппа L такая, что $H < L < K < G$. По лемме 1.1

$$|G:H| = |G:K| |K:L| |L:H|, \\ |G:K| \neq 1, |K:L| \neq 1, |L:H| \neq 1,$$

значит, $|G:H|$ делится на три простых числа, противоречие. Таким образом, H – строго 2-максимальная подгруппа группы G .

Пусть $H < M < G$ и пусть G – сверхразрешимая группа. По теореме Хупперта [17, VI.9.5], $|G:H|$ делится в точности на два простых числа,

не обязательно различных. Если $H < X < G$, то $|X:H|$ – простое число и H – максимальная подгруппа группы X . Поскольку X – произвольная максимальная подгруппа в G , содержащая H , то H – строго 2-максимальная подгруппа группы G . $\square$

Приведем примеры несверхразрешимых групп, в которых $\text{Max}_2(G) = \text{Max}_2^*(G)$.

Пример 2.1. Для группы $C_3^2 \rtimes C_8$ из [1, IdGroup(72,39)], [20] следует:

$$\text{Max}(C_3^2 \rtimes C_8) = \{C_8, C_3^2 \rtimes C_4\}, \\ \text{Max}_2(C_3^2 \rtimes C_8) = \{C_4, C_3 \rtimes S_3\} = \text{Max}_2^*(C_3^2 \rtimes C_8).$$

Пример 2.2. Для группы $U_3(2)$ из [1, IdGroup(72,41)], [20] следует:

$$\text{Max}(U_3(2)) = \{Q_8, C_3^2 \rtimes C_4\}, \\ \text{Max}_2(U_3(2)) = \{C_4, C_3 \rtimes S_3\} = \text{Max}_2^*(U_3(2)).$$

Пример 2.3. Для группы $L_2(17)$ из [1, [19, p. 9], [18] следует:

$$\text{Max}(L_2(17)) = \{C_{17} \rtimes C_8, S_4, D_{18}, D_{16}\}, \\ \text{Max}_2(L_2(17)) = \{C_{17} \rtimes C_4, C_8, A_4, D_8, S_3, C_9\} = \\ = \text{Max}_2^*(L_2(17)).$$

Пример 2.4. Для группы $U_3(3)$ из [1, [18], [19, p. 9] следует:

$$\text{Max}(U_3(3)) = \\ = \{(C_3^2 \rtimes C_3) \rtimes C_8, (C_4^2 \rtimes C_3) \rtimes C_2, SL_2(3) \rtimes C_4, L_3(2)\}, \\ \text{Max}_2(U_3(3)) = \\ = \{(C_3^2 \rtimes C_3) \rtimes C_4, ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_3, \\ C_4^2 \rtimes C_2, C_4^2 \rtimes C_3, C_7 \rtimes C_3, C_3 \rtimes C_8, S_4\} = \\ = \text{Max}_2^*(U_3(3)).$$

3 Группы с 2-максимальной подгруппой порядка 2

Для неединичной группы G рассмотрим цепочку подгрупп

$$1 = G_i < G_{i-1} < \dots < G_1 < G_0 = G,$$

в которой каждая G_i является максимальной подгруппой G_{i-1} . Число подгрупп в такой цепочке называется ее длиной. Длина группы G , обозначаемая через $l(G)$, есть максимальная длина таких цепочек. Глубина группы G , обозначаемая через $\lambda(G)$, есть минимальная длина таких цепочек. Если $1 \leq \lambda(G) \leq 2$, то G – группа простого порядка или группа с максимальной подгруппой простого порядка.

Предположим, что в группе G есть 2-максимальная подгруппа K простого порядка. Тогда $1 < K < M < G$ и $\lambda(G) = 3$.

Лемма 3.1 [21, теорема 1]. Группа G имеет глубину 3 тогда и только тогда, когда либо G – разрешима и ее главный ряд имеет длину 3, либо G – одна из простых групп таблицы 3.1.

Таблица 3.1. – Простые группы G

G	Условия
A_p	p и $(p-1)/2$ простые и $p \notin \{7, 11, 23\}$
$L_2(q)$	$(q+1)/(2, q-1)$ или $(q-1)/(2, q-1)$ простые, $q \neq 9$, или q простое и $q \equiv \pm 3, \pm 13 \pmod{40}$, или $q = 3^k$ с простым $k \geq 3$;
$L_n^\epsilon(q)$	n и $\frac{q^n - \epsilon}{(q - \epsilon)(n, q - \epsilon)}$ простые, $n \geq 3$ и $(n, q, \epsilon) \neq (3, 4, +), (3, 3, -), (3, 5, -), (5, 2, -)$
${}^2B_2(q)$	$q-1$ простое
$M_{23}, \mathbb{B}$	

Из леммы 3.1 вытекает следующая лемма.

Лемма 3.2. *Группа G имеет 2-максимальную подгруппу K порядка 2, $K < M < G$, тогда и только тогда, когда либо G разрешима и ее главный ряд имеет длину 3, либо G – простая группа и справедливо одно из следующих утверждений:*

- (1) $G \cong L_2(2^k)$, $M \cong D_{2(2^k \pm 1)}$, $2^k \pm 1$ – простое;
- (2) $G \cong L_2(q)$, $M \cong D_{q \pm 1}$, $(q \pm 1)/2$ – простое, $q \neq 9$;
- (3) $G \cong {}^2B_2(q)$, $M \cong D_{2(q-1)}$, $q-1$ – простое.

Пример 3.1. В знакопеременной группе A_5 степени 5 $[1, \text{IdGroup}(60, 5)]$ подгруппы порядка 3 и 5 являются строго 2-максимальными подгруппами. Подгруппа порядка 2 является слабо 2-максимальной подгруппой.

Пример 3.2. В знакопеременной группе $A_4 = C_2^2 \rtimes C_3$ степени 4 $[1, \text{IdGroup}(12, 3)]$ подгруппа порядка 2 является строго 2-максимальной подгруппой.

Теорема 3.1. *Если в группе G существует строго 2-максимальная подгруппа порядка 2, то G является сверхразрешимой группой порядка $2pq$, где p и q – простые числа, не обязательно различные, либо G изоморфна знакопеременной группе степени 4.*

Доказательство. Зафиксируем в группе G строго 2-максимальную подгруппу K порядка 2. Если G – 2-группа, то $|G| = 8$. Пусть G – не 2-группа. Если K – силовская 2-подгруппа группы G , то G 2-нильпотентна по лемме 1.4. Если $K < G_2$, где G_2 – силовская 2-подгруппа группы G , то G_2 – максимальная подгруппа группы G и $|G_2| = 4$. По лемме 1.6 группа G разрешима.

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G , содержащая K . По условию подгруппа K максимальна в M . Согласно лемме 1.7 либо $|M| = 4$, либо $|M| = 2p$, p – простое нечетное число.

