



ISSN 2077-8708

**Проблемы  
физики,  
математики  
и техники**

**№2 (47) 2021**

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ  
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,  
МАТЕМАТИКИ  
И ТЕХНИКИ»**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:**  
**С.А. Хахомов** (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО  
РЕДАКТОРА:**  
**А.В. Рогачёв** (Беларусь)  
**О.М. Демиденко** (Беларусь)

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**  
**В.Е. Агабеков** (Беларусь)  
**П.Н. Богданович** (Беларусь)  
**А.Ф. Васильев** (Беларусь)  
**Го Вэньбинь** (Китай)  
**С.С. Гиргель** (Беларусь)  
**В.И. Громак** (Беларусь)  
**А.Н. Дудин** (Беларусь)  
**В.А. Еровенко** (Беларусь)  
**А.И. Калинин** (Беларусь)  
**Матс Ларссон** (Швеция)  
**В.Д. Мазуров** (Россия)  
**Н.В. Максименко** (Беларусь)  
**Ю.В. Малинковский** (Беларусь)  
**А.Р. Миротин** (Беларусь)  
**В.В. Можаровский** (Беларусь)  
**В.С. Монахов** (Беларусь)  
**Н.К. Мышкин** (Беларусь)  
**Ю.М. Плескачевский** (Беларусь)  
**М.В. Селькин** (Беларусь)  
**И.В. Семченко** (Беларусь)  
**А.Н. Сердюков** (Беларусь)  
**А. Сихвола** (Финляндия)  
**А.Н. Скиба** (Беларусь)  
**С.А. Третьяков** (Финляндия)

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:**  
**Е.А. Ружицкая** (Беларусь)

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**  
Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины  
ул. Советская, 104,  
246028, г. Гомель, Беларусь  
Тел. +375(232)51-00-77  
+375(232)51-03-21  
E-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL  
JOURNAL  
«PROBLEMS OF PHYSICS,  
MATHEMATICS  
AND TECHNICS»**

**EDITOR-IN-CHIEF:**  
**S.A. Khakhomov** (Belarus)

**DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:**  
**A.V. Rogachev** (Belarus)  
**O.M. Demidenko** (Belarus)

**EDITORIAL BOARD:**  
**V.E. Agabekov** (Belarus)  
**P.N. Bogdanovich** (Belarus)  
**A.F. Vasilyev** (Belarus)  
**Guo Wenbin** (China)  
**S.S. Girgel** (Belarus)  
**V.I. Gromak** (Belarus)  
**A.N. Dudin** (Belarus)  
**V.A. Erovenko** (Belarus)  
**A.I. Kalinin** (Belarus)  
**Mats Larsson** (Sweden)  
**V.D. Mazurov** (Russia)  
**N.V. Maksimenko** (Belarus)  
**Yu.V. Malinkovsky** (Belarus)  
**A.R. Mirotin** (Belarus)  
**V.V. Mozharovsky** (Belarus)  
**V.S. Monakhov** (Belarus)  
**N.K. Myshkin** (Belarus)  
**Yu.M. Pleskachevsky** (Belarus)  
**M.V. Selkin** (Belarus)  
**I.V. Semchenko** (Belarus)  
**A.N. Serdyukov** (Belarus)  
**A. Sihvola** (Finland)  
**A.N. Skiba** (Belarus)  
**S.A. Tretyakov** (Finland)

**EXECUTIVE SECRETARY:**  
**E.A. Ruzhitskaya** (Belarus)

**EDITION ADDRESS:**  
Francisk Skorina Gomel State University  
Sovetskaya Str., 104,  
246028, Gomel, Republic of Belarus  
Ph. +375(232)51-00-77  
+375(232)51-03-21  
E-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Website: <http://pfmt.gsu.by>

# ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

## НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (47) 2021

### СОДЕРЖАНИЕ

#### ФИЗИКА

- Андреев В.В.** Вычисление сечения каскадной реакции  $2 \rightarrow 4$  методом базисных спиноров . 7
- Балмаков А.П., Слепенков Д.В., Хахомов С.А., Семченко И.В., Ванг Д., Сонг В.** Создание с использованием 3D печати и фрезерования и экспериментальное исследование моделей метаповерхностей, покрывающих объекты сложной формы . . . . . 14
- Бурый А.В., Ивашкевич А.В., Овсюк Е.М., Редьков В.М.** Структура плоских волн для поля со спином 2, массивный и безмассовый случаи . . . . . 23
- Гришечкин Ю.А., Капшай В.Н.** Некоторые решения дисперсионного уравнения для движущейся биизотропной среды . . . . . 35
- Малютина-Бронская В.В., Семченко А.В., Рогачёв А.В., Ярмоленко М.А., Сидский В.В., Данильченко К.Д., Сорока С.А., Русу Э.В.** Фотоактивные свойства нанокomпозиционных покрытий  $ZnO_x : MgO$ , осажденных в вакууме и методом золь-гель синтеза . . . . . 39
- Рогачёв А.А., Лю Имин, Ярмоленко М.А., Гао Лихун, Ма Чжуа.** Радиационная стойкость легированных металлами кремнийорганических покрытий, осаждаемых из газовой фазы . . 45
- Руденков А.С., Пилипцов Д.Г., Ярмоленко М.А., Побняха А.С.** Влияние режимов формирования на морфологию и фазовый состав углеродных покрытий, армированных многослойными углеродными нанотрубками . . . . . 51
- Старовойтов Э.И., Плескачевский Ю.М., Яровая А.В.** Деформирование трехслойной круговой пластины в условиях ползучести . . . . . 57
- Шалунаев С.В., Никитюк Ю.В., Серeda А.А., Аушев И.Ю.** Моделирование процесса разделения многослойных неоднородных структур из стекла по криволинейным контурам . . . . . 64

#### МАТЕМАТИКА

- Гальмак А.М.** О порождающих множествах  $l$ -арной группы  $\langle A^k, [ \ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ . I . . . . . 69
- Жогаль С.П., Жогаль С.И., Орлов В.В.** Исследование влияния случайных возмущений на колебания в сложных квазилинейных системах с запаздыванием . . . . . 77
- Рябченко Н.В.** Тригонометрические аппроксимации Паде специальных функций . . . . . 81
- Селькин В.М., Близнец И.В., Закревская В.С.** Критерий  $\sigma$ -разрешимости конечной группы . . . . . 84

#### ТЕХНИКА

- Ильющенко А.Ф., Кривонос О.К., Чорный А.Д.** Способ определения баллистического коэффициента оперенного аэродинамического объекта . . . . . 90

#### ИНФОРМАТИКА

- Садов С.В., Демиденко О.М., Ерофеев И.А., Садов В.С.** Алгоритмы определения эмоций заинтересованности у обучаемых по мимике лица . . . . . 98

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь  
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования  
результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- технические;
- физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редак-  
ции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), реше-  
ние коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ  
Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.  
Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах  
данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Акаде-  
мии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий  
«Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в  
Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную  
библиотеку eLIBRARY.RU.

---

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*  
Корректоры *Г.Н. Петухова, Т.А. Фицнер*  
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 09.06.21. Формат 60×84  $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная. Гарнитура Times.  
Усл. печ. л. 12,56. Уч.-изд. л. 10,94. Тираж 100 экз. Заказ № 321.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.  
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013  
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

---

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины», 2021  
© Проблемы физики, математики и техники, 2021  
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2021



# PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 2 (47) 2021

## CONTENTS

### PHYSICS

- Andreev V.V.** Calculation of the section of the  $2 \rightarrow 4$  cascade reaction by the basis spinor method . . . . . 7
- Balmakou A.P., Slepiankou D.V., Khakhomov S.A., Semchenko I.V., Wang J., Song W.** Creation and experimental study of metasurface models covering complex objects using 3D printing and milling . . . . . 14
- Buryy A.V., Ivashkevich A.V., Ovsyuk E.M., Red'kov V.M.** The structure of the plane waves for spin 2 field, massive and massless cases . . . . . 23
- Grishechkin Yu.A., Kapshai V.N.** Some solutions of the dispersion equation for a moving biisotropic medium . . . . . 35
- Malyutina-Bronskaya V.V., Semchenko A.V., Rogachev A.V., Yarmolenko M.A., Sidskiy V.V., Danilchenko C.D., Soroka S.A., Rusu E.V.** Photoactive properties of  $ZnO_x : MgO$  nanocomposite coatings deposited in vacuum and by sol-gel method . . . . . 39
- Rogachev A.A., Liu Yiming, Yarmolenko M.A., Gao Lihong, Ma Zhuang.** Radiation resistance of metal-alloyed organosilicon coatings deposited from the gas phase . . . . . 45
- Rudenko A.S., Piliptsov D.G., Yarmolenko M.A., Pobiyaha A.S.** Influence of formation modes on morphology and phase composition of carbon coatings reinforced with multilayer carbon nanotubes . . . . . 51
- Starovoitov E.I., Pleskatshevsky Yu.M., Yarovaya A.V.** Deformation of a three-layer circular plate under creep conditions . . . . . 57
- Shalupaev S.V., Nikitjuk Y.V., Sereda A.A., Aushev I.Y.** Modeling the process of separating multilayer heterogeneous glass structures along curved contours . . . . . 64

### MATHEMATICS

- Gal'mak A.M.** On sets of generators of  $l$ -ary group  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ . I . . . . . 69
- Zhogal S.P., Zhogal S.I., Orlov V.V.** Investigation of the influence of random disturbances on oscillations in complex quasilinear systems with delay . . . . . 77
- Ryabchenko N.V.** Trigonometric Padé approximants of special functions . . . . . 81
- Sel'kin V.M., Blisnets I.V., Zakrevskaya V.S.** A  $\sigma$ -solubility criterion of a finite group . . . . . 84

### TECHNICS

- Ilyushchanka A.Ph., Kryvanos A.K., Chorny A.D.** Approach for determination of ballistic coefficient of an tail aerodynamic object . . . . . 90

### INFORMATION SCIENCE

- Sadau S.V., Demidenko O.M., Yerafeyeu I.A., Sadau V.S.** Algorithms for determining the emotions of interest in students by facial expressions . . . . . 98

**Founder – Francisk Skorina Gomel State University**

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus  
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

**The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:**

- **Technics;**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 539.12

## ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ КАСКАДНОЙ РЕАКЦИИ $2 \rightarrow 4$ МЕТОДОМ БАЗИСНЫХ СПИНОРОВ

В.В. Андреев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

## CALCULATION OF THE SECTION OF THE $2 \rightarrow 4$ CASCADE REACTION BY THE BASIS SPINOR METHOD

V.V. Andreev

Francisk Skorina Gomel State University

Рассмотрена общая методика вычисления каскадных процессов в рамках улучшенного приближения узких резонансов. Учтены возможные экспериментальные ограничения на углы вылета конечных и промежуточных частиц. Важной отличительной чертой методики является использование пуанкаре-инвариантных спиральностей для конечных частиц каскадной реакции и метода базисных спиноров. В итоге сечение каскадного процесса  $ab \rightarrow cd \rightarrow 12 + 34$  имеет компактную форму.

**Ключевые слова:** бинарная реакция, диаграмма Фейнмана, сечение, спиральность, частичная ширина, распад.

A general technique for calculating cascade processes in the framework of narrow resonances' improved approximation is considered. Possible experimental restrictions on the emission angles of final and intermediate particles were taken into account. An important distinguishing feature of the technique is the usage of the Poincaré-invariant helicities for the final particles of the cascade reaction, as well as the method of basis spinors. As a result, the section of the cascade process  $ab \rightarrow cd \rightarrow 12 + 34$  has a compact form.

**Keywords:** binary reaction, Feynman diagram, cross section, helicity, partial width, decay.

### Введение

Очень часто в ядерной физике и физике элементарных частиц встречается ситуация, когда в результате взаимодействия в конечном состоянии возникают нестабильные частицы, которые практически сразу распадаются. Такие реакции часто называют каскадными. Например, реакция образования пары  $W^\pm$ -бозонов в кварк-кварковых столкновениях

$$q_i \bar{q}_j \rightarrow W^+ W^- \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell \bar{\ell} \nu_\ell$$

протекает в два этапа, поскольку рожденные  $W$ -бозоны являются нестабильными частицами и могут распадаться в пару лептонов (или кварков).

Для получения сечения каскадных реакций используют приближение узкой ширины для промежуточных нестабильных частиц. В этом случае необходимо вычислить сечения, которые требуют расчета матричных элементов реакций  $q_i \bar{q}_j \rightarrow W^+ W^-$  и  $W^\pm \rightarrow \ell \nu_\ell$ ,  $W^\pm \rightarrow \bar{\ell} \bar{\nu}_\ell$ . При этом все матричные элементы должны быть вычислены в одной системе отсчета, например в системе центра инерции  $q\bar{q}$ -пары.

Однако лоренц-инвариантные фазовые объемы намного проще интегрировать в системе покоя  $WW$ -бозонов. Следовательно, необходимо рассчитать матричный элемент распада движущего  $WW$ -бозона в терминах неинвариантных величин системы его покоя. Так, в работе [1]

такая задача для безмассовых конечных фермионов решалась стандартным образом. Все структуры матричных элементов преобразовались с помощью преобразования Лоренца от движущейся системы к системе покоя. При этом квадратичные комбинации матричных элементов приобретали достаточно громоздкий вид.

В работе предлагается получать компактные выражения для сечений каскадных реакций, используя специальное представление матричных элементов, а также состояния с пуанкаре-инвариантными спиральностями, которые были введены в работах [2], [3]. Кроме этого, для того, чтобы учесть экспериментальные ограничения на кинематические переменные конечных частиц, образующихся в каскадных реакциях, в работе будет использовано улучшенное приближение узкой ширины (см., например, [1]).

### 1 Сечение каскадного процесса

$$ab \rightarrow cd \rightarrow 12 + 34$$

Рассмотрим каскадную реакцию

$$ab \rightarrow cd \rightarrow 12 + 34, \quad (1.1)$$

где частицы  $c$  и  $d$  являются нестабильными и распадаются по каналам:  $c \rightarrow 12$  и  $d \rightarrow 34$ . Частицы  $a, b, c, d$  и  $1, 2, 3, 4$  характеризуются 4-импульсами  $p_a, p_b, p_c, p_d$  и  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , а также спиральностями (проекциями спина)  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  соответственно.

Для описания такой реакции (1.1) удобно ввести следующие обозначения

$$k_{ij} = k_i + k_j, s = (p_a + p_b)^2, \\ s_{12} = (k_1 + k_2)^2, s_{34} = (k_3 + k_4)^2.$$

Матричный элемент реакции (1.1) допускает факторизацию в виде (см., например, [4])

$$\mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2; \lambda_3, \lambda_4}^{\lambda_a, \lambda_b}(ab \rightarrow cd \rightarrow 1234) = \\ = (s_{12} - m_c^2 + i m_c \Gamma_c)^{-1} (s_{34} - m_d^2 + i m_d \Gamma_d)^{-1} \times \\ \times \sum_{\lambda_d} \mathcal{M}_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(ab \rightarrow cd) \mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_c}(c \rightarrow 12) \mathcal{M}_{\lambda_3, \lambda_4}^{\lambda_d}(d \rightarrow 34),$$

где  $\Gamma_{c,d}$  – полные ширины распадов нестабильных частиц  $c$  и  $d$ . В данном подходе нестабильные частицы трактуются так же, как виртуальные частицы, находящиеся вне массовой оболочки при  $s \neq m^2 - i \Gamma$ .

Используя улучшенное приближение узкой ширины для промежуточных состояний  $c$  и  $d$ , получим сечение вида

$$d\sigma(ab \rightarrow 12 + 34) = \\ = \text{BR}(c \rightarrow 12) \text{BR}(d \rightarrow 34) \times \\ \times \sum_{\lambda_c, \lambda_d} \sum_{\lambda_c', \lambda_d'} T_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_c, \lambda_c'}(ab \rightarrow cd) T_{\lambda_c, \lambda_c'}^{\lambda_c, \lambda_c'}(c \rightarrow 12) T_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_d, \lambda_d'}(d \rightarrow 34),$$

где функции, связанные с рождением частиц  $c, d$  и распадами  $c \rightarrow 12, d \rightarrow 34$ , определены соотношениями:

$$T_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_c, \lambda_c'}(ab \rightarrow cd) = \\ = \int d\text{Lips}(s; p_c, p_d) R_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_c, \lambda_c'}(ab \rightarrow cd), \\ R_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_c, \lambda_c'}(ab \rightarrow cd) = \\ = \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{1}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \times \\ \times \sum_{\lambda_a, \lambda_b} \mathcal{M}_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(ab \rightarrow cd) \mathcal{M}_{\lambda_c, \lambda_d}^{*\lambda_a, \lambda_b}(ab \rightarrow cd),$$

$$T_{\lambda_c, \lambda_c'}^{\lambda_c, \lambda_c'}(c \rightarrow 12) = \\ = \int d\text{Lips}(m_c; k_1, k_2) R_{\lambda_c, \lambda_c'}^{\lambda_c, \lambda_c'}(c \rightarrow 12),$$

$$R_{\lambda_c, \lambda_c'}^{\lambda_c, \lambda_c'}(c \rightarrow 12) = \\ = \frac{1}{2m_c \Gamma(c \rightarrow 12)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_c}(c \rightarrow 12) \mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2}^{*\lambda_c}(c \rightarrow 12),$$

$$T_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_d, \lambda_d'}(d \rightarrow 34) = \\ = \int d\text{Lips}(m_d; k_3, k_4) R_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_d, \lambda_d'}(d \rightarrow 34),$$

$$R_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_d, \lambda_d'}(d \rightarrow 34) = \frac{1}{2m_d \Gamma(d \rightarrow 34)} \times \\ \times \sum_{\lambda_3, \lambda_4} \mathcal{M}_{\lambda_3, \lambda_4}^{\lambda_d}(d \rightarrow 34) \mathcal{M}_{\lambda_3, \lambda_4}^{*\lambda_d}(d \rightarrow 34).$$

Функции  $\text{BR}(c \rightarrow 12) = \Gamma(c \rightarrow 12) / \Gamma_c$  и  $\text{BR}(d \rightarrow 34) = \Gamma(d \rightarrow 34) / \Gamma_d$  определяют относительные вероятности распадов (бренчинги) частиц  $c$  и  $d$ . Все 4-импульсы в (1.2) принадлежат массовой поверхности, т. е.  $p_c^2 = (k_1 + k_2)^2 = m_c^2, p_d^2 = (k_3 + k_4)^2 = m_d^2$  и  $k_i^2 = m_i^2, i = 1, \dots, 4$ .

Функция  $d\text{Lips}$  задает лоренц-инвариантный фазовый объем (см. [4], [5]), бесконечно малый элемент которого в фазовом пространстве  $n$  вторичных частиц записывают в виде

$$d\text{Lips}(P^2; k_1, \dots, k_n) = \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - (k_1 + \dots + k_n)) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{((2\pi)^3 2E_i)}.$$

Если в уравнении (1.2) интегрирование производится по всему фазовому объему для конечных частиц 1, 2 и 3, 4, то будут выполняться соотношения [4]:

$$\int R_{\lambda_c, \lambda_c'}^{\lambda_c, \lambda_c'}(c \rightarrow 12) d\text{Lips}(M_c; k_1, k_2) = \delta_{\lambda_c, \lambda_c'}, \\ \int R_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_d, \lambda_d'}(d \rightarrow 34) d\text{Lips}(M_d; k_3, k_4) = \delta_{\lambda_d, \lambda_d'}.$$

Тогда сечение (1.2) трансформируется к виду, который получают в обычном приближении узкой ширины. Экспериментальные ограничения приводят к тому, что интегрирование происходит не во всем фазовом пространстве и поэтому уравнения (1.9) не выполняются.

Таким образом, для того чтобы вычислить сечение (1.2), необходимо произвести расчет матричных элементов процессов  $ab \rightarrow cd, c \rightarrow 12$  и  $d \rightarrow 34$  и их билинейных комбинаций с последующим интегрированием.

## 2 Методика вычисления каскадного процесса

Для того, чтобы получить компактную запись этого сечения, расчет ингредиентов сечения (1.1) проведем в системе центра инерции частиц  $a$  и  $b$ .

### 2.1 Вычисление матричных элементов реакции $ab \rightarrow cd$

На первом этапе в сечении (1.1) трансформируем величину (1.3) к удобному для интегрирования по фазовому пространству бинарной реакции  $ab \rightarrow cd$  виду.

