ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№3 (48) 2021

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (48) 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Капшай В.Н., Гришечкина А.А. Релятивистские парциальные функции Грина состояний рассеяния, характеризующихся орбитальным квантовым числом $l = 1$ 7

Кулак Г.В., Навныко В.Н., Николаенко Т.В. Поляризационные особенности дифракции света на голографических фазовых решетках в среде «реоксан» 14

Можаровский В.В., Киргинцева С.В. Реализация расчета напряженно-деформированного состояния слоистых труб из композитов и определение скорости волны при гидроударе 19

Нестерович А.В. Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости 24

Никитюк Ю.В., Сердюков А.Н., Прохоренко В.А., Аушев И.Ю. Применение искусственных нейронных сетей и метода конечных элементов для определения параметров обработки кварцевых золь-гель стекол эллиптическими лазерными пучками 30

Руденков А.С., Рогачёв А.В., Пилипцов Д.Г. Морфология и фазовый состав легированных кремнием углерод-титановых покрытий 37

Сердюкова М.А., Сердюков А.Н. Массивное гравитационное поле в плоском пространстве-времени. IV. Вековой дрейф атомных спектров и оптика сверхновых типа Ia 42

Старовойтов Э.И. Изгиб трехслойной пластины равномерно распределенной нагрузкой в нейтронном потоке 56

МАТЕМАТИКА

Гальмак А.М. О порождающих множествах l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. II 63

Князина В.Н. Конечные группы с субнормальными коммутантами B-подгрупп 73

Сафонова И.Н., Скиба А.Н. Обобщенно σ-субнормальные и σ-перестановочные подгруппы конечных групп 76

ТЕХНИКА

Есман А.К., Зыков Г.Л., Потачиц В.А. Повышение энергоэффективности фототермоэлектрической батареи 82

Исаев В.О., Бойкачев П.В. Аналитическое математическое моделирование входных характеристик радиотехнических систем 88

ИНФОРМАТИКА

Смородин В.С., Прохоренко В.А. Адаптивная система управления технологическим процессом производства 96

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:
– технические;
– физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *Г.Н. Петухова*, *Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 17.09.21. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,32. Уч.-изд. л. 10,73. Тираж 100 экз. Заказ № 486.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 3 (48) 2021

CONTENTS

PHYSICS

Kapshai V.N., Grishechkina A.A. Relativistic partial Green's functions of scattering states characterized by orbital quantum number $l = 1$ 7

Kulak G.V., Naunyka V.N., Nikolaenko T.V. Polarization specific features of light diffraction by holographic phase gratings in "reoksan" medium 14

Mozharovsky V.V., Kirhintsava S.V. Implementation of the calculation of the stress-deformed state of layered pipes from composites and determination of wave velocity in hydrolic impact 19

Nestsiarovich A.V. Axisymmetric loading of a circular physically nonlinear three-layer plate in its plane 24

Nikitjuk Y.V., Serdyukov A.N., Prohorenko V.A., Aushev I.Y. Application of artificial neural networks and finite element method for determining the parameters of elliptic laser beam treatment of quartz sol-gel glasses 30

Rudenkov A.S., Rogachev A.V., Piliptsou D.G. Morphology and phase composition of silicon-doped titanium carbon coatings 37

Serdyukova M.A., Serdyukov A.N. A massive gravitational field in flat spacetime. IV. The secular drift of atomic spectra and optics of type Ia supernovae 42

Starovoitov E.I. Bending of a three-layer plate by a uniformly distributed load in the neutron flux 56

MATHEMATICS

Gal'mak A.M. On sets of generators of l-ary group $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. II 63

Kniahina V.N. Finite groups with subnormal derived subgroups of B-groups 73

Safonova I.N., Skiba A.N. Generalized σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups 76

TECHNICS

Esman A.K., Zykov G.L., Potachits V.A. Improvement of the energy efficiency of the photovoltaic thermoelectric battery 82

Isaev V.O., Boykachev P.V. Analytical mathematical modeling of input characteristics of radio engineering systems 88

INFORMATION SCIENCE

Smorodin V.S., Prokhorenko V.A. Adaptive control system of a technological production process 96

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:
– Technics;
– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

ФИЗИКА

УДК 539.12.01

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПАРЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА СОСТОЯНИЙ РАССЕЯНИЯ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ ОРБИТАЛЬНЫМ КВАНТОВЫМ ЧИСЛОМ *l* = 1

В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

RELATIVISTIC PARTIAL GREEN'S FUNCTIONS OF SCATTERING STATES CHARACTERIZED BY ORBITAL QUANTUM NUMBER *l* = 1

V.N. Kapshai, A.A. Grishechkina

Francisk Skorina Gomel State University

Функции Грина квазипотенциального подхода квантовой теории поля найдены в релятивистском конфигурационном представлении и выражены через элементарные функции применительно к состояниям рассеяния, характеризуемым орбитальным квантовым числом $l=1$ (p-состояниям). Определены асимптотические свойства функций Грина при больших значениях релятивистской координаты. Показано, что все функции Грина в нерелятивистском пределе совпадают с парциальной функцией Грина уравнения Шрёдингера. Уравнения для определения парциальных волновых функций состояний рассеяния решены точно в случае сферически-симметричных потенциалов «δ-сфера» и их суперпозиций. Определены характерные особенности поведения парциальных сечений рассеяния, обусловленные видом модельного потенциала.

Ключевые слова: *функции Грина*, *квазипотенциальный подход*, *релятивистское конфигурационное представление*, *состояния рассеяния*, *p-состояния*, *дельта-потенциал.*

Green's functions of the quasipotential approach of quantum field theory are found in the relativistic configurational representation and are expressed in terms of elementary functions in case of scattering states characterized by orbital quantum number $l=1$ (p-states). Asymptotic properties of the Green's functions are determined at large values of the relativistic coordinate. It is shown that all the Green's functions coincide in the nonrelativistic limit with the partial Green's function of the Schrodinger equation. The equations for the corresponding partial wave functions of the scattering states are solved exactly in case of spherically symmetric potentials «δ-sphere» and their superpositions. Characteristic features of the behavior of partial scattering cross sections for such potentials are determined.

Keywords: *Green's functions*, *quasipotential approach*, *relativistic configurational representation*, *scattering states*, *p-states*, *delta-function potential.*

Введение

В современной релятивистской физике проблемы описания связанных состояний и состояний рассеяния относят к фундаментальным. Одним из первых уравнений, выведенных для их решения, стало уравнение Бете – Солпитера. Так как его использование сопряжено с рядом трудностей, в целях их разрешения позднее были предложены подходы, основанные на разных вариантах трехмерной редукции уравнения Бете – Солпитера. Наиболее удачным оказался квазипотенциальный подход, предложенный в работах Логунова и Тавхелидзе, и Кадышевского. Первоначально интегральные уравнения Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского были сформулированы в импульсном представлении. Если, по аналогии с квантовой механикой, осуществить преобразование Фурье этих уравнений, то можно свести их к интегрально-дифференциальным, то есть не менее сложным для решения. Приём, альтернативный трёхмерному преобразованию Фурье, состоит в разложении всех используемых в нём величин, таких как волновые функции, свободные функции Грина (ФГ), квазипотенциалы по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы Лоренца, образующим полную ортонормированную систему функций. Именно на этой основе была сформулирована концепция релятивистского конфигурационного представления (РКП), которое является аналогом координатного представления квантовой механики.

Эквивалентные интегральным уравнениям в импульсном представлении уравнения в РКП могут быть представлены или в виде дифференциально-разностных (при этом парциальные уравнения являются разностными), или в виде интегральных (парциальные уравнения в этом случае являются интегральными). При выборе второго варианта для практического использования уравнений в РКП существенно знание явного вида парциальных ФГ, аналогичных парциальным ФГ уравнения Шрёдингера.

Одномерные ФГ в РКП были найдены в [1], трехмерные парциальные ФГ были определены в [2] и записаны в терминах специальных функций. Явный вид парциальных ФГ для состояний с нулевым орбитальным моментом, реализуемых для частиц, находящихся в сферически-симметричном потенциальном поле, был получен ранее и в виде сложных комбинаций элементарных функций [3]. Это обстоятельство служит мотивирующим фактором для выражения через элементарные функции и других парциальных ФГ.

Целью настоящей работы является нахождение в элементарных функциях явного вида парциальных ФГ для состояний, характеризующихся орбитальным квантовым числом $l = 1$. Располагая таким вариантом представления ФГ можно сформулировать парциальные уравнения состояний рассеяния в удобном для практического применения виде. Мы демонстрируем это на примере сферически-симметричных дельта-потенциалов в РКП (решение разностных уравнений с такими потенциалами представляет очень непростую задачу).

1 Релятивистские парциальные функции Грина

Функции Грина системы двух частиц одинаковой массы m для состояний рассеяния в импульсном представлении определены в [1] в виде

$$\begin{aligned} G_{(1)}\left(E_q,k\right) &= \frac{1}{2E_k - 2E_q - i\varepsilon}\frac{1}{E_k};\\ G_{(2)}\left(E_q,k\right) &= \frac{1}{E_k^{\,2} - E_q^{\,2} - i\varepsilon}\frac{m}{E_k};\\ G_{(3)}\left(E_q,k\right) &= \frac{1}{E_k^{\,2} - E_q^{\,2} - i\varepsilon};\\ G_{(4)}\left(E_q,k\right) &= \frac{1}{2E_k - 2E_q - i\varepsilon}\frac{m}{E_k^{\,2}}; \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $G_{(1)}$ – ФГ модифицированного уравнения Кадышевского, $G_{(2)}$ – ФГ уравнения Логунова – Тавхелидзе, $G_{(3)}$ – ФГ модифицированного уравнения Логунова – Тавхелидзе, $G_{(4)}$ – ФГ уравнения Кадышевского, $E_k = \sqrt{m^2 + k^2}$, k – релятивистский импульс, $2E_q = 2m\,\mathrm{ch}\,\chi_q$ – энергия системы в рассматриваемом состоянии рассеяния.

Парциальные ФГ в РКП $G_{1(j)}\left(\chi_q, r, r'\right)$ для состояний с орбитальным квантовым числом $l = 1$ в [2] выражены через функции (1.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{1(j)}\left(\chi_q,r,r'\right) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty p_1\left(\chi_k,r\right)G_{(j)}\left(m\,\mathrm{ch}\,\chi_q,k\right)\times\\ \times E_k m^2\,\mathrm{sh}^2\,\chi_k\,p_1^*\left(\chi_k,r'\right)d\chi_k, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где функция $p_1\left(\chi_k, r\right)$ имеет вид

$$p_1\left(\chi_k,r\right) = \frac{r}{\left(mr+i\right)\mathrm{sh}^2\,\chi_k}\times \left(\frac{\mathrm{ch}\,\chi_k\sin\left(\chi_k mr\right)}{mr} - \mathrm{sh}\,\chi_k\cos\left(\chi_k mr\right)\right),$$

χ_k – быстрота, связанная с релятивистским импульсом соотношением $k = m\,\mathrm{sh}\,\chi_k$, r – модуль радиус-вектора $\vec{r}$ в РКП.

Рассмотрим процедуру нахождения явного вида ФГ модифицированного уравнения Кадышевского на основе формулы (1.2). Для этого представим её в виде выражения

$$\begin{aligned} G_{1(1)}\left(\chi_q,r,r'\right) &= \frac{-mrr'}{\pi\left(mr+i\right)\left(mr'-i\right)}\times\\ &\times\left(\frac{1}{2}\left(I_1\left(r-r'\right)+I_1\left(r+r'\right)\right)-\left(\frac{1}{2mr}-\frac{1}{2mr'}\right)\times\right.\\ &\times I_2\left(r-r'\right)-\left(\frac{1}{2mr}+\frac{1}{2mr'}\right)I_2\left(r+r'\right)+\\ &\left.+\frac{1}{2m^2rr'}\left(I_3\left(r-r'\right)-I_3\left(r+r'\right)\right)\right), \end{aligned} \tag{1.3}$$

в котором использованы обозначения

$$I_1\left(r\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\left(\chi_k mr\right)}{\mathrm{ch}\,\chi_k - \mathrm{ch}\left(\chi_q + i\varepsilon\right)}d\chi_k,$$

$$I_2\left(r\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}\,\chi_k\sin\left(\chi_k mr\right)}{\mathrm{sh}\left(\chi_k+i\gamma\right)\left(\mathrm{ch}\,\chi_k - \mathrm{ch}\left(\chi_q + i\varepsilon\right)\right)}d\chi_k,$$

$$I_3\left(r\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}^2\,\chi_k\sin\left(\chi_k mr\right)}{\mathrm{sh}^2\left(\chi_k+i\gamma\right)\left(\mathrm{ch}\,\chi_k - \mathrm{ch}\left(\chi_q + i\varepsilon\right)\right)}d\chi_k.$$

Бесконечно малая мнимая часть γ аргумента функции $\mathrm{sh}\left(\chi_k + i\gamma\right)$, аналогично ε в формулах (1.1), введена для смещения особой точки подынтегральной функции с вещественной оси в комплексную плоскость. Однако, в отличие от ε, положительность которой принципиально важна, знак вспомогательной величины γ может быть любым, и при его изменении на противоположный ответ не изменяется. Так, в подынтегральном выражении разности интегралов $I_3\left(r-r'\right) - I_3\left(r+r'\right)$ содержится множитель

$$\sin\left(\chi_k mr\right)\sin\left(\chi_k mr'\right)\mathrm{sh}^{-2}\left(\chi_k + i\gamma\right),$$

имеющий устранимую особенность при $\chi_k = 0$.

Для вычисления интеграла $I_1\left(r\right)$ представим его в виде

$$I_1\left(r\right) = \left(I_{11}\left(r\right) + I_{11}\left(-r\right)\right)/4,$$

где

$$I_{11}\left(r\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\chi_k mr}}{\mathrm{ch}\,\chi_k - \mathrm{ch}\left(\chi_q + i\varepsilon\right)}d\chi_k. \tag{1.4}$$

Для вычисления интеграла (1.4) воспользуемся методами теории функций комплексной переменной [4]. Перейдем в комплексную χ_k-плоскость, рассматривая вместо интеграла (1.4) вдоль вещественной прямой интеграл по замкнутому контуру $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ (рисунок 1.1). После преобразования интегралов вдоль каждого из отрезков контура C и последующего устремления $R \to \infty$ получим связь искомого интеграла $I_{11}(r)$ с интегралом по контуру C:

$$I_{11}(r) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi m r}} \lim_{R\to\infty} \int_C \frac{e^{i\chi_k m r}}{\operatorname{ch}\chi_k - \operatorname{ch}\left(\chi_q + i\varepsilon\right)} d\chi_k. \quad (1.5)$$

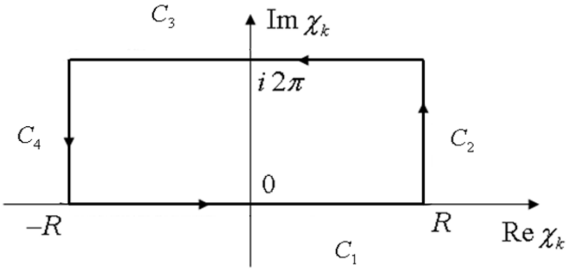


Рисунок 1.1 – Контур интегрирования C в комплексной χ_k -плоскости

Значение интеграла в (1.5) можно определить, применяя теорему о вычетах [4], [5]. После определения координат полюсов, попадающих внутрь контура интегрирования

$$(\chi_{k_{01}} = \chi_q + i\varepsilon,\ \chi_{k_{02}} = -\chi_q + i(2\pi - \varepsilon)),$$

и значений вычетов в них [6], для интеграла I_{11} в пределе $\varepsilon \to +0$ получим выражение

$$I_{11}(r) = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh}\chi_q} \frac{\operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right) m r\right)}{\operatorname{sh}\left(\pi m r\right)}. \quad (1.6)$$

С учетом (1.6) интеграл $I_1(r)$ приведем к виду

$$I_1(r) = \frac{\pi i}{\operatorname{sh}\chi_q} \frac{\operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right) m r\right)}{\operatorname{sh}\left(\pi m r\right)}. \quad (1.7)$$

Интеграл $I_2(r)$ содержит $\sin\left(\chi_k m r\right)$ в числителе и $\operatorname{sh}\left(\chi_k + i\gamma\right)$ в знаменателе, следовательно, в точке $\chi_k = 0$ подынтегральная функция имеет устранимую особенность. Представим $I_2(r)$ в виде $I_2(r) = \left(I_{21}(r) - I_{21}(-r)\right)/4i$, где

$$I_{21}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}\chi_k}{\operatorname{sh}\left(\chi_k + i\gamma\right)} \frac{e^{i\chi_k m r}}{\operatorname{ch}\chi_k - \operatorname{ch}\left(\chi_q + i\varepsilon\right)} d\chi_k.$$

В результате применения вышеизложенного метода для интеграла $I_{21}(r)$ в пределе $\gamma, \varepsilon \to +0$ получим

$$I_{21}(r) = \frac{\pi i}{\operatorname{sh}\left(\pi m r\right)} \left[\frac{e^{-\pi m r}}{1 - \operatorname{ch}\chi_q} - \frac{1}{1 + \operatorname{ch}\chi_q} + \right.$$
$$\left. + \frac{\operatorname{ch}\chi_q}{\operatorname{sh}^2\chi_q} 2\operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi\right) m r\right) \right]. \quad (1.8)$$

Воспользуемся выражением (1.8) и представим $I_2(r)$ в виде

$$I_2(r) = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}\left(\pi m r\right)} \left[\frac{\operatorname{ch}\left(\pi m r\right)}{1 - \operatorname{ch}\chi_q} - \frac{1}{1 + \operatorname{ch}\chi_q} + \right.$$
$$\left. + \frac{\operatorname{ch}\chi_q}{\operatorname{sh}^2\chi_q} 2\operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi\right) m r\right) \right]. \quad (1.9)$$

Применяя тот же метод сведения интеграла вдоль вещественной прямой к интегралу по замкнутому контуру, для интеграла I_3 в пределе $\gamma, \varepsilon \to +0$ получим

$$I_3(r) = \frac{\pi i}{2\operatorname{sh}\left(\pi m r\right)} \left[\frac{i m r \operatorname{ch}\left(\pi m r\right)}{1 - \operatorname{ch}\chi_q} - \right.$$
$$\left. - \frac{i m r}{1 + \operatorname{ch}\chi_q} + \frac{\operatorname{ch}^2\chi_q}{\operatorname{sh}^3\chi_q} 2\operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi\right) m r\right) \right]. \quad (1.10)$$

Подставляя соотношения (1.7), (1.9) и (1.10) в (1.3), можно получить выражение для ФГ в РКП модифицированного уравнения Кадышевского. Аналогично получаются выражения для ФГ трёх других (см. пояснения после формулы (1.1)) рассматриваемых нами уравнений. Для краткости представим их в компактном виде

$$G_{1(j)}\left(\chi_q, r, r'\right) = \frac{-1}{\left(m r + i\right)\left(m r' - i\right)} \times$$
$$\times \left(G_{1(j)}\left(\chi_q, r - r'\right) + G_{1(j)}\left(\chi_q, r + r'\right) \right), \quad (1.11)$$

В развёрнутой записи функции $G_{1(j)}\left(\chi_q, \rho\right)$ для каждого из уравнений соответственно имеют вид

$$G_{1(1)}\left(\chi_q, \rho\right) = \frac{i}{2} \frac{m r r'}{\operatorname{sh}\chi_q} \frac{\operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right) m \rho\right)}{\operatorname{sh}\left(\pi m \rho\right)} +$$
$$+ \frac{(-1)^k \rho}{2\operatorname{sh}\left(\pi m \rho\right)} \left[\frac{\operatorname{ch}\left(\pi m \rho\right)}{1 - \operatorname{ch}\chi_q} - \frac{1}{1 + \operatorname{ch}\chi_q} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\operatorname{ch}\chi_q}{\operatorname{sh}^2\chi_q} \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi\right) m \rho\right) \right] + \frac{(-1)^k i}{4\operatorname{sh}\left(\pi m \rho\right)} \times \quad (1.12)$$
$$\times \left[\frac{i\rho \operatorname{ch}\left(\pi m \rho\right)}{1 - \operatorname{ch}\chi_q} - \frac{i\rho}{1 + \operatorname{ch}\chi_q} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{m} \frac{\operatorname{ch}^2\chi_q}{\operatorname{sh}^3\chi_q} \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right) m \rho\right) \right],$$

$$G_{1(2)}\left(\chi_q, \rho\right) = \frac{i m r r'}{\operatorname{sh} 2\chi_q} \frac{\operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right) m \rho\right)}{\operatorname{sh}\left(\pi m \rho/2\right)} +$$
$$+ \frac{(-1)^k \rho}{2\operatorname{sh}\left(\pi m \rho\right)} \left[\frac{\operatorname{ch}\left(\pi m \rho\right) + 1}{1 - \operatorname{ch}^2\chi_q} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\operatorname{ch}\left(\pi m \rho/2\right) \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right) m \rho\right)}{\operatorname{sh}^2\chi_q} \right] + \quad (1.13)$$
$$+ \frac{(-1)^k i}{2\operatorname{sh}\left(\pi m \rho\right)} \left[\frac{i\rho\left(\operatorname{ch}\left(\pi m \rho\right) + 1\right)}{1 - \operatorname{ch}^2\chi_q} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{m} \frac{\operatorname{ch}\chi_q}{\operatorname{sh}^3\chi_q} \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right) m \rho\right) \operatorname{ch}\left(\pi m \rho/2\right) \right],$$

$$G_{1(3)}\left(\chi_q,\rho\right)=\frac{i}{2}\frac{mrr'}{\operatorname{sh}\chi_q}\frac{\operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q+\pi/2\right)m\rho\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi m\rho/2\right)}+$$

$$+\frac{(-1)^k\rho}{2\operatorname{sh}\left(\pi m\rho\right)}\left[\frac{\operatorname{ch}\left(\pi m\rho\right)-1}{1-\operatorname{ch}^2\chi_q}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\operatorname{ch}\chi_q}{\operatorname{sh}^2\chi_q}\operatorname{sh}\left(\pi m\rho/2\right)\operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q+\pi/2\right)m\rho\right)\right]+\quad(1.14)$$

$$+\frac{(-1)^k i}{2\operatorname{sh}\left(\pi m\rho\right)}\times\left[\frac{i\rho\left(\operatorname{ch}\left(\pi m\rho\right)-1\right)}{1-\operatorname{ch}^2\chi_q}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{m}\frac{\operatorname{ch}^2\chi_q}{\operatorname{sh}^3\chi_q}\operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q+\pi/2\right)m\rho\right)\operatorname{sh}\left(\pi m\rho/2\right)\right],$$

$$G_{1(4)}\left(\chi_q,r,r'\right)=$$

$$=\frac{imrr'}{\operatorname{sh}2\chi_q}\left[\frac{i\operatorname{sh}\chi_q}{\operatorname{ch}\left(\pi m\rho/2\right)}+\frac{2\operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q+\pi\right)m\rho\right)}{\operatorname{sh}\left(\pi m\rho\right)}\right]+$$

$$+\frac{(-1)^k\rho}{2\operatorname{sh}\left(\pi m\rho\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{\operatorname{ch}\left(\pi m\rho\right)}{1-\operatorname{ch}\chi_q}+\frac{1}{1+\operatorname{ch}\chi_q}+\frac{2\operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q+\pi\right)m\rho\right)}{\operatorname{sh}^2\chi_q}\right]+\quad(1.15)$$

$$+\frac{i(-1)^k}{2\operatorname{sh}\left(\pi m\rho\right)}\left[\frac{i\rho\operatorname{ch}\left(\pi m\rho\right)}{1-\operatorname{ch}\chi_q}+\right.$$

$$\left.+\frac{i\rho}{1+\operatorname{ch}\chi_q}+\frac{2}{m}\frac{\operatorname{ch}\chi_q}{\operatorname{sh}^3\chi_q}\operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q+\pi\right)m\rho\right)\right].$$

В выражениях (1.12)–(1.15) коэффициент $k=1$ при $\rho=r+r'$ и $k=2$ при $\rho=r-r'$.

Произведем анализ полученных функций Грина. На рисунках 1.2, 1.3 изображены графики зависимостей действительной и мнимой частей функций Грина (1.11) от r, рассчитанных при $r'=1$ и $\chi_q=1$. На этих графиках можно выделить следующую особенность: при больших значениях r функции Грина уравнений Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского ведут себя одинаково. Также одинаково ведут себя функции Грина модифицированных уравнений. Действительно, асимптотическое поведение ФГ (1.11) при $r\to\infty$ описывается формулами

$$G_{1(j)}\left(\chi_q,r,r'\right)\Big|_{r\to\infty}\cong K_{(j)}\left(r'\right)e^{i\chi_q mr},\qquad(1.16)$$

в которых

$$K_{(1)}\left(r'\right)=K_{(3)}\left(r'\right)=$$

$$=\frac{-ir'}{mr'-i}\left(\frac{\cos\left(\chi_q mr'\right)}{\operatorname{sh}\chi_q}-\frac{\operatorname{cth}\chi_q\sin\left(\chi_q mr'\right)}{mr'\operatorname{sh}\chi_q}\right),$$

$$K_{(2)}\left(r'\right)=K_{(4)}\left(r'\right)=$$

$$=\frac{-ir'}{mr'-i}\left(\frac{2\cos\left(\chi_q mr'\right)}{\operatorname{sh}2\chi_q}-\frac{\sin\left(\chi_q mr'\right)}{mr'\operatorname{sh}^2\chi_q}\right).$$

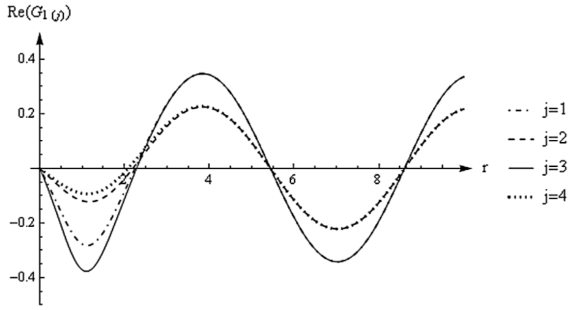


Рисунок 1.2 – Зависимость действительной части функций Грина (1.11) от координаты r

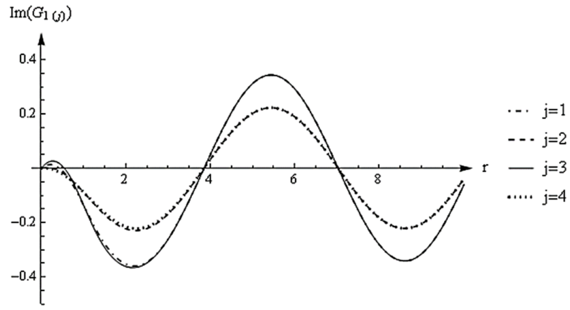


Рисунок 1.3 – Зависимость мнимой части функций Грина (1.11) от координаты r

В нерелятивистском пределе (при $m\to\infty$, $\chi_q\to 0$) все четыре рассмотренные ФГ преобразуются в записанную в координатном представлении ФГ трёхмерного уравнения Шрёдингера для p-состояния [7]:

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ \chi_q\to 0}}G_{1(j)}\left(\chi_q,r,r'\right)=G_0\left(q,r,r'\right)=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{q}e^{iqr}\left(i\cos\left(qr'\right)-\dfrac{1}{r'q}i\sin\left(qr'\right)-\right.\\ \left.-\dfrac{1}{rq}\cos\left(qr'\right)+\dfrac{1}{rr'q^2}\sin\left(qr'\right)\right); & r>r',\\ \hline -\dfrac{1}{q}e^{iqr'}\left(i\cos\left(qr\right)-\dfrac{1}{rq}i\sin\left(qr\right)-\right.\\ \left.-\dfrac{1}{r'q}\cos\left(qr\right)+\dfrac{1}{rr'q^2}\sin\left(qr\right)\right); & r<r',\end{cases}$$

где q – нерелятивистский импульс, r – модуль радиус-вектора $\vec{x}$ в обычном координатном представлении.

2 Решение релятивистских уравнений с дельта-потенциалом в релятивистском конфигурационном представлении

Рассмотрим уравнение для парциальных волновых функций p-состояний рассеяния:

$$\psi_{(j)}(r) = m\,\mathrm{sh}\,\chi_q p_1(\chi_q, r) + \\ + \int_0^\infty G_{1(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(r') dr', \tag{2.1}$$

где индексом $j = 1, 2, 3, 4$ устанавливается соответствие с рассматриваемым уравнением. При использовании модельного потенциала «δ-сфера»:

$$V_1(r) = V_0 \delta(r - a), \tag{2.2}$$

уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\psi_{(j)}(r) = m\,\mathrm{sh}\,\chi_q p_1(\chi_q, r) + \\ + G_{1(j)}(\chi_q, r, a) V_0 \psi_{(j)}(a). \tag{2.3}$$

Чтобы определить константу $\psi_{(j)}(a)$, рассмотрим (2.3) в точке $r = a$:

$$\psi_{(j)}(a) = m\,\mathrm{sh}\,\chi_q p_1(\chi_q, a) + \\ + G_{1(j)}(\chi_q, a, a) V_0 \psi_{(j)}(a).$$

Это линейное алгебраическое уравнение относительно величины $\psi_{(j)}(a)$ легко решается:

$$\psi_{(j)}(a) = \frac{m\,\mathrm{sh}\,\chi_q p_1(\chi_q, a)}{1 - V_0 G_{1(j)}(\chi_q, a, a)}. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), получим выражение для волновой функции

$$\psi_{(j)}(r) = m\,\mathrm{sh}\,\chi_q p_1(\chi_q, r) + \\ + G_{1(j)}(\chi_q, r, a) V_0 \frac{m\,\mathrm{sh}\,\chi_q p_1(\chi_q, a)}{1 - V_0 G_{1(j)}(\chi_q, a, a)}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим характер изменения волновой функции (2.5) при больших значениях релятивистской переменной *r*:

$$\psi_{(j)}(r)\Big|_{r\to\infty} = m\,\mathrm{sh}\,\chi_q \left(p_1(\chi_q, r)\right)\Big|_{r\to\infty} + \\ + f^1_{1(j)}(\chi_q)(-i) e^{im\chi_q r} m\,\mathrm{sh}\,\chi_q.$$

Здесь $f^1_{1(j)}(\chi_q)$ – релятивистская амплитуда рассеяния, которая выражается через функцию Грина следующим образом:

$$f^1_{1(j)}(\chi_q) = iK_{(j)}(a) V_0 \frac{p_1(\chi_q, a)}{1 - V_0 G_{1(j)}(\chi_q, a, a)}.$$

Парциальное сечение рассеяния для *p*-волны может быть выражено через амплитуду рассеяния $f^1_{1(j)}(\chi_q)$:

$$\sigma^1_{1(j)}(\chi_q) = 12\pi \left| f^1_{1(j)}(\chi_q) \right|^2. \tag{2.6}$$

На рисунке 2.1 приведены зависимости сечения рассеяния от быстроты χ_q, рассчитанные при фиксированных значениях параметров $a = 5$, $V_0 = 2$, $m = 1$.

Отметим некоторые особенности анализируемых парциальных сечений рассеяния:

– при увеличении параметра *a* максимальные значения сечения рассеяния увеличиваются;

– при увеличении параметра V_0 вблизи нулей функции $\sigma^1_{1(j)}(\chi_q)$ появляются дополнительные пики;

– при увеличении параметра *m* максимумы сечения рассеяния смещаются в область меньших значений параметра χ_q.

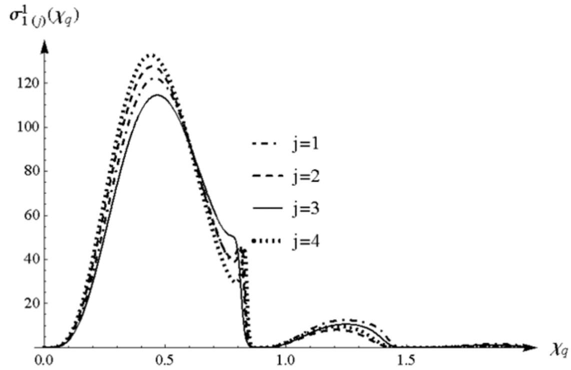


Рисунок 2.1 – Зависимость парциального сечения рассеяния $\sigma^1_{1(j)}$ от χ_q

Сравним полученные нами результаты с теми, которые ранее были получены в [8] при решении аналогичной задачи для *s*-состояний рассеяния. Приведем на рисунке 2.2 графики зависимости сечения рассеяния от быстроты χ_q, рассчитанные на основе решений уравнения Логунова – Тавхелидзе при $l = 0,1$ и использованных в предыдущем фрагменте значениях параметров ($a = 5$, $V_0 = 2$, $m = 1$).

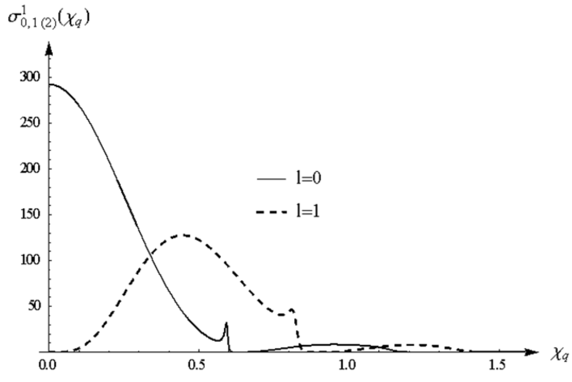


Рисунок 2.2 – Зависимость парциального сечения рассеяния $\sigma^1_{0,1(2)}$ от χ_q, рассчитанного на основе решений уравнения Логунова – Тавхелидзе при $l = 0,1$

Анализируя рисунок 2.2, видим, что локальные максимумы сечения рассеяния для *p*-состояния по сравнению с максимумами для *s*-состояния смещены в направлении больших значений быстроты χ_q, что обусловлено следствием наличия центробежного барьера.

3 Решение релятивистских уравнений при моделировании взаимодействия суперпозицией двух дельта-потенциалов в релятивистском конфигурационном представлении

Теперь представим содержащийся в релятивистском уравнении потенциал суперпозицией двух потенциалов «δ-сфера»:

$$V_2(r)=V_{01}\delta(r-a_1)+V_{02}\delta(r-a_2). \tag{3.1}$$

С учетом потенциала (3.1) уравнение (2.1) приведем к виду

$$\begin{aligned}\psi_{(j)}(r)&=m\operatorname{sh}\chi_q p_1(\chi_q,r)+\\&+G_{1(j)}(\chi_q,r,a_1)V_{01}\psi_{(j)}(a_1)+\\&+G_{1(j)}(\chi_q,r,a_2)V_{02}\psi_{(j)}(a_2).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Содержащиеся в (3.2) значения функций $\psi_{(j)}(a_1)$ и $\psi_{(j)}(a_2)$ можно определить, вычисляя функции $\psi_{(j)}(r)$ в точках $r=a_1$ и $r=a_2$. В результате их подстановки в (3.2) получим алгебраическую систему уравнений, которую удобно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix}1-V_{01}G_{1(j)}(\chi_q,a_1,a_1) & -V_{02}G_{1(j)}(\chi_q,a_1,a_2)\\ -V_{01}G_{1(j)}(\chi_q,a_2,a_1) & 1-V_{02}G_{1(j)}(\chi_q,a_2,a_2)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\psi_{(j)}(a_1)\\ \psi_{(j)}(a_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\operatorname{sh}\chi_q p_1(\chi_q,a_1)\\ m\operatorname{sh}\chi_q p_1(\chi_q,a_2)\end{pmatrix}.$$

Решая эту систему уравнений, выражения для $\psi_{(j)}(a_1)$ и $\psi_{(j)}(a_2)$ можно записать в виде

$$\psi_{(j)}(a_1)=\frac{\Delta_{1(j)}(\chi_q)}{\Delta_{(j)}(\chi_q)},\ \psi_{(j)}(a_2)=\frac{\Delta_{2(j)}(\chi_q)}{\Delta_{(j)}(\chi_q)},$$

где введены обозначения

$$\Delta_{(j)}(\chi_q)=\prod_{n=1}^{2}\left[1-V_{0n}G_{1(j)}(\chi_q,a_n,a_n)\right]-$$
$$-V_{01}V_{02}\left(G_{1(j)}(\chi_q,a_1,a_2)\right)^2;$$

$$\Delta_{1(j)}(\chi_q)=$$
$$=m\operatorname{sh}\chi_q p_1(\chi_q,a_1)\left[1-V_{02}G_{1(j)}(\chi_q,a_2,a_2)\right]+$$
$$+V_{02}m\operatorname{sh}\chi_q p_1(\chi_q,a_2)G_{1(j)}(\chi_q,a_1,a_2);$$

$$\Delta_{2(j)}(\chi_q)=$$
$$=m\operatorname{sh}\chi_q p_1(\chi_q,a_2)\left[1-V_{01}G_{1(j)}(\chi_q,a_1,a_1)\right]+$$
$$+V_{01}m\operatorname{sh}\chi_q p_1(\chi_q,a_1)G_{1(j)}(\chi_q,a_2,a_1).$$

При $r\to\infty$ выражение (3.2) примет вид

$$\begin{aligned}\psi_{(j)}(r)\Big|_{r\to\infty}&=m\operatorname{sh}\chi_q\left(p_1(\chi_q,r)\right)\Big|_{r\to\infty}+\\&+G_{1(j)}(\chi_q,r,a_1)\Big|_{r\to\infty}V_{01}\psi_{(j)}(a_1)+\\&+G_{1(j)}(\chi_q,r,a_2)\Big|_{r\to\infty}V_{02}\psi_{(j)}(a_2).\end{aligned}\tag{3.3}$$

С учетом асимптотических выражений ФГ (1.16) в соотношении (3.3) получим

$$\psi_{(j)}(r)\Big|_{r\to\infty}=m\operatorname{sh}\chi_q\left(p_1(\chi_q,r)\right)\Big|_{r\to\infty}+$$
$$+f_{1(j)}^2(\chi_q)(-i)e^{im\chi_q r}m\operatorname{sh}\chi_q,$$

при этом релятивистская амплитуда рассеяния $f_{1(j)}^2(\chi_q)$, соответствующая уравнению с модельным потенциалом (3.1), выражается аналитически:

$$f_{1(j)}^2(\chi_q)=$$
$$=\frac{K_{(j)}(a_1)V_{01}\psi_{(j)}(a_1)+K_{(j)}(a_2)V_{02}\psi_{(j)}(a_2)}{-im\operatorname{sh}\chi_q}.\tag{3.4}$$

Парциальное сечение рассеяния для p-состояния выражается через амплитуду рассеяния в соответствии с формулой (2.6). Характер его зависимости от быстроты χ_q для всех четырёх ФГ иллюстрирован на рисунке 3.1 в виде графиков, построенных при $a_1=3$, $V_{01}=1$, $a_2=4$, $V_{02}=2$, $m=1$.

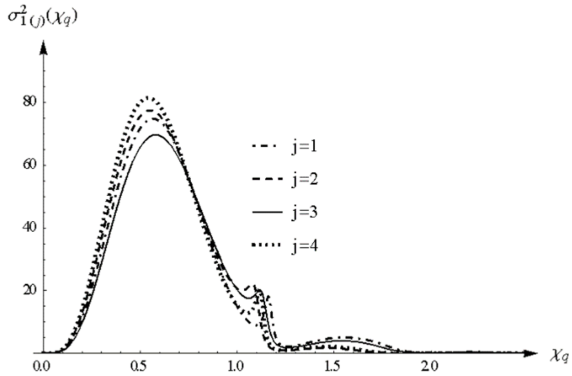


Рисунок 3.1 – Зависимость парциального сечения рассеяния $\sigma^2_{1(j)}$ от χ_q

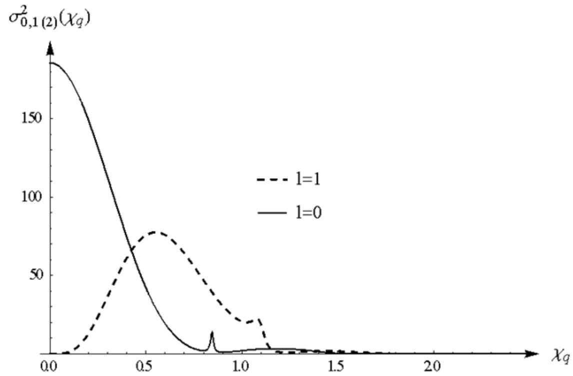


Рисунок 3.2 – Зависимость парциального сечения рассеяния $\sigma^2_{0,1(2)}$ от χ_q, рассчитанная с учетом решений уравнения Логунова – Тавхелидзе при $l=0,1$

Для удобства сравнения с результатами, ранее полученными в [8] применительно к *s*-состояниям, на рисунке 3.2 для рассматриваемых четырёх уравнений приведены графики зависимости сечения рассеяния от быстроты χ_q, рассчитанные на основе решений уравнения Логунова – Тавхелидзе при $l = 0{,}1$ и следующих значениях других параметров: $a_1 = 3$, $V_{01} = 1$, $a_2 = 4$, $V_{02} = 2$, $m = 1$.

Очевидно, что и в этом случае в сечении рассеяния *p*-состояния имеет место сдвиг максимумов в направлении больших значений быстроты χ_q по сравнению с положением максимумов в сечении рассеяния *s*-состояния.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена задача об изучении состояний рассеяния системы двух релятивистских частиц с использованием релятивистского конфигурационного представления. Необходимые для решения этой задачи явные выражения функций Грина получены для *p*-состояний, характеризующихся орбитальным квантовым числом $l = 1$. Подробно описана методика нахождения волновых функций, парциальных амплитуд рассеяния и сечений рассеяния с использованием модельных потенциалов двух видов: «δ-сфера» и суперпозиция двух потенциалов «δ-сфера». Результаты расчета зависимости парциальных сечений рассеяния от быстроты иллюстрированы графически и сопоставлены с результатами, полученными в [8] для *s*-состояний рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kapshai*, *V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45, № 1. – P. 1–9.

2. *Kapshai*, *V.N.* Partial quasipotential equations in the relativistic configuration representation / V.N. Kapshai, S.I. Fialka // Russ. Phys. Journal. – 2018. – Vol. 60, № 10. – P. 1696–1704.

3. *Капшай*, *В.Н.* Разложение по матричным элементам УНП группы Лоренца и интегральные уравнения для релятивистских волновых функций / В.Н. Капшай, Т.А. Алфёрова // Ковариантные методы в теоретической физике: сб. ст. – Минск: Ин-т физики НАН Беларуси. – 1997. – Вып. 4. – С. 88–95.

4. *Arfken*, *G.B.* Mathematical methods for physicists / G.B. Arfken, H.J. Weber, F.E. Harris. – 7th ed. – New York: Elsevier, 2013. – 1205 p.

5. *Гельфонд*, *А.О.* Вычеты и их приложения / А.О. Гельфонд. – М.: Ленанд, 2018. – 114 с.

6. *Wunsch*, *A.D.* Complex variables with applications / A.D. Wunsch. – 3rd ed. – New York: PAW, 2005. – 676 p.

7. *Тейлор*, *Дж.* Теория рассеяния: квантовая теория нерелятивистских столкновений / Дж. Тейлор. – Москва: Мир, 1975. – 568 с.

8. *Капшай*, *В.Н.* Релятивистская задача о *s*-состояниях рассеяния для суперпозиции двух потенциалов «δ-сфера» / В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 7–12

Поступила в редакцию 20.07.2021.

ФИЗИКА

УДК 531.226.1

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ РЕШЕТКАХ В СРЕДЕ «РЕОКСАН»

Г.В. Кулак, В.Н. Навныко, Т.В. Николаенко

Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина

POLARIZATION SPECIFIC FEATURES OF LIGHT DIFFRACTION BY HOLOGRAPHIC PHASE GRATINGS IN "REOKSAN" MEDIUM

G.V. Kulak, V.N. Naunyka, T.V. Nikolaenko

Mozyr State Pedagogical University named after I.P. Shamyakin

Теоретически исследованы поляризационные и энергетические характеристики дифрагированных волн нулевого и первого порядка при брэгговской дифракции света на голографических фазовых решетках в среде «реоксан» со значительной амплитудой изменения показателя преломления регистрирующей среды. Установлено, что коэффициенты отражения и пропускания дифрагированных волн для *s*- и *p*-поляризации падающего света испытывают значительные изменения при модуляции показателя преломления слоя. Показано, что в условиях френелевского отражения световых волн от границ модулированного слоя и увеличении амплитуды возмущения показателя преломления среды, имеет место значительный поворот плоскости поляризации дифрагированной волны для прошедших и отраженных дифракционных порядков.

Ключевые слова*: голографическая фазовая решетка, брэгговская дифракция света, френелевское отражение, коэффициенты отражения и пропускания, модуляция света, голографическая среда.*

The polarization and energy characteristics of diffracted zero- and first-order waves under Bragg diffraction of light on holographic phase gratings in a "reoksan" medium with a significant amplitude of the refractive index of the recording medium are theoretically investigated. It is founded that the reflection and transmission coefficients of diffracted waves for the *s*- and *p*-polarization of incident light experience significant changes when the refractive index of the layer is modulated. It is shown that under the conditions of Fresnel reflection of light waves from the boundaries of the modulated layer and the increase in the amplitude of the perturbation of the refractive index of the medium, there is a significant rotation of the polarization plane of the diffracted wave for the transmitted and reflected diffraction orders.

Keywords: *holographic phase grating, Bragg light diffraction, Fresnel reflection, reflection and transmission coefficients, light modulation, holographic "reoksan" medium.*

Введение

Высокое значение величины фотоиндуцированного изменения показателя преломления материала среды, регистрирующей голографическую фазовую решетку (ГР) в оптически изотропной среде ($\Delta n = 5{\cdot}10^{-3}$), отмечено в работах [1], [2]. Показано, что в регистрирующей среде «реоксан» возможна запись высокоэффективных пропускающих и отражательных фазовых голограмм при геометрической толщине слоя материала ~ 0,15–3 мм. При этом, однако, в условиях считывания ГР не учитывалось френелевское отражение световых волн от границ модулированной среды [3], [4]. В настоящее время, кроме рассматриваемой среды для записи ГР, широкое применение находят различные регистрирующие ГР среды (фотополимеризующие акрилатные композиции, фотохромные среды органического и неорганического типа, фоторефрактивные полимеры и др.), в которых амплитуда модуляции показателя преломления достигает величин $\Delta n \sim 10^{-2}$–10^{-1} [5].

В настоящей работе на примере голографической среды «реоксан» теоретически исследованы энергетические и поляризационные характеристики света при брэгговской дифракции на ГР в оптически изотропных средах при учете френелевского отражения от границ плоскопараллельного слоя.

1 Теоретические результаты

Предположим, что плоскопараллельный слой толщиной h с показателем преломления n_2 расположен между однородными прозрачными средами с показателями преломления n_1 и n_3. Начало системы координат XYZ расположено на верхней границе слоя, а ось Y перпендикулярна плоскости падения (рисунок 1.1). Световая волна с произвольным азимутом поляризации ψ_0 падает под углом φ_1 к его нормали на границу слоя z = 0 и испытывает дифракцию в режиме Брэгга в слое.

В условиях брэгговской дифракции света в слое на его толщину (h) накладывается ограничение: $h >> 2n_2\Lambda^2/\lambda_0$ [3], [4], где λ_0 – длина световой волны в вакууме, Λ – пространственный период ГР. При этом угол преломления света $\varphi_2 = \arcsin(n_1 \sin\varphi_1 / n_2)$ совпадает (или близок) к брэгговскому, то есть $\varphi_2 \approx \varphi_Б = \arcsin(\lambda_0 / 2n_2\Lambda)$, где n_2 – средний показатель преломления слоя.

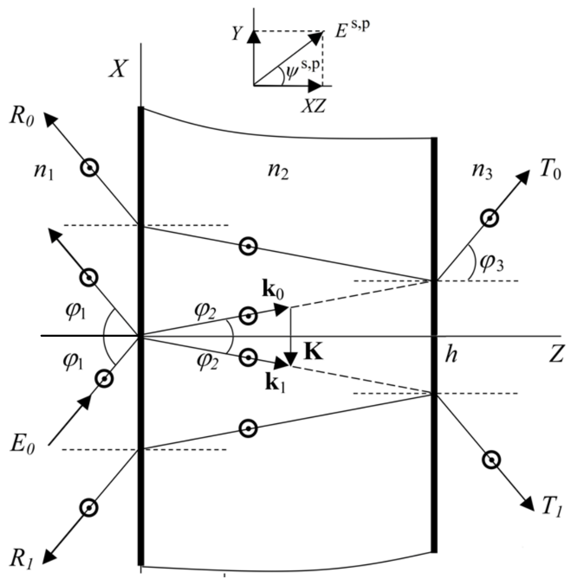


Рисунок 1.1 – Схема считывания ГР в оптически изотропном плоскопараллельном слое (XZ – плоскость дифракции, R_0, R_1 – коэффициенты отражения дифрагированных волн, T_0, T_1 – коэффициенты пропускания дифрагированных волн, φ_1 (φ_2) – угол падения (преломления) на границе z = 0, φ_3 – угол преломления на границе $z = h$)

Решетка показателя преломления, создаваемая ГР вдоль оси X имеет вид:

$$n_{2s}(x) = n_2 + (\Delta n_{2s} / 2n_2)\exp(iKx), \qquad (1.1)$$

где $K = 2\pi / \Lambda$ – волновое число ГР. Предполагается, что плоская световая волна с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}_1 = \vec{e}_x k_{1x} + \vec{e}_z k_{1z}$ ($k_{1x} = kn_1 \sin\varphi_1$, $k_{1z} = kn_1 \cos\varphi_1$, $k = \omega / c$) имеет s-поляризацию.

Решение волнового уравнения для дифрагированного поля электромагнитной волны в слое имеет вид [3]:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m(z)\exp[i(K_{mz}z - \omega_m t - \pi m/2)], \qquad (1.2)$$

где $k_{mz} = k_{0z} + mK$, $\omega_m = \omega + m\Omega$.

При условии: $k_{0z} \approx K/2$ из совокупности (1.2) дифрагированных волн выделяют две наиболее существенные с дифракционными порядками $m = 0$ и $m = -1$. Тогда для s-поляризованной падающей воны, система уравнений связанных волн имеет вид:

$$\frac{d^2 A_0}{dz^2} + k_{0z}^2 A_0 - i\eta_s k_2^2 A_{-1} = 0,$$
$$\frac{d^2 A_{-1}}{dz^2} + k_{-1z}^2 A_0 + i\eta_s k_2^2 A_0 = 0, \qquad (1.3)$$

где $k_{0z} = (k_2^2 - k_{0x}^2)^{1/2}$, $k_{-1z} = (k_2^2 - k_{-1x}^2)^{1/2}$,

$$k_{0x} = k_2 \sin\varphi_Б, \quad k_{-1x} = k_2 \sin\varphi_Б,$$
$$\eta_s = -\Delta n_{2s} / n_2 \cos\varphi_2.$$

С учетом результатов работ [3], [4], решение системы уравнений (1.3) в брэгговском режиме дифракции можно представить в виде: $A_0 = (U_2 + U_1)/2$, $A_{-1} = (U_2 - U_1)/2$. Величины $U_{1,2}$ находим из решения однородного уравнения:

$$\frac{d^2 U_{1,2}}{dz^2} + k_2^2\left(\cos^2\varphi_2 \pm \frac{1}{2}\eta_s\right)U_{1,2} = 0. \qquad (1.4)$$

Решение уравнений (1.4) имеет вид:

$$U_{1,2} = C_1^{\pm} e^{ik_2^{\pm}(z)} + C_2^{\pm} e^{-ik_2^{\pm}(z)}, \qquad (1.5)$$

где

$k_2^{\pm}(z) = k_2 z[(1 - n_1^2 / n_2^2)\sin^2\varphi_1 \pm (\Delta n_{2s} / 2n_2 \cos\varphi_2)]$;

$C_{1,2}^{\pm}$ – постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Сшивая напряженности электрического и магнитных полей в слое [3], [4], а также в областях $z < 0$ и $z > h$, находим коэффициенты отражения и пропускания (относительные интенсивности) дифрагированных волн на границах слоя. В случае дифракции s-поляризованных волн граничные условия, используемые в работе ($E_y \neq 0$, $H_y = 0$), аналогичны граничным условиям, приведенным в работе [3]. Для p-поляризованной падающей световой волны ($E_y = 0$, $H_y \neq 0$) амплитуда напряженности магнитного поля световой волны ортогональна плоскости падания XZ [6]. Коэффициенты отражения (R_{0s}) и пропускания (T_{0s}) s-поляризованных составляющих дифрагированных волн нулевого и первого (R_{1s}, T_{1s}) соответственно порядков определяются из соотношений:

$$R_{0s} = \left|\frac{\Delta_{0s}^r}{\Delta}\right|^2, \; R_{1s} = \left|\frac{2\Delta_{1s}^r}{n_1\Delta}\right|^2,$$
$$T_{0s} = \frac{n_3\cos\varphi_3}{n_1\cos\varphi_1}\left|\frac{2\Delta_{0s}^t}{n_3\Delta}\right|^2, \; T_{1s} = \frac{n_3\cos\varphi_3}{n_1\cos\varphi_1}\left|\frac{2\Delta_{1s}^t}{n_3\Delta}\right|^2, \qquad (1.6)$$

где

$$\Delta = (-\alpha_{1+}^-\alpha_{3+}^+ e_1^{-*} + \alpha_{1-}^-\alpha_{3-}^+ e_1^-)\times$$
$$\times(\alpha_{1+}^+\alpha_{3+}^+ e_1^{+*} - \alpha_{1-}^+\alpha_{3-}^+ e_1^+) +$$
$$+(\alpha_{1-}^+\alpha_{3-}^+ e_1^+ - \alpha_{1+}^+\alpha_{3+}^+ e_1^{+*})(\alpha_{1+}^+\alpha_{3+}^+ \mathrm{e}_1^{-*} - \alpha_{1-}^+\alpha_{3-}^+ e_1^-),$$
$$\Delta_0^{\mathrm{r}} = (-\alpha_{1+}^-\alpha_{3+}^- e_1^{-*} + \alpha_{1-}^-\alpha_{3+}^- e_1^-)\times$$
$$\times(\alpha_{1-}^+\alpha_{3+}^+ e_1^{+*} - \alpha_{1+}^+\alpha_{3-}^+ e_1^+) +$$
$$+(-\alpha_{1+}^+\alpha_{3+}^+ e_1^{+*} + \alpha_{1-}^+\alpha_{3+}^+ e_1^+)(\alpha_{1-}^-\alpha_{3+}^- e_1^{-*} - \alpha_{1+}^-\alpha_{3-}^- e_1^-),$$
$$\Delta_1^{\mathrm{r}} = (b_1^- - b_1^+)(\alpha_{3-}^+\alpha_{3+}^+ e_1^+ e_1^{-*} - \alpha_{3+}^-\alpha_{3-}^+ e_1^- e_1^{+*}) +$$
$$+(b_1^- - b_1^+)\left[(\alpha_{3-}^-)^2 e_1^+ e_1^- - (\alpha_{3+}^+)^2 e_1^{-*} e_1^{+*}\right], \qquad (1.7)$$
$$\Delta_{0,1}^{\mathrm{t}} = \mp\alpha_{1+}^+ e_1^{+*}\left[\alpha_{3+}^+ b_1^- + n_2\alpha_{3+}^- + \alpha_{3-}^-(b_1^- - b_1^+)/2\right] \pm$$
$$\pm\alpha_{1-}^+ e_1^+\left[\alpha_{3-}^+ b_1^- + n_2\alpha_{3-}^- + \alpha_{3+}^-(b_1^- - b_1^+)/2\right] -$$
$$-\alpha_{1+}^- e_1^{-*}\left[\alpha_{3+}^- b_1^+ + n_2\alpha_{3+}^- + \alpha_{3-}^+(b_1^+ - b_1^-)/2\right] +$$
$$\alpha_{1-}^- e_1^-\left[\alpha_{3-}^- b_1^+ + n_2\alpha_{3-}^+ + \alpha_{3+}^+(b_1^+ - b_1^-)/2\right].$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha^{\pm}_{1,3+} = (1 + n^{-1}_{1,3} b^{\pm}_1),\ \alpha^{\pm}_{1,3-} = (1 - n^{-1}_{1,3} b^{\pm}_1),$$

$$b^{\pm}_1 = k^{b,a}_{xs} / k,\ \ e^{\pm}_1 = \exp(ik^{b,a}_{xs}),$$

где $k^{b,a}_{xs} = k^{\pm}_2(h)$; знаком «*» обозначено комплексное сопряжение. При рассмотрении дифракции световых волн *p*-поляризации в выражениях (1.6), (1.7) следует выполнить замены: $s \to p,\ n_{1,2}\cos\varphi_{1,2} \to 1/n_{1,2}\cos\varphi_{1,2}$ для коэффициентов пропускания ($T_{0,1p}$) и отражения ($R_{0,1p}$). Из выражений (1.6), (1.7) следует, что выполняются следующие соотношения:

$$R_{0p,s} + R_{1p,s} + T_{0p,s} + T_{1p,s} = 1.$$

Для прозрачных слоёв в условиях, когда средний показатель преломления слоя и окружающих сред одинаковы (отсутствие френелевского отражения), отличные от нуля относительные интенсивности дифрагированных волн определяются соотношениями [7]

$$T_{0s(p)} = \cos^2(\pi\, \Delta n_{2s(p)} h / 2\lambda_0 \cos\varphi_1),$$

$$T_{1s(p)} = \sin^2(\pi\, \Delta n_{2s(p)} h / 2\lambda_0 \cos\varphi_1).$$

При этом следует полагать: $\Delta n_{2s} = \Delta n$, $\Delta n_{2p} = \Delta n \cos(2\varphi_2)$. При отсутствии фазовой модуляции слоя ($\Delta n = 0$) выражения (1.6), (1.7) сводятся к формулам Эйри для коэффициентов отражения и пропускания плоскопараллельного слоя [6].