Пусть $|M| = 4$. Если M нормальна в G , то $|G| = 4r$, r – простое нечетное. Если M не нормальна в G , то $M = N_G(M)$ и по лемме 1.3 существует нормальная в G подгруппа Q такая, что $G = Q \rtimes M$. Подгруппа $Q \rtimes K$ максимальна в G . По условию подгруппа K будет максимальной в $Q \rtimes K$, поэтому $|Q| = q$ по лемме 1.7 и $|G| = 4q$, q – нечетное простое.

Пусть $|M| = 2p$, p – простое нечетное число. Если M нормальна в G , то $|G| = 2p^2$ или $|G| = 2pr$, r – простое, $r \neq p$. Пусть M не нормальна в G , тогда $M = N_G(M)$ и $|G : M| = t^a > 2$, t – простое нечетное. Если $p \neq t$, то KG_t – максимальная в G подгруппа, где G_t – силовская t -подгруппа группы G . По условию подгруппа K максимальна в KG_t и $|G| = 2pt$ по лемме 1.7. Пусть $p = r$. Тогда P нормальна в G , где P – силовская p -подгруппа из M . В фактор-группе G/P подгруппа M/P максимальна и имеет порядок 2, поэтому $|G/P : M/P| = p$ по лемме 1.7 и $|G| = 2p^2$.

Группы порядков $2pq$ и $2p^2$ сверхразрешимы. Согласно лемме 2.2 в сверхразрешимой группе любая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной. Поэтому любая группа порядка $2pq$, $2p^2$ и сверхразрешимые группы порядка $4p$ удовлетворяют условию теоремы. Несверхразрешимая группа порядка $4p$ изоморфна A_4 по лемме 1.8, эта группа также удовлетворяет условию теоремы ввиду примера 3.2. $\square$

Пример 3.3. В простых группах $L_2(8)$ и $L_2(13)$ есть максимальная подгруппа, изоморфная D_{14} , поэтому подгруппа порядка 2 является 2-максимальной подгруппой в этих группах. В простой группе $L_2(23)$ есть максимальная подгруппа D_{22} , поэтому подгруппа порядка 2 в группе $L_2(23)$ является 2-максимальной подгруппой. Поэтому в теореме 3.1 слово «строго» убрать нельзя.

4 Группы с холловыми 2-максимальными подгруппами

Напомним, что подгруппа H группы G называется холловой подгруппой, если $|H|$ и $|G : H|$ взаимно просты. Зафиксируем следующие обозначения: $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G ; G_p – силовская p -подгруппа группы G ;

$$\sigma(G) = \{r \in \pi(G) : |G_r| = r\};$$

$$\tau(G) = \{r \in \pi(G) : |G_r| > r\}.$$

Ясно, что $\pi(G) = \sigma(G) \cup \tau(G)$ и $\sigma(G) \cap \tau(G) = \emptyset$. Через $G_{\sigma(G)}$ и $G_{\tau(G)}$ обозначаются $\sigma(G)$ -холлова и $\tau(G)$ -холлова подгруппы группы G .

Говорят, что группа G имеет силовскую башню, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам.

Подгруппой Гашюца группы G называется подгруппа W , удовлетворяющая следующим двум условиям:

- (1) W сверхразрешима;
- (2) если $W \leq A < B \leq G$, то $|B : A|$ – не простое число.

В любой разрешимой группе подгруппы Гашюца существуют и сопряжены [15, теорема 5.29].

Сверхразрешимым корадикалом группы G называется наименьшая нормальная в G подгруппа, фактор-группа по которой сверхразрешима.

Теорема 4.1. Пусть G – непримарная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является холловой подгруппой. Если G – сверхразрешимая группа, то ее порядок свободен от квадратов, т. е. $\pi(G) = \sigma(G)$. Пусть G – несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) группа G имеет силовскую башню и каждая максимальная в G подгруппа является холловой подгруппой;
- (2) $|\sigma(G)| \geq 2$ и $G_{\sigma(G)} \leq W$, где W – подгруппа Гашюца группы G ;
- (3) $|\tau(G)| \geq 1$ и $G_{\tau(G)}$ является сверхразрешимым корадикалом группы G .

Доказательство теоремы 4.1 осуществляется по следующей схеме. Вначале опираясь на результаты Н.В. Масловой и Д.О. Ревина [7], мы получаем разрешимость группы, затем доказываем утверждение (1) теоремы и применяем описание групп из [8].

Из теоремы 4.1 вытекает, что бипримарные группы с холловыми 2-максимальными подгруппами имеют порядок pq . Трипримарные группы могут быть несверхразрешимыми.

Пример 4.1. В полной линейной группе $GL_2(29)$ есть циклическая подгруппа C_{15} порядка 15, которая действует неприводимо на элементарной абелевой группе C_{29}^2 порядка 29^2 . В полупрямом произведении $C_{29}^2 \rtimes C_{15}$ все максимальные подгруппы и все 2-максимальные подгруппы холловы.

5 Группы с формационными ограничениями на 2-максимальные подгруппы

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, G – группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G , фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы G .

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G , если $H = G$ или существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для всех i [16, II.8].

В случае, когда $H < G$ и H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G , говорят, что H $\mathfrak{F}$ -нормальна в G . В любой группе $\mathfrak{N}$ -субнормальная подгруппа субнормальна, а в разрешимых группах верно и обратное утверждение: субнормальная подгруппа разрешимой группы $\mathfrak{N}$ -субнормальна, см. [16], [22, лемма 1.11].

Формация $\mathfrak{F}$ называется решеточной, если в любой группе множество всех ее $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. Решеточные формации описаны в работе [23].

Теорема 5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) группа G содержит максимальную ненормальную подгруппу M и каждая максимальная в M подгруппа субнормальна в G ;
- (2) каждая 2-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G ;
- (3) каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G ;
- (4) группа G содержит максимальную не $\mathfrak{F}$ -нормальную подгруппу M и каждая максимальная в M подгруппа $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G ;
- (5) каждая 2-максимальная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G ;
- (6) каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G ;
- (7) все собственные подгруппы в группе G абелевы.

Доказательство теоремы 5.1 осуществляется по следующей схеме. Используя результаты работ [9], [10], [25] вначале проверяем, что утверждения (1), (2), (3) и (7) эквивалентны. Затем доказываем, что для решеточной формации утверждения (4), (5), (6) и (7) эквивалентны.

Отметим, что частными случаями доказанной теоремы являются результаты работ [9], [10], [24] и [25].

ЛИТЕРАТУРА

1. GAP – Groups, Algorithms, Programming: a System for Computational Discrete Algebra [Electronic resource]. – Ver. 4.11.1 released on 02 March 2021. – Mode of access: <http://www.gap-system.org>. – Date of access: 20.04.2021.
2. Monakhov, V.S. Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniagina // Ricerche Mat. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.
3. Meng, H. Weak second maximal subgroups in solvable groups / H. Meng, X. Guo // J. Algebra. – 2019. – Vol. 517. – P. 112–118.
4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / 19-е изд. доп. – Новосибирск:

Институт математики Сибирского отделения РАН, 2018. – 248 с.