Применяя соотношение для лоренц-инвариантного фазового объема в системе центра инерции частиц  $ab$

$$d\text{Lips}(s; p_c, p_d) = \\ = \frac{\lambda^{1/2}(M_{cd}^2, m_c^2, m_d^2)}{2(4\pi)^2 M_{cd}^2} \delta(\sqrt{s} - M_{cd}) dM_{cd} d\Omega, \\ M_{cd}^2 = (p_c + p_d)^2$$

получаем, что функция (1.3) преобразуется к виду

$$T_{\lambda_d, \lambda_c}^{\lambda_a, \lambda_b}(ab \rightarrow cd) = \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_c^2, m_d^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \times \sum_{\lambda_a, \lambda_b} \int \sin \theta d\theta d\phi \mathcal{M}_{\lambda_a, \lambda_b; \lambda_c, \lambda_d}(ab \rightarrow cd) \times \mathcal{M}_{\lambda_a, \lambda_b; \lambda_c, \lambda_d}^*(ab \rightarrow cd), \quad (2.1)$$

где

$$\lambda(a, b, c) = (a - b - c)^2 - 4bc = \left( a - \left[ \sqrt{b} + \sqrt{c} \right]^2 \right) \left( a - \left[ \sqrt{b} - \sqrt{c} \right]^2 \right).$$

Далее матричные элементы диаграмм Фейнмана процесса  $ab \rightarrow cd$  представим в виде

$$M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(s, t) = F(s, t) \sum_{J=0}^k h_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(J, s) D_{\lambda_{ab}, \lambda_{cd}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi), \quad (2.2)$$

где

$$\lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j; \quad k = \max(|\lambda_{ab}|, |\lambda_{cd}|); \quad s = (p_a + p_b)^2; \quad t = (p_a - p_c)^2.$$

Фактор  $F(s, t)$  является лоренц-инвариантным скалярным коэффициентом и содержит зависимость от угла рассеяния  $\theta$  частицы  $c$  только в знаменателе, т. е.

$$F(s, t) = \frac{a(s)}{\cos \theta - y}. \quad (2.3)$$

Функции  $a(s)$  и  $y$  зависят только от переменной  $s$  и масс частиц реакции  $ab \rightarrow cd$ . Матричный элемент  $M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}$  в сечении (1.2) представляет собой сумму матричных элементов  $M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(s, t)$  (2.2).

Следовательно, билинейная комбинация  $M_{\lambda_a, \lambda_b; \lambda_c, \lambda_d}(ab \rightarrow cd) M_{\lambda_a, \lambda_b; \lambda_c, \lambda_d}^*(ab \rightarrow cd)$ ,

входящая в уравнение (2.1), будет представлять собой сумму слагаемых вида

$$M_i M_j^* = F_i(s, t) F_j^*(s, t) \times \sum_{J_i=0}^{k_i} \sum_{J_j=0}^{k_j} h_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(J_i, s) h_{\lambda_c, \lambda_d}^{*\lambda_a, \lambda_b}(J_j, s) \times \sum_{\ell=|J_i-J_j|}^{J_i+J_j} (-1)^{\lambda_{cd}-\lambda_{ab}} \begin{Bmatrix} \lambda_{ab} & \lambda_{cd} & J_i \\ -\lambda_{ab} & -\lambda_{cd} & J_j \end{Bmatrix} \ell \times D_{0, \lambda_{cd}-\lambda_{cd}}^{\ell}(\phi, \theta, -\phi), \quad (2.4)$$

где функция от произведения коэффициентов Клебша – Гордана  $\mathbf{C} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{Bmatrix}$  группы  $SU(2)$  определяется уравнением

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & j \\ m_1 & m_2 & j \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & m_1 & \lambda_1 + m_1 \end{Bmatrix} \mathbf{C} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_2 & m_2 & \lambda_2 + m_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

Для сокращения записи введем частный вариант символа (2.5)

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 & j_1 \\ \lambda_2 & j_2 \end{Bmatrix} j \equiv \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & j \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & j \end{Bmatrix} j.$$

Соотношение (2.4) позволяет провести интегрирование по угловым переменным  $\theta$  и  $\phi$  в уравнении (2.1). Как правило, экспериментальные ограничения (особенно при высоких энергиях) приводят к уменьшению области интегрирования для угла  $\theta$ :  $z_1 \leq z = \cos \theta \leq z_2$ ,  $|z_{1,2}| < 1$ . При этом интервал для угла  $\phi$  остается неизменным, т. е.  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

В итоге уравнение (2.1) можно представить в виде, используя (2.2) и (2.4),

$$T_{\lambda_d, \lambda_c}^{\lambda_a, \lambda_b}(ab \rightarrow cd) = \frac{1}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{1}{32\pi s} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_c^2, m_d^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \delta_{\lambda_{cd}, \lambda_{cd}} \times \sum_{\lambda_a, \lambda_b} \sum_{i, j} B_{ij}(\lambda_a, \lambda_b; \lambda_c, \lambda_d; \lambda_c', \lambda_d'), \quad (2.6)$$

где

$$B_{ij}(\lambda_a, \lambda_b; \lambda_c, \lambda_d; \lambda_c', \lambda_d') = a_i(s) a_j^*(s) \sum_{J_i=0}^{k_i} \sum_{J_j=0}^{k_j} h_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(J_i, s) \times h_{\lambda_c, \lambda_d}^{*\lambda_a, \lambda_b}(J_j, s) \sum_{\ell=|J_i-J_j|}^{J_i+J_j} \begin{Bmatrix} \lambda_{ab} & J_i \\ \lambda_{cd} & J_j \end{Bmatrix} \ell \mathcal{I}_\ell(y_i, y_j; z_2, z_1). \quad (2.7)$$

Функция  $\mathcal{I}_\ell(y_i, y_j; z_2, z_1)$  в (2.7) представляет интеграл с полиномом Лежандра 1-го рода  $P_\ell(z)$  вида

$$\mathcal{I}_\ell(y_i, y_j; z_2, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(z)}{(z - y_i)(z - y_j)} dz, \quad (2.8)$$

которая может переходить и в следующие интегралы

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(z)}{(z - y_i)} dz, \quad \int_{z_1}^{z_2} P_\ell(z) dz, \quad (2.9)$$

если скалярные факторы  $F$  в некоторых диаграммах Фейнмана не зависят от угла  $\theta$ .

С помощью соотношения

$$\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) P_k(x) (P_k(y) w_{n-1}(y) - P_n(y) w_{k-1}(y)), \quad n \geq 1,$$

где  $w_n(y)$  [6, с.1033, формула 8.831]

$$w_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)} P_k(y) P_{n-k}(y), \quad w_{-1}(y) = 0$$

интегралы (2.8) и (2.9) могут быть вычислены аналитически для произвольного числа  $\ell$ .

Для получения  $M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(s, t)$  в виде (2.2) используем метод базисных спиноров [7]–[9], в котором такое представление для спиральных состояний частиц часто получается автоматически.

### 2.2 Вычисление распадов $c \rightarrow 12$ и $d \rightarrow 34$

Следующий этап расчета сечения каскадного процесса состоит в вычислении величин (1.5) и (1.7). Отличительным моментом, по сравнению со стандартными методиками, является то, что функции (1.5) и (1.7) должны быть вычислены в той же системе отсчета, что и (1.3). В нашем случае, это система центра инерции частиц  $a$  и  $b$ .

Однако, функции (1.5) и (1.7) намного проще вычислить в системе покоя частиц  $c$  и  $d$  соответственно. В работе [1] такой расчет предлагается сделать с помощью преобразования Лоренца, которое трансформирует матричные элементы из системы, где частица  $c$  движется с 4-импульсом

$$p_c = \{E_c, |\mathbf{p}_c| \sin \theta \cos \phi, |\mathbf{p}_c| \sin \theta \sin \phi, |\mathbf{p}_c| \cos \theta\}$$

в систему покоя частицы  $c$ ,  $\mathbf{p}_c = 0$ . Для этого требуется знание векторов поляризации и 4-импульсов частиц, участвующих в реакции.

При этом имеется важный технический момент. Поскольку существует определенный произвол в построениях 4-векторов реакции, возникает ситуация когда функции (1.5) и (1.7) зависят от угла  $\phi$ . Это приводит к необходимости рассчитывать интегралы по переменной  $\phi$  в (1.3) только после соответствующих расчетов функций (1.5) и (1.7) [1].

Для того чтобы упростить эту задачу, в работе предлагается использовать состояния с пуанкаре-инвариантными спиральностями для конечных частиц 1–4 [2], [3]. Проведем построение состояния частиц 1 и 2 с помощью аппарата группы Пуанкаре.

Построение вектора состояния двух частиц начинают в системе центра инерции

$$\mathbf{P}_{12} = \tilde{\mathbf{k}}_1 + \tilde{\mathbf{k}}_2 = 0,$$

когда частица 1 движется вдоль оси  $Z$ , а частица 2 – против  $Z$ . Тогда вектор двухчастичной системы запишется в виде

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{\mathbf{k}}_1, 0, 0, \lambda_1 \right\rangle \left| -\tilde{\mathbf{k}}_1, 0, 0, \lambda_2 \right\rangle = \\ & = \mathcal{U} \left[ L_z(V_{k_1}) \right] \left| 0, 0, 0, \lambda_1 \right\rangle \mathcal{U} \left[ L_z(V_{k_2}) \right] \left| 0, 0, 0, -\lambda_2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $L_{\pm z}(V_p)$  преобразования буста вдоль и против оси  $Z$  с 4-скоростью  $V_p = p/m$ .

Затем, применяя к состоянию (2.10) вращение  $\mathcal{U} \left[ R(\phi, \theta, -\phi) \right]$ , получаем, что частица 1 движется в направлении, задаваемым углами  $\theta_1, \phi_1$ , а частица 2 движется в противоположном направлении:

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{\mathbf{k}}_1, \lambda_1; \tilde{\mathbf{k}}_2, \lambda_2 \right\rangle = \\ & = \left| \tilde{\mathbf{k}}_1, \theta_1, \phi_1, \lambda_1 \right\rangle \left| \tilde{\mathbf{k}}_2, \pi - \theta_1, \phi_1 + \pi, \lambda_2 \right\rangle \equiv \\ & \equiv \left| \mathbf{P}_{12} = 0, \tilde{\mathbf{k}}, \theta_1, \phi_1, \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle = \\ & = \mathcal{U} \left[ R(\phi, \theta, -\phi) \right] \left| \tilde{\mathbf{k}}_1, 0, 0, \lambda_1 \right\rangle \left| -\tilde{\mathbf{k}}_1, 0, 0, \lambda_2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{k}}_1 = \tilde{\mathbf{k}}_2$  согласно определению системы центра инерции.

Для системы с  $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \neq 0$  необходимо сделать преобразование вида

$$\mathcal{U} \left[ R(\phi, \theta, -\phi) \right] \mathcal{U} \left[ L_z(V_{P_{12}}) \right], \quad (2.12)$$

в котором углы  $\phi, \theta$  определяют ориентацию импульса  $\mathbf{P}_{12}$ .

В итоге имеем, что система двух частиц описывается векторами состояния

$$\begin{aligned} & \mathcal{U} \left[ R(\phi, \theta, -\phi) \right] \mathcal{U} \left[ L_z(V_{P_{12}}) \right] \left| \mathbf{P}_{12} = \right. \\ & = 0, \tilde{\mathbf{k}}, \theta, \phi, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \\ & = \left| \mathbf{P}_{12}, \tilde{\mathbf{k}}, \theta_1, \phi_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где 4-импульсы определены следующим образом:

$$k_{1,2} = R(\phi, \theta, -\phi) L_z(V_{P_{12}}) \tilde{k}_{1,2}, \quad \mathbf{P}_{12} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2.$$

Такое построение приводит к тому, что состояния частиц 1 и 2 не являются спиральными, поскольку закон преобразования требует появления вignerовских вращений, связанных с преобразованием от системы центра инерции к движущейся системе. Спиновые состояния в (2.13) являются собственными значениями пуанкаре-инвариантных операторов спиральностей [3]:

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{W_j^\mu P_\mu}{\sqrt{(k_j P_i)^2 - m_j^2 P_i^2}}, \quad j = (1, 2).$$

Здесь  $W^\mu$  – оператор спина Паули – Любанского

$$W_j^\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\tau\nu\mu} M^{\rho\tau} k_j^\nu.$$

В системе  $\mathbf{P} = 0$  все эти операторы совпадают с операторами спиральностей частиц реакции.

Вектор состояния  $|\mathbf{p}_c, J, \lambda_c\rangle$  для частицы  $c$  с спиральностью  $\lambda_c$  определяется формулой

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{p}_c, \theta, \phi, \lambda_c \right\rangle = \\ & = \mathcal{U} \left[ R(\phi, \theta, -\phi) \right] \mathcal{U} \left[ L_z(V_{p_c}) \right] \left| 0, 0, 0, \lambda_c \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

а для частицы  $d$  с спиральностью  $\lambda_d$

$$\left| \mathbf{p}_d, \theta, \phi, \lambda_d \right\rangle =$$

$$= \mathcal{U} [R(\phi, \theta, -\phi)] \mathcal{U} [L_{-z}(V_{pd})] |0, 0, 0, -\lambda_d\rangle.$$

Матричные элементы с пуанкаре-инвариантными спиральностями будут отличаться от обычных спиральностей наличием  $D$ -матрицы вигнеровского вращения. Если частицы 1 и 2 не поляризованы, то модуль квадрата матричного элемента с пуанкаре-инвариантными спиральностями совпадет с модулем квадрата для обычных спиральностей вследствие унитарности  $D$ -матриц при суммировании по проекциям спина.

Тогда, используя (2.11), (2.12) и (2.14), можно показать, что  $S$ -матричного элемента распада  $c \rightarrow 12$  выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_c, J, \lambda_c | S | \mathbf{k}_1, \tilde{\lambda}_1; \mathbf{k}_2, \tilde{\lambda}_2 \rangle &= \\ &= \langle \tilde{\mathbf{p}}_c = 0, J, \lambda_c | S | \tilde{\mathbf{k}}_1, \lambda_1; \tilde{\mathbf{k}}_2, \lambda_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

в силу релятивистской инвариантности  $S$ -матрицы.

Поэтому, если сразу предположить, что возникшие в результате каскадных распадов частицы имеют пуанкаре-инвариантные спиральности, построенные по формулам (2.11) и (2.12), то, в силу (2.15), не требуется дополнительного пересчета матричных элементов от движущейся частицы  $c$  к системе ее покоя. Это делает расчеты с пуанкаре-инвариантными спиральностями намного проще, чем обычными. Аналогичная схема реализуется и для распада  $d \rightarrow 34$ .

Схема вычисления функций (1.5) и (1.7) аналогична расчету функций (1.3). В итоге получим

$$\begin{aligned} T_{\lambda_c, \lambda_c'}(c \rightarrow 12) &= \\ &= \frac{1}{32\pi m_c^3} \frac{\lambda^{1/2}(m_c^2, m_1^2, m_2^2)}{\Gamma(c \rightarrow 12)} \delta_{\lambda_c, \lambda_c'} \times \\ &\times \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{i, j} a_i(s) a_j^*(s) h_{\lambda_1, \lambda_2}^J(i) h_{\lambda_1, \lambda_2}^{*J}(j) \times \\ &\times \sum_{\ell=0}^{2J} \begin{Bmatrix} \lambda_c & J \\ \lambda_{12} & J \end{Bmatrix} \ell \Big| I_\ell(z_2, z_1), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $s = m_c^2$  и

$$I_\ell(z_2, z_1) = F_\ell(z_2) - F_\ell(z_1), \quad (2.17)$$

$$F_\ell(z) = \frac{P_{\ell+1}(z) - P_{\ell-1}(z)}{2\ell + 1}, \quad P_{-1}(z) = 1.$$

Для функции (1.7) получаем выражение, аналогичное (2.16). Как следует из уравнений (2.6) и (2.16), при условии отсутствия ограничения на углы  $\phi$ ,  $\phi_{1,3}$  для функций (1.3), (1.5) и (1.7), сечение (1.2) упрощается

$$\begin{aligned} d\sigma(ab \rightarrow 12 + 34) &= \\ &= \text{BR}(c \rightarrow 12) \text{BR}(d \rightarrow 34) \times \\ &\times \sum_{\lambda_c, \lambda_d} \tilde{T}_{\lambda_d}^{\lambda_c}(ab \rightarrow cd) \tilde{T}_{\lambda_c}(c \rightarrow 12) \tilde{T}_{\lambda_d}(d \rightarrow 34), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $T_{\lambda_d, \lambda_d'}^{\lambda_c, \lambda_c'} = \delta_{\lambda_c, \lambda_c'} \delta_{\lambda_d, \lambda_d'} \tilde{T}_{\lambda_d}^{\lambda_c}$  и

$$T_{\lambda_c, \lambda_c', \lambda_d, \lambda_d'} = \delta_{\lambda_c, \lambda_c', \lambda_d, \lambda_d'} \tilde{T}_{\lambda_c, \lambda_d}.$$

Таким образом, у нас имеются все необходимые компоненты для сечения (1.2) с учетом возможных кинематических экспериментальных ограничений. Расчет конкретного процесса будет приводить к различным наборам параметров  $a(s)$ ,  $y_i$  и спиральных амплитуд  $h_i$ . Для получения  $M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(s, t)$  в виде (2.2) удобно использовать метод базисных спиноров [7]–[9], в котором такое представление для спиральных состояний частиц часто получается автоматически.

### 3 Каскадный процесс $e^- e^+ \rightarrow t\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b} W^+ b$

Рассмотрим, как работает предлагаемая методика на примере вычисления каскадного процесса

$$e^- e^+ \rightarrow t\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b} W^+ b \quad (3.1)$$

в борновском приближении. В данном примере не рассматривается последующий распад  $W$ -бозонов.

На первом этапе рассчитаем матричные элементы диаграмм Фейнмана для бинарной реакции

$$\begin{aligned} e^-(p_a, \lambda_a, m_e) e^+(p_b, \lambda_b, m_e) \rightarrow \\ \rightarrow t(p_c, \lambda_c, m_t) \bar{t}(p_d, \lambda_d, m_t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Амплитуда процесса (3.2) в борновском приближении представляет сумму двух матричных элементов процесса

$$M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b} = M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(\gamma) + M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(Z^0),$$

где

$$\begin{aligned} M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(\gamma) &= (-1)(4\pi\alpha/s) Q_e Q_t \bar{v}_{\lambda_b}(p_2) \times \\ &\times \gamma_\mu u_{\lambda_a}(p_1) \bar{u}_{\lambda_c}(k_1) \gamma^\mu v_{\lambda_d}(k_2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(Z^0) &= (-1)(4\pi\alpha/s) \chi_s(Z) \times \\ &\times (g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu / M_Z^2) \bar{v}_{\lambda_b}(p_2) \gamma_\nu (g_V^i + g_A^i \gamma_5) \times \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\times u_{\lambda_a}(p_1) \bar{u}_{\lambda_c}(k_1) \gamma_\mu (g_V^t + g_A^t \gamma_5) v_{\lambda_d}(k_2).$$

В уравнениях (3.3) и (3.4):  $\chi_s(Z) = \frac{s}{s - M_Z^2}$ ;

$Q_f$  – заряд фермиона  $f$  в единицах  $|e|$ ;  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры. Функции  $g_V^f, g_A^f$  являются константами связи массивных фермионов  $f$  с  $Z^0$ -бозоном.