Если падающая световая волна имеет азимут поляризации ψ_0, то для волны, дифрагированной в нулевой и первый порядки при наблюдении в отраженном свете, происходит поворот плоскости поляризации на угол [6]

$$\psi^{r}_{0,1} = \mathrm{arctg}(|r^{s}_{0,1}|/|r^{p}_{0,1}|\mathrm{tg}\psi_0).$$

При наблюдении в проходящем свете,

$$\psi^{t}_{0,1} = \mathrm{arctg}(|t^{s}_{0,1}|/|t^{p}_{0,1}|\mathrm{tg}\psi_0),$$

где $r^{s}_{0,1}$ ($r^{p}_{0,1}$) – амплитудные коэффициенты отражения дифрагированных волн *s*- (*p*-) поляризации, $t^{s}_{0,1}$ ($t^{p}_{0,1}$) – соответствующие таким волнам коэффициенты пропускания.

2 Результаты численных расчетов

Численные расчеты проводились для плоскопараллельного слоя из регистрирующей ГР среды «реоксан» в случае дифракции линейно поляризованного излучения *He- Ne*-лазера с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}6328$ мкм для произвольной линейной поляризации падающего света ψ_0. Предполагалось, что слой материала ($n_2 = 1{,}49$) граничит с воздухом ($n_1 = n_3 = 1$).

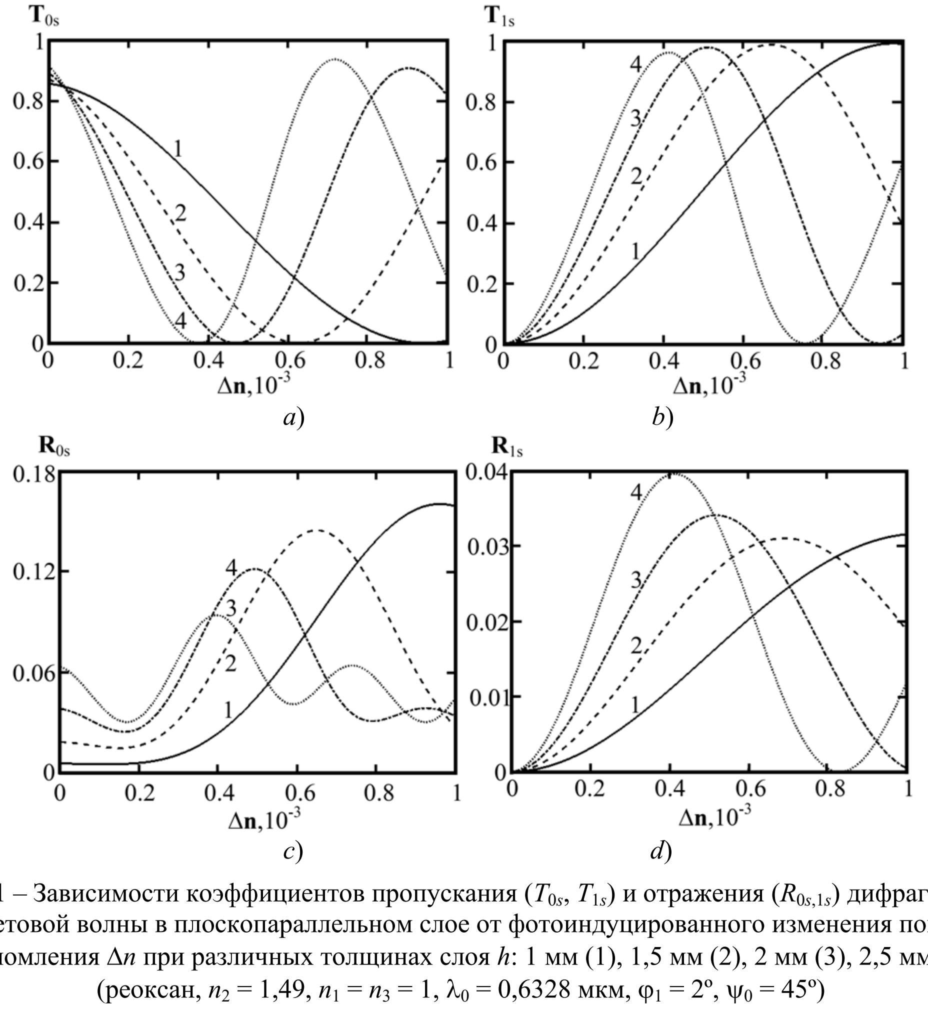


Рисунок 2.1 – Зависимости коэффициентов пропускания (T_{0s}, T_{1s}) и отражения ($R_{0s,1s}$) дифрагированной на ГР световой волны в плоскопараллельном слое от фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn при различных толщинах слоя *h*: 1 мм (1), 1,5 мм (2), 2 мм (3), 2,5 мм (4) (реоксан, $n_2 = 1{,}49$, $n_1 = n_3 = 1$, $\lambda_0 = 0{,}6328$ мкм, $\varphi_1 = 2^{\circ}$, $\psi_0 = 45^{\circ}$)

Зависимости коэффициентов отражения (R_{0s}, R_{1s}) и пропускания (T_{0s}, T_{1s}) дифрагированной на ГР световой волны в плоскопараллельном слое из реоксана от фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn при различных значениях толщины слоя h представлены на рисунке 2.1. Следует заметить, что для малых углов Брэгга можно положить, что угол падения света удовлетворяет соотношению: $\varphi_1 \approx \lambda_0 / 2n_1\Lambda$.

Зависимости, представленные на рисунке 2.1, *a*, показывают, что с увеличением фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn коэффициент пропускания T_{0s} осциллирует, не достигая максимального значения ($T_{0s} \neq 1$). Увеличение фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn сопровождается уменьшением, а затем последующим увеличением коэффициента пропускания. Изменение коэффициента пропускания T_{1s} имеет характер, близкий к противофазному, причем его амплитуда не принимает также максимального значения ($T_{1s} \neq 1$) $h = 2$ мм (рисунок 2.1, *b*). Такое поведение коэффициентов пропускания дифрагированных волн в прошедших дифракционных порядках обусловлено наличием, наряду с прошедшими пучками, и отраженных дифрагированных пучков. Коэффициент отражения дифрагированной волны нулевого порядка R_{0s} осциллирует с изменяющейся амплитудой при изменении показателя преломления Δn. Максимальное значение R_{0s} составляет 0,16 (рисунок 2.1, *c*) при $l = 1$ мм, $\Delta n \approx 0{,}95$. При увеличении показателя преломления Δn имеет место амплитудная модуляция коэффициента отражения дифрагированной волны первого порядка (R_{1s}). При этом, однако, величина коэффициента отражения $R_{1s} \approx 0{,}04$ (рисунок 2.1, *d*) – в максимуме.

Аналогичные особенности поведения коэффициентов отражения и пропускания дифрагированных волн имеют место для *p*-поляризованного падающего света. Количественное отличие величин коэффициентов отражения и пропускания связано с отличием френелевских коэффициентов отражения и пропускания на границах, периодически возмущенного ГР слоя. Следует отметить, что для $\Delta n \approx 10^{-4}$ при $h = 2{,}5$ мм, коэффициенты пропускания и отражения дифрагированной волны первого порядка $T_{1s} \approx 0{,}01$, $R_{1r} \approx 10^{-4}$. Таким образом, для большинства регистрирующих сред использование пропускающих ГР в режиме отражения возможно лишь при достаточно большой толщине материала.

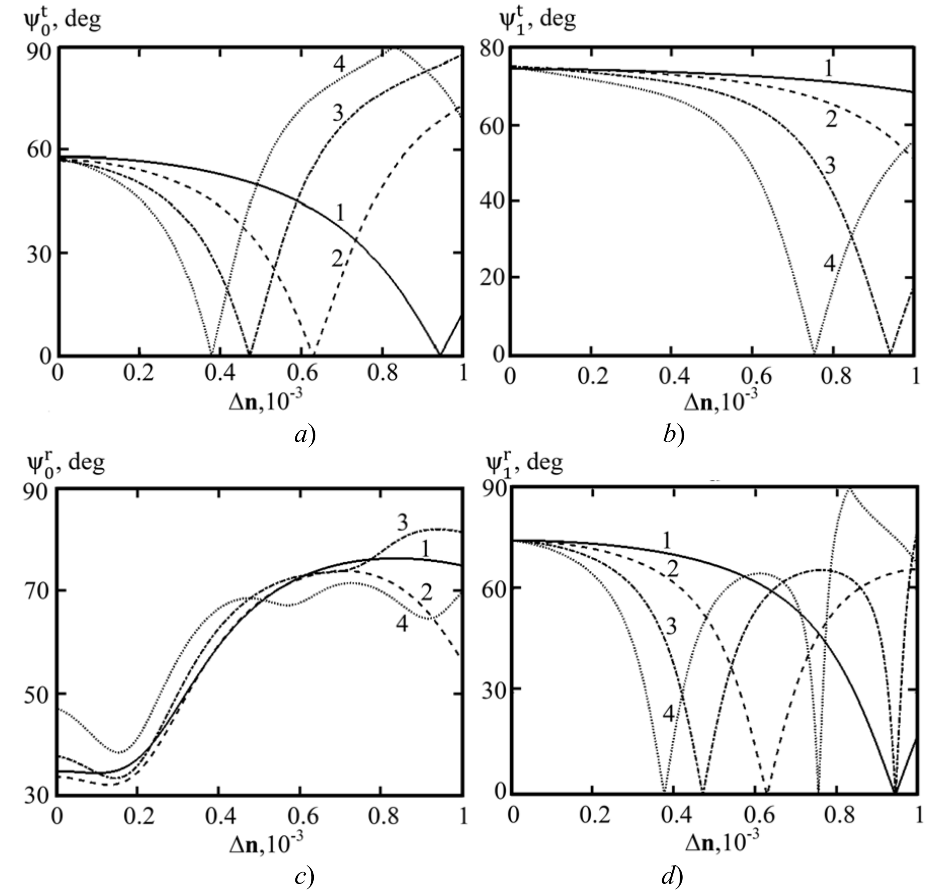


Рисунок 2.2 – Зависимости азимутов поляризации прошедшей (отраженной) дифрагированной волны нулевого ($\psi_0^{t,r}$) и первого ($\psi_1^{t,r}$) порядка от фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn при различных толщинах слоя h: 1 мм (1), 1,5 мм (2), 2 мм (3), 2,5 мм (4) (реоксан, $n_2 = 1{,}49$, $n_1 = n_3 = 1$, $\lambda_0 = 0{,}6328$ мкм, $\varphi_1 = 2$, $\psi_0 = 45^0$)

На рисунке 2.2, *a*, *b*, представлены зависимости азимута поляризации прошедшей дифрагированной волны нулевого ψ_0^t (*a*) и первого ψ_1^t (*b*) порядка.

Зависимости азимутов поляризации (ψ_0^r, ψ_1^r) для отраженных дифрагированных волн приведены на рисунке 2.2, *c*, *d*.

Из рисунка 2.2, *a*, следует, что азимут поляризации прошедшей дифрагированной волны нулевого порядка (ψ_0^t) при изменении Δn от $0{,}47 \cdot 10^{-3}$ до $0{,}8 \cdot 10^{-3}$ изменяется от 0º вплоть до 90º. Нулевые значения азимута поляризации ψ_0^t связаны с достижением нулевого значения коэффициента пропускания t_0^s при увеличении фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn и достаточно большим отличием коэффициентов пропускания t_0^s и t_0^p. В свою очередь, азимут поляризации дифрагированной волны первого порядка (ψ_1^t) дважды достигает нулевого значения (рисунок 2.2, *b*). При увеличении параметра Δn от $0{,}77 \cdot 10^{-3}$ до $0{,}82 \cdot 10^{-3}$ при $h = 2{,}5$ мм азимут поляризации отраженной дифрагированной волны первого порядка ψ_1^r изменяется от 0 до 90^0 (рисунок 2.2, *d*).

Заключение

Исследованы особенности брэгговской дифракции света на голографических фазовых решетках в плоскопараллельном слое, граничащим с прозрачными средами, имеющими отличные от слоя показатели преломления для *s*- и *p*-поляризации падающего света. Показано, что для пропускающих ГР возможно считывание голограмм не только в прошедших дифракционных порядках, но и в отраженных. На примере голографической среды «реоксан», позволяющей получить значительные фотоиндуцированные изменения показателя преломления слоя, исследованы энергетические коэффициенты отражения и пропускания дифрагированных волн нулевого и первого порядка в условиях фотоиндуцированного изменения показателя преломления среды и толщины слоя. Показано, что для падающего линейно-поляризованного света происходит значительное изменение азимута поляризации прошедшего и отраженного дифрагированного света при увеличении амплитуды фотоиндуцированного изменения показателя преломления слоя и его толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Использование фенантренхинона для формирования фазовых трехмерных голограмм в среде реоксана* / Н.С. Шелехов, О.В. Бандюк, А.П. Попов, А.О. Ребезов // Сб. научных трудов. Оптическая голография с записью в трехмерных средах; под ред. Ю.Н. Денисюка. – Л.: Наука, 1986. – С. 74–82.

2. *Длинноволновая граница спектральной чувствительности полимеров реоксана* / А.Н. Попов, А.Ф. Кавтрев, А.В. Вениаминов, Г.И. Лашков // Сб. научных трудов. Оптическая голография с записью в трехмерных средах; под ред. Ю.Н. Денисюка. – Л.: Наука, 1986. – С. 82–91.

3. *Kong*, *J.A*. Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media / J.A. Kong // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – Vol. 67, № 6. – P. 825–829.

4. *Кулак*, *Г.В*. Дифракция света на ультразвуке в условиях френелевского отражения / Г.В. Кулак // Опт. и спектр. – 1994. – Т. 76, № 6. – С. 1027–1029.

5. *Барачевский*, *В.А*. Современное состояние разработки светочувствительных сред (обзор) / В.А. Барачевский // Опт. и спектр. – 2018. – Т. 124, № 3. – С. 371–399.

6. *Борн*, *М*. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 721 с.

7. *Kogelnik*, *H*. Coupled wave theory for thick hologram gratings / H. Kogelnik // The Bell Syst. Tech. Journal. – 1969. – Vol. 48, № 9. – P. 2909–2947.

Поступила в редакцию 16.03.2021.

УДК 539.3

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ ТРУБ ИЗ КОМПОЗИТОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ВОЛНЫ ПРИ ГИДРОУДАРЕ

В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

IMPLEMENTATION OF THE CALCULATION OF THE STRESS-DEFORMED STATE OF LAYERED PIPES FROM COMPOSITES AND DETERMINATION OF WAVE VELOCITY IN HYDROLIC IMPACT

V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava

Francisk Skorina Gomel State University

Решается задача компьютерной реализации расчета напряженно-деформированного состояния слоистых труб из композитов и определения скорости волны при гидроударе. Рассматриваются два варианта задачи: труба с внутренним покрытием, состоящим из функционально-градиентного материала, и труба с внутренним покрытием из композита, композит волокнистый, состоящий из матрицы и волокон, модуль упругости которого определяется по правилу смесей.

Ключевые слова: *слоистая труба*, *функционально-градиентный материал*, *композит*, *футерованная труба*, *напряженно-деформированное состояние*, *скорость волны*.

The problem of computer implementation of calculating of the stress-strain state of laminated pipes made of composites and determining the wave velocity during water hammer is solved. Two variants of the problem are considered: a pipe with an inner coating consisting of a functionally gradient material, and a pipe with an inner coating of a composite, a fibrous composite consisting of a matrix and fibers, the elastic modulus of which is determined by the rule of mixtures.

Keywords: *laminated pipe*, *functional-gradient material*, *composite*, *lined pipe*, *stress-strain state*, *wave velocity*.

Введение

Многолетняя эксплуатация трубопроводов неразрывно связана с такими явлениями, как коррозия, утечка, разрывы, пренебрежение которых могут вызывать просадки дорог и экологические аварии, что, в свою очередь, имеет социальные последствия. Обслуживание и ремонт подземных трубопроводов чаще всего проводится путем извлечения поверхностных слоев грунта и раскопки открытых траншей, удаления изношенных трубопроводов, замены их на новые и засыпки. Эти процедуры могут нанести ущерб окружающей среде. Решением этой проблемы могут быть бестраншейные методы восстановления трубопроводов, которые заключаются в ремонте существующих трубопроводов без выемки грунта. Одним из таких методов является футеровка (технология CIPP) или метод полимеризации на месте трубы [1], процесс использования которой заключается во вставке пропитанной смолой гильзы в изношенный заглубленный трубопровод, расширение хвостовика и закрепление его на месте, используя ультрафиолетовый свет или другие технологии (закачивания горячего воздуха или воды). В результате получается новая труба внутри изношенной трубы. Технология CIPP была впервые разработана британским инженером Эриком Вудом, в 1971 году получила международный стандарт ISO 9000 [2].

1 Постановка задачи и методы решения

Рассматривается труба толщиной h_2 с внутренним покрытием толщиной h_1, состоящим из функционально-градиентного материала или покрытием из композита (рисунок 1.1). Внутри трубы действует давление p, внешнее давление равно нулю.

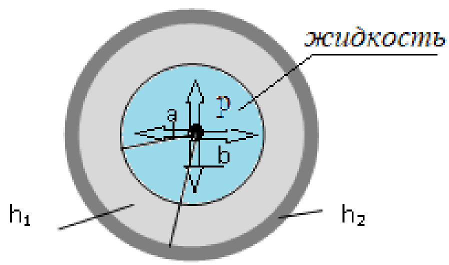


Рисунок 1.1 – Схема расчета слоистой трубы

Необходимо построить расчет напряженно-деформированного состояния слоистых труб из композитов и определения скорости волны при гидроударе, а также реализовать этот расчет с помощью компьютерных технологий.

Расчет напряженно-деформированного состояния слоистой трубы и покрытия можно описать уравнениями теории упругости. Для рассматриваемой задачи запишем уравнение равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,$$

геометрические и физические соотношения:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r},\ \varepsilon_z=0,$$

$$\sigma_r=2G\varepsilon_r+\lambda(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta),$$

$$\sigma_\theta=2G\varepsilon_\theta+\lambda(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta),$$

где $\sigma=\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z{}^T$ и $\varepsilon=\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_z{}^T$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно; u_r – радиальное перемещение; $\lambda_i=\dfrac{2G_i\nu_i}{1-\nu_i}$ – коэффициенты в случае плоского напряженного состояния; $\lambda_i=\dfrac{2G_i\nu_i}{1-2\nu_i}$ – коэффициенты в случае плоского деформированного состояния; G_i, ν_i – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно.

Записав дифференциальное уравнение равновесия (уравнение Навье) в перемещениях

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}=0,$$

ищем его решение в виде [3], [4]:

$$u_r{}^{(i)}=A_i r+B_i/r,$$

$$\sigma_r{}^{(i)}=(2G_i+2\lambda_i)A_i-2G_iB_i/r^2,$$

$$\sigma_\theta{}^{(i)}=(2G_i+2\lambda_i)A_i+2G_iB_i/r^2,$$

где принимаем индекс $i=1,2$ для покрытия и трубы соответственно, A_i, B_i – коэффициенты, которые находятся из системы граничных условий:

$$\sigma^{(1)}_{r/r=a}=-p,\ \sigma^{(1)}_{r/r=b}=\sigma^{(2)}_{r/r=b},\ u^{(1)}_{r/r=b}=u^{(2)}_{r/r=b},\ \sigma^{(2)}_{r/r=b+h_2}=0.$$

Поскольку внутреннее покрытие состоит из функционально-градиентного материала, то считаем, что для него справедливо соотношение для изменения модуля упругости $E(r)=E_0r^\beta$, $-2\le\beta\le 2$.

Перемещения и напряжения вычисляются по формулам:

– для покрытия

$$u_r{}^{(1)}=A_1r^{m_1}+B_1r^{m_2},$$

$$\sigma_r{}^{(1)}=C_{11}\varepsilon_r{}^{(1)}+C_{12}\varepsilon_\theta{}^{(1)}=$$

$$=C_{11}(A_1m_1r^{m_1-1}+B_1m_2r^{m_2-1})+C_{12}(A_1r^{m_1-1}+B_1r^{m_2-1}),$$

$$\sigma_\theta{}^{(1)}=C_{12}\varepsilon_r{}^{(1)}+C_{11}\varepsilon_\theta{}^{(1)}=$$

$$=C_{12}(A_1m_1r^{m_1-1}+B_1m_2r^{m_2-1})+C_{11}(A_1r^{m_1-1}+B_1r^{m_2-1}),$$

– для трубы

$$u_r{}^{(2)}=A_2r+B_2/r,$$

$$\sigma_r{}^{(2)}=2G_2\varepsilon_r{}^{(2)}+\lambda_2(\varepsilon_r{}^{(2)}+\varepsilon_\theta{}^{(2)})=$$

$$=(2G_2+2\lambda_2)A_2-2G_2B_2/r^2,$$

$$\sigma_\theta{}^{(2)}=2G_2\varepsilon_\theta{}^{(2)}+\lambda_2(\varepsilon_r{}^{(2)}+\varepsilon_\theta{}^{(2)})=$$

$$=(2G_2+2\lambda_2)A_2+2G_2B_2/r^2,$$

где

$$m_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-\beta\pm\sqrt{4+\beta^2-4\beta\nu^*}\right),$$

$$\nu^*=\nu_1/(1-\nu_1),$$

$$C_{11}=\frac{E_0(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}r^\beta,\ C_{12}=\frac{E_0\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}r^\beta.$$

В случае исследования напряженно-деформированного состояния трубы с волокнистым покрытием, для компьютерной реализации расчета слоистой композитной трубы, будем использовать решение для однородных изотропных труб, которое представлено в работе [1]:

$$u_r{}^{(i)}=-\frac{1+\nu^{(i)}}{E^{(i)}}\frac{B^{(i)}}{r}+\frac{2(1-\nu^{(i)})}{E^{(i)}}C^{(i)}r,$$

$$\sigma_r{}^{(i)}=\frac{B^{(i)}}{r^2}+2C^{(i)},$$

$$\sigma_\theta{}^{(i)}=-\frac{B^{(i)}}{r^2}+2C^{(i)},$$

где для варианта трубы с покрытием

$$B^{(1)}=p\left(\frac{XY+YW-XZ}{Y-Z-W}\right)r_0{}^2,$$

$$B^{(2)}=p\left(\frac{X+Y}{(Y-Z-W)\beta_1{}^2}\right)r_2{}^2,$$

$$C^{(1)}=-\frac{p}{2}\left(\frac{XY+YW-XZ}{Y-Z-W}\right),$$

$$C^{(2)}=-\frac{p}{2}\left(\frac{X+Y}{(Y-Z-W)\beta_1{}^2}\right),$$

$$X=\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi^{(1)}+\beta_1{}^2\mathit{\Gamma}^{(1)}},\ W=\frac{\varphi^{(2)}\beta_2{}^2+\mathit{\Gamma}^{(2)}}{\varphi^{(1)}+\beta_1{}^2\mathit{\Gamma}^{(1)}},\ Y=\frac{1}{\beta_1^2-1},$$

$$Z=\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2-1},\ \varphi^{(i)}=\frac{1+\nu^{(i)}}{E^{(i)}},\ \mathit{\Gamma}^{(i)}=\frac{1-\nu^{(i)}}{E^{(i)}},\ \beta_i=\frac{r^{(i)}_{внешн}}{r^{(i)}_{внутр}},$$

для варианта трубы без покрытия

$$B=\frac{p}{1-\beta_r{}^2}r_2^2,\ C=\frac{-p}{2(1-\beta_r{}^2)},$$

$$\beta_r=r_2/r_1,$$

где r_1, r_2 – внутренний и внешний радиусы трубы.

Для покрытий из композитов строим решение, считая, что модуль упругости и коэффициент Пуассона вычисляются по правилу смесей:

$$E_1=vE_a+(1-v)E_m,$$

$$\nu_1=v\nu_a+(1-v)\nu_m,$$

где E_a,E_m – модули упругости волокна и матрицы соответственно, ν_a,ν_m – коэффициенты Пуассона волокна и матрицы соответственно, v – объемное содержание волокна.

При расчете или моделировании эффектов гидроудара одним из ключевых параметров является скорость волны c. Для вычисления скорости движения волны при гидравлическом ударе используем равенство [1]

$$c = \sqrt{\frac{K/\rho}{1+K\Omega}},$$

где K и ρ – коэффициент объемной упругости и плотность рассматриваемой жидкости соответственно, здесь Ω для случая трубы с покрытием определяется по зависимости

$$\Omega = 2\left(\varphi^{(1)} - \frac{2}{E_1}\left(\frac{XY+YW-XZ}{Y-Z-W}\right)\right),$$

для случая трубы без покрытия

$$\Omega = \frac{2}{E_2}\left(\nu_2 - \frac{1+\beta_r^{\,2}}{1-\beta_r^{\,2}}\right).$$

В [1] представлены более подробный аналитический вывод и описание формулы. В литературе можно найти анализ квазистатической и частотно-зависимой волновой скорости возмущений потока в трубах для жестких, упругих и вязкоупругих стенок труб. Обзоры, учитывающие взаимодействие жидкости и структуры (рассматривая воду как сжимаемую жидкость) можно найти в [5]–[8]. Более подробный обзор может быть найден также в [9].

2 Реализация расчетов напряженно-деформированного состояния слоистых труб

Используя выше приведенную теорию, разработаны алгоритмы и программы расчета напряженно-деформированного состояния труб с внутренними покрытиями из функционально-градиентного материала и композита, состоящего из матрицы и волокна. Для тестирования программ расчета по данной методике использовались геометрические и механические данные и результаты расчетов напряженного состояния и скорости движения волны для однородной трубы, приведенные в работе [1].

Приняты следующие геометрические и физико-механические характеристики исследуемой системы трубы и покрытия.

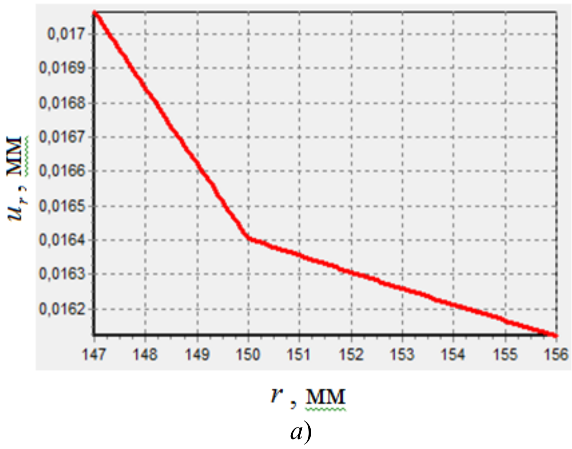
Труба: материал – сталь, модуль упругости $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$; толщина $h_2 = 6$ мм.

Покрытие: материал – стеклопластик, модуль упругости волокна $E_a = 71$ ГПа; модуль упругости матрицы $E_m = 3{,}5$ ГПа; коэффициент Пуассона волокна $\nu_a = 0{,}22$; коэффициент Пуассона матрицы $\nu_m = 0{,}38$; толщина $h_1 = 3$ мм, процентное содержание волокна составляет 30%. Внутренний радиус $r_0 = 147$ мм, средний радиус $r_1 = 150$ мм, внешний радиус $r_2 = 156$ мм.

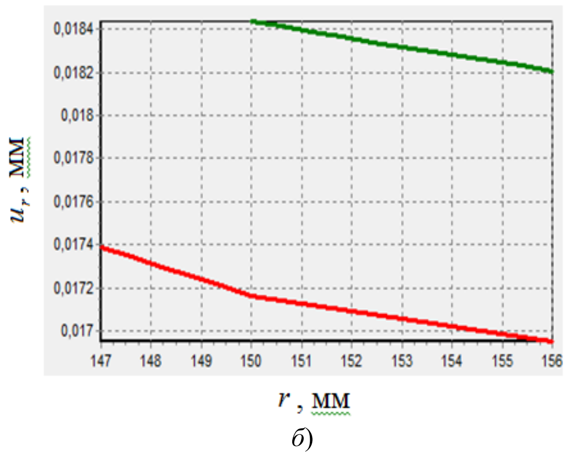
Внутреннее давление $p_{внутр} = 1$ МПа, внешнее давление $p_{внешн} = 0$ МПа.

Программы расчета, по вышеописанным алгоритмам, позволяют получить значения перемещений и напряжений в любой точке трубы и покрытия в табличной и графической формах, а также скорость движения жидкости внутри трубопровода. Графики зависимостей перемещений u_r, напряжений σ_r и напряжений σ_θ показаны на рисунках 2.1–2.3 соответственно (*а* – труба с покрытием из функционально-градиентного материала, *б* – труба с покрытием из композита). Также представляется возможным исследовать влияние наличия покрытия из композита внутри трубопровода на напряженно-деформированное состояние трубы. На рисунках 2.1, *б*; 2.2, *б*; 2.3, *б* верхний график определяет зависимости для трубы без покрытия, нижний график – для трубы с покрытием.

Исследовалось влияние процентного содержания волокон в покрытии на напряженно-деформированное состояние трубы с покрытием из композита, основные результаты отражены в таблице 2.1. Рассматривались различные варианты толщин покрытия и трубы: $h_1 = 3$ мм, $h_2 = 6$ мм и $h_1 = 6$ мм, $h_2 = 3$ мм.

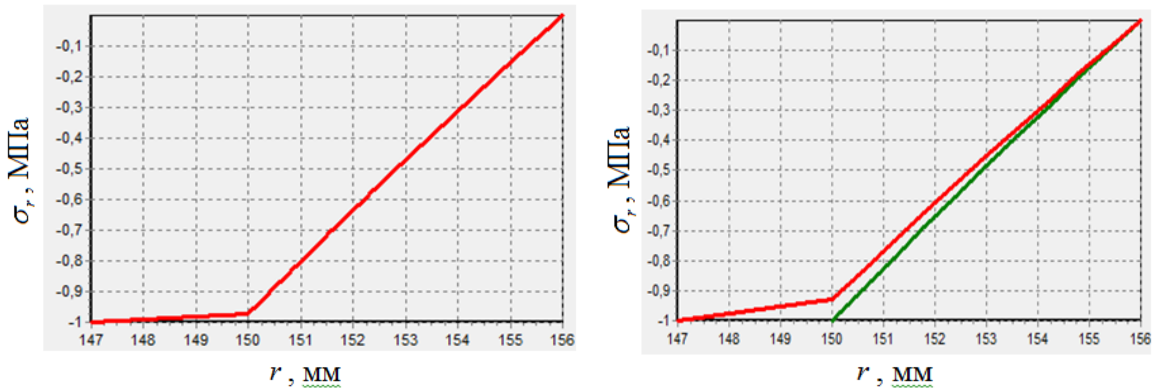


а)



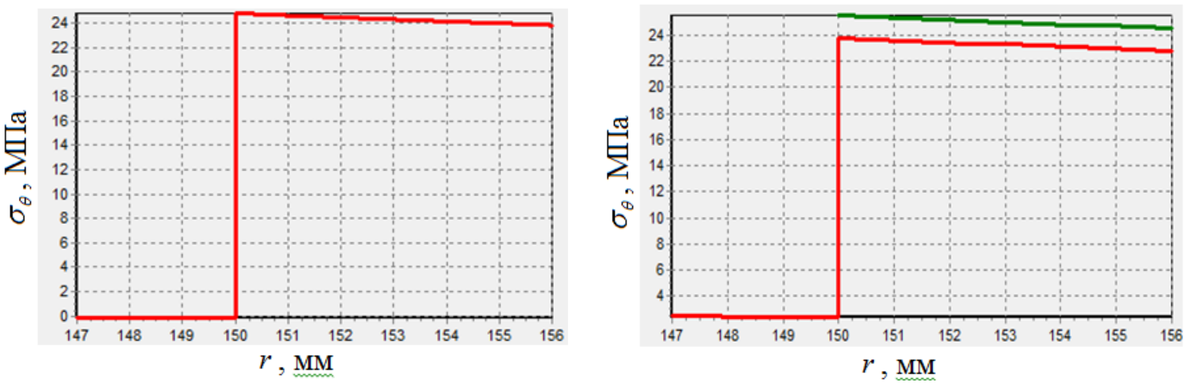
б)

Рисунок 2.1 – Графики зависимостей перемещений u_r от r



а) *б)*

Рисунок 2.2 – Графики зависимостей напряжений σ_r от r



а) *б)*

Рисунок 2.3 – Графики зависимостей напряжений σ_θ от r

Таблица 2.1 – Напряженно-деформированное состояние трубы с покрытием из композита

Содержание волокон, %	r	r_0 = 147 мм		r_1		r_2 = 156 мм	
				r_1 = 150 мм	r_1 = 153мм		
	h_1, h_2 / u_r, σ_r, σ_θ	h_1 = 3 мм h_2 = 6 мм	h_1 = 6 мм h_2 = 3 мм	h_1 = 3 мм h_2 = 6 мм	h_1 = 6 мм h_2 = 3 мм	h_1 = 3 мм h_2 = 6 мм	h_1 = 6 мм h_2 = 3 мм
0	u_r, мм	0,0189	0,0375	0,0180	0,0355	0,0178	0,0353
	σ_r, МПа	–1	–1	–0,9788	–0,9418	0	0
	σ_θ, МПа	0,0703	0,5135	0,0491	48,5079	23,9904	47,5661
20	u_r, мм	0,0177	0,0321	0,0174	0,0314	0,0172	0,0312
	σ_r, МПа	–1	–1	–0,9465	–0,8321	0	0
	σ_θ, МПа	1,7017	3,3678	1,6482	42,8557	23,1987	42,0236
50	u_r, мм	0,0168	0,0272	0,0166	0,0267	0,0164	0,0266
	σ_r, МПа	–1	–1	–0,9019	–0,7083	0	0
	σ_θ, МПа	3,9565	6,5877	3,8583	36,4797	22,1045	35,7714
70	u_r, мм	0,0163	0,0247	0,0161	0,0243	0,0159	0,0242
	σ_r, МПа	–1	–1	–0,8744	–0,6443	0	0
	σ_θ, МПа	5,3451	8,2501	5,2194	33,1879	21,4306	32,5435
100	u_r, мм	0,0155	0,0217	0,0154	0,0214	0,0152	0,0213
	σ_r, МПа	–1	–1	–0,8361	–0,5675	0	0
	σ_θ, МПа	7,2761	10,2481	7,1123	29,1731	20,4934	28,6638

Таблица 2.2 – Скорость жидкости внутри трубы с покрытием из композита и трубы без покрытия (м/с)

Труба	h_1, мм	h_2, мм	Содержание волокон, %				
			0	20	50	70	100
Труба без покрытия	0	6	2,0170				
	0	3	1,4237				
Труба с покрытием	3	6	1,9714	2,0364	2,0918	2,1262	2,1762
	6	3	1,3995	1,5124	1,6444	1,7260	1,8415

Для данных геометрических и физико-механических характеристик, приняв плотность жидкости внутри трубопровода ρ = 1000 кг/м^3 и коэффициент объемной упругости K = 2140 МПа, изменения скорости жидкости внутри трубы без покрытия и трубы с покрытием в зависимости от толщины покрытия h_1 и толщины трубы h_2 представлены в таблице 2.2.

Как видно из данных таблицы 2.2, наличие и учет геометрических и физико-механических характеристик внутренних покрытий трубопроводов может существенно влиять на скорость жидкости внутри трубопроводов.

Заключение

Приведенные в данной статье подход и разработанная методика позволяет выбирать композитный материал для покрытия при восстановлении эксплуатационных свойств труб с движущейся жидкостью; учитывать рассчитанное напряженно-деформированное состояние в покрытии и скорость движения волны в зависимости от степени армирования покрытия и функционально-градиентных свойств материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wave celerity in hydraulic transients computation for cipp-rehabilitated pipes* / F. Evangelista [et al.] // Int. J. Comp. Meth. and Exp. Meas. – 2020. – Vol. 8, № 4. – P. 326–340.

2. *Parameter analysis of wall thickness of cured-in-place pipe linings for semistructured rehabilitation of concrete drainage pipe* / F. Hongyuan [et al.] // Mathematical Problems in Engineering. – 2020. – Article ID 5271027. – P. 1–16.

3. *Можаровский*, *В.В.* Методика розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих труб з урахуванням явищ повзучості и релаксації / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, Е.А. Голубова // Вісник Київського національного університету імени Тараса Шевченко. – 2017. – № 3. – С. 151–156.

4. *Tutuncu*, *N.* Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels / N. Tutuncu, M. Ozturk // Composites: Part B: Engineering. – 2001. – Vol. 32. – P. 683–686.

5. *Rubinov*, *S.I.* Wave propagation in a fluid-filled tube / S.I. Rubinov, J.B. Keller // Journal of the Acoustical Society of America. – 1971. – № 50. – P. 198–223.

6. *Rubinov*, *S.I.* Wave propagation in viscoelastic tube containing a viscous fluid / S.I. Rubinov, J.B. Keller // Journal of Fluid Mechanics. – 1978. – № 88. – P. 181–203.

7. *Lavooij*, *C.S.W.* Fluid–structure interaction in liquid-filled piping systems / C.S.W. Lavooij, A.S. Tijsseling // Journal of Fluids and Structures. – 1991. – № 5. – P. 573–595.

8. *Tijsseling*, *A.S.* Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems: a review / A.S. Tijsseling // Journal of Fluids and Structures. – 1996. – № 10. – P. 109–146.

9. *Hachem*, *F.E.* A review of wave celerity in frictionless and axisymmetrical steel-lined pressure tunnels / F.E. Hachem, A.J. Schleiss // Journal of Fluids and Structures. – 2011. – № 27. – P. 311–328.

Поступила в редакцию 06.07.2021.

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КРУГЛОЙ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

А.В. Нестерович

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

AXISYMMETRIC LOADING OF A CIRCULAR PHYSICALLY NONLINEAR THREE-LAYER PLATE IN ITS PLANE

A.V. Nestsiarovich

Belarusian State University of Transport, Gomel

Исследованы перемещения в круглой физически нелинейной трехслойной пластине при осесимметричном термосиловом нагружении в своей плоскости. Для тонких несущих слоев используются соотношения теории малых упругопластических деформаций. Относительно толстый заполнитель является физически нелинейно упругим. Распределенная нагрузка зависит от радиальной координаты и приложена в срединной плоскости заполнителя. Приведены системы дифференциальных уравнений равновесия в усилиях и в перемещениях. Для решения краевой задачи предложен метод итераций, основанный на методе упругих решений Ильюшина. Проведена численная апробация полученного решения.

Ключевые слова: *круглая трехслойная пластина*, *перемещения*, *осесимметричное растяжение-сжатие*, *пластичность*.

The displacements in a circular physically nonlinear three-layer plate under axisymmetric thermal force loading in its plane are investigated. For thin bearing layers, the relations of the theory of small elastic-plastic deformations are used. A relatively thick filler is physically non-linearly elastic. The distributed load depends on the radial coordinate and is applied in the median plane of the filler. Systems of differential equations of equilibrium in forces and in displacements are given. To solve the boundary value problem, an iteration method based on the Ilyushin elastic solution method is proposed. The numerical approbation of the obtained solution is carried out.

Keywords: *round three-layer plate*, *displacements*, *axisymmetric tension-compression*, *plasticity*.

Введение

В настоящее время широко применяются композиционные элементы конструкций, в том числе трехслойные. К материалам их составляющих предъявляются требования по экономии, уменьшении веса элементов с сохранением требований по прочности и жесткости.

Деформированию трехслойных элементов конструкций посвящен ряд публикаций. В монографиях [1]–[3] приведены постановки краевых и начально-краевых задач и методы их решения. Колебания трехслойных пластин и оболочек рассмотрены в статьях [4]–[7]. Для вязкоупругопластических цилиндрических оболочек использованы наследственные соотношения теории малых упругопластических деформаций. Резонансные колебания трехслойных круговых пластин рассмотрены с учетом воздействия упругого основания [8], [9].

В работах [10]–[13] приводится деформирование трехслойных круговых и прямоугольных пластин со сжимаемым заполнителем. Определение несущей способности волокнистой трехслойной композитной кольцевой пластинки и неосесимметричная потеря устойчивости при осесимметричном нагреве круглой пластины рассматривается в статьях [14], [15]. В публикациях [16]–[19] приводятся исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек и слоистых пластин при изотермических и термосиловых квазистатических нагружениях.

Аналитические и численные результаты по осесимметричному деформированию трехслойных пластин, связанных с упругим двухпараметрическим основанием Пастернака приводятся в статьях [20]–[22]. Постановка и вывод уравнений равновесия круглых трехслойных пластин при осесимметричном и неосесимметричном линейном деформировании в своей плоскости опубликованы в статьях [23]–[29].

В предлагаемой работе приведена постановка и решение краевой задачи об осесимметричном термосиловом нагружении круглой физически нелинейной трехслойной пластины. Получены аналитические и численные результаты.

1 Постановка краевой задачи

Рассматривается симметричная по толщине круговая физически нелинейная трехслойная пластина радиусом r, состоящая из двух тонких несущих слоев толщиной $h_1 = h_2$ и толстого несжимаемого заполнителя $h_3 = 2c$. Постановка задачи приводится в полярной системе координат (r, φ), которая связывается со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1.1).

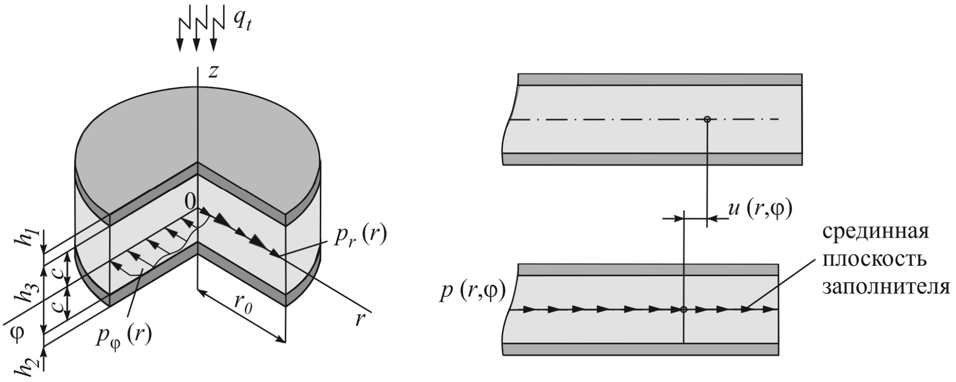


Рисунок 1.1 – Расчетная схема

К срединной плоскости приложена внешняя распределенная нагрузка, проекции которой на оси координат: $p_r(r)$, $p_\varphi(r)$. Искомые радиальные и тангенциальные перемещения обозначаются через $u_r(r)$, $u_\varphi(r)$. Принимается, что материалы несущих слоев могут проявлять упругопластические свойства, заполнитель – нелинейно упругий. Учтено воздействие однородного стационарного температурного поля T.

Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций [1]:

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = 2G_k\left(T\right)\left(1-\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)},T\right)\right)э_{\alpha\beta}^{(k)} \quad (\alpha = r,\varphi),$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k\left(T\right)\left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)}\Delta T\right) \qquad (1.1)$$

$$(\alpha,\ \beta = r,\ \varphi;\ k = 1,\ 2,\ 3),$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $э_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторные части тензоров напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T), K_k(T)$ – модули сдвига и объемной деформации материала k-го слоя; ΔT – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0; $\alpha_0^{(k)}$ – коэффициент линейного температурного расширения; $\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)},T\right)$ – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев $\left(\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)},T\right)=0\right.$ при $\left.\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_y^{(k)}\left(T\right)\right)$; $\omega_3\left(\varepsilon_u^{(3)},T\right)$ – универсальная функция физической нелинейности материала заполнителя $\left(\omega_3\left(\varepsilon_u^{(3)},T\right)=0\right.$ при $\left.\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_s^{(k)}\left(T\right)\right)$; $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоев; $\varepsilon_s^{(k)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций

$$\varepsilon_u^{(k)} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)}\right)^2 + \left(\varepsilon_{rr}^{(k)}\right)^2 - \varepsilon_{rr}^{(k)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + 3\left(\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}\right)^2}.$$

С помощью компонентов тензора напряжений (1.1) вводятся обобщенные внутренние силы в пластине [23]:

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}dz = \sum_{k=1}^{3}\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}h_k, \qquad (1.2)$$

$$(\alpha,\ \beta = r,\ \varphi),$$

где $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений в k-ом слое.

Система дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных внутренних усилиях для упругой круглой трехслойной пластины следует из принципа Лагранжа [23]:

$$\begin{cases} T_{rr},_r + \dfrac{1}{r}\left(T_{rr} - T_{\varphi\varphi}\right) = -p_r, \\ T_{r\varphi},_r + \dfrac{2}{r}T_{r\varphi} = -p_\varphi, \end{cases} \qquad (1.3)$$

где $T_{\alpha\beta}^{(k)}$ – внутренние силовые факторы (1.2); запятая в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Выделим линейную (индекс «e»), нелинейную (индекс «ω») и температурную (индекс «t») составляющие в компонентах тензора напряжений:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} - \sigma_t^{(k)},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} \ (\alpha,\ \beta = r,\ \varphi;\ k = 1,\ 2,\ 3),$$

где слагаемые напряжений выражаются через деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$

$$\sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} = \left(K_k(T) + \frac{4}{3}G_k(T)\right)\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} +$$

$$+\left(K_k(T) - \frac{2}{3}G_k(T)\right)\varepsilon_{\beta\beta}^{(k)},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k\left(T\right)\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)},T\right)\left(\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}\right),$$

$$\sigma_{r\varphi e}^{(k)} = s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k\left(T\right)\varepsilon_{r\varphi}^{(k)},$$

$$\sigma_{r\varphi\omega}^{(k)} = 2G_k\left(T\right)\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)},T\right)\varepsilon_{r\varphi}^{(k)},$$

$$\sigma_t^{(k)} = 3K_k(T)\alpha_0^{(k)}T.$$

Внутренние усилия в пластине (1.2) также представляются в виде суммы линейной, нелинейной и температурной частей:

$$T_{\alpha\beta} \equiv \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\beta\omega}^{(k)} - \delta_{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{3} T_t \ =$$

$$= T_{\alpha\beta e} - T_{\alpha\beta\omega} - \delta_{\alpha\beta} T_t =$$
$$= \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} dz - \qquad (1.4)$$
$$-3\delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^{3} \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T) \Delta T \, dz.$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символы Кронекера.

Подставив усилия (1.4) в уравнения (1.3), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях для круговой физически нелинейной трехслойной пластины при осесимметричном деформировании:

$$\begin{cases} T_{rre},_r + \dfrac{1}{r}\left(T_{rre} - T_{\varphi\varphi e}\right) = -p_r + p_{r\omega}, \\ T_{r\varphi e},_r + \dfrac{2}{r} T_{r\varphi e} = -p_\varphi + p_{\varphi\omega}. \end{cases} \qquad (1.5)$$

В левой части уравнений (1.5), которая содержит линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, нижний индекс «*e*» в дальнейшем опустим для удобства. Переходя к безразмерной радиальной координате $x = r/r_0$ систему (1.5) перепишем в виде

$$\begin{cases} T_{rr},_x + \dfrac{1}{x}\left(T_{rr} - T_{\varphi\varphi}\right) = \left(-p_r + p_{r\omega}\right) r_0, \\ T_{r\varphi},_x + \dfrac{2}{x} T_{r\varphi} = \left(-p_\varphi + p_{\varphi\omega}\right) r_0. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Нелинейные добавки (индекс «ω») здесь вынесены вправо:

$$p_{r\omega} = \frac{1}{r_0}\left(T_{rr\omega},_x + \frac{1}{x}\left(T_{rr\omega} - T_{\varphi\varphi\omega}\right)\right),$$
$$p_{\varphi\omega} = \frac{1}{r_0}\left(T_{r\varphi\omega},_x + \frac{2}{x} T_{r\varphi\omega}\right). \qquad (1.7)$$

Температурные составляющие в системе (1.6) отсутствуют, т. к. температура постоянна и производные от нее равны нулю, а в первом уравнении они взаимно сокращаются.

На контуре пластины $x = 1$ должны выполняться силовые условия:

$$T_{rr} = T_{rr}^0 + T_{rr\omega}, \quad T_{r\varphi} = T_{r\varphi}^0 + T_{r\varphi\omega}, \qquad (1.8)$$

где T_{rr}^0, $T_{r\varphi}^0$ – заданные внешние контурные усилия.

Подставив во внутренние усилия в (1.6) напряжения (1.1) и выразив в них деформации через перемещения $u_r(r)$, $u_\varphi(r)$ после некоторых преобразований, получим систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений.

$$u_r,_{xx} + \frac{u_r,_x}{x} - \frac{u_r}{x^2} = \frac{r_0^2}{a_1}\left(-p_r + p_{r\omega}\right),$$
$$u_\varphi,_{xx} + \frac{u_\varphi,_x}{x} - \frac{u_\varphi}{x^2} = \frac{r_0^2}{a_2}\left(-p_\varphi + p_{\varphi\omega}\right), \qquad (1.9)$$

где a_i – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) dz,$$
$$a_2 = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} G_k(T_k) dz.$$

Заметим, температура здесь учитывается влиянием на величину модулей упругости материалов слоев.

Краевая задача для круговой физически нелинейной трехслойной пластины при осесимметричном нагружении замыкается добавлением к уравнениям (1.9) силовых (1.8) или кинематических граничных условий на контуре ($x = 1$).

2 Решение краевой задачи при осесимметричной нагрузке

Система дифференциальных уравнений (1.9), описывающая деформирование круговой физически нелинейной трехслойной пластины при осесимметричном нагружении, является нелинейной. Получить ее аналитическое решение в конечном виде не представляется возможным. Поэтому для решения необходимо применять приближенные или численные методы. В дальнейшем используем метод последовательных приближений, базирующийся на методе упругих решений Ильюшина. Это позволяет на каждом шаге итерации решение задачи для физически нелинейной пластины сводить к решению краевой задачи для соответствующей упругой трехслойной пластины.

Уравнения (1.9) согласно методу упругих решений переписываем в итерационном виде:

$$u_r^{(n)},_{xx} + \frac{u_r^{(n)},_x}{x} - \frac{u_r^{(n)}}{x^2} = \frac{r_0^2}{a_1}\left(-p_r + p_{r\omega}^{(n-1)}\right),$$
$$u_\varphi^{(n)},_{xx} + \frac{u_\varphi^{(n)},_x}{x} - \frac{u_\varphi^{(n)}}{x^2} = \frac{r_0^2}{a_2}\left(-p_\varphi + p_{\varphi\omega}^{(n-1)}\right), \qquad (2.1)$$

где n – номер приближения.

Дополнительные «внешние» нагрузки на первом шаге итерации принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения с помощью формул типа (1.7):

$$p_{r\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{r_0}\left(T_{rr\omega}^{(n-1)},_x + \frac{1}{x}\left(T_{rr\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\varphi\omega}^{(n-1)}\right)\right),$$
$$p_{\varphi\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{r_0}\left(T_{r\varphi\omega}^{(n-1)},_x + \frac{2}{x} T_{r\varphi\omega}^{(n-1)}\right), \qquad (2.2)$$

где

$$T_{\alpha\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^{3} T_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} - \sum_{k=1}^{3} T_t^{(k)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} dz - 3\sum_{k=1}^{3} \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k(T_k) \Delta T_k dz =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} G_k\left(T_k\right) \omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T_k\right) Э_{\alpha\alpha}^{(k)(n-1)} dz -$$

$$-3\sum_{k=1}^{3}\alpha_0^{(k)}\int_{h_k}K_k(T_k)\Delta T_k dz \quad (\alpha = r, \varphi),$$

$$T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^{3}T_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)}dz =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}G_k\left(T_k\right)\omega_k\left(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T_k\right)\varepsilon_{r\varphi}^{(k)(n-1)}dz.$$

Таким образом, на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными $p_{r\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ «внешними» нагрузками (2.2), вычисляемыми по результатам предыдущего приближения.