5. Meng, H. Overgroups of weak second maximal subgroups / H. Meng, X. Guo // *Bull. Aust. Math. Soc.* – 2019. – Vol. 99. – P. 83–88.

6. Чжан, Ц. О вторых максимальных подгруппах конечных групп / Ц. Чжан, Ч. Гао, Л. Мяо // *Сибирский математический журнал.* – 2021. – Vol. 62. – С. 221–225.

7. Маслова, Н.В. Конечные группы, все максимальные подгруппы которых холловы / Н.В. Маслова, Д.О. Ревин // *Математические труды.* – 2012. – Т. 22, № 2. – С. 105–126.

8. Монахов, В.С. Конечные π -разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами / В.С. Монахов // *Математические заметки.* – 2008. – Т. 84, № 3. – С. 390–394.

9. Луценко, Ю.В. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // *Математические заметки.* – 2012. – Т. 91, № 5. – С. 730–740.

10. Горбатова, Ю.В. Конечные группы с субнормальными строго 2- или 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Горбатова, М.Н. Коновалова // *Вестник Омского университета.* – 2019. – Т. 24, № 3. – С. 4–12.

11. Kovaleva, V.A. Finite soluble groups with all n -maximal subgroups $\mathfrak{F}$ -subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // *J. Group Theory.* – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 273–290.

12. Монахов, В.С. О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами / В.С. Монахов // *Математические заметки.* – 2019. – Т. 105, № 2. – С. 269–277.

13. Коновалова, М.Н. Конечные группы с $\mathfrak{F}$ -субнормальными подгруппами / М.Н. Коновалова // *Математические заметки.* – 2020. – Vol. 108, № 2. – С. 215–223.

14. Monakhov, V.S. On groups with formation subnormal strictly 2-maximal subgroups / V.S. Monakhov, M.N. Konovalova // *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal.* – Jan. 2021. – Vol. 73, № 1. – P. 107–116.

15. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

16. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 271 с.

17. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967. – 793 p.

18. Connor, T. An atlas of subgroup lattices of finite almost simple groups / T. Connor, D. Leemans // *Ars Math. Contemp.* – 2015. – Vol. 8. – P. 259–266.

19. *Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups* / J.H. Conway [et al.] – Oxford: Clarendon Press. – 1985. – 286 p.

20. Dokchitser, T. GroupNames [Electronic resource] / T. Dokchitser. – Mode of access: <http://groupnames.org>. – Date of access: 30.04.2021.

21. Burness, T.C. On the length and depth of finite groups / T.C. Burness, M.W. Liebeck, A. Shalev // *Proc. London Math. Soc.* – 2019. – № 119 (3). – P. 1464–1492.

22. Монахов, В.С. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$ -субнормальными подгруппами / В.С. Монахов // *Сибирский математический журнал.* – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.

23. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: сб. науч. ст.* – Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1993. – С. 27–54.

24. Коновалова, М.Н. Конечные группы с некоторыми формационно субнормальными подгруппами / М.Н. Коновалова, И.Л. Сохор // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2019. – № 4 (41). – С. 51–54.

25. Коновалова, М.Н. Конечные группы с некоторыми субнормальными 2-максимальными подгруппами / М.Н. Коновалова, В.С. Монахов // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2020. – № 2 (43). – С. 75–79.

Поступила в редакцию 28.06.2021.

Информация об авторах

Коновалова Марина Николаевна – аспирантка
Монахов Виктор Степанович – д.ф.-м. н., профессор
Сохор Ирина Леонидовна – к.ф.-м.н., доцент

ОБ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ ТОТАЛЬНО ω -КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.П. Лось, В.Г. Сафонов

Белорусский государственный университет, Минск

ON ONE-GENERATED AND BOUNDED TOTALLY ω -COMPOSITION FORMATIONS OF FINITE GROUPS

I.P. Los, V.G. Safonov

Belarusian State University, Minsk

Аннотация. Все рассматриваемые группы конечны. Пусть G – группа. Тогда через $c_\omega^{\text{form}}(G)$ обозначают пересечение всех totally ω -composition formations, содержащих группу G . Формацию $c_\omega^{\text{form}}(G)$ называют totally ω -composition formation, порожденной группой G или one-generated totally ω -composition formation. Totally ω -composition formation $\mathfrak{F}$ называется bounded, если она является подформацией некоторой one-generated totally ω -composition formation, т. е. $\mathfrak{F} \subseteq c_\omega^{\text{form}}(G)$ для некоторой группы G . В работе получены критерии one-generation (boundedness) totally ω -composition formation.

Ключевые слова: formation of finite groups, ω -composition formation, one-generated formation, bounded formation, totally ω -composition formation.

Для цитирования: Лось, И.П. Об однопорозжденных и ограниченных totally ω -composition formations конечных групп / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 101–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_101

Abstract. All considered groups are finite. Let G be a group. Then $c_\omega^{\text{form}}(G)$ denotes the intersection of all totally ω -composition formations containing G . The formation $c_\omega^{\text{form}}(G)$ is called a totally ω -composition formation generated by G or a one-generated totally ω -composition formation. A totally ω -composition formation $\mathfrak{F}$ is called a bounded, if $\mathfrak{F}$ is a subformation of some one-generated totally ω -composition formation, that is, $\mathfrak{F} \subseteq c_\omega^{\text{form}}(G)$ for some group G . In this paper, criteria for the one-generation (boundedness) of a totally ω -composition formation are obtained.

Keywords: formation of finite groups, ω -composition formation, one-generated formation, bounded formation, totally ω -composition formation.

For citation: Los, I.P. On one-generated and bounded totally ω -composition formations of finite groups / I.P. Los, V.G. Safonov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 101–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_101 (in Russian)

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы используем терминологию и обозначения, принятые в [1]–[3].

Пусть ω – непустое подмножество множества всех простых чисел. Всякую функцию вида

$$f: \omega \cup \{\omega\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называют ω -composition formation спутником. Для произвольного ω -composition formation спутника f полагают

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p)\}$$

$$\text{для всех } p \in \pi(\text{Com}(G)) \cap \omega,$$

где $\text{Com}(G)$ обозначает множество всех composition formations абелевых факторов G , $R_\omega(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая ω -подгруппа

группы G , $C^p(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G , у которых composition факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G) = G$).

Если formation $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω -composition formation спутника f , то $\mathfrak{F}$ называют ω -composition formation, а f – ω -composition formation спутником $\mathfrak{F}$.