Применяя метод базисных спиноров для вычисления борновской амплитуды с обменом  $Z^0$ -бозоном, получим, что

$$\begin{aligned} M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(Z^0) &= \\ &= (8\pi\alpha) \sum_{J=0}^1 h_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(J, Z) D_{\lambda_{ab}, \lambda_{cd}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $\lambda_{ab} = (\lambda_a - \lambda_b) / 2$ ,  $\lambda_{cd} = (\lambda_c - \lambda_d) / 2$  и



$$h_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(0, Z) = 2\lambda_c \lambda_a \delta_{\lambda_d, \lambda_c} \delta_{\lambda_b, \lambda_a} g_A^t g_A^e \frac{m_i m_e}{M_Z^2},$$

$$h_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(1, Z) = \chi_s(Z) \left( \tilde{g}_{\lambda_c}^t \delta_{\lambda_d, -\lambda_c} + g_V^t \delta_{\lambda_d, \lambda_c} \tilde{\eta}_t \right) \times (3.6) \\ \times \left( \tilde{g}_{\lambda_a}^e \delta_{\lambda_b, -\lambda_a} + g_V^e \delta_{\lambda_b, \lambda_a} \tilde{\eta}_e \right).$$

В уравнении (3.6) введены дополнительные функции, связанные с константами связи и массами частиц

$$\tilde{g}_\lambda^i = (g_V^i + \lambda \beta_i g_A^i),$$

$$\beta_i = \sqrt{1 - 4 \frac{m_i^2}{s}}, \quad \tilde{\eta}_i = \sqrt{\frac{2}{s}} m_i, \quad \lambda = \pm 1.$$

Матричный элемент, соответствующий диаграмме с обменом  $\gamma$ -квантом, получается с помощью замены вида  $g_V^i \rightarrow Q_e Q_i, g_A^i \rightarrow 0$  и  $\chi_s(Z) \rightarrow 1$  из матричного элемента (3.5) с обменом  $ZZ^0$ -бозоном. В итоге получим, что

$$M_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(\gamma) = 8\pi\alpha h_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(1, \gamma) D_{\lambda_{ab}, \lambda_{cd}}^{*1}(\phi, \theta, -\phi), \quad (3.7)$$

где спиральная амплитуда имеет вид

$$h_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(1, \gamma) = \\ = Q_e Q_t \left( \delta_{\lambda_d, -\lambda_c} + \delta_{\lambda_d, \lambda_c} \tilde{\eta}_t \right) \left( \delta_{\lambda_b, -\lambda_a} + \delta_{\lambda_b, \lambda_a} \tilde{\eta}_e \right).$$

Поскольку реакция (3.2) описывается только диаграммами Фейнмана  $s$ -канального типа, то зависимость от углов  $\theta$  и  $\phi$  присутствует в матричных элементах только в числителе. Отметим, что вычисления проведены без каких-либо допущений относительно масс фермионов реакции (3.2).

С учетом уравнений (2.1), (3.5) и (3.7) и комментария для формулы (2.18) получим, что

$$\tilde{T}_{\lambda_d}^{\lambda_c}(ab \rightarrow cd) = \frac{\pi\alpha^2 \beta_t}{2s \beta_e} \sum_{\lambda_a, \lambda_b} \tilde{B}_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}, \quad (3.8)$$

где

$$\tilde{B}_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b} = |h_{0,Z}|^2 + \\ + 2\text{Re} \left[ (h_{1,\gamma} + h_{1,Z}) h_{0,Z}^* \right] I_1(z_2, z_1) + \\ + |h_{1,\gamma} + h_{1,Z}|^2 \sum_{\ell=0}^2 \left\{ \begin{matrix} \lambda_{ab} & 1 \\ \lambda_{cd} & 1 \end{matrix} \middle| \ell \right\} I_\ell(z_2, z_1). \quad (3.9)$$

В формуле (3.9) функция  $I_\ell(z_2, z_1)$  определяется уравнением (2.17) и использована замена

$$h_{\lambda_c, \lambda_d}^{\lambda_a, \lambda_b}(n, i) \rightarrow h_{n,i}.$$

Следующий шаг состоит в вычислении функций (1.5) и (1.7) для распадов

$$t(p_e, \lambda_c, m_t) \rightarrow \\ \rightarrow W^+(k_1, \lambda_1, M_W) + b(k_2, \lambda_2, m_b), \quad (3.10)$$

$$\bar{t}(p_d, \lambda_d, m_t) \rightarrow \\ \rightarrow W^-(k_3, \lambda_3, M_W) + \bar{b}(k_4, \lambda_4, m_b). \quad (3.11)$$

Матричные элементы распадов (3.10) и (3.11) в борновском приближении имеют вид:

$$M_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_c} (t \rightarrow W^+ b) = \\ = \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{s_W} V_{tb}^* \bar{u}_{\lambda_2}(k_2) \hat{\varepsilon}_{\lambda_1}^*(k_1) \omega_{-u_{\lambda_c}}(p_c), \quad (3.12)$$

$$M_{\lambda_3, \lambda_4}^{\lambda_d} (\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b}) = \\ = -\frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{s_W} V_{tb} \bar{v}_{\lambda_4}(p_d) \hat{\varepsilon}_{\lambda_3}^*(k_3) \omega_{-v_{\lambda_4}}(k_4), \quad (3.13)$$

где  $s_W$  – синус угла Вайнберга – Салама  $\theta_W$ ;  $V_{tb}$  – элемент матрицы Кабиббо – Кобаяси – Маскавы;  $\omega_{\pm} = 1/2(1 - \gamma_5)$  – проективная матрица;  $\varepsilon_\lambda(k)$  – вектор поляризации  $W$ -бозона спиральности  $\lambda = 0, \pm 1$ .

Аналитические выражения для (3.12) и (3.13) принимают наиболее компактный вид, если использовать быстроты  $\chi$  для  $W$ -бозона и  $b$ -кварка:

$$|\mathbf{k}| = M_W \chi_W = m_b \text{sh} \chi_b, \\ E_W = M_W \text{ch} \chi_W, \quad E_b = m_b \text{ch} \chi_b.$$

Используя метод базисных спиноров [7]–[9], получаем

$$M_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_c} (t \rightarrow W^+ b) = \\ = \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{s_W} \sqrt{m_t m_b} V_{tb}^* h_{\lambda_1, \lambda_2}^{1/2} D_{\lambda_c/2, \lambda_1 - \lambda_2/2}^{*1/2}(\phi_1, \theta_1, -\phi_1), \quad (3.14)$$

$$M_{\lambda_3, \lambda_4}^{\lambda_d} (\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b}) = \\ = \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{s_W} \sqrt{m_t m_b} V_{tb} \bar{h}_{\lambda_3, \lambda_4}^{1/2} D_{\lambda_d/2, \lambda_3 - \lambda_4/2}^{*1/2}(\phi_3, \theta_3, -\phi_3), \quad (3.15)$$

где

$$h_{\lambda_1, \lambda_2}^{1/2} = \exp(-\lambda_2 \chi_b / 2) \times \\ \times \left\{ \sqrt{2} \delta_{\lambda_1, 1} \delta_{\lambda_1, \lambda_2} - \lambda_2 \exp(-\lambda_2 \chi_W) \delta_{\lambda_1, 0} \right\}, \\ \bar{h}_{\lambda_3, \lambda_4}^{1/2} = -\exp(\lambda_4 \chi_b / 2) \times \\ \times \left\{ \sqrt{2} \delta_{\lambda_3, 1} \delta_{\lambda_3, \lambda_4} - \lambda_4 \exp(\lambda_4 \chi_W) \delta_{\lambda_3, 0} \right\}.$$

Парциальная ширина распада  $\Gamma(t \rightarrow W^+ b)$  с учетом (3.14) определяется

$$\Gamma(t \rightarrow W^+ b) = \\ = \frac{m_b}{16m_t^2} \frac{\alpha}{s_W^2} \lambda^{1/2}(m_t^2, M_W^2, m_b^2) |V_{tb}|^2 \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |h_{\lambda_1, \lambda_2}^{1/2}|^2. \quad (3.16)$$

Аналогичное (3.16) соотношение имеем и для  $\Gamma(\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b})$ .

Тогда используя (3.16) и (2.16), получаем функции (1.5) и (1.7) для процесса (3.1) в виде

$$\tilde{T}_{\lambda_c}(t \rightarrow W^+ b) = \left[ \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |h_{\lambda_1, \lambda_2}^{1/2}|^2 \right]^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |h_{\lambda_1, \lambda_2}^{1/2}|^2 \sum_{\ell=0}^1 \left\{ \begin{matrix} \lambda_c & 1/2 \\ \lambda_{12} & 1/2 \end{matrix} \right\} \ell \left\} I_\ell(z_2, z_1), \quad (3.17)$$

$$\tilde{T}_{\lambda_d}(\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b}) = \left[ \sum_{\lambda_3, \lambda_4} |h_{\lambda_3, \lambda_4}^{1/2}|^2 \right]^{-1} \times \sum_{\lambda_3, \lambda_4} |h_{\lambda_3, \lambda_4}^{1/2}|^2 \sum_{\ell=0}^1 \left\{ \begin{matrix} \lambda_d & 1/2 \\ \lambda_{34} & 1/2 \end{matrix} \right\} \ell \left\} I_\ell(z_2, z_1). \quad (3.18)$$

Относительная вероятность распада  $BR(\bar{t} \rightarrow W^+ b)$  определяется экспериментально. Таким образом, в работе получены все необходимые компоненты (см. (3.3), (3.17) и (3.18)) для вычисления сечения (2.18) каскадного процесса (3.1) с учетом возможных ограничений на углы рассеяния частиц реакции.

### Заключение

В работе рассмотрена общая методика вычисления каскадных процессов с использованием улучшенного приближения узких резонансов и с учетом возможных экспериментальных ограничений на углы вылета конечных и промежуточных частиц. Важной отличительной чертой методики является использование пуанкаре-инвариантных спиральностей для конечных частиц каскадной реакции. Это позволяет существенно упростить расчеты компонент, связанных с распадами, особенно для массивных частиц. Как уже отмечено, в этом случае не возникает необходимость в преобразовании матричных элементов из одной системы отчета в другую.

Эта методика основана на возможности разложения матричных элементов диаграмм Фейнмана по спиральным амплитудам вида (2.2). Использование авторского метода базисных спинов позволяет получить такое разложение.

Конкретный пример применения данной методики показывает, что сечение каскадного процесса  $ab \rightarrow cd \rightarrow 12 + 34$  имеет компактную форму.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Dittmaier, S.* NLO QCD corrections to  $pp/p\bar{p} \rightarrow WW + jet + X$  including leptonic W-boson decays / S. Dittmaier, S. Kallweit, P. Uwer // Nucl. Phys. – 2010. – Vol. B826. – P. 18–70.
2. *Верле, Ю.* Релятивистская теория реакций / Ю. Верле. – Москва: Атомиздат, 1969. – 442 с.
3. *Новожилов, Ю.В.* Введение в теорию элементарных частиц / Ю.В. Новожилов. – Москва: Наука, 1972. – 472 с.
4. *Пилькун, Х.* Физика релятивистских частиц / Х. Пилькун. – Москва: Мир, 1983. – 542 с.
5. *Бюклинг, Е.* Кинематика элементарных частиц / Е. Бюклинг, К. Каянти. – Москва: Мир, 1975. – 344 с.
6. *Градштейн, И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 4-е пер. изд. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110 с.
7. *Andreev, V.V.* Analytic Calculation of Feynman Amplitudes / V.V. Andreev // Physics of Atomic Nuclei. – 2003. – Vol. 66, № 2. – P. 383–393.
8. *Andreev, V.V.* Scattering QCD amplitudes with massive fermions using recursive relations / V.V. Andreev // Nonlinear phenomena in complex systems. – 2009. – Vol. 12, № 4. – P. 338–342.
9. *Андреев, В.В.* Вычисление фейнмановских диаграмм техникой блоков / В.В. Андреев // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 7–12.

Поступила в редакцию 24.01.2021.

УДК 621.396

## СОЗДАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ 3D ПЕЧАТИ И ФРЕЗЕРОВАНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ МЕТАПОВЕРХНОСТЕЙ, ПОКРЫВАЮЩИХ ОБЪЕКТЫ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

А.П. Балмаков<sup>1</sup>, Д.В. Слепенков<sup>1</sup>, С.А. Хахомов<sup>1</sup>,  
И.В. Семченко<sup>1</sup>, Д. Ванг<sup>2</sup>, В. Сонг<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

<sup>2</sup>Университет Цзяннань, Уси

<sup>3</sup>Пекинский технический институт

## CREATION AND EXPERIMENTAL STUDY OF METASURFACE MODELS COVERING COMPLEX OBJECTS USING 3D PRINTING AND MILLING

A.P. Balmakou<sup>1</sup>, D.V. Slepiankou<sup>1</sup>, S.A. Khakhomov<sup>1</sup>,  
I.V. Semchenko<sup>1</sup>, J. Wang<sup>2</sup>, W. Song<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Francisk Skorina Gomel State University

<sup>2</sup>Jiangnan University, Wuxi

<sup>3</sup>Beijing Institute of Technology

В работе представлены результаты разработок, выполненных с использованием программ автоматизированного проектирования, аддитивных средств производства, таких как 3D принтеры, а также оборудования с числовым программным управлением. Изготовлены и экспериментально исследованы образцы метаповерхностей для экранизации металлических или металлизированных объектов сложной формы и уменьшения отражения излучения от них.

**Ключевые слова:** элементарная ячейка, элемент метаповерхности, омега элемент, электрическая проводимость, преобразование поляризации излучения, безэховая камера, коэффициент поглощения излучения.

The paper presents the results of developments carried out using computer-aided design programs, additive manufacturing tools such as 3D printers, and numerical control equipment. Samples of metasurfaces were made and experimentally investigated for screening metal or metallized objects of complex shape and reducing the reflection of radiation from them.

**Keywords:** unit cell, metasurface element, omega element, electrical conductivity, transformation of radiation polarization, anechoic chamber, radiation absorption coefficient.

### Введение

Объектом исследования в данной работе являются композиционные металл-диэлектрические двумерные периодические структуры с определенной топологией поверхности и электродинамическими параметрами, спроектированные таким образом, что способны взаимодействовать с электромагнитным излучением не типичным для природных материалов образом, приводя к изменению характеристик этого излучения.

Целью данной работы является установление закономерностей взаимодействия электромагнитного излучения микроволнового диапазона с метаповерхностями с целью эффективного изменения электродинамических параметров излучения, исследование различных типов метаповерхностей для достижения расчетных электродинамических характеристик, направленных на эффективное отражение, поглощение, пропускание, преобразование электромагнитного излучения, взаимодействующего со структурой метаповерхности, нахождение необходимых параметров структуры метаповерхности для согласования импеданса метаповерхности с импедансом

свободного пространства, уменьшения коэффициента отражения, а также изготовление экспериментальных образцов метаповерхностей и рассмотрение возможности разработки новых типов электродинамических материалов, основанных на концепции исследуемых метаповерхностей, например, идеальных поглотителей электромагнитного излучения, преобразователей поляризации излучения и др.

Для достижения поставленных целей в работе использованы методы компьютерного моделирования, вариационный и топологический анализ моделей, компьютерное автоматизированное 3D проектирование, экспериментальное исследование комплексных коэффициентов передачи и отражения ( $S_{21}$ ,  $S_{11}$  параметров), а также коэффициента поглощения излучения.

### 1 Создание трехмерных моделей метаповерхностей

С целью создания слабоотражающих тонких поглощающих метаповерхностей для уменьшения отражения микроволнового излучения от металлических / металлизированных объектов

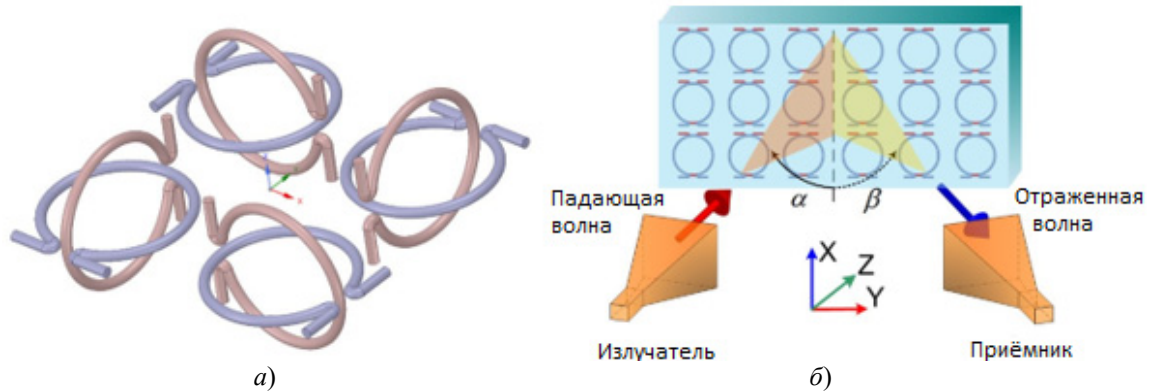


Рисунок 1.1 – Схематическое изображение элементарной ячейки метаматериала и схема проведения эксперимента

а) модель элементарной ячейки метаповерхности, проектируемой для существенного ослабления излучения, взаимодействующего с металлическими или металлизированными объектами сложной топологии поверхности; б) схематическое изображение модели метаповерхности на основе омега элементов, расположенных в двух плоскопараллельных слоях. Показана схема проведения экспериментальных исследований по измерению отраженного сигнала

сложной формы предложено использование метаповерхностей с компенсированной киральностью без металлического слоя у основания, содержащих элементарные элементы омегаобразной формы [1]–[4]. Была разработана компьютерная модель метаповерхности и проведены численные исследования по определению формы и размеров метаповерхности, по результатам которых были предложены два типа метаповерхностей для сильного поглощения излучения (рисунок 1.1, а) и частичного поглощения излучения и преобразования поляризации отраженного сигнала (рисунок 1.1, б).

Вариационный анализ исследуемых структур, проведенный с целью определения параметров метаповерхностей, способствующих максимальному ослаблению отраженного излучения, позволил определить оптимальные параметры метаповерхности, а также параметры элемента метаповерхности. Метаповерхность проектировалась на резонансную длину волны возбуждения  $\lambda_{\text{res}} = 100$  мм, соответствующую частоте 3 ГГц, соответственно длина элемента

$$L = \lambda_{\text{res}} / 2 = 50 \text{ мм, а его радиус } R = \frac{\sqrt{2}-1}{2\pi} = 6,6 \text{ мм,}$$

диаметр сечения  $d = 1$  мм, длина желобка

$$l = 1,5 \text{ мм, длина плеча } a = \frac{L - 2\pi R + l}{2} = 5 \text{ мм}$$

(рисунок 1.2), а также расстояние между соседними омега элементами, лежащими в одной плоскости, в пределах одной элементарной ячейки  $t = 20$  мм и расстояния между соседними элементарными ячейками  $P = 40$  мм для метаповерхности, показанной на рисунке 1.1, а) и межслойный интервал  $I = 2$  мм для метаповерхности, показанной на рисунке 1.1 б).

При создании экспериментального образца метаповерхности, показанной на рисунке 1.1, а),

методами аддитивных 3D технологий была произведена коррекция модели в среде SpaceClaim & Design Spark Mechanical, учитывающая особенности и возможности производственного процесса, как показано на рисунке 1.3, а именно смещение взаимно ортогональных омега элементов в пределах элементарной ячейки ближе к ее центру, а также изменение формы омега элемента на прямоугольную. Данные незначительные изменения элементарной ячейки позволили составить полноценную модель метаповерхности, содержащую подложку, а также элементы фиксации отдельных элементов и всего образца, как показано на рисунке 1.4.

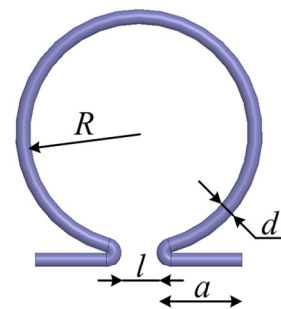


Рисунок 1.2 – Геометрические параметры омега элемента, ответственные за эффективную отражательную и поглощательную способность метаповерхности, а также свойство преобразования поляризации излучения

Разработанная 3D модель импортировалась в слайсер Cura 4.6.2 (или 15.04.06) для составления программ печати 3D принтером (Anycubic 4MaxPro или Anycubic Predator). Подложка для данной метаповерхности изготавливалась из пластика типа PLA, PET-G, а омега элементы – из проводящего пластика FLEX-conductive.