Решение системы (2.1) получено методом прямого интегрирования

$$u_r^{(n)} = C_1^{(n)}x - \frac{r_0^2}{a_1 x}\int_0^x x\int_0^x\left(p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}\right)dxdx,$$

$$u_\varphi^{(n)} = C_3^{(n)}x - \frac{r_0^2}{a_2 x}\int_0^x x\int_0^x\left(p_\varphi - p_{\varphi\omega}^{(n-1)}\right)dxdx. \quad (2.3)$$

Принимаем граничные условия закрепления контура пластины – жесткая заделка или шарнирное опирание. Тогда на контуре ($x = 1$) должны выполняться условия

$$u_r\left(1\right) = 0, \; u_\varphi\left(1\right) = 0. \quad (2.4)$$

После подстановки решения (2.3) в условия (2.4) получим константы интегрирования

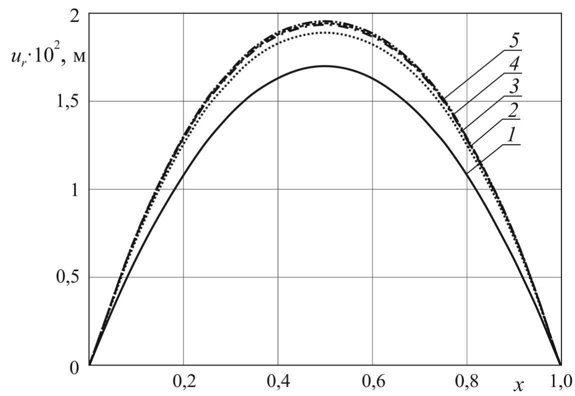
$$C_1^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_1}\int_0^1 x\int_0^1\left(p_r - p_{r\omega}^{(n-1)}\right)dxdx,$$

$$C_3^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_2}\int_0^1 x\int_0^1\left(p_\varphi - p_{\varphi\omega}^{(n-1)}\right)dxdx.$$

3 Численные результаты

Численная апробация решения (2.3) проведена для круглой трехслойной пластины единичного радиуса $r = 1$ м при осесимметричном нагружении в срединной плоскости заполнителя нагрузкой постоянной интенсивности $p_{r0} =$ $= 1000$ МПа, $p_{\varphi 0} = 0$ МПа, достаточной для проявления нелинейных свойств материалов слоев в полной мере. Температурное поле однородное $T = \text{const}$. Толщины слоев $h_1 = h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,4$ м. Внешние несущие слои выполнены из дюралюминия Д16-Т, срединный слой – фторопласт-4. Упругие и физически нелинейные характеристики материалов заимствованы из [30].

На рисунке 3.1 проиллюстрирована практическая сходимость предложенного итерационного метода. Номер кривой соответствует номеру итерации. Здесь второе приближение радиального перемещения $u_r(x)$ отличается от первого примерно на 10%. За искомое решение принято 5-е, которое отличается от предыдущего на 0,14%. Учет физически нелинейных свойств материалов слоев приводит к увеличению расчетного прогиба на 14,7% по сравнению с упругой пластиной (кривая 1). Тангенциальные перемещения в рассматриваемом случае отсутствуют.



1, 2, 3, 4, 5 – номер итерации

Рисунок 3.1 – Сходимость итерационного метода ($T = 293$ К) (заделка контура)

На рисунке 3.2 показаны радиальные перемещения $u_r(x)$ при различных температурах: 1 – упругая пластина ($T = 293$ К); 2, 3, 4 – упругопластическая пластина при $T = 293$ К, 373 К, 473 К соответственно. Перемещения достигают максимума в сечении $x = 0,5$. Расчетные перемещения увеличиваются за счет физической нелинейности материалов слоев на 14,7%. При нагревании пластины расчетные максимальные упругопластические перемещения еще увеличиваются на 14,9% ($T = 373$ К) и 27,7% ($T = 473$ К).

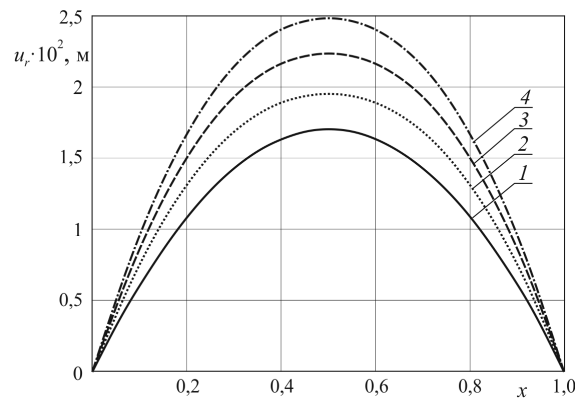


Рисунок 3.2 – Радиальные перемещения при различных температурах

На рисунке 3.3 приведены графики изменения вдоль радиуса пластины интенсивности деформаций ε_u при росте температуры: 1 – упругая пластина ($T = 293$ К); 2, 3, 4 – упругопластическая пластина при $T = 293$ К, 373 К, 473 К соответственно. Учет физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению расчетной интенсивности деформаций на 25,3%. С ростом температуры величина ε_u в упругопластической пластине возрастает еще на 13,2% ($T = 373$ К) и на 24,3% ($T = 473$ К). Горизонтальная линия соответствует интенсивности деформаций равной пределу физической нелинейности для фторопласта-4 $\varepsilon_u = \varepsilon_s = 3{,}3\%$.

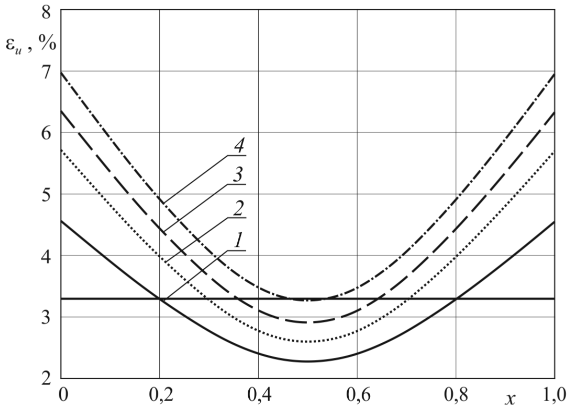


Рисунок 3.3 – Интенсивность деформаций ε_u при различных температурах

Заключение

Следовательно, учет физической нелинейности материалов слоев приводит к существенному уточнению напряженно-деформированного состояния круговой трехслойной пластины при осесимметричном деформировании в своей плоскости. Приведенные результаты о деформировании сэндвич-пластин могут быть использованы при расчетах строительных конструкций, деформируемых в своей плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горшков*, *А.Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.

2. *Журавков*, *М.А.* Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.

3. *Старовойтов*, *Э.И.* Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 275 с.

4. *The oblique impact response of composite sandwich plates* / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. – 2015. – № 133. – P. 1127–1136.

5. *Deshpande*, *V.S.* Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / V.S. Deshpande, N.A. Fleck // J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71, № 5. – P. 637–645.

6. *Gorshkov*, *A.G.* Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A.G. Gorshkov, É.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 9. – P. 1196–1203.

7. *Starovoitov*, *E.I.* Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – Vol. 51, № 5. – P. 561–570.

8. *Трацевская*, *Е.Ю.* Динамическая неустойчивость квазитиксотропных моренных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. – 2017. – № 1 (46). – С. 107–111.

9. *Трацевская*, *Е.Ю.* Экспериментальное исследование характеристик пластичности неводонасыщенных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках [Электронный ресурс]. – 2018. – № 1. – Режим доступа: http://mathmod.esrae.ru/17-62. – Дата доступа: 05.07.2021.

10. *Захарчук*, *Ю.В.* Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

11. *Захарчук*, *Ю.В.* Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 53–57.

12. *Зеленая*, *А.С.* Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 98–104.

13. *Зеленая*, *А.С.* Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 67–74.

14. *Джагангиров*, *А.А.* Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, защемленной по кромкам / А.А. Джагангиров // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 2. – С. 100–109.

15. *Неосесимметричная потеря устойчивости при осесимметричном нагреве круглой пластины* / Р.В. Гольдштейн [и др.] // Вестн. Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2 – С. 45–53.

16. *Старовойтов*, *Э.И.* Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

17. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

18. *Julien*, *D.* Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenesized Love–Kirchhoff Model / D. Julien, S. Karam // Journal of the

Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol. 56, № 2. – P. 561–580.

19. *Moskvitin, V.V.* Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates / V.V. Moskvitin, E.I. Starovoitov // Mechanics of Composite Materials. − 1985. – Vol. 21, № 3. – P. 267–273.

20. *Козел*, *А.Г.* Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 106–113.

21. *Козел*, *А.Г.* Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

22. *Козел*, *А.Г.* Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А.Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.

23. *Нестерович, А.В.* Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

24. *Нестерович*, *А.В*. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

25. *Нестерович*, *А.В*. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – 2020. – Вып. 35. – С. 266–272.

26. *Нестерович*, *А.В.* Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

27. *Нестерович*, *А.В.* Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2020. – Вып. 13. – С. 116–121.

28. *Старовойтов*, *Э.И.* Неосесимметричное деформирование свободно опертой трехслойной пластины в своей плоскости / Э.И. Старовойтов, А.В. Нестерович // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – № 1 (27). – С. 17–30.

29. *Старовойтов*, *Э.И.* Неосесимметричное деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости / Э.И. Старовойтов, А.В. Нестерович // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 38–45.

30. *Starovoitov*, *E.I.* Description of the thermomechanical properties of some structural materials / E.I. Starovoitov // Strength of materials. – 1988. – Vol. 20, № 4. – P. 426–431.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т20Р-047).

Поступила в редакцию 07.07.2021.

УДК 539.3+621.373.8

ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОБРАБОТКИ КВАРЦЕВЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ СТЕКОЛ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ЛАЗЕРНЫМИ ПУЧКАМИ

Ю.В. Никитюк[1], **А.Н. Сердюков**[1], **В.А. Прохоренко**[1], **И.Ю. Аушев**[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь*, *Минск*

APPLICATION OF ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS AND FINITE ELEMENT METHOD FOR DETERMINING THE PARAMETERS OF ELLIPTIC LASER BEAM TREATMENT OF QUARTZ SOL-GEL GLASSES

Y.V. Nikitjuk[1], **A.N. Serdyukov**[1], **V.A. Prohorenko**[1], **I.Y. Aushev**[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus*, *Minsk*

С использованием искусственных нейронных сетей и метода конечных элементов выполнено моделирование процесса лазерного раскалывания кварцевых стекол, полученных золь-гель способом. Для формирования обучающего массива данных и данных для тестирования нейронных сетей расчеты температурных полей и полей термоупругих напряжений выполнялись с использованием метода конечных элементов в программе ANSYS. Расчеты были выполнены для 875 вариантов входных параметров, 800 из которых были использованы для обучения нейронных сетей. В работе выполнено исследование влияния архитектуры нейронной сети, размеров обучающего массива данных и времени обучения на точность определения термоупругих напряжений и температур в зоне лазерной обработки кварцевых золь-гель стекол.

Ключевые слова*: нейронная сеть*, *лазерное раскалывание*, *кварцевая пластина*.

Modeling of the process of laser splitting of quartz glasses obtained by the sol-gel method using artificial neural networks and the finite element method was carried out. To form a training data set and data for testing neural networks, calculations of temperature fields and fields of thermoelastic stresses were performed using the finite element method in the ANSYS program. Calculations were completed for 875 variants of input parameters, 800 of which were used for training neural networks. The influence of the architecture of the neural network, the size of the training data array, and the training time on the accuracy of determining thermoelastic stresses and temperatures in the zone of laser processing of quartz sol-gel glasses were investigated.

Keywords: *neural network*, *laser splitting*, *quartz plate*.

Введение

Для кварцевых стекол характерна высокая механическая прочность и высокая термостойкость, устойчивость к действию кислот и воды. Все эти особенности присущи и кварцевым стеклам, синтезированным золь-гель методом. При этом использование золь-гель метода обеспечивает возможность получения особо чистых и активированных кварцевых стекол для волоконной оптики, оптоэлектроники и лазерной техники [1]–[2].

Реализация традиционных методов обработки кварцевого стекла основана на применении алмазного инструмента, гидроабразивной струи или на применении лазерного излучения для резки в режиме испарения материала. Основным недостатком выше перечисленных методов является высокая дефектность получаемых кромок [3].

Лазерное раскалывание является одним из эффективных методов обработки стекол, керамики и кристаллов. Сущность данного метода заключается в резке материала в результате формирования трещины при последовательном лазерном нагреве и воздействии хладагента на обрабатываемую поверхность. К основным достоинствам лазерного раскалывания относятся высокая точность разделения и высокая скорость обработки, безотходность и повышение прочности получаемых изделий [3]–[6]. В работах [7]–[9] приведены результаты исследования процесса лазерного раскалывания стеклянных золь-гель пластин.

Искусственные нейронные сети получили широкое применение в различных областях науки и техники, в том числе для моделирования технологических процессов лазерной обработки [10]–[12]. В некоторых случаях оказывается эффективным сочетание возможностей искусственных нейронных сетей и метода конечных элементов для решения научно-практических задач [13]–[16]. В работе [17] было проведено сравнение эффективности моделирования с использованием искусственной нейронной сети и конечно-элементного моделирования процесса лазерного раскалывания стекла. При этом точность результатов нейросетевого моделирования оказалась выше.

В данном исследовании искусственные нейронные сети были использованы для определения значений температур и термоупругих напряжений, формируемых при лазерном раскалывании кварцевых пластин.

1 Конечно-элементный анализ

Для решения задач термоупругости эффективно применение метода конечных элементов [18]–[19]. В данной работе была применена программа ANSYS, которая позволяет находить решения широкого спектра задач и эффективна при математическом моделировании и вычислительном эксперименте [20]–[21]. Моделирование лазерного раскалывания в ANSYS выполняется с использованием средств термопрочностного анализа, а температурные поля и поля термоупругих напряжений определяются последовательно друг за другом, что соответствует методике решения несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке [22]. Такое моделирование лазерного раскалывания не учитывает эффект связанности и динамические эффекты, обусловленные движением частиц твердого тела при тепловом расширении [23].

Важным критерием осуществления технологий лазерного раскалывания является реализация разрушения, определенного хрупкостью материала. При этом феноменологически различают пластическое и хрупкое разрушение. Допустимо описание хрупкого и пластического разрушения с использованием терминов «разрушение сколом» и «разрушение срезом» [24]–[25]. Хрупкость материалов может быть как свойством материала, так и хрупким состоянием. Хрупкое состояние материала обусловливается его микроструктурой и условиями деформирования. Хрупкие материалы при определенных условиях приобретают способность к пластической деформации вследствие того, что скорость протекания процессов релаксации напряжений достигает значений не ниже скорости приложения этих напряжений [26]. Вследствие этого, максимальные значения температуры при лазерном раскалывании в зоне обработки должны не превышать значения, соответствующие отсутствию релаксации термоупругих напряжений. Для кварцевых стекол в качестве верхнего предела допустимых температур было использовано соответствующее значение температуры стеклования – 1200° C [4].

В качестве критерия, определяющего направление развития лазерно-индуцированной трещины, был использован критерий максимальных растягивающих напряжений [27] в соответствии с которым формирование трещины происходит в направлении, перпендикулярном действию максимальных растягивающих напряжений. При этом рост трещины происходит в зоне напряжений растяжения и прекращается в зоне напряжений сжатия [28]. При моделировании учитывалось, что средние значения прочности при растяжении для силикатных стекол составляют 35–100 МПа [29].

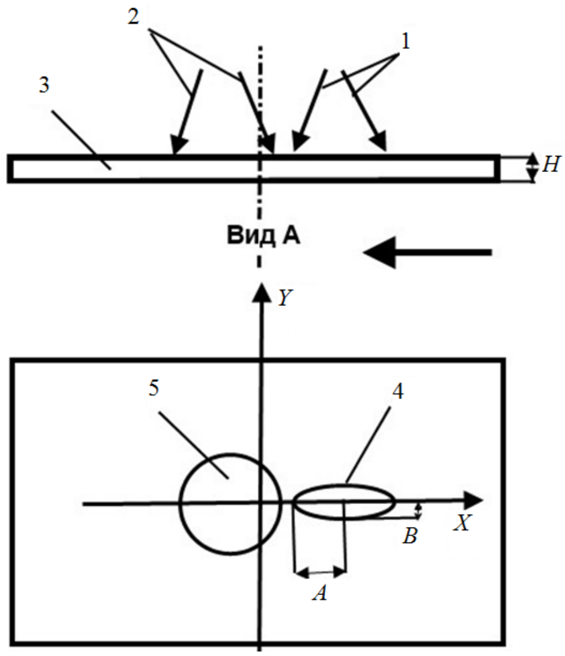


Рисунок 1.1 – Схема пространственного расположения зон воздействия лазерного излучения и хладагента

1 – лазерный пучок с длиной волны 10,6 мкм,
2 – хладагент,
3 – обрабатываемая пластина из кварцевого золь-гель стекла,
4 – сечение лазерного пучка 1 в плоскости обработки,
5 – зона воздействия хладагента

Для формирования обучающего массива данных и данных для тестирования нейронной сети были выполнены расчеты температурных полей и полей термоупругих напряжений в ANSYS. Моделирование проводилось для пластины с геометрическими размерами 20×10×0,5 мм. На рисунке 1.1 приведено расположение лазерного пучка и хладагента в плоскости обработки (H = 0,5 мм). При моделировании использовалась конечно-элементная модель, состоящая из 6515 элементов и 5075 узлов (рисунок 1.2). При тепловом анализе применялись элементы Solid 70, а при прочностном анализе элементы Solid 185. При расчетах использовались свойства кварцевых стекол, полученных при использовании коллоидного варианта золь-гель метода (таблица 1.1).

Расчеты были выполнены для 875 вариантов входных параметров, 800 из которых были использованы для обучения нейронной сети. Параметры, использовавшиеся для моделирования лазерного раскалывания кварцевого золь-гель стекла, представлены в таблице 1.2.

Часть входных параметров и результатов расчетов представлены в таблице 1.3 и на рисунках 1.3, 1.4. V – скорость резки, A и B – полуоси эллиптического лазерного пучка, P – мощность лазерного излучения, σ_y – расчетные значения максимальных по величине напряжений растяжения и сжатия в зоне обработки, T – максимальные расчетные температуры в обрабатываемой пластине.

Таблица 1.1 – Свойства кварцевых золь-гель стекол

Свойства материала	Значения
Плотность, кг/м^3	2201
Удельная теплоемкость, Дж/кг·К	250
Теплопроводность, Вт/ м ·К	0,7
Коэффициент линейного термического расширения, град $-1\cdot10^{-7}$	5,7
Модуль Юнга, ГПа	73
Коэффициент Пуассона	0,16

Таблица 1.2 – Параметры лазерного раскалывания кварцевых золь-гель стекол

Параметры	Значения
Скорость резки V, мм/с	40; 45; 50; 55; 60; 65; 70
Мощность лазерного излучения P, Вт	10; 15; 20; 25; 30
Большая полуось эллиптического лазерного пучка A, мм	1; 1,5; 2; 2,5; 3
Малая полуось эллиптического лазерного пучка В, мм	0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5

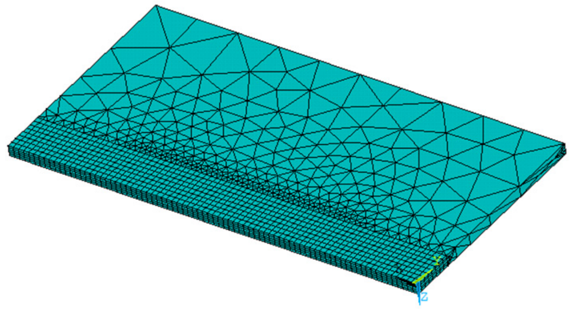


Рисунок 1.2 – Конечно-элементная модель

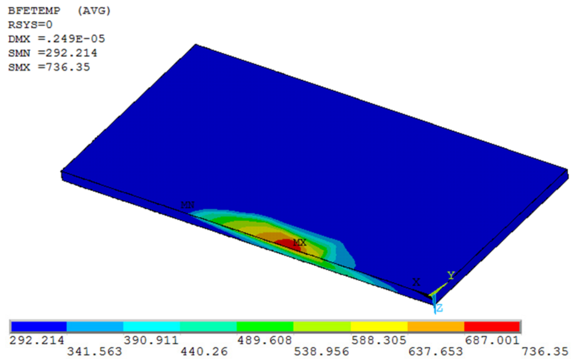


Рисунок 1.3 – Распределение температуры в объеме обрабатываемой кварцевой пластины, K $V = 70$ мм/с, $P = 25$ Вт, $A = 3$ мм, $B = 1{,}25$ мм

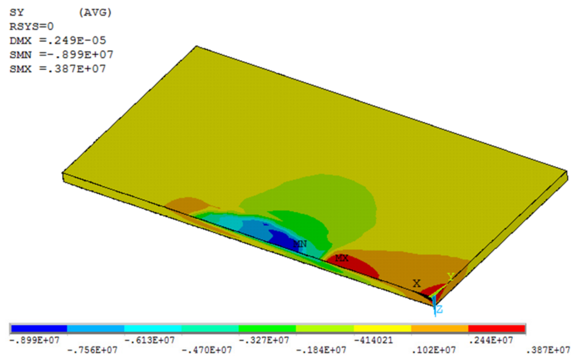


Рисунок 1.4 – Распределение напряжений σ_y в объеме обрабатываемой кварцевой пластины, Па $V = 70$ мм/с, $P = 25$ Вт, $A = 3$ мм, $B = 1{,}25$ мм

Таблица 1.3 – Входные параметры конечно-элементной модели и расчетные значения температур и термоупругих напряжений в зоне лазерной обработки кварцевых золь-гель стекол тестового набора данных

N	V, мм/с	A, мм	B, мм	P, Вт	σ_y, Па		T, K
1	60	1	1,25	10	–9900919	2134379	609
2	40	3	1	10	–5333315	2651899	587
3	60	2,5	1,5	10	–3981965	1516934	468
4	50	1	1,25	30	–31780331	7304059	1335
5	70	1,5	1,25	15	–10224731	2523861	655
6	70	2,5	1,5	15	–5647697	2015548	535
7	45	2	1,25	10	–6027223	2261845	560
8	70	1	1,25	30	–28046894	5762314	1169
9	55	3	1	30	–14093784	6375479	1031
10	40	3	1,25	25	–11228330	5896808	907

N	V, мм/с	A, мм	B, мм	P, Вт	σ_y, Па		T, K
11	55	1	1,5	25	–21982907	4922445	982
12	55	3	0,75	15	–8768348	3479365	743
13	55	2	0,75	20	–16568701	5059537	1011
14	55	2,5	1	15	–8081455	3449608	696
15	65	1,5	1,25	20	–13989759	3542707	795
16	45	2,5	1,25	20	–9879527	4442526	782
17	65	3	0,5	10	–8982481	2002186	651
18	45	3	1,5	30	–11432578	5454090	872
19	50	1	1	15	–19038379	3961303	932
20	70	1	0,75	10	–14012483	2563140	768
21	55	2	1,5	20	–10107524	3363278	697
22	40	4,5	0,5	10	–6998872	2091150	618
23	55	2	1,25	10	–5607504	1947446	533
24	45	1,5	1,25	30	–23925771	6946638	1203
25	45	2,5	1,5	20	–8922244	3761523	707
26	70	2	0,75	15	–11607193	3230900	773
27	65	3	0,75	25	–13814456	5172087	985
28	40	3	1,25	30	–13473999	7076175	1030
29	65	2,5	0,75	30	–19444159	6289100	1189
30	55	3	1,5	30	–10501907	4681773	805
31	50	1,5	1,5	25	–16340977	4819244	900
32	70	2,5	1,25	15	–6313280	2404042	580
33	50	1,5	0,5	15	–25641790	4533439	1195
34	45	2,5	1,5	10	–4461122	1880762	500
35	40	1,5	0,75	15	–18543781	5143121	1055
36	50	1,5	1	10	–8861788	2606542	648
37	50	1,5	1,5	15	–9804590	2891546	657
38	65	2,5	1,25	30	–12946026	5077539	891
39	65	2,5	1	30	–15403360	6110653	1031
40	45	1	1,25	15	–16524256	3935866	843
41	55	3	1,5	25	–8751579	3901473	720
42	60	3	0,75	10	–5674710	2188168	581
43	70	2,5	1	15	–7540657	2908975	648
44	70	2	1,25	25	–12919992	4103256	821
45	60	3	1,25	15	–5700827	2603719	583
46	40	3	1,25	10	–4491334	2358727	539
47	55	1,5	0,75	25	–27900682	7047292	1388
48	65	2,5	1,5	10	–3866510	1425637	461
49	45	3	1	25	–12695690	6127696	980
50	45	3	1	15	–7617414	3676617	705
51	70	3	1	15	–6472723	2679473	618
52	45	2,5	1,25	15	–7409645	3331894	660
53	50	3	1,25	20	–8159349	3987081	723
54	55	2,5	1,25	15	–6865154	2856648	621
55	45	2	0,75	10	–8775119	2858657	688
56	45	2,5	1	10	–5731623	2643385	592
57	50	2,5	0,75	20	–14118005	4975596	969
58	65	1	1,5	25	–20629586	4527509	925
59	45	2	1,5	25	–13646855	4771859	857
60	70	2	0,75	20	–15476256	4307871	933
61	60	1	0,75	20	–29495739	5719402	1316
62	50	2	0,75	25	–21281547	6712724	1233
63	65	2,5	1,25	10	–4315338	1692510	492
64	65	2	0,75	10	–7901756	2260306	625
65	40	2	1	30	–21761846	8762082	1340
66	50	3	1,25	10	–4079674	1993544	508

N	V, мм/с	A, мм	B, мм	P, Вт	σ_y, Па		T, К
67	70	1	0,75	15	–21018732	3844712	1005
68	60	2	1,25	10	–5441940	1834526	522
69	70	2	1	10	–6008014	1996249	555
70	70	2	1	30	–18024044	5988757	1079
71	40	3	1	25	–13333287	6629743	1027
72	50	1,5	0,75	15	–17253734	4502145	980
73	55	2	1	30	–19471147	7077513	1180
74	40	3	0,5	15	–15029579	3987257	938
75	50	1	0,5	15	–35013554	4969397	1342

2 Применение нейронной сети

Искусственная нейронная сеть – это математическая модель, основанная на структуре биологических нейронных сетей и обрабатывающая информацию на основе концепции множественных связей. Нейронная сеть состоит из связанных групп нейронов и является адаптивной системой, меняющей свою структуру на основе информации, проходящей через нее в процессе обучения. Искусственные нейронные сети эффективны при моделировании сложных связей между входами и выходами сети и их широкое применение обусловлено тем, что они создавались для нахождения нелинейных зависимостей в многомерных массивах данных [30].

Особенностью искусственных нейронных сетей в отличие от других алгоритмических конструкций является то, что они не программируются, а обучаются на множестве данных. Как отмечалось выше, обучающие выборки в данной работе формируются путем решения соответствующих задач в ANSYS. После обучения сеть, получив уже новые данные, способна корректно определять параметры лазерного раскалывания стеклянных пластин.

Для определения параметров лазерной обработки золь-гель стекол были использованы полносвязанные нейронные сети прямого распространения с различными архитектурами, созданные в открытой программной библиотеке для машинного обучения TensorFlow [12]. При создании сетей использовалась функция активации ReLu (Rectified Linear Unit), оптимизатор – Adam, являющийся расширением алгоритма стохастического градиентного спуска. Сети формировались с функцией потерь mse (mean squared error), вычисляющей квадрат разности между предсказанными и целевыми значениями. Количество эпох при обучении сетей и их архитектура изменялись (таблица 2.1).

Для тестирования сети использовались 75 вариантов параметров, представленных в таблице 1.3.

Для оценки эффективности работы нейронных сетей использовались следующие критерии:

– средняя абсолютная ошибка (Mean Absolute Error, *MAE*)

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|d_i - y_i\right|,$$

– среднеквадратичная ошибка (Root Mean Square Error, *RMSE*)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - y_i\right)^2},$$

– средняя абсолютная процентная ошибка (Mean Absolute Percentage Error, *MAPE*)

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{d_i - y_i}{d_i}\right|\cdot 100,$$

где d_i – желаемый выход сети, y_i – реальный выход сети.

Результаты обучения и тестирования созданных нейронных сетей приведены в таблице 2.1.

Величины средних абсолютных процентных ошибок (*MAPE*) при определении максимальных по величине напряжений сжатия, растяжения и температур в зоне обработки не превысили 13%, 8% и 5% соответственно для худшего варианта нейронной сети (вариант 1). Минимальные величины *MAPE* составили 6,3% для напряжений сжатия (вариант 6), 3,4% для напряжений растяжения (вариант 9) и 1,8% для температур (вариант 10). Наиболее предпочтительным представляется использование вариантов 6 и 10 конфигурации нейронной сети, обеспечивающего значения *MAPE*, равные 6,3%, 3,7%, 2,5% и 6,0%, 3,8%, 1,8% соответственно при определении максимальных по величине напряжений сжатия, растяжения и температур в зоне обработки. Отметим, что данные анализа с использованием *MAPE* хорошо совпадают с результатами анализа с использованием в качестве критериев эффективности работы нейронных сетей средней абсолютной ошибки (*MAE*) и среднеквадратичной ошибки (*RMSE*) (таблица 2.1). Значения *MAE* для 6 и 10 вариантов составили 0,69 МПа и 0,63 МПа для напряжений сжатия, 0,14 МПа и 0,14 МПа для напряжений растяжения, 23 К и 14 К для температур. Значения *RMSE* для 6 и 10 вариантов составили 0,89 МПа и 0,77 МПа для напряжений сжатия, 0,18 МПа и 0,17 МПа для напряжений растяжения, 19 К и 19 К для температур. В целом можно сделать вывод о возможности применения сочетания метода конечных элементов и искусственных нейронных сетей для определения параметров лазерной обработки кварцевых золь-гель стекол.

Таблица 2.1 – Результаты обучения и тестирования нейронных сетей

N	Количество данных	Архитектура	Эпохи	Напряжения сжатия			Напряжения растяжения			Температура		
				MAE	RMSE	MAPE	MAE	RMSE	MAPE	MAE	RMSE	MAPE
1	800	[4-5-3]	50	1,68	2,27	13,0	0,26	0,32	7,7	41	53	4,9
2	800	[4-10-3]	50	0,93	1,16	8,7	0,20	0,26	4,9	27	35	3,4
3	800	[4-15-3]	50	0,86	1,09	7,8	0,18	0,23	5,0	23	31	2,3
4	800	[4-15-3]	100	0,93	1,21	8,9	0,13	0,18	3,5	22	29	2,7
5	800	[4-15-10-3]	50	0,94	1,16	9,5	0,20	0,24	5,4	32	26	3,3
6	800	[4-15-10-3]	100	0,69	0,89	6,3	0,14	0,18	3,7	23	19	2,5
7	400	[4-15-3]	50	0,93	1,20	9,0	0,15	0,19	4,4	25	31	3,1
8	400	[4-15-3]	100	1,04	1,33	9,9	0,15	0,19	3,8	26	33	3,1
9	400	[4-15-10-3]	50	0,79	0,96	7,6	0,13	0,17	3,4	24	30	3,0
10	400	[4-15-10-3]	100	0,63	0,77	6,0	0,14	0,17	3,8	14	19	1,8

Заключение

В результате проведенного исследования установлена возможность определения режимов лазерного раскалывания кварцевых золь-гель стекол на основе сочетания метода конечных элементов и искусственных нейронных сетей. В результате численного эксперимента выявлены архитектуры нейронных сетей, дающие лучший результат при определении значений термоупругих напряжений и температур в зоне лазерной обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арбузов*, *В.И.* Основы радиационного оптического материаловедения. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2008. – 284 с.

2. *Подденежный*, *Е.Н.* Золь-гель синтез оптического кварцевого стекла / Е.Н. Подденежный, А.А. Бойко. – Гомель: УО «ГГТУ им. П.О. Сухого», 2002. – 210 с.

3. *Борисовский*, *В.Е.* Развитие теории и разработка комплекса технологий и оборудования для лазерной обработки кварцевого стекла: автореф. дис. докт. техн. наук: 05.11.14 / В.Е. Борисовский; МГУПИ. – М., 2011. – 36 с.

4. *Мачулка*, *Г.А.* Лазерная обработка стекла / Г.А. Мачулка. – М.: Сов. радио, 1979. – 136 с.

5. *Способ резки неметаллических материалов*: пат. 2024441 РФ, МКИ 5 C03B33/02 / B.C. Кондратенко; заявитель B.C. Кондратенко; заявл. 04.02.92; опубл. 12.15.94.

6. *Nisar*, *S.* Laser glass cutting techniques – A review / S. Nisar // Journal of Laser Applications. – 2013. – Vol. 25, № 4. – P. 042010-1–11.

7. *Никитюк*, *Ю.В.* Физические закономерности лазерного термораскалывания силикатных стекол и алюмооксидной керамики: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.04.21 / Ю.В. Никитюк. – Гомель, 2009. – 165 л.

8. *Shalupaev*, *S.V.* Silica gel glasses after laser radiation / S.V. Shalupaev, A.V. Semchenko, Y.V. Nikitjuk // Material Science. – 2003. – Vol. 21, № 4. – P. 495–501.

9. *Лазерная обработка кварцевых стекол, синтезированных золь-гель методом* / С.В. Шалупаев, В.В. Гайшун, А.В. Семченко, Ю.В. Никитюк // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2005. – № 2. – С 70–73.

10. *A review on applications of artificial intelligence in modeling and optimization of laser beam machining* / A.N. Bakhtiyari, Z. Wang, L. Wang, H. Zheng // Optics & Laser Technology. – 2021. – Vol. 135. – P. 1–18.

11. *Головко*, *В.А.* Нейросетевые технологии обработки данных: учеб. пособие / В.А. Головко, В.В. Краснопрошин. – Минск: БГУ, 2017. – 263 с.

12. *Шолле*, *Ф.* Глубокое обучение на Python / Ф. Шолле. – СПб.: Питер, 2018. – 400 с.

13. *Kant*, *R.* An integrated FEM-ANN model for laser bending process with inverse estimation of absorptivity / R. Kant, S.N. Joshi, U.S. Dixit // Mechanics of advanced materials and modern processes. – 2015. – Vol. 1. – P. 1–12. – DOI: https://doi.org/10.1186/s40759-015-0006-1.

14. *Соловьев*, *А.Н.* Идентификация круговых трещин, выходящих на поверхности труб с помощью сочетания метода конечных элементов и искусственных нейронных сетей / А.Н. Соловьев, З. Нгуен, Ч. Занг // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2014. – № 1. – С. 76–84.

15. *Светашков*, *П.А.* Оптимизация пространственных конструкции на основе гибридной нейросетевой программы: автореферат дис. … канд. техн. наук: Красноярск, 2005. – 20 с.

16. *Comparison of ANN and finite element model for the prediction of thermal stresses in diode laser cutting of float glass* / M.B. Kadri, S. Nisar, S.Z. Khan, W.A. Khan // Optik – Int. J. Light Electron Optics. – 2015. – Vol. 126, № 19. – P. 1959–1964.

17. *Rusia*, *S.* Application of Artificial Neural Network for Analysis of Triangular Plate with Hole Considering Different Geometrical and Loading Parameters / S. Rusia, K. Pathak // Open Journal of Civil Engineering. – 2016. – Vol. 6, № 1. – P. 31–41.

18. *Сегерлинд, Л.* Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

19. *Шабров, Н.Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.

20. *ANSYS в руках инженера*: практическое руководство / А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.

21. *Чигарев, А.В.* ANSYS для инженеров: справочное пособие / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук, А.Ф. Смалюк. – М.: Машиностроение, 2004. – 512 с.

22. *Введение в ANSYS: прочностной и тепловой анализ*: учебное пособие / А.С. Шалумов [и др.]. – Ковров: КГТА, 2002. – 52 с.

23. *Коваленко, Л.Д.* Основы термоупругости / Л.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.

24. *Концевой, Ю.А.* Пластичность и прочность полупроводниковых материалов и структур / Ю.А. Концевой, Ю.М. Литвинов, Э.А. Фаттхов. – М.: Радио и связь, 1982. – 240 с.

25. *Балкевич, В.Л.* Техническая керамика: учеб. пособие для втузов / В.Л. Балкевич; 2-е изд. – М.: Стройиздат, 1984. – 256 с.

26. *Баринов, С.М.* Прочность технической керамики / С.М. Баринов, В.Я. Шевченко. – М.: Наука, 1996. – 159 с.

27. *Карзов, Г.П.* Физико-механическое моделирование процессов разрушения / Г.П. Карзов, Б.З. Марголин, В.А. Шевцова. – СПб.: Политехника, 1993. – 391 с.

28. *Левин, В.А.* Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В.А. Левин, Е.М. Морозов, Ю.Г. Матвиенко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 408 с.

29. *Коленко, Е.А.* Технология лабораторного эксперимента: справочник / Е.А. Коленко. – СПб.: Политехника, 1994. – 751 с.

30. *Identification of crack-like defects in elastic structural elements on the basis of evolution algorithms* / A.A. Krasnoshchekov, B.V. Sobol, A.N. Solov'ev, A.V. Cherpakov // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 412–419.

Поступила в редакцию 07.07.2021.

УДК 621.793.1:546.26:533.92

МОРФОЛОГИЯ И ФАЗОВЫЙ СОСТАВ ЛЕГИРОВАННЫХ КРЕМНИЕМ УГЛЕРОД-ТИТАНОВЫХ ПОКРЫТИЙ

А.С. Руденков, А.В. Рогачёв, Д.Г. Пилипцов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

MORPHOLOGY AND PHASE COMPOSITION OF SILICON-DOPED TITANIUM CARBON COATINGS

A.S. Rudenkov, A.V. Rogachev, D.G. Piliptsou

Francisk Skorina Gomel State University

Рассмотрены морфологические особенности и фазовый состав углеродных покрытий, легированных кремнием и титаном. Показано, что легирование кремнием углерод-титановых покрытий приводит к снижению содержания sp^2-гибридизированных кластеров, свободных атомов графита за счет образования Si-C связей, росту шероховатости и некоторому улучшению гидрофобных свойств поверхности.

***Ключевые слова**: углеродные покрытия, кремний, титан, морфология, фазовый состав, поверхностная энергия.*

The morphological features and phase composition of carbon coatings doped with silicon and titanium are considered. It is shown that silicon doping of carbon-titanium coatings leads to a decrease in the content of sp^2-hybridized clusters, free graphite atoms due to the formation of Si-C bonds, an increase in roughness, and some improvement in the hydrophobic properties of the surface.

***Keywords**: carbon coatings, silicon, titanium, morphology, phase composition, surface energy.*

Введение

Углеродные покрытия благодаря высоким микротвердости и износостойкости, низкому коэффициенту трения и высокой химической инертности нашли применение в различных сферах производства, от производства биоимплантов до аэрокосмических технологий [1]–[9].

Однако углеродные покрытия обладают и рядом недостатков, в первую очередь низкой термостойкостью и высоким уровнем внутренних механических напряжений [1]–[7]. Известно, что термообработка покрытия свыше 350° C вызывает существенное снижение содержания sp^3-гибридизированных атомов углерода и приводит к ухудшению микротвердости и износостойкости углеродных покрытий [2]–[5]. Так, авторами [6] показано, что графитизация покрытия вследствие термообработки является причиной снижения микротвердости с 45 ГПа до 36 ГПа.

Одним из эффективных способов функционального модифицирования свойств покрытий на основе углерода является их легирование. Известно, что легирование углеродных покрытий кремнием способствует увеличению термостойкости углеродных покрытий до 600–700° C [7], в то время как легирование тугоплавкими металлами до 400–500° C [8]. Однако механические свойства кремний-углеродных покрытий несколько хуже, чем свойства металл-углеродных покрытий [4], а именно: более низкая твердость, абразивное воздействие покрытия на поверхность контртела в процессе трения.

По нашему мнению существенными перспективами с точки зрения разработки технологических приемов, способствующих одновременному повышению термостойкости и механических свойств углеродных покрытий, обладают технические решения, использующие многокомпонентное наполнение ингредиентами, оказывающими различное влияние на фазовый состав углеродной матрицы и, соответственно, свойства покрытий. Так, основным механизмом снижения внутренних механических напряжений углеродных покрытий при их легировании титаном при сохранении высокой твердости является образование карбидных фаз. При легировании кремнием помимо карбида регистрируется повышение доли sp^3-гибридизированных атомов углерода, что является следствием более активного участия графитоподобного углерода в процессах химического взаимодействия с кремнием [9]. При этом в [10] установлено, что при бинарном легировании кремнием и карбидообразующими металлами Cr и Mo не происходят фазовые изменения при увеличении температуры до 800° C.

Целью настоящей работы является определение особенностей морфологии и фазового состава углеродных покрытий, легированных титаном и кремнием.

1 Методика эксперимента

Формирование углеродных покрытий, легированных кремнием и титаном, осуществлялось

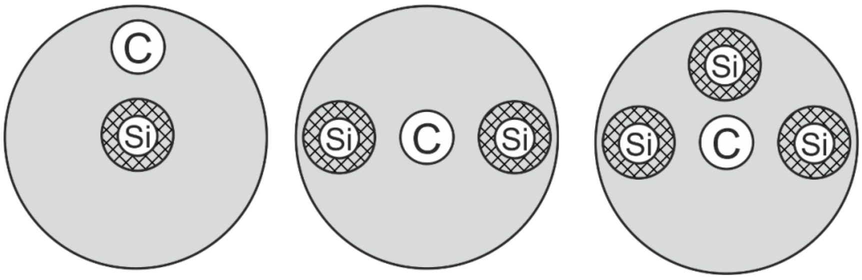


Рисунок 1.1 – Составной катод импульсного катодно-дугового источника

путем одновременного испарения составного графитового катода с различным количеством кремниевых вставок (рисунок 1.1) при помощи импульсного катодно-дугового источника (5000 импульсов, частота следования импульсов 10 Гц, напряжение разряда 350 В) и титана при помощи стационарного электродугового источника (ток дуги 80 А).

Химический состав покрытий определялся средствами рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС). Измерения проводились при помощи прибора PHI Quantera при возбуждении вещества Kα-излучением алюминия с энергией кванта 1486,6 эВ и суммарной мощностью 250 Вт. Погрешность определения концентрации элементов составляла ± 1 ат. %.

Установлено, что концентрация кремния возрастает пропорционально количеству кремниевых вставок с одновременным уменьшением содержания углерода (таблица 1.1). Концентрация титана с увеличением числа кремниевых вставок изменяется нелинейно, что, по всей видимости, обусловлено сепарацией потока металлической плазмы и его взаимодействием с потоком, генерируемым импульсным катодно-дуговым источником из составного кремний-углеродного катода.

Таблица 1.1 – Химический состав углеродных покрытий, легированных кремнием и титаном

Образец	Концентрация элементов, ат. %		
	C	Ti	Si
C+Ti	50,3	44,6	–
C+Ti+Si (1 вставка)	46,9	42,1	6,2
C+Ti+Si (2 вставки)	45,4	44,9	7,6
C+Ti+Si (3 вставки)	42,4	41,5	10,9

Морфология поверхности полученных композиционных покрытий изучалась при помощи атомно-силового микроскопа Solver Pro (NT-MDT, Москва, Россия) в полуконтактном режиме. Статистическая обработка полученных результатов осуществлялась средствами аналитической программы Gwyddion, позволяющей определить такие характеристики поверхности, как субшероховатость R_a – среднее арифметическое отклонение всех точек профиля шероховатости от средней линии на длине оценки, R_{ms} – параметр оценки рельефа поверхности, определяемый как корень квадратный из среднего квадрата расстояний вершин неровностей профиля до его средней линии; количество; среднюю высоту неровностей и диаметр образований (зерен), распределение зерен по размеру.

Анализ фазового состава углеродных покрытий, легированных кремнием и титаном, осуществлялся методами спектроскопии комбинационного рассеяния средствами спектрометра Senterra (Bruker, Германия) с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм, мощностью 5 мВт.

Поверхностная энергия покрытий рассчитывалась на основе измерений краевых углов смачивания поверхности образцов двумя различными жидкостями: глицерином и дистиллированной водой фиксированного объема (5 мкл). Захват и распознавание изображения лежащей капли жидкости проводился с помощью специально разработанной программно-аппаратной системы «Капля-2» на базе микроскопа МБС-6 с частотой 1 Гц в течение 1,5 мин.

2 Результаты и их обсуждение

Методом АСМ установлено, что наибольшей плотностью и диаметром отдельных структурных образований (зерен) из рассматриваемых образцов характеризуются композиционные покрытия с наибольшей концентрацией кремния (рисунок 2.1, таблица 2.1), что по всей видимости обусловлено наличием в плазменном потоке большего числа микрочастиц кремния и углерода.

Для спектров комбинационного рассеяния (КР) покрытий на основе углерода характерно наличие широкого пика между 1000 см$^{-1}$ и 1800 см$^{-1}$ [12], [13]. Данный пик обычно раскладывается на две гауссианы – *D*- и *G*-пик. *D*-пик соотносится с матрицей, состоящей из sp^2-гибридизированных атомов углерода с включениями из sp^3-гибридизированных атомов, и расположен между 1350 см$^{-1}$ и 1450 см$^{-1}$ [14]. *G*-пик соответствует sp^2-гибридизированным атомам углерода и детектируется около 1560–1580 см$^{-1}$ [13], [14].

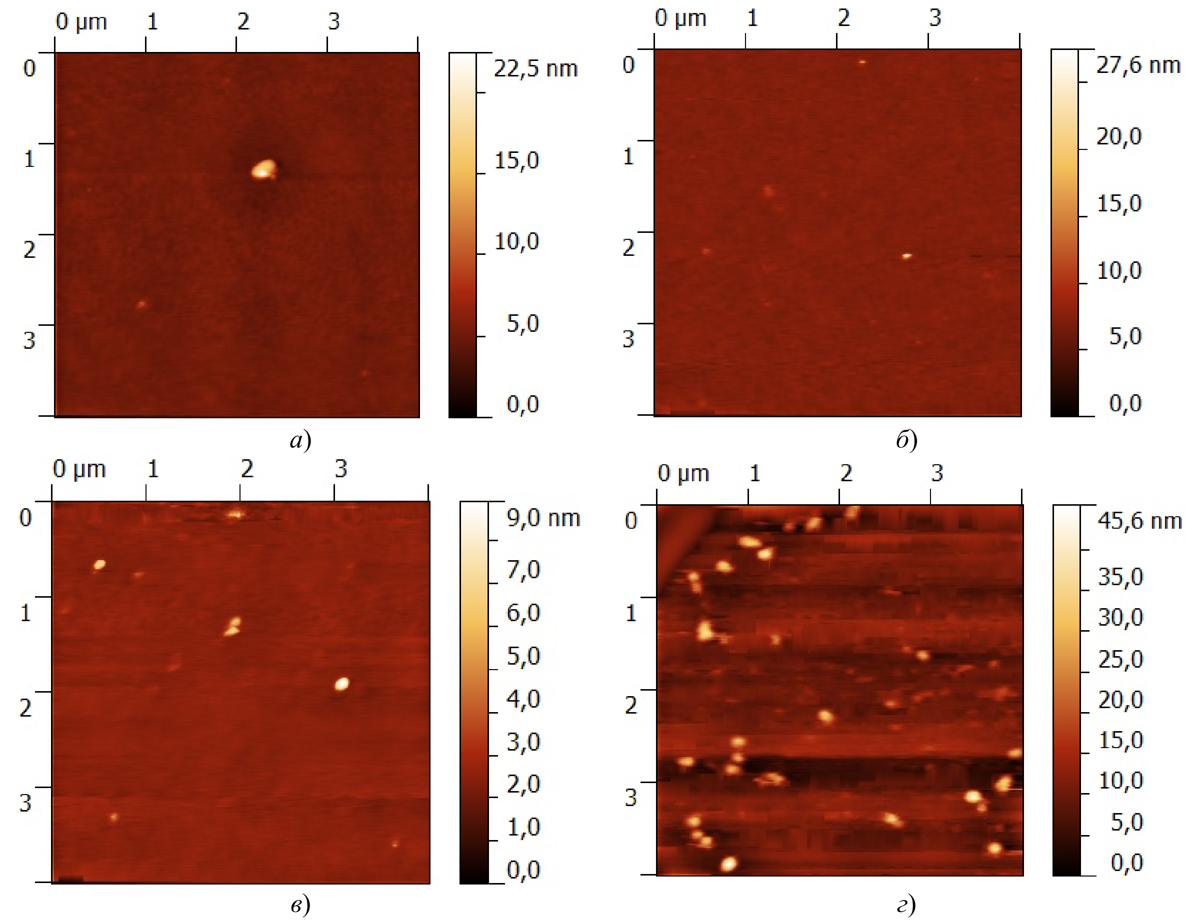


Рисунок 2.1 – АСМ изображения углеродных покрытий, легированных кремнием и титаном: *а*) $C_{50,3\%}$ + $Ti_{44,6\%}$, *б*) $C_{46,9\%}$ + $Ti_{42,1\%}$ + $Si_{6,2\%}$, *в*) $C_{45,4\%}$ + $Ti_{44,9\%}$ + $Si_{7,6\%}$, *г*) $C_{42,6\%}$ + $Ti_{41,5\%}$ + $Si_{10,9\%}$

Таблица 2.1 – Параметры морфологии легированных покрытий

Образец	Средняя высота, нм	R_a, нм	R_{ms}, нм	Плотность зерен, шт.	Средний диаметр зерен, нм
$C_{50,3\%}$ + $Ti_{44,6\%}$	6,7	0,3	0,5	30	56
$C_{46,9\%}$ + $Ti_{42,1\%}$ + $Si_{6,2\%}$	7,2	0,2	0,4	26	48
$C_{45,4\%}$ + $Ti_{44,9\%}$ + $Si_{7,6\%}$	3,0	0,1	0,3	74	49
$C_{42,6\%}$ + $Ti_{41,5\%}$ + $Si_{10,9\%}$	10,8	2,4	3,6	81	83

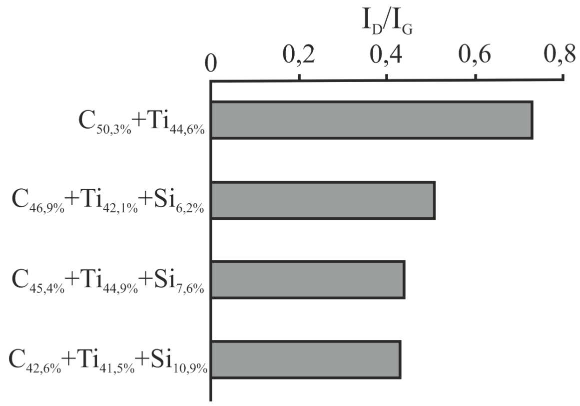


Рисунок 2.2 – Влияние химического состава композиционных углеродных покрытий на соотношение I_D / I_G КР-спектров

В [15] показано, что соотношение интенсивностей *D*- и *G*-пиков I_D / I_G обратно пропорционально размеру кластеров графита при размерах кластеров более 2 нм. Анализ результатов КР-спектроскопии (рисунок 2.2) подтверждает данные атомно-силовой микроскопии, и также свидетельствует об увеличении размеров отдельных кластеров с ростом концентрации кремния.

По сравнению с углеродными покрытиями, легированными титаном, при разложении КР-спектров покрытий, легированных и титаном, и кремнием, наблюдается смещение положения *G*-пика в сторону более низких волновых чисел, уменьшение интенсивности *D*-пика, а значит и отношения I_D / I_G с одновременным снижением полуширины обоих пиков (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Параметры КР спектров легированных покрытий

Образец	*D*-пик		*G*-пик		I_D / I_G
	Положение, см$^{-1}$	Ширина, см$^{-1}$	Положение, см$^{-1}$	Ширина, см$^{-1}$	
$C_{50,3\%}$ + $Ti_{44,6\%}$	1393	249	1561	191	0,73
$C_{46,9\%}$ + $Ti_{42,1\%}$ + $Si_{6,2\%}$	1409	246	1553	194	0,51
$C_{45,4\%}$ + $Ti_{44,9\%}$ + $Si_{7,6\%}$	1428	209	1546	171	0,44
$C_{42,6\%}$ + $Ti_{41,5\%}$ + $Si_{10,9\%}$	1411	221	1545	182	0,43

Таблица 2.3 – Значения краевого угла смачивания и поверхностной энергии и ее составляющих

Образец	Угол смачивания (глицерин), градусы	Угол смачивания (вода), градусы	Дисперсионная составляющая, мДж/м^2	Полярная составляющая, мДж/м^2	Поверхностная энергия, мДж/м^2
$C_{50,3\%}$ + $Ti_{44,6\%}$	63	82	50,3	0,1	50,4
$C_{46,9\%}$ + $Ti_{42,1\%}$ + $Si_{6,2\%}$	65	90	48,0	0,3	48,3
$C_{45,4\%}$ + $Ti_{44,9\%}$ + $Si_{7,6\%}$	71	92	37,1	0,9	38,0
$C_{42,6\%}$ + $Ti_{41,5\%}$ + $Si_{10,9\%}$	72	86	26,9	4,2	31,1

Согласно [16] такие изменения в спектре комбинационного рассеяния связаны с разрушением кластеров sp^2-гибридизированных атомов. Смещение же *D*-пика в область более высоких волновых чисел может быть обусловлено образование Si-C связей, ассоциируемых с пиком вблизи 1450 см$^{-1}$.

Результаты определения поверхностной энергии по краевому углу смачивания (таблица 2.3) косвенно подтверждают данные КР-спектроскопии и свидетельствуют о снижении содержания свободных sp^2-гибридизированных атомов. Установлено, что при увеличении концентрации кремния в составе композиционных углеродных покрытий наблюдается уменьшение поверхностной энергии за счет уменьшения ее дисперсионной составляющей. При этом полярная составляющая наоборот растет.

Увеличение значения полярной составляющей может быть связано с образованием химических соединений с сильно полярными связями: Si – O, Si – C [17]. Наименьшей поверхностной энергией из рассматриваемых образцов характеризуются углеродные покрытия с наибольшим содержанием кремния.

Выводы

Установлено, что введение кремния (свыше 8 ат. %) в состав углерод-титановых покрытий приводит к росту шероховатости поверхности, числа и размера отдельных структурных образований. Данные КР-спектроскопии косвенно указывают на снижение содержания свободных sp^2-гибридизированных атомов углерода, что, по всей видимости, связано с образованием связей типа Si – C.

Образование Si – C связей подтверждается результатами расчетов поверхностной энергии на основании измерения краевого угла смачивания. При увеличении концентрации кремния в составе композиционных углеродных покрытий наблюдается уменьшение поверхностной энергии за счет снижения ее дисперсионной составляющей. При этом полярная составляющая поверхностной энергии возрастает, что может быть связано с образованием химических соединений Si – O, Si – C с высоким дипольным моментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогачёв*, *А.В.* Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачёв // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.

2. *Khamnualthong*, *N.* Thermal Stability Evaluation of Diamond-like Carbon for Magnetic Recording Head Application using Raman / N. Khamnualthong, K. Siangchaew, P. Limsuwan // Procedia Engineering. – 2012. – Vol. 32. – P. 888–894.