Всякую formation считают n -кратно ω -composition formation. При $n \geq 1$ formation $\mathfrak{F}$ называют n -кратно ω -composition formation [1], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$ -кратно ω -composition formation. Formation $\mathfrak{F}$

называется *тотально ω -композиционной*, если она является n -кратно ω -композиционной для всякого целого неотрицательного n .

Формации такого вида введены А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе [1], где были установлены основные свойства n -кратно ω -композиционных (или, иначе, кратно частично композиционных) формаций, изучались n -кратно ω -композиционные произведения формаций такого вида, а также доказана алгебраичность и модулярность решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций. В отмеченной работе было поставлено более двух десятков открытых вопросов, определивших перспективные направления исследований в теории частично композиционных формаций.

Полученные за последующее десятилетие результаты в этом направлении нашли свое отражение в монографиях [4], [5]. При этом необходимо отметить, что особое место при изучении свойств n -кратно (тотально) ω -композиционных формаций, их решеток и полугрупп занимают формации, порождаемые одной единственной группой, так называемые *однопорожденные n -кратно (тотально) ω -композиционные формации*. Напомним [1], что через $c_n^\omega \text{form}(G)$ ($c_\infty^\omega \text{form}(G)$) обозначают пересечение всех n -кратно (тотально) ω -композиционных формаций, содержащих данную группу G , а формацию $c_n^\omega \text{form}(G)$ (соответственно, $c_\infty^\omega \text{form}(G)$) называют n -кратно (тотально) ω -композиционной формацией, порожденной группой G или однопорожденной n -кратно (тотально) ω -композиционной формацией.

Как было показано в работе [1], однопорожденные n -кратно ω -композиционные формации являются компактными элементами решетки c_n^ω всех n -кратно ω -композиционных формаций. В недавно опубликованной работе В.В. Щербины [6] доказана, в частности, алгебраичность решетки c_∞^ω всех тотально ω -композиционных формаций, компактными элементами которой являются однопорожденные тотально ω -композиционные формации. Кроме того, при изучении тотально ω -композиционных формаций с заданными системами (структурой) подформаций (см., например, [7]) существенную роль играют минимальные тотально ω -композиционные не $\mathfrak{H}$ -формации ($\mathfrak{H}$ – некоторый заданный класс групп), которые также однопорождены. Поэтому задача изучения однопорожденных ω -композиционных формаций весьма актуальна.

Не менее важными и интересными объектами исследований теории n -кратно (тотально) ω -композиционных формаций являются так называемые *ограниченные формации*. При этом n -кратно (тотально) ω -композиционную формацию

$\mathfrak{F}$ называют *ограниченной*, если она является подформацией некоторой однопорожденной n -кратно (тотально) ω -композиционной формации, т. е. имеет место включение $\mathfrak{F} \subseteq c_n^\omega \text{form}(G)$ (соответственно, $\mathfrak{F} \subseteq c_\infty^\omega \text{form}(G)$) для некоторой группы G .

Необходимо отметить, что до настоящего времени менее изученными остаются тотально ω -композиционные формации. Накопленный идейный и технический материал позволил в последние годы несколько активизировать исследования по теории тотально композиционных формаций (см, например, работы А.А. Царева [8]–[10]), а также тотально ω -композиционных формаций (см. работы авторов [7], [11]–[13], В.В. Щербины [6], [14]). Данное обстоятельство подтверждает перспективность таких исследований.

Совокупность всех тотально ω -композиционных формаций будем обозначать через c_∞^ω , формации, принадлежащие c_∞^ω , называть *c_∞^ω формациями*.

Пусть f – ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда если все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то спутник f называют *внутренним* (или *приведенным*). Спутник f называют *c_∞^ω -значным*, если все его значения принадлежат c_∞^ω . Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех c_∞^ω -значных ω -композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\bigcap_{i \in I} f_i$ – c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, который называют *минимальным c_∞^ω -значным ω -композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

В данной работе мы доказываем следующие критерии однопорожденности (ограниченности) тотально ω -композиционной формации.

Теорема 0.1. Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где f – минимальный c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной тотально ω -композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi| < \infty$ и $f(a)$ – однопорожденная c_∞^ω -формация для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$.

Теорема 0.2. Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где f – минимальный c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ограниченной тотально ω -композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi| < \infty$ и $f(a)$ – ограниченная c_∞^ω -формация для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$.

1 Вспомогательные результаты

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся некоторые известные

факты теории частично композиционных формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Тогда через $c_\infty^\omega \text{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех c_∞^ω -формаций, содержащих $\mathfrak{X}$ и называют *тотально ω -композиционной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$* , а если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то $c_\infty^\omega \text{form}(G)$ называют *однопорожденной тотально ω -композиционной формацией*.

Лемма 1.1 [1, Лемма 5]. Если $\mathfrak{F} = c_\infty^\omega \text{form}(\mathfrak{X})$, $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$ и f – минимальный c_∞^ω -значный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(G / R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $f(p) = c_\infty^\omega \text{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi$;
- 3) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$;
- 4) если $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$, спутник h c_∞^ω -значен, то для всех $p \in \pi$ имеет место

$$f(p) = c_\infty^\omega \text{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(A) = 1).$$

Лемма 1.2 [15, Лемма 2]. Пусть Z_p – группа порядка p и G – группа с $O_p(G) = 1$. Тогда база регулярного сплетения $T = Z_p \wr G$ совпадает с $C^p(T) = O_p(T)$.

Лемма 1.3 [1, Лемма 4]. Если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ и $G / O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ и всякого простого числа p класс групп $\mathfrak{X}(C^p)$ определяется следующим образом [1]:

$$\mathfrak{X}(C^p) = \text{form}(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}),$$

если $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$ и $\mathfrak{X}(C^p) = \emptyset$, если $p \notin \pi(\text{Com}(\mathfrak{X}))$.

Всякая ω -композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω -композиционный спутник f , что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называют каноническим.

Лемма 1.4 [1, Замечание 2]. Если формация $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) = CF_\omega(f)$, то $F(p) = \mathfrak{N}_p(f(p) \cap \mathfrak{F})$ для всех $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$.

Напомним, что формацию $\mathfrak{F}$ называют [16], [17]

1) ω -разрешимо насыщенной, если из условия $G / N \in \mathfrak{F}$ для нормальной в G ω -подгруппы N из $\Phi(G_{\omega-\infty})$, всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$

(здесь $G_{\omega-\infty}$ обозначает ω -разрешимый радикал группы G);

2) $\mathfrak{N}_\omega$ -насыщенной, если для любого $p \in \omega$ из того, что $G / \Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Для всякого простого числа p через Z_p обозначают группу порядка p . Если G – группа, $\mathfrak{F}$ – класс групп, то через $\mathcal{K}(G)$ обозначают класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G , $\mathcal{K}(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \mathcal{K}(G)$. Совокупность всех гомоморфных образов групп из $\mathfrak{F}$ обозначают через $Q(\mathfrak{F})$.