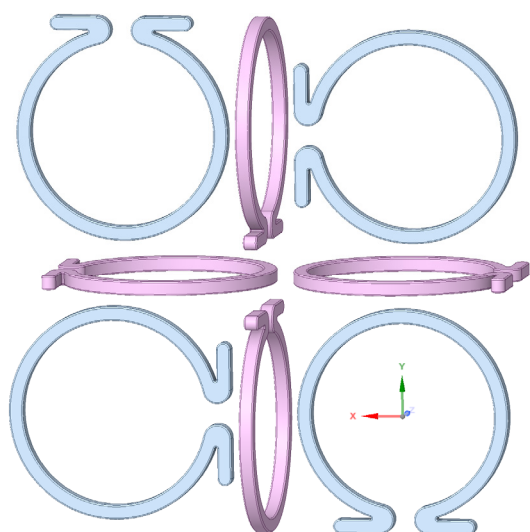


Рисунок 1.3 – Альтернативная модель элементарной ячейки метаповерхности поглотителя излучения

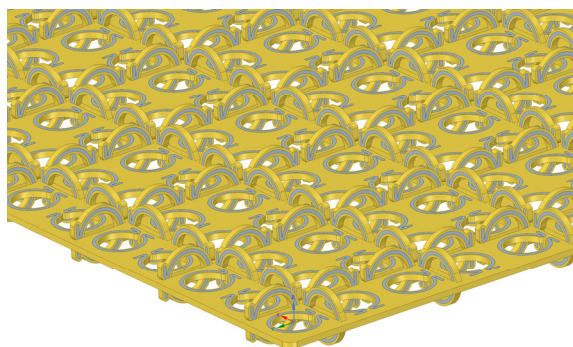


Рисунок 1.4 – Модель метаповерхности с учетом подложки и элементов крепления, для составления управляющей программы для 3D принтеров и оборудования с ЧПУ

В качестве альтернативы 3D модель также импортировалась в среду Vectric Aspire для составления управляющей программы обработки и изготовления подложки образца на фрезерном станке с ЧПУ Cutter HD (CNC-Technology) под управлением Mach 3. Второй вариант изготовления – фрезерная обработка – оказался более предпочтительным по следующим причинам:

1) он позволил создать подложку больших размеров без необходимости состыковок 3D напечатанных частей подложки, вызванной ограниченной рабочей зоной печати 3D принтеров в сравнении с рабочей зоной фрезера;

2) фрезерная обработка дает возможность использования большего количества материалов в качестве подложки для метаповерхности, не ограничиваясь только специализированным пластиком, а позволяет использовать, например, стеклотекстолиты, акриловое стекло, монолитный поликарбонат, вспененный пластик, дерево и др.;

3) фрезерная обработка позволила получить более ровную и однородную подложку;

4) омега элементы, напечатанные пластиком FLEX-conductive, не способны обеспечить расчетную электропроводимость, контролировать величину которой возможно в незначительных пределах лишь заменой на другой проводящий пластик;

5) при фрезеровке в качестве альтернативы 3D печати использовался метод формовки омега элементов из металлических порошков по заданному шаблону в подложке метаповерхности, что позволяет регулировать проводимость отдельных элементов метаповерхности, смешивая различные металлические порошки в различных концентрациях. Для формовки использовались металлические мелкодисперсные порошки меди, при этом акриловый наполнитель использовался в качестве фиксирующего компонента.

Были изготовлены два опытных образца, показанные на рисунках 1.5, 1.6, которые соответствуют ранее исследуемым электродинамическим моделям. При изготовлении метаповерхности-поглотителя излучения, показанной на рисунке 1.5, в качестве каркаса для формовки и крепления омега элементов использовался стеклотекстолит FR-4 (диэлектрическая проницаемость на частоте 1 МГц порядка 5, тангенс угла потерь на этой же частоте порядка 0,025, поверхностное сопротивление порядка  $10^5$  МОм, объемное сопротивление порядка  $10^5$  МОм). Стоит отметить, что толщина полученного образца существенно меньше резонансной длины волны, а именно:  $2R = 13,2 \text{ мм} \approx \lambda_{\text{res}} / 7$ . При изготовлении двухслойного образца на рисунке 1.6, в качестве подложки использовалось акриловое стекло (диэлектрическая проницаемость на частоте 1 МГц порядка 3,5, удельное сопротивление порядка  $10^{13}$  Ом·см). Мелкодисперсный порошок меди использовался в качестве наполнителя для изготовления проводящих омега элементов, при этом использовался акриловый герметик для фиксации.

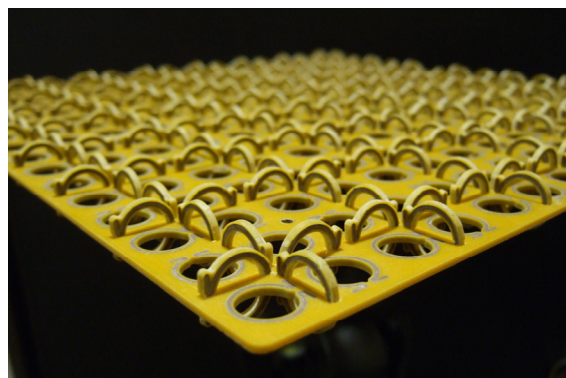


Рисунок 1.5 – Изготовленный экспериментальный образец метаповерхности для сильного поглощения излучения



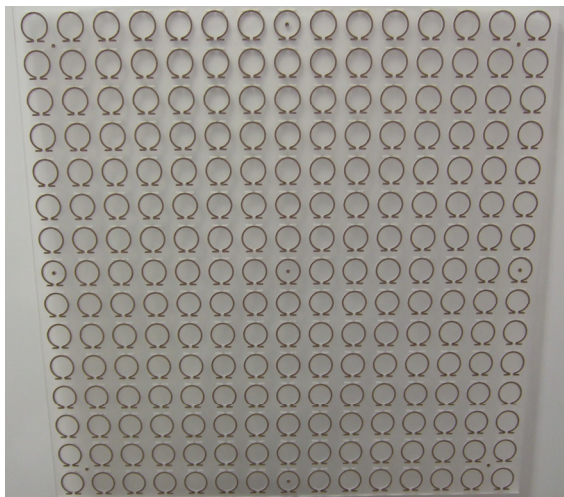


Рисунок 1.6 – Изготовленный экспериментальный образец метаповерхности для частичного поглощения излучения, а также преобразования поляризации отраженного излучения

## 2 Экспериментальное исследование характеристик созданных поглощающих метаповерхностей в безэховой камере

Экспериментальные исследования слабоотражающих тонких поглощающих электромагнитное излучение метаповерхностей проводились в модернизированной безэховой камере лаборатории «Физики волновых процессов» ГГУ им. Ф. Скорины размерами 4,5 x 11,4 x 3,1 м и уровнем безэховости в цилиндрической области  $D = 30$  см по горизонтальной оси симметрии камеры порядка  $-40$  дБ. Камера электродинамически изолирована от внешних электромагнитных воздействий клеткой Фарадея с толщиной листового стали 0,8 мм. Внутренние поверхности камеры покрыты поглотителем микроволнового излучения «ТОРА-25» (для покрытия поверхности входной двери использовался поглотитель «ТОРА-9»), который представляет собой диэлектрический радиопоглощающий материал пирамидального типа (рисунок 2.1) в виде панелей из эластичного пенополиуретана с углеродным наполнителем, предназначенный для поглощения излучения и, тем самым, предотвращения его отражения от металлических стенок клетки Фарадея, обеспечивая рабочий диапазон измерений 1–37,5 ГГц с коэффициентом отражения  $-25 \div -50$  дБ соответственно.

Безэховая камера оснащена современным измерительным оборудованием, состоящим из векторного анализатора цепей (ВАЦ) PicoVNA 106, аппаратно-программного комплекса (АПК) для проведения радиочастотных измерений антенн в дальней зоне ЮСТ FarField, осциллографов Hantek DSO-1062B, 2D72, современных вычислительных компьютеров, антенн П6-23А, П6-126, паяльной станции и др.

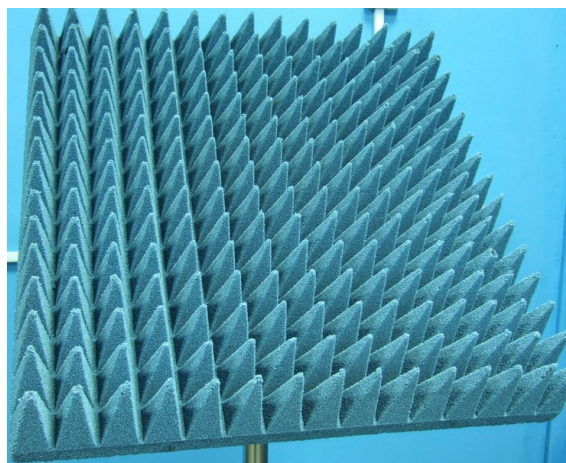
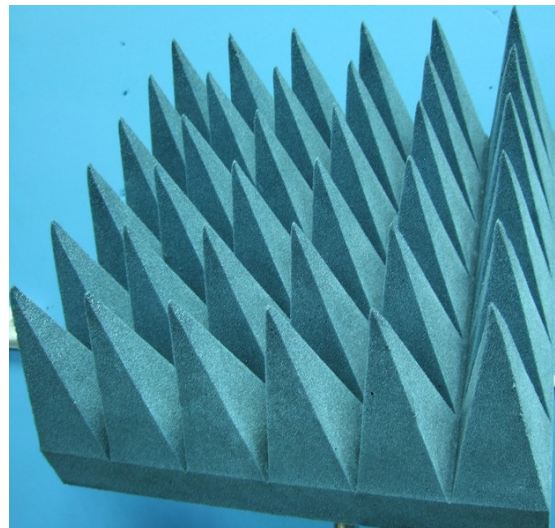
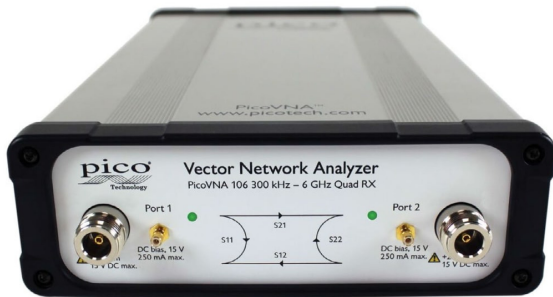


Рисунок 2.1 – Внешний вид поглотителя микроволнового излучения «ТОРА-25» и «ТОРА-9»

ВАЦ PicoVNA 106 (рисунок 2.2, а) позволяет проводить высокоточные измерения электродинамических характеристик антенн, метаматериалов, метаповерхностей и других радиоэлектронных устройств посредством регистрации комплексных коэффициентов передачи и отражения ( $S$ -параметров) устройств как в безэховой камере, так и на открытом пространстве, обеспечивая при этом частотный диапазон измерений от 300 кГц до 6 ГГц при динамическом диапазоне до  $-118$  дБ. ВАЦ PicoVNA 106 обладает двумя высокочастотными портами типа N(f) для подключения передающих и приемных антенн. Для калибровки ВАЦ используется калибратор: TA345 SOLT-STD-F Standard 6 GHz SMA(f), подключаемый к портам ВАЦ посредством фазостабильных кабелей TA336 Standard 6 GHz Nmm-SMAm (рисунок 2.2, б).

АПК для измерения характеристик антенн ЮСТ FarField оснащается автоматизированным опорно-поворотным устройством (ОПУ) второго типа с установленной на него антенной П6-126 для измерения диаграмм направленности



а)



б)

Рисунок 2.2 – Измерительное оборудование  
а) ВАЦ PicoVNA 106, б) Калибраторы и фазостабильные кабели для калибровки ВАЦ PicoVNA 106

амплитудных, фазовых, поляризационных характеристик антенн и новых типов материалов с использованием векторного анализатора цепей PicoVNA 106, а также дополнительным оборудованием для проведения исследований, включая портативный компьютер с операционной системой Windows-10, высокочастотные антенные кабели SMAm-SMAm 1-18 ГГц, лабораторный блок питания MCH K3010DN, осциллографическое оборудование Hantek DSO-1062B, 2D72, переходники для антенн П6-23Ф Nm-SMAf, Nm-SMAm, Nf-SMAf, Nf-SMAm и др. АПК ЮСТ FarField имеет отдельный блок управления ОПУ-2 с соответствующим программным обеспечением для Windows-10, показанный на рисунке 2.3, предназначенный для автоматизированного измерения поворотным методом электромагнитных параметров новых композитных материалов (трехмерных метаматериалов и двумерных метаповерхностей), а также новых типов антенн в безэховой камере, характеристик их направленности. При этом данный комплекс позволяет одновременно измерять амплитудные и фазовые диаграммы направленности, а также коэффициент усиления, поляризационные характеристики, рассчитывать частотные зависимости уровня боковых лепестков, направления и ширины главного максимума диаграммы направленности, координат фазового центра антенны.

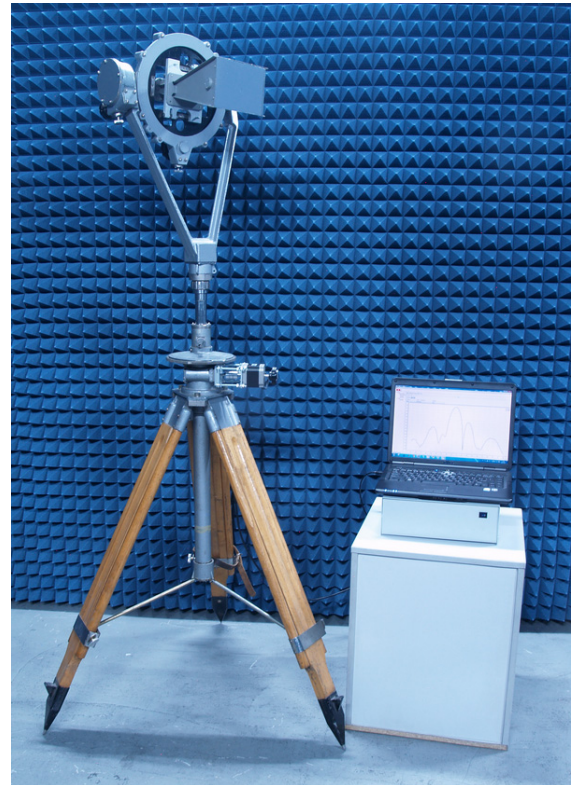


Рисунок 2.3 – Блок управления АПК ЮСТ FarField с портативным компьютером, а также ОПУ-2 с антенной П6-126

Разработанные и изготовленные образцы метаповерхностей экспериментально исследовались в безэховой камере с целью определения комплексных коэффициентов передачи и отражения ( $S_{21}$ ,  $S_{11}$  параметров) с последующим расчетом коэффициента поглощения в операционном диапазоне частот ВАЦ PicoVNA 106 для двух случаев: а) излучение падает по нормали к метаповерхности (рисунок 2.4), б) излучение падает под углом  $30^\circ$  к метаповерхности, как это показано на рисунке 2.5. При этом рассматривались случаи TE и TM моды поляризации падающего линейно-поляризованного излучения.

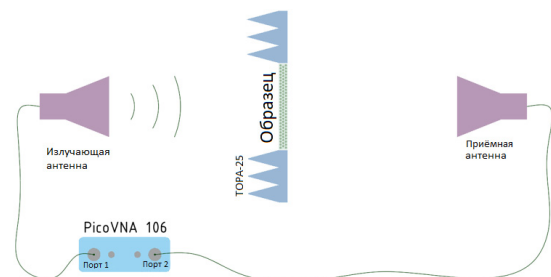


Рисунок 2.4 – Схема проведения экспериментальных исследований по измерению коэффициента поглощения излучения экспериментальным образцом метаповерхности при падении излучения по нормали к метаповерхности



Для генерации и регистрации излучения указанных мод поляризации использовались две широкополосные рупорные антенны П6-23А (рисунок 2.6, а). Данная антенна относится к типу рупорно-линзовых антенн со стандартным волновым сопротивлением 50  $\Omega$ , коаксиальным разъемом N-типа и предназначена для:

- измерения плотности потока энергии,
- создания электромагнитного поля с заданной плотностью,
- измерения параметров антенн различных типов,
- измерения параметров электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств,
- мониторинга электромагнитной обстановки и пеленгации источников электромагнитного излучения совместно с приёмными устройствами.

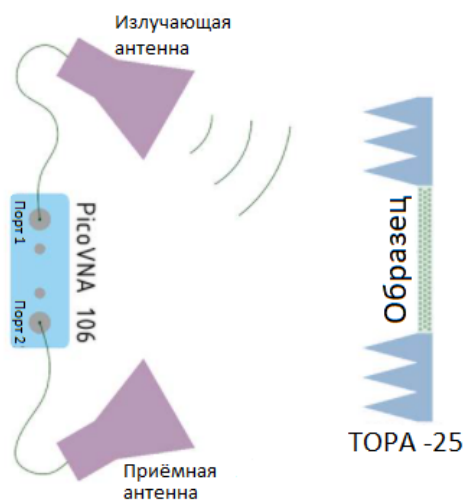


Рисунок 2.5 – Схема проведения экспериментальных исследований по измерению коэффициента поглощения излучения экспериментальным образцом метаповерхности при падении излучения под углом 30° к нормали образца

Технические характеристики антенны П6-23А:

- диапазон частот 1–12 ГГц;
- коэффициент стоячей волны по напряжению (КСВН) < 1,5;
- эффективная площадь не менее 150 см<sup>2</sup>;
- ВЧ-разъем 50 Ом N-типа (7 / 3,04 мм);
- погрешность измерений не более 20%;
- поляризация линейная.

Используемые антенны П6-23А комплектовались треногами (ОПУ) второго типа (рисунок 2.6, б), а именно «Тренога УШЯИ.468539.002 (ОПУ-2)», обеспечивая ориентацию по азимуту, углу места, поляризации и высоте в соответствующих диапазонах:

- углы поворота по азимуту от 0° до 360° с отсчетом 0,1°;
- угол поворота по углу места от –30° до +90° с отсчетом 0,1°;

- угол поворота плоскости поляризации от –95° до +95° с отсчетом 0,1°;
- высота установки оси механизма ориентации (1,35–2,5) м;
- шаг плавной регулировки высоты оси механизма ориентации 0,25 м.

Расстояние между рупорными антеннами при измерении коэффициента прохождения излучения составляло 5 м, при этом образец располагался на равноудаленном расстоянии от излучающей и приемной антенн на специальной диэлектрической вертикальной плоской стойке-держателе, покрытой поглотителем «ТОРА-25» с проемом под установку образца, как показано на рисунке 2.7.



а)



б)

Рисунок 2.6 – Комплект ОПУ с рупорной антенной

- а) широкополосная рупорная антенна П6-23А;
- б) опорно-поворотное устройство «Тренога УШЯИ.468539.002 (ОПУ-2)» для базирования антенны П6-23А

Передающая рупорная антенна подключалась к первому порту ВАЦ коаксиальным кабелем 50 Ом для генерации квазиплоской волны с необходимой линейной поляризацией TE или TM. Прошедшая волна регистрировалась приемной рупорной антенной, соединенной с вторым портом ВАЦ. Регистрация комплексных коэффициентов передачи и отражения ( $S_{21}$ ,  $S_{11}$  параметров) осуществлялась ВАЦ в диапазоне частот от 0,3 до 6 ГГц со скоростью 5500 измерений в секунду.

При проведении экспериментальных исследований выполнялся ряд референтных измерений  $S$  параметров. В случае нормального падения излучения (рисунок 2.4), замерялся комплексный коэффициент отражения излучения ( $S_{11}$ ), когда экспериментальный образец был извлечен из стойки-держателя и образовавшийся проем был заполнен металлическим гладким листом, размеры которого были идентичны размерам исследуемого образца. Металлический лист очень хорошо отражает падающее на него микроволновое излучение, поэтому предполагается, что в этом случае излучение от передающей антенны полностью отражалось от металлического листа, позволяя тем самым получить референтный максимальный отраженный сигнал в исследуемом диапазоне частот.

В случае падения излучения под углом коэффициент отражения излучения от экспериментального образца измерялся по схеме, показанной на рисунке 2.5. При этом также проводились предварительные референтные измерения  $S$  параметров, а именно, замерялся комплексный коэффициент отражения ( $S_{11}$ ) от гладкого металлического листа, установленного в проем стойки-держателя, размеры которого были идентичны размерам исследуемого образца. Предполагается, что все падающее излучение полностью отражается от него под тем же углом, под которым падает, таким образом позволяя измерить максимальный референтный уровень отраженного под углом сигнала в исследуемом диапазоне частот.