3. *Bewilogua*, *K.* History of diamond-like carbonfilms – From first experiments to worldwide applications / K. Bewilogua, D. Hofmann // Surface and Coatings Technology. – 2014. – Vol. 242. – P. 214–225.

4. *Руденков*, *А.С.* Влияние концентрации металла на фазовый состав, структуру и свойства углерод-металлических покрытий / А.С. Руденков // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 26–32.

5. *Characterization of DLC coatings over nitrided stainless steel with and without nitriding pre-treatment using annealing cycles* / E.L. Dalibon [et al.] // Journal of Materials Research and Technology. – 2019. – Vol. 8. – P. 1653–1662.

6. *Influence of high temperature annealing on the structure, hardness and tribological properties of diamond-like carbon and* TiAlSiCN *nanocomposite coatings* / Z.W. Xie [et al.] // Applied Surface Science. – 2011. – Vol. 258. – P. 1206–1211.

7. *Optical and structural properties of silicon oxynitride deposited by plasma enhanced chemical vapor deposition* / J. Dupuis [et al.] // Thin Solid Films. – 2010. – Vol. 519. – P. 1325–1333.

8. *Influence of W content on microstructural, mechanical and tribological properties of sulfurized W-doped diamond-like carbon coatings* / W. Yue [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2013. – Vol. 218. – P. 47–56.

9. *Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы* / Д.Г. Пилипцов [и др.]; под ред. А.В. Рогачёва. – М.: Радиотехника, 2020. – 283 с.

10. *Thermostable resistors based on diamond-like carbon films deposited by CVD method* / V.K. Dmitriev [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2001. – Vol. 10. – P. 1007–1010.

11. *Mechanical and tribological evaluation of* CrSiCN, CrBCN *and* CrSiBCN *coatings* / Q. Wang [et al.] // Tribology International. – 2019. – Vol. 130. – P. 146–154.

12. *Raman spectroscopy on amorphous carbon films* / J. Shwan [et al.] // Journal of Applied Physics. – 1996. – Vol. 80. – P. 440–447.

13. *Robertson*, *J.* Electronic and atomic structure of amorphous carbon / J. Robertson, E.P. O'Reilly // Physical Review B. – 1987. – Vol. 35. – P. 2946–2957.

14. *Ferrari*, *A.C.* Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon / A.C. Ferrari, J. Robertson // Physical Review B. – 2000. – Vol. 61. – P. 4095–4107.

15. *Tuinstra*, *F.* Raman spectrum of graphite / F. Tuinstra, J.L. Koenig // Journal of Chemical Physics. – 1970. – Vol. 53. – P. 1126–1130.

16. *The effect of vacuum annealing on the structure and properties of the electrically conductive* a-CN coating / A. Poplavsky [et al.] // Vacuum. – 2021. – Vol. 184. – Article 109919.

17. *Characteristics and surface energy of silicon-doped diamond-like carbon films fabricated by plasma immersion ion implantation and deposition* / G.I. Wan [et al.] // Diamond & Related Materials. – 2006. – Vol. 15. – P. 1276–1281.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «*Разработка реакционных ионно-плазменных методов формирования и параметризация покрытий на основе силицированного углерода и карбидообразующих металлов с высокими механическими свойствами и повышенной термостойкостью*», *комплексное задание* 3.1.02 «*Разработка устройств и процессов комбинированного электронно-ионного нанесения слоев и модифицирования поверхности для формирования функциональных покрытий*» *ГПНИ* «*Материаловедение, новые материалы и технологии*», *подпрограмма* «*Электромагнитные, пучково-плазменные и литейно-деформационные технологии обработки и создания материалов*».

Поступила в редакцию 19.07.2021.

УДК 535.1 + 524.82

МАССИВНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ. IV. ВЕКОВОЙ ДРЕЙФ АТОМНЫХ СПЕКТРОВ И ОПТИКА СВЕРХНОВЫХ ТИПА Ia

М.А. Сердюкова, А.Н. Сердюков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

A MASSIVE GRAVITATIONAL FIELD IN FLAT SPACETIME. IV. THE SECULAR DRIFT OF ATOMIC SPECTRA AND OPTICS OF TYPE Ia SUPERNOVAE

M.A. Serdyukova, A.N. Serdyukov

Francisk Skorina Gomel State University

Космологическое приложение предложенной ранее в рамках СТО калибровочно-инвариантной теории массивного гравитационного поля предсказывает существование во Вселенной динамически однородного фонового гравитационного поля с единственной ненулевой временной компонентой, которое доминирует во Вселенной, управляя ее циклической эволюцией посредством сбалансированного обмена энергией с гравитирующей материей. Предшествующее и продолжающееся увеличение энергии покоя атомов прекрасно объясняет космологическое красное смещение их спектров без гипотетического разбегания далеких галактик. Превосходное численное согласие теории с наблюдательными оптическими данными от сверхновых типа Ia достигнуто в результате фитирования только двух параметров: возраста текущего цикла (24 млрд лет) и текущего значения скалярной фоновой напряженности, выраженную через постоянную Хаббла (68 км/с/Мпс). Предсказанное космологическое ускорение распада нестабильных ядер и частиц подтверждается растяжением кривых блеска сверхновых Ia с коэффициентом $(1+z)$, наблюдаемое послесвечение которых происходит за счет высокоэнергетических фотонов гамма-излучения, испускаемых в цепочке бета-распадов $^{56}\mathrm{Ni} \to {}^{56}\mathrm{Co} \to {}^{56}\mathrm{Fe}$.

Ключевые слова: *фоновое гравитационное поле*, *вековой дрейф атомных спектров*, *космологическое красное смещение*, *оптическое излучение сверхновых типа* Ia.

The cosmological application of the proposed early special-relativistic gauge-invariant theory of a massive gravitational field predicts the existence in the universe of a dynamical spatially uniform background gravitational field with a single non-zero time component, which dominates in Universe controlling its cyclic evolution through the balanced exchange of energy with gravitating matter. The previous and continuing increase in the rest energy of matter perfectly explains the cosmological redshift of atomic spectra without the hypothesis of a general recession of distant galaxies. The excellent numerical agreement of theory with the data from SNe Ia is achieved by fitting only two parameters: the age of the current cycle (24 Gyr) and the current value of the background scalar strength expressed through the Hubble constant (68 $\mathrm{kms^{-1}\ Mpc^{-1}}$). The predicted cosmological acceleration of the decay of unstable nuclei and particles is confirmed by $(1+z)$-stretching of the light curves of SNe Ia, the observed afterglow of which occurs owing to the high-energy gamma-ray photons released in the chain of beta decays $^{56}\mathrm{Ni} \to {}^{56}\mathrm{Co} \to {}^{56}\mathrm{Fe}$.

Keywords: *background gravitational field*, *secular drift of atomic spectra*, *cosmological redshift*, *optical radiation of type* Ia *supernovae.*

Introduction

The cosmological redshift of the atomic spectra is one of the main directly observed global phenomena in the universe. Due to the finiteness and constancy of the speed of light, this phenomenon is a reliable source of unique information about the cosmological evolution of matter and the evolutionary history of the universe as a whole. Two circumstances allow us to look into the history of the evolution of matter itself, rejecting the hypothesis of an expanding universe: the obvious connection between the “age” of the observed cosmic event and the distance from it and the Hubble law – the redshift of the observed objects increases with their distance from the observer. In short, the greater the redshift of the galaxy’s radiation, the further away it is located, but the further away the galaxy, the earlier the events observed in it took place. The astronomical mosaic of observed “redshifted” events happened at different epoches will, of course, add up to a realistic history of the universe if, moreover, we have an appropriate theory that correctly reflects the physical nature of the cosmological redshift. In the application here presented of the offered scalar theory of the gravitational field to the entire flat universe, the cosmological redshift of the atomic spectra finds a natural explanation, without requiring the Hubble’s “radial velocities of «...» extra-galactic nebulae”, increasing as they recede from the observer [1], and any other unavoidable *ad hoc* assumptions.

As we will see, in the model of the universe based on this theory, the redshifts of atomic spectra and their growth with increasing cosmological distances are alternatively explained as a manifestation of a part of the cyclic process of synchronous change in the inertial mass of atoms throughout infinite space in the visible past epoch up to the present time. The inertial masses and rest energies in various quantum states of atoms, as well as the distances between their energy levels and the frequencies of the emitted photons, were increasing at this epoch at the expense of the energy of the existing slowly varying background gravitational field. This field is significantly different from what we knew about gravity before. In a homogeneous universe, the four-vector strength of this field is represented by a single time component, which is a three-dimensional scalar.

By the way, it should be admitted that Edwin Hubble himself understood the possibility of an alternative to the Döppler redshift mechanism proposed by him. At that time he had serious reasons to suspect this, because, according to the then scale of cosmological distances, "The familiar interpretation of red-shifts seems to imply a strange and dubious universe, very young and very small" [2]. But starting with Hubble's first publication [1], due to the lack of a better alternative to the expansion of the universe, the far-reaching myth of the recession of distant galaxies became firmly "established in most astronomer's minds" and has "survived through the decades until the present" [3, p. 417–418].

We present in this peper the alternative scenario of the evolution of the dust-filled universe eternally dominated by the background gravitational field. The proposed model of the cyclically evolving universe is based on the canonical linear theory of the massive scalar field, which we use as a working model of the gravitational field. It is amazing how a completely new dynamics of a non-expanding universe, confidently explaining the results of astronomical observations accumulated over the past century, directly follows from the updated scalar model of gravity in combination with the cosmological principle, which postulates only a homogeneous and isotropic distribution of matter. It is especially important that the adopted simplest non-geometric approach to the problem of relativistic generalization of Newtonian gravity is sufficient for an unambiguous interpretation of astronomical observations without the previously mentioned speculative theoretical artifacts of presently existing cosmology.

1 The equations of the background gravitational field

In this section, we will try to reconstruct a dynamical model of the universe filled with gravitating dust-like matter, homogeneously and isotropically distributed in space, in the presence of the evolving background gravitational field. We would like to prevent the appearance in the new model of the universe of 'dark clouds', similar to the mysterious concepts of "dark energy" and "dark matter", which have long been entrenched in the existing cosmology. We now turn to a consideration of the customary model of a dust-filled homogeneous universe, treating it as a unified gravitating system. In the following, we will mainly be interested in the collective gravitational field created by all the dust particles forming such a system, whether it be whole galaxies, individual atoms in intergalactic clouds or simply massive elementary particles. To calculate the background field we use the Klein – Gordon equation

$$\left(\Box - \varkappa^2 - \frac{2\pi G_0}{c^2}\Theta\right)\phi = 0, \tag{1.1}$$

where Θ is the spatially averaged source of the field:

$$\Theta = \frac{1}{\mathscr{V}}\int\limits_{(\mathscr{V})}\sum_a m_a\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right)dV \tag{1.2}$$

(see [4, Eqs. (3.2) and (3.3)]). Here we assume that the averaging is performed in the rest frame of the universe over a cosmological volume $\mathscr{V}$ whose linear dimensions in all directions are much larger than the averaged distances between individual "dust particles", such as separate galaxies and their clusters, that is of about 10^8 to 10^9 light years. It is also assumed that upon averaging, the individual contributions $m_a\left(1-v_a^2/c^2\right)^{1/2}$ to the common source of the background field are taken at the same fixed instant of the standard (special-relativistic) cosmic time t counted by a photon clock.

In order to refine the gravitational field equation (1.1) by presenting the field-dependent source density Θ explicitly in terms of the desired field variable ϕ, we must express in (1.2) the square of the velocity of each individual particle in terms of the square of its conserved momentum. For this we use two (ordinary and Hamilton's) forms of particle energy,

$$\mathscr{E} = \frac{c^2 m\phi^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{c^2p^2 + c^4m^2\phi^4}, \tag{1.3}$$

relating v^2 to p^2 for solving our preliminary task. In this way, we represent the source (1.2) as a somewhat complicated but explicit function of the conserved momentum of particles and the variable Ψ of the field itself (we omit the index a):

$$\Theta(\phi) = \frac{1}{\mathscr{V}}\sum_{(\mathscr{V})}\frac{m}{\sqrt{1+\dfrac{p^2}{c^2m^2\phi^4}}}. \tag{1.4}$$

The time-dependent strength $Q(t)$ of the background gravitational field initiates, as we know from [5] (see Section 2), the appearance of the radial (convergent or divergent, dependently of sign of Q) energy fluxes directed along a local field $\mathbf{g}$ created by individual gravitating bodies, such as stars, atoms, or, simply, elementary particles. This means that, contrary to the current opinion, the inertial mass of each particular gravitating body and, ultimately, of every individual elementary particle is their variable characteristic, which slowly changes together with the strength $Q(t)$ of the background field throughout the history of the modeled universe.

This process must be balanced as required by the law of energy conservation. To proof this, we start from the field equation (1.1), which we rewrite again, using the detailed expression (1.4) for the field source:

$$\left(\Box - \varkappa^2 - \frac{2\pi G_0}{c^2} \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_{(\mathscr{V})} \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2 m^2 \Psi^4}}} \right) \phi = 0. \quad (1.5)$$

Note that the equation (1.1) in form (1.5) remains invariant with respect to the gauge transformation $\phi \to C\phi'$, since this transformation also generates a scale transformation $\mathbf{p} \to \mathbf{p}' = C^2 \mathbf{p}$ of the particle momentum, which is proportional in this case to ϕ^2.

In our further analysis of global processes in the universe, we will refer to the frame of reference associated with all matter filling the space. In this fundamental frame, which is inertial by definition, the dustlike matter is distributed uniformly and isotropically and is at rest on the average. From symmetry considerations it follows that the instantaneous picture of the distribution in space of the background gravitational field coupled to this background matter should inherit its spatial homogeneity. This means that in the fundamental frame of reference, which will be adopted henceforth, this field should depend on time alone, that is $\phi(x) = \Psi(t)$. In this case, equation (1.5) can be rewritten as follows:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + c^2 \varkappa^2 \Psi + 2\pi G_0 \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_{(\mathscr{V})} \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2 m^2 \Psi^4}}} \Psi = 0, \quad (1.6)$$

where, as before, in the summation over all particles in a volume $\mathscr{V}$, the squares of their random momenta are assumed to be time-independent. Multiplying the equation (1.6) with the expression $\left(c^2 / 2\pi G_0\right) d\Psi / dt$ and using the connection (1.3), after some simple transformations we get the equality

$$\frac{d}{dt}\left(W_M + W_Q\right) = 0. \quad (1.7)$$

Here the quantity

$$W_M = \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_{(\mathscr{V})} \frac{c^2 m \Psi^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.8)$$

is the energy density of the dust matter, averaged over the space, whereas the density of the energy stored in the field itself is

$$W_Q = \frac{c^4}{2\pi G_0} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{d\Psi}{dt} \right)^2 + \varkappa^2 \Psi^2 \right]. \quad (1.9)$$

In complete agreement with the results presented in [5] (see Section 1), this expression denote the density of the energy accumulated by this field in two forms, kinetic and potential. Thus, the equation (1.7) shows that the sum of the energy densities W_M and W_Q of these two main constituents of the *not expanding* as well as *not contracting* universe does not change with cosmological time.

2 Gravitational background in the quiet homogeneous universe

In order to remove the complexities in our discussion of dynamical cosmology, we must, as usual, accept a simplified idealized model of the universe endowing it with the minimum number of necessary averaged parameters.

The first simplified assumption that we have to accept is that the matter filling the space is nonrelativistic. This means that the velocities of the vast majority of randomly moving masses of "dust particles", that is of stars, galaxies, and their clusters in the visible universe are much lower than the speed of light. Therefore $p \ll cm$ for all of them, so that, in the range of values of $\Psi(x)$ different appreciably from zero, the ratio $\mathbf{p}^2 / \left(cm\Psi^2\right)^2$ in equation (1.5) can be neglected in comparison with unity. In fact, in this way we can replace the precise source (1.4) of the background field by the expression $\Theta \approx \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_{(\mathscr{V})} m = \bar{\mu}$ is constant. However in this case the illegality of the given limiting transition with disappearing value of $\Psi(x)$ becomes non-obvious. As can be seen from (1.4), the exact value of the averaged parameter $\Theta(\Psi)$ depends on time together with the field Ψ and tends to zero if this field variable vanishes. So this case requires a separate consideration.

In our consideration, we will also neglect the global mass defect accumulating over space time due to the stellar nucleosynthesis and structural changes in matter after its gravitational condensation. This will allow us to consider the averaged density $\bar{\mu}$ of the gravitational mass of matter unchanged for a long cosmological era. Of course, only in a universe without expansion or contraction, the spatial density of gravitational mass can be considered unchanged over very long (by cosmological standards) time intervals, and we assume that this is indeed the case.

Thus, under the above assumptions that our Universe during a long cosmological epoch is filled mainly with nonrelativistic dust-like matter, the complex nonlinear equation (1.5) [as well as (1.6)] for the background field in an acceptable approximation is reduced in an arbitrarily chosen inertial frame to the linear Klein – Gordon equation

$$\left(\Box - \frac{\Omega^2}{c^2} \right) \Psi(x) = 0. \quad (2.1)$$

Here, for brevity, we have introduced the notation for the new combined cosmological parameter

$$\Omega^2 = c^2\varkappa^2 + 2\pi G_0\overline{\mu} \qquad (2.2)$$

with the dimension of the squared inverse time (squared frequency). Its more precise physical significance as a characteristic of the evolving universe will be explained below. But even a cursory glance at equation (2.1) is enough to understand that this parameter should play a huge role in our investigation of the dynamics of the universe. Primarily we see that the value of Ω determines the space and time changes of the logarithmic potential ϕ of the background field. But Ψ, in turn, governs the energy content of gravitating matter from elementary particles to macroscopic bodies and stars and, therefore, controls the cosmological evolution of their inertial mass.

Parameter (2.2) is certainly a fundamental characteristic of the universe, combining two main contributions to the total "effective source" of the background field Ψ in (2.1). One of them is the averaged density $\overline{\mu}$ of the gravitational mass of the background dust-like non-relativistic matter that fills the space, while the second is related to the parameter $\varkappa$ presented in theory and having a purely field origin inherent in a massive field. Thus, the hypothesis that the graviton as a quantum of the scalar gravitational field is an exotic elementary particle with a nonzero gravitational mass $m_G = \hbar\varkappa / c$, creates an additional degree of freedom. In cosmological applications of the theory, the nonzero graviton mass, as seen from (2.2), can alternatively parameterize the well-known lack in the observed Universe of hadronic matter, established when trying to interpret some key astronomical observations within the currently accepted theory of gravity.

Having discarded the commonly accepted hypothesis of accelerated expansion of the universe, as well as the cosmological expansion as such, as erroneous in order to explain the Hubble redshift as such and its observed nuances, we find no reason to believe that the average kinetic energy density of randomly moving galaxies and, therefore, the universe parameters Θ and Ω could be noticeably different their current values in directly observed past cosmic history. In this case, it can also be assumed that these parameters will not noticeably change over a long cosmological time in the future history of the universe.

Considering the model of the Universe uniformly filled with nonrelativistic matter, we choose a simple monochromatic solution of equation (2.1),

$$\Psi(x) = \mathscr{A}\sin\left(-k_\mu x^\mu + \alpha\right), \qquad (2.3)$$

as a global gravitational field that permeates all infinite space along with matter. In this expression, parameters $\mathscr{A}$ and α are the usual integration constants. We emphasize that our choice of the simple particular solution (2.3) for the background gravitational field and not any other was not random. It was motivated by considerations of reasonable sufficiency and corresponds to the model of a homogeneous universe accepted here.

By virtue of the Klein – Gordon equation (2.1), the components of a constant four-dimensional wave vector

$$\left(k^\mu\right) = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \qquad (2.4)$$

in (2.3) satisfy the condition

$$k_\mu k^\mu = -\frac{\Omega^2}{c^2}.$$

The inequality $k_\mu k^\mu = \mathbf{k}^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2} < 0$, which results from this, means that for the four-vector k^μ there exists a preferred inertial reference frame in which the ordinary wave vector $\mathbf{k}$, formed by the spatial components of k^μ, vanishes. Hence the frequency of the wave

$$\omega = \left(\Omega^2 + c^2\mathbf{k}^2\right)^{1/2} \qquad (2.5)$$

reaches in this frame its minimum value $\omega_{\min} = \Omega$. Using, in addition, the fact that the phase constant α, without loss of generality, can also be made equal to zero by a suitable choice of the time origin, we can rewrite (2.3) in this preferred frame in the form

$$\Psi(t) = \mathscr{A}\sin\Omega t. \qquad (2.6)$$

Thus, the wavelength $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ of the flat harmonic gravitational wave (2.3) is stretched to infinity on going to the mentioned fundamental reference frame. As a result, for the observer catching up with this frame, the wave behavior of the background field is leveled and completely disappears. Hence, in the fundamental frame of reference the background gravitational field, being spatially homogeneous, exhibits only oscillatory behavior. We will call the frequency Ω of these oscillations the cardinal or fundamental frequency of the cyclically evolved universe.

If we choose the spatial homogeneity of the background gravitational field as an unconditional preliminary restriction, then the Klein – Gordon equation (2.1) can be reduced in the fundamental frame of reference to a simple equation of a pendulum oscillations without spatial derivatives:

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \Omega^2\Psi = 0. \qquad (2.7)$$

The physical acceptability of the solutions of this equation, independent of spatial coordinates, is completely obvious from the point of view of an observer in the fundamental frame of reference. From symmetry arguments, it becomes obvious that in this reference frame a scalar source of whatever nature (such as, for example, the gravitational mass of gravitating matter), which is at rest and uniformly and isotropically distributed throughout the space, cannot create any global scalar field that would depend on the coordinates and thus distinguish a certain direction in space determined by a nonzero gradient.

Therefore, the spatial components of the strength four-vector $g^{\mu} = (Q, \mathbf{g})$ of the background gravitational field, expressed in terms of its variable Ψ as

$$g^{\mu} = -2c^2 \frac{1}{\Psi} \partial^{\mu} \Psi, \qquad (2.8)$$

are zero, that is, $g^{\mu} = (Q, 0, 0, 0)$. In contrast, the temporal component

$$Q = 2c \frac{1}{\Psi} \frac{d\Psi}{dt} \qquad (2.9)$$

of this four-vector, if we take into account (2.6), is a nonzero periodic function of time:

$$Q = 2c\Omega \cot \Omega t. \qquad (2.10)$$

Unlike $\Psi(t)$ given by (2.6), this field changes in time with frequency 2Ω, that is, with the fundamental period

$$T = \frac{\pi}{\Omega}. \qquad (2.11)$$

Of course, the equation (2.1) admits a wide set of other solutions besides the chosen above. However, our choice of a solution (2.6) harmonically oscillating in time is the most preferable of them. It is motivated by considerations of simplicity and reasonable sufficiency, and also by the fact of isotropy and homogeneity of the modeling dust-like universe, established by astronomical observations and fixed as a cosmological principle.

But besides the original symmetry arguments that simplify the model of the universe, the correspondence of the subsequent theoretical conclusions to real astronomical observations was crucial for our final choice of field variables (2.6) and (2.10) among other admissible solutions that determine the evolution of the universe. The adopted solution (2.6) describes a field possessing precisely these properties of spatial homogeneity and isotropy. Consequently, the strength (2.10) represents the large-scale background gravitational field in the already introduced fundamental frame of reference existing together with matter of the entire universe.

So, the state of the background gravitational field is given by its wave function $\Psi(t)$, the logarithmic time derivative of which determines the observable of this field – its scalar strength $Q(t)$.

3 Cyclic evolution of the inertial mass

In our previous search for a suitable "minimal" dynamical generalization of Newtonian static gravity, compatible with the special-relativistic conservation laws and satisfying Maxwell's principle of the positivity of energy density of the field, we did not seek to construct in advance a theory of variable inertial mass of matter. As we have discussed earlier in [5], the gravitational variability of the energy, stored by a massive body or classical point particle at rest, arises as a completely natural phenomenon from the point of view of the theory of a mass-coupled canonical scalar field. In a weak local (non background) field, this looks like a small mass defect accompanying the gravitational interaction.

But apart from this, the proposed theory of the gravitational field, which meets the stated requirements, unexpectedly reveals the physical essence of the concept of mass hidden in the phenomenology of two equivalences: mass-energy and also inertial and gravitational masses. We have to be convinced of the limitations of our current understanding of inertial mass as a passive form of accumulated energy "'dormant' in massive bodies, that is released in part during chemical and especially nuclear reactions" [8] as well as in the cosmic processes of gravitational clustering of matter. The rest energy also does not participate in the transformation into other forms of in separate stable elementary particles (with the exception of matter-antimatter annihilation).

Up to our time, the classical relativistic mechanics, having discovered the rest energy, did not give any keys to understanding its physical nature and the mechanism of its formation, hidden in the phenomenology of perhaps the most famous physical formula $\mathscr{E} = mc^2$. Remaining within the framework of generally accepted physical concepts, we can only talk about the binding energy and mass defect, that is, about a completely insignificant imbalance of the rest energy accumulated in the inertial mass, arising as a result of the formation, transformation, or decay of complex material structures, such as atomic nuclei, atoms, molecules, or cosmic bodies formed with the participation of various physical fields. For example, the mass defect in the splitting of a helium nucleus bound by strong interaction is only 0.75% of its total inertial mass.

As for the contributions to the inertial mass produced by the other three fundamental interactions, they are known to be even more negligible. A simple calculation leads to the conclusion that the gravitational binding energy of the earth contributes a fraction 8.4×10^{-10} of its total rest energy [3]. The fractional mass defect of a star such as the sun is $\sim10^{-6}$.

In the case of an individual atom, the contributions of the strong, electromagnetic, weak and gravitational interactions to its binding energy and, therefore, to the inertial mass are estimated respectively as $1 : 10^{-2} : 10^{-12} : 10^{-40}$ relative to each other [6]. (Meanwhile, Richard Feynman a year earlier gave a different relationship between fundamental forces, another in relation to weak interaction, namely: $1 : 10^{-2} : 10^{-5} : 10^{-40}$ in the same sequence [7] (see Table 2.3 on the page 2.10).) However, the comparison presented for individual atom is actually misleading. In the case of the gravitational condensation of large amounts of electrically neutral matter, the formation of compact supermassive objects is limited only by centrifugal forces, which are of a random nature. The gravitational binding energy of compact cosmic bodies, such as a white dwarf, neutron star or black hole, increases sequentially and reaches tens of percent in the case of a black hole. A calculation using simplified models of a homogeneous white dwarf and a neutron star with the mass of the Sun shows values of the fractional mass defect of about 10^{-4} and 10^{-1} respectively.

But the alternative special-relativistic approach to the gravity problem and its cosmological application that we develop here, breaks this restriction with respect to the gravitational interaction: we come to the conclusion that the rest energy and therefore the inertial mass itself are completely of gravitational nature. Of course, the existence of a small additive correction term $\Delta m = m\Phi / c^2$ in the nonrelativistic and weak-field approximation, keeping only first-order terms in small quantities v^2 / c^2 and Φ / c^2, against the background of the relativistic value mc^2 cannot be a sufficient reason for changing the traditional view, which is confirmed at every turn, that the entire rest energy of matter can be transformed into other forms of energy only in the processes of matter-antimatter annihilation. However, a remarkable feature of the scalar gravitational field is that in the general case it leads not only to small corrections in the rest energy, that is, in the inertial mass of a gravitationally coupled system. This is equally applicable both to the mass of black holes, neutron stars, white dwarfs, then to individual macroscopic bodies, atoms, nuclei and even to the *entire mass spectrum of elementary particles* due to their energy exchange with gravitational fields. And this applies not only to small but rapid (on a cosmological time scale) variations of inertial mass in local familiar vector fields **g**. Especially and above all this conclusion refers to the interaction of listed objects with the background gravitational field, what is particularly important – to its slow, very long, but deep evolution, from maximum value up to zero and vice versa, in the cyclic background scalar field *Q*.

We will see that a simple zero-spin gauge-invariant theory of a gravitational field is very effective and looks nontrivial even against monumental general relativity. Being applied to the universe, it forces us to raise the status of the inertial mass of elementary particles from a phenomenological constant to the level of a dynamical variable, and therefore pushes the physics of fundamental interactions beyond the existing Standard Model.

Now we will continue to discuss the phenomenon of gravitational variability of the rest energy and inertial mass of gravitating matter, focusing our attention on the participation of the background gravitational field in this process. As before, our subsequent reasoning will relate to the absolute frame of reference associated with the universe. As we have so far assumed, the matter in this frame is at rest on the average and uniformly and isotropically distributed throughout space, so that the varying in time background field must be also spatially uniform.

As was already shown in [5], in space where exists the vector field of strength **g**, the scalar strength *Q* involves in the formation of flows of the gravitational energy directed along or opposite vector **g**. Therefore converging or diverging energy fluxes around gravitating bodies are invariably present during successive long stages of positive and negative background field $Q(t)$ in the evolving universe. This means the existence of the replacing each other long half-cycles of slow synchronous increase and decrease in the inertial mass of all individual elementary particles, atoms, stars and other condensed bodies.

It follows from (1.3) and (2.6) that the cosmological evolution of the inertial mass $\tilde{m}$ associated with the rest energy of nonrelativistic matter, contained in each individual gravitating particle, atom, body, or star with the constant gravitational mass m, is given by the formula

$$\tilde{m}(t) = m\mathscr{A}^2 \sin^2 \Omega t, \qquad (3.1)$$

where Ω is the cardinal frequency (2.2) of the cyclically evolving universe.

So far we have used the previously determined solution (2.6) for the logarithmic potential $\Psi(t)$ of the background field without worrying about the fact that the integration constant $\mathscr{A}$ in it remained uncertain. Formula (3.1) shows that it would be reasonable to get rid of the ambiguity in this solution by choosing an initial condition for it, establishing that at the current time t_0,

$$\Psi(t_0) = \mathscr{A} \sin \Omega t_0 = 1. \qquad (3.2)$$

Now, using this convention, we can rewrite field (2.6) as

$$\Psi(t) = \frac{\sin \Omega t}{\sin \Omega t_0}. \qquad (3.3)$$

Such convention applied to the background field is extremely convenient, since in this case the present value $\tilde{m}(t_0)$ of time-dependent inertial mass of every particle or condensed body

$$\tilde{m}(t) = m \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega t_0} \qquad (3.4)$$

coincides with their gravitational mass m. Therefore the current value of the evolving rest energy

$$\mathscr{E}(t) = mc^2 \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega t_0} \qquad (3.5)$$

is given by the customary Einstein's formula

$$\mathscr{E}(t_0) = mc^2.$$

At the same time, the maximum value of the evolving inertial mass of a particle is reached in the middle of the cyclic epoch and takes a well-defined quantity

$$\tilde{m}_{\max} = \frac{m}{\sin^2 \Omega t_0}. \qquad (3.6)$$

Thus, any body at rest or just a massive elementary particle serves as a natural pantry for the energy of the background gravitational field. Each of them has a certain limiting energy capacity, predetermined by its gravitational mass *m*:

$$\mathscr{E}_{\max} = \frac{mc^2}{\sin^2 \Omega t_0}. \quad (3.7)$$

The current value of the phase Ωt_0 of the present evolutionary cycle was determined by fitting the measured relation between redshift and peak luminosity of SNe Ia with the correspondent theoretical formula (for details in Section 6). This significant cosmological parameter with a great degree of certainty is about $\Omega t_0 = 0.68.$ This leads in turn from (3.6) and (3.7) to the numerical connections

$$\tilde{m}_{\max} = 2.5m \quad \text{and} \quad \mathscr{E}_{\max} = 2.5mc^2,$$

while the gravitational mass *m* remains unchanged.

Thus, according to (3.4), the inertial mass $\tilde{m}$ corresponding to the energy accumulated in a certain epoch in a resting particle has, in a true sense, a gravitational origin. In fact only "gravitationally charged" particles can have the rest energy and, therefore, can possess the inertia with a possibility of a movement with velocities smaller than speed of light and even to be at rest. In turn they become, due to this, successful in formation of atoms, their various groupings, and condensed macroscopic and cosmic bodies.

The varying energy content $\mathscr{E}(t) = c^2 \tilde{m}(t)$ of resting elementary particles (and gravitating bodies in general) is formed at the expense of the energy of the background gravitational field *Q* and controlled by it forming the energy flows proportional to the product *Q***g**. Along with this, their inertial mass and rest energy also are slightly corrected by the intervention of local contribution to the background field *Q* produced during the change in time of the local potential Φ.

And finally, the rest energy accumulated in the form of the inertial mass can be completely pumped out of the particles under the influence of the background field, and this instantaneous massless state of matter regularly repeats in the Universe after the time interval *T* given by (2.11). Our estimates, based on observational data from Type Ia supernovae, show that the last such dramatic event in the universe occurred about 24 billion years ago.

4 Gravitational nature of the cosmological redshift of atomic spectra

It is well-known the Lev Landau's aphorism cited, for instance, by Michio Kaku in [9, p. 10]: "cosmologists are often in error but never in doubt". However, the lack of alternatives to the generally accepted explanation of the cosmological redshift by the expansion of the universe, which for ninety years seemed so obvious to everyone, made it possible in the book [10] of Landau and Lifshitz to make an exception to this rule. On page 383 we read the authors' categorical statement: "There is *no doubt* that this property ("the expanding universe") gives a correct explanation of the phenomenon of the red shift, which is fundamental for the cosmological problem" [italics added].

The search for an explanation of the cosmological redshift under the tacit assumption that the physical conditions that existed in the material world in the remote past, like matter itself with its elementary particles, atoms and atomic nuclei, did not differ from existing ones, inevitably led the discoverers of this phenomenon to its naive Döppler interpretation. Then, within the framework of general relativity, this explanation was transformed into the now commonly accepted, but from many points of view, vulnerable model of an expanding universe created from a big-bang singularity. This hypothetical expansion is interpreted by the general theory of relativity as the stretching of space itself, in which wavelengths of light waves also stretch during the long journey to observer, manifesting itself as a redshift of atomic spectra.

Repeating partially the arguments that we have already presented in [5, Section 3], we will show below that the theory of the canonical massive scalar field, adapted as a dynamical special -relativistic theory of gravity and applied to the model of the homogeneous dust-like universe, predicts cosmological redshift as a natural periodic phenomenon, which is inevitable at certain stages of its cyclic evolution. We will see immediately that the cosmological redshift of atomic spectra can be alternatively explained as a result of the grows of the inertial mass – rest energy of atoms, occurring presently and in the visible past on the scale of the entire *non-expanding* universe. This growth is initiated by the background gravitational field (2.10), which has transferred own energy to the elementary particles of gravitating matter for 24 billion years and continues to replenish their rest energy in the current era. Moreover, as we will see below, the proposed theory of gravitation applied to the homogeneous dust-like universe predicts (without any additions!) the phenomenon of cosmological redshift with surprising details in its relation versus the luminosity distance, which were discovered from observations of SNe Ia [11]–[13].

Thus, accepting the scalar theory of gravity, one must admit that the observed cosmological redshift of atomic spectra has nothing to do with the idea of an expanding universe. To show this, it is merely enough to assume that all available cosmic processes and events, both recent and sufficiently distant in the past, belong to the first half of the current evolutionary cycle of the universe, which is one of an infinite number of identical cyclic epochs. This means that observed events, we believe, have happened at the time *t* satisfying to the condition $0 < t \le t_0 < \pi / 2\Omega.$ At this time in the past, the energy content factor $\Psi^2(t)$, and therefore the rest energy

$$\mathscr{E}(t) = c^2 m\, \Psi^2(t) \qquad (4.1)$$

of elementary particles, then of atoms, stars, and other cosmic bodies and their structures as they formed, appeared to grow monotonically and continue to increase at present.

Like the rest energy of an atom in the ground or excited state, the spacings between its energy levels also change with cosmic time t in accordance with the same cosmological generalization (4.1) of the fundamental law of proportionality of inertial mass and rest energy. Consequently, for the frequencies of photons emitted at a certain instant t of cosmic time by an atom at rest as a result of a quantum transition from an initially excited state with energy $\mathscr{E}_n(t)$ to a lower state with energy $\mathscr{E}_m(t)$ in the general case we can write

$$\nu_{nm}(t) = \nu_{nm}^{(0)} \Psi^2(t), \qquad (4.2)$$

where $\nu_{nm}^{(0)}$ is the frequency of the photon currently emitted by the similar atom:

$$\nu_{nm}^{(0)} = \frac{\mathscr{E}_n^{(0)} - \mathscr{E}_m^{(0)}}{2\pi\hbar}.$$

Each of the values $\mathscr{E}_n^{(0)}$ in this expression is evidently the present quantity of the rest energy of atom in the n-th excited (or in ground) energy state.

For the already found normalized harmonic background field (3.3), the formula (4.1) gives the already known cyclic time dependence (3.5) of the rest energy for all individual atoms (or nuclei) in any quantum state

$$\mathscr{E}_n(t) = \mathscr{E}_n^{(0)} \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega t_0}. \qquad (4.3)$$

Corresponding to this, the epoch-dependent spectral frequencies of every atom vary with cosmic time t as

$$\nu_{nm}(t) = \nu_{nm}^{(0)} \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega t_0}. \qquad (4.4)$$

The observed discrete frequency spectra of electromagnetic radiation from very distant galaxies, quasars, or other cosmic objects are clearly quantum in nature. The photons, emitted by ancient atoms at a much earlier instant of cosmic time, arrive to an observer on the earth at present time t_0 with a very large (up to ten billion years or more) retardation time $t_{\text{ret}} = t_0 - t$.

Being massless, a free photon do not create the proper vector gravitational field **g** which would participate in a pair with the scalar background field Q in the formation of energy fluxes of the gravitational field, which, in turn, could change its energy content. Consequently, the long travel of photons during time t_{ret} in a flat non-expanding universe filled with the energy of the evolving background field Q took place without any changes in their energy, and hence in frequency. For this reason, the spectra currently observed by astronomers are the spectra of atoms from the distant past of our universe. They are shifted to the red compared with the laboratory spectra of similar, but more massive, currently existing atoms: the rest energy of both young and aged atoms is determined by the evolving factor Ψ^2, which has undergone a corresponding gradual *increase* over time t_{ret}. We observe a cosmological shift in the frequency of arriving photons exactly to the red edge of the spectrum, because during the time t_{ret} of their propagation, the rest energy and inertial mass of today's atoms have become higher, so that the frequency and energy of the photons emitted by them, which we use as reference ones, have proportionally increased.

The parameter z of the cosmological redshift is determined in this case as usually by comparing of the wavelengthes λ_{emit} or frequencies ν_{emit} of electromagnetic radiation, emitted by the faraway atoms in the remote past and presently observed, with their laboratory analogues λ_0 or ν_0 received presently from similar atoms on the earth:

$$z = \frac{\lambda_{\text{emit}} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0 - \nu_{\text{emit}}}{\nu_{\text{emit}}}. \qquad (4.5)$$

For a certain energy transition of an atom, we should make in (4.5) the replacement

$$\nu_0 \to \nu_{nm}(t_0), \quad \nu_{\text{emit}} \to \nu_{nm}(t_0 - t_{\text{ret}}),$$

so that the definition of redshift (4.5) reads as follows:

$$z = \frac{\nu_{nm}(t_0) - \nu_{nm}(t_0 - t_{\text{ret}})}{\nu_{nm}(t_0 - t_{\text{ret}})} = \frac{\nu_{nm}(t_0)}{\nu_{nm}(t_0 - t_{\text{ret}})} - 1.$$

Keeping in mind (4.2), from this we obtain the general definition of the parameter of cosmological shift of spectral lines in the form

$$z = \frac{\Psi^2(t_0)}{\Psi^2(t_0 - t_{\text{ret}})} - 1. \qquad (4.6)$$

For the slowly oscillating logarithmic potential (3.3) of the background field this gives

$$z = \frac{\sin^2 \Omega t_0}{\sin^2 \Omega\left(t_0 - t_{\text{ret}}\right)} - 1. \qquad (4.7)$$

So once again, briefly. While free photons have traveled through the universe for billions of years having fixed frequencies, all atoms in the universe have been exposed to the background gravitational field all this time and have continuously experienced a secular increase in their rest energies. This increase happened with the universal factor $\Psi^2(t)$, regardless of whether atoms were in excited or ground states. Therefore, the spacing between energy levels of atoms gradually expanded in the same extent, determined by the factor $\Psi^2(t)$ too. This is an alternative to the model of the expanding universe and the “tired light” hypothesis, successfully explaining why the arriving cosmic photons, emitted long ago and far away as a result of atomic transitions, are softer than the photons emitted today by exactly the same but aged atoms in similar energy transitions.

Applying formula (4.7) to real astronomical observations, one should, of course, take into account the uncertainty in the cosmological redshift caused by the longitudinal Döppler shift of the spectral lines because of the peculiar nonrelativistic motion of the galaxies. In turn, the Döppler shift, caused by the participation of the Milky Way itself in this movement, should lead to a dipole anisotropy of the cosmological redshift, similar to the dipole anisotropy of the cosmic microwave background.

The question may arise: how should the magnitude – redshift (or blueshift) diagram look like for hypothetical observers at different epochs in the history of our Universe? We address this problem in the next section. Here we only note in passing, that for any previous or future time of hypothetical observation t_{obs}, the equation, connecting cosmological shift *z* of atomic spectra (red in the case of positive *z* or blue if *z* is negative) with the time of the journey of photons having the spectral frequencies $\nu_{nm}(t_{\text{obs}}-t_{\text{ret}})$ shifted with respect to the correspondent "laboratory" frequencies $\nu_{nm}(t_{\text{obs}})$, can be obtained from (4.7) by replacing the current time t_0 by t_{obs}. In this case the required connection reads as follows:

$$1+z=\frac{\sin^2\Omega t_{\text{obs}}}{\sin^2\Omega\left(t_{\text{obs}}-t_{\text{ret}}\right)}. \tag{4.8}$$

When the present cycle was young, so that the condition $\Omega t_{\text{obs}} \ll 1$ for early hypothetical observations was satisfied, the formula (4.8) gives for $t_{\text{ret}} < t_{\text{obs}}$ the approximate equality

$$1+z\approx\frac{t_{\text{obs}}^2}{\left(t_{\text{obs}}-t_{\text{ret}}\right)^2}. \tag{4.9}$$

We emphasize that under the conditions just specified the parameter *z* in this formula is positive. This corresponds to the redshift of photons that were emitted at time $t_{\text{obs}}-t_{ret}$ by "young" distant atoms compared to photons emitted later at a certain cosmological epoch t_{obs} of the supposed observation by similar but "aged" by the time t_{ret} atoms as a result of the similar radiative quantum transitions.

A formula very similar to our approximate formula (4.9), in which, however, the current observations of the cosmological redshift are assumed [i. e., in (4.9) one must put $t_{\text{obs}}=t_0$], was obtained by Hoyle and Narlikar [11], [12] as a strict consequence of their "Conformally invariant theory of gravity". This theory was announced later by Arp and Narlikar in [13] as "a unified framework for extragalactic redshifts".

The Hoyle-Narlikar consideration is based on the Mach's idea of the appearance of the inertia (must be read 'the inertial mass') in an individual particle from the rest of the particles in the universe. This idea was understood and interpreted in [11], [12] as a result of the interaction of a particle with a hypothetical "mass field", which, in turn, arose "predominantly from particles at great distance". In fact, the variability of the inertial mass appears in [13] as a result of a separate, not related to the gravitational interaction and poorly grounded *ad hoc* hypothesis of the instantaneous action of bodies at cosmological distances.

Let us suppose now that we observe the atomic spectra of light from a galaxy located at the distance $d=ct_{\text{ret}}$ not very large on a cosmological scale. This means that the light, which spectra we analyze, was emitted by atoms in past at time t_0-t_{ret} sufficiently close to the present epoch in the sense that $t_{\text{ret}} \ll t_0$. In this case, we can expand the function of two time variables, $z(t_0,t_{\text{ret}})$, in (4.7) [or in the general formula (4.6)] in a power series in the small ratio t_{ret}/t_0, limiting ourselves to the linear approximation. The result of this approximation, of course, is a linear relationship between the redshift *z* and the time t_{ret} of light propagation to the observer:

$$z=H_0t_{\text{ret}}. \tag{4.10}$$

This linear in time t_{ret} approximation of (4.7), we can now rewrite in terms of the redshift *z* of the optical spectra of atoms in not very remote galaxies and the light travel distance $d=ct_{\text{ret}}$ from them:

$$z=\frac{1}{c}H_0d. \tag{4.11}$$

In the formulas (4.10), (4.11), we denote by H_0 a coefficient that represents the current value of the logarithmic time derivative of the square of the background field $\Psi(t)$:

$$H(t)=\frac{1}{\Psi^2(t)}\frac{d\Psi^2(t)}{dt}. \tag{4.12}$$

Because of the general harmonic solution (2.6) for $\Psi(t)$ [or its normalized example (3.3)], from this we find

$$H_0=2\Omega\cot\Omega t_0. \tag{4.13}$$

The constant H_0 in (4.10), (4.11) is the same as in the well-known Hubble linear empirical connection

$$v=H_0d. \tag{4.14}$$

Edwin Hubble is known to have explained the cosmological redshift as a result of the Döppler shift associated with the hypothetical general recession of galaxies [1], [17] (the last together with Milton Humason). At that time, ninety years ago, the idea of scalar gravity, with its gravitationally dependent Nordström's mass, experienced an "early demise", and the general recession of distant nebulae was perhaps the only reasonable explanation for the discovered astronomical phenomenon, which has since become firmly established in modern cosmology. Based on this interpretation, Hubble expressed the "Döppler redshift parameter" $z = v/c$ in terms of the "radial recession velocities" v of galaxies and related it by the empirical formula (4.14) with the distances d at which the currently registered photons were emitted by young atoms $t_{\text{ret}} = d/c$ time ago.

According to (4.12), the natural unit of the Hubble parameter should be the inverse unite of time, that is the inverse second or inverse year. Any of these two simple units of the Hubble constant H_0 should be accepted in the proposed alternative model of the universe without the mythical cosmological expansion. The use in this work of a non-standard artificial unit, $\text{kms}^{-1}\text{Mps}^{-1}$, for the current value of the Hubble constant, which is convenient in the Friedmann – Robertson – Walker cosmology, is forced for obvious reasons. But over time, its use in the model of a quiet universe without a big bang will look like a meaningless anachronism.

5 Redshifted spectra of distant atoms as dating tool of past cosmic events and processes

We call attention to the fact that if we adopt the scalar approach to the gravity problem and the presented model of the evolution of the universe as true, we could use the Hubble's redshift as an independent readily accessible precision indicator of cosmological distances. To demonstrate this specifically, we will have to return to (4.7), but now we must express the travel time t_{ret} of photons from a distant source as a function of the cosmological redshift z, bearing in mind that at the moment of emission the source was at rest in the observer's frame of reference. Of course, one should remember in this case some uncertainty in determining the distance d and time of light propagation $t_{\text{ret}} = d/c,$ introduced by the Döppler frequency shift, arising from the uncontrolled peculiar motion of a distant source.

Thus, using (4.13), from (4.7), we can find the time t_{ret} of a long journey to the Earth of photons emitted by atoms whose optical spectra are shifted to the red side. Expressed through the redshift parameter z of the observed spectra, this time is

$$t_{\text{ret}} = \frac{2\cot\Omega t_0}{H_0}\left(\Omega t_0 - \arcsin\frac{\sin\Omega t_0}{\sqrt{1+z}}\right). \quad (5.1)$$

This formula involves only two freely specifiable parameters; these are the Hubble constant H_0 and the present phase Ωt_0 of the current cycle of the evolution of the universe.

Starting from (5.1) and using the numerical values (6.10), (6.11) of these parameters derived from astronomical observations, we can offer a working formula for the convenience of numerical calculations of the distance $d = ct_{\text{ret}}$ traveled by the light radiation with the observed redshift z:

$$d(z) = 35.27\left(0.68 - \arcsin\frac{\sin 0.68}{\sqrt{1+z}}\right)\times \quad (5.2)$$
$$\times 10^9 \text{ lightyears.}$$

Thus, we obtained this formula using the results of high-precision astronomical measurements of peak values of the brightness of supernovae type Ia, which were observed in a few random galaxies. Now formula (5.2) should ensure the same accuracy of determining the distance to any galaxy exclusively through its redshift.

Having thus installed in (5.1) the high-precision data of astronomical observations of SNe Ia, we obtained a formula that should provide the same accuracy in determining distances to galaxies only through redshifts, which was achieved for not numerous random galaxies by means of careful measurements of the peak apparent luminosities of their supernovae.

The travel times of radiation from distant cosmic objects with large z, calculated by formula (5.2), significantly exceed the corresponding estimates made in the conventional big bang cosmology with suitable cosmological parameters. (In contrast to the two parameters presented in formula (5.1), in the Λ CDM model, to calculate $d(z),$ at least three parameters must be specified. As a rule, these are: $\Omega_m = 0.3,$ $\Omega_\Lambda = 0.7$ and current value of the Hubble parameter $H_0 = 70$ kms^{-1}Mps^{-1}.)

As examples, we presented in Table 5.1 for comparison the corresponding estimates of the time of light propagation from several relatively recently discovered galaxies and quasars with large redshifts.

Table 5.1 – Revised light travel distance from known high-z sources in the nonexpanding universe

Object	z	Light travel distance, Gly	
		Big-bang cosmology	Variable-mass cosmology
Galaxy GN-z11 [18]	11.09	13.4	17.57
Galaxy Egsy8p7 [19]	8.68	13.2	16.81
Quasar J0313-1806 [20]	7.642	13.1	16.38
Quasar ULAS J1342+0928 [21]	7.54	13.1	16.33
Galaxy z8 GND 5296 [22]	7.51	13.0	16.32
Quasar ULAS J1120+0641 [23]	7.085	12.9	16.12
Quasar J043947.08+ 163415.7 [24]	6.51	12.8	15.82

6 Evolved Chandrasekhar's limit and luminosity of distant SNe Ia

As a result of Chandrasekhar's fundamental research of the stability conditions of ideal spherical nonrotating carbon-oxygen white dwarfs [25], [23, Chapter XI], [27], it is commonly accepted in today's astrophysics and cosmology that the mass of progenitors of all SNe Type Ia, as well as their peak absolute luminosity must be standard and do not depend on cosmic time [28]. However, the observational data from SNe Ia with identical redshifts showed that there is a noticeable spread in their peak brightness. Those individual deviations from standard are natural and can be caused primarily by unavoidable deviation in the critical amount of carbon-oxygen substance in pre-exploding white dwarfs because of their rapid rotation with different random angular velocities [29], [30]. But such a variety in the peak brightness of different supernovae with identical redshift can be corrected because of the presence of correlation between their absolute magnitude and duration of the bright phase: brighter stars have accumulated more substance and naturally radiate longer than dim ones [31], [32]. Thus, the distances to these standardizable candles can be compared with the unprecedented in observational cosmology precision by measuring and correcting their peak apparent magnitude.

However, according to the above analysis, these bright sources of light adopted in astronomy as standard indicators of distance appear to be more "difficult" than that is commonly believed today, first of all, because of the cosmological variability of the inertial mass. The point is that the Type Ia supernovae explosions, registered at different cosmological distances, occurred at various cosmological epochs. Hence the registered peak luminosity of the supernova of this type is influenced by a number of facts which are changed themselves in the conditions of cosmological evolution. Therefore there are several reasons why the luminosity distances, determined by using the SNe Ia, must be analyzed and defined anew, from the standpoint of the developed theory. Among them, three circumstances raise suspicions, as capable of causing a change in the peak absolute luminosity of SNe Ia over cosmic times:

(i) As we look further and further out into space, we register photons that were emitted by atoms or nuclei consisted of younger and younger elementary particles having smaller and smaller rest energies. This means that any two identical nuclei or atoms in two different supernovae, currently seen at very different distances, and therefore radiated at various epochs give different energy release $\Delta\varepsilon$ of a nuclear transmutations or chemical reactions (or other transformations), which decreases with distance. Hence, according to (4.3), we can write

$$\frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta\varepsilon_0} = \frac{\sin^2 \Omega(t_0 - t_{\text{ret}})}{\sin^2 \Omega t_0}.$$

Here and throughout this section, the indices 1 and 0 refer to the time $t_1 = t_0 - t_{\text{ret}}$ of sending the electromagnetic signal from supernova explosion in the past and to the present time t_0 of its detection on the earth, respectively. Finally, keeping in mind (4.7), we get from the previous formula

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{1}{1+z}\Delta\varepsilon_0. \tag{6.1}$$

(ii) As it follows from the quantum mechanical uncertainty relation between the width of energy levels and the lifetime of excited states, simultaneously with the decrease of the rest energy of unstable particle and nuclei in the local external gravitational field, their lifetimes increases [33]. Since the progenitors of distant Type Ia supernovae exploded at an earlier stage of the matter evolution, the evolved half lives of unstable nuclei of ${}^{56}\text{Ni}$ (synthesized from ${}^{12}\text{C}$ and ${}^{16}\text{O}$ during the explosion) and then of its daughter ${}^{56}\text{Co}$ isotope would be correlated, according to (6.1), with their redshifts and current half-life $T_0^{(1/2)}$ as

$$T_1^{(1/2)} = (1+z)T_0^{(1/2)}. \tag{6.2}$$

This means that the nuclear transformations of the explosion products of two faraway Type Ia supernovae, whose progenitors were two identical carbon-oxygen white dwarfs, occurred more slowly and continued for a longer time in that of them that was placed at a greater distance from the observer.

Therefore, the energy of more distant type Ia supernovae, which is released per unit time during spontaneous transformations of unstable nuclei, will be further reduced, according to (6.2), by a factor of $1/(1+z)$. From this, in turn, it follows that, because of the increase in the delay of the emission of secondary photons with distance, the peak absolute luminosity of more distant white dwarfs, exploded as SNe Ia, will additionally decrease with increasing z by the same factor $1/(1+z)$.

(iii) Finally, as was noted at the beginning of this section, due to the longer duration of the bright phase of SNe Ia having more massive progenitors, but with the same redshifts, their apparent peak brightness can be confidently standardized to eliminate the spread in the observed data brightness – redshift correlation due to the exceed of Chandrasekhar's limiting number of baryons calculated for a non-collapsing ideal non-rotating white dwarf. However, the loss of stability of non-rotating white dwarfs in binary systems accreting matter from a companion is achieved at different epochs with different limiting values of their inertial mass, which is modulated on cosmological time scales by the energy content factor $\Psi^2(t)$ determined by (3.3), so that

$$\mathfrak{M}^{\text{Ch}}(t) = \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega t_0}\mathfrak{M}_0^{\text{Ch}},$$

in accordance with formula (3.4). Parameterizing as before the age t_{ret} of photons emitted from the visible white dwarf at the past time $t = t_0 - t_{\text{ret}}$ by their redshift z in agreement with formula (4.8), we find that

$$\mathfrak{M}^{\mathrm{Ch}}(z)=\frac{1}{1+z}\mathfrak{M}_0^{\mathrm{Ch}}.$$

At the same time, since the mass of each individual elementary particle changes in proportion to the same factor $\Psi^2(t)$, explosions of white dwarfs – the progenitors of each of SN Ia have been and will happen with the same (on average) number of baryons, that is with

$$\mathfrak{N}^{\mathrm{Ch}}=37.0\cdot 10^{55}\,\text{baryons}. \qquad (6.3)$$

Therefore, the *invariant* characteristic of the stability of ideal non-rotating white dwarfs in the evolving Universe is their limiting *gravitational* mass or the limiting total number (6.3) of baryons calculated using the current limiting Chandrasekhar mass and mass of hydrogen atom, but by no means their total inertial mass, which changes with cosmological time.