Лемма 1.5 [17, Теорема 4.5]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, ω – непустое множество простых чисел. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{N}_\omega$ -насыщенной;
- 2) формация $\mathfrak{F}$ ω -разрешимо насыщена;
- 3) $c\text{form}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathfrak{F}$;
- 4) $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где f – ω -композиционный спутник, удовлетворяющий следующим условиям:

- а) $f(p) = Q(G / C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F})$, если $p \in \omega$ и $Z_p \in \text{Com}(\mathfrak{F})$;
- б) $f(p) = \emptyset$,
- в) $f(S) = \mathfrak{F}$, если $S \in \mathfrak{J} \setminus \{Z_p \mid p \in \omega\}$, где $\mathfrak{J}$ – класс всех простых групп.

Для двух ω -композиционных спутников f и h полагают $f \leq h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Отметим, что если $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$ и f – произвольный внутренний ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f \leq F$.

Лемма 1.6 [1, Лемма 6]. Пусть f_1 и f_2 – минимальные ω -композиционные c_∞^ω -значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп. Тогда через $G^\mathfrak{F}$ обозначают пересечение всех нормальных подгрупп K группы G с $G / K \in \mathfrak{F}$ и называют $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы G . Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, то гашнцово произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1.7 [18, Гл. IV.], [19, Предложение 2.2.11]. Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ – формации. Тогда:

- 1) $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{F} \neq \emptyset$;
- 2) $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является формацией;
- 3) $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}} = (G^\mathfrak{H})^\mathfrak{F}$ для всех $G \in \mathfrak{G}$;

4) $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathfrak{H}\mathfrak{M})$.

Лемма 1.8 [1]. Пусть формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, $\mathfrak{M} = CF_\omega(m)$ и спутники h и m являются внутренними. Тогда если $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, то формация $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = t(p)\mathfrak{H}$, если $t(p) \neq \emptyset$, $f(p) = h(p)$, если $t(p) = \emptyset$.

2 Доказательство основных результатов

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $\emptyset \neq \omega \subseteq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда произведение $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$ является тотально ω -композиционной формацией. В частности, формация $\mathfrak{S}_\omega \mathfrak{F}$ тотально ω -композиционна.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$. Покажем прежде, что формация $\mathfrak{M}$ является $\mathfrak{N}_p$ -насыщенной для любого $p \in \omega$. Действительно, пусть $p \in \omega$ и $G / \Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$G^{\mathfrak{M}} \subseteq \Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{N}_p.$$

Значит, $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{M}$. Поскольку ввиду леммы 1.7 (4) имеет место

$$\mathfrak{N}_p \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}) = (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_\pi) \mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{M},$$

то $G \in \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_p$ -насыщенная формация для любого $p \in \omega$. В силу леммы 1.5 формация $\mathfrak{M}$ является ω -композиционной.

Рассмотрим формацию всех нильпотентных π -групп $\mathfrak{N}_\pi$. Поскольку $\mathfrak{N}_\pi$ является композиционной формацией, то она ω -композиционна. Понятно также, что для любого $p \in \omega$ имеет место $\mathfrak{N}_\pi(C^p) = (1)$, где (1) – формация всех единичных групп. Согласно лемме 1.5 (2) имеем $\mathfrak{N}_\pi = CF_\omega(t)$, где t – такой ω -композиционный спутник, что $t(\omega') = \mathfrak{N}_\pi$, $t(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_\pi(C^p) = \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. В силу леммы 1.7 (4) имеют место равенства

$$\mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}) = (\mathfrak{N}_\pi \mathfrak{S}_\pi) \mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{M}.$$

Применяя теперь лемму 1.8 заключаем, что формация $\mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M}$ имеет такой ω -композиционный спутник t , что $t(\omega') = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ и

$$t(p) = t(p)\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$$

для всех $p \in \omega$. Поскольку при этом формация $\mathfrak{M}$ является ω -композиционной и $t(\omega') = \mathfrak{M}$, $t(p) = \mathfrak{M}$ для всех $p \in \omega$, то $\mathfrak{M} - 2$ -кратно ω -композиционная формация. Но тогда $\mathfrak{M} - n$ -кратно ω -композиционная формация для любого натурального n . Значит, $\mathfrak{M} -$ тотально ω -композиционная формация. В частности, если $\pi = \omega$, то $\mathfrak{S}_\omega \mathfrak{F} -$ тотально ω -композиционная формация. $\square$

Доказательство теоремы 0.1. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} = c_\infty^\omega \text{form}(G)$ и $f -$ минимальный c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 1.1 ω -композиционный спутник f является внутренним, а также имеют место следующие равенства:

$$\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(G)), \quad f(p) = c_\infty^\omega \text{form}(G / C^p(G))$$

для всех $p \in \pi$ и $f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(G / R_\omega(G))$.

Таким образом, $|\pi| < \infty$ и $f(a) -$ однопорожденная тотально ω -композиционная формация для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$.

Достаточность. Пусть

$$\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) = \{p_1, \dots, p_m\}$$

– конечное множество, $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где $f -$ такой внутренний c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, что $f(p_i) = c_\infty^\omega \text{form}(H_i)$ для любого $p_i \in \pi$ и $f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(H_0)$.

Для каждого $p_i \in \pi$ через P_i обозначим группу порядка p_i и пусть $B_i -$ регулярное сплетение групп P_i и $H_i / O_{p_i}(H_i)$. Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$B_i = P_i \wr (H_i / O_{p_i}(H_i)) = K_i \rtimes (H_i / O_{p_i}(H_i)),$$

где $K_i -$ база сплетения B_i . В силу леммы 1.2 имеем $C^{p_i}(B_i) = O_{p_i}(B_i) = K_i$. Пусть $B_0 = H_0 / R_\omega(H_0)$. Тогда $R_\omega(B_0) = 1$ и ввиду леммы 1.1 (4) имеет место равенство

$$f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(A \mid A \in f(\omega'), R_\omega(A) = 1).$$

В силу леммы 2.1 формация $\mathfrak{S}_\omega \text{form}(H_0)$ является тотально ω -композиционной. Поэтому

$$f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(H_0) \subseteq \mathfrak{S}_\omega \text{form}(H_0).$$

Кроме того, очевидно включение

$$\text{form}(H_0) \subseteq \text{form}(R_\omega(H_0))\text{form}(H_0 / R_\omega(H_0)).$$

Таким образом, с учетом леммы 1.7 (4) имеем

$$\begin{aligned} f(\omega') &\subseteq c_\infty^\omega \text{form}(H_0) \subseteq \mathfrak{S}_\omega \text{form}(H_0) \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{S}_\omega(\text{form}(R_\omega(H_0))\text{form}(H_0 / R_\omega(H_0))) = \\ &= (\mathfrak{S}_\omega \text{form}(R_\omega(H_0)))\text{form}(H_0 / R_\omega(H_0)) = \\ &= \mathfrak{S}_\omega \text{form}(H_0 / R_\omega(H_0)) = \mathfrak{S}_\omega \text{form}(B_0). \end{aligned}$$