Референтный коэффициент прохождения ( $S_{21}$ ) для случаев как нормального падения, так и падения под углом проводился по схеме, показанной на рисунке 2.4. При этом экспериментальный образец был извлечен из стойки-держателя и излучение могло беспрепятственно проходить через образовавшийся проем, площадь которого равнялась площади образца, таким образом позволяя регистрировать референтный максимальный прошедший сигнал в исследуемом диапазоне частот.

После получения всех необходимых экспериментальных референтных данных измерений  $S$ -параметров были извлечены комплексные коэффициенты передачи и отражения для экспериментального образца в операционном диапазоне частот ВАЦ PicoVNA 106.

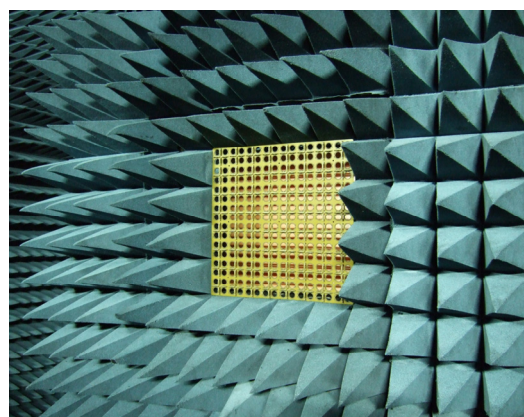


Рисунок 2.7 – Размещение экспериментального образца в безэховой камере на специальной диэлектрической стойке-держателе, покрытой поглотителем микроволнового излучения «ТОРА-25»

Коэффициент поглощения  $A$  излучения экспериментальным образцом рассчитывался по полученным данным измерения комплексных коэффициентов передачи и отражения, посредством расчета коэффициентов прохождения  $T$  и отражения  $R$ , а именно,  $A = 1 - T - R = 1 - |t^2| - |r^2|$  [5], [6]. Результаты данных расчетов проиллюстрированы на рисунке 2.8 для случая нормального падения излучения на образец и на рисунке 2.9 для случая падения излучения под углом  $30^\circ$ .

Пиковые значения поглощения излучения образцом оказались ниже рассчитываемых на этапе проектирования значений, что может быть объяснено отличием материальных параметров металлического порошка меди, используемого при формовке омега элементов [1]–[4], а также материальных параметров подложки, на которой они располагались, от тех, которые были заложены при расчетах и моделировании из-за наличия посторонних примесей, окислов или других факторов.

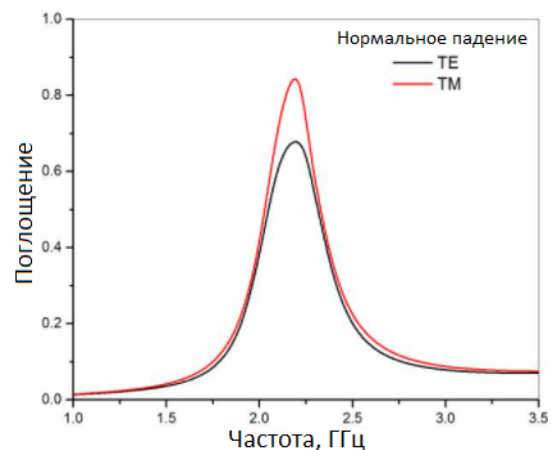


Рисунок 2.8 – Коэффициент поглощения излучения образцом при нормальном падении

При исследовании коэффициента отражения излучения от образца по схеме, изображенной на рисунке 2.5, можно заметить, что размещение образца в плоскости стойки-держателя не совсем удачное, т. к. при этом наблюдаются серьезные ограничения по выбору интервала углов падения излучения на образец, связанные с довольно большой высотой пирамид поглотителя «ТОРА-25», которые начинают затенять падающее и отраженное излучение при углах порядка  $30^\circ$  и более. Поэтому экспериментальные исследования по наклонному падению были ограничены данной величиной угла падения, при этом, как можно видеть из рисунков 2.8 и 2.9, спектр поглощения образцом в этом случае оказался практически не отличающимся от спектра при нормальном падении.

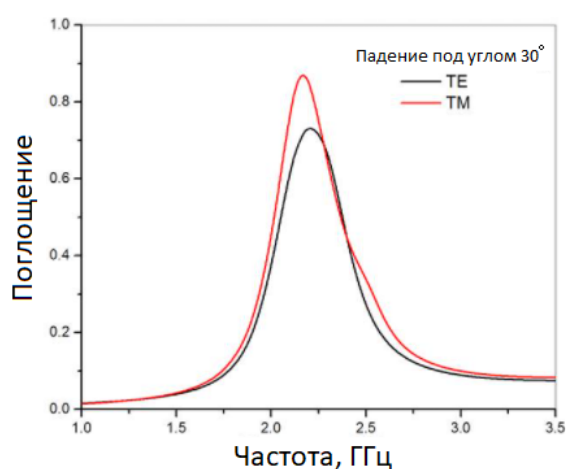


Рисунок 2.9 – Коэффициент поглощения излучения образцом при падении под углом  $30^\circ$

### Заключение

Разработаны несколько экспериментальных образцов метаповерхностей с целью экранизации металлических или металлизированных объектов сложной формы и уменьшения отражения излучения от них. Одна из моделей хорошо подходит для умеренного ослабления падающего сигнала и преобразования поляризации отраженного, тогда как более сложная – для сильного поглощения падающего излучения, исключая отраженный, так и прошедший сигналы. Было предложено использование металлических порошков для получения омега элементов заданной формы и проводимости методом формовки. Использование современных программ автоматизированного проектирования, а также аддитивных средств производства (3D принтеры, оборудование с числовым программным управлением) позволило изготовить образцы с высокой точностью, необходимой для проведения исследований.

Подробно описаны условия проведения эксперимента, характеристики используемого оборудования, методика измерения и расчета коэффициентов поглощения излучения опытным

образцом метаповерхности. Приведенные результаты находятся в соответствии с функциональными возможностями разрабатываемого поглотителя излучения, однако были замечены отклонения от расчетной частоты и высоты пика поглощения, которые, по всей видимости, связаны с различием реальных материальных параметров порошка меди и стеклотекстолита от тех, которые были заложены на стадии моделирования.

Результаты данного исследования могут быть использованы при проектировании устройств и материалов для экранирования металлических или металлизированных объектов сложной формы, разработке прерывателей оптоволоконных систем, индикаторов инфракрасного излучения, а также устройств пространственной модуляции инфракрасного излучения, селективных по частоте и поляризации отражателей, преобразователей поляризации излучения [7]–[10].

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ground-plane-less bidirectional terahertz absorber based on omega resonators* / A. Balmakou, M. Podalov, S. Khakhomov, D. Stavenga, I. Semchenko // *Opt. Lett.* – 2015. – Vol. 40, № 9. – P. 2084–2087.
2. *Designing of ultra-thin electromagnetic sensor using omega-particles* / A. Balmakou, S. Khakhomov, I. Semchenko, D. Stavenga, J. Wang // *Proc. of Chinese-Belarussian Workshop (Nanjing)*. – Nanning, China. – 2019. – P. 9–10.
3. *Radiation of circularly polarized microwaves by a plane periodic structure of  $\Omega$  elements* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, M.A. Podalov, S.A. Tretyakov // *J. Commun. Technol. Electron.* – 2007. – Vol. 52, № 9. – P. 1002–1005.
4. *Design and Creation of Metal-Polymer Absorbing Metamaterials Using the Vacuum-Plasma Technologies* / I. Semchenko, S. Khakhomov, A. Samofalov, I. Faniayeu, D. Slepiankou, V. Solodukha, A. Pyatlitski, N. Kovalchuk, A. Goncharenko, G. Sinitsyn // In: Laukaitis G. (eds) *Recent Advances in Technology Research and Education. INTER-ACADEMIA 2018. Lecture Notes in Networks and Systems.* – Springer. – 2019. – Vol. 53. – P. 105–112.
5. *Broadband reflectionless metasheets: Frequency-selective transmission and perfect absorption* / V.S. Asadchy, I.A. Faniayeu, Y. Ra'di, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov // *Phys. Rev. X.* – 2015. – Vol. 5, № 3. – P. 031005.
6. *Planar Broadband Huygens' Metasurfaces for Wave Manipulations* / F.S. Cuesta, I.A. Faniayeu, V.S. Asadchy, S.A. Tretyakov // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 2018. – Vol. 66, № 12. – P. 7117.
7. *Поглотители электромагнитного излучения СВЧ-диапазона на основе полимерных композитов и киральных структур* / С. Цянь, В.А. Банный, А.Л. Самофалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2014. – № 4 (21). – С. 40–45.

8. *Electromagnetic waves in artificial chiral structures with dielectric and magnetic properties* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov, A.H. Sihvola // *Electromagnetics*. – 2001. – Vol. 21, № 5. – P. 401–414.

9. *Semchenko, I.V.* Artificial uniaxial bianisotropic media at oblique incidence of electromagnetic waves / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // *Electromagnetics*. – 2002. – Vol. 22, № 1. – P. 71–84.

10. *Stored and absorbed energy of fields in lossy chiral single-component metamaterials* / I. Semchenko, A. Balmakou, S. Khakhomov, S. Tretyakov // *Physical Review B*. – 2018. – Vol. 97, № 1. – С. 014432.

*Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований, договоры № Ф19КИТГ-017, № Ф20ПТИ-007.*

*Поступила в редакцию 14.04.2021.*

УДК 539.12

## СТРУКТУРА ПЛОСКИХ ВОЛН ДЛЯ ПОЛЯ СО СПИНОМ 2, МАССИВНЫЙ И БЕЗМАССОВЫЙ СЛУЧАИ

А.В. Бурый<sup>1</sup>, А.В. Ивашкевич<sup>1</sup>, Е.М. Овсюк<sup>2</sup>, В.М. Редьков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

<sup>2</sup>Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

## THE STRUCTURE OF THE PLANE WAVES FOR SPIN 2 FIELD, MASSIVE AND MASSLESS CASES

A.V. Buryy<sup>1</sup>, A.V. Ivashkevich<sup>1</sup>, E.M. Ovsyuk<sup>2</sup>, V.M. Red'kov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

<sup>2</sup>I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

Изложена общая теория для поля со спином 2 на основе 30-компонентной системы уравнений первого порядка Федорова – Редже. В результате исключения в этих уравнениях дополнительных вектора и тензора третьего ранга выведены уравнения второго порядка Паули – Фирца для скаляра и симметричного тензора. Детально проанализирован предельный переход к безмассовому пределу; исследована имеющаяся согласно анализу Паули – Фирца калибровочная симметрия. В явном виде построены решения в виде плоских волн для массивной частицы, которые соответствуют пяти линейно независимым состояниям. В случае безмассового поля найдены 6 независимых решений и показано, что четыре из них являются калибровочными и, следовательно, могут быть исключены как нефизические. Два независимых решения, которые не содержат калибровочных степеней свободы, найдены в явном виде.

**Ключевые слова:** поле спина 2, уравнение второго порядка Паули – Фирца, уравнение первого порядка Федорова – Редже, плоские волны, независимые решения, безмассовая частица, устранение калибровочных степеней свободы.

A general theory for a field with spin 2 based on the 30-component system of first-order Fedorov – Regge equations is presented. As a result of the elimination of the additional vector and the third-rank tensor in these equations, the Pauli – Fierz second-order equations for the scalar and symmetric tensor are derived. Transition to the massless limit is analyzed in detail; the gauge symmetry available according to the Pauli – Fierz analysis is investigated. There are explicitly constructed solutions in the form of plane waves for a massive particle, which correspond to five linearly independent states. In the case of a massless field, 6 independent solutions are found, and it is shown that four of them are gauge ones and, therefore, can be excluded as nonphysical. Two independent solutions that do not contain gauge degrees of freedom are found explicitly.

**Keywords:** spin 2 field, second order equation by Pauli – Fierz, first order equation by Fedorov – Regge, plane waves, linearly independent solutions, massless particle, exclusion of the gauge degrees of freedom.

### Введение

Теория массивного и безмассового полей со спином 2, начиная с работ В. Паули и М. Фирца [1], [2], всегда присутствовала в литературе [3]–[21]; см. также в [22]–[25]. Большая часть работ выполнена в рамках формализма уравнений второго порядка. Известно, что много сложностей в теории частиц с высшими спинами возникает из-за так называемой неоднозначности порядка написания производных. Также известно, что с такого рода неоднозначностями можно справиться, если с самого начала использовать формализм уравнений первого порядка.

По-видимому, первое систематическое исследование теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено Ф.И. Федоровым [7]. Оказалось, что частица со спином 2 требует для своего описания 30-компонентной волновой функции. Позднее это описание было заново переоткрыто и дополнительно исследовано в работе Т. Редже [15]. Наиболее известным в теории поля со спином 2 является подход Паули – Фирца.

Он основан на системе уравнений 2-го порядка для симметричного спинора 2-ранга. Подход, развитый значительно позже, основан на общей теории релятивистских волновых уравнений 1-го порядка; при этом для описания поля используется набор из скаляра, 4-вектора, симметричного тензора второго ранга и тензора третьего ранга, антисимметричного по одной паре индексов. В его основе лежит лагранжев формализм, при этом все свойства симметрии тензоров вместе с условиями связи на них содержатся в исходном лагранжиане.

Описания массивной и безмассовой частиц существенно различаются. В частности, в безмассовом случае существует специфическая калибровочная симметрия, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Калибровочные степени свободы не должны давать вклада в наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса поля. Это приводит к необходимости выделять в безмассовом случае калибровочные решения, оставляя только физически наблюдаемые некалибровочные.



В массивном случае возникают известные трудности при рассмотрении частицы со спином 2 в присутствие внешних электромагнитных полей. Они выражаются в том, что возникают аномальные решения, относящиеся к частицам, двигающимся в пространстве со скоростями больше, чем скорость света. Дополнительных трудностей в теории частицы со спином 2 можно ожидать при учете внешних гравитационных полей, описываемых в рамках общей теории относительности. Здесь особенно существенным является выбор исходного формализма в пространстве Минковского, который затем обобщается на общеквариантный случай. Это касается как возникновения новых аномальных решений в массивном случае, так и проблем с калибровочными степенями свободы.

В настоящей работе изложена общая теория для поля со спином 2 на основе уравнений первого порядка Федорова – Редже. В результате исключения в этих уравнениях дополнительных вектора и тензора третьего ранга выведены уравнения второго порядка Паули – Фирца для скаляра и симметричного тензора. Детально проанализирован предельный переход к безмассовому пределу; исследована имеющаяся здесь калибровочная симметрия. В явном виде построены решения в виде плоских волн для массивной частицы, которые соответствуют пяти линейно независимым состояниям. В случае безмассовой частицы найдены 6 независимых решений и показано, что четыре из них являются калибровочными. Два независимых решения, которые не содержат калибровочных степеней свободы, найдены в явном виде.

### 1 30-компонентная система уравнений

Будем исходить из системы уравнений первого порядка для массивной частицы со спином 2 в следующем виде:

$$A\partial^a\Phi_a = m\Phi, \quad (1.1)$$

$$C\partial_a\Phi + B\partial^b\Phi_{ab} = m\Phi_a, \quad (1.2)$$

$$E\left[\partial^k\Phi_{[ka]b} + \partial^k\Phi_{[kb]a} - \frac{1}{2}g_{ab}\partial^k\Phi_{[kn]}^n\right] + N\left[\partial_a\Phi_b + \partial_b\Phi_a - \frac{1}{2}g_{ab}\partial^k\Phi_k\right] = m\Phi_{(ab)}, \quad (1.3)$$

$$F\left[\partial_a\Phi_{(bc)} - \partial_b\Phi_{(ac)} + \frac{1}{3}(g_{bc}\partial^k\Phi_{(ak)} - g_{ac}\partial^k\Phi_{(bk)})\right] = m\Phi_{[ab]c}, \quad (1.4)$$

где  $A, B, \dots$  – некоторые постоянные; их зафиксируем ниже, накладывая требование получить из (1.1)–(1.4) систему уравнений второго порядка, предложенную Паули и Фирцем. Круглые скобки при индексах обозначают симметричность, квадратные скобки – антисимметричность. Используется метрический тензор с сигнатурой  $(+, -, -, -)$ .

Из уравнения (1.3) следуют симметричность и неприводимость тензора 2-го ранга  $\Phi_{ab}$ :

$$\Phi_{(ab)} = +\Phi_{(ba)}, \quad g^{ab}\Phi_{(ab)} = \Phi_a^a = 0. \quad (1.5)$$

Из (1.4) следует, что тензор третьего ранга антисимметричен по первым двум индексам:

$$\Phi_{[ab]c} = -\Phi_{[ba]c}.$$

Сворачивая в уравнении (1.4) индексы  $b$  и  $c$  и учитывая (1.5), получаем условие неприводимости тензора третьего ранга к тензору первого ранга:  $\Phi_{[ab]}^b = 0$ . Наконец, используя уравнение (1.4), находим еще одно условие для тензора третьего ранга:

$$\Phi_{[ab]c} + \Phi_{[bc]a} + \Phi_{[ca]b} = 0 \Rightarrow \varepsilon^{kabc}\Phi_{abc} = 0.$$

Общее число независимых компонент в наборе тензоров  $\Phi, \Phi_a, \Phi_{(ab)}, \Phi_{[ab]c}$  равно тридцати:

$$\Phi(x) \Rightarrow 1, \quad \Phi_a \Rightarrow 4, \quad \Phi_{(ab)} \Rightarrow (10-1) = 9,$$

$$\Phi_{[ab]c} \Rightarrow 6 \times 4 - 4 - 4 = 16.$$

Без ограничения общности можно положить  $A$  и  $F$  равными единице; тем самым параметр  $A$  переносим в свободу в выборе величины  $C$ , а параметр  $F$  – в свободу выбора величины  $E$ .

В соответствие с этим дальше будем исследовать уравнения

$$\partial^a\Phi_a = m\Phi, \quad (1.6)$$

$$C\partial_a\Phi + B\partial^b\Phi_{(ab)} = m\Phi_a, \quad (1.7)$$

$$E\left[\partial^k\Phi_{[ka]b} + \partial^k\Phi_{[kb]a}\right] + N\left[\partial_a\Phi_b + \partial_b\Phi_a - \frac{1}{2}g_{ab}\partial^k\Phi_k\right] = m\Phi_{(ab)}, \quad (1.8)$$

$$\partial_a\Phi_{(bc)} - \partial_b\Phi_{(ac)} + \frac{1}{3}(g_{bc}\partial^k\Phi_{(ak)} - g_{ac}\partial^k\Phi_{(bk)}) = m\Phi_{[ab]c}. \quad (1.9)$$

При этом можно учитывать условия, являющиеся следствиями исходной системы (1.1)–(1.4):

$$\Phi_{(ab)} = +\Phi_{(ba)}, \quad \Phi_a^a = 0, \quad \Phi_{[ab]c} = -\Phi_{[ba]c},$$

$$\Phi_{[ab]}^b = 0, \quad \Phi_{[ab]c} + \Phi_{[bc]a} + \Phi_{[ca]b} = 0.$$

Исключая из (1.6)–(1.9) векторную и (третьего ранга) тензорную функции, будем находить уравнения для полей  $\Phi$  и  $\Phi_{(ab)}$ . Для этого сначала, воспользовавшись (1.7) и (1.9), получим выражения для двух членов из уравнения (1.8):

$$\begin{aligned} & E\left[\partial^k\Phi_{[ka]b} + \partial^k\Phi_{[kb]a}\right] = \\ & = \frac{-E}{m}\left[\frac{4}{3}(\partial_a\partial^k\Phi_{(kb)} + \partial_b\partial^k\Phi_{(ka)}) - \right. \\ & \left. - 2\partial^k\partial_k\Phi_{(ab)} - \frac{2}{3}g_{ab}\partial^k\partial^l\Phi_{(kl)}\right], \\ & N\left[\partial_a\Phi_b + \partial_b\Phi_a - \frac{1}{2}g_{ab}\partial^k\Phi_k\right] = \\ & = \frac{N}{m}\left[2C\left[\partial_a\partial_b - \frac{1}{4}g_{ab}\partial^k\partial_k\right]\Phi + \right. \end{aligned}$$

$$+B \left[ \partial_a \partial^k \Phi_{(kb)} + \partial_b \partial^k \Phi_{(ka)} - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} \right].$$

С учетом чего уравнение (1.8) принимает вид (вводим обозначение  $\square = \partial^k \partial_k$ )

$$2CN \left( \partial_a \partial_b - \frac{1}{4} \square g_{ab} \right) \Phi + 2E \square \Phi_{(ab)} + \left( NB - \frac{4}{3} E \right) \times \\ \times \left( \partial_a \partial^k \Phi_{(kb)} + \partial_b \partial^k \Phi_{(ka)} - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} \right) = \\ = m^2 \Phi_{(ab)}. \quad (1.10)$$

Аналогично из уравнения (1.6), учитывая (1.7), находим

$$C \square \Phi + B \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} = m^2 \Phi. \quad (1.11)$$

Таким образом, получены уравнения 2-го порядка (1.10) и (1.11), содержащие скаляр и симметричный тензор.