The peak value $I(t_0-t_{\mathrm{ret}})$ of the power of a distant supernova Ia with cosmological redshift z is decreased by the factor $(1+z)^2$, due to the first two circumstances (i) and (ii) compared to the peak power $I(t_0)$ of a local supernova with z close to zero. Thus from (6.1) and (6.2) it follows

$$I(t_0-t_{\mathrm{ret}})=\frac{I(t_0)}{(1+z)^2}. \qquad (6.4)$$

Because of this, the supernova will look dimmer and it will seem to us that it is located $(1+z)$ times farther than the real distance $d=ct_{\mathrm{ret}}$ traveled by the light.

Taking into account (6.4), we obtain that in perfectly transparent universe without expansion or contraction the luminosity distance defined from Type Ia supernova depends on its redshift factor $(1+z)$ and the light travel time t_{ret} as follows:

$$d_L=(1+z)ct_{\mathrm{ret}}. \qquad (6.5)$$

Using this formula and taking into account (5.1), we represent the luminosity distance d_L in terms of the red shift parameter z, as it is usually required for cosmological applications. We get thus finally the following redshift – luminosity distance relation for Type Ia supernovae:

$$d_L(z)=\frac{2c(1+z)\cot\Omega t_0}{H_0}\left(\Omega t_0\arcsin\frac{\sin\Omega t_0}{\sqrt{1+z}}\right). \qquad (6.6)$$

The foregoing considerations show that the correlation between red shifts and luminosity distances from cosmic sources having other light emission mechanisms than SNe Ia during their afterglow *may be different* from that determined by formula (6.6). This will be the case, for example, when using standard stationary sources as distance indicators, such as a specific sample of bright stars, globular clusters or galaxies. Other types of supernovae, which, unlike SNe Ia, emit light simultaneously with the explosion without noticeable delay, can also be such sources.

Using the rich available data of redshifts and apparent magnitudes of Type Ia supernovae at the peak of their brightness, we can now quantitatively verify the validity of the proposed description of the evolutionary dynamics of the universe.

Substituting the expression (6.6) for the luminosity distance for Type Ia supernovae in the well-known formula that presents the definition of the bolometric distance modulus,

$$\mu_{\mathrm{bol}}=5\lg\frac{d_L(z)}{10\mathrm{pk}},$$

we shall write it for the case of SNe Ia as standard candles in the form:

$$\mu_{\mathrm{bol}}(z)= \qquad (6.7)$$

$$=5\lg\left[\frac{2c(1+z)\cot\Omega t_0}{10\mathrm{pk}\cdot H_0}\left(\Omega t_0-\arcsin\frac{\sin\Omega t_0}{\sqrt{1+z}}\right)\right],$$

where the numerical values of the light velocity c and the Hubble's constant H_0 must be expressed in units of km sec^{-1} and km sec^{-1}Mpc^{-1}, respectively.

This formula would remain true also in the case when the observer would compare the brightness of the same, but differently red-shifted spectral lines from SNe Ia appeared at various distances. However, it is known that the photometry of supernovae with different z is performed by means of photodetectors with special filters (templates) that are transparent at fixed narrow spectral band. For this reason, the measured apparent magnitude of distant source of light will be additionally smaller by the factor $(1+z)$ than that for a similar local source [33]. This fact requires to modify the formula (6.7) by adding a correction term – the so-called K-correction associated with this "non-selective" effect:

$$K=2.5\lg(1+z). \qquad (6.8)$$

This correction was proposed and justified by John Oke and Alan Sandage in [33] (see "effect (*b*)" in formula (2)).

In order to compare the presented theory with the existing results of astronomical observations of SNe Ia in the blue band, we restrict ourselves to this basic correction. For the more scrupulous fitting of the universe parameters responsible for the correlation of SNe Ia peak brightness with their redshift, it is necessary, instead of (6.8), to use the empirically found progressively finer K-corrections [35] caused by the non-uniformity of the spectral distribution of the light energy in SNe Ia. But it seems that further refinement of the cosmological parameters would lead to additional calculations unreasonably cumbersome for the purposes of this article.

Finally, introducing the correction (6.8) into (6.7) we find the test formula for the peak apparent magnitudes of SNe Ia measured in any X band:

$$\mu_X(z)=25+ \qquad (6.9)$$

$$+5\lg\left[\frac{2c(1+z)^{3/2}\cot\Omega t_0}{1\mathrm{Mpk}\cdot H_0}\left(\Omega t_0-\arcsin\frac{\sin\Omega t_0}{\sqrt{1+z}}\right)\right].$$

Despite the unsightly form, this formula, as well as the initial redshift-distance relation (5.1), contains only two free adjustable parameters. These are the present values of the Hubble parameter H_0 and the phase Ωt_0 of the background field $\Psi(t)$, that make the formula very simple and convenient in fitting the observational data.

Next, we can use (6.9) to obtain the best suitable curve for an ensemble of measurement results for Type Ia supernovae characteristics by fitting these two parameters. According to our preliminary "manual" fitting to these data, the best values for the two adjustable parameters in (6.9) are

$$H_0 \simeq 68 \text{ kms}^{-1}\text{Mps}^{-1}, \qquad (6.10)$$

$$\Omega t_0 \simeq 0.68. \qquad (6.11)$$

From (4.13) it follows that the age t_0 of the current cycle can be calculated through parameters (6.10), (6.11) by the formula

$$t_0 = 2H_0^{-1}\Omega t_0 \cot \Omega t_0.$$

Thus, we find the value $t_0 = 24$ billion years, which we gave several times earlier.

Thus, the proposed gauge-invariant model of the massive scalar gravitational field, which underlies the presented cyclic scenario of the evolution of the universe without a hypothetical expansion, agrees well with the observational data from Type Ia supernovae accepted in extragalactic astronomy as standard candles.

We note straight away that our result (6.10) for the present value of Hubble parameter coincides with the recent (2020) result that was reached in [36] using the collaborative data from SNe Ia collected in [37]. And it is in excellent agreement with the value

$$H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ kms}^{-1}\text{Mps}^{-1}$$

of the Hubble constant obtained in [38] by careful processing of precision data of 2018 from the *Planck* mission. [The previous two results, (67.3 ± 1.2) kms^{-1}Mps^{-1} and (67.8 ± 0.9) kms^{-1}Mps^{-1}, received early by *Planck* Collaboration in 2013 [39] and in 2015 [40] respectively, are also in perfect agreement with our estimate (6.10).]

REFERENCES

1. *Hubble*, *E.* A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae / E. Hubble // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1929. – № 15. – P. 168 –173.

2. *Hubble*, *E.* The Observational Approach to Cosmology / E. Hubble. – Oxford: Oxford University Press. – 1937. – 54 p.

3. *Weinberg*, *S.* Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity / S. Weinberg. – New York: Wiley, 1972. – 657 p.

4. *Serdyukova*, *M.A.* A Massive Gravitational Field in Flat Spacetime. I. Gauge Invariance and Field Equations / M.A. Serdyukova, A.N. Serdyukov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2019. – № 2 (39). – P. 45–53.

5. *Serdyukova*, M.A. A Massive Gravitational Field in Flat Spacetime. II. Conservation laws and gravitational variability of the inertial mass / M.A. Serdyukova, A.N. Serdyukov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2019. – № 3 (40). – P. 33–39.

6. *Chiu*, *H.-Y.* Introduction / H.-Y. Chiu, W.F. Hoffmann // Gravitation and Relativity (Eds. H.-Y. Chiu and W.F. Hoffmann). – New York: Benjamin. 1964. – 353 + xxxv p.

7. *Feynman*, *R.P.* The Feynman Lectures on Physics: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat / R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands. – Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1963. – 685 p.

8. *Okun*', *L.B.* Reply to the letter "What is mass?" by R.I Khrapko / L.B. Okun' // Physics – Uspekhi. – 2000. – № 43 (12). – P. 1270–1275.

9. *Kaku*, *M.* Parallel Worlds: The Science of Alternative Universes and Our Future in the Cosmos / M. Kaku. – London: Allen Lane. – 2004. – 448 p.

10. *Landau*, L.D. The Classical theory of fields. Vol. 2 of Course of Theoretical Physics / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987. – 428 p.

11. *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant* / A.G. Riess [et al.] // Astron. J. – 1998. – № 116. – P. 1009–1038.

12. *Measurements of* Ω *and* Λ *from* 42 *high-redshift supernovae* / S. Perlmutter [et al.] // Astrophys. J. – 1999. – № 517. – P. 565–586.

13. *The high-z supernova search*: *Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using Type* IA *supernovae* / B.P. Schmidt [et al.] // Astrophys. J. – 1998. – № 507. – P. 46–63.

14. *Hoyle*, *F.* Cosmological Models in a Conformally Invariant Gravitational Theory. I. The Friedmann Models / F. Hoyle, J.V. Narlikar // Mon. Not. R. astr. Soc. – 1972. – № 155. – P. 305–321.

15. *Hoyle*, *F.* Cosmological Models in a Conformally Invariant Gravitational Theory. II. A New Model / F. Hoyle, J.V. Narlikar // Mon. Not. R. astr. Soc. – 1972. – № 155. – P. 323–335.

16. *Narlikar*, *J.V.* Flat spacetime cosmology: A unified framework for extragalactic redshifts / J.V. Narlikar, H. Arp // Astrophys. J. – 1993. – № 405. – P. 51–56.

17. *Hubble*, *E.* The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae / E. Hubble, M. Humason // Astrophys. J. – 1931. – № 74. – P. 43–80.

18. *A remarkably luminous galaxy at* $Z = 11.1$ *Measured with Hubble Space Telescope Grism Spectroscopy* / P.A. Oesch [et al.] // Astrophys. J. – 2016. – № 819 (2). – Article id. 129. – 11 p.

19. *Lyman-alpha emission from a luminous* $z = 8.68$ *galaxy*: *implications for galaxies as tracers of cosmic reionization* / A. Zitrin [et al.] // Astrophys. J. Lett. – 2015. – № 810 (1). – Article id. L12. – 6 p.

20. *Luminous Quasar at Redshift* 7.642 / F. Wang [et al.] // Astrophys. J. Lett. – 2021. – № 907 (L1). – 7 p.

21. *An* 800-*million-solar-mass black hole in a significantly neutral Universe at a redshift of* 7.5 / E. Bañados [et al.] // Nature. – 2018. – № 553. – P. 473–476.

22. *A galaxy rapidly forming stars* 700 *million ears after the Big Bang at redshift* 7.51 / S.L. Finkelstein [et al.] // Nature. – 2013. – № 502. – P. 524–527.

23. *A luminous quasar at a redshift of* z = 7.085 / D.J. Mortlock [et al.] // Nature. – 2011. – № 474. – P. 616–619.

24. *The Discovery of a Gravitationally Lensed Quasar at* z = 6.51 / X. Fan [et al.] // Astrophys. J. Lett. – 2019. – № 870 (2). – Article id. L11. – 6 p.

25. *Chandrasekhar*, *S*. The maximum mass of ideal white dwarfs / S. Chandrasekhar // Astrophys. J. – 1931. – № 74. – P. 81–82.

26. *Chandrasekhar*, *S*. An Introduction to the Study of Stellar Structure / S. Chandrasekhar. – Illinois: University of Chicago Press. – 1939. – 509 p.

27. *Chandrasekhar*, *S*. On Stars, Their Evolution and Their Stability (Nobel Lecture) / S. Chandrasekhar // Angew. Chem. Int. Ed. Engl. – 1984. – № 23. – P. 679–689.

28. *Branch*, *D*. Type Ia Supernovae as standard candles / D. Branch, G.A. Tammann // Annu. Rev. Astron. Astrophys. – 1992. – № 30. – P. 359–389.

29. *Anand*, *S.P.S*. On Chandrasekhar's limiting mass for rotating white dwarf stars / S.P.S. Anand // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1965. – № 54 (1). – P. 23–26.

30. *Yoon*, *S.-C*. Presupernova evolution of accreting white dwarfs with rotation / S.-C. Yoon, N. Langer // Astron. Astrophys. – 2004. – № 419. – P. 623–644.

31. *The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey*. V. *Improving the dark-energy constraints above* $z > 1$ *and building an early-type-hosted supernova sample* / N. Suzuki [et al.] // Astrophys. J. – 2012. – № 746. – P. 85–108.

32. *Kasen*, *D*. On the origin of the Type Ia Supernova width-luminosity relation / D. Kasen, S.E. Woosley // Astrophys. J. – 2007. – № 656. – P. 661–665.

33. *Serdyukova*, *M.A*. A Massive Gravitational Field in Flat Spacetime. III. Gravitational variability of radioactive decay / M.A. Serdyukova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2019. – № 3 (40). – P. 40–42.

34. *Oke*, *J.B*. Energy distributions, K corrections, and the Stebbins – Whitford effect for giant elliptical galaxies / J.B. Oke, A. Sandage // Astrophys. J. – 1968. – № 154. – P. 21–32.

35. *K-Corrections and spectral templates of Type Ia Supernovae* / E.Y. Hsiao [et al.] // Astrophys. J. – 2007. – № 663. – P. 1187–1200.

36. *Rameez*, *M*. Is there really a Hubble tension? / M. Rameez and S. Sarkar // ArXiv E-Prints. – 2020. – 6 p. – [arXiv:1911.06456v2].

37. *Improved cosmological constraints from a joint analysis of the* SDSS-II *and* SNLS *supernova samples* / M. Betoule [et al.] // Astron. Astrophys. – 2014. – № 568 (A22). – 32 p.

38. *Planck* 2018 *results*. VI. *Cosmological parameters* / N. Aghanim [et al.] // ArXiv E-Prints. – 2018. – 71 p. – [arXiv:1807.06209].

39. *Planck* 2013 *results*. XVI. *Cosmological parameters* / P.A.R. Ade [et al.] // ArXiv E-Prints. – 2014. – 69 p. – [arXiv:1303.5076v3].

40. *Planck* 2015 *results*. XIII. *Cosmological parameters* / P.A.R. Ade [et al.] // Astron. Astrophys. – 2016. – № 594. – 63 p.

Поступила в редакцию 15.04.2021.

УДК 539.3

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

Э.И. Старовойтов

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

BENDING OF A THREE-LAYER PLATE BY A UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD IN THE NEUTRON FLUX

E.I. Starovoitov

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Рассмотрен изгиб круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины в условиях нейтронного облучения. Осесимметричная непрерывная нагрузка перпендикулярна плоскости пластины. Кинематика пакета описывается с помощью гипотезы ломаной линии. Для несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа. Относительно толстый заполнитель подчиняется гипотезе Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Учитывается работа касательных напряжений в заполнителе. Дифференциальные уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Контур пластины шарнирно оперт. Приведена постановка краевой задачи для нахождения трех искомых функций: прогиба, сдвига и радиального перемещения срединной плоскости заполнителя. Решение при равномерно распределенной нагрузке получено в конечном виде. Проведен его численный параметрический анализ.

Ключевые слова: *трехслойная круговая пластина*, *изгиб*, *распределенная осесимметричная нагрузка*, *упругость*, *нейтронное облучение*.

The bending of a circular three-layer plate with an asymmetric thickness under neutron irradiation conditions is considered. The axisymmetric continuous load is perpendicular to the plate plane. The kinematics of the package is described using the polyline hypothesis. For load-bearing layers, the Kirchhoff hypotheses are accepted. The relatively thick filler obeys Timoshenko's hypothesis about the straightness and incompressibility of the deformed normal. The work of tangential stresses in the filler is taken into account. Differential equilibrium equations are obtained by the Lagrange variational method. The contour of the plate is pivotally supported. The statement of the boundary value problem for finding the three desired functions: deflection, shear and radial displacement of the median plane of the filler is given. The solution for a uniformly distributed load is obtained in the final form. Its numerical parametric analysis is carried out.

Keywords: *three-layer circular plate*, *bending*, *distributed axisymmetric load*, *elasticity*, *neutron irradiation*.

Введение

Построению математических моделей упругих трехслойных элементов конструкций, уделяется большое внимание в связи с их широким применением в технике, машиностроении и строительстве. Эта проблема отражена в ряде работ.

В монографиях [1]–[4] приведены постановки краевых и начально краевых задач о квазистатическом и динамическом деформировании трехслойных стержней, пластин и оболочек. Разработаны методы их решения и приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) при силовых нагружениях с учетом воздействия окружающей среды.

Свободные и вынужденные колебания, в том числе резонансные, трехслойных оболочек и пластин рассмотрены в статьях [5]–[8]. Проведены численные исследования влияния жесткости упругого основания на частоты и амплитуды колебаний, рассмотрены случаи конечных деформаций и внезапно приложенных нагрузок.

Работы [9]–[12] посвящены исследованию квазистатического деформирования упругих слоистых балок и прямоугольных пластин. Однократное и циклическое нагружение неупругих слоистых пластин рассмотрено в [13], [14]. Математическая модель деформирования трехслойных круговых пластин, связанных с основанием Пастернака, разработана в статьях [15], [16]. Результаты исследования изгиба трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем приведены в [17], [18]. Решения выписаны в конечном виде, проведена их численная апробация.

Влияние температуры на напряженно-деформированное состояние трехслойных функционально градиентальных сэндвич пластин исследовано в [19], [20]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин и цилиндрических оболочек рассматривалось в публикациях [21]–[24]. В статье [25] исследованы проблемы определения начального направления развития трещины в момент страгивания.

Зависимость механических свойств материалов от нейтронного облучения описано в монографиях [26], [27]. Построению математических моделей и разработке методов решения краевых задач, учитывающих влияние радиационных эффектов, посвящена книга [28]. В статьях

[29] исследовано деформирование трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем в нейтронном потоке. Работа [30] посвящена исследованию изменения величины нейтронного потока при прохождении через трехслойную пластину.

В данной работе приведена постановка и получено аналитическое решение краевой задачи об осесимметричном изгибе, распределенной по поверхности верхнего слоя нагрузкой, трехслойной упругой круговой пластины в условиях нейтронного облучения.

1 Нейтронный поток в слоях пластины

Кинематические гипотезы деформирования пластины соответствуют гипотезе ломаной линии. Тонкие несущие слои толщиной $h_1 \neq h_2$ выполнены из более прочных материалов и принимают на себя основную силовую нагрузку. Для них справедливы гипотезы Кирхгофа. В более толстом заполнителе ($h_3 = 2c$) принимается гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали, учитывается относительный сдвиг ψ и работа касательных напряжений. Цилиндрическая система координат r, φ, z связывается со срединной плоскостью заполнителя, ось z направлена перпендикулярно вверх, к первому слою (рисунок 1.1). Проекции осесимметричной распределенной нагрузки на координатные оси обозначены $q(r)$, $p(r)$. Контур пластины шарнирно оперт и на нем содержится жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу в заполнителе ($\psi = 0$ при $r = r_0$).

Предполагается, что в начальный момент времени на внешнюю поверхность верхнего слоя $z = c + h_1$ рассматриваемой пластины воздействует осесимметричная распределенная силовая нагрузка и *нейтронный поток* плотностью $\varphi_0 = \text{const}$ в направлении, противоположном внешней нормали (рисунок 1.1). В силу осесимметричности нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), а прогиб пластины w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ. В дальнейшем эти функции $w(r, t)$, $u(r, t)$, $\psi(r, t)$ считаются искомыми. Их зависимость от времени t определяется величиной изменяющегося интегрального нейтронного потока. Через h_k обозначена толщина k-го слоя.

При облучении элементов конструкций нейтронами, ионами, электронами изменяются механические свойства материалов: твердость, предел текучести, пластичность, ползучесть. Особый интерес представляет нейтронное облучение, в результате которого в твердых телах происходит распухание материала, возникает объемная деформация θ_I. Влияние нейтронного облучения на параметры упругости – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и т. д. незначительно и в дальнейшем не учитывается [26]–[28].

Согласно экспериментальным данным при малых деформациях в линейном приближении можно считать, что изменение объема материала в слоях θ_{Ik} прямо пропорционально интегральному нейтронному потоку, прошедшему через них [26]:

$$\theta_{Ik} = B_k I_k(z), \tag{1.1}$$

где $I_k(z) = \varphi_k(z)\ t$ – интегральный нейтронный поток в k-ом слое; φ_k – интенсивность потока (нейтрон/(м^2·с)), дошедшего за время t к поверхности с координатой z в k-ом слое; B_k – константа материала, получаемая из опыта.

В работе [30] показано, что к моменту t через сечение z в верхнем слое пройдет интегральный поток

$$I_1(z,t) = \varphi_0 t \exp\left(-\mu_1(c + h_1 - z)\right), \tag{1.2}$$

где μ_1 – величина макроскопического эффективного сечения (1/см).

В заполнителе интегральный поток $I_3(z,t)$ к моменту t будет

$$I_3(z,t) = \varphi_{13} t \exp\left(-\mu_3(c - z)\right), \tag{1.3}$$

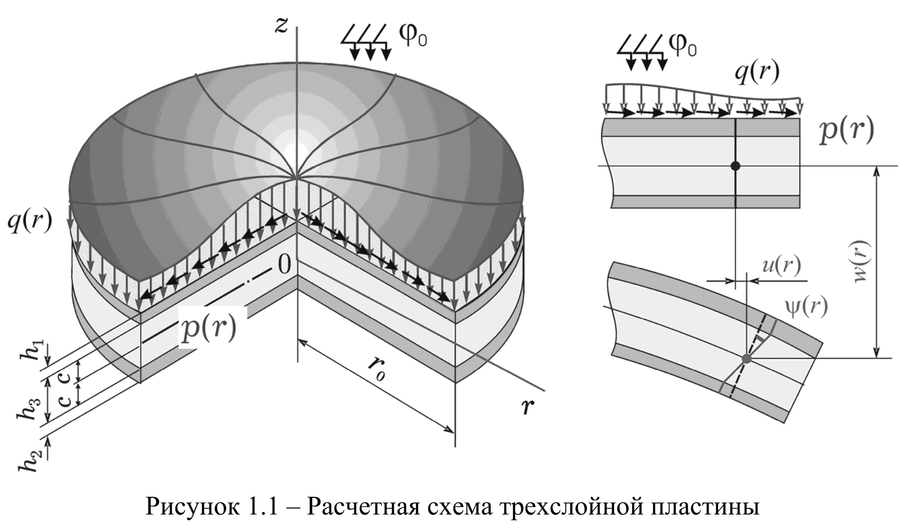


Рисунок 1.1 – Расчетная схема трехслойной пластины

где $\varphi_{13} = \varphi_0 \exp\left(-\mu_1 h_1\right)$.

В нижнем слое интегральный поток $I_2(z,t)$ к моменту t станет

$$I_2(z,t) = \varphi_{32} t \exp\left(-\mu_2(-c-z)\right), \qquad (1.4)$$

где $\varphi_{32} = \varphi_{13} \exp\left(-2\mu_3 c\right)$.

В зависимости от энергии нейтронов и облучаемого материала величина параметра B в (1.1) может быть порядка 10^{-28}–10^{-23} м^2 / нейтрон. Отметим, что значение μ_k обратно величине свободного пробега нейтронов, которая для быстрых нейтронов в алюминии – λ_1 = 14,1–15,9 см, в полиэтилене – λ_3 = 5,5–13,9 см.

Таким образом, формулы (1.2)–(1.4) позволяют рассчитать интегральный нейтронный поток в трехслойной пластине, прошедший за время t через плоскость с координатой z.

2 Постановка краевой задачи радиационной упругости для трехслойной пластины

Для описания деформирования материалов слоев пластины используется закон Гука, учитывающий радиационное изменение объема (1.1):

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \text{э}_\alpha^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \text{э}_{rz}^{(3)},$$

$$\sigma^{(k)} = K_k(3\varepsilon^{(k)} - B_k I_k) \quad (k = 1, 2, 3; \ \alpha = r, \varphi), \qquad (2.1)$$

где $s_\alpha^{(k)}, \text{э}_\alpha^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования; $s_{rz}^{(3)}$, $\text{э}_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе.

Радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$, в соответствии с принятыми гипотезами, выражаются через искомые функции следующими формулами:

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z w,_r, \quad c \le z \le c + h_1,$$
$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z w,_r, \quad -c \le z \le c,$$
$$u_r^{(2)} = u - c\psi - z w,_r, \quad -c - h_2 \le z \le -c, \qquad (2.2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Обобщенные внутренние усилия и моменты вводятся соотношениями

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz,$$

$$M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z\, dz,$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right), \quad Q = \int_{-c}^{c} \sigma_{rz}^{(3)} dz, \qquad (2.3)$$

где $\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_{rz}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений.

Система уравнений равновесия рассматриваемой пластины в обобщенных усилиях (2.3) получена вариационным методом Лагранжа и приведена в [3]. При ее выводе не использовались уравнения связи напряжений и деформаций, поэтому она остается справедливой и в рассматриваемом случае:

$$T_r,_r + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p, \quad H_r,_r + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q = 0,$$

$$M_r,_{rr} + \frac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = q. \qquad (2.4)$$

Используя закон Гука (2.1), выразим напряжения в формулах (2.3) через деформации и далее с помощью соотношений Коши [1] через перемещения. В результате получим выражения внутренних усилий через три искомые функции, в которые войдет интегральный нейтронный поток:

$$T_r = \sum_{k=1}^{3}\left[h_k\left(K_k^+ u,_r + \frac{u}{r}K_k^-\right) - K_k B_k \int_{h_k} I_k dz\right] +$$
$$+ c\left(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2\right)\psi,_r + c\left(K_1^- h_1 - K_2^- h_2\right)\frac{\psi}{r} -$$
$$-\left[K_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right] w,_{rr} -$$
$$-\left[K_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right]\frac{w,_r}{r},$$

$$T_\varphi = \sum_{k=1}^{3}\left[h_k\left(K_k^- u,_r + \frac{u}{r}K_k^+\right) - K_k B_k \int_{h_k} I_k dz\right] +$$
$$+ c\left(K_1^- h_1 - K_2^- h_2\right)\psi,_r + c\left(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2\right)\frac{\psi}{r} -$$
$$-\left[K_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right] w,_{rr} -$$
$$-\left[K_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right]\frac{w,_r}{r},$$

$$M_r = \left[K_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^+ h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right] u,_r +$$
$$+\left[K_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) - K_2^- h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right]\frac{u}{r} +$$
$$+\left[cK_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + cK_2^+ h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right]\psi,_r +$$
$$+\left[cK_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + cK_2^- h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\frac{\psi}{r} -$$
$$-\left[K_1^+ h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + K_2^+ h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right] w,_{rr} -$$
$$-\left[K_1^- h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right) + K_2^- h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\frac{w,_r}{r} - \sum_{k=1}^{3} K_k B_k \int_{h_k} I_k z dz,$$

$$H_r = c\left(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2\right) u,_r + c\left(K_1^- h_1 - K_2^- h_2\right)\frac{u}{r} +$$
$$+\left[c^2\left(K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right]\psi,_r +$$
$$+\left[c^2\left(K_1^- h_1 + K_2^- h_2\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\frac{\psi}{r} -$$
$$-\left[c\left(K_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + K_2^+ h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right] w,_{rr} -$$
$$-\left[c\left(K_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + K_2^- h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\frac{w,_r}{r} -$$
$$-K_3 B_3 \int_{h_3} I_3 z dz - c\left(K_1 B_1 \int_{h_1} I_1 dz - K_2 B_2 \int_{h_2} I_2 dz\right),$$
$$Q = 2cG_3\psi,$$
$$K_k + \frac{4}{3}G_k \equiv K_k^+,\ K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-. \qquad (2.5)$$

Аналогичные соотношения для внутренних моментов M_φ, H_φ следуют из (2.5), если в одноименных внутренних усилиях M_r, H_r поменять местами параметры K_k^+ и K_k^-.

Подставив полученные выражения внутренних усилий (2.5) в уравнения (2.4) и проведя необходимые преобразования, получим систему дифференциальных уравнений равновесия в искомых перемещениях $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$:

$$\mathrm{L}_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w,_r) = p,$$
$$\mathrm{L}_2(a_2 u + a_4\psi - a_5 w,_r) - 2cG_3\psi = 0,$$
$$\mathrm{L}_3(a_3 u + a_5\psi - a_6 w,_r) = -q, \qquad (2.6)$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},$$
$$\mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(r\,\mathrm{L}_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$

a_i – коэффициенты

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+,\ \ a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),$$
$$a_3 = h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+,$$
$$a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+\right),$$
$$a_5 = c\left[h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+\right],$$
$$a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ +$$
$$+h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+.$$

Следует отметить, что хотя обобщенные внутренние усилия (2.5) зависят от интегрального нейтронного потока $I_k(z)$, однако в систему уравнений (2.6) он явным образом не входит, т. к. производные от него по радиальной координате равны нулю, а в разностях обобщенных усилий в первом и втором уравнениях (2.4) соответствующие слагаемые сокращаются.

3 Решение краевой задачи

В дальнейшем рассматривается поперечный изгиб круговой трехслойной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки, т. е. $p(r) = 0$, $q(r) = q_0 = \mathrm{const}$. Тогда решение системы (2.6), с учетом ограниченности в начале координат, будет следующим:

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) - \frac{b_2 q_0}{4cb_3 G_3} r,$$
$$w = \frac{b_2}{b_3}\left(\frac{C_2}{\beta} I_0(\beta r) - \frac{b_2 q_0}{8cb_3 G_3} r^2\right) +$$
$$+\frac{q_0}{64 b_3} r^4 + \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_4^{(n)},$$
$$u = \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2}\left[\frac{q_0}{16} r_0^3 + \left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3}\right)\psi + C_7 r\right], \quad (3.1)$$

где C_2, C_4, C_5, C_7 – константы интегрирования; $I_1(\beta r)$ – *модифицированная функция Бесселя*; $K_1(\beta r)$ – *функция Макдональда*; интегралы берутся в пределах от 0 до r; коэффициенты

$$\beta^2 = \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2},\ \ b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1},$$
$$b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1},\ \ b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}.$$

В качестве граничных условий принимается шарнирное опирание контура пластины:

$$u = \psi = w = 0,\ \ M_r = 0,\ \text{при}\ r = r_0. \qquad (3.2)$$

Подставив решение (3.1) в граничные условия (3.2) и учитывая выражение для обобщенного внутреннего момента M_r (2.5), получим следующие константы интегрирования:

$$C_2 = \frac{b_2 q_0 r_0}{4cb_3 G_3 I_1(\beta r_0)},$$
$$C_4^{(n)} = \frac{b_2}{b_3}\left(\frac{C_2}{\beta} I_0(\beta r_0) - \frac{b_2 q_0}{8cb_3 G_3} r_0^2\right) - \frac{q_0}{64 b_3} r_0^4 - \frac{C_5 r_0^2}{4b_3},$$
$$C_5 = -\frac{2b_3}{a_6 + a_7}\left\{\left(3 + \frac{a_3^2}{b_3 a_1}\right)\frac{q_0}{16} r_0^2 +\right.$$
$$+t\left[\frac{\varphi_0 K_1 B_1}{\mu_1}\left(h_1 + c - \frac{1}{\mu_1} - \left(c - \frac{1}{\mu_1}\right)\exp(-\mu_1 h_1)\right) +\right.$$
$$+\frac{\varphi_{32} K_2 B_2}{\mu_2}\left(\left(c + h_2 + \frac{1}{\mu_2}\right)\exp(-\mu_2 h_2) - c - \frac{1}{\mu_2}\right) +$$
$$\left.\left.+\frac{\varphi_{13} K_3 B_3}{\mu_3}\left(c - \frac{1}{\mu_3} + \left(c + \frac{1}{\mu_3}\right)\exp(-2\mu_3 c)\right)\right]\right\},$$
$$C_7 = -\frac{a_3 q_0}{8a_1 b_3} r_0^2 - \frac{a_3}{a_1 b_3} C_5. \qquad (3.4)$$

Таким образом, решение (3.1) с константами интегрирования (3.4) дают перемещения в шарнирно закрепленной трехслойной круговой пластине, при изгибе равномерно распределенной нагрузкой в нейтронном потоке.

4 Численные результаты

Численная апробация решения проведена для пластины, слои которой набраны из материалов Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Все необходимые механические параметры этих материалов приведены в монографии [3]. При расчетах принималось: интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q_0 = -1$ МПа, нейтронного потока $\varphi = 10^{18}$ нейтрон / (м^{2}с), если другое не указано; толщины слоев $h_2 = 0{,}04$ м, $h_3 = 0{,}4$ м; радиус пластины $r_0 = 1$ м.

Рассмотрим сначала деформирование пластины только под действием нейтронного потока, т. е. $q_0 = 0$. На рисунке 4.1 показано изменение прогиба w вдоль радиуса пластины за счет облучения нейтронными потоками различных интенсивностей (нейтрон / (м^{2}с)). Толщины слоев: $h_1 = 0{,}02$ м; $h_2 = 0{,}06$ м; $h_3 = 0{,}4$ м. Воздействие нейтронного облучения вызывает увеличение объемной деформации в каждом слое, при этом верхний слой облучается потоком большей интенсивности, что вызывает большее его распухание и прогиб, направленный вверх. Усиление интенсивности потока на порядок вызывает примерно такое же увеличение прогиба. При нейтронном облучении относительный сдвиг в заполнителе отсутствует.

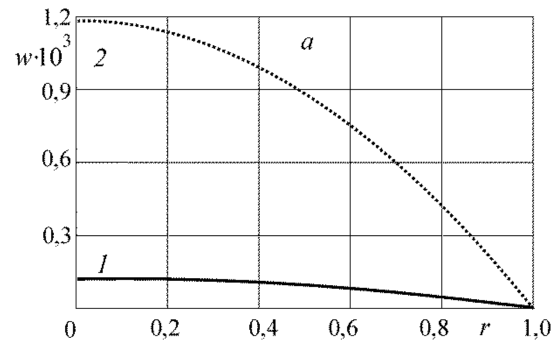


Рисунок 4.1. – Прогиб w, м за счет нейтронного облучения (нейтрон / (м^{2}с)):
1 – $\varphi_1 = 10^{17}$, 2 – $\varphi_2 = 10^{18}$

Следует отметить, что величина и знак прогиба пластины, появляющегося за счет распухания материала, зависит от толщины верхнего слоя. При этом существует такое критическое значение $h_1 = h_1^*$, при котором прогиб обращается в ноль. Для определения значения h_1^* в решении (3.1) необходимо положить $w(h_1^*) = 0$ при $q_0 = 0$. Прогиб равен нулю, если выполняется уравнение, следующее из условия $C_5 = 0$:

$$-t\left[\frac{\varphi_0 K_1 B_1}{\mu_1}\left(h_1 + c - \frac{1}{\mu_1} - \left(c - \frac{1}{\mu_1}\right)\exp(-\mu_1 h_1)\right) + \right.$$

$$+\frac{\varphi_{32} K_2 B_2}{\mu_2}\left(\left(c + h_2 + \frac{1}{\mu_2}\right)\exp(-\mu_2 h_2) - c - \frac{1}{\mu_2}\right) +$$

$$\left.\left. + \frac{\varphi_{13} K_3 B_3}{\mu_3}\left(c - \frac{1}{\mu_3} + \left(c + \frac{1}{\mu_3}\right)\exp(-2\mu_3 c)\right)\right]\right\} = 0. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) исследовалось численно. Было получено, что при выбранных параметрах пластины ($h_3 = 0{,}4$ м, $h_2 = 0{,}04$ м) и величины нейтронного потока $\varphi_1 = 10^{17}$ нейтрон / (м^{2}с) критическая толщина верхнего слоя $h_1^* \approx 0{,}012$ м. Если $h_1 < h_1^*$, то прогиб направлен вниз, в случае $h_1 = h_1^*$ – прогиб нулевой, при $h_1 > h_1^*$ пластина выпукла вверх.

Рисунок 4.2 иллюстрирует зависимость прогиба пластины w, м от ее асимметрии по толщине при постоянной толщине заполнителя $h_3 = 0{,}4$ м. Здесь при относительно тонком верхнем несущем слое прогиб отрицательный, но по мере роста его толщины и ослаблении нижнего несущего слоя прогиб изменяет свое направление.

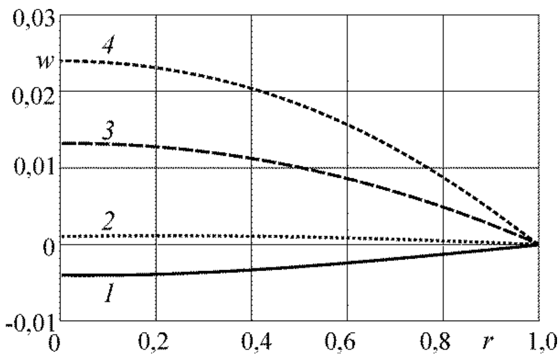


Рисунок 4.2 – Зависимость прогиба w от асимметрии пластины по толщине (м):
1 – $h_1 = 0{,}01$, $h_2 = 0{,}07$;
2 – $h_1 = 0{,}02$, $h_2 = 0{,}06$;
3 – $h_1 = 0{,}04$, $h_2 = 0{,}04$;
4 – $h_1 = 0{,}06$, $h_2 = 0{,}02$

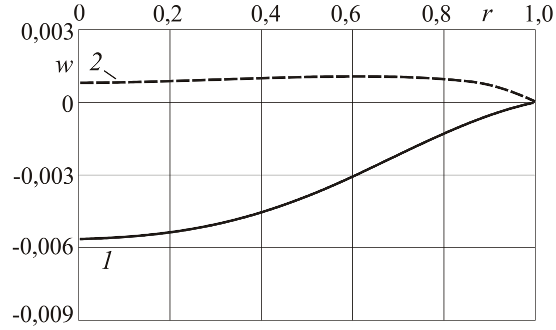


Рисунок 4.3 – Изменение прогиба w вдоль радиуса пластины:
1 – $h_1 = 0{,}01$ м; *2* – $h_1 = 0{,}02$ м

Изменение прогиба w (м) вдоль радиуса пластины при величине интенсивности нейтронного потока $\varphi = 10^{18}$ нейтрон / (м^{2}с) и нагрузки $q_0 = -1$ МПа показано на рисунке 4.3. Толщина заполнителя $h_3 = 0{,}4$ м, нижнего слоя $h_2 = 0{,}04$ м. Если $h_1 < h_1^* \approx 0{,}012$ м, то прогиб направлен вниз в сторону действия нагрузки и за счет нейтронного потока возрастает по модулю. В случае $h_1 > h_1^*$ прогиб направлен вверх и воздействие нейтронного потока его уменьшает.

Заключение

Предложенная постановка краевой задачи и полученное общее решение уравнений равновесия позволяют исследовать влияние нейтронного облучения на напряженно-деформированное состояние упругих трехслойных круговых пластин при непрерывных осесимметричных нагрузках. Численные расчеты показали существенное влияние величины интегрального нейтронного потока на прогиб пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавков*, *М.А.* Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.

2. *Головко*, *К.Г.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головко, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.

3. *Горшков*, *А.Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.

4. *Старовойтов*, *Э.И.* Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 276 с.

5. *Gorshkov*, *A.G.* Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A.G. Gorshkov, É.I. Starovoitov, Yarovaya A.V. // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 9. – P. 1196–1203.

6. *Starovoitov*, *E.I.* Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, № 5. – P. 561–570.

7. *Paimushin*, *V.N.* Theory of moderately large deflectıons of sandwıch shells having a transversely soft core and reinforced along their contour / V.N. Paimushin // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol. 53, № 1. – P. 3–26.

8. *Deshpande*, *V.S.* Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / V.S. Deshpande, N.A. Fleck // J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71, № 5. – P. 637–645.

9. *Škec*, *L.* Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection / L. Škec, G. Jelenić // Acta Mechanica. − 2014. − Vol. 225, № 2. − P. 523–541.

10. *Belinha*, *J.* Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method / J. Belinha, L.M. Dints // Composite Structures. – 2007. – Vol. 78, № 3. – P. 337–350.

11. *Julien*, *D.* Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenesized Love–Kirchhoff Model / D. Julien, S. Karam // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol. 56, № 2. – P. 561–580.

12. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

13. *Moskvitin*, *V.V.* Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates / V.V. Moskvitin, E.I. Starovoitov // Mechanics of Composite Materials. − 1985. – Vol. 21, № 3. – P. 267–273.

14. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трехслойной круговой пластины в условиях ползучести / Э.И. Старовойтов, Ю.М. Плескачевский, А.В. Яровая // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 57–63.

15. *Козел*, *А.Г.* Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.

16. *Козел*, *А.Г.* Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А.Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.

17. *Захарчук*, *Ю.В.* Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (4). – С. 53–57.

18. *Захарчук*, *Ю.В.* Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

19. *Zenkour*, *A.M.* Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates / M.A. Zenkour, N.A. Alghamdi // Journal of Sandwich Structures and Materials. – 2010. – Vol. 12, № 1. – P. 7–46.

20. *Zenkour*, *A.M.* Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol. 17, № 6. – P. 419–432.

21. *Старовойтов*, *Э.И.* Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

22. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

23. *Нестерович*, *А.В.* Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

24. *Нестерович*, *А.В.* Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

25. *Гундина*, *М.А.* Определение начального направления развития трещины в момент страгивания / М.А. Гундина // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 40–44.

26. *Ильюшин*, *А.А.* Упругопластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.

27. *Платонов*, *П.А.* Действие облучения на структуру и свойства металлов / П.А. Платонов. – М.: Машиностроение, 1971. – 40 с.

28. *Куликов*, *И.С.* Прочность элементов конструкций при облучении / И.С. Куликов, В.Б. Нестеренко, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Навука і тэхніка, 1990. – 144 с.

29. *Starovoitov*, *E.I.* Deformation of a three-layer rod with a compressible core in a neutron flow / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2020. – Vol. 56, № 1. – P. 81–91.

30. *Старовойтов*, *Э.И.* Изменение нейтронного потока при прохождении через трехслойную пластину / Э.И. Старовойтов // Механика. Исследования и инновации. Международный сборник научных трудов. Выпуск 13. – 2020. – № 13 (13). – С. 141–146.

Работа выполнена в рамках гранта Президента РБ в науке на 2021 *год.*

Поступила в редакцию 12.06.2021.

УДК 512.548

О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ *l*-АРНОЙ ГРУППЫ $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

ON SETS OF GENERATORS OF *l*-ARY GROUP $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

В статье продолжается изучение установленной ранее связи между порождающими множествами группы A и порождающими множествами полиадической группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ с l-арной операцией $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, которая определяется на k-ой декартовой степени произвольной группы A для любого целого $l \ge 2$ и любой подстановки σ из множества $\mathbf{S}_k$ всех подстановок множества $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Ключевые слова: *группа*, *l-арная группа*, *порождающее множество.*

The article goes on with the studies on the described earlier relationship between sets of generators in group A and sets of generators in polyadic group $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ with l-ary operation $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, that is defined on Cartesian power A^k of group A for arbitrary integer $l \ge 2$ and arbitrary substitution σ from the set $\mathbf{S}_k$ of all substitutions of the set $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Keywords: *group*, *l-ary group*, *set of generators.*

Введение

Данная статья, посвящённая изучению порождающих множеств l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на теорему 4.1 означает, что имеется в виду теорема 4.1 из раздела 4 в [1].

Отметим, что ранее автором изучались порождающие множества l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$. В частности, в [2, следствие 4.5] установлено, что если полугруппа A с единицей порождается множеством M, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, k делит $l - 1$, то для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$.

В [1] получен аналогичный результат (теорема 4.1) для l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$: *Пусть группа A порождается множеством M*, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, *k делит* $l - 1$. *Тогда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$.

Всю необходимую информацию из теории полиадических групп можно найти в [3], [4].

Основная цель данной статьи – нахождение условий, позволяющих заменить в указанных выше результатах порождающее множество $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ порождающим множеством $\mathbf{U}_j(M)$.

6 Порождающее множество $\mathbf{U}_j(M)$

Покажем, что возможна ситуация, при которой элемент $\mathbf{e}$ может быть исключён из порождающих множеств как l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, так и l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$.

***Теорема* 6.1**. *Пусть группа A порождается множеством M*, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $r \ge 2$, *существуют элементы*

$$u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}, v_1, v_2, \ldots, v_r \in M$$

такие, *что*

$$u_1u_2 \ldots u_{r+1} = v_1v_2 \ldots v_r = 1. \qquad (6.1)$$

Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, *где* $l = rk + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$.

Доказательство. По теореме 4.1 для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$.Так как единица группы не принадлежит множеству M, то $\mathbf{e} \notin \mathbf{U}_j(M)$.

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. По лемме 4.1, если

$$\mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-j}) \in A^k, \ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = (b_1, \ldots, b_k),$$

то

$$b_j = a_ja_{k+1}a_{2k+1} \ldots a_{rk+1}, \qquad (6.2)$$

$$b_s = a_s a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \ldots a_{(r-1)k+m_s+1}$$

для любого $s \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k\}$, где m_s однозначно определяется из условия $\sigma^{m_s}(s) = j$. Так как для указанных s имеем $a_s = 1$, то

$$b_s = a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \ldots a_{(r-1)k+m_s+1}. \qquad (6.3)$$

Если положить

$$a_1 = u_1, a_{k+1} = u_2, a_{2k+1} = u_3, \ldots a_{rk+1} = u_{r+1},$$

$$a_{m_s+1} = v_1,\ a_{k+m_s+1} = v_2,\ \ldots\ a_{(r-1)k+m_s+1} = v_r$$

для указанных выше s, то из (6.2) и (6.3) с учётом (6.1) следует

$$b_1 = \ldots = b_k = 1,$$

то есть

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = \mathbf{e},$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l \in \mathbf{U}_j(M)$. Следовательно, элемент $\mathbf{e}$ может быть исключён из порождающего множества $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$. □

***Замечание* 6.1.** Выпишем в явном виде элементы $b_1, \ldots, b_k$, определяемые равенствами (6.2) и (6.3) для $j = 1$ в случае σ=(1, 2, …, k). Так как в этом случае из условия $\sigma^{m_s}(s) = 1$ следует

$$m_2 = k - 1,\ m_3 = k - 2,\ \ldots,\ m_{k-1} = 2,\ m_k = 1,$$

то

$$b_1 = a_1a_{k+1}a_{2k+1} \ldots a_{(r-1)k+1}a_{rk+1},$$
$$b_2 = a_ka_{2k}a_{3k} \ldots a_{(r-1)k}a_{rk},$$
$$b_3 = a_{k-1}a_{2k-1}a_{3k-1} \ldots a_{(r-1)k-1}a_{rk-1},$$
$$\ldots$$
$$b_{k-1} = a_3a_{k+3}a_{2k+3} \ldots a_{(r-2)k+3}a_{(r-1)k+3},$$
$$b_k = a_2a_{k+2}a_{2k+2} \ldots a_{(r-2)k+2}a_{(r-1)k+2}.$$

Доказательство следующей теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 6.1. Только вместо теоремы 4.1 используется предложение 4.1.

***Теорема* 6.2**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащим её единицу, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, *существуют элементы*

$$u_1, u_2, \ldots, u_{r+1}, v_1, v_2, \ldots, v_r \in M$$

такие, что

$$u_1u_2 \ldots u_{r+1} = v_1v_2 \ldots v_r = 1.$$

Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, *где* $l = rk + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$.

Следующие две теоремы являются следствиями теорем 6.1 и 6.2, если в них положить

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{r+1} = u,\ v_1 = v_2 = \ldots = v_r = v.$$

***Теорема* 6.3**. *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, *существуют элементы* $u, v \in M$ *такие, что* $u^{r+1} = v^r = 1$. *Тогда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, *где* $l = rk + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$.

***Теорема* 6.4**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащем её единицу, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, *существуют элементы* $u, v \in M$ *такие, что* $u^{r+1} = v^r = 1$. *Тогда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, *где* $l = rk + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$.

Следующие две теоремы являются формальными обобщениями теорем 6.3 и 6.4 соответственно, так как вытекают из них.

***Теорема* 6.5**. *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, *d делит* $r + 1$, *c делит r, существуют элементы* $u, v \in M$ *такие, что* $u^d = v^c = 1$. *Тогда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, *где* $l = rk + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$.

***Теорема* 6.6**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащим её единицу, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $r \geq 2$, *d делит* $r + 1$, *c делит r, существуют элементы* $u, v \in M$ *такие, что* $u^d = v^c = 1$. *Тогда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$, *где* $l = rk + 1$, *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$.

7 Следствия и примеры

Полагая в теоремах 6.1 и 6.3 $r = 2$, получим следующие два следствия.

***Следствие* 7.1.** *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, *существуют элементы* $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \in M$, *такие, что* $u_1u_2u_3 = v_1v_2 = 1$. *Тогда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ $(2k + 1)$*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{2k+1,\,\sigma,\,k} >$ *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$.

***Следствие* 7.2.** *Пусть группа A порождается множеством M, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, *существуют элементы* $u, v \in M$, *такие, что* $u^3 = v^2 = 1$. *Тогда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ $(2k + 1)$*-арная группа* $< A^k, [\ ]_{2k+1,\,\sigma,\,k} >$ *порождается множеством* $\mathbf{U}_j(M)$.

Для теорем 6.2 и 6.4 справедливы следствия, аналогичные следствиям 7.1 и 7.2.

Следующий пример показывает, что в формулировке теореме 4.1 нельзя обойтись без элемента $\mathbf{e}$.

***Пример* 7.1**. Рассмотрим циклическую группу $A = \{1, a\}$, которая порождается множеством $M = \{a\}$. Тогда

$$A^2 = \{\mathbf{e} = (1, 1), \mathbf{u} = (1, a), \mathbf{v} = (a, 1), \mathbf{w} = (a, a)\},$$
$$\mathbf{U}_1(M) = \{\mathbf{v}\},\ \mathbf{U}_2(M) = \{\mathbf{u}\},\ \mathbf{U}(M) = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

Согласно теореме 4.1, каждое из множеств

$$\mathbf{U}_1(M) \cup \{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}, \mathbf{v}\},\ \mathbf{U}_2(M) \cup \{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}, \mathbf{u}\}$$

порождает тернарную группу $< A^2, [\ ]_{3,\,(12),\,2} >$.

Так как

$$[\mathbf{uuu}]_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{v},\ [\mathbf{vvv}]_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{u},$$
$$[\mathbf{uuv}]_{3,\,(12),\,2} = [\mathbf{vuu}]_{3,\,(12),\,2}] = \mathbf{u},$$
$$[\mathbf{vvu}]_{3,\,(12),\,2} = [\mathbf{uvv}]_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{v},$$
$$[\mathbf{uvu}]_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{u},\ [\mathbf{vuv}]_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{v},$$

то $< \mathbf{U}(M) = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}, [\ ]_{3,\,(12),\,2} >$ – тернарная подгруппа тернарной группы $< A^2, [\ ]_{3,\,(12),\,2} >$. Следовательно, каждое из множеств $\mathbf{U}(M)$, $\mathbf{U}_1(M)$ и $\mathbf{U}_2(M)$ не порождает тернарную группу $< A^2, [\ ]_{3,\,(12),\,2} >$.

Равенства

$$[\mathbf{uuu}]_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{v},\ [\mathbf{vvv}]_{3,\,(12),\,2}] = \mathbf{u}$$

показывают, что порождающее множество $\{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ не является неприводимым, так как из него можно удалить либо элемент $\mathbf{u}$, либо элемент $\mathbf{v}$. Полученные порождающие множества $\{\mathbf{e}, \mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{e}, \mathbf{v}\}$ будут уже неприводимыми.

Так как

$$[\mathbf{uuw}]_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{e},\ [\mathbf{uwe}]_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{v},$$

то $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ – еще одно порождающее множество, причем неприводимое. Неприводимым порождающим множеством является и множество $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, так как

$$[\mathbf{vvw}]_{3,(12),2} = \mathbf{e},\ [\mathbf{vwe}]_{3,(12),2} = \mathbf{u}.$$

Таким образом, тернарную группу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождает каждое из следующих четырех двухэлементных неприводимых множеств

$$\{\mathbf{e}, \mathbf{u}\},\ \{\mathbf{e}, \mathbf{v}\},\ \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\},\ \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}.$$

Отметим, что последние два множества не содержат **e.**

Кроме множества $\{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, тернарную группу $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождает также каждое из следующих трехэлементных множеств

$$\{\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\},\ \{\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\},\ \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}.$$

***Замечание* 7.1.** Случай $r = 1$ исключён из теоремы 6.1, так как в этом случае множество $\mathbf{U}_j(M)$ может быть как порождающим, так и не порождающим. В примере 7.1, соответствующем случаю $r = 1$, множества $\mathbf{U}_1(M)$ и $\mathbf{U}_2(M)$ не являются порождающими для тернарной группы $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$. А в следующих примерах, для которых также $r = 1$, множество $\mathbf{U}_j(M)$ является порождающим для соответствующих тернарных групп.

***Пример* 7.2**. Циклическая группа A порядка 3, порожденная элементом a, порождается также двухэлементным множеством $M = \{a, a^2\}$. Тогда по теореме 4.1 тернарная группа $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порядка 9 порождается множеством $\mathbf{U}_1(M) \cup \{\mathbf{e}\}$, где

$$\mathbf{U}_1(M) = \{(a, 1), (a^2, 1)\},\ \mathbf{e} = (1, 1).$$

Так как

$$[(a, 1)(a, 1)(a, 1)(a^2, 1)(a, 1)]_{3,(12),2} = (a^3, a^3) = (1, 1) = \mathbf{e},$$

то элемент **e** выражается с помощью тернарной операции $[\ ]_{3,(12),2}$ через элементы множества $\mathbf{U}_1(M)$. Следовательно, тернарная группа $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождается двухэлементным множеством $\mathbf{U}_1(M)$. Двухэлементное множество $\mathbf{U}_2(M)$ также является порождающим для $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$.

***Пример* 7.3**. Циклическая группа $A = \mathbf{Z}_6$ порядка 6, порожденная элементом a, порождается также двухэлементным множеством $M = \{a^2, a^3\}$. Тогда по теореме 4.1 тернарная группа $< \mathbf{Z}_6^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порядка 36 порождается множеством $\mathbf{U}_1(M) \cup \{\mathbf{e}\}$, где

$$\mathbf{U}_1(M) = \{(a^2, 1), (a^3, 1)\},\ \mathbf{e} = (1, 1).$$

Положим

$$\mathbf{u} = [(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)]_{3,(12),2},$$
$$\mathbf{v} = [(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)]_{3,(12),2},$$
$$\mathbf{w} = [(a^2, 1)\mathbf{uv}]_{3,(12),2}.$$

Так как

$$\mathbf{u} = (1, a^2),\ \mathbf{v} = (a^4, a^2),$$

то

$$\mathbf{w} = [(a^2, 1)(1, a^2)(a^4, a^2)]_{3,(12),2} = (a^2, a^2),$$

откуда

$$[\mathbf{www}]_{3,(12),2} = [(a^2, a^2)(a^2, a^2)(a^2, a^2)]_{3,(12),2} = (1, 1) = \mathbf{e},$$

то есть $[\mathbf{www}]_{3,(12),2} = \mathbf{e}$.