Следовательно, если $A \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{S}_\omega \text{form}(B_0)$ и $R_\omega(A) = 1$, то $A \in \text{form}(B_0) \subseteq c_\infty^\omega \text{form}(B_0)$. Так как при этом $B_0 \in f(\omega')$, то $f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(B_0)$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = c_\infty^\omega \text{form}(B)$, где

$$B = B_0 \times B_1 \times \dots \times B_m.$$

Пусть $\mathfrak{L} = c_\infty^\omega \text{form}(B)$, $\pi_1 = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{L}))$, а $L -$ канонический ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{L}$. Ввиду леммы 1.1 имеем $\pi_1 = \omega \cap \pi(\text{Com}(B))$. Заметим, что по построению группы B имеет место равенство

$$\omega \cap \pi(\text{Com}(B)) = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})).$$

Следовательно, $\pi_1 = \pi$. Поскольку

$$B_i / O_{p_i}(B_i) = B_i / K_i \simeq H_i / O_{p_i}(H_i) \in f(p_i)$$

и f внутренний ω -композиционный спутник, то в силу леммы 1.3 имеем $B_i \in \mathfrak{F}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Кроме того, $B_0 \in f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $B \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем теперь обратное включение. Поскольку $B_i \in \mathfrak{L}$, то

$$B_i / C^{p_i}(B_i) = B_i / K_i \simeq H_i / O_{p_i}(H_i) \in L(p_i).$$

Следовательно, $H_i \in \mathfrak{N}_{p_i} L(p_i)$. Но $L(p_i) = \mathfrak{N}_{p_i} L(p_i)$

по лемме 1.4. Значит, для всех $p_i \in \pi$ имеем

$$f(p_i) = c_\infty^\omega \text{form}(H_i) \subseteq L(p_i).$$

Кроме того, поскольку $B_0 \in \mathfrak{L}$ и $R_\omega(B_0) = 1$, то $B_0 \simeq B_0 / R_\omega(B_0) \in L(\omega')$. Значит,

$$f(\omega') = c_\infty^\omega \text{form}(B_0) \subseteq L(\omega').$$

Таким образом, для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ имеет место включение $f(a) \subseteq L(a)$. Следовательно, $f \leq L$. Последнее влечет $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} = c_\infty^\omega \text{form}(B)$ – однопорожденная тотально ω -композиционная формация. $\square$

В случае, когда $\omega = \{p\}$ из теоремы 0.1 получаем

Следствие 2.1. Пусть $\mathfrak{F} = CF_p(f)$ – тотально p -композиционная формация, f – минимальный c_∞^p -значный p -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной тотально p -композиционной формацией в том и только в том случае, когда $f(p)$ и $f(p')$ – однопорожденные тотально p -композиционные формации.

Если $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 0.1 вытекает следующий результат

Следствие 2.2. Пусть $\mathfrak{F} = CF(f)$ – тотально композиционная формация, f – минимальный c_∞ -значный композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной тотально композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi| < \infty$ и $f(p)$ – однопорожденная тотально композиционная формация для всех $p \in \pi$.

Лемма 2.2. Пусть G – группа и $\mathfrak{H}$ – класс всех таких групп H , что $\text{Com}(H) \subseteq \text{Com}(G)$. Тогда $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, где h – такой внутренний c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник, что $h(p) = \mathfrak{H}$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$, $h(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(G))$ и $h(\omega') = \mathfrak{H}$.

Доказательство. Заметим прежде, что класс групп $\mathfrak{H}$ является формацией. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{H}$ и $K \trianglelefteq A$. Тогда $\text{Com}(A) \subseteq \text{Com}(G)$ и поскольку $\text{Com}(A/K) \subseteq \text{Com}(A)$, то $\text{Com}(A/K) \subseteq \text{Com}(G)$. Значит, $A/K \in \mathfrak{H}$. Пусть теперь $A/K_1 \in \mathfrak{H}$, $A/K_2 \in \mathfrak{H}$, где $K_1 \cap K_2 = 1$. Тогда $\text{Com}(A/K_i) \subseteq \text{Com}(G)$, $i = 1, 2$. Понятно, что $K_1 K_2 / K_2 \trianglelefteq A / K_2$. Следовательно,

$$\text{Com}(K_1 K_2 / K_2) \subseteq \text{Com}(A / K_2) \subseteq \text{Com}(G).$$

А поскольку

$$K_1 K_2 / K_2 \simeq K_1 / K_1 \cap K_2 \simeq K_1,$$

то $\text{Com}(K_1) \subseteq \text{Com}(G)$. Поэтому $\text{Com}(A) \subseteq \text{Com}(G)$. Последнее влечет $A \in \mathfrak{H}$. Следовательно, класс групп $\mathfrak{H}$ является формацией.

Пусть теперь h – такой ω -композиционный спутник, что $h(p) = \mathfrak{H}$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$, $h(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(G))$ и $h(\omega') = \mathfrak{H}$. Покажем, что $CF_\omega(h) = \mathfrak{H}$. Заметим, что если $B \in \mathfrak{H}$, то $B / R_\omega(B) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$ и $B / C^p(B) \in \mathfrak{H} = h(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(B)) \subseteq \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$, поскольку $\mathfrak{H}$ формация. Следовательно, $B \in CF_\omega(h)$ и, значит, $\mathfrak{H} \subseteq CF_\omega(h)$. Последнее означает, что h внутренний ω -композиционный спутник формации $CF_\omega(h)$.

Допустим, что $CF_\omega(h) \not\subseteq \mathfrak{H}$ и пусть D – группа минимального порядка из $CF_\omega(h) \setminus \mathfrak{H}$. Тогда D монолитическая группа с монолитом $N = D^\mathfrak{H}$ и $\text{Com}(D/N) \subseteq \text{Com}(G)$.

Предположим, что $R_\omega(D) = 1$. Тогда поскольку $D \in CF_\omega(h)$, то $D \simeq D / R_\omega(D) \in h(\omega') = \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, $R_\omega(D) \neq 1$. Поэтому N – абелева p -группа для некоторого $p \in \omega$. Поскольку $D \in CF_\omega(h)$, то $D / C^p(D) \in h(p)$ и $h(p) \neq \emptyset$, т. е. $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$. Но тогда $\text{Com}(N) \subseteq \text{Com}(G)$ и, значит, $\text{Com}(D) \subseteq \text{Com}(G)$. Следовательно, $D \in \mathfrak{H}$. Противоречие.