Найдем условия, ограничивающие выбор параметров  $B, C, E, N$ . Для этого подействуем на уравнение (1.10) оператором  $\partial^b$ , в результате приходим к

$$\frac{3}{2} CN \partial_a \square \Phi + \frac{1}{2} \left( NB - \frac{4}{3} E \right) \partial_a \partial^b \partial^k \Phi_{(bk)} + \\ + \left( NB + \frac{2}{3} E \right) \square \partial^k \Phi_{(ka)} = m^2 \partial^b \Phi_{(ab)}. \quad (1.12)$$

Потребуем выполнения равенства

$$NB + \frac{2}{3} E = 0,$$

тогда (1.12) примет вид

$$\partial_a \left( \frac{3}{2} CN \square \Phi - E \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} \right) = m^2 \partial^k \Phi_{(ka)}. \quad (1.13)$$

Теперь обратимся к уравнению (1.11). Действуя на обе его части оператором  $\partial_a$ , получаем

$$\partial_a (C \square \Phi + B \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)}) = m^2 \partial_a \Phi. \quad (1.14)$$

Потребуем, чтобы параметры удовлетворяли условиям

$$C = \mu^{-1} \frac{3}{2} CN, \quad B = -\mu^{-1} E,$$

тогда (1.14) можно представить так:

$$\partial_a \left( \frac{3}{2} CN \square \Phi - E \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} \right) = \mu m^2 \partial_a \Phi. \quad (1.15)$$

Левые части равенств (1.13) и (1.15) совпадают, соответственно равны и правые:

$$\partial^k \Phi_{kl} = \mu \partial_l \Phi. \quad (1.16)$$

Действуя на обе части равенства (1.16) оператором  $\partial^l$ , получаем

$$\mu \square \Phi - \partial^k \partial^l \Phi_{(kl)} = 0. \quad (1.17)$$

Сопоставим это равенство с уравнением (1.11), записанным в виде

$$-B \left( -\frac{C}{B} \square \Phi - \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} \right) = m^2 \Phi. \quad (1.18)$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\mu = -C/B.$$

Тогда из (1.17) и (1.18) следует равенство нулю скалярного поля  $\Phi$ :

$$\Phi = 0. \quad (1.19)$$

При этом из (1.16) получаем условие на тензорное поле  $\Phi_{(ab)}$ :

$$\partial^k \Phi_{(ka)} = 0. \quad (1.20)$$

Остается убедиться, что наложенным на свободные параметры условиям можно удовлетворить. Соберем их вместе:

$$NB + \frac{2}{3} E = 0, \quad C = \mu^{-1} \frac{3}{2} CN, \\ B = -\mu^{-1} E, \quad \mu = -\frac{C}{B}. \quad (1.21)$$

Из (1.21) получаем

$$\mu = \frac{3}{2} N, \quad C = E = -\frac{3}{2} NB. \quad (1.22)$$

Если выбрать решение уравнений (1.22) в виде

$$C = E = 1/2, \quad N = 1, \quad B = -1/3, \quad (1.23)$$

то система уравнений (1.10), (1.11) принимает вид

$$\left( \partial_a \partial_b - \frac{1}{4} g_{ab} \square \right) \Phi + (\square - m^2) \Phi_{(ab)} - \\ - \left( \partial_a \partial^k \Phi_{(kb)} + \partial_b \partial^k \Phi_{(ka)} - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} \right) = 0, \quad (1.24)$$

$$\left( \frac{1}{2} \square - m^2 \right) \Phi - \frac{1}{3} \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} = 0; \quad (1.25)$$

они совпадают (с точностью до замены обозначений) с уравнениями, приведенными в работе Паули – Фирца. При учете условий (1.19) и (1.20) из системы уравнений (1.24)–(1.25) получаем

$$\Phi = 0, \quad (\square + M^2) \Phi_{(ab)} = 0, \quad (1.26)$$

$$\Phi_{(ab)} = \Phi_{(ba)}, \quad \Phi^a_a = 0, \quad \partial^k \Phi_{(ka)} = 0. \quad (1.27)$$

С учетом равенств (1.23) исходная система первого порядка (1.6)–(1.9) примет вид

$$\partial^a \Phi_a = m \Phi, \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{2} \partial_a \Phi - \frac{1}{3} \partial^b \Phi_{(ab)} = m \Phi_a, \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{2} \left( \partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a} - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_{[kn]} \right) + \\ + \left( \partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_k \right) = m \Phi_{(ab)},$$

$$\partial_a \Phi_{(bc)} - \partial_b \Phi_{(ac)} +$$

$$+ \frac{1}{3} (g_{bc} \partial^k \Phi_{(ak)} - g_{ac} \partial^k \Phi_{(bk)}) = m \Phi_{[ab]c}, \quad (1.31)$$

$$m = iM.$$

Будем рассматривать систему (1.28)–(1.31) как основную для теории частицы со спином 2. Уравнения второго порядка (1.26)–(1.27) могут рассматриваться как производные, поскольку они следуют из (1.28)–(1.31). Отметим, что включение в эту систему скалярного поля  $\Phi$  лишнее, скалярное поле обращается в нуль только в случае свободной частицы.



## 2 Плоские волны, массивный случай

Обратимся к построению решений в виде плоских волн для уравнений (1.26)–(1.27):

$$(\square + M^2)\Phi_{(ab)} = 0, \quad (2.1)$$

$$\Phi^a_a = 0, \quad \partial^n \Phi_{(an)} = 0. \quad (2.2)$$

Подстановка для волновой функции имеет вид (учитываем симметричность тензора)

$$[\Phi_{ab}(x)] = e^{-ik_n x^n} \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} \\ f_{01} & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{03} & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix} = e^{-ik_n x^n} \begin{pmatrix} f_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_1 & f_1 & c_3 & c_2 \\ d_2 & c_3 & f_2 & c_1 \\ d_3 & c_2 & c_1 & f_3 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Дополнительные условия (2.2) дают

$$\begin{aligned} f_{00} - f_{11} - f_{22} - f_{33} &= 0, \\ f_{00}k^0 + f_{01}k^1 + f_{02}k^2 + f_{03}k^3 &= 0, \\ f_{10}k^0 + f_{11}k^1 + f_{12}k^2 + f_{13}k^3 &= 0, \\ f_{20}k^0 + f_{21}k^1 + f_{22}k^2 + f_{23}k^3 &= 0, \\ f_{30}k^0 + f_{31}k^1 + f_{32}k^2 + f_{33}k^3 &= 0; \end{aligned}$$

с учетом обозначений из (2.3) они записываются в виде:

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1 + f_2 + f_3, \\ f_0k^0 + d_1k^1 + d_2k^2 + d_3k^3 &= 0, \\ d_1k^0 + f_1k^1 + c_3k^2 + c_2k^3 &= 0, \\ d_2k^0 + c_3k^1 + f_2k^2 + c_1k^3 &= 0, \\ d_3k^0 + c_2k^1 + c_1k^2 + f_3k^3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Основное уравнение (2.1) приводит к условию связи между энергией и импульсом:

$$k_0^2 = M^2 + k^j k^j = M^2 + k_j k_j.$$

Таким образом, имеем 5 уравнений для 10 переменных  $f_{(ab)} = \{f_0, f_i, c_i, d_i\}$ . Найдем явный вид независимых решений системы (2.4). Для этого в уравнениях перенесем вправо переменные  $f_1, f_2, f_3, c_3, d_3$  (одновременно опуская все индексы вниз); в результате получим неоднородную систему уравнений относительно  $f_0, c_1, c_2, d_1, d_2$ :

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1 + f_2 + f_3, \quad k_0 f_0 - k_1 d_1 - k_2 d_2 = d_3 k_3, \\ k_0 d_1 - k_3 c_2 - k_2 c_3 &= f_1 k_1, \quad k_0 d_2 - k_1 c_3 = f_2 k_2 + c_1 k_3, \\ -c_2 k_1 &= c_1 k_2 + f_3 k_3 - d_3 k_0. \end{aligned}$$

В матричной форме ее можно записать так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_0 & 0 & 0 & -k_1 & -k_2 \\ 0 & -k_3 & -k_2 & k_0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & 0 & k_0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + f_2 + f_3 \\ d_3 k_3 \\ f_1 k_1 \\ f_2 k_2 + c_1 k_3 \\ c_1 k_2 + f_3 k_3 - d_3 k_0 \end{pmatrix}, \quad Ax = y.$$

Убеждаемся, что основной определитель системы отличен от нуля:  $\det A = -2k_0 k_1^2 k_2 \equiv D^{-1}$ . Решение строится на основе формулы  $x_i = D \det A_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ; в явном виде оно имеет вид

$$\begin{aligned} f_0 &= -2D(f_1 + f_2 + f_3)k_0 k_1^2 k_2, \\ c_2 &= 2k_0 k_1 k_2 D(c_1 k_2 - d_3 k_0 + f_3 k_3), \\ c_3 &= -k_0 k_1 D[-2d_3 k_3 k_0 + f_3 k_0^2 + f_3 k_3^2 + \\ &\quad + f_1(k_0^2 - k_1^2) + f_2(k_0^2 - k_2^2)], \\ d_1 &= -k_1 k_2 D[-2c_1 k_2 k_3 + f_3 k_0^2 - f_3 k_3^2 + \\ &\quad + f_1(k_0^2 + k_1^2) + f_2(k_0^2 - k_2^2)], \\ d_2 &= k_1^2 D[-2c_1 k_2 k_3 + 2d_3 k_3 k_0 - f_3 k_0^2 - f_3 k_3^2 + \\ &\quad + f_1(k_1^2 - k_0^2) - f_2(k_0^2 + k_2^2)]. \end{aligned}$$

Его можно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2D(f_1 + f_2 + f_3)k_0 k_1^2 k_2 \\ 2k_0 k_1 k_2 D(c_1 k_2 - d_3 k_0 + f_3 k_3) \\ -k_0 k_1 D[-2d_3 k_3 k_0 + f_3 k_0^2 + f_3 k_3^2 + \\ + f_1(k_0^2 - k_1^2) + f_2(k_0^2 - k_2^2)] \\ -k_1 k_2 D[-2c_1 k_2 k_3 + f_3 k_0^2 - f_3 k_3^2 + \\ + f_1(k_0^2 + k_1^2) + f_2(k_0^2 - k_2^2)] \\ k_1^2 D[-2c_1 k_2 k_3 + 2d_3 k_3 k_0 - f_3 k_0^2 - \\ - f_3 k_3^2 + f_1(k_1^2 - k_0^2) - f_2(k_0^2 + k_2^2)] \end{pmatrix},$$

что можно разложить в линейную суперпозицию пяти независимых слагаемых (учитываем выражение для  $D$ ):

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{k_0^2}{k_1 k_2} - \frac{k_1}{k_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{k_0}{k_1} + \frac{k_1}{k_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{k_1^2}{k_0 k_2} + \frac{k_0}{k_2} \right) \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{k_0^2}{k_1 k_2} - \frac{k_2}{k_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{k_0}{k_1} - \frac{k_2^2}{k_0 k_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{k_0}{k_2} + \frac{k_2}{k_0} \right) \end{pmatrix} + f_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k_3}{k_1} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{k_0^2}{k_1 k_2} + \frac{k_3^2}{k_1 k_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{k_0}{k_1} - \frac{k_3^2}{k_0 k_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{k_0}{k_2} + \frac{k_3^2}{k_0 k_2} \right) \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_2}{k_1} \\ 0 \\ -\frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} \\ \frac{k_3}{k_0} \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_0}{k_1} \\ \frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} \\ 0 \\ -\frac{k_3}{k_2} \end{pmatrix}.$$

### 3 Безмассовый предел

Система уравнений 1-го порядка, описывающая безмассовую частицу со спином 2, имеет вид

$$\partial^a \Phi_a = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{2} \partial_a \Phi - \frac{1}{3} \partial^b \Phi_{(ab)} = \Phi_a, \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a} - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_{[kn]}^n \right] +$$

$$+ \left[ \partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_k \right] = 0,$$

$$\partial_k \Phi_{(ab)} - \partial_a \Phi_{(kb)} -$$

$$- \frac{1}{3} (g_{kb} \partial^n \Phi_{(an)} - g_{ba} \partial^n \Phi_{(kn)}) = \Phi_{[ka]b}. \quad (3.4)$$

Сразу же отметим, что здесь реализуется иная ситуация с дополнительными условиями, нежели в массивном случае. Так, сворачивая в уравнении (3.3) индексы  $a$  и  $b$ , приходим только к тождеству  $0 \equiv 0$ , т. е. условие неприводимости симметричного тензора не возникает. Сворачивая в уравнении (3.4) индексы  $a$  и  $b$ , получаем дополнительное условие в виде

$$\partial_k \Phi_n^n = \Phi_{[kn]}^n.$$

Теория безмассового поля основана на функции  $s$  ( $1 + 4 + 10 + 24 - 40$ ) = 35 компонентами.

Исключим из уравнений (3.1) дополнительное поле  $\Phi_a$ , получаем уравнение второго порядка для скаляра  $\Phi(x)$  и тензора  $\Phi_{(ab)}(x)$ :

$$\frac{1}{2} \square \Phi - \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \Phi_{(ab)} = 0. \quad (3.5)$$

Будем исключать из уравнений (3.3) поля  $\Phi_a$  и  $\Phi_{[ka]b}$ . Так, уравнение

$$\frac{1}{2} \left[ \partial^k \Phi_{[ka]b} + \partial^k \Phi_{[kb]a} - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_{[kn]}^n \right] +$$

$$+ \left[ \partial_a \Phi_b + \partial_b \Phi_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \Phi_k \right] = 0$$

даёт

$$\frac{1}{2} \left\{ \partial^k \left[ \partial_k \Phi_{(ab)} - \partial_a \Phi_{(kb)} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} (g_{kb} \partial^n \Phi_{(an)} - g_{ba} \partial^n \Phi_{(kn)}) \right] +$$

$$+ \partial^k \left[ \partial_k \Phi_{(ab)} - \partial_b \Phi_{(ka)} - \frac{1}{3} (g_{ka} \partial^n \Phi_{(bn)} - g_{ba} \partial^n \Phi_{(kn)}) \right] -$$

$$- \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \partial_k \Phi_n^n \left. \right\} + \left\{ \partial_a \left( \frac{1}{2} \partial_b \Phi - \frac{1}{3} \partial^n \Phi_{nb} \right) + \right.$$

$$+ \partial_b \left( \frac{1}{2} \partial_a \Phi - \frac{1}{3} \partial^n \Phi_{na} \right) -$$

$$\left. - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \left( \frac{1}{2} \partial_k \Phi - \frac{1}{3} \partial^n \Phi_{nk} \right) \right\} = 0.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены, в результате получаем

$$\left( \partial_a \partial_b - \frac{1}{4} \square g_{ab} \right) \Phi - \frac{1}{4} g_{ab} \square \Phi_n^n + \square \Phi_{(ab)} -$$

$$- \partial_a \partial^n \Phi_{(nb)} - \partial_b \partial^n \Phi_{(na)} + \frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} = 0.$$

Учитывая (3.5) в форме:

$$\partial^k \partial^n \Phi_{(kn)} = \frac{3}{2} \square \Phi,$$

последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\left( \partial_a \partial_b + \frac{1}{2} g_{ab} \square \right) \Phi - \frac{1}{4} g_{ab} \square \Phi_n^n + \square \Phi_{(ab)} -$$

$$- \partial_a \partial^n \Phi_{(nb)} - \partial_b \partial^n \Phi_{(na)} = 0. \quad (3.6)$$

Убедимся, что уравнения второго порядка (3.5)–(3.6) (следовательно, и уравнения первого порядка (3.1)–(3.4)) имеют класс калибровочных решений (этот факт впервые был установлен в работах Паули и Фирца):

$$\bar{\Phi} = \partial^l \Lambda_l, \quad \bar{\Phi}_{(ab)} = \partial_a \Lambda_b + \partial_b \Lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^l \Lambda_l, \quad (3.7)$$

где  $\Lambda_l(x)$  – произвольный 4-вектор. Действительно, для этого калибровочного решения находим равенство

$$- \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \bar{\Phi}_{(ab)} = - \frac{1}{2} \square \partial^l \Lambda_l = - \frac{1}{2} \square \bar{\Phi},$$

оно может быть переписано так:

$$\frac{1}{2} \square \bar{\Phi} - \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \bar{\Phi}_{(ab)} = 0;$$

последнее соотношение согласуется с уравнением (3.5). Далее, учитывая равенства

$$\left( \partial_a \partial_b - \frac{1}{4} g_{ab} \square \right) \bar{\Phi} = \partial_a \partial_b \partial^l \Lambda_l, \quad \bar{\Phi}^a_a = 0,$$

$$\square \bar{\Phi}_{(ab)} = \square \partial_a \Lambda_b + \square \partial_b \Lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} \square \partial^l \Lambda_l,$$

$$- \partial_a \partial^l \Phi_{(bl)}^{(0)} = - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \partial^l \Lambda_l - \square \partial_a \Lambda_b,$$

$$- \partial_b \partial^l \Phi_{(al)}^{(0)} = - \frac{1}{2} \partial_b \partial_a \partial^l \Lambda_l - \square \partial_b \Lambda_a,$$

$$\frac{1}{2} g_{ab} \partial^k \partial^l \Phi_{(kl)}^{(0)} = + \frac{3}{2} g_{ab} \square \partial^l \Lambda_l,$$

убеждаемся, что набор полей (3.7) удовлетворяет и уравнению (3.6).

Найдем выражения для тензоров  $\bar{\Phi}_a$  и  $\bar{\Phi}_{[ka]b}$ , сопутствующих набору полей (3.7):

$$\bar{\Phi}_a = + \frac{1}{3} \partial_a \partial^l \Lambda_l - \frac{1}{3} \square \Lambda_a,$$

$$\bar{\Phi}_{[ab]c} = \partial_c (\partial_a \Lambda_b - \partial_b \Lambda_a) -$$

$$- \frac{1}{3} (g_{cb} \partial_a - g_{ca} \partial_b) \partial^l \Lambda_l + \frac{1}{3} (g_{cb} \square \Lambda_a - g_{ca} \square \Lambda_b).$$

Отмечаем справедливость равенства  $\bar{\Phi}_{[ac]}^c = 0$ .