Таким образом, элемент **e** выражается с помощью тернарной операции $[\ ]_{3,(12),2}$ через элементы множества $\mathbf{U}_1(M)$:

$$\mathbf{e} = [(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)\ (a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)\ (a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)]_{3,(12),2}.$$

Следовательно, тернарная группа $< \mathbf{Z}_6^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ порождается двухэлементным множеством $\mathbf{U}_1(M)$. Порождающим для этой тернарной группы является и двухэлементное множество $\mathbf{U}_2(M)$.

***Пример* 7.4**. Пусть как и в примере 7.3 $A = \mathbf{Z}_6$ – циклическая группа порядка 6, порождаемая множеством $M = \{a^2, a^3\}$. Тогда по следствию 7.2 ($u = a^2$, $v = a^3$) *для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ $(2k + 1)$*-арная группа* $< \mathbf{Z}_6^k, [\ ]_{2k+1,\sigma,k} >$ *порождается двухэлементным множеством* $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Пример 7.4 может быть извлечен и из следствия 7.2.

***Замечание* 7.2.** В примере 7.4 значению $k = 2$ соответствует 5-арная группа. Поэтому пример 7.3, в котором фигурирует тернарная группа, не может быть получен из примера 7.4.

Так как симметрическая группа $\mathbf{S}_n$ порождается любым из следующих четырёх множеств [5]:

$$M_1 = \{\alpha_1 = (1\ 2),\ \alpha_2 = (1\ 2\ \ldots\ n)\};$$
$$M_2 = \{\alpha_1 = (1\ 2),\ \alpha_2\alpha_1 = (2\ 3\ \ldots\ n)\};$$
$$M_3 = \{\beta_1 = (1\ 2),\ \beta_2 = (2\ 3),\ \ldots,\ \beta_{n-1} = (n-1\ n)\};$$
$$M_4 = \{\gamma_1 = (1\ n),\ \gamma_2 = (2\ n),\ \ldots,\ \gamma_{n-1} = (n-1\ n)\},$$

то теорема 4 1 позволяет сформулировать следствие, в котором ε – тождественная подстановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbf{e} = (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})$.

***Следствие* 7.3.** *Для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, k *делит* $l - 1$, *порождается любым из следующих четырёх множеств*:

$$\mathbf{U}_j(M_1) \cup \{\mathbf{e}\} = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),\ (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha_2, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),\ (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$

$$\mathbf{U}_j(M_2) \cup \{\mathbf{e}\} = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),\ (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha_2\alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),\ (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$

$$\mathbf{U}_j(M_3) \cup \{\mathbf{e}\} = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \beta_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), \ldots\ \ldots, (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \beta_{n-1}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),\ (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$

$$\mathbf{U}_j(M_4) \cup \{\mathbf{e}\} = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \gamma_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), \ldots\ \ldots, (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \gamma_{n-1}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),\ (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\}.$$

В частности, порождающими являются следующие множества:

$$\mathbf{U}_1(M_1) \cup \{\mathbf{e}\} =$$
$$= \{(\alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\alpha_2, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$
$$\mathbf{U}_1(M_2) \cup \{\mathbf{e}\} =$$
$$= \{(\alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\alpha_2\alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$
$$\mathbf{U}_1(M_3) \cup \{\mathbf{e}\} =$$
$$= \{(\beta_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), \ldots, (\beta_{n-1}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\};$$
$$\mathbf{U}_1(M_4) \cup \{\mathbf{e}\} =$$
$$= \{(\gamma_1, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), \ldots, (\gamma_{n-1}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k})\}.$$

Для некоторых l в следствии 7.3 элемент $\mathbf{e}$ может быть удалён из порождающего множества l-арной группы $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$.

Так как для чётного n

$$(1\ 2)^n = (2\ 3\ \ldots\ n)^{n-1} = \varepsilon,$$

то, полагая в теореме 6.3 $r = n - 1$, $u = (1\ \ 2)$, $v = (2\ 3\ \ldots\ n)$, получим

***Следствие* 7.4.** *Для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, *где* $n \geq 4$ *– чётное*, $l = (n - 1)k + 1$, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, *порождается множеством*

$$\mathbf{U}_j(M_2) = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (2\ 3\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

В частности, она порождается множеством

$$\mathbf{U}_1(M_2) = \{((1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), ((2\ 3\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1})\}.$$

Так как для нечётного n

$$(1\ 2\ \ldots\ n)^n = (1\ 2)^{n-1} = \varepsilon,$$

то, полагая в теореме 6.3 $r = n - 1$, $u = (1\ 2\ \ldots\ n)$, $v = (12)$, получим

***Следствие* 7.5.** *Для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, *где* $n \geq 3$ *– нечётное*, $l = (n - 1)k + 1$, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, *порождается множеством*

$$\mathbf{U}_j(M_1) = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

В частности, она порождается множеством

$$\mathbf{U}_1(M_1) = \{((1\ 2\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), ((1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1})\}.$$

***Пример* 7.5.** Так как $(1\ \ 2\ \ 3)^3 = (1\ \ 2)^2 = \varepsilon$, то положив в следствии 7.5 $n = 3$, $k = 2$, $j = 1$, получим 5-арную группу $< \mathbf{S}_3^2, [\ ]_{5, (12), 2} >$, которая согласно этому следствию порождается двухэлементным множеством $\{((1\ 2\ 3), \varepsilon), ((1\ \ 2), \varepsilon)\}$.

Равенство, позволяющее выразить элемент $\mathbf{e}$ с помощью 5-арной операции $[\ ]_{5, (12), 2}$ через элементы множества $\mathbf{U}_1(M_1)$ имеет вид

$$[((1\ 2\ 3), \varepsilon)((1\ 2), \varepsilon)((1\ 2\ 3), \varepsilon)((1\ 2), \varepsilon)$$
$$((1\ 2\ 3), \varepsilon)]_{5, (12), 2} = ((1\ 2\ 3)^3, (1\ 2)^2) = (\varepsilon, \varepsilon) = \mathbf{e}.$$

Это равенство получается из равенства, завершающего доказательство теоремы 6.1, из которой извлечена теорема 6.3.

Так как для нечётного n

$$(1\ 2)^{n+1} = (1\ 2\ \ldots\ n)^n = \varepsilon,$$

то, полагая в теореме 6.3 $r = n$, $u = (1\ \ 2)$, $v = (1\ 2\ \ldots\ n)$, получим

***Следствие* 7.6.** *Для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ $(nk + 1)$*-арная группа* $< \mathbf{S}_n^k, [\ ]_{nk+1, \sigma, k} >$, *где* $n \geq 3$ *– нечётное*, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, *порождается множеством*

$$\mathbf{U}_j(M_1) = \{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

В частности, она порождается множеством

$$\mathbf{U}_1(M_1) = \{((1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1}), ((1\ 2\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-1})\}.$$

***Пример* 7.6.** Так как $(1\ \ 2)^4 = (1\ \ 2\ \ 3)^3 = \varepsilon$, то положив в следствии 7.6 $n = 3$, $k = 2$, $j = 1$, получим 7-арную группу $< \mathbf{S}_3^2, [\ ]_{7, (12), 2} >$, которая согласно этому следствию порождается двухэлементным множеством

$$\{((1\ 2), \varepsilon), ((1\ 2\ 3), \varepsilon)\}.$$

Равенство, позволяющее выразить элемент $\mathbf{e}$ с помощью 7-арной операции $[\ ]_{7, (12), 2}$ через элементы множества $\mathbf{U}_1(M_1)$ имеет вид

$$[((1\ 2), \varepsilon)((1\ 2\ 3), \varepsilon)((1\ 2), \varepsilon)((1\ 2\ 3), \varepsilon)$$
$$((1\ 2), \varepsilon)((1\ 2\ 3), \varepsilon)((1\ 2), \varepsilon)]_{7, (12), 2} =$$
$$= ((1\ 2)^4, (1\ 2\ 3)^3) = (\varepsilon, \varepsilon) = \mathbf{e}.$$

Это равенство получается из равенства, завершающего доказательство теоремы 6.1, из которой извлечена теорема 6.3.

Для нахождения полиадических групп вида $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, порождаемых множеством $\mathbf{U}_j(M)$, можно воспользоваться непосредственно теоремой 6.1.

***Следствие* 7.7.** *Для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< \mathbf{A}_n^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$, *где* $n \geq 4$ *– нечётное*, $l = (2n - 1)k + 1$, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, *порождается множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (3\ 4\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ 3), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

Доказательство. Известно, что для нечётного $n \geq 4$ знакопеременная группа $\mathbf{A}_n$ порождается [5] множеством

$$\{u = (3\ 4\ \ldots\ n), v = (1\ 2\ 3)\},$$

при этом

$$u^{n-2} = v^3 = (uv)^n = \varepsilon. \qquad (7.1)$$

Положив в теореме 6.1 $r = 2n - 1$,

$$u_1 = u, u_2 = v, u_3 = u, u_4 = v, \ldots, = u_{2n-1} = u, u_{2n} = v,$$
$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{2n-4} = u, v_{2n-3} = v_{2n-2} = v_{2n-1} = v,$$

и, учитывая (7.1), получим

$$u_1u_2 \ldots u_{2n} = (uv)^n = \varepsilon,$$
$$v_1v_2 \ldots, v_{2n-1} = u^{2n-4}v^3 = (u^{n-2})^2\varepsilon = \varepsilon.$$

По теореме 6.1 для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< \mathbf{A}_n^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = (2n-1)k + 1$, порождается множеством, указанном в условии. Следствие доказано.

***Следствие* 7.8.** *Для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *l-арная группа* $< \mathbf{A}_n^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где* $n \geq 4$ *– чётное,* $l = (2n-2)k + 1$, σ *– цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, *порождается множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2)(3\ 4\ \ldots\ n), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ 3), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

Доказательство. Известно, что для чётного $n \geq 4$ знакопеременная группа $\mathbf{A}_n$ порождается [5] множеством $\{w = (1\ 2)(3\ 4\ \ldots\ n),\ v = (1\ 2\ 3)\}$, при этом

$$w^{n-2} = v^3 = (wv)^{n-1} = \varepsilon. \tag{7.2}$$

Положив в теореме 6.1 $r = 2n - 2$,

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{2n-4} = w,\ u_{2n-3} = u_{2n-2} = u_{2n-1} = v,$$
$$v_1 = w,\ v_2 = v,\ v_3 = w,\ v_4 = v,\ \ldots, = v_{2n-3} = w,$$
$$v_{2n-2} = v,$$

и, учитывая (7.2), получим

$$u_1u_2 \ldots u_{2n-1} = w^{2n-4}v^3 = (w^{n-2})^2\varepsilon = \varepsilon,$$
$$v_1v_2 \ldots v_{2n-2} = (wv)^{n-1} = \varepsilon.$$

По теореме 6.1 для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ l-арная группа $< \mathbf{A}_n^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = (2n-2)k + 1$, порождается множеством, указанном в условии. □

8 Обобщения теорем 6.3 и 6.4

Отметим, что теорему 6.3 можно сформулировать в более общем виде, показав, что в её условиях существует не одна, а бесконечно много полиадических групп $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ различных арностей l, которые порождаются множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. Указанная в формулировке теоремы 6.3 $(rk + 1)$-арная группа $< A^k, [\ ]_{rk+1,\sigma,k} >$– лишь одна из них.

***Теорема* 8.1**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^{r+1} = b^r = 1$ *для некоторого* $r \geq 2$, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} r((r+1)i+1)k+1, \text{ если } 1+ri > 0, \\ -(r+1)(1+ri)k+1, \text{ если } 1+ri < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

При $r \geq 2$ множество всех целых решений неравенства $1 + ri > 0$ имеет вид $\{0, 1, 2, \ldots,\}$, соответственно множество всех целых решений неравенства $1 + ri < 0$ имеет вид $\{-1, -2, \ldots\}$. Поэтому теорему 8.1 можно переформулировать следующим образом.

***Теорема* 8.2**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^{r+1} = b^r = 1$ *для некоторого* $r \geq 2$, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} r((r+1)i+1)k+1, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -(r+1)(1+ri)k+1, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Замечание* 8.1**. Теоремы 8.1 и 8.2 включает в себя теорему 6.3 при $i = 0$, то есть теоремы 8.1 и 8.2 можно рассматривать как обобщения теоремы 6.3.

Мы получим теоремы 8.1 и 8.2 как следствие более общего результата.

Из теории чисел известно [6], что для взаимно простых целых чисел m *и* n уравнение

$$mx + ny = 1 \tag{8.1}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах. Если (x_0, y_0) – одно из таких решений, то множество всех решений диофантового уравнения (8.1) имеет вид

$$\{(x_0 - ni, y_0 + mi) \mid i \in \mathbf{Z}\}$$

или, что равносильно,

$$\{(x_0 + ni, y_0 - mi) \mid i \in \mathbf{Z}\}. \tag{8.2}$$

Ясно, что ненулевые компоненты любого решения (x_0, y_0) уравнения (8.1) имеют разные знаки: $xy < 0$.

***Теорема* 8.3**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^m = b^n = 1$ *для некоторых взаимно простых* $m \geq 2$ *и* $n \geq 2$, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) *– какое-либо решение диофантового уравнения* (8.1). *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} n(mi - y_0)k+1, \text{ если } x_0 + ni > 0, \\ -m(x_0 + ni)k+1, \text{ если } x_0 + ni < 0, \end{cases} \tag{8.3}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Подставим любое решение из (8.2), которое имеет ненулевые компоненты, в (8.1):

$$m(x_0 + ni) + n(y_0 - mi) = 1. \tag{8.4}$$

Если $x_0 + ni = 0$ или $y_0 - mi = 0$, то соответственно $n = \pm 1$ или $m = \pm 1$, что противоречит неравенствам $m \geq 2$ *и* $n \geq 2$ из условия теоремы. Потому считаем

$$x_0 + ni \neq 0,\ y_0 - mi \neq 0. \tag{8.5}$$

Если $x_0 + ni > 0$, то из (8.4) и (8.5) следует

$$n(y_0 - mi) < 0,$$

откуда получаем $y_0 - mi < 0$. Так как в левой части этого неравенства стоит целое число, то на самом деле $y_0 - mi \leq -1$ или, что равносильно, $mi - y_0 \geq 1$. Из последнего неравенства и неравенства $n \geq 2$ следует $n(mi - y_0) \geq 2$. Положив

$$r = -n(y_0 - mi) = n(mi - y_0),$$

где $r \geq 2$, и, учитывая (8.4), получим

$$r + 1 = m(x_0 + ni).$$

Так как

$$a^{r+1} = a^{m(x_0+ni)} = (a^m)^{x_0+ni} = 1,$$

$$b^r = b^{n(mi-y_0)} = (b^n)^{mi-y_0} = 1,$$

то по теореме 6.3 ($u = a$, $v = b$), l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где $l = n(mi - y_0)k + 1$, порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Рассмотрим теперь неравенство $x_0 + ni < 0$, в левой части которого стоит целое число. Поэтому на самом деле $x_0 + ni \leq -1$, откуда ввиду $m \geq 2$, следует $m(x_0 + ni) \leq -2$ или, что равносильно, $-m(x_0 + ni) \geq 2$. Положив

$$r = -m(x_0 + ni),$$

где $r \geq 2$, и, учитывая (8.4), получим

$$r + 1 = n(y_0 - mi).$$

Так как

$$b^{r+1} = b^{n(y_0-mi)} = (b^n)^{y_0-mi} = 1,$$

$$a^r = a^{-m(x_0+ni)} = (a^m)^{-(x_0+ni)} = 1,$$

то по теореме 6.3 ($u = b$, $v = a$), l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где

$$l = -m(x_0 + ni)k + 1,$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. □

***Замечание* 8.2**. В теореме 8.3 формулу (8.3) можно заменить формулой

$$l = \begin{cases} n(mi - y_0)k + 1, \text{если } y_0 - mi < 0, \\ -m(x_0 + ni)k + 1, \text{если } y_0 - mi > 0. \end{cases}$$

Так как числа r и $r + 1$ взаимно простые, то следующая теорема является следствием теоремы 8.3.

***Теорема* 8.4**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^{r+1} = b^r = 1$ *для некоторого* $r \geq 2$, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) *– какое-либо решение диофантового уравнения*

$$(r + 1)x + ry = 1. \qquad (8.6)$$

Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} r((r+1)i - y_0)k + 1, \text{если } x_0 + ri > 0, \\ -(r+1)(x_0 + ri)k + 1, \text{если } x_0 + ri < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Так как пара $(1, -1)$ является одним из решений диофантового уравнения (8.6), то теоремы 8.1 и 8.2 совпадают с теоремой 8.3 при $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

***Замечание* 8.3**. Теоремы 8.1–8.4, обобщающие теорему 6.3, является формальными её обобщениями, так как при доказательстве теоремы 8.3, а значит и вытекающих из неё теорем 8.1, 8.2 и 8.4, была использована теорема 6.3.

Результаты, аналогичные теоремам 8.1–8.4, справедливы и для l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Доказательство следующего аналога теоремы 8.3 отличается от её доказательства только ссылкой на теорему 6.4 вместо ссылки на теорему 6.3.

***Теорема* 8.5**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащим её единицу, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^m = b^n = 1$ *для некоторых взаимно простых* $m \geq 2$ *и* $n \geq 2$, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) *– какое-либо решение диофантового уравнения* (8.1). *Тогда l-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} n(mi - y_0)k + 1, \text{если } x_0 + ni > 0, \\ -m(x_0 + ni)k + 1, \text{если } x_0 + ni < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Из теоремы 8.5 вытекают результаты, аналогичные теоремам 8.1, 8.2 и 8.4. Ограничимся аналогом теоремы 8.2.

***Теорема* 8.6**. *Пусть полугруппа A порождается множеством M, не содержащим её единицу, в котором имеются элементы a и b такие, что* $a^{r+1} = b^r = 1$ *для некоторого* $r \geq 2$, σ *– цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} r((r+1)i + 1)k + 1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -(r+1)(1 + ri)k + 1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Замечание* 8.4**. Заменив в теоремах 8.1, 8.2, 8.4 и 8.6 равенства $a^{r+1} = b^r = 1$ равенствами $a^d = b^c = 1$, где d делит $r + 1$, c делит r, получим формальные обобщения этих теорем.

Приведём несколько следствий из теорем этого раздела.

Так как специальная линейная группа $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ порождается [5] матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

то из теоремы 8.2 вытекает

***Следствие* 8.1.** *Для любого цикла* σ *длины k из* $\mathbf{S}_k$ *l-арная группа* $< \mathbf{SL}_2^k(\mathbf{Z}), [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} 3(4i + 1)k + 1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -4(3i + 1)k + 1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается двухэлементным множеством

$$\left\{ \left(\underbrace{E, \ldots, E}_{j-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \underbrace{E, \ldots, E}_{k-j} \right), \left(\underbrace{E, \ldots, E}_{j-1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \underbrace{E, \ldots, E}_{k-j} \right) \right\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Известно, что простая группа Матье $\mathbf{M}_{11}$, рассматриваемая как группа подстановок, порождается [7] двумя подстановками

$$(1\ 2\ \ldots\ 11), (5\ 6\ 4\ 10)(11\ 8\ 3\ 7),$$

порядка 11 и 4 соответственно. Так как пара (3, – 1) является одним из решений диофантового уравнения $4x + 11y = 1$, то из теоремы 8.3 вытекает

***Следствие* 8.2.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *l-арная группа* $< \mathbf{M}_{11}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} 11(4i+1)k+1, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -4(11i+3)k+1, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается двухэлементным множеством

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ \ldots\ 11), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$

$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (5\ 6\ 4\ 10)(11\ 8\ 3\ 7), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

9 Случай инволюций

В ряде случаев порождающее множество группы содержит инволюции и элементы, нечётная степень которых совпадает с единицей группы. К таким группам применима теорема 8.3. при $m = 2$ *и* $n = 2t + 1$, где $t \geq 1$ или $n = 2t - 1$, где $t \geq 2$. Сформулируем соответствующий результат для случая $m = 2$, $n = 2t + 1$, где $t \geq 1$.

***Теорема* 9.1**. *Пусть группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* a *и* b *такие, что* $a^2 = b^{2t+1} = 1$ *для некоторого* $t \geq 1$, σ – *цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) – *какое-либо решение диофантового уравнения*

$$2x + (2t + 1)y = 1. \tag{9.1}$$

Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (2t+1)(2i-y_0)k+1, \text{ если } x_0 + (2t+1)i > 0, \\ -2(x_0 + (2t+1)i)k+1, \text{ если } x_0 + (2t+1)i < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Так как пара $(t + 1, - 1)$ является одним из решений диофантового уравнения (9.1), то неравенство $x_0 + (2t + 1)i > 0$ принимает вид

$$x_0 + (2t + 1)i = t + 1 + (2t + 1)i > 0.$$

Из этого неравенства следует $i > -\dfrac{t+1}{2t+1}$, откуда $i = 0, 1, 2, \ldots$. Соответственно из неравенства $x_0 + (2t + 1)i < 0$ следует $i < -\dfrac{t+1}{2t+1}$, откуда $i = -1, -2, \ldots$. Поэтому из теоремы 9.1 вытекает

***Теорема* 9.2**. *Пусть группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* a *и* b *такие, что* $a^2 = b^{2t+1} = 1$ *для некоторого* $t \geq 1$, σ – *цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (2t+1)(2i+1)k+1, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -2(t+1+(2t+1)i)k+1, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases} \tag{9.2}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Диэдральная группа $\mathbf{D}_{2n}$ порядка $2n$, то есть полная группа преобразований симметрии правильного n-многоугольника порождается двухэлементным множеством $M = \{a, b\}$, где a – любое отражение, b – порождающий элемент циклической подгруппы $\mathbf{Z}_n$ поворотов. Так как $a^2 = b^n = 1$, то, положив в теореме 9.2 $A = \mathbf{D}_{2(2t+1)}$, где $t \geq 1$, получим

***Следствие* 9.1.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $t \geq 1$ *l-арная группа* $< \mathbf{D}_{2(2t+1)}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где арность* l *определяется равенством* (9.2), *порождается двухэлементным множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, a, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, b, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Положив в теореме 9.2 $A = \mathbf{S}_{2t+1}$, $a = (12)$, $b = (12\ \ldots\ 2t + 1)$, получим следующий результат, включающий в себя при $i = -1$ следствие 7.5.

***Следствие* 9.2.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $t \geq 1$ *l-арная группа* $< \mathbf{S}_{2t+1}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где арность* l *определяется равенством* (9.2), *порождается двухэлементным множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$

$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2\ \ldots\ 2t+1), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}.$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Следующий результат получается из теоремы 8.3 при $m = 2$, $n = 2s - 1$, где $s \geq 2$.

***Теорема* 9.3**. *Пусть группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* a *и* b *такие, что* $a^2 = b^{2s-1} = 1$ *для некоторого* $s \geq 2$, σ – *цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) – *какое-либо решение диофантового уравнения*

$$2x + (2s - 1)y = 1. \tag{9.3}$$

Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (2s-1)(2i-y_0)k+1, \text{ если } x_0 + (2s-1)i > 0, \\ -2(x_0 + (2s-1)i)k+1, \text{ если } x_0 + (2s-1)i < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Так как пара $(s, - 1)$ является одним из решений диофантового уравнения (9.3), то неравенство $x_0 + (2s - 1)i > 0$ принимает вид

$$x_0 + (2s - 1)i = s + (2s - 1)i > 0.$$

Из этого неравенства следует $i > -\dfrac{s}{2s-1}$, откуда $i = 0, 1, 2, \ldots$. Соответственно из неравенства $x_0 + (2s - 1)i < 0$ следует $i < -\dfrac{s}{2s-1}$, откуда $i = -1, -2, \ldots$. Поэтому из теоремы 9.3 вытекает

***Теорема* 9.4**. *Пусть группа* A *порождается множеством* M, *в котором имеются элементы* a *и* b *такие, что* $a^2 = b^{2s-1} = 1$ *для некоторого* $s \geq 2$, σ – *цикл длины* k *из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (2s-1)(2i+1)k+1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -2(s+(2s-1)i)k+1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases} \quad (9.4)$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ *для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Положив в теореме 9.4 $A = \mathbf{S}_{2s-1}$, $a = (12)$, $b = (12 \ldots 2s-1)$, получим следующий результат, включающий в себя при $i = 0$ следствие 7.6.

***Следствие* 9.3.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $s \geq 2$ l*-арная группа* $< \mathbf{S}^k_{2s-1}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где арность* l *определяется равенством* (9.4), *порождается двухэлементным множеством*

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$

$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2 \ldots 2s-1), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Положив в теореме 9.2 $A = \mathbf{S}_{2(t+1)}$, $a = (1\ 2)$, $b = (2\ 3 \ldots 2(t+1))$, получим следующий результат, включающий в себя при $i = 0$ следствие 7.4.

***Следствие* 9.4.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $t \geq 1$ l*-арная группа* $< \mathbf{S}^k_{2(t+1)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (2t+1)(2i+1)k+1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -2(t+1+(2t+1)i)k+1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$

$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (2\ 3 \ldots 2(t+1)), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Положив в теореме 9.4 $A = \mathbf{S}_{2s}$, $a = (1\ 2)$, $b = (2\ 3 \ldots 2s)$, получим следующий результат, включающий в себя при $i = 0$ следствие 7.4.

***Следствие* 9.5.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *и любого целого* $s \geq 2$ l*-арная группа* $< \mathbf{S}^k_{2s}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где*

$$l = \begin{cases} (2s-1)(2i+1)k+1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -2(s+(2s-1)i)k+1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (1\ 2), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$

$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, (2\ 3 \ldots 2s), \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Замечание* 9.1.** Теоремы 9.1 и 9.3 равносильны, так как вторая получается из первой заменой $t = s - 1$, а первая из второй – заменой $s = t + 1$. По этой же причине равносильны теоремы 9.2 и 9.4, следствия 9.2 и 9.3, а также следствия 9.4 и 9.5.

Каждый результат разделов 8 и 9 характеризуется тем, что фигурирующей в нём группе A, порождаемой множеством M, соответствует бесконечно много полиадических групп $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ различных арностей l, порождаемых множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. При фиксированном k эти арности зависят только от m и n. Изменение m и n приводит к иной серии полиадических групп $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ различных арностей l, порождаемых множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. Проиллюстрируем сказанное примером.

***Пример* 9.1.** Так как симметрическая группа $\mathbf{S}_5$ порождается [5] тремя подстановками,

(5 4 3 2 1), (1 2 3 4), (1 2)(3 4 5)

имеющими порядки 5, 4 и 6 соответственно, то согласно теореме 8.2 ($r = 4$), l-арная группа $< \mathbf{S}^2_5, [\ ]_{l,(12),2} >$, где

$$l = \begin{cases} 40i+9, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -40i-9, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается любым из двух следующих трёхэлементных множеств

$$\{((5\ 4\ 3\ 2\ 1), \varepsilon), ((1\ 2\ 3\ 4), \varepsilon), ((1\ 2)(3\ 4\ 5), \varepsilon)\},$$
$$\{(\varepsilon, (5\ 4\ 3\ 2\ 1)), (\varepsilon, (1\ 2\ 3\ 4)), (\varepsilon, (1\ 2)(3\ 4\ 5))\}. \quad (9.5)$$

Множество всех указанных выше арностей l имеет вид

$$\{9, 49, 89, 129, \ldots\} \cup \{31, 71, 111, 151\ldots\}. \quad (9.6)$$

Так как $((1\ 2)(3\ 4\ 5))^6 = (5\ 4\ 3\ 2\ 1))^5 = \varepsilon$, то согласно теореме 8.2 ($r = 5$), l-арная группа $< \mathbf{S}^2_5, [\ ]_{l,(12),2} >$, где

$$l = \begin{cases} 60s+11, \ s = 0, 1, 2, \ldots, \\ -60s-11, \ s = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается любым из трёхэлементных множеств из (9.5). Множество всех указанных выше арностей l имеет вид

$$\{11, 71, 131, \ldots\} \cup \{49, 109, 169, \ldots\}. \quad (9.7)$$

и отличается от (9.6). При этом множества (9.6) и (9.7) имеют непустое пересечение.

Так как равносильные равенства

$$40i + 9 = 60s + 11, \ -40i - 9 = -60s - 11$$

при целых i и s, имеющих одинаковые знаки, невозможны, то для нахождения общих элементов множеств (9.6) и (9.7) достаточно найти i и s, удовлетворяющие равносильным равенствам

$$40i + 9 = -60s - 11, \ -40i - 9 = 60s + 11,$$

то есть решить диофантово уравнение

$$2i + 3s = -1.$$

относительно i и s. Так как пара $(1, -1)$ – частное решение этого уравнения, то

$$(i = 3\nu + 1, \ s = -2\nu - 1)$$

– его общее решение. Таким образом, общие элементы множеств (9.6) и (9.7) находятся по формуле

$$l = \begin{cases} 120\nu+49, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, \\ -120\nu-49, \ \nu = -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Согласно следствию 9.2, при $k = 2$, $t = 2$, $\sigma = (12)$ l-арная группа $< \mathbf{S}^2_5, [\ ]_{l,(12),2} >$, где

$$l = \begin{cases} 20t+11, \ t = 0, 1, 2, \ldots, \\ -20t-11, \ t = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается любым из двухэлементных множеств

$$\{((1\ 2), \varepsilon), ((1\ 2\ 3\ 4\ 5), \varepsilon)\},$$
$$\{(\varepsilon, (1\ 2)), (\varepsilon, (1\ 2\ 3\ 4\ 5))\}.$$

Множество всех указанных выше арностей l имеет вид

$$\{11, 31, 51, 71, \ldots\} \cup \{9, 29, 49, 69, \ldots\}. \quad (9.8)$$

Можно заметить, что все арности из (9.6) и (9.7) содержатся в (9.8), но в (9.8) имеются арности, не входящие ни в (9.6), ни в (9.7). Это объясняется тем, что, с одной стороны,

$$20i + 11 = -40t - 9,\ -20i - 11 = 40t + 9$$

при $i = -2t - 1$, а с другой стороны,

$$20i + 11 = 60s + 11,\ -20i - 11 = -60s - 11$$

при $i = 3s$.

Подчеркнём, что полиадические группы $< \mathbf{S}_5^2, [\ ]_{l,(12),2} >$ арностей (9.8) порождаются двухэлементными множествами, а полиадические группы $< \mathbf{S}_5^2, [\ ]_{l,(12),2} >$ арностей (9.6) и (9.7) порождаются трёхэлементными множествами.

Теорема 8.3 применима в тех случаях, когда группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы u и v такие, что $u^m = v^n = 1$ для некоторых взаимно простых $m \geq 2$ и $n \geq 2$. Если множество M содержит более двух элементов, то теорему 8.3 можно применять несколько раз, что увеличивает выбор арностей l, определяемых формулой (8.3). В этом смысле наибольший интерес представляют группы, у которых все элементы порождающего множества имеют разные порядки, любые два из которых являются взаимно простыми.

Так как простая группа Матье $\mathbf{M}_{24}$, рассматриваемая как группа подстановок, порождается [7] тремя подстановками

$$\alpha = (1\ 2\ 3, \ldots\ 23),$$
$$\beta = (3\ 17\ 10\ 7\ 9)(5\ 4\ 13\ 14\ 19) \times$$
$$\times\ (11\ 12\ 23\ 8\ 18)(21\ 16\ 15\ 20\ 22),$$
$$\gamma = (1\ 24)(2\ 23)(3\ 12)(4\ 16)(5\ 18)(6\ 10) \times$$
$$\times\ (7\ 20)(8\ 14)(9\ 21)(11\ 17)(13\ 22)(19\ 15)$$

порядков 23, 5 и 2 соответственно, то к ней теорема 8.3 может быть применима трижды.

***Следствие* 9.6.** *Для любого цикла* σ *длины* k *из* $\mathbf{S}_k$ *l-арная группа* $< \mathbf{M}_{24}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *где l принимает любое из перечисленных ниже значений*

$$l = \begin{cases} 23(2i+1)k+1, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -2(12+23i)k+1, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases} \quad (9.9)$$

$$l = \begin{cases} 5(2s+1)k+1, & s = 0, 1, 2, \ldots, \\ -2(3+5s)k+1, & s = -1, -2, \ldots, \end{cases} \quad (9.10)$$

$$l = \begin{cases} 23(5t-2)k+1, & t = 1, 2, \ldots, \\ -5(23t-9)k+1, & t = 0, -1, -2, \ldots, \end{cases} \quad (9.11)$$

порождается трёхэлементным множеством

$$\{(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \alpha, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \beta, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j}),$$
$$(\underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{j-1}, \gamma, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{k-j})\gamma\}.$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Положив в теореме 9.2, являющейся следствием из теоремы 8.3, $A = \mathbf{M}_{24}$, $a = \gamma$, $b = \alpha$, получим (9.9).

Положив в теореме 9.2 $A = \mathbf{M}_{24}$, $a = \gamma$, $b = \beta$, получим (9.10).

Положив в теореме 8.3 $A = \mathbf{M}_{24}$, $a = \beta$, $b = \alpha$, $m = 5$, $n = 23$, и, учитывая, что пара $(-9, 2)$ является решением диофантового уравнения $5x + 23y = 1$, получим (9.11). Во всех трёх случаях l-арная группа $< \mathbf{M}_{24}^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ порождается указанным в условии трёхэлементным множеством. □

***Замечание* 9.2**. Значения $t = 1, 2, \ldots$ в (9.11) является следствием неравенства

$$x_0 + nt = -9 + 23t > 0$$

из теоремы 8.3, а значения $t = 0, -1, -2, \ldots$ – следствием неравенства

$$x_0 + nt = -9 + 23t < 0$$

из той же теоремы.

***Замечание* 9.3**. При $k = 2$ формулы (9.9) – (9.11) принимают вид

$$l = \begin{cases} 92i+47, & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -92i-47, & i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} 20s+11, & s = 0, 1, 2, \ldots, \\ -20s-11, & s = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} 230t-91, & t = 1, 2, \ldots, \\ -230t+91, & t = 0, -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Для каждой из этих формул укажем некоторые значения l:

$$\{47, 139, 231, \ldots\} \cup \{45, 137, 229, \ldots\}, \quad (9.12)$$
$$\{11, 31, 51, 71, \ldots\} \cup \{9, 29, 49, 69, \ldots\}, \quad (9.13)$$
$$\{139, 369, 599, \ldots\} \cup \{91, 321, 551, \ldots\}. \quad (9.14)$$

Множества (9.12) и (9.13) имеют непустое пересечение, все элементы которого определяются формулой

$$l = \begin{cases} 460\eta-231, & \eta = 1, 2, \ldots, \\ -460\eta+231, & \eta = 0, -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Имеются общие элементы и у множеств (9.12) и (9.14), все они задаются формулой

$$l = \begin{cases} 460\mu-139, & \mu = 1, 2, \ldots, \\ -460\mu+139, & \mu = 0, -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Аналогично, все общие элементы множеств (9.13) и (9.14) задаются формулой

$$l = \begin{cases} 460\nu-369, & \nu = 1, 2, \ldots, \\ -460\nu+369, & \nu = 0, -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Общих арностей, принадлежащих множествам (9.12), (9.13) и (9.14), не существует, то есть пересечение трёх указанных множеств пусто.

Следующие две теоремы соответствуют теореме 9.1 для простого числа $p = 2t + 1$ и теореме 9.2 для $x_0 = \dfrac{p+1}{2}$, $y_0 = -1$.

***Теорема* 9.5**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы*

a и b такие, что $a^2 = b^p = 1$ для некоторого нечётного простого p, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, (x_0, y_0) – какое-либо решение диофантового уравнения

$$2x + py = 1.$$

Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где

$$l = \begin{cases} p(2i - y_0)k + 1, \text{ если } x_0 + pi > 0, \\ -2(x_0 + pi)k + 1, \text{ если } x_0 + pi < 0, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Теорема* 9.6**. *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что $a^2 = b^p = 1$ для некоторого нечётного простого p, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$. Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где*

$$l = \begin{cases} p(2i+1)k + 1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -(p + 1 + 2pi)k + 1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Сформулируем следствие из теоремы 9.6 для $p = 3$.

***Следствие* 9.7.** *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что $a^2 = b^3 = 1$, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$. Тогда l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где*

$$l = \begin{cases} 3(2i+1)k + 1, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -(4 + 6i)k + 1, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Полагая в следствии 9.7 $k = 2$, получим

***Следствие* 9.8.** *Пусть группа A порождается множеством M, в котором имеются элементы a и b такие, что $a^2 = b^3 = 1$. Тогда l-арная группа $< A^2, [\ ]_{l,(12),2} >$, где*

$$l = \begin{cases} 12i + 7, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \\ -12i - 7, \ i = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

порождается множеством $\mathbf{U}_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* О порождающих множествах l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 69–76.
2. *Гальмак*, *А.М.* Порождающие множества l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшовава. – 2021. – № 1 (57). – С. 35–52.
3. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. *Коксетер*, *Г.С.М.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер. – Москва: Наука, 1980. – 240 с.
6. *Бухштаб*, *А.А.* Теория чисел / А.А. Бухштаб. – Москва: Просвещение, 1966. – 384 с.
7. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – Москва: Мир, 1985. – 352 с.

Поступила в редакцию 24.06.2021.

Проблемы физики, математики и техники, № 3 (48), 2021

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СУБНОРМАЛЬНЫМИ КОММУТАНТАМИ *B*-ПОДГРУПП

В.Н. Княгина

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

FINITE GROUPS WITH SUBNORMAL DERIVED SUBGROUPS OF *B*-GROUPS

V.N. Kniahina

Francisk Skorina Gomel State University

Конечная ненильпотентная группа называется *B*-группой, если в ее фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы нильпотентны. В настоящей работе устанавливается метанильпотентность конечной группы, у которой коммутант каждой *B*-подгруппы субнормален.

Ключевые слова: *конечная группа*, *B-группа*, *субнормальная подгруппа*, *коммутант*.

A finite non-nilpotent group G is called B-group if every proper subgroup of the quotient group $G / \Phi(G)$ is nilpotent. In this paper, it is established that the metanilpotency of a finite group for which the derived subgroup of each B-subgroup is subnormal.

Keywords: *finite group*, *B-group*, *subnormal subgroup*, *derived subgroup.*

Введение

Группой Шмидта называется ненильпотентная конечная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны [1]. Так как группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в любой ненильпотентной конечной группе, то они являются универсальными объектами в теории конечных групп, а их свойства и расположение существенно влияют на строение всей группы. Строение конечных групп по свойствам содержащихся в них подгрупп Шмидта исследовалось, например, в работах Я.Г. Берковича, В.А. Ведерникова, В.Д. Мазурова, В.С. Монахова, С.Ф. Каморникова, В.Н. Княгиной, Э.М. Пальчика, А.Н. Скибы, и других авторов.

Впервые конечные группы, у которых все подгруппы Шмидта субнормальны, изучались в работе В.Н. Семенчука [2], который установил, что такие группы метанильпотентны. В работе В.С. Монахова и В.Н. Княгиной [3] найдены инварианты конечных групп, у которых субнормальны некоторые типы подгрупп Шмидта (p-замкнутые, p-нильпотентные, сверхразрешимые, несверхразрешимые). В этой работе в качестве следствия отмечается нильпотентность коммутанта конечной группы, у которой все подгруппы Шмидта субнормальны. Позже в работе В.А. Ведерникова [4] доказано, что фактор-группа по коммутанту циклическая.

Если подгруппа Шмидта S конечной группы G субнормальна, то ее коммутант S' – также субнормальная подгруппа группы G. В любой p-замкнутой $\{p, q\}$-группе, силовская q-подгруппа которой нециклическая, коммутанты всех подгрупп Шмидта субнормальны, и есть несубнормальные подгруппы Шмидта.

По теореме В.П. Буриченко [5] для каждой конечной группы G найдется группа K и ее абелева нормальная подгруппа N такая, что фактор-группа K / N изоморфна G, и все подгруппы простых порядков и порядка 4 из K содержатся в N. В коммутанте любой подгруппы Шмидта все неединичные элементы имеют простые порядки и порядок 4, поэтому в группе K из теоремы В.П. Буриченко коммутанты всех подгрупп Шмидта содержатся в группе N, поэтому субнормальны в G. Следовательно, любая конечная группа может быть фактор-группой конечной группы с субнормальными коммутантами подгрупп Шмидта.

Я.Г. Беркович предложил [6, с. 461] называть B-группой конечную группу, у которой фактор-группа по подгруппе Фраттини – группа Шмидта. Начальные свойства B-групп установлены в работе В.Н. Княгиной. В строении B-группы и группы Шмидта есть как сходства, так и различия. Так, B-группа, как и группа Шмидта, бипримарна, одна из ее силовских подгрупп нормальна, а другая – циклическая, см. лемму 2.2 [7]. Однако, если в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, то в B-группе это свойство нарушается. Примером служит диэдральная группа порядка 18, она является B-группой и не является группой Шмидта.

В настоящей работе устанавливается метанильпотентность конечной группы, у которой коммутант каждой B-подгруппы субнормален.

1 Вспомогательные результаты

Рассматриваются только конечные группы. В отношении терминологии и обозначений будем придерживаться [8], [9].

Напомним, что группа G называется метанильпотентной, если существует нормальная подгруппа K группы G такая, что K и фактор-группа G / K – нильпотентные группы.

Полупрямое произведение двух подгрупп A и B с нормальной подгруппой A записывается [A]B. Центр, коммутант, подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются соответственно через $Z(G)$, G', $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $Y \le X$ $(Y < X)$ означает, что Y –подгруппа (собственная) группы X.

Следуя [10] будем использовать обозначения $S_{\langle p,q\rangle}$ для группы Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной силовской q-подгруппой. B-группу, у которой $B/\Phi(B)$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, будем называть $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.

Приведем используемые при доказательстве теоремы свойства B-групп.

***Лемма* 1.1** [7, лемма 2.2]. *Пусть B – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, p и Q – ее силовские p- и q-подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) B = [P]Q;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ и $P / \Phi(P)$ – *главный фактор группы B порядка* p^m, где m – *показатель числа p по модулю q*;

(3) $Q = \langle y\rangle$ – *циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(B)$. *Кроме того,*

$$\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q\rangle$$

и

$$Z(B) \le \Phi(B);$$

(4) *если H – нормальная в B подгруппа и $H \ne B$, то H нильпотентна*;

(5) *если M – максимальная в B подгруппа, то либо M нормальна в B и* $M = P \times \langle y^q\rangle$, *либо* $M = [\Phi(P)]Q^x$ *для некоторого* $x \in B$.

***Лемма* 1.2** [7, лемма 2.5]. *Пусть U – нормальная в группе V подгруппа и V / U является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой. Если H – наименьшая в V подгруппа такая, что $HU = V$, то H будет $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.*

Также понадобятся следующие результаты.

***Лемма* 1.3** [11, лемма 8] *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G / N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G – примитивная группа.*

***Лемма* 1.4** [12, лемма 1.1]. *Пусть M – максимальная подгруппа группы G и $K \le M$. Если подгруппа K субнормальна в G, то $K \le M_G$. В частности, если K – максимальная подгруппа в M и M ненормальна в G, то $K = M_G$.*

2 Основной результат

***Теорема* 2.1.** Если в конечной группе коммутант каждой B-подгруппы является субнормальной подгруппой, то группа метанильпотентна.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G.

Если в группе нет B-подгрупп, то она нильпотентна. Пусть R – собственная подгруппа группы G, L – B-подгруппа из R, K – коммутант группы L. По условию теоремы коммутант K субнормален в G, а по лемме 2.41 [9] K субнормален в R. Значит условия теоремы наследуются всеми подгруппами группы G.

Так группа G содержит B-подгруппу L и по условию $1 \ne L'$ субнормальна в G, то группа G непроста. Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим фактор-группу G / N. Если она не содержит B-подгрупп, то она нильпотентна. Пусть в G / N есть B-подгруппа U / N. По лемме 1.2 минимальное добавление U_1 к N будет B-подгруппой, то есть $U = U_1N$. По условию теоремы коммутант подгруппы U_1 субнормален в G. Следовательно, коммутант фактор-группы U / N

$$(U / N)' = U'N / N = (U_1N)'N / N =$$
$$= U_1'N'[U_1, N]N / N = U_1'N'N / N = U_1'N / N$$

субнормален в G / N. Здесь учитывалось, что $[U_1, N]$ – подгруппа группы N, а также, что

$$U' = U_1'N'[U_1, N],$$

[9, лемма 4.8]. Значит условия теоремы распространяются на фактор-группы. По индукции G / N метанильпотентна.

Класс метанильпотентных групп – насыщенная формация. По лемме 1.3 G – примитивная группа, т. е. G = [N]M, $\Phi(G) = 1$, $F(G) = N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа, M – максимальная в G подгруппа и $M_G = 1$.

Если подгруппа M ненильпотентна, то в ней содержится подгруппа Шмидта S. По условию теоремы коммутант группы S субнормален в G. Но по лемме 1.4 S' содержится в $M_G = 1$, противоречие. Если M нильпотентна, тогда $G / N \simeq M$ нильпотентна. Так как G разрешима, то N – элементарная абелева p-подгруппа. Следовательно, G метанильпотентна. □

Пример. Пусть p и q – различные простые числа и G – p-замкнутая $\{p, q\}$-группа с неабелевой силовской q-подгруппой. Такой группой является, например, группа $[E_{5^2}]Q_8$ (SmallGroup (200,44), [13]), здесь E_{5^2} – элементарная абелева группа порядка 25, а Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Поскольку каждая B-подгруппа группы G p-замкнута, то коммутант каждой B-подгруппы субнормален в G.

Этот пример показывает, что в теореме метанильпотентность группы нельзя ослабить до нильпотентности ее коммутанта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмидт*, *О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

2. *Семенчук*, *В.Н.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.

3. *Князина*, *В.Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Князина, В.С. Монахов // Сибирский матем. журн. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

4. *Ведерников*, *В.А*. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 6. – С. 669–687.

5. *Буриченко*, *В.П.* О группах, элементы малых порядков которых порождают малую подгруппу / В.П. Буриченко // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92, № 3. – С. 361–367.

6. *Berkovich*, *Y*. Groups of Prime Power Order, Vol. 3 / Y. Berkovich, Z. Janko. – Walter de Gruyter, 2011. – 639 p.

7. *Князина*, *В.Н.* О произведении *B*-группы и примарной группы / В.Н. Князина // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 52–57.

8. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.

9. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

10. *Монахов*, *В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Укр. матем. конгресс: сб. тр. – Киев: Ин-т матем. НАН Украины. – 2002. – С. 81–90.

11. *Монахов*, *В.С.* Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.

12. *Коновалова*, *М.Н.* Конечные группы с некоторыми субнормальными 2-максимальными подгруппами / М.Н. Коновалова, В.С. Монахов // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – Т. 43, № 2. – С. 75–79.

13. *GAP – Groups*, *Algorithms*, *Programming – a System for Computational Discrete Algebra* [Electronic resource]. – Mode of access: http://www.gap-system.org. – Date of access: 15.02.2021.

Поступила в редакцию 01.07.2021.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБОБЩЕННО σ-СУБНОРМАЛЬНЫЕ И σ-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.Н. Сафонова[1,2], **А.Н. Скиба**[2]

[1]*Белорусский государственный университет*, *Минск*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

GENERALIZED σ-SUBNORMAL AND σ-PERMUTABLE SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

I.N. Safonova[1,2], **A.N. Skiba**[2]

[1]*Belarusian State University*, *Minsk*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$, где $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$. σ-свойством группы называют всякое ее свойство, не зависящее от выбора разбиения σ множества $\mathbb{P}$. Данная работа посвящена дальнейшему изучению σ-свойств группы. Обобщены многие известные результаты.

Ключевые слова: *конечная группа*, *σ-нильпотентная группа*, *σ-разрешимая группа*, *σ-субнормальная подгруппа*, *группа Шмидта.*

Throughout the article, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, i. e. $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$, where $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ and $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ for all $i\neq j$. A σ-property of a group is any of its properties that do not depend on the choice of the partition σ of the set $\mathbb{P}$. This work is devoted to further the study of the σ-properties of a group. A lot of known results are generalized.

Keywords: *finite group*, *σ-nilpotent group*, *σ-soluble group*, *σ-subnormal subgroup*, *Schmidt group.*

Введение

В данной статье все группы конечны и G всегда означает конечную группу; $\mathcal{L}(G)$ обозначает решетку всех подгрупп группы G; $\pi(G)$ – это набор всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппа A группы G называется $\mathfrak{F}w$*-нормальной* (соответственно, $\mathfrak{F}$*-нормальной*) в G, если $A^G/A_G\in\mathfrak{F}$ (соответственно, если либо $A\trianglelefteq G$, либо $A_G\neq A^G$ и каждый главный фактор H/K группы G между A_G и A^G является $\mathfrak{F}$*-центральным* в G [1], т. е.

$$(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))\in\mathfrak{F}.$$

В дальнейшем, σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$, где $\mathbb{P}=\bigcup\limits_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$, и мы полагаем, следуя [2], [3],

$$\sigma(G)=\{\sigma_i \mid \sigma_i\cap\pi(G)\neq\varnothing\}.$$

Кроме того, $\Pi\subseteq\sigma$ и $\Pi'=\sigma\setminus\Pi$. Группа G называется: Π-группой, если $\sigma(H)\subseteq\Pi$; Π-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i\in\Pi$. Символ $O_\Pi(G)$ обозначает подгруппу группы G, порожденную всеми ее Π-подгруппами.

Группа G называется [4]: σ*-разрешимой*, если каждый главный фактор H/K группы G является σ*-примарным*, т. е. H/K является σ_i-группой для некоторого $i=i(H/K)$; σ*-нильпотентной*, если $G=G_1\times\cdots\times G_t$ для некоторых σ-примарных групп $G_1,\ldots,G_t$; *мета*-σ*-нильпотентной*, если G является расширением σ-нильпотентной группы при помощи σ-нильпотентной группы.

Мы используем символы $\mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{N}_\sigma$ для обозначения классов всех σ-разрешимых групп и всех σ-нильпотентных групп соответственно; $\mathfrak{N}_\sigma^2$ – класс всех мета-σ-нильпотентных групп.

Напомним также, что подгруппа A группы G называется σ*-субнормальной* в G [4], если в G имеется цепь подгрупп

$$A=A_0\leq A_1\leq\cdots\leq A_n=G$$

такая, что либо $A_{i-1}\trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – σ-примарная группа для всех $i=1,\ldots,n$.

Понятно, что G разрешима (соответственно нильпотентна) тогда и только тогда, когда G σ-разрешима (соответственно σ-нильпотентна), где $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$; подгруппа A субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ^1-субнормальна в G.

Множество всех σ-субнормальных подгрупп $\mathcal{L}_\sigma(G)$ и, в частности, множество всех субнормальных подгрупп $\mathcal{L}_{sn}(G)$ образуют подрешетки в решетке $\mathcal{L}(G)$ (см. [4] и [5] соответственно). Это важное свойство σ-субнормальных подгрупп предопределило возможность использования таких подгрупп при анализе многих открытых вопросов (см., например, недавние статьи [2]–[4], [6]–[19]).

Широкие серии других подрешеток решетки $\mathcal{L}(G)$ были найдены в недавних статьях [3], [12] (см. также [10]–[22]). В частности, было доказано (см. теорему 1.4 в [3]), что если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация Фиттинга, то набор $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}wn}(G)$, состоящий из всех $\mathfrak{F}w$-нормальных подгрупп, образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$, и если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}n}(G)$, состоящее из всех $\mathfrak{F}$-нормальных подгрупп, также образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

В данной статье мы анализируем дальнейшие применения решеток $\mathcal{L}_\sigma(G)$, $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}wn}(G)$ и $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}n}(G)$, используя для этого следующие обобщения σ-субнормальности.

Определение **0.1.** Мы говорим, что подгруппа H группы G является:

(i) $\mathfrak{F}w\wedge\sigma$*-вложенной* (соответственно $\mathfrak{F}\wedge\sigma$*-вложенной*) в G, если $H = A\cap B$ для некоторой $\mathfrak{F}w$-нормальной (соответственно, для некоторой $\mathfrak{F}$-нормальной) подгруппы A и σ-субнормальной подгруппы B группы G.

(ii) *слабо* $\mathfrak{F}w\wedge\sigma$*-вложенной* (соответственно *слабо* $\mathfrak{F}\wedge\sigma$*-вложенной*) в G, если для некоторой σ-субнормальной подгруппы T и некоторой $\mathfrak{F}w\wedge\sigma$-вложенной (соответственно, $\mathfrak{F}\wedge\sigma$-вложенной) подгруппы S в G имеет место $G = HT$ и $H\cap T \le S \le H$.

Множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}w\wedge\sigma}(G)$, состоящее из всех $\mathfrak{F}w\wedge\sigma$-вложенных подгрупп группы G, образует *meet-подрешётку* [23, стр. 7] решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е. $A\cap B \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}w\wedge\sigma}(G)$ для любых двух подгрупп $A, B \in L_{\mathfrak{F}\wedge sn}(G)$; ещё одна meet-подрешетка в $\mathcal{L}(G)$ – множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}\wedge\sigma}(G)$, состоящее из всех $\mathfrak{F}\wedge\sigma$-вложенных подгрупп в G.

Отметим, что любая $\mathfrak{F}w$-нормальная подгруппа $A = A\cap G$ группы G $\mathfrak{F}w\wedge\sigma$-вложена, а каждая σ-субнормальная подгруппа $B = G\cap B$ является $\mathfrak{F}w\wedge\sigma$-вложенной в группу. Аналогично, каждая $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа $\mathfrak{F}\wedge\sigma$-вложена в группу. Отметим, наконец, что каждая $\mathfrak{F}w\wedge\sigma$-вложенная подгруппа является слабо $\mathfrak{F}w\wedge\sigma$-вложенной и всякая $\mathfrak{F}\wedge\sigma$-вложенная подгруппа является слабо $\mathfrak{F}\wedge\sigma$-вложенной.

Теперь рассмотрим следующий пример, в котором $\mathfrak{U}$ – это класс всех сверхразрешимых групп.

Пример **0.2.** Пусть p, q – простые числа, где q делит $p-1$ и $\{p,q\}\cap\{2,3\} = \varnothing$. Пусть $H = Q\rtimes C_p$, где Q – простой $\mathbb{F}_q C_p$-модуль, точный для C_p. Пусть P – $\mathbb{F}_p H$-модуль, точный для H. Пусть $A = P\rtimes(Q\rtimes A_p)$. Группа PQ сверхразрешима, поскольку q делит $p-1$, поэтому некоторая подгруппа Z группы P порядка p нормальна в PQ.