Таким образом, $CF_\omega(h) = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ – ω -композиционная формация. Поскольку при этом все значения ω -композиционного спутника h являются ω -композиционными формациями ($h(a) = \mathfrak{H}$ для любого $a \in (\omega \cap \pi(\text{Com}(G))) \cup \{\omega'\}$ и $h(a) = \emptyset$ для любого $a \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(G))$), то $CF_\omega(h)$ – 2-кратно ω -композиционная формация и т. д. Последнее означает, что формация $CF_\omega(h)$ является n -кратно ω -композиционной для любого натурального n , т. е. $CF_\omega(h) = \mathfrak{H}$ – тотально ω -композиционная формация, а h – c_∞^ω -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$. $\square$

Доказательство теоремы 0.2. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – ограниченная totally ω -композиционная формация. Тогда найдется такая группа G , что

$$\mathfrak{F} \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(G) = \mathfrak{X}.$$

Пусть $\mathfrak{H}$ – класс всех таких групп H , что $\text{Com}(H) \subseteq \text{Com}(G)$. Понятно, что $G \in \mathfrak{H}$ и $\text{Com}(\mathfrak{H}) = \text{Com}(G)$. В силу леммы 2.2 формация $\mathfrak{H}$ является totally ω -композиционной. Поэтому имеет место следующее включение

$$\mathfrak{X} = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(G) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Значит, $\text{Com}(\mathfrak{X}) = \text{Com}(G)$. Следовательно, $\text{Com}(\mathfrak{F}) \subseteq \text{Com}(\mathfrak{X}) = \text{Com}(G)$ и $|\pi| < \infty$.

Обозначим через x – минимальный c_{∞}^{ω} -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{X}$. Тогда ввиду леммы 1.6 $f \leq x$. В силу леммы 1.1 имеем

$$\begin{aligned} f(p) &= c_{\infty}^{\omega} \text{form}(A / C^p(A) \mid A \in \mathfrak{F}) \subseteq x(p) = \\ &= c_{\infty}^{\omega} \text{form}(G / C^p(G)) \end{aligned}$$

для всех $p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))$ и

$$\begin{aligned} f(\omega') &= c_{\infty}^{\omega} \text{form}(A / R_{\omega}(A) \mid A \in \mathfrak{F}) \subseteq x(\omega') = \\ &= c_{\infty}^{\omega} \text{form}(G / R_{\omega}(G)). \end{aligned}$$

Таким образом, $|\pi| < \infty$ и для всех $a \in \pi \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ является ограниченной totally ω -композиционной формацией.

Достаточность. Пусть

$$\pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega = \{p_1, \dots, p_m\}$$

– конечное множество, $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где f – минимальный c_{∞}^{ω} -значный ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ и $f(\omega')$, $f(p_1), \dots, f(p_m)$ – ограниченные totally ω -композиционные формации. Тогда найдется группа K_0 такая, что $f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_0)$ и для каждого $p_i \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ найдется группа K_i такая, что $f(p_i) \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_i)$.

Пусть P_i – группа порядка p_i и пусть D_i – регулярное сплетение групп P_i и $K_i / O_{p_i}(K_i)$. Тогда $D_i = P_i \wr (K_i / O_{p_i}(K_i)) = T_i \rtimes (K_i / O_{p_i}(K_i))$, где T_i – база регулярного сплетения D_i . Из леммы 1.2 следует, что $C^{p_i}(D_i) = O_{p_i}(D_i) = T_i$. Пусть $D_0 = K_0 / R_{\omega}(K_0)$. Тогда $R_{\omega}(D_0) = 1$. Ввиду леммы 1.1 (4) имеет место равенство

$$f(\omega') = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(A \mid A \in f(\omega'), R_{\omega}(A) = 1).$$

В силу леммы 2.1 формация $\mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(K_0)$ является totally ω -композиционной. Поэтому

$$f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_0) \subseteq \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(K_0).$$

Кроме того, очевидно включение

$$\text{form}(K_0) \subseteq \text{form}(R_{\omega}(K_0)) \text{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0)).$$

Таким образом, ввиду леммы 1.7 (4) имеет место

$$\begin{aligned} f(\omega') &\subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_0) \subseteq \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(K_0) \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{S}_{\omega} (\text{form}(R_{\omega}(K_0)) \text{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0))) = \\ &= (\mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(R_{\omega}(K_0))) \text{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0)) = \\ &= \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(K_0 / R_{\omega}(K_0)) = \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(D_0). \end{aligned}$$

Следовательно, если $A \in f(\omega')$ и $R_{\omega}(A) = 1$, то $A \in \mathfrak{S}_{\omega} \text{form}(D_0)$. Значит,

$$A \in \text{form}(D_0) \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(D_0).$$

Поэтому имеет место включение

$$\begin{aligned} f(\omega') &= c_{\infty}^{\omega} \text{form}(A \mid A \in f(\omega'), R_{\omega}(A) = 1) \subseteq \\ &\subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(D_0). \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{L} = c_{\infty}^{\omega} \text{form}(D)$, где $D = D_0 \times D_1 \times \dots \times D_m$.

Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Пусть $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{L})) \cap \omega$ и l – минимальный c_{∞}^{ω} -значный ω -композиционный спутник $\mathfrak{L}$. Ввиду леммы 1.1 имеем $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(D))$. Заметим, что по построению группы D имеет место равенство

$$\omega \cap \pi(\text{Com}(D)) = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})).$$

Следовательно, $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{L}$ и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{L}$. Тогда A – монолитическая группа с монолитом $T = A^{\omega}$. Предположим, что $R_{\omega}(A) = 1$. Тогда поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то в силу леммы 1.1 имеем

$$A \simeq A / 1 = A / R_{\omega}(A) \in f(\omega') \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(D_0).$$

Однако поскольку $D_0 \simeq D / (D_1 \times \dots \times D_m) \in \mathfrak{L}$, то $A \in \mathfrak{L}$. Полученное противоречие показывает, что $R_{\omega}(A) \neq 1$. Поэтому T – абелева p -группа для некоторого простого $p \in \omega$. Так как при этом $p \in \pi(\text{Com}(A))$ и $A \in \mathfrak{F}$, то $p \in \pi$. Не ограничивая общности мы можем считать, что $p = p_1$. Поскольку ввиду леммы 1.5 (1) формация $\mathfrak{L}$ является $\mathfrak{N}_p$ -насыщенной, то $T \not\subseteq \Phi(O_p(A))$. Поэтому $T = O_p(A) = C^p(A)$. Тогда поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то

$$A / C^p(A) \in f(p) \subseteq c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_1).$$

Так как $T = O_p(A) = C^p(A)$, то $O_p(A / C^p(A)) = 1$.

По лемме 1.1 имеем

$$A / C^p(A) \in c_{\infty}^{\omega} \text{form}(K_1 / O_p(K_1)).$$

Понятно, что $D_1 \in \mathfrak{L}$. Значит, $D_1 / C^p(D_1) \in l(p)$.