Последнее согласуется с приведенным выше соотношением  $\bar{\Phi}^a_a = 0$  и дополнительным условием

$$\partial_a \bar{\Phi}_b^b = \bar{\Phi}_{[ac]}^c.$$

Таким образом, безмассовое поле со спином 2 можно описывать либо системой уравнений первого порядка (3.1)–(3.4), либо системой уравнений второго порядка (3.5)–(3.6):

$$\frac{1}{2} \square \Phi - \frac{1}{3} \partial^k \partial^l \Phi_{(kl)} = 0, \quad (3.8)$$

$$\left( \partial_a \partial_b + \frac{1}{2} g_{ab} \square \right) \Phi - \frac{1}{4} g_{ab} \square \Phi^c + \square \Phi_{(ab)} - \partial_a \partial^l \Phi_{(bl)} - \partial_b \partial^l \Phi_{(al)} = 0. \quad (3.9)$$

При этом в уравнениях имеется калибровочная симметрия, связанная с существованием класса решений (3.7), определяемых произвольным 4-вектором  $\Lambda_a(x)$ :

$$\bar{\Phi} = \partial^l \Lambda_l, \quad \bar{\Phi}_{(ab)} = \partial_a \Lambda_b + \partial_b \Lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} \partial^l \Lambda_l,$$

$$\bar{\Phi}_a = +\frac{1}{3} \partial_a \partial^l \Lambda_l - \frac{1}{3} \square \Lambda_a,$$

$$\bar{\Phi}_{[ab]c} = \partial_c (\partial_a \Lambda_b - \partial_b \Lambda_a) - \frac{1}{3} (g_{cb} \partial_a - g_{ca} \partial_b) \partial^l \Lambda_l + \frac{1}{3} (g_{cb} \square \Lambda_a - g_{ca} \square \Lambda_b). \quad (3.10)$$

#### 4 Плоские волны, безмассовый случай

Получим решения системы уравнений для безмассовой частицы. Подстановка остается прежней (однако отсутствует условие неприводимости симметричного тензора):

$$\Phi(x) = e^{-ik_a x^a} f, \quad \Phi_{ab}(x) = e^{-ik_a x^a} f_{ab},$$

$$f_{ab} = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} \\ f_{01} & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{03} & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_1 & f_1 & c_1 & c_2 \\ d_2 & c_1 & f_2 & c_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 & f_3 \end{pmatrix};$$

позднее в этом разделе мы сменим систему обозначений, чтобы она совпадала с использованной в массивном случае:

$$c_1, c_2, c_3 \iff c_3, c_2, c_1.$$

Уравнение (3.8) дает (ввиду равенства  $k_0^2 = \bar{k}^2$  имеем тождество  $\square \Phi = 0$ )

$$\frac{1}{2} \square \Phi - \frac{1}{3} \partial^a \partial^b \Phi_{(ab)} = 0 \Rightarrow k^a k^b f_{ab} = 0;$$

в свою очередь, уравнение (3.9) приводит к

$$-k_a k_b f + k_a k^l f_{bl} + k_b k^l f_{al} = 0.$$

Таким образом, здесь имеем алгебраическую систему уравнений

$$k^a k^b f_{ab} = 0, \quad -k_a k_b f + k_a k^l f_{bl} + k_b k^l f_{al} = 0. \quad (4.1)$$

Калибровочные решения определяются произвольным 4-вектором  $\Lambda_l(x) = e^{-ik_a x^a} \lambda_l$  и задаются соотношениями (см. (3.10)):

$$\bar{\Phi} = \bar{f} e^{-ik_a x^a}, \quad \bar{f} = -ik^l \lambda_l;$$

$$\bar{\Phi}_{(ab)} = \bar{f}_{ab} e^{-ik_a x^a},$$

$$\bar{f}_{ab} = -i \left[ k_a \lambda_b + k_b \lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} k^l \lambda_l \right]. \quad (4.2)$$

Легко убедиться, что решения (4.2) удовлетворяют уравнениям (4.1):

$$k^a k^b \bar{f}_{ab} = (-i) k^a k^b \left[ k_a \lambda_b + k_b \lambda_a - \frac{1}{2} g_{ab} k^l \lambda_l \right] =$$

$$= (-i) \left[ 0 + 0 - \frac{1}{2} k^a k^b g_{ab} k^l \lambda_l \right] \equiv 0;$$

$$-k_a k_b \bar{f} + k_a k^l \bar{f}_{bl} + k_b k^l \bar{f}_{al} = (-i) \times$$

$$\times \left\{ -k_a k_b \cdot k^n \lambda_n + k_a k^l \cdot \left[ k_b \lambda_l + k_l \lambda_b - \frac{1}{2} g_{bl} k^n \lambda_n \right] + \right.$$

$$\left. + k_b k^l \cdot \left[ k_a \lambda_l + k_l \lambda_a - \frac{1}{2} g_{al} k^n \lambda_n \right] \right\} \equiv 0.$$

Детализируем уравнения из (4.1). Первое уравнение дает

$$k^0 (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) +$$

$$+ k^1 (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) +$$

$$+ k^2 (d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) +$$

$$+ k^3 (d_3 k^0 + c_2 k^1 + c_3 k^2 + f_3 k^3) = 0.$$

Второе уравнение приводит к 16 уравнениям:

$$(00) \quad k^0 k^0 f = k_0 (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) + (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) k_0,$$

$$(01) \quad k^0 k^1 f = k^0 (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) + (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) k_1,$$

$$(02) \quad k^0 k^2 f = k^0 (d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) + (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) k_2,$$

$$(03) \quad k^0 k^3 f = k^0 (d_3 k^0 + c_2 k^1 + c_3 k^2 + f_3 k^3) + (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) k_3,$$

$$(10) \quad k^1 k^0 f = k_1 (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) + (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) k_0,$$

$$(11) \quad k^1 k^1 f = k_1 (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) + (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) k_1,$$

$$(12) \quad k^1 k^2 f = k_1 (d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) + (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) k_2,$$

$$(13) \quad k^1 k^3 f = k_1 (d_3 k^0 + c_2 k^1 + c_3 k^2 + f_3 k^3) + (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) k_3,$$

$$(20) \quad k^2 k^0 f = k_2 (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) + (d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) k_0,$$

$$(21) \quad k^2 k^1 f = k_2 (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) + (d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) k_1,$$

$$(22) \quad k^2 k^2 f = k_2 (d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) + (d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) k_2,$$

$$(23) \quad k^2 k^3 f = k_2 (d_3 k^0 + c_2 k^1 + c_3 k^2 + f_3 k^3) +$$

$$(30) \quad k^3 k^0 f = k_3 (f_0 k^0 + d_1 k^1 + d_2 k^2 + d_3 k^3) +$$

$$(31) \quad k^3 k^1 f = k_3 (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) +$$

$$(32) \quad k^3 k^2 f = k_3 (d_2 k^0 + c_1 k^1 + f_2 k^2 + c_3 k^3) +$$

$$(33) \quad k^3 k^3 f = k_3 (d_3 k^0 + c_2 k^1 + c_3 k^2 + f_3 k^3) +$$

С учетом совпадающих остаются только 10 уравнений (опускаем все индексы вниз):

$$\begin{aligned} & k_0 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) + \\ & + (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) k_0 = k_0 k_0 f, \\ & k_1 (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) + \\ & + (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) k_1 = k_1 k_1 f, \\ & k_2 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + \\ & + (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) k_2 = k_2 k_2 f, \\ & k_3 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ & + (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) k_3 = k_3 k_3 f, \\ & k_0 (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) + \\ & + (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) k_1 = -k^0 k_1 f, \\ & k_0 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + \\ & + (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) k_2 = -k^0 k_2 f, \\ & k_0 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ & + (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) k_3 = -k^0 k_3 f, \\ & k_1 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + \\ & + (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) k_2 = k_1 k_2 f, \\ & k_1 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ & + (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) k_3 = k_1 k_3 f, \\ & k_2 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ & + (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) k_3 = k_2 k_3 f. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (4.1) приводят к

$$\begin{aligned} & k^0 (f_0 k^0 - d_1 k^1 - d_2 k^2 - d_3 k^3) + \\ & + k^1 (d_1 k^0 + f_1 k^1 + c_1 k^2 + c_2 k^3) - \\ & - k_2 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) - \\ & - k_3 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) = 0, \\ & 2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = k_0 f, \\ & 2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = k_1 f, \\ & 2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) = k_2 f, \\ & 2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) = k_3 f; \\ & 2k_0 (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) + \\ & + 2k_1 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k^0 k_1 f, \\ & 2k_0 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + \\ & + 2k_2 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k^0 k_2 f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2k_0 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ & + 2k_3 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k^0 k_3 f; \\ & 2k_1 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + \\ & + 2k_2 (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = 2k_1 k_2 f, \\ & 2k_1 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ & + 2k_3 (d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = 2k_1 k_3 f, \\ & 2k_2 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + \\ & + 2k_3 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) = 2k_2 k_3 f. \end{aligned}$$

Используя уравнения 2,3,4 из первой четверки, преобразуем две тройки уравнений:

$$\begin{aligned} & 2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = k_0 f, \\ & 2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = k_1 f, \\ & 2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) = k_2 f, \\ & 2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) = k_3 f; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2k_0 k_1 f + 2k_1 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k^0 k_1 f, \\ & 2k_0 k_2 f + 2k_2 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k^0 k_2 f, \\ & 2k_0 k_3 f + 2k_3 (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = -2k^0 k_3 f; \\ & 2k_1 (d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) + k_2 k_1 f = 2k_1 k_2 f, \\ & 2k_1 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + k_3 k_1 f = 2k_1 k_3 f, \\ & 2k_2 (d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) + k_3 k_2 f = 2k_2 k_3 f. \end{aligned}$$

Отбрасывая лишние (из-за совпадения) уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} & 2(f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = k_0 f, \\ & 2(d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3) = k_1 f, \\ & 2(d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3) = k_2 f, \\ & 2(d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3) = k_3 f, \\ & 2k_0 f + (f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3) = 0, \\ & d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3 = 0, \\ & d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3 = 0. \end{aligned}$$

С учетом двух последних уравнений приходим к равенству  $f = 0$ , при этом остаются только 4 независимых уравнения

$$\begin{aligned} & f_0 k_0 - d_1 k_1 - d_2 k_2 - d_3 k_3 = 0, \\ & d_1 k_0 - f_1 k_1 - c_1 k_2 - c_2 k_3 = 0, \\ & d_2 k_0 - c_1 k_1 - f_2 k_2 - c_3 k_3 = 0, \\ & d_3 k_0 - c_2 k_1 - c_3 k_2 - f_3 k_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, имеем 4 уравнения на 10 переменных. С учетом замены в обозначениях  $c_1 \longleftrightarrow c_3$  из (4.3) приходим к

$$\begin{aligned} & d_1 k_1 + d_2 k_2 = f_0 k_0 - d_3 k_3, \quad d_1 k_0 - c_3 k_2 - c_2 k_3 = f_1 k_1, \\ & d_2 k_0 - c_3 k_1 = f_2 k_2 + c_1 k_3, \\ & c_2 k_1 = d_3 k_0 - c_1 k_2 - f_3 k_3. \end{aligned}$$

В матричной форме она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 & k_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 k_0 - d_3 k_3 \\ f_1 k_1 \\ c_1 k_3 + f_2 k_2 \\ -c_1 k_2 + d_3 k_0 - f_3 k_3 \end{pmatrix}.$$

Строим решение на основе формул  $x_i = D \det A_i$ ,

$$\det A = -2k_0 k_1^2 k_2 \equiv D^{-1} :$$

$$c_2 = D [k_0 k_1 k_2 (2c_1 k_2 - 2d_3 k_0 + 2f_3 k_3)],$$

$$c_3 = D [k_0 k_1 (2d_3 k_3 k_0 - f_0 k_0^2 + f_1 k_1^2 + f_2 k_2^2 - f_3 k_3^2)],$$

$$d_1 = D [k_1 k_2 (2c_1 k_2 k_3 - f_0 k_0^2 - f_1 k_1^2 + f_2 k_2^2 + f_3 k_3^2)],$$

$$d_2 = D [k_1^2 (-2c_1 k_2 k_3 + 2d_3 k_3 k_0 - f_0 k_0^2 + f_1 k_1^2 - f_2 k_2^2 - f_3 k_3^2)].$$

Его можно представить в матричной форме и разложить в линейную комбинацию из 6 слагаемых:

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = f_0 \begin{pmatrix} 0 \\ k_0^2 \\ 2k_1 k_2 \\ k_0 \\ 2k_2 \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -k_1 \\ 2k_0 \\ k_1^2 \\ 2k_0 k_2 \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2 \\ 2k_1 \\ k_2^2 \\ k_0 \end{pmatrix} + f_3 \begin{pmatrix} -k_3 \\ k_1 \\ k_3^2 \\ 2k_1 k_2 \\ 2k_0 k_1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2 \\ 0 \\ -k_2 k_3 \\ k_3 \\ k_0 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_0 k_3 \\ k_1 k_2 \\ 0 \\ -k_3 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Это общее решение можно записать в виде матрицы, которая является симметричной относительно главной диагонали:

$$f_{(ab)} = \begin{pmatrix} f_0 & g_{12} & g_{13} & d_3 \\ g_{12} & f_1 & g_{23} & g_{24} \\ g_{13} & g_{23} & f_2 & c_1 \\ d_3 & g_{24} & c_1 & f_3 \end{pmatrix},$$

где

$$g_{12} = \frac{k_0}{2k_1} f_0 + \frac{k_1}{2k_0} f_1 - \frac{k_2^2}{2k_0 k_1} f_2 - \frac{k_3^2}{2k_0 k_1} f_3 - \frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} c_1,$$

$$g_{13} = \frac{k_0}{2k_2} f_0 - \frac{k_1^2}{2k_0 k_2} f_1 + \frac{k_2}{2k_0} f_2 + \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} f_3 + \frac{k_3}{k_0} c_1 - \frac{k_3}{k_2} d_3,$$

$$g_{23} = \frac{k_0^2}{2k_1 k_2} f_0 - \frac{k_1}{2k_2} f_1 - \frac{k_2}{2k_1} f_2 + \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} f_3 - \frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} d_3,$$

$$g_{24} = -\frac{k_3}{k_1} f_3 - \frac{k_2}{k_1} c_1 + \frac{k_0}{k_1} d_3.$$

Это общее решение можно разложить в линейную суперпозицию 6 независимых:

$$\begin{aligned} f_{(ab)} = & f_0 \begin{vmatrix} 1 & \frac{k_0}{2k_1} & \frac{k_0}{2k_2} & 0 \\ \frac{k_0}{2k_1} & 0 & \frac{k_0^2}{2k_1 k_2} & 0 \\ \frac{k_0}{2k_2} & \frac{k_0^2}{2k_1 k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ & + f_1 \begin{vmatrix} 0 & \frac{k_1}{2k_0} & -\frac{k_1^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ \frac{k_1}{2k_0} & 1 & -\frac{k_1}{2k_2} & 0 \\ -\frac{k_1^2}{2k_0 k_2} & -\frac{k_1}{2k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ & + f_2 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{k_2^2}{2k_0 k_1} & \frac{k_2}{2k_0} & 0 \\ \frac{k_2^2}{2k_0 k_1} & 0 & -\frac{k_2}{2k_1} & 0 \\ \frac{k_2}{2k_0} & -\frac{k_2}{2k_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ & + f_3 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{k_3^2}{2k_0 k_1} & \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} & 0 \\ \frac{k_3^2}{2k_0 k_1} & 0 & \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} & -\frac{k_3}{k_1} \\ \frac{k_3^2}{2k_0 k_2} & \frac{k_3^2}{2k_1 k_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_3}{k_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \\ & + c_1 \begin{vmatrix} 0 & \frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} & \frac{k_3}{k_0} & 0 \\ \frac{k_2 k_3}{k_0 k_1} & 0 & 0 & -\frac{k_2}{k_1} \\ \frac{k_3}{k_0} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_2}{k_1} & 1 & 0 \end{vmatrix} + \\ & + d_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_3}{k_2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} & \frac{k_0}{k_1} \\ -\frac{k_3}{k_2} & -\frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{k_0}{k_1} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

или коротко так:

$$f_{(ab)} = f_0 F_0 + f_1 F_1 + f_2 F_2 + f_3 F_3 + c_1 C_1 + d_3 D_3. \quad (4.5)$$

Теперь учтем существование калибровочных решений; они задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{f} &= -i(k_0 \lambda_0 - k_1 \lambda_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3), \\ \bar{f}_0 &= -i \left( \frac{3}{2} k_0 \lambda_0 + \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} k_2 \lambda_2 + \frac{1}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{f}_1 &= -i \left( \frac{1}{2} k_0 \lambda_0 + \frac{3}{2} k_1 \lambda_1 - \frac{1}{2} k_2 \lambda_2 - \frac{1}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{f}_2 &= -i \left( \frac{1}{2} k_0 \lambda_0 - \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 + \frac{3}{2} k_2 \lambda_2 - \frac{1}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{f}_3 &= -i \left( \frac{1}{2} k_0 \lambda_0 - \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 - \frac{1}{2} k_2 \lambda_2 + \frac{3}{2} k_3 \lambda_3 \right), \\ \bar{d}_1 &= -i(k_0 \lambda_1 + k_1 \lambda_0), \quad \bar{d}_2 = -i(k_0 \lambda_2 + k_2 \lambda_0), \\ \bar{d}_3 &= -i(k_0 \lambda_3 + k_3 \lambda_0), \\ \bar{c}_1 &= -i(k_2 \lambda_3 + k_3 \lambda_2), \quad \bar{c}_2 = -i(k_1 \lambda_3 + k_3 \lambda_1), \\ \bar{c}_3 &= -i(k_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_1). \end{aligned}$$

Поскольку решения исходной системы построены с учетом равенства  $f = 0$ , нужно требовать, чтобы калибровочные преобразования не нарушали этого условия; поэтому накладываем ограничение  $k_0 \lambda_0 - k_1 \lambda_1 - \lambda_2 k_2 - \lambda_3 k_3 = 0$ . В результате общее калибровочное решение примет вид

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2ik_1 \lambda_1 - 2i\lambda_2 k_2 - 2i\lambda_3 k_3, \\ \bar{f}_1 &= -2ik_1 \lambda_1, \quad \bar{f}_2 = -2ik_2 \lambda_2, \quad \bar{f}_3 = -2ik_3 \lambda_3, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1 - i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2 - i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{d}_2 &= -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1 - i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2 - i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{d}_3 &= -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 - i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2 - i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{c}_1 &= -ik_2 \lambda_3 - ik_3 \lambda_2, \quad \bar{c}_2 = -ik_1 \lambda_3 - ik_3 \lambda_1, \\ \bar{c}_3 &= -ik_1 \lambda_2 - ik_2 \lambda_1. \end{aligned}$$

Его можно разложить в комбинацию трех независимых:

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2ik_1 \lambda_1, \quad \bar{f}_1 = -2ik_1 \lambda_1, \quad \bar{f}_2 = 0, \quad \bar{f}_3 = 0, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1, \quad \bar{d}_2 = -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1, \quad \bar{d}_3 = -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1, \\ \bar{c}_1 &= 0, \quad \bar{c}_2 = -ik_3 \lambda_1, \quad \bar{c}_3 = -ik_2 \lambda_1, \end{aligned}$$

$$f_{(ab)}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2ik_1 \lambda_1 & -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1 & -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1 & -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 \\ -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1 & -2ik_1 \lambda_1 & -ik_2 \lambda_1 & -ik_3 \lambda_1 \\ -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1 & -ik_2 \lambda_1 & 0 & 0 \\ -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1 & -ik_3 \lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2i\lambda_2 k_2, \quad \bar{f}_1 = 0, \quad \bar{f}_2 = -2ik_2 \lambda_2, \quad \bar{f}_3 = 0, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2, \quad \bar{d}_2 = -i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2, \quad \bar{d}_3 = -i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2, \\ \bar{c}_1 &= -ik_3 \lambda_2, \quad \bar{c}_2 = 0, \quad \bar{c}_3 = -ik_1 \lambda_2, \end{aligned}$$

$$f_{(ab)}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2i\lambda_2 k_2 & -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2 & -i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2 & -i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2 \\ -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_2 & 0 & -ik_1 \lambda_2 & 0 \\ -i \frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0} \lambda_2 & -ik_1 \lambda_2 & -2ik_2 \lambda_2 & -ik_3 \lambda_2 \\ -i \frac{k_3 k_2}{k_0} \lambda_2 & 0 & -ik_3 \lambda_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= -2i\lambda_3 k_3, \quad \bar{f}_1 = 0, \quad \bar{f}_2 = 0, \quad \bar{f}_3 = -2ik_3 \lambda_3, \\ \bar{d}_1 &= -i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3, \quad \bar{d}_2 = -i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3, \quad \bar{d}_3 = -i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3, \\ \bar{c}_1 &= -ik_2 \lambda_3, \quad \bar{c}_2 = -ik_1 \lambda_3, \quad \bar{c}_3 = 0, \end{aligned}$$

$$f_{(ab)}^{(3)} = \begin{pmatrix} -2i\lambda_3 k_3 & -i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3 & -i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3 & -i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3 \\ -i \frac{k_1 k_3}{k_0} \lambda_3 & 0 & 0 & -ik_1 \lambda_3 \\ -i \frac{k_2 k_3}{k_0} \lambda_3 & 0 & 0 & -ik_2 \lambda_3 \\ -i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3 & -ik_1 \lambda_3 & -ik_2 \lambda_3 & -2ik_3 \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Три простейших калибровочных решения должны содержаться в найденном общем решении (4.4).