(1) Пусть $G = A\times A_4$, где A_4 – знакопеременная группа степени 4. Пусть $V = ZQ\times C_2$, где C_2 – подгруппа группы A_4 порядка 2. Тогда $V = AC_2 \cap ZQA_4$.

Пусть теперь $\sigma = \{\{p\},\{q\},\{2,3\},\{p,q,2,3\}'\}$. Тогда AC_2 σ-субнормальна в G и ZQA_4 $\mathfrak{U}w$-нормальна в G, но не $\mathfrak{U}$-нормальна, поскольку $(ZQB)^G = PQA_4$ и $(ZQA_4)_G = A_4$. Следовательно, V – $\mathfrak{U}w\wedge\sigma$-вложенная, но не $\mathfrak{U}\wedge\sigma$-вложенная в G подгруппа.

Наконец, покажем, что V не является ни σ-субнормальной, ни $\mathfrak{F}w$-нормальной в G. Предположим, что V σ-субнормальна в G. Тогда $V\cap A = ZQ$ является σ-субнормальной и, следовательно, субнормальной в PQ. Но тогда $ZQ = ZQ^{PQ} = PQ$, противоречие. Следовательно, V не является σ-субнормальной в G. Аналогично, V не является $\mathfrak{U}w$-нормальной в G, поскольку $V^G/V_G = AA_4/A \simeq A_4$ не является свехразрешимой группой.

(2) Пусть $B = C_p\rtimes C_q$ – неабелева группа порядка pq и $G = A\times B$ и пусть $H = ZC_q$.

Тогда $H = AC_q \cap LB$, где AC_q – $\mathfrak{U}$-нормальная в G подгруппа и LB субнормальна в G. Следовательно, H $\mathfrak{U}\wedge\sigma$-вложена в G, где $\sigma = \sigma^1$. Ясно, что $H_G = 1$ и $H^G = QB$, поэтому H не $\mathfrak{U}$-нормальна в G, так как главный фактор $Q/1$ в G не циклический. Отметим также, что подгруппа H не субнормальна в G [24, гл. А, лемма 14.1 (a)], поскольку $C_q = H\cap B$ не является субнормальной в B.

Приведенные выше наблюдения лежат в основе возможных приложений введенных нами понятий. И такие приложения уже найдены в классическом случае $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$ [25].

В данной работе мы очень кратко анализируем общий случай.

1 Группы с обобщенно субнормальными подгруппами Шмидта

Напомним, что *группа Шмидта* – это ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Хорошо известно что характер вложения подгрупп Шмидта в группу во многом определяет ее структуру.

Нашими первыми результатами являются следующие три теоремы, развивающие многие известные результаты и, в частности, развивающие соответствующие результаты работы [25].

***Теорема* 1.1** [26, теорема A]. *Предположим, что каждая подгруппа Шмидта группы G является* $\mathfrak{F}w \wedge \sigma$*-вложенной в G. Тогда*

(i) *G* σ-разрешима в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\sigma$, и

(ii) *G* является мета-σ-нильпотентной в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\sigma^2$.

***Теорема* 1.2.** *Если G разрешима и каждая подгруппа Шмидта группы G* $\mathfrak{N}_\sigma^2 \wedge \sigma$*-вложена в G, то G является мета-σ-нильпотентной.*

***Следствие* 1.3** (Семенчук [27]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G является субнормальной в G, то G метанильпотентна.*

***Теорема* 1.4** (см. теорему B в [26]). *Предположим, что каждая подгруппа Шмидта группы G является* $\mathfrak{F} \wedge \sigma$*-вложенной в G, где* $\mathfrak{F}$ *– класс всех групп X с σ-нильпотентной производной подгруппой* X'. *Если G разрешима, то производная подгруппа* G' *группы G также σ-нильпотентна.*

***Следствие* 1.5** (Монахов, Княгина [28]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G является субнормальной в G, то производная подгруппа* G' *группы G нильпотентна.*

Напомним, что подгруппа *M* в *G* называется *модулярной*, если *M* – модулярный элемент (в смысле Куроша [23, 2, стр. 43]) решетки $\mathcal{L}(G)$ всех подгрупп в *G*, т. е.

(i) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$ таких, что $X \le Z$ и

(ii) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G, Z \le G$ таких, что $M \le Z$.

Ввиду теоремы 5.2.5 из [23] каждая модулярная подгруппа $\mathfrak{U}$-нормальна в группе. Отсюда и из теоремы 1.4 получаем следующее

***Следствие* 1.6** (Близнец, Селькин [29]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G, то производная подгруппа* G' *группы G нильпотентна.*

2 Группы со слабо $\mathfrak{S}_\sigma w \wedge \sigma$-вложенными подгруппами

Цепь подгрупп $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы *G* называется максимальной, если каждый ее член является максимальной подгруппой в следующим за ним членом этой цепи.

***Теорема* 2.1** [26, теорема C]. *Если в каждой максимальной цепи* $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ *группы G хотя бы одна из подгрупп* M_3, M_2 *или* M_1 *слабо* $\mathfrak{S}_\sigma w \wedge \sigma$*-вложена в G, то G σ-разрешима.*

Этот результат также покрывает многие известные результаты. В частности, имеют место следующие его следствия.

***Следствие* 2.2** (Го, Скиба [6]). *Если в каждой максимальной цепи* $\cdots M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ *группы G хотя бы одна из подгрупп* M_3, M_2 *или* M_1 *σ-субнормальна в G, то G σ-разрешима.*

***Следствие* 2.3** (Спенсер [31]). *Если в каждой максимальной цепи* $\cdots < M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ *группы G одна из подгрупп* M_3, M_2 *или* M_1 *субнормальна в G, то G разрешима.*

***Следствие* 2.4** (Шмидт [32]). *Группа G является разрешимой, если каждая ее 3-максимальная подгруппа модулярна в G.*

3 Усиление основных результатов теории *S*-перестановочных и σ-перестановочных подгрупп

Подгруппа *H* группы *G* называется *S*-перестановочной в *G* [33], [34], если *H* перестановочна с каждой силовской подгруппой *P* группы *G*, т. е. *HP* = *PH*. Подгруппа *H* группы *G* называется π-квазинормальной [35], [36] или π-перестановочной в *G*, если *H* перестановочна с каждой силовской *p*-подгруппой группы *G* для всех $p \in \pi$.

Основными результатами теории *S*-перестановочных и π-перестановочных подгрупп являются следующие теоремы.

***Теорема* 3.1** (Кегель [35]). *Если* π*-подгруппа H группы G* π*-перестановочна в G, тогда H субнормальна в G.*

***Теорема* 3.2** (Дескинз [36]). *Если подгруппа H группы G S-перестановочна в G, тогда секция* H / H_G *нильпотентна.*

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает следующий факт.

***Теорема* 3.3.** *Если подгруппа H группы G S-перестановочна в G, тогда секция* H^G / H_G *нильпотентна.*

***Теорема* 3.4** (Кегель [35]). *Множество всех* π*-перестановочных субнормальных подгрупп группы G является подрешеткой в* $\mathcal{L}(G)$.

***Теорема* 3.5** (Айзекс [37]). *Если* π*-подгруппа H группы G* π'*-перестановочна в G, тогда* H^G *обладает нильпотентной холловой* π'*-подгруппой.*

Первые три результата были обобщены в рамках теории σ-свойств группы в работе [4], которая явилась основной мотивацией к дальнейшему анализу результатов теории *S*-перестановочных и π-перестановочных подгрупп в рамках теории σ-свойств в работах [9], [38]. Существенным недостатком всех полученных в этом направлении результатов является то обстоятельство, что в классическом случае $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$ все они не являются новыми и поэтому они ничего не дают для дальнейшего анализа и развития теории *S*-перестановочных и π-перестановочных подгрупп.

В данной работе мы обсуждаем идею, позволяющую устранить этот недостаток исследований [4], [9], [38].

Мы говорим, следуя [1], что подгруппа *H* группы *G* является:

(i) Π-*полупроектором* в *G*, если HN/N – максимальная Π-подгруппа в G/N для любой нормальной подгруппы *N* группы *G*.

(ii) Π-*проектором* в *G*, если *H* является Π-полупроектором в любой подгруппе группы *G*, содержащей *H*.

В случае, когда $\Pi = \{\sigma_i\}$ для некоторого *i*, мы применяем термин σ_i-*полупроектор* вместо $\{\sigma_i\}$-*полупроектор*.

***Определение* 3.6.** Мы говорим, что $\mathcal{X} = \{X_1,\ldots,X_t\}$ является Π-*накрывающей системой подгрупп для H в G*, если все элементы множества $\mathcal{X}$ являются σ-примарными подгруппами в *G* и для каждого $\sigma_i \in \sigma(H)\cap\Pi$ найдутся индекс *j* и σ_i-полупроектор *U* в *H* такие, что $U \le X_j$.

***Замечание* 3.7.** (1) Если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$ и π – некоторое множество простых чисел, то всякая π-накрывающая система подгрупп $\mathcal{P} = \{P_1,\ldots,P_t\}$ для *H* в *G* состоит из примарных подгрупп группы *G* и для каждого $p \in \pi(H)\cap\pi$ найдутся индекс *j* и силовская *p*-подгруппа *U* в *H* такие, что $U \le X_j$.

(2) Если силовская *p*-подгруппа *P* группы *G* перестановочна с подгруппой *H* группы *G*, то $H \cap P$ – силовская *p*-подгруппа в *H* и поэтому всякое множество $\mathcal{P}$ силовских подгрупп группы *G*, перестановочных с *H*, является π-накрывающей системой подгрупп для *H* в *G* при условии, что $\pi \subseteq \pi(\mathcal{P})$ и $\pi(H) \subseteq \pi$.

***Теорема* 3.8** [26, теорема D]. *Пусть H – Π-подгруппа группы G и пусть $\mathcal{X} = \{X_1,\ldots,X_t\}$ – Π-накрывающая система подгрупп для H в G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если $HX^x = X^xH$ для всех $X \in \mathcal{X}$ и $x \in E := (X_1\cdots X_t)^G$, то подгруппа H является σ-субнормальной в G и $H^G \le O_\Pi(G)$.*

(ii) *Кроме того, секция H/H_E является σ-нильпотентной.*

Ввиду замечания 3.7, мы получаем из теоремы 3.8 следующие классические результаты.

***Следствие* 3.9** (Кегель [35]). *Если π-подгруппа H группы G π-перестановочна в G, то H субнормальна в G.*

***Следствие* 3.10** (Дескинз [36]). *Если подгруппа H группы G S-перестановочна в G, то секция H/H_G нильпотентна.*

***Следствие* 3.11.** *Если подгруппа H группы G S-перестановочна в G, то секция H^G/H_G нильпотентна.*

Теперь, в качестве дальнейшей иллюстрации, мы даем еще три следствия теоремы 3.8 в случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$, которые являются развитием теорем 3.1 и 3.2 соответственно.

***Следствие* 3.12.** *Пусть H – π-подгруппа в G и $\pi(H) = \{p_1,\ldots,p_t\}$. Пусть P_i – силовская p_i-подгруппа в H для всех $i = 1,\ldots,t$. Если в G имеются такие примарные подгруппы $X_1,\ldots,X_t$, что $P_i \le X_i$ и H перестановочна с X_i^x для всех i и $x \in G$, то H субнормальна в G.*

***Следствие* 3.13.** *Пусть H – подгруппа в G и $\pi(H) = \{p_1,\ldots,p_t\}$. Пусть P_i – силовская p_i-подгруппа в H для всех $i = 1,\ldots,t$. Если H перестановочна с P_i^x для всех i и $x \in G$, то H субнормальна в G.*

***Следствие* 3.14.** *Пусть H – подгруппа в G и $\pi(H) = \{p_1,\ldots,p_t\}$. Пусть P_i – силовская p_i-подгруппа в H для всех $i = 1,\ldots,t$. Если в G имеются такие примарные подгруппы $X_1,\ldots,X_t$, что $P_i \le X_i$ и H перестановочна с X_i^x для всех i и $x \in G$, то секция H/H_E, где $E = (X_1\cdots X_t)^G$, нильпотентна.*

В самом общем случае из теоремы 3.8 вытекает следущий новый результат теории σ-свойств конечной группы, усиливающий соответствующие наблюдения работ [4], [38].

***Следствие* 3.15.** *Пусть H – подгруппа в G и пусть $\mathcal{H} = \{H_1,\ldots,H_t\}$ – полное холлово σ-множество в H. Если $HX^x = X^xH$ для всех $X \in \mathcal{H}$ и $x \in G$, то подгруппа H является σ-субнормальной в G.*

Наша следующая теорема является развитием основного результата работы [37].

***Теорема* 3.16** [26, теорема E]. *Пусть H – Π-подгруппа группы G и пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1,\ldots,Y_r\}$ – Π'-накрывающая система подгрупп для H^G в G. Если H^G является Π'-полной группой силовского типа и $HY^x = Y^xH$ для всех $Y \in \mathcal{Y}$ и $x \in G$, то группа H^G обладает σ-нильпотентной холловой Π'-подгруппой.*

***Следствие* 3.17** (Айзекс [37]). *Если* π*-подгруппа H группы G* π'*-перестановочна в G, то* H^G *обладает нильпотентной холловой* π'*-подгруппой.*

***Следствие* 3.18.** *Пусть H –* π*-подгруппа группы G и пусть* $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_r\}$ *–* π'*-накрывающая система подгрупп для* H^G *в G. Если* $HP^x = P^x H$ *для всех* $P \in \mathcal{P}$ *и* $x \in G$*, то группа* H^G *обладает нильпотентной холловой* π'*-подгруппой.*

Теорема 3.8 служит мотивацией для следующего нашего определения.

***Определение* 3.19.** Мы говорим, что подгруппа *H* группы *G* является *строго* σ*-субнормальной* в *G*, если H^G / H_G – σ-нильпотентная группа.

Следующая теорема является развитием теоремы 3.4.

***Теорема* 3.20** [26, теорема F]. (i) *Если подгруппа H является* Π*-полупроектором G, то множество всех сильно* σ*-субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в решетке* $\mathcal{L}(G)$.

(ii) *Если H является* Π*-проектором G, то множество всех* σ*-субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.21** (Кегель [35]). *Множество всех* π*-перестановочных субнормальных подгрупп группы G является подрешеткой в* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.22** (Скиба [4]). *Пусть G –* σ*-полная группа силовского типа. Тогда набор всех* σ*-перестановочных подгрупп группы G образует подрешетку в решетке всех* σ*-субнормальных подгрупп группы G.*

Теорема 3.20 позволяет получить и много новых результатов. В частности, из этой теоремы вытекают следующие факты.

***Следствие* 3.23.** *Если подгруппа H является холловой* π*-подгруппой G, то множество всех сильно субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в решетке* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.24.** *Если подгруппа H является холловой* π*-подгруппой G, то множество всех субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.25.** *Если подгруппа H является холловой* Π*-подгруппой G, то множество всех сильно* σ*-субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в решетке* $\mathcal{L}(G)$.

***Следствие* 3.25.** *Если подгруппа H является холловой* Π*-подгруппой G, то множество всех* σ*-субнормальных подгрупп группы G, перестановочных с H, образует подрешетку в* $\mathcal{L}(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.

2. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble *P*σT-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.

3. *Skiba*, *A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.

4. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

5. *Wielandt*, *H.* Eine Verallgemenerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – № 45. – S. 200–244.

6. *Beidleman*, *J.C.* On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.

7. *Al-Sharo*, *K.A.* On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / K.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.

8. *Hu*, *B.* On finite groups with generalized σ-subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 46, № 2. – P. 1–8.

9. *Murashka*, *V.I.* On a generalization of the concept of *S*-permutable subgroup of a finite group / V.I. Murashka // Acta Math. Hung. – 2018. – Vol. 155, № 2. – P. 221–227.

10. *Hu*, *B.* Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.

11. *Guo*, *W.* Finite groups whose *n*-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Sci. China Math. – 2019. – Vol. 62. – P. 1355–1372.

12. *Skiba*, *A.N.* On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – Vol. 3. – P. 35–47.

13. *On* σ*-subnormality criteria in finite* σ-soluble groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // RACSAM. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4.

14. *On* σ*-subnormal subgroups of factorised finite groups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, X. Yi // J. Algebra. – 2020. – Vol. 559. – P. 195–202.

15. *Yi*, *X.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2020. – Vol. 560. – P. 181–191.

16. *Kamornikov*, *S.F.* On σ-subnormal subgroups of finite groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Siberian Math. J. – 2020. – Vol. 60, № 2. – P. 337–343.

17. *Kamornikov*, *S.F.* On σ-subnormal subgroups of finite 3'-groups / S.F. Kamornikov,

V.N. Tyutyanov // Ukranian Math. J. – 2020. – Vol. 72, № 6. – P. 806–811.

18. *Hu*, *B*. On the σ-nilpotent norm and the σ-nilpotent length of a finite group / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Glasgow Math. J. – 2021. – Vol. 63, № 1. – P. 121–132. – DOI: https://doi.org/10.1017/S0017089520000051.

19. *G-covering subgroup systems for some classes of* σ*-soluble groups* / A-Ming Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2021. – Vol. 585. – P. 280–293.

20. *Hu*, *B*. Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – DOI: https://doi.org/10.1515/jgth-2018-0199.

21. *Chi*, *Z*. On two sublattices of the subgroup lattice of a finite group / Z. Chi, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 6. – P. 1035–1047. – DOI: https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0039.

22. *Chi*, *Z*. On a lattice characterization of finite soluble *PST*-groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Bull. Austral. Math. Soc. – 2019. – Vol. 101, № 2. – P. 247–254. – DOI: https://doi.org/10.1017/S0004972719000741.

23. *Schmidt*, *R*. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de ruyter, 1994.

24. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

25. *A generalization of subnormality* / A-Ming Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Mediterranean J. Math. – In Press.

26. *Safonova*, *I.N*. On some new ideas and results of the theory of σ-properties of a finite group / I.N. Safonova, A.N. Skiba. – Preprint, 2020.

27. *Семенчук*, *В.Н*. Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп / В.Н. Семенчук; в книге: Подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и Техника, 1981. – С. 138–149.

28. *Монахов*, *В.С*. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Князина // Сибирск. матем. ж. – 2004. – Vol. 45, № 6. – С. 1316–1322.

29. *Близнец*, *И.В*. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И.В. Близнец, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – P. 36–38.

30. *Guo*, *W*. Finite groups whose *n*-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Science in China. Math. – 2019. – Vol. 62, № 7. – P. 1355–1372.

31. *Spencer*, *A.E*. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – № 27. – P. 167–173.

32. *Schmid*, *R*. Endliche Gruppen mit vilen modularen Untergruppen / R. Schmid // Abhan. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1970. – № 34. – P. 115–125.

33. *Ballester-Bolinches*, *A*. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2010.

34. *Ballester-Bolinches*, *A*. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute / A. Ballester-Bolinches, J.C. Beidleman, H. Heineken // Special issue in honor of Reinhold Baer (1902-1979). Illinois J. Math. – 2003. – Vol. № 1–2. – P. 63–69.

35. *Kegel*, *O.H*. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – № 78. – S. 205–221.

36. *Deskins*, *W.E*. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – № 82. – P. 125–132.

37. *Isaacs*, *I.M*. Semipermutable π-subgroups / I.M. Isaacs // Arch. Math. – 2014. – № 102. – P. 1–6.

38. *Guo*, *W*. On Π-quasinormal subgroups of finite groups / W. Guo, A.N. Skiba // Monatshefte fur Mathematik. – 2016. – Vol. 185, № 3. – P. 1–11. – DOI: https://doi.org/ 10.1007/s00605-016-1007-9.

Исследования первого автора выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «*Конвергенция* – 2025» *при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь* (*проект* 20211328), *исследования второго автора поддержаны РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта* № Ф20Р-291.

Поступила в редакцию 15.06.2021.

УДК 621.383.51; 621.36

ПОВЫШЕНИЕ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ ФОТОТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ БАТАРЕИ

А.К. Есман, Г.Л. Зыков, В.А. Потачиц

Белорусский национальный технический университет, Минск

IMPROVEMENT OF THE ENERGY EFFICIENCY OF THE PHOTOVOLTAIC THERMOELECTRIC BATTERY

A.K. Esman, G.L. Zykov, V.A. Potachits

Belarusian National Technical University, Minsk

В работе рассмотрено одно из оригинальных решений фототермоэлектрической батареи, реализованной в программной среде COMSOL Multiphysics. При этом учитывались суточные и сезонные изменения температуры окружающей среды и воздействия концентрированного солнечного излучения. Рассчитаны профили распределения температуры в различных сечениях батареи, а также градиенты температуры внутри ее термоэлектрических преобразователей. Показано, что за счет термостабилизации тыльной стороны внешних электродов удалось достичь увеличения выходного напряжения до максимальных значений 0,635 и 0,78 В в январе и июле соответственно.

Ключевые слова: *численное моделирование*, *COMSOL Multiphysics*, *фото- и термоэлектрические преобразователи*, *концентрированное солнечное излучение*, *градиент температуры*, *выходное напряжение.*

The paper considers one of the original solutions of the photovoltaic thermoelectric battery, which was implemented in the COMSOL Multiphysics software environment. Furthermore, the diurnal and seasonal variations of the ambient temperature and the effects of the concentrated solar radiation were taken into account. The temperature patterns in the different sections of the battery as well as the temperature gradient patterns inside the thermoelectric converters are calculated. It is shown that the increasing of the output voltage up to maximum values of 0,635 and 0,78 V in January and July, respectively, was achieved due to the temperature stabilization of the back side of the external electrodes.

Keywords: *numerical simulation*, *COMSOL Multiphysics*, *photo- and thermoelectric converters*, *concentrated solar radiation*, *temperature gradient*, *output voltage.*

Введение

Среди альтернативных и возобновляемых экологически чистых источников энергии особое место занимают фотоэлектрические батареи [1]–[3]. Одним из возможных путей повышения их энергоэффективности является использование концентраторов солнечного излучения. Однако при этом температура фототермоэлектрической батареи значительно повышается за счет радиационного нагрева. Это может приводить к перегреву как отдельных элементов, так и всей батареи в целом, к ухудшению ее эксплуатационных характеристик и сокращению срока ее службы [4], [5]. Использование принудительного охлаждения с целью уменьшения рабочих температур увеличивает с одной стороны стоимость таких батарей, а с другой – делает их громоздкими. В настоящее время ведется поиск компромисса между повышением энергоэффективности и снижением стоимости фототермоэлектрических батарей и уменьшением их габаритов [6].

Целью статьи является разработка и реализация трехмерной модели фототермоэлектрической батареи в программной среде COMSOL Multiphysics, оптимизация ее температурных характеристик и выходного напряжения, получаемых в условиях изменения температуры окружающей среды и воздействия концентрированного солнечного излучения, а также проведение поиска путей повышения эффективности преобразования солнечной энергии в электрическую.

1 Конструкция солнечного элемента

Структура предлагаемой фототермоэлектрической батареи приведена на рисунке 1.1 [7].

В ней полупроводниковые фотоэлектрические элементы 1 соединены между собой через металлические слои 5 (размером ($x = 25 \div 90$) × × ($y = 1000$) × ($z = 700 \div 1000$) мкм, рисунки 1.1 и 1.2) из молибдена, расположенные на поверхности раздела этих элементов. Каждый из фотоэлектрических элементов 1 включает диффузионные легированные слои кремния p-типа 2 и n-типа 3, размером ($x = 0{,}8$) × ($y = 1000$) × ×($z = 500$) мкм каждый. Структурированные диэлектрические покрытия 4 (размером ($x = 300$) × × ($y = 1000$) × ($z = 0{,}5$) мкм) из TiO_2 нанесены на лицевую сторону диффузионных легированных слоев кремния p-типа 2 и n-типа 3, а также на полупроводниковый материал 6 (размером ($x = 298{,}4$) × ($y = 1000$) × ($z = 0{,}5$) мкм), выполненный из кремния. Зеркальные покрытия 7, изготовленные из алюминия, расположены на лицевой внешней поверхности металлических слоев 5 и оптически связаны через структурированные диэлектрические покрытия 4 с диффузионными легированными слоями кремния *p*-типа 2 и *n*-типа 3, а также с полупроводниковым материалом 6 фотоэлектрических элементов 1. Термоэлектрические преобразователи 8 на основе $CuInSe_2$ с внешними 10 и внутренними 11 электродами из молибдена термически связаны с металлическими слоями 5 из молибдена через слои диэлектрика 9 (размером $(x = 27 \div 92) \times (y = 1000) \times (z = 1)$ мкм), выполненные из Al_2O_3.

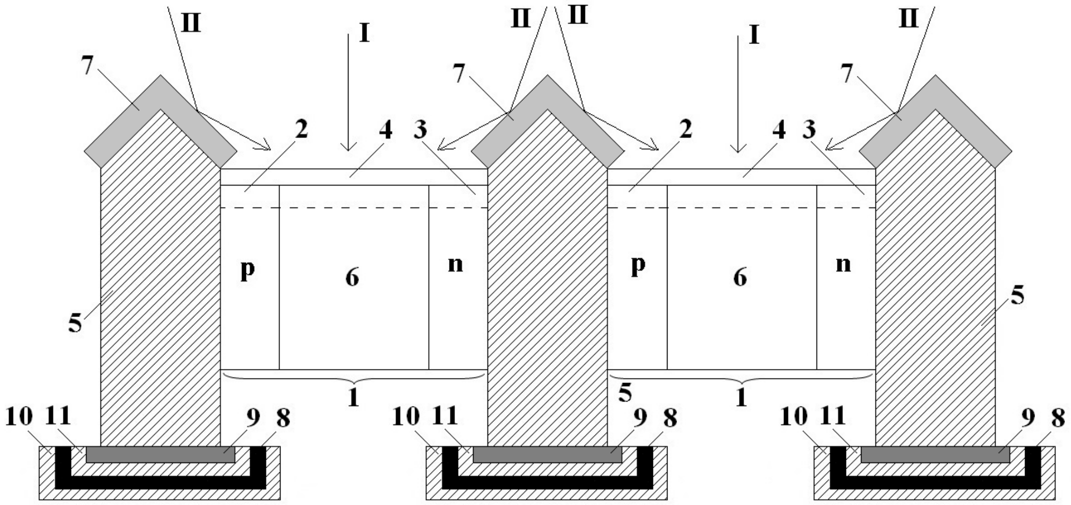


Рисунок 1.1 – Структура фототермоэлектрической батареи:
1 – фотоэлектрический элемент,
2 и 3 – диффузионные легированные слои кремния *p*- и *n*-типа,
4 – структурированное диэлектрическое покрытие из TiO_2,
5 – металлический слой из молибдена,
6 – полупроводниковый материал из кремния,
7 – зеркальное покрытие из алюминия,
8 – термоэлектрический преобразователь на основе $CuInSe_2$,
9 – слой диэлектрика на основе Al_2O_3,
10 и 11 – внешний и внутренний электроды из молибдена

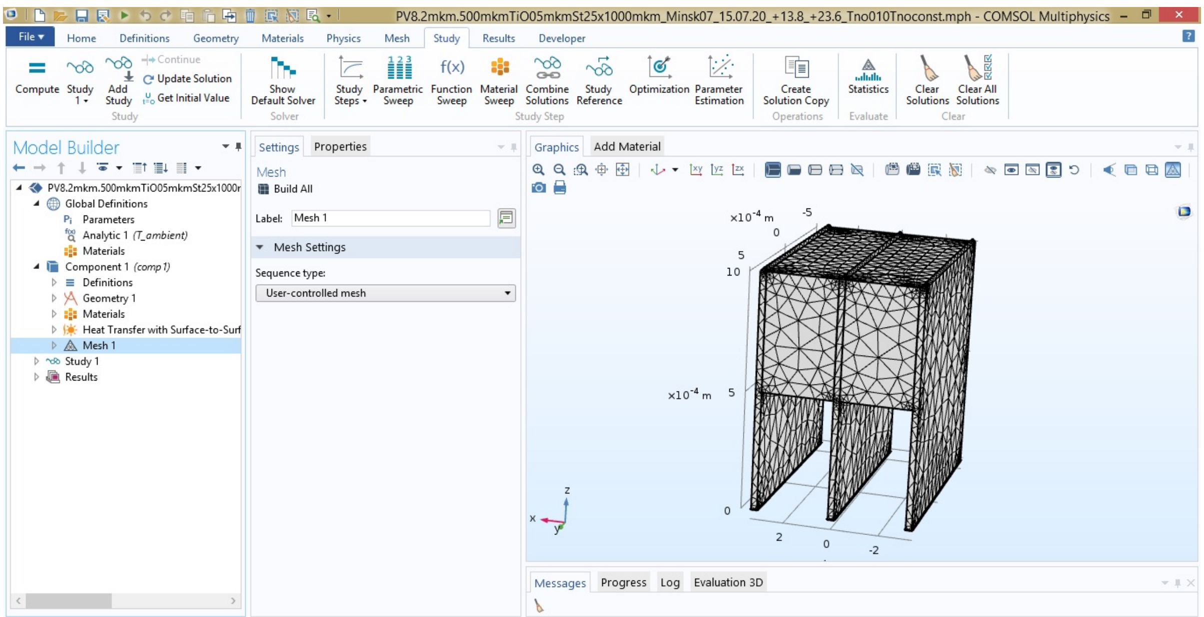


Рисунок 1.2 – Снимок экрана программной среды COMSOL Multiphysics, на котором показано разбиение фототермоэлектрической батареи на конечные элементы в форме тетраэдров

2 Алгоритм работы фототермоэлектрической батареи

Фототермоэлектрическая батарея работает следующим образом. Входное солнечное излучение, падающее на поверхность структурированного диэлектрического покрытия 4, проникает через него непосредственно (лучи I на рисунке 1.1) и после отражения от зеркального покрытия 7 (лучи II на рисунке 1.1). Поэтому, благодаря просветляющему действию структурированного диэлектрического покрытия 4, это излучение практически полностью поступает внутрь фотоэлектрических элементов 1 и поглощается в них, вызывая фотогенерацию носителей зарядов. Одна часть полученных зарядов разделяется полями *p-n* переходов фотоэлектрических элементов 1, создавая фото-ЭДС, а другая – рекомбинирует, нагревая полупроводниковый материал 6. Тепловая энергия полупроводникового материала 6 за счет теплопередачи нагревает металлические слои 5 по отношению к температуре окружающей среды. В результате внутри термоэлектрических преобразователей 8 появляется градиент температуры, так как внешние электроды 10 находятся при температуре окружающей среды, вызывая появление соответствующей термо-ЭДС – тем самым повышая КПД устройства.

3 Компьютерное моделирование

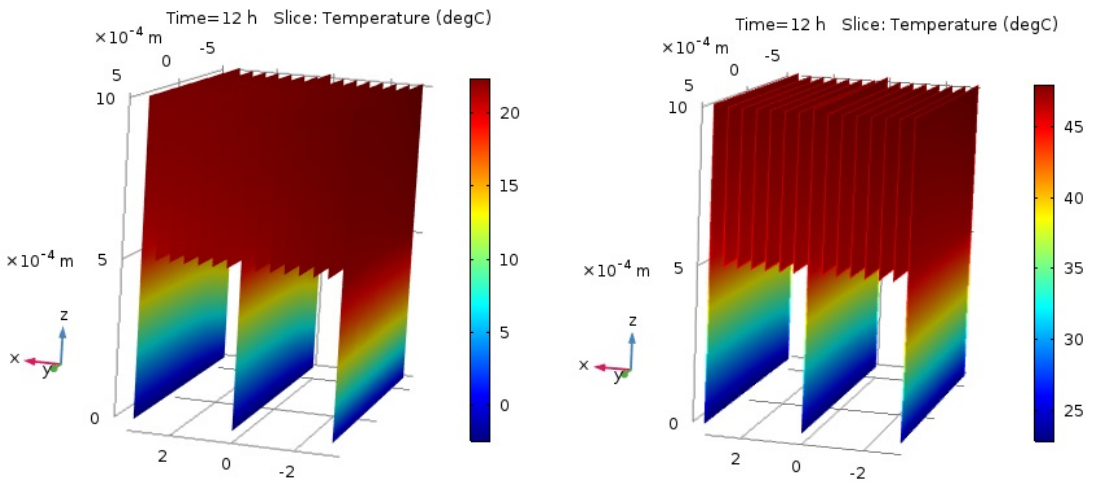
Для моделирования характеристик предлагаемой фототермоэлектрической батареи использовалась программная среда COMSOL Multiphysics, которая позволяет учитывать все из заданных и/или изменяемых параметров при решении большинства прикладных задач. Моделирование проводилось с помощью модуля «Теплопередача» (Heat Transfer Module) данной программной среды [8]–[10], в которой была реализована численная модель фототермоэлектрической батареи и рассчитаны её характеристики при наличии и отсутствии стабилизации её температуры. Наличие термостабилизации означает, что температура внешних электродов 10 поддерживается равной температуре окружающей среды. Расчеты выполнялись для географических координат г. Минска. При моделировании учитывались усредненные суточные и сезонные изменения как энергии солнечного излучения, так и температуры окружающей среды, а также плотность мощности солнечного излучения спектра AM1,5, максимальные значения которой варьировались в пределах от 1 до 500 кВт/м^2 при использовании концентраторов. В климатологии обычно рассматривается суточный ход температуры воздуха, осредненный за многолетний период, когда непериодические изменения температуры взаимно погашаются и кривая суточного хода близка к синусоидальной.

Таким образом, фототермоэлектрическая батарея в процессе моделирования разбивалась на конечные элементы в форме тетраэдров (рисунок 1.2). Плотность сетки для каждого её слоя настраивалась с учетом геометрической конфигурации тетраэдров путем выбора одного из девяти предустановленных режимов: от чрезвычайно точного до чрезвычайно грубого. При необходимости использования более мелкой сетки в какой-либо области разбиение выполнялось вручную. Технические средства программы позволяли обрабатывать и визуализировать расчетные числовые данные для всех рассматриваемых режимов работы фототермоэлектрической батареи.

4 Анализ полученных результатов

Согласно полученным результатам, при эксплуатации фототермоэлектрической батареи без термостабилизации в условиях изменения температуры окружающей среды и плотности мощности солнечного излучения происходит её неравномерный нагрев. Увеличение плотности мощности солнечного излучения, максимальное значение которой варьируется в пределах 1 кВт/м^2 $\leq P_{max} \leq$ 500 кВт/м^2, приводит к изменению температуры фототермоэлектрической батареи в пределах от 36,5° C до температур, соответствующих выходу её из строя. Как следует из [1], [11], рабочие температуры фототермоэлектрических батарей в различных системах могут изменяться в пределах от 25° C до 60° C в зависимости от используемых материалов, конструктивных особенностей и концентрации солнечного излучения. Стабилизация температуры тыльной стороны внешних электродов фототермоэлектрической батареи на уровне температуры окружающей среды позволяет снизить температуру фототермоэлектрической батареи (до 22,8° C в январе (рисунок 4.1, *а*) и до 48,2° C в июле (рисунок 4.1, *б*) при P_{max} = 500 кВт/м^2) и, в частности, температуру термоэлектрического преобразователя (до –0,7° C в январе и до 24,7° C в июле при P_{max} = 500 кВт/м^2) и увеличить (в ~ 10 раз в июле и в ~ 20 раз в январе) градиент температуры внутри термоэлектрических преобразователей (кривые 2 и 2′, рисунок 4.2). Следует отметить, что существенный градиент температуры возникает внутри термоэлектрических преобразователей независимо от температуры окружающей среды.

Расчеты позволили оценить на сколько отличается количество падающей солнечной радиации на юго-восточную и юго-западную стороны фототермоэлектрической батареи между собой и на остальные стороны. При этом юго-восточная сторона это количество солнечной радиации получает около 12 часов дня, а юго-западная сторона – около 14 часов дня. Это приводит к тому, что без учета облачности максимальные градиенты температуры достигаются сначала с юго-восточной стороны (в 12 часов дня), а затем – с юго-западной стороны (около



а) *б*)

Рисунок 4.1 – Профили распределения температуры в фототермоэлектрической батарее в сечениях, параллельных плоскости *YZ*, в 12 часов дня в серединах января (*а*) и июля (*б*) в условиях воздействия концентрированного солнечного излучения, максимальное значение плотности мощности которого составляло 500 кВт/м^2

14 часов). С северо-восточной и северо-западной сторон градиенты температуры ниже на ~ 12%. В работе приведены только зависимости градиентов температуры для юго-восточной стороны термоэлектрических преобразователей. Для всех остальных сторон зависимости градиентов температуры аналогичны, только смещены по времени (северо-западная и юго-западная стороны) и/или максимальные значения градиентов температуры ниже (северо-восточная и северо-западная стороны).

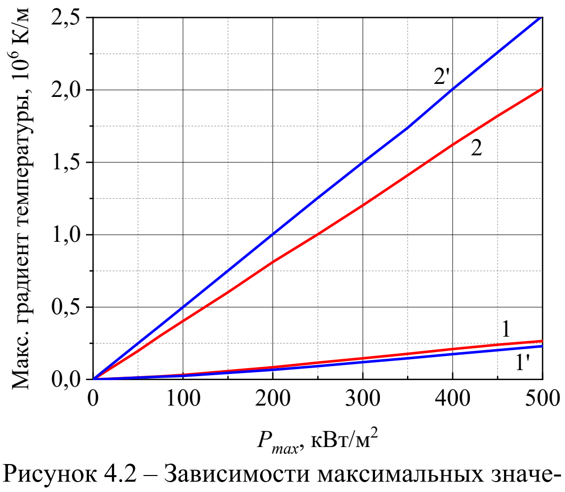


Рисунок 4.2 – Зависимости максимальных значений градиента температуры внутри термоэлектрических преобразователей фототермоэлектрической батареи при отсутствии (кривые 1 и 1′) и наличии (кривые 2 и 2′) стабилизации температуры тыльной стороны внешних электродов в серединах января (кривые 1′ и 2′) и июля (кривые 1 и 2) от плотности мощности солнечного излучения, максимальные значениями которых варьируются от 1 до 500 кВт/м^2

Как следует из проведенных расчетов, максимальные значения градиента температуры как в середине января (2,5×10^6 К/м), так и в середине июля (2×10^6 К/м) достигаются около 12 часов дня при воздействии концентрированного солнечного излучения, максимальное значение плотности мощности которого составляло 500 кВт/м^2. В январе максимальные значения градиента температуры на ~ 20 % выше, чем в июле (рисунок 4.2), что обусловлено, с одной стороны, наличием стабилизации температуры тыльной стороны внешних электродов фототермоэлектрической батареи на уровне температуры окружающей среды, которая в январе ниже, чем в июле, и, с другой стороны, воздействием концентрированного солнечного излучения на все элементы фототермоэлектрической батареи в течение светового дня. Однако вследствие того, что световой день в июле больше, чем в январе, суммарный энергетический выигрыш, получаемый в течение суток в июле внутри термоэлектрического преобразователя фототермоэлектрической батареи, оказывается больше, чем в январе.

Кроме того, варьируя высотой (z = 0,7 … 1,0 мм) и шириной (x = 25 … 90 мкм) металлических слоев 5, были получены их оптимальные значения z = 1,0 мм (рисунок 4.3, *а*) и x = 25 мкм (рисунок 4.3, *б*) (с точки зрения получения максимально возможных значений градиента температуры внутри термоэлектрического преобразователя). Все зависимости, приведенные на рисунке 4.3, *а*, получены при ширине металлических слоёв 5 x = 40 мкм, а зависимости, приведенные на рисунке 4.3, *б*, получены при высоте металлических слоёв 5 z = 0,75 мм. Как видно из полученных зависимостей на рисунке 4.3, градиент температуры в январе (кривые 1′ и 2′,

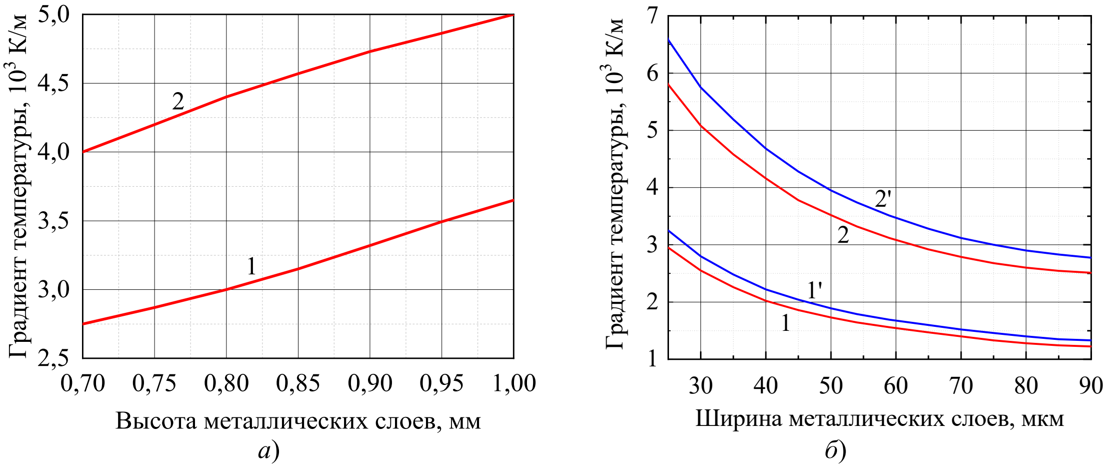


Рисунок 4.3 – Зависимости градиента температуры между обеими поверхностями термоэлектрического преобразователя фототермоэлектрической батареи от высоты (*а*) и ширины (*б*) её металлических слоёв в середине июля (кривые 1 и 2) и января (кривые 1′ и 2′) при плотностях мощности солнечного излучения, максимальные значения которых равны 1 (кривые 1 и 1′) и 2 (кривые 2 и 2′) кВт/м^2

рисунок 4.3, *б*) больше (~ 10%), чем в июле (кривые 1 и 2, рисунок 4.3, *а*).

Достигнутые максимальные значения градиентов температуры (рисунок 4.2) между внутренними и внешними электродами термоэлектрических преобразователей фототермоэлектрической батареи при воздействии на нее концентрированного солнечного излучения с P_{max} = = 500 кВт/м^2 приводят к тому, что разность потенциалов, генерируемая между этими электродами, в январе и июле также достигает около 12 часов дня максимальных значений, которые соответственно равны 81 и 65 мВ. Суммарная генерируемая разность потенциалов в течение суток (при P_{max} = 500 кВт/м^2) в середине января и июля составляет ~ 0,635 и 0,78 В соответственно.

Заключение

Разработанная и реализованная трехмерная модель предложенной фототермоэлектрической батареи позволила рассчитать и оценить ее температурные характеристики и выходные напряжения в условиях суточных и сезонных изменений, как энергии солнечного излучения, так и температуры окружающей среды, а также воздействия концентрированного солнечного излучения AM1,5. Максимальные значения плотности мощности изменялись в пределах от 1 до 500 кВт/м^2. Стабилизация температуры тыльной стороны внешних электродов фототермоэлектрической батареи на уровне температуры окружающей среды позволяет уменьшить неравномерность нагрева поверхности, снизить температуру фототермоэлектрической батареи (до +22,8° C в январе и до +48,2° C в июле при максимальных значениях плотности мощности P_{max} = 500 кВт/м^2 концентрированного солнечного излучения) и увеличить (в ~ 7,6 раз в июле и в ~ 10,9 раз в январе) градиент температуры внутри термоэлектрических преобразователей. Согласно полученным расчетам, максимальные значения градиента температуры термоэлектрического преобразователя фототермоэлектрической батареи в январе на ~ 20% выше, чем в июле. Однако суммарный энергетический выигрыш, получаемый в течение суток в июле внутри термоэлектрического преобразователя фототермоэлектрической батареи, оказывается больше, чем в январе. При этом амплитуда выходного напряжения, генерируемого термоэлектрическим преобразователем, достигает около 12 часов дня максимальных значений: ~ 81 мВ в январе и 65 мВ в июле. Суммарная амплитуда выходного напряжения фототермоэлектрической батареи, генерируемого термоэлектрическим преобразователем в течение суток, в серединах января и июля составляет 0,635 и 0,78 В соответственно. Проведенный анализ показал, что рассмотренная фототермоэлектрическая батарея в условиях интенсивного солнечного излучения позволяет не только увеличить энергоотдачу с единицы площади, поднять КПД, но и оптимизировать её конструкцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burger*, *T.* Thermophotovoltaic energy conversion: materials and device engineering. In: Nanoscale Energy Transport. Emerging phenomena, methods and applications / T. Burger, C. Sempere, A. Lenert. – London: IOP Publushing LTD, 2020. – Chapter 17. – P. 17-1–17-26.

2. *Ultu*, *Z.* Thermophotovoltaic applications in waste heat recovery systems: example of GaSb cell / Z. Ultu // International Journal of Low-Carbon Technologies. – 2020. – Vol. 15, № 2. – P. 277–286.

3. *Ferrari*, *C.* Thermo-Photo-Voltaic generator development / C. Ferrari, F. Melino // Energy Procedia. – 2014. – Vol. 45. – P. 150–159.

4. *Saxena, P.* COMSOL simulation of heat distribution in perovskite solar cells: coupled opticalelectrical-thermal 3-D analysis / P. Saxena, N.E. Gorji // IEEE Journal of Photovoltaics. – 2019. – Vol. 9, № 6. – P. 1693–1698.

5. *Cotfas*, *P.A.* Comprehensive review of methods and instruments for photovoltaic-thermoelectric generator hybrid system characterization / P.A. Cotfas, D.T. Cotfas // Energies. – 2020. – Vol. 13, № 22. – P. 6045-1–6045-32.

6. *Raut*, *P.D.* Recent developments in photovoltaic-thermoelectric combined system / P.D. Raut, V.V. Shukla, S.S. Joshi // International Journal of Engineering & Technology. – 2018. – Vol. 7, № 4. – P. 2619–2627.

7. *Фототермоэлектрическая батарея*: пат. 19928 Респ. Беларусь: МПК H 01L 31/05 / А.К. Есман, В.К. Кулешов, Г.Л. Зыков и др.; дата публ. 20.02.2016.

8. *Analyze thermal effects with the Heat Transfer Module*. COMSOL, Inc. USA [Electronic resource]. – Mode of access: https://www.comsol.com/heat-transfer-module. – Date of access: 09.03.2021.

9. *Simulation of tandem thin-film solar cell on the basis of* $CuInSe_2$ / A.K. Esman, V.K. Kuleshov, V.A. Potachits, G.L. Zykov // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. – 2018. – Т. 61, № 5. – С. 385–395.

10. *Тонкопленочный солнечный элемент с использованием термоэлектрического слоя* / А.К. Есман, Г.Л. Зыков, В.А. Потачиц, В.К. Кулешов // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 39–44.

11. *Temperature regulation of photovoltaic module using phase change material*: *a numerical analysis and experimental investigation* / H. Mahamudul [et al.] // International Journal of Photoenergy. – 2016. – Vol. 2016. – P. 5917028-1–5917028-8.

Поступила в редакцию 02.04.2021.

УДК 621.372.512

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.О. Исаев, П.В. Бойкачев

Военная академия Республики Беларусь, Минск

ANALYTICAL MATHEMATICAL MODELING OF INPUT CHARACTERISTICS OF RADIO ENGINEERING SYSTEMS

V.O. Isaev, P.V. Boykachev

Military Academy of the Republic of Belarus, Minsk

Представлены результаты проведения обзора и анализа способов представления входных характеристик радиотехнических систем. Представлены результаты работы способа нахождения адекватных математических моделей радиотехнических устройств в аналитическом виде.

Ключевые слова: *аппроксимация, частотные характеристики, математические модели радиотехнических систем, широкополосное согласование, радиотехника.*

The results of the review and analysis of ways to represent the input characteristics of radio engineering systems are considered. The results of the work of the method for finding adequate mathematical models of radio engineering devices in an analytical form are presented.

Keywords: *approximation, frequency characteristics, mathematical models of radio engineering systems, broadband matching, radio engineering.*

Введение

Значительный прогресс в развитии радиотехнических систем (РТС) связан с использованием широкополосных и сверхширокополосных сигналов. Для эффективного применения таких сигналов к трактам РТС предъявляются особые требования, такие как минимальные искажения амплитудного и фазового спектра данных сигналов. Важной составляющей обеспечения указанных требований является решение задачи оптимального синтеза устройств фильтрации и согласования в приемо-передающих трактах РТС. Эта задача заключается в поиске структуры и номиналов элементов реактивной цепи, обеспечивающих необходимую форму частотной характеристики в заданном диапазоне частот при комплексных сопротивлениях генератора и нагрузки. Решение подобных задач имеет большую практическую значимость, так как обеспечивает оптимальные параметры приемо-передающих трактов, работающих в широком диапазоне частот.

Современные методы широкополосного согласования характеризуются значительными возможностями по разработке радиотехнических устройств (РТУ) различного назначения с высокими техническими характеристиками [1]. Независимо от используемых методов первый этап синтеза согласующих цепей заключается в исследовании и задании исходных свойств согласуемой нагрузки. Как правило, входные характеристики согласуемой нагрузки представлены в виде дискретных точек реальной $\operatorname{Re} Z(\omega)$ и мнимой $\operatorname{Im} Z(\omega)$ составляющих функции, описывающей рассматриваемый параметр комплексного сопротивления – $Z(\omega)$ [2]. Такое представление не всегда является достаточно информативным и не применимо для использования во многих современных методах синтеза широкополосных согласующих и частотно-избирательных устройств, требующих эквивалентные схемы или аналитические представления $Z(\omega)$ согласуемых нагрузок. По этой причине проблема выбора способа представления нагрузок достаточно давно привлекает внимание исследователей и разработчиков радиоаппаратуры [10]–[12].

Таким образом, возникает интерес в реализации современной методики представления согласуемых нагрузок, эффективной в решении задачи синтеза радиотехнических устройств с оптимальными частотными характеристиками.

1 Представление импедансных характеристик РТУ в решении инженерно-технических задач

Часто для решения задач синтеза широкополосных согласующих цепей используются аналитические методы [1], [3]–[7], в которых согласуемая нагрузка представляется в виде эквивалентной схемы, содержащей в своей структуре фиксированные параметры значений элементов в сосредоточенном элементом базисе. С помощью эквивалентной схемы можно представить входное сопротивление большинства комплексных нагрузок (антенн, входных сопротивлений транзистора, преобразователей, усилителей и др.) в рабочей полосе частот. Например, в [8] предложено классифицировать согласуемые нагрузки на основе анализа частотной зависимости активной части входного сопротивления или проводимости. Данная классификация делится на два типа. К согласуемым нагрузкам первого типа относят эквивалентные схемы, у которых активная часть сопротивления или проводимости можно считать постоянной в рабочей полосе частот. В качестве эквивалентных схем первого типа используются согласуемые нагрузки, содержащие в своей структуре последовательные или параллельные *RLC*-контуры, частным случаем которых являются эквивалентные схемы, содержащие в своей структуре один реактивный и один пассивный элемент (рисунок 1.1, *а*).

К согласуемым нагрузкам второго типа относят эквивалентные схемы, у которых в рабочей полосе частот происходит изменение активной части входного сопротивления или проводимости. На рисунке 1.1, *б*, представлены примеры эквивалентных схем согласуемых нагрузок второго типа, содержащих два произвольно включенных реактивных элемента и одного пассивного элемента.

Для расчета реактивных элементов согласуемых нагрузок первого типа (рисунок 1.1, *а*) используется условие совпадения реактивных сопротивлений эквивалента и заданной согласуемой нагрузки (в частности, антенны) на двух частотах [9]. При этом активное сопротивление эквивалента согласуемой нагрузки берется равной вещественной части комплексного сопротивления нагрузки. Если последнее изменяется с частотой, то активное сопротивление выбирают равным $R_{\text{н}} = \sqrt{R_{\text{н max}} R_{\text{н min}}}$, где $R_{\text{н max}}$ и $R_{\text{н min}}$ – максимальное и минимальное значение вещественной части комплексного сопротивления согласуемой нагрузки.

Эквиваленты второго типа (рисунок 1.1, *б*) упрощенно рассчитываются по уравнениям, соответствующим равенству активных частей входного сопротивления нагрузки и эквивалента на двух частотах, а также – равенству разностей реактивных частей на этих же частотах и представлены в [8], [9].

Однако на практике в случае сложной зависимости входного сопротивления расчет схем согласуемых нагрузок, содержащих более двух реактивных элементов, приводит к трудностям вычислительного процесса, так как расчетные выражения в [8], [9] преобразуются в систему нелинейных уравнений. Поэтому в прикладном плане обычно решаются задачи согласования нагрузок, содержащих не более двух реактивных элементов, для расчета которых используются результаты измерений на двух частотах. Это зачастую приводит к низкой точности воспроизведения целевых функций, описывающих реальные нагрузки [11].

Некоторые из этих трудностей стало возможным обойти с появлением работ [10]–[12]. Так, авторами [10], [11] предложен подход, позволивший получить шестиэлементную эквивалентную схему входного сопротивления транзистора ATF-34143 [10] и антенного устройства КВ диапазона АШ-4 [11] в виде нагрузки дарлингтоновского типа, содержащую во входной цепи последовательно включенный резистор $R_{н}$ (рисунок 1.2). На рисунке 1.3 представлены зависимости действительной и мнимой составляющих входного сопротивления рассчитанной эквивалентной схемы заданного транзистора [10] (рисунок 1.3, *а*) и антенного устройства КВ диапазона АШ-4 [11] (рисунок 1.3, *б*).