Ввиду леммы 1.2 имеем $T_1 = C^p(D_1)$. Следовательно,

$$K_1 / O_p(K_1) \simeq D_1 / T_1 = D_1 / C^p(D_1) \in l(p).$$

Таким образом, $D_1 / C^p(D_1) \in l(p)$. Поскольку $A / T \in \mathfrak{L}$, то в силу леммы 1.1 имеем

$$(A / T) / R_{\omega}(A / T) \in l(\omega'),$$

и $(A / T) / C^q(A / T) \in l(q)$ для всех

$$q \in \pi(\text{Com}(A / T)) \cap \omega.$$

С другой стороны, поскольку $R_\omega(A/T) = R_\omega(A)/T$ и $C^q(A/T) = C^q(A)/T$ для всех простых чисел $q \neq p$, то

$$A/R_\omega(A) \simeq (A/T)/(R_\omega(A)/T) \simeq (A/T)/R_\omega(A/T) \in l(\omega')$$

и $A/C^q(A) \simeq (A/T)/C^q(A/T) \in l(q)$.

Значит, $A \in \mathcal{L}$. Последнее противоречит выбору группы A . Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{L}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ – ограниченная c_∞^ω -формация. $\square$

Пусть $\omega = \{p\}$. Тогда из теоремы 0.2 вытекает следующее

Следствие 2.3. Пусть $\mathfrak{F} = CF_p(f)$ – тотально p -композиционная формация, f – её минимальный c_∞^p -значный p -композиционный спутник. Тогда $\mathfrak{F}$ является ограниченной тотально p -композиционной формацией в том и только в том случае, когда $f(p)$ и $f(p')$ – ограниченные тотально p -композиционные формации.

Пусть $\omega = \mathbb{P}$, тогда из теоремы 0.2 получаем

Следствие 2.4. Пусть $\mathfrak{F} = CF(f)$ – тотально композиционная формация, f – её минимальный c_∞ -значный композиционный спутник, $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ограниченной тотально композиционной формацией в том и только в том случае, когда $|\pi| < \infty$ и $f(p)$ является ограниченной тотально композиционной формацией для всех $p \in \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Кратно $\mathcal{L}$ -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997.
4. Селькин, В.М. Однопорожденные формации / В.М. Селькин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011.
5. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012.
6. Щербина, В.В. О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп / В.В. Щербина // Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т. 52, № 1. – С. 18–32. – DOI: <https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32>.
7. Лось, И.П. τ -Замкнутые тотально ω -композиционные формации конечных групп с булевыми подрешетками / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского // Материалы Международной

конференции по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Изд-во Академии наук РТ. – 2021. – Т. 60. – С. 92–94.

8. Tsarev, A.A. Inductive lattices of totally composition formations / A.A. Tsarev // Revista Colombiana de Matematicas. – 2018. – Vol. 52, № 2. – P. 161–169. – DOI: <https://dx.doi.org/10.15446/recolma.v52n2.77156>.

9. Tsarev, A.A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups / A.A. Tsarev // Ricerche di Matematica. – 2019. – Vol. 68, № 2. – P. 693–698. – DOI: [10.1007/s11587-019-00433-3](https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3).

10. Tsarev, A.A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups / A.A. Tsarev // Ricerche Mat. – 2019. – Vol. 68, № 2. – P. 693–698.

11. Los, I.P. Separability of the lattice of τ -closed totally ω -composition formations of finite groups / I.P. Los, V.G. Safonov // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02–06, 2019. – Vinnytsia, Ukraine. – 2019. – P. 64–65.

12. Лось, И.П. Модулярность решетки τ -замкнутых тотально ω -композиционных формаций конечных групп / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // XIII школа-конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А. Белоногова, 3–7 августа 2020. – Екатеринбург. – 2020. – С. 62–63.

13. Лось, И.П. On sublattices of the lattice of all totally ω -composition formations of finite groups / И.П. Лось, В.Г. Сафонов // Международная математическая конференция «Мальцевские чтения», посвященная 80-летию Ю.Л. Ершова, 16–20 ноября 2020. – Новосибирск. – 2020. – С. 178.

14. Щербина, В.В. Частично композиционные формации с заданной структурой. I. / В.В. Щербина // Прикладная математика & Физика. – 2021. – Т. 53, № 3. – С. 171–204.

15. Скиба, А.Н. О минимальном композиционном экране композиционной формации / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – 1992. – № 7. – С. 39–43.

16. Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 25, № 3. – P. 955–964.

17. Шеметков, Л.А. Локальные задания формаций конечных групп / Л.А. Шеметков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. – Т. 16, № 8. – С. 229–244.

18. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter. – 1992.

19. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer. – 2006.

Поступила в редакцию 21.09.2021.

Информация об авторах

Лось Инна Павловна – младший научный сотрудник
Сафонов Василий Григорьевич – д.ф.-м.н., профессор

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfint.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).

ФИЗИКА

Капшай В.Н., Гришечкина А.А. Релятивистские парциальные функции Грина состояний рассеяния, характеризующихся орбитальным квантовым числом $l = 1$. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_7

Кулак Г.В., Навныко В.Н., Николаенко Т.В. Поляризационные особенности дифракции света на голографических фазовых решетках в среде «реоксан». – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_14

Можаровский В.В., Киргинцева С.В. Реализация расчета напряженно-деформированного состояния слоистых труб из композитов и определение скорости волны при гидроударе. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_19

Нестерович А.В. Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости. – DOI: https://doi.org/20778708_2021_3_48_24

Никитюк Ю.В., Сердюков А.Н., Прохоренко В.А., Аушев И.Ю. Применение искусственных нейронных сетей и метода конечных элементов для определения параметров обработки кварцевых золь-гель стекол эллиптическими лазерными пучками. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_30

Руденков А.С., Рогачёв А.В., Пилипцов Д.Г. Морфология и фазовый состав легированных кремнием углерод-титановых покрытий. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_37

Сердюкова М.А., Сердюков А.Н. Массивное гравитационное поле в плоском пространстве-времени. IV. Вековой дрейф атомных спектров и оптика сверхновых типа Ia. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_42

Старовойтов Э.И. Изгиб трехслойной пластины равномерно распределенной нагрузкой в нейтронном потоке. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_56

МАТЕМАТИКА

Гальмак А.М. О порождающих множествах l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$. II. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_63

Княгина В.Н. Конечные группы с субнормальными коммутантами B -подгрупп. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_73

Сафонова И.Н., Скиба А.Н. Обобщенно σ -субнормальные и σ -перестановочные подгруппы конечных групп. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_76

ТЕХНИКА

Есман А.К., Зыков Г.Л., Потачиц В.А. Повышение энергоэффективности фототермоэлектрической батареи. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_82

Исаев В.О., Бойкачев П.В. Аналитическое математическое моделирование входных характеристик радиотехнических систем. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_88

ИНФОРМАТИКА

Сморозин В.С., Прохоренко В.А. Адаптивная система управления технологическим процессом производства. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_96