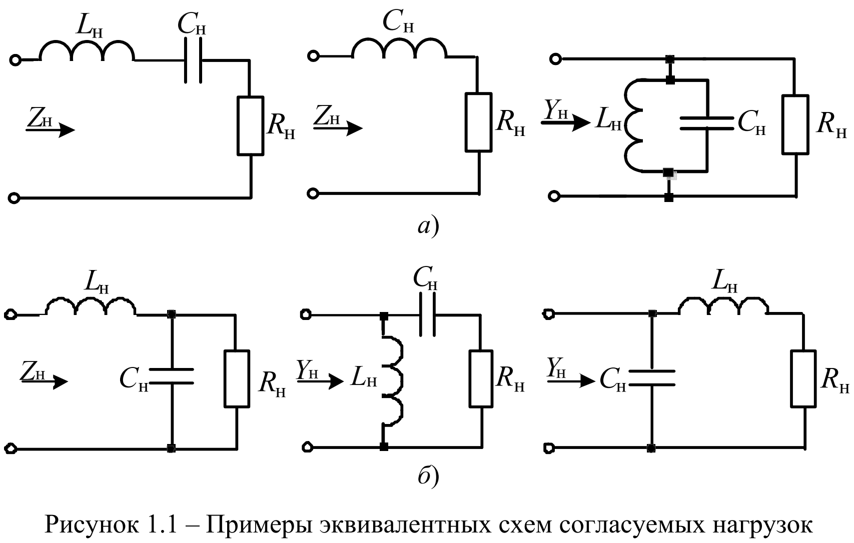


Рисунок 1.1 – Примеры эквивалентных схем согласуемых нагрузок первого (*а*) и второго типа (*б*)

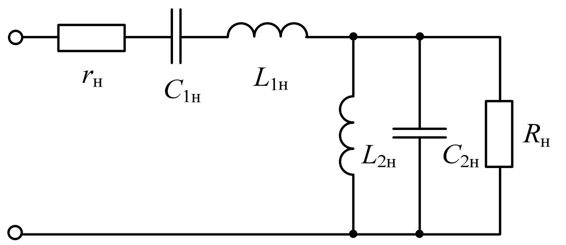


Рисунок 1.2 – Модель входного сопротивления транзистора ATF-34143 и антенны АШ-4

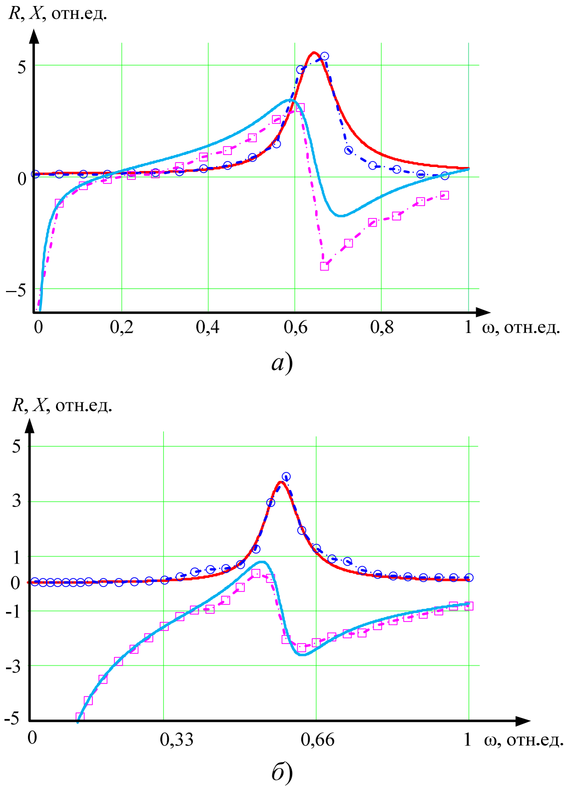


Рисунок 1.3 – Функции входного сопротивления транзистора ATF-34143 (*а*) и антенны АШ-4 (*б*) (символы), и их моделей из [10], [11] (сплошная линия)

Недостатком предложенных подходов является то, что на начальном этапе требуется внимательно анализировать исходные данные и угадывать структуру эквивалентной схемы, которая, в представленных подходах, служит моделью биполярных транзисторов, туннельных диодов, кварцев и штыревых антенн [8].

Для обеспечения большего числа элементарных каскадов в эквивалентной схеме согласуемой нагрузки в [12] предложен альтернативный подход моделирования на основе аппарата *T*-матриц. В качестве исходных данных при моделировании нагрузок являются параметры волновой матрицы передачи моделируемого четырехполюсника, заданной аналитически $T(\omega)$ или дискретно $T(\omega_j)$ в рабочей полосе частот. Эквивалентная схема согласуемой нагрузки представляется в виде четырехполюсника с лестничной структурой, состоящей из чередующихся элементарных *Z*- и *Y*-каскадов (рисунок 1.4).

В качестве примера в [12] рассчитан эквивалент антенны типа ВГД (вибратор горизонтальный диапазонный) в диапазоне частот от 6 до 27 МГц [13]. С использованием методики, представленной выше, получен эквивалент антенны типа ВГД (рисунок 1.5) и ее частотные характеристики входного сопротивления (рисунок 1.6).

Анализ представленных результатов позволяет сделать вывод о том, что изложенные выше подходы позволяют рассчитать модели нагрузок не всегда с достаточной точностью и/или применимы только для типовых нагрузок, основные эквиваленты которых представлены в [9].

Основная проблема решения инженерно-технических задач заключается в том, что характеристики современных РТУ, которые обычно определяют с помощью экспериментальных исследований, имеют сложный вид и содержат случайные составляющие самой различной природы, обусловленные как статистической природой изучаемых процессов, так и внешними факторами процессов измерений и преобразования данных (шумы, помехи, дестабилизирующие факторы и ошибки измерений).

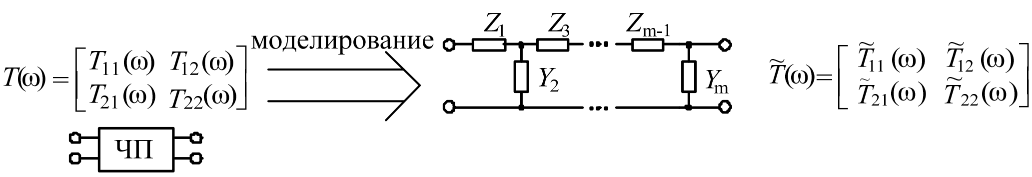


Рисунок 1.4 – Процесс моделирования схемы эквивалентной нагрузки

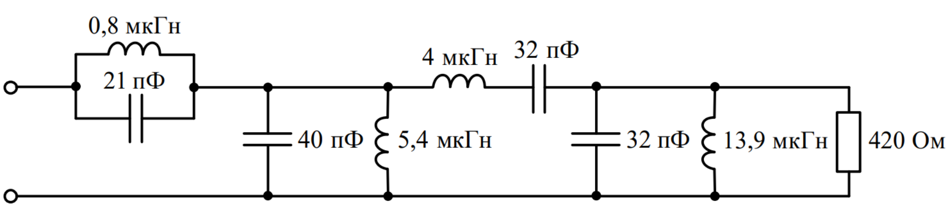


Рисунок 1.5 – Рассчитанный эквивалента антенны ВГД

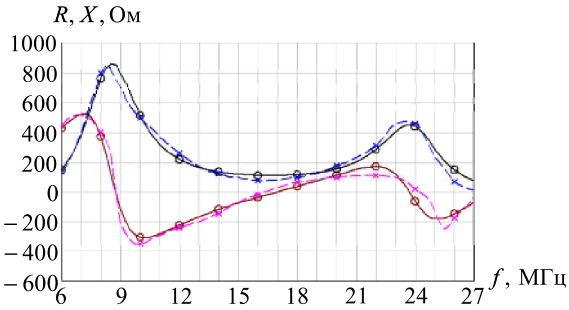


Рисунок 1.6 – Функции входного сопротивления антенны ВГД (штриховая линия) и ее рассчитанного эквивалента (сплошная линия)

В качестве примера рассмотрим входное сопротивление антенного устройства (АУ) AD-25/CW-3512 (рисунок 1.7), представляющего собой сгибаемый ленточный излучатель, работающий в диапазоне частот от 30 до 512 МГц [14]. Данное АУ применяется на портативной радиостанции Р-181, а его частотная зависимость изменения активной и реактивной части импеданса представлена на рисунке 1.8.

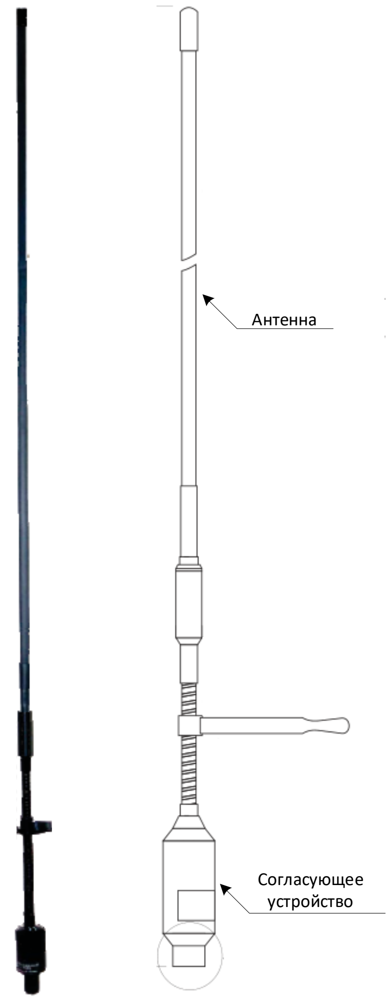


Рисунок 1.7 – Внешний вид АУ AD-25/CW-3512

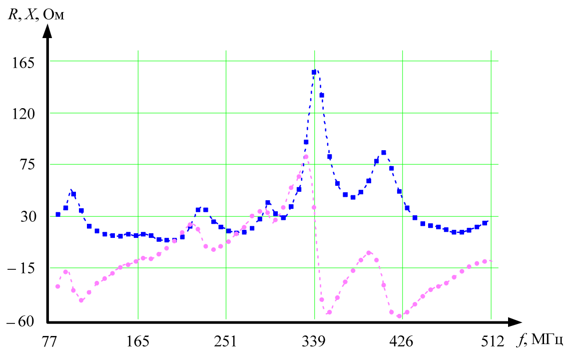


Рисунок 1.8 – Функции входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512

Из представленных характеристик следует, что входное сопротивление АУ AD-25/CW-3512 сильно зависит от частоты (имеет резко изменяющийся характер). Это приводит к тому, что представленные выше методики либо не позволяют рассчитать схемный эквивалент согласуемой нагрузки, либо расчет становится достаточно сложным, занимает продолжительное время, требует специальной подготовки разработчика, а сам результат может получиться неудовлетворительным [12]. Данные обстоятельства приводят к тому, что для решения инженерно-технических задач все чаще обращаются к прогрессивному и весьма экономичному способу исследования и проектирования РТС и РТУ – математическому моделированию на ЭВМ, это позволяет рассматривать входное сопротивление нагрузки в виде простых математических моделей с высокой степенью адекватности и не рассчитывать его в виде схемных эквивалентов.

2 Математическая модель нагрузки, адекватная ее физической сущности

Успешное решение инженерных задач методами математического моделирования на ЭВМ в значительной степени зависит от состоятельности используемых математических моделей: от их способности давать новую информацию о системе в процессе исследования ее модели и от возможности реализации ее на ЭВМ. Выбор того или иного метода математического моделирования и построение математической модели радиосистемы, отвечающей поставленной инженерной задаче, не может быть формализован и требует от разработчика творческого подхода и достаточно глубоких знаний в области теории математического моделирования радиосистем. Как показывает практика, выбор адекватной математической модели, позволяющей достаточно быстро и эффективно решить поставленную инженерную задачу на ЭВМ, обычно представляет наибольшие трудности и еще недостаточно освещен как в отечественной, так и в зарубежной литературе. Поэтому развитие теории построения математических моделей радиотехнических устройств и систем, реализуемых на ЭВМ, имеет важное практическое значение.

Одним из подходов моделирования РТУ, входящих в состав РТС (усилители, частотные фильтры, антенные устройства (АУ) и др.), является аналитическое математическое моделирование, построенное на основе результатов экспериментальных данных. Такая математическая модель строится на основе всестороннего анализа поведения системы и широкого использования результатов проведенных ранее статистических исследований. Она должна быть достаточно полной, чтобы адекватно описывать систему, но также и достаточно простой, чтобы получающиеся модели можно было реализовать на вычислительных машинах в виде физически реализуемых функций [15].

Так в [16] изложен способ расчета математических моделей входного импеданса нагрузки, основанный на использовании статистической обработки и методов аппроксимации, алгоритм которого представлен на рисунке 2.1.

Суть предложенного способа заключается в том, что входные и передаточные функции РТУ, исходя из условий физической реализуемости, являются дробно-рациональными функциями от комплексной частоты (s) вида:

$$f(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 (s)^2 + \ldots + a_k (s)^k}{b_0 + b_1 s + b_2 (s)^2 + \ldots + b_q (s)^q}, \qquad (2.1)$$

где все коэффициенты при s должны быть вещественными и неотрицательными, а высшие степени полинома числителя (k) и знаменателя (q), так же, как и их низшие степени, не могут отличаться более чем на 1 [17].

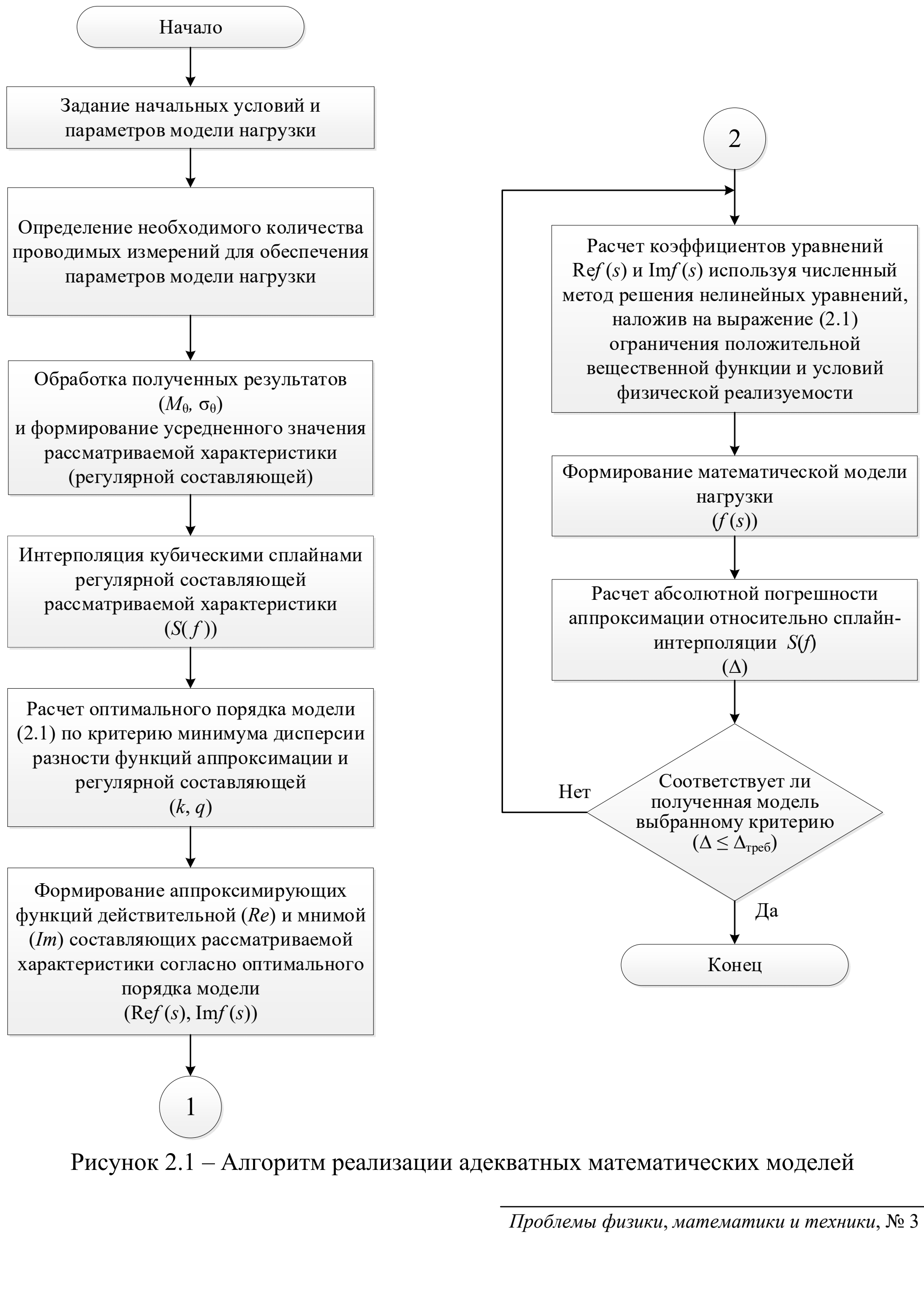


Рисунок 2.1 – Алгоритм реализации адекватных математических моделей

В качестве примера исследуем возможность аппроксимации частотной характеристики АУ AD-25/CW-3512 с использованием алгоритма, представленного на рисунке 2.1. Для нахождения наиболее оптимальных коэффициентов аппроксимирующих функций, описывающих реальную и мнимую часть входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512, необходимо использовать методы нелинейных оптимизированных процедур с использованием ЭВМ. Предлагается для расчета аппроксимирующей функции, описывающей реальную и мнимую составляющую входного сопротивления импеданса АУ, использовать метод оптимизации Левенберга – Марквардта [18], [19]. Полученная АММ, описывающая реальную и мнимую составляющие входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512, имеет вид (2.1), коэффициенты которой представлены в таблице 2.1.

Частотные характеристики аппроксимирующей функции входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512 представлены на рисунке 2.2.

На рисунка 2.2 наглядно видно, что рассчитанная АММ входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512 обеспечивает требуемую абсолютную погрешность аппроксимации к характеристикам входного сопротивления и составляет менее 10%.

Для сравнения представленных в работе алгоритмов на рисунке 2.3 представлены результаты моделирования входного сопротивления антенны ВГД способом, представленном на рисунке 2.1 и предложенном в [12]. При этом рассчитанная АММ входного сопротивления антенны ВГД имеет шестой порядок и имеет вид

$$Z_{ВГД}(s) = \left(1,845\cdot 10^6 + 3,182\cdot 10^6(s) + \right.$$
$$+ 2,506\cdot 10^5(s)^2 + 1,792\cdot 10^4(s)^3 + 1,069\cdot 10^3(s)^4 +$$
$$\left. +18,554(s)^5 + 0,989(s)^6\right) / \left(7,765\cdot 10^4 + \right.$$
$$+ 6,088\cdot 10^3(s) + 1,526\cdot 10^3(s)^2 + 57,414(s)^3 +$$
$$\left. + 4,448(s)^4 + 0,075(s)^5 + 0,003(s)^6\right).$$

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что рассчитанная АММ аппроксимирует входное сопротивление антенны ВГД по отношению к модели, представленной в [12] на 18% точнее для реальной составляющей входного сопротивления и на 17% - мнимой составляющей соответственно. Также необходимо отметить, что полученная АММ имеет шестой порядок, в свою очередь функция входного сопротивления модели антенны ВГД, представленной в [12], имеет 8 порядок.

Таблица 2.1 – Коэффициенты дробно-рациональной функции, аппроксимирующей импедансные характеристики АУ AD-25/CW-3512

Коэффициент	Значение	Коэффициент	Значение	Коэффициент	Значение
a_0	$1,792\cdot 10^{-4}$	a_{10}	443,957	b_5	0,267
a_1	0,032	a_{11}	536,812	b_6	2,476
a_2	0,119	a_{12}	439,399	b_7	1,851
a_3	1,701	a_{13}	248,709	b_8	10,838
a_4	4,173	a_{14}	153,796	b_9	5,74
a_5	24,51	b_0	$6,059\cdot 10^{-5}$	b_{10}	23,01
a_6	44,376	b_1	$1,706\cdot 10^{-4}$	b_{11}	8,059
a_7	147,751	b_2	$7,996\cdot 10^{-3}$	b_{12}	22,854
a_8	203,863	b_3	0,014	b_{13}	4,131
a_9	417,306	b_4	0,249	b_{14}	8,304

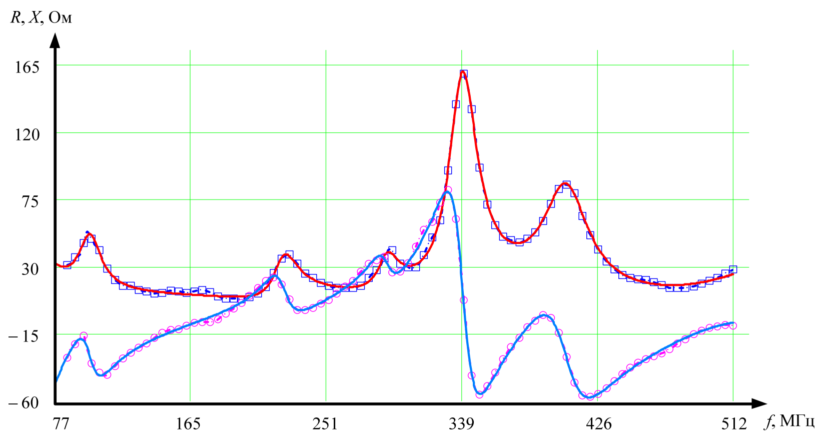


Рисунок 2.2 – Функции входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512 (символы) и его рассчитанной АММ (сплошные линии) в рабочей полосе частот

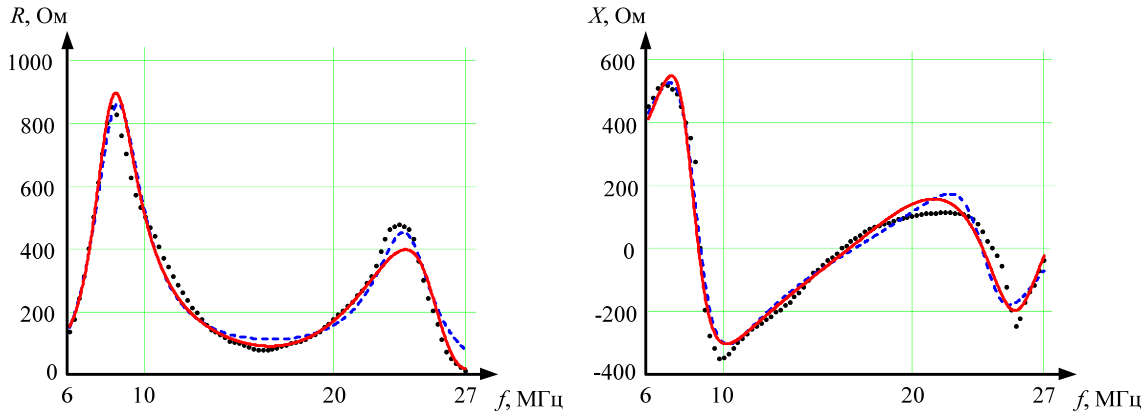


Рисунок 2.3 – Функции входного сопротивления антенны ВГД (точки), ее рассчитанного эквивалента [12] (пунктирная линия) и рассчитанной АММ (сплошная линия)

Заключение

В процессе разработки и испытаний радиоэлектронной аппаратуры часто возникают задачи нахождения эквивалентных схем и синтеза широкополосных согласующих цепей для сложных нагрузок. К сожалению, лишь немногие из этих задач могут быть решены точными аналитическими методами. Однако даже в случае удачи разработчик не может быть уверен в высоком качестве полученных технических решений. Причина этого заключается в том, что аналитические методы дают достоверные результаты лишь при точном соответствии эквивалентной схемы и реальной нагрузки. Это соответствие – скорее исключение, чем правило, когда речь идет о современных РТС, работающих в условиях высокой априорной неопределенности относительно статистики входных радиосигналов и помех, условий их распространения.

В этих условиях единственный выход для разработчика – проведение математического моделирования рассматриваемой нагрузки и представления ее в виде адекватной математической модели. Такое представление является экономически выгодным способом проверить качество функционирования радиоэлектронной аппаратуры на этапе ее проектирования и отладки.

Так, для анализа и расчета эквивалентных цепей предложено использовать математические модели, представляющие собой аналитическое выражение, описывающее входные характеристики в виде достаточно простых физически реализуемых дробно-рациональных функций вида (2.1). Данный подход позволяет аппроксимировать входные характеристики РТУ с учетом их статистической обработки и рассматривать численно заданные характеристики в виде АММ с высокой степенью адекватности (доверительной вероятностью не менее 0,9 и относительной погрешностью не более 10%).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппович*, *Г.А.* Широкополосное согласование сопротивлений / Г.А. Филиппович. – Минск: ВА РБ, 2004. – 175 с.

2. *Каганов*, *В.И.* Системы автоматического регулирования в радиопередатчиках / В.И. Каганов. – М.: Связь, 1969. – 256 с.

3. *Боде*, *Г.* Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью / Г. Боде. – М.: Изд. иностр. литературы, 1948. – 641 с.

4. *Фано*, *Р.М.* Теоретические ограничения полосы согласования произвольных импедансов / Р.М. Фано. – М.: Сов. радио, 1965. – 70 с.

5. *Youla*, *D.C.* A new theory of broad-band matching / D.C. Youla. – IEEE Trans. Circuit Theory. – 1964. – Vol. CT, № 1. – P. 30–50.

6. *Чавка*, *Г.Г.* Широкополосное согласование радиопередатчика с антенной / Г.Г. Чавка // Электросвязь. – 1974. – № 12. – С. 46–53.

7. *Свириденко*, *А.А.* Методика широкополосного согласования нагрузок с сосредоточенными параметрами на основе обобщенной матрицы рассеяния / А.А. Свириденко, М.А. Янцевич // Информационные технологии в образовании, науке и производстве: VI Международная научно-техническая интернет-конференция, 17-18 ноября 2018 г. [Электронный ресурс]. – [Б. и.], 2018. – Режим доступа: https://rep.bntu.by/handle/data/49920. – Дата доступа: 12.02.2021.

8. *Проектирование радиопередающих устройств с применением ЭВМ*: учеб. пособие для вузов / О.В. Алексеев [и др.]; под. ред. О.В. Алексеева. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.

9. *Бабков*, *В.Ю.* Основы построения устройств согласования антенн / В.Ю. Бабков, Ю.К. Муравьев. – ВАС, 1980. – 240 с.

10. *Филиппович*, *Г.А.* Моделирование сопротивлений по измеренным S-параметрам / Г.А. Филиппович, В.Ф. Белевич // Вестник Военной академии Республики Беларусь. – 2007. – № 1. – С. 34–38.

11. *Бойкачев*, *П.В.* Моделирование сопротивления короткой монопольной антенны диапазона декаметровых волн / П.В. Бойкачев, Е.Л. Крейдик, Г.А. Филиппович // Вестник Военной академии Республики Беларусь. – 2013. – № 3 (40). – С. 69–74.

12. *Васильев*, *А.Д.* Структурно-параметрический синтез четырехполюсников при широкополосном согласовании и моделировании на основе аппарата Т-матриц: дис. канд. техн. наук: 05.12.04 / А.Д. Васильев. – Минск, 2010. – 121 л.

13. *Чавка*, *Г.Г.* Диапазонные эквиваленты антенн / Г.Г. Чавка, П.И. Хибенков // Радиотехника. – 1980. – № 9. – С. 82–84.

14. *Trival antene. Datasheet AD-25/CW-3512.* – Slovenia, 2020. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.trival-antennas-masts.com/sites/default/files/brochures/AD-25-CW-3512%20ANG.pdf. – Дата доступа: 21.05.2021.

15. *Ланнэ*, *А.А.* Оптимальный синтез линейных электрических цепей / А.А. Ланнэ. – М.: Связь, 1969. – 294 с.

16. *Исаев*, *В.О.* Способ нахождения адекватных математических моделей радиотехнических устройств с нестабильным импедансом / В.О. Исаев, П.В. Бойкачев // Метрология и приборостроение. – 2021. – № 1 (92). – С. 9–16.

17. *Карни*, *Ш.* Теория цепей. Анализ и синтез / Ш. Карни. – М.: Связь, 1973. – 269 с.

18. *Levenberg*, *K.* A method for the solution of certain problems in least squares / K. Levenberg // Quart. Appl. Math. – 1944. – № 2. – P. 164–168.

19. *Marquardt*, *D.* An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters / D. Marquardt // SIAM J. Appl. Math. – 1963. – № 11. – P. 431–441.

Поступила в редакцию 30.05.2021.

ИНФОРМАТИКА

УДК 681.3.06:624.131

АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ ПРОИЗВОДСТВА

В.С. Смородин, В.А. Прохоренко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ADAPTIVE CONTROL SYSTEM OF A TECHNOLOGICAL PRODUCTION PROCESS

V.S. Smorodin, V.A. Prokhorenko

Francisk Skorina Gomel State University

Изложены принципы построения адаптивной системы управления технологическим циклом производства при наличии внешних управляющих воздействий. Построение адаптивных обратных связей по управлению осуществляется на основе результатов обработки данных модели нейрорегулятора и имитационной модели в составе технических средств сопряжения с системой управления и информационной базой имитационной модели технологического цикла производства. Приведена формализация процесса адаптивного управления с использованием методов нейросетевого моделирования для поддержки принятия управляющих решений, описана модель нейрорегулятора, процедура ее обучения и тестирования.

***Ключевые слова**: адаптивное управление, технологический процесс производства, нейронная сеть, нейрорегулятор, фазовая плоскость состояний, оптимальная траектория.*

The principles of construction of an adaptive control system are described for technological cycle of production with external control actions. Adaptive control feedback connections are created based on data processing for the neuroregulator model and the simulation model included in the technical means of coupling with the control system and the database for the simulation model of a technological cycle of production. Formalization of an adaptive control process that uses neural network based modeling for decision making processes is given. Neuroregulator models, their training and testing procedures are described.

***Keywords**: adaptive control, technological production process, neural network, neuroregulator, phase plane of states, optimal trajectory.*

Введение

При осуществлении процессов управления технологическим циклом производства часто возникает потребность комплексного учета многообразия факторов воздействия на технологический процесс случайных сбоев используемого оборудования, а также воздействий внешней среды, включая и человеческий фактор. В этой связи является актуальной реализация адаптивного управления процессом производства (с обратными связями по управлению) в составе технических средств управления технологическим циклом и программного обеспечения адаптации процесса управления на случайные внешние возмущения в ходе его реализации.

Следует отметить, что используемые в настоящее время технические средства управления могут в полной мере не учитывать все многообразие существующих внешних воздействий, что определяет необходимость разработки комплекса методов адаптации управления существующими технологическими процессами производства (ТПП) с вероятностными характеристиками, учитывающими присутствие случайных возмущений в процессе их реализации, а также методики и технологии использования программного обеспечения, реализующего алгоритмы адаптации управления технологическим циклом производства.

Методы искусственного интеллекта и машинного обучения, в том числе искусственные нейронные сети, в настоящее время широко применяются для решения ряда важных практических задач, связанных с распознаванием образов, предсказанием временных рядов, аппроксимацией и анализом данных, а также при исследовании трудноформализуемого класса существующих сложных технических систем. К данному классу могут быть отнесены различные виды систем управления технологическим циклом производства[1], процесс функционирования которых можем сопровождаться существенными изменениями текущих параметров реализации технологического процесса, а также структуры технологического цикла.

При этом возникающие на практике требования по обеспечению на соответствующем уровне надежности и безопасности функционирования потенциально опасных промышленных объектов [2] приводят к необходимости разработки и реализации новых специфических подходов[3] для принятия обоснованных решений при построении обратной связи по управлению и адаптивной составляющей соответствующей системы управления на наличие реализовавшихся возмущений техногенного и антропогенного характера.

Такой подход может быть осуществлен посредством построения вспомогательных моделей искусственных нейронных сетей [3][4] (ИНС) для нахождения оптимального (адаптивного) управления, в составе конечной совокупности математических моделей, включая имитационные, реализующей единую модель объекта исследования, которая используется в качестве базовой для модели нейрорегулятора, осуществляющего адаптацию управления к внешним возмущениям в составе технических средств сопряжения главной модели с технологическим циклом производства.

Необходимо при этом подчеркнуть, что применение математических моделей нейрорегуляторов для адаптации управляющих воздействий на внешние возмущения техногенного и антропогенного характера имеет существенные преимущества перед традиционными методами коррекции управления, поскольку искусственная нейронная сеть способна построить новые функциональные зависимости между входными и выходными данными в процессе обучения с предоставлением необходимых обобщений.

Таким образом, предметом исследования в данной работе являются методы и алгоритмы адаптации управления вероятностными технологическими процессами, методики и технологии использования совокупности математических моделей объекта исследования при построении оптимальных обратных связей по управлению объектом исследования – адаптивные системы управления вероятностными технологическими процессами производства.

1 Формализация процесса адаптивного управления

В основу формализации структуры адаптивного управления технологическим циклом производства положены результаты исследований авторов в области анализа функционирования вероятностных технологических систем[1][3][4].

Под адаптивным управлением в данной работе понимается способность системы управления изменять свои параметры в зависимости от штатных управляющих воздействий контроллера системы и внешних возмущений[4]. Технологический цикл представляет собой множество определенных ресурсов, а также набор технологических операций, которые потребляют эти ресурсы в процессе своей реализации[1]. Допускается конкуренция технологических операций за требуемые ресурсы. Таким образом, в рамках принятой формализации технологический цикл рассматривается в качестве замкнутой системы, для анализа и изучения которой могут применяться нейросетевые технологии, основанные на построении математических моделей ИНС. Математическая модель строится в пространстве состояний и включает в себя набор входных и выходных данных, а также переменных состояния конечного набора взаимосвязанных математических моделей компонентов управления [4].

Формализация процесса управления технологическим циклом производства с вероятностными характеристиками основана на использовании в структуре контура управления специальных сигналов и стандартных элементов, которые в дальнейшем участвуют в формировании регулирующих воздействий на используемое оборудование посредством их логической комбинации [2]. Динамика взаимодействия компонентов системы адаптивного управления и ее структура исследуются на основе совмещения имитационного моделирования технологического объекта в режиме реального времени с отображением функциональных особенностей основных компонентов системы. Подобное совмещение составляет основу технологического моделирования и обычно связано с моделированием квазипараллельных процессов.

Регулирование поведения ТПП реализуется путем эмуляции основных функций компонентов технологической системы на основе имитационной модели объекта исследования, построенной в рамках системы автоматизации имитационного моделирования агрегатного типа [3].

Адаптация управления технологическим циклом выполняется на основе осуществления функций контроля за выходом за пределы допустимых границ диапазона изменений компонентов $\{U_{fh}\}$ переменных вектора управления $\{U_h\}$. Возврат значений переменных управления в рамки допустимых интервалов выполняется посредством специальных средств корректировки на основе агрегатов-процедур управления $\{UPROC_{hl}\}$. Структура взаимосвязей адаптивной системы управления с компонентами имитационной модели вероятностного технологического процесса производства приведена на рисунке 1.1.

Система управления (СУ) на данном рисунке представлена имитатором управления, содержащим регистры состояний системы $\{Z_{fh}\}$ и регистры переменных управления $\{U_h\}$, через которые осуществляется взаимодействие с имитационной моделью технологического цикла.

В общем случае адаптивная система управления состоит из элементов, представляющих собой сложным образом организованную схему взаимодействия управляющих сигналов типа «И» и логических схем слежения типа «ИЛИ», которые вырабатывают соответствующие выходные сигналы после обработки поступивших входных сигналов. При этом информация о ситуациях, возникающих при выполнении любого элемента в системе управления, хранится в теле соответствующего инициированного сигнала. К таковым относятся нормальное исполнение

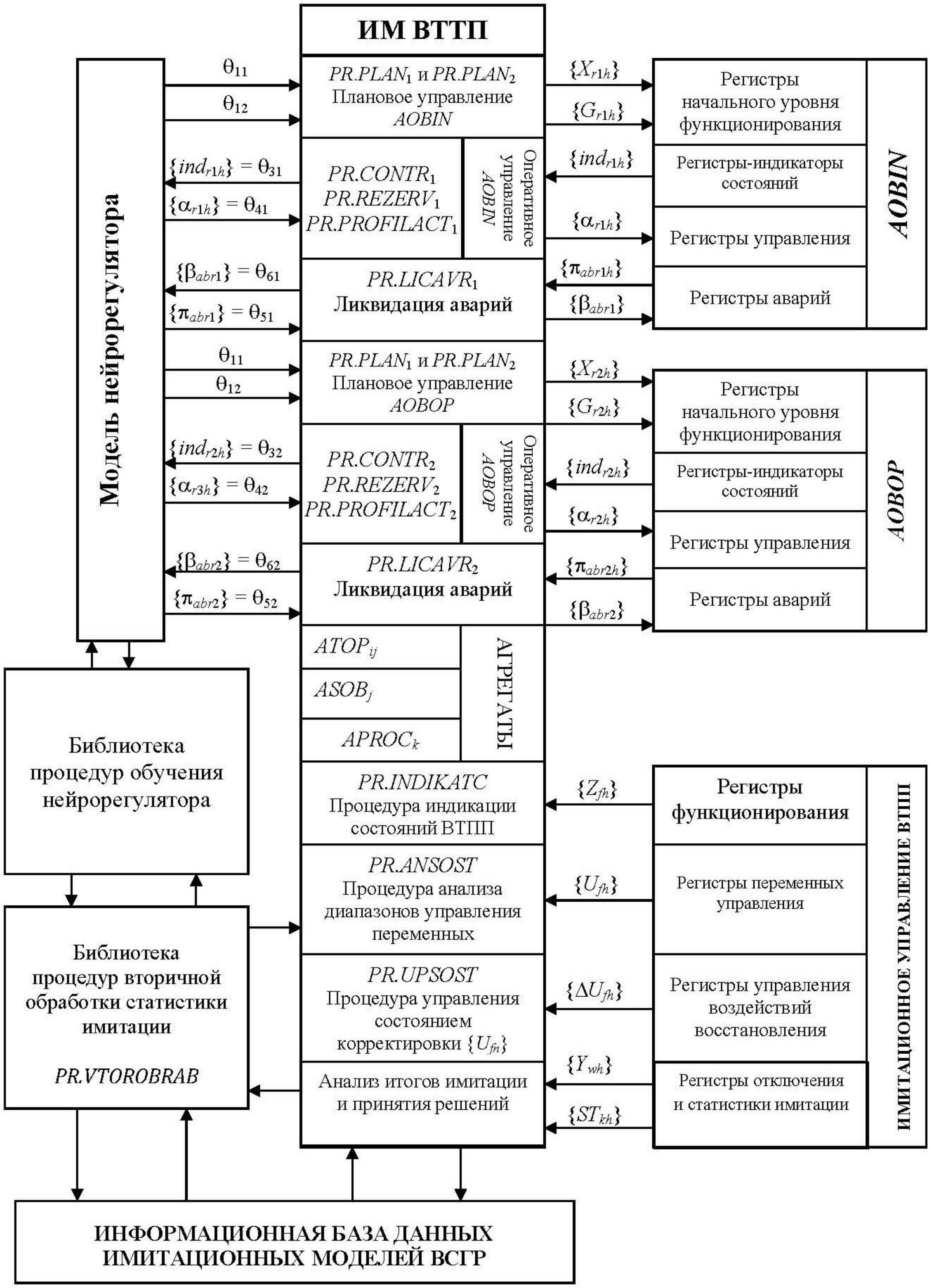


Рисунок 1.1 – Структура взаимосвязей адаптивной системы управления

функций элементом системы, отказ оборудования, выход параметров вектора $\{U_h\}$ за пределы допустимых изменений, совмещение отказов оборудования с выходом значений переменных правления за допустимые диапазоны.

Таким образом, сигнал, передаваемый от системы управления к оборудованию, может быть интерпретирован как набор признаков, описывающих оперативную ситуацию в ходе текущего выполнения некоторого элемента системы управления. В системе управления присутствует несколько типов устройств исполнения и адаптации: исполнители функций; устройства оперативной ликвидации последствий аварий оборудования; универсальные элементы, ликвидирующие последствия аварий и последствия выходов компонентов вектора $\{U_h\}$ за допустимые диапазоны изменений, в связи с чем имитационная модель системы управления генерируется из следующих типов исполнительных элементов: функция-исполнитель $(CORF_{ij})$ корректировки значений компонентов вектора управления U_k при выходе глобальных переменных за допустимые диапазоны изменений; функция-исполнитель $(LICV_{ij})$ ликвидации последствий аварии на оборудовании; универсальный исполнительный элемент $(UNIV_{ij})$, корректирующий значения компонентов вектора U_k и ликвидирующий последствия аварий на оборудовании; индикатор состояний $(INDS_{ij})$ технологического цикла[1][2].

2 Общая постановка задачи

В работе рассматривается управление технологическими процессами, имеющими непрерывную природу, в режиме реального времени [1] при наличии соответствующих технических средств автоматизации управления [4].

Процедура синтеза адаптивного управления основана на обучении рекуррентной нейронной сети [5], имеющей в своем составе блоки памяти LSTM [6]. Наличие структурных элементов, допускающих долговременное хранение информации [7], может интерпретироваться как нейросетевой аналог базы знаний о внешней среде системы управления. Выбор описанного метода адаптации удовлетворяет требованиям к быстродействию адаптации и качеству процесса управления в условиях возможного отсутствия информации о природе возможных случайных помех.

Модель нейрорегулятора, осуществляющая управление системой, предназначена для поиска оптимальной траектории на фазовой плоскости состояний системы управления [4]. В реальном времени модель принимает решения о переходе в новые состояния системы управления на фазовой плоскости. Решения принимаются с помощью модели на основании данных о текущем состоянии объекта управления, а также соседних состояниях. Движение по фазовой плоскости состояний осуществляются до тех пор, пока не будет построена оптимальная траектория в рамках определенного критерия качества управления.

В рамках предлагаемой формализации могут быть использованы подходы с явным моделированием управляемой системы [8], подпадающие под категорию обучения с учителем. В этом случае модель нейрорегулятора обучается таким образом, чтобы она могла воспроизвести правильные последовательности стимулов и реакций. При решении реальных прикладных задач такие подходы могут быть сопряжены с трудностями построения достаточно полного и репрезентативного обучающего множества, отражающего весь спектр действий исходной модели. Даже несмотря на наличие больших наборов данных, содержащих статистики функционирования системы, покрытие важных областей фазового пространства состояний не гарантируется в случаях, когда они встречаются относительно редко, либо связаны с возникновением исключительных ситуаций, не наблюдаемых при нормальном функционировании системы [4].

Следует отметить, что в работе рассматривается альтернативный подход, связанный с использованием алгоритмов обучения с подкреплением (а именно, Q-обучения), применяемых совместно с имитационной моделью технологической системы. При использовании Q-обучения [9] предполагается исследовательская деятельность агента [8], управляемого контроллером, что позволяет пройти в процессе обучения через критические состояния системы. В процессе Q-обучения необходимо построить адекватную аппроксимацию функции Q оценки следующего состояния, к которому может привести выбор определенной политики управления. В качестве аппроксиматора данной функции может быть использована нейронная сеть [4], [10], [11]. Такой подход потенциально может обеспечить хорошие результаты при решении сложных задач с частично наблюдаемым окружением [11]–[13].

3 Модель нейроконтроллера, ее обучение и тестирование

Обучение нейроконтроллера представляет собой поиск таких значений весовых коэффициентов связей нейронной сети, при которых приближенная функция будет достаточно близкой к оптимальной функции Q* максимизации текущей возможной награды. Поиск в пространстве настраиваемых параметров модели осуществляется в результате многократного проигрывания эпизодов решения задачи, в которых участвует принимающий решения агент под управлением нейроконтроллера, при этом на основании различий, предсказанных нейрорегулятором, и реальных значений награды за действия агента строится функция потерь, которая минимизируется градиентными методами [14], [15]. В описанной формализации эпизод решения задачи представляет собой поиск траектории агентом в двумерной области с возможным наличием непроходимых подобластей (недопустимых состояний системы).

Для обучения и тестирования моделей были сгенерированы экземпляры задачи нахождения траектории. Было сгенерировано несколько датасетов, характеризуемых объемом непроходимых подобластей, обозначенных как Empty (отсутствуют недопустимые состояния системы в области фазовой плоскости, где осуществляется поиск траектории), CA5 (5% недопустимых состояний), CA15 (15% недопустимых состояний), CA30 (30% недопустимых состояний).

В качестве оптимизационного алгоритма в данной работе использован RMSProp при обучении всех нейронных сетей. В качестве нейроконтроллера обучено и протестировано 3 нейронных сети. Первые две из них (sfDQN, mfDQN) являются многослойными персептронами (МСП), третья – DQRN1 – рекуррентная на базе МСП с LSTM блоком [11]. Все функции активации для полносвязных скрытых слоев – SELU (Scaled Liner Exponential Unit) [16].

Агенты, использующие перечисленные нейроконтроллеры, после завершения обучения тестировались в течение 10000 эпизодов на экземплярах задачи, не использованных при обучении. Результаты обучения и тестирования в процессе обучения представлены ниже на рисунках 3.1–3.2. На всех рисунках красным показаны данные агента sfDQN, зеленым – mfDQN, синим – DQRN1. Первый график сверху – усредненная награда в процессе обучения, второй – количество достижений целевой области за последние 50 итераций (эпизодов), третий – среднее число достижений цели (в процентах) во время промежуточной валидации модели на небольшой выборке данных (областей), не использованных в процессе обучения, (валидация осуществлялась каждые 1000 итераций обучения), четвертый – среднее число завершений эпизода совершением недопустимого действия (в процентах).

На датасете Empty – все агенты относительно быстро достигают высокой производительности (по сравнению с остальными датасетами), по результатам обучения все агенты способны успешно достигнуть целевой области в более чем 95% случаев.

На рисунке 3.1 (справа) видно, что применение моделей, учитывающих временные зависимости, фактически не даёт наблюдаемых преимуществ по сравнению с агентом под управлением sfDQN в ситуации, когда процент непроходимых областей относительно мал (CA5). Это может быть объяснено тем, что при решении экземпляра задачи, где непроходимые области изолированы и малы по объёму, вероятность их встречи агентом при осуществлении перемещений низкая, и от нерекуррентной модели фактически не требуется учитывать временной контекст ситуации нахождения по соседству с непроходимой областью, и, следовательно, нужно меньше примеров для запоминания недопустимого действия.

Для датасета CA15 наблюдается другая ситуация: агент с рекуррентной нейросетью обучается быстрее и показывает себя незначительно лучше по результатам обучения (рисунок 3.2 слева).

При обучении на датасете CA30 DRQN также показывает себя лучше, при этом для сети такого типа необходимо обучение в течение более длительного периода. (Увеличение длительности обучения и подбор параметров для двух других моделей не позволяют в данном случае увеличить качество управления.) Например, по результатам тестирования обученных моделей на CA30 доля успешных построений траекторий для sfDQN, mfDQN, DRQN соответственно 35,12%, 34,67%, 56,28%.

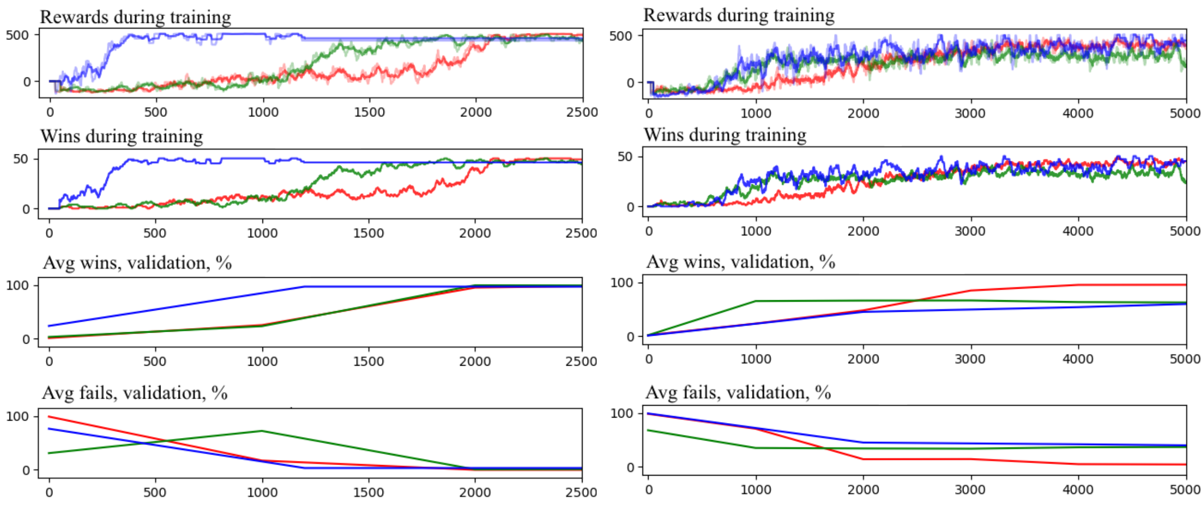


Рисунок 3.1 – Слева – обучение на датасете Empty, справа – на датасете CA5

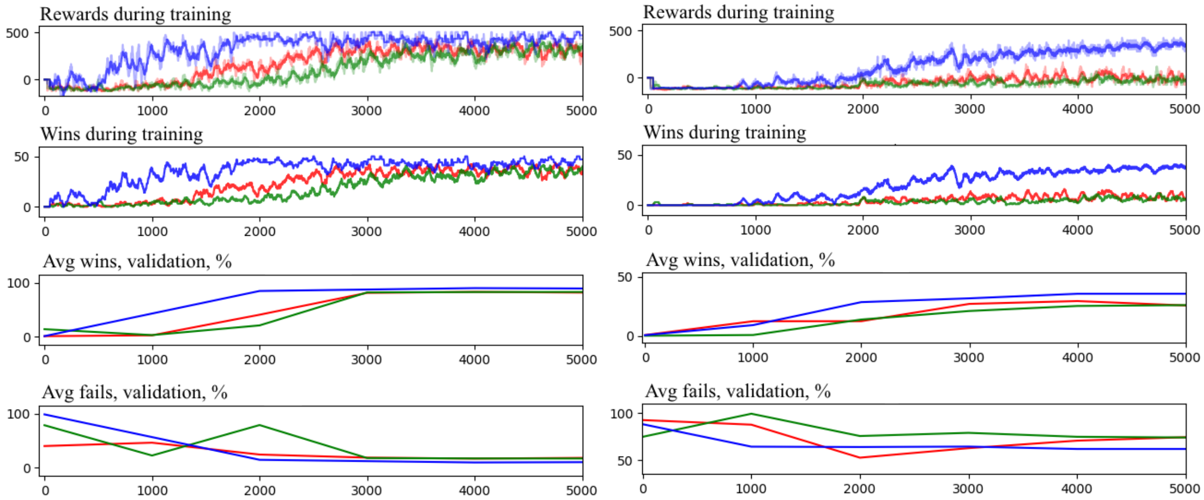


Рисунок 3.2 – Слева – обучение на датасете CA15, справа – на датасете CA30

Потенциально показанные результаты могут быть улучшены путем подбора архитектуры нейронных сетей.

Заключение

В настоящей работе предложен нейросетевой подход к построению адаптивной системы управления технологическим процессом производства с использованием нейрорегуляторов, применяемых для поиска оптимальной траектории на фазовой плоскости состояний технической системы. Математическая модель нейрорегулятора реализована программно на языке Python с использованием библиотек TensorFlow и keras.

Взаимодействие нейрорегулятора и системы управления технологическим циклом достигается за счет программно-аппаратного интерфейса между вычислительной системой и блоками управления АСУТП. Установлено, что рекуррентные нейронные сети могут быть успешно применены в качестве нейрорегулятора, осуществляющего решение задачи в описанной формализации в условиях, когда частично наблюдаемая область состояний системы имеет сложную структуру.

Представленные результаты обеспечивают возможность дальнейшей алгоритмизации адаптивного управления технологическим процессом производства на основе моделей нейрорегуляторов, позволяющих осуществлять контроль выхода параметров технологического цикла за пределы допустимых значений и построение обратных связей по управлению. Реализация алгоритмов адаптации управления на внешние возмущения дает возможность разработки схем структурного резервирования системы управления исследуемого объекта в условиях неопределенности и риска возникновения техногенных аварий в процессе производства.

Полученные результаты могут быть использованы в качестве составных компонентов при автоматизации технологических процессов и производств, разработке систем автоматизации проектирования, при реализации проектного моделирования новых роботизированных производств и систем управления, в учебном процессе для студентов, магистрантов и аспирантов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смородин*, *В.С.* Система управления надежностью оборудования вероятностных технологических процессов опасного производства / В.С. Смородин // Проблеми програмування. – 2007. – № 3. – С. 107–123.

2. *Гончаров*, *А.Н.* Управление резервированием и восстановительными операциями с помощью имитационного моделирования при возникновении отказов в технологических процессах опасного производства / А.Н. Гончаров, И.В. Максимей, В.С. Смородин // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 1. – С. 48–60.

3. *Смородин*, *В.С.* Агрегатная система автоматизации моделирования вероятностных технологических процессов производства / В.С. Смородин // Математичні машини і системи. – 2007. – № 1. – С. 105–110.

4. *Смородин*, *В.С.* Метод построения модели нейрорегулятора при оптимизации структуры управления технологическим циклом / В.С. Смородин, В.А. Прохоренко // Доклады БГУИР. – 2019. – № 7–8 (126). – С. 125–132.

5. *Осовский*, *С.* Нейронные сети для обработки информации / С. Осовский. – Москва: Финансы и статистика, 2002. – 345 с.

6. *Hochreiter*, *S.* Schmidhuber, J. Long short-term memory / S. Hochreiter, J. Schmidhuber // Neural Computation. – 1997. – Vol. 9, № 8. – P. 1735–1780. – DOI:10.1162/neco.1997.9.8.1735.

7. *Bengio*, *Y.* Learning long-term dependencies with gradient descent is difficult / Y. Bengio, P. Simard, P. Frasconi // IEEE Transactions on Neural Networks. – 1994. – Vol. 5, № 2. – P. 157–166.

8. *Hagan*, *M.T.* Neural networks for control / M.T. Hagan, H.B. Demuth // Proceedings of the American Control Conference. – San Diego, USA, 1999. – Vol. 3. – P. 1642–1656.

9. *Sutton*, *R.S.* Reinforcement Learning: An Introduction / R.S. Sutton, A.G. Barto. – Cambridge: The MIT Press, 1998.

10. *Tsitsiklis*, J. An analysis of temporal-difference learning with function approximation / J. Tsitsiklis, B.V. Roy // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – № 42. – P. 674–690.

11. *Cybenko*, *G.V.* Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function / G.V. Cybenko // Mathematics of Control Signals and Systems. – 1989. – Vol. 2, № 4. – P. 303–314.

12. *Human-level control through deep reinforcement learning* / V. Mnih [et al.] // Nature. – 2015. – Vol. 518, № 7540. – P. 529–533. – DOI: 10.1038/nature14236.

13. *Lample*, *G.* Playing FPS Games with Deep Reinforcement Learning / G. Lample, D.S. Chaplot // AAAI'17 Proceedings of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence. – 2017. – AAAI Press. – P. 2140–2146.

14. *Mastering the game of Go without human knowledge* / D. Silver [et al.] // Nature. – 2017. – Vol. 550. – P. 354–359. – DOI:10.10.1038/nature 24270

15. *Hagan*, *M.T.* Neural Network Design / M.T. Hagan, H.B. Demuth, M.H. Beale. – Boston, MA: PWS Publishing, 1996.

16. *Klambauer*, *G.* Self-Normalizing Neural Networks / G. Klambauer, T. Unterthiner, S. Hochreiter // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2017. – № 30. – P. 972–981.

Поступила в редакцию 15.03.2021.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

– соответствовать профилю журнала;

– являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

– содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

– сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

– сведения об авторах;

– экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

– договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу http://pfmt.gsu.by.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).

ПОПРАВКИ
к статье, опубликованной в журнале
«Проблемы физики, математики и техники», № 1 (46) 2021

В статье С.С. Гиргель «Решения волнового уравнения в параблических вращательных координатах. III. Пространственно-временные волновые пакеты Куммера – Куммера и Трикоми – Куммера с непрерывным угловым индексом», опубликованной в журнале «Проблемы физики, математики и техники», № 1 (46) 2021, название статьи необходимо читать в следующей редакции: «Решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. III. Пространственно-временные волновые пакеты Куммера – Куммера и Трикоми – Куммера с непрерывным угловым индексом».

Опечатки были устранены в электронной версии статьи, которая находится на сайте журнала.