Сначала рассматриваем случай  $\lambda_1 \neq 0$ . Из равенства  $f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(1)}$  следует система из 10 уравнений:

$$\begin{aligned} f_0 &= -2ik_1 \lambda_1, \quad f_1 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_2 = 0, \\ f_3 &= 0, \quad c_1 = 0, \quad d_3 = -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1, \end{aligned}$$

$$\frac{k_0^2}{2k_1 k_2} f_0 - \frac{k_1}{2k_2} f_1 - \frac{k_0 k_3}{k_1 k_2} d_3 = -ik_2 \lambda_1, \quad \frac{k_0}{k_1} d_3 = -ik_3 \lambda_1,$$

$$\frac{k_0}{2k_1} f_0 + \frac{k_1}{2k_0} f_1 = -i \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0} \lambda_1,$$

$$\frac{k_0}{2k_2} f_0 - \frac{k_1^2}{2k_0 k_2} f_1 - \frac{k_3}{k_2} d_3 = -i \frac{k_1 k_2}{k_0} \lambda_1,$$

что эквивалентно следующему:

$$f_0 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_1 = -2ik_1 \lambda_1, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

$$c_1 = 0, \quad d_3 = -i \frac{k_3 k_1}{k_0} \lambda_1,$$

$$k_0^2 + k_1^2 \equiv k_0^2 + k_1^2, \quad k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0,$$

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0.$$

Т. е. это калибровочное решение отождествляется со случаем общего решения согласно

$$f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(1)}, f_0 = -2ik_1\lambda_1, f_1 = -2ik_1\lambda_1, f_2 = 0, \\ f_3 = 0, c_1 = 0, d_3 = -i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1.$$

Аналогично рассматриваем случай  $\lambda_2 \neq 0$ . Из равенства  $f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(2)}$  следует система

$$f_0 = -2i\lambda_2k_2, f_1 = 0, f_2 = -2ik_2\lambda_2, f_3 = 0, \\ c_1 = -ik_3\lambda_2, d_3 = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2, \\ \frac{k_0}{2k_1}(-2i\lambda_2k_2) - \frac{k_2^2}{2k_0k_1}(-2ik_2\lambda_2) - \\ -\frac{k_2k_3}{k_0k_1}(-ik_3\lambda_2) = -i\frac{k_1k_2}{k_0}\lambda_2, \\ \frac{k_0}{2k_2}(-2i\lambda_2k_2) + \frac{k_2}{2k_0}(-2ik_2\lambda_2) + \frac{k_3}{k_0}(-ik_3\lambda_2) - \\ -\frac{k_3}{k_2}\left(-i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2\right) = -i\frac{k_0^2 + k_2^2}{k_0}\lambda_2, \\ \frac{k_0^2}{2k_1k_2}(-2i\lambda_2k_2) - \frac{k_2}{2k_1}(-2ik_2\lambda_2) - \\ -\frac{k_0k_3}{k_1k_2}\left(-i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2\right) = -ik_1\lambda_2, \\ -\frac{k_2}{k_1}(-ik_3\lambda_2) + \frac{k_0}{k_1}\left(-i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2\right) = 0.$$

В результате приходим к соотношениям

$$f_0 = -2i\lambda_2k_2, f_1 = 0, f_2 = -2ik_2\lambda_2, f_3 = 0, \\ c_1 = -ik_3\lambda_2, d_3 = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2,$$

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0, k_0^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_0^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0, \\ k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0, k_2k_3 - k_2k_3 \equiv 0.$$

Следовательно, это калибровочное решение описывается равенствами

$$f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(2)}, f_0 = -2i\lambda_2k_2, f_1 = 0, f_2 = -2ik_2\lambda_2, \\ f_3 = 0, c_1 = -ik_3\lambda_2, d_3 = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2.$$

Рассмотрим случай  $\lambda_3 \neq 0$ . Из равенства

$f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(3)}$  следуют 10 уравнений:

$$f_0 = -2i\lambda_3k_3, f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = -2ik_3\lambda_3, \\ c_1 = -ik_2\lambda_3, d_3 = -i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3, \\ \frac{k_0}{2k_1}(-2i\lambda_3k_3) - \frac{k_3^2}{2k_0k_1}(-2ik_3\lambda_3) - \\ -\frac{k_2k_3}{k_0k_1}(-ik_2\lambda_3) = -i\frac{k_1k_3}{k_0}\lambda_3, \\ \frac{k_0}{2k_2}(-2i\lambda_3k_3) + \frac{k_3^2}{2k_0k_2}(-2ik_3\lambda_3) + \frac{k_3}{k_0}(-ik_2\lambda_3) -$$

$$-\frac{k_3}{k_2}\left(-i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3\right) = -i\frac{k_2k_3}{k_0}\lambda_3, \\ \frac{k_0^2}{2k_1k_2}(-2i\lambda_3k_3) + \frac{k_3^2}{2k_1k_2}(-2ik_3\lambda_3) - \\ -\frac{k_0k_3}{k_1k_2}\left(-i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3\right) = 0, \\ -\frac{k_3}{k_1}(-2ik_3\lambda_3) - \frac{k_2}{k_1}(-ik_2\lambda_3) + \\ + \frac{k_0}{k_1}\left(-i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3\right) = -ik_1\lambda_3.$$

В результате приходим к

$$f_0 = -2i\lambda_3k_3, f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = -2ik_3\lambda_3, \\ c_1 = -ik_2\lambda_3, d_3 = -i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3,$$

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0, k_0^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_0^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv 0, \\ k_0^2 + k_3^2 - k_0^2 - k_3^2 \equiv 0, k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - 2k_2^2 + k_3^2 \equiv 0;$$

это калибровочное решение отождествляется со случаем общего решения согласно

$$f_{(ab)} = f_{(ab)}^{(3)}, f_0 = -2i\lambda_3k_3, f_1 = 0, f_2 = 0, \\ f_3 = -2ik_3\lambda_3, c_1 = -ik_2\lambda_3, d_3 = -i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3.$$

Таким образом, действительно, среди общего решения исходной системы уравнений существуют три, которые могут быть отождествлены с калибровочными:

$$f_0^{(1)} = -2ik_1\lambda_1, f_1^{(1)} = -2ik_1\lambda_1, f_2^{(1)} = 0, f_3^{(1)} = 0, \\ c_1^{(1)} = 0, d_3^{(1)} = -i\frac{k_3k_1}{k_0}\lambda_1, f_0^{(2)} = -2ik_2\lambda_2, \\ f_1^{(2)} = 0, f_2^{(2)} = -2ik_2\lambda_2, f_3^{(2)} = 0, c_1^{(2)} = -ik_3\lambda_2, \\ d_3^{(2)} = -i\frac{k_3k_2}{k_0}\lambda_2, f_0^{(3)} = -2ik_3\lambda_3, \\ f_1^{(3)} = 0, f_2^{(3)} = 0, f_3^{(3)} = -2ik_3\lambda_3, c_1^{(3)} = -ik_2\lambda_3, \\ d_3^{(3)} = -i\frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0}\lambda_3.$$

Приведем здесь же явный вид общего решения (4.5) – ограничимся символической формой:

$$(f_{(ab)}) = f_0F_0 + f_1F_1 + f_2F_2 + f_3F_3 + c_1C_1 + d_3D_3.$$

Присутствие калибровочных решений внутри общего может быть пояснено следующим образом:

Общее:	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$c_1$	$d_3$
(1):	$f_0^{(1)}$	$f_1^{(1)}$	0	0	0	$d_3^{(1)}$
(2):	$f_0^{(2)}$	0	$f_2^{(2)}$	0	$c_1^{(2)}$	$d_3^{(2)}$
(3):	$f_0^{(3)}$	0	0	$f_3^{(3)}$	$c_1^{(3)}$	$d_3^{(3)}$

Отсюда можно сделать вывод, что решения  $F_1, F_2, F_3$  являются калибровочными. Дальше нужно исследовать величину



$$f_{ab}^{phys} = f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3)} \quad (4.6)$$

с учетом трех равенств

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1^{(1)} = -2ik_1\lambda_1, \\ f_2 &= f_2^{(3)} = -2ik_2\lambda_2, \\ f_3 &= f_3^{(3)} = -2ik_3\lambda_3. \end{aligned}$$

В явном виде равенство (4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} f_{ab}^{phys} &= f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3)} = \\ &= f_0 \cdot F_0 + f_1 \cdot F_1 + f_2 \cdot F_2 + f_3 \cdot F_3 + c_1 \cdot C_1 + d_3 \cdot D_3 + \\ &+ 2ik_1\lambda_1 \cdot F_0 + 2ik_1\lambda_1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + \\ &+ 0 \cdot F_3 + 0 \cdot C_1 + \frac{ik_3k_1}{k_0} \lambda_1 \cdot D_3 + \\ &+ 2ik_2\lambda_2 \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 2ik_2\lambda_2 \cdot F_2 + \\ &+ 0 \cdot F_3 + ik_3\lambda_2 \cdot C_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0} \lambda_2 \cdot D_3 + \\ &+ 2ik_3\lambda_3 \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 2ik_3\lambda_3 \cdot F_3 + \\ &+ ik_2\lambda_3 \cdot C_1 + i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3 \cdot D_3; \end{aligned}$$

отсюда после приведения подобных получаем (обращаем внимание на то, что множитель перед решением  $F_0$  обращается в нуль)

$$\begin{aligned} f_{ab}^{phys} &= f_{ab} - f_{ab}^{(1)} - f_{ab}^{(2)} - f_{ab}^{(3)} = \\ &= (f_0 - \bar{f}_0)^{=0} \cdot F_0 + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + \\ &+ (c_1 + ik_3\lambda_2 + ik_2\lambda_3) \cdot C_1 + \\ &+ \left( d_3 + \frac{ik_3k_1}{k_0} \lambda_1 + \frac{ik_3k_2}{k_0} \lambda_2 + i \frac{k_0^2 + k_3^2}{k_0} \lambda_3 \right) \cdot D_3. \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение, не содержащее калибровочных компонент, выглядит так:

$$\begin{aligned} f_{ab}^{phys} &= \mu_1 \cdot C_1 + \mu_2 \cdot D_3 = \\ &= \mu_1 \begin{vmatrix} 0 & \frac{k_2k_3}{k_0k_1} & \frac{k_3}{k_0} & 0 \\ \frac{k_2k_3}{k_0k_1} & 0 & 0 & -\frac{k_2}{k_1} \\ \frac{k_3}{k_0} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_2}{k_1} & 1 & 0 \end{vmatrix} + \\ &\mu_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_3}{k_2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k_0k_3}{k_1k_2} & \frac{k_0}{k_1} \\ \frac{k_3}{k_2} & -\frac{k_0k_3}{k_1k_2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{k_0}{k_1} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Этот симметричный тензор содержит только два произвольных числовых параметра  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ; он

описывает два линейно независимых решения уравнения для безмассовой частицы со спином 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Pauli, W.* Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.
2. *Fierz, M.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. *De Broglie, L.* Sur l'interprétation de certaines équations dans la théorie des particules de spin 2 / L. De Broglie // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1941. – Vol. 212. – P. 657–659.
4. *Гельфанд, И.М.* Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // *ЖЭТФ.* – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
5. *Фрадкин, Э.Е.* К теории частиц с высшими спинами / Э.Е. Фрадкин // *ЖЭТФ.* – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.
6. *Федоров, Ф.И.* К теории частицы со спином 2 / Ф.И. Федоров // *Уч. зап. БГУ. Сер. физ.-мат.* – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.
7. *Крылов, Б.В.* Уравнения первого порядка для гравитона / Б.В. Крылов, Ф.И. Федоров // *ДАН БССР.* – 1967. – Т. 11, № 8. – С. 681–684.
8. *Богуш, А.А.* О матрицах уравнений для частиц со спином 2 / А.А. Богуш, Б.В. Крылов, Ф.И. Федоров // *Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук.* – 1968. – № 1. – С. 74–81.
9. *Федоров, Ф.И.* Уравнения первого порядка для гравитационного поля / Ф.И. Федоров // *Докл. АН СССР.* – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 802–805.
10. *Крылов, Б.В.* О системах уравнений первого порядка для гравитона / Б.В. Крылов // *Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук.* – 1972. – № 6. – С. 82–89.
11. *Федоров, Ф.И.* Уравнения первого порядка для гравитационного поля в вакууме / Ф.И. Федоров, А.А. Кирилов // *Acta Physica Polonica. B.* – 1976. – Vol. 7, № 3. – P. 161–167.
12. *Кисель, В.В.* О релятивистских волновых уравнениях для массивной частицы со спином 2 / В.В. Кисель // *Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук.* – 1986. – № 5. – С. 94–99.
13. *Файнберг, В.Я.* К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электро-магнитным и мезонным полями / В.Я. Файнберг // *Тр. ФИАН СССР.* – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.
14. *Regge, T.* On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // *Nuovo Cimento.* – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325–326.
15. *Buchdahl, H.A.* On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field /

H.A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1958. – Vol. 10. – P. 96–103.

16. Buchdahl, H.A. On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces / H.A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1962. – Vol. 25. – P. 486–496.

17. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E.C.G. Sudarshan // Ann. Phys. N.Y. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 121–145.

18. Johnson, K. The impossibility of a consistent theory of a charged higher spin Fermi fields / K. Johnson, E.C.G. Sudarshan // Ann. Phys. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 126–145.

19. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 188, № 5. – P. 2218–2222.

20. Cox, W. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.

21. Loide, R.K. On conformally covariant spin-3/2 and spin-2 equations / R.K. Loide // J. Phys. A. – 1986. – Vol. 19, № 5. – P. 827–829.

22. Об уравнениях для частицы со спином 2 во внешних электромагнитных и гравитационных полях / А.А. Богуш [и др.] // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 62–67.

23. Red'kov, V.M. Graviton in a curved space-time background and gauge symmetry / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, V.V. Kisel // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 772–778.

24. Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2 / В.В. Кисель [и др.] // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 58–63.

25. Нерелятивистский предел в теории частицы со спином 2 / В.В. Кисель [и др.] // Доклады НАН Беларусі. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 21–27.

Поступила в редакцию 27.01.2021.

УДК 537.87

## НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ БИИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

## SOME SOLUTIONS OF THE DISPERSION EQUATION FOR A MOVING BIISOTROPIC MEDIUM

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai

Francisk Skorina Gomel State University

Получено дисперсионное уравнение для плоских монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в движущейся с постоянной скоростью биизотропной среде. В частных случаях распространения волны вдоль направления движения среды и противоположно ему найдены точные решения дисперсионного уравнения.

**Ключевые слова:** движущаяся биизотропная среда, материальные уравнения, уравнения Максвелла, показатель преломления, дисперсионное уравнение.

The dispersion equation is obtained for plane monochromatic electromagnetic waves propagating in a biisotropic medium moving at a constant speed. Exact solutions of the dispersion equation are found in the case of wave propagation along or opposite to the medium motion direction.

**Keywords:** moving biisotropic medium, material equations, Maxwell equations, refractive index, dispersion equation.

### Введение

В настоящее время биизотропные и бианизотропные среды активно изучаются [1]–[3]. В данной статье мы обсуждаем распространение плоских монохроматических волн в движущейся биизотропной среде.

Пусть биизотропная среда движется в инерциальной системе отсчёта  $K$  с постоянной скоростью  $V = V\tau$ , где  $\tau$  – единичный вектор, задающий направление движения среды. Векторные величины, определённые в системе покоя среды  $K'$ , будем обозначать штрихами, а в лабораторной системе отсчёта  $K$  – записывать без штрихов. В системе отсчёта  $K'$  материальные уравнения биизотропной среды в системе единиц Хевисайда – Лоренца имеют вид [1]–[4]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' &= \varepsilon \mathbf{E}' + \xi \mathbf{H}'; \\ \mathbf{B}' &= \xi^* \mathbf{E}' + \mu \mathbf{H}'; \\ \xi &= \chi + i\alpha, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды соответственно,  $\chi$  – параметр Теллгена,  $\alpha$  – киральный параметр, символом «\*» обозначена операция комплексного сопряжения.

### 1 Материальные уравнения в случае движущейся среды

Представим материальные уравнения (0.1) в матричной форме, выражая векторы электрической индукции  $\mathbf{D}'$  и магнитной напряжённости  $\mathbf{H}'$  через векторы электрической напряжённости  $\mathbf{E}'$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}'$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}' \\ \mathbf{H}' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon - \frac{|\xi|^2}{\mu} & \xi \\ \xi^* & \mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Законы преобразования векторов электромагнитного поля при переходе из лабораторной системы отсчёта в систему покоя имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{D}' \\ \mathbf{H}' \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \Lambda & \beta\gamma \tau^\times \\ -\beta\gamma \tau^\times & \Lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \Lambda & \beta\gamma \tau^\times \\ -\beta\gamma \tau^\times & \Lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В формулах (1.2) использованы следующие обозначения:  $\beta = V/c$ ,  $c$  – скорость электромагнитной волны в вакууме,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $\Lambda = \gamma + (1 - \gamma)(\tau \circ \tau)$  – матрица размера  $3 \times 3$ , символом « $\circ$ » обозначена операция тензорного произведения,  $\tau^\times$  – дуальный вектору  $\tau$  тензор, компоненты которого определяются в соответствии с выражением  $(\tau^\times)_{nm} = \varepsilon_{nkm} \tau_k$ , где  $\varepsilon_{nkm}$  – компоненты псевдотензора Леви-Чивиты. Из уравнений (1.1) с учётом преобразований (1.2) получим материальные уравнения для движущейся в инерциальной системе отсчёта  $K$  биизотропной среды

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P & L \\ M & Q \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 P &= \mu^{-1} \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \Lambda^2 + \mu^{-1} \beta \gamma \left( \xi^* \tau^\times \Lambda - \xi \Lambda \tau^\times \right) + \\
 &\quad + \mu^{-1} \beta^2 \gamma^2 \tau^\times \tau^\times; \\
 L &= \mu^{-1} \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \beta \gamma \Lambda \tau^\times + \\
 &\quad + \mu^{-1} \beta^2 \gamma^2 \xi^* \tau^\times \tau^\times + \mu^{-1} \xi \Lambda^2 - \mu^{-1} \beta \gamma \tau^\times \Lambda; \\
 M &= \mu^{-1} \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \beta \gamma \tau^\times \Lambda - \mu^{-1} \beta^2 \gamma^2 \xi \tau^\times \tau^\times - \\
 &\quad - \mu^{-1} \xi^* \Lambda^2 - \mu^{-1} \beta \gamma \Lambda \tau^\times; \\
 Q &= \mu^{-1} \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \beta^2 \gamma^2 \tau^\times \tau^\times + \\
 &\quad + \mu^{-1} \beta \gamma \left( \xi \tau^\times \Lambda - \xi^* \Lambda \tau^\times \right) + \mu^{-1} \Lambda^2.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Материальные уравнения (1.3) содержат шести-мерные векторы и матрицу размера  $6 \times 6$ , состоящую из блоков – матриц  $P, L, M, Q$  размера  $3 \times 3$ . Учитывая свойства матриц  $\Lambda$  и  $\tau^\times$ :

$$\begin{aligned}
 \tau^\times \Lambda &= \Lambda \tau^\times = \gamma \tau^\times; \\
 \tau^\times \tau^\times &= \tau \circ \tau - 1; \\
 \Lambda^2 &= \gamma^2 \left( 1 - \beta^2 (\tau \circ \tau) \right),
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

представим выражения (1.4) в более удобном для дальнейших вычислений виде

$$\begin{aligned}
 P &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[ \varepsilon \mu - |\xi|^2 - \beta^2 - \beta^2 \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) (\tau \circ \tau) - 2i\alpha \beta \tau^\times \right]; \\
 L &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[ \xi - \beta^2 \xi^* - 2i\alpha \beta^2 (\tau \circ \tau) + \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) \beta \tau^\times \right]; \\
 M &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[ \beta^2 \xi - \xi^* - 2i\alpha \beta^2 (\tau \circ \tau) + \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) \beta \tau^\times \right]; \\
 Q &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[ 1 - \beta^2 \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) + \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) \beta^2 (\tau \circ \tau) + 2i\alpha \beta \tau^\times \right].
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть, что матрицы  $P, L, M, Q$  удовлетворяют условиям

$$P^+ = P, \quad Q^+ = Q, \quad L^+ = -M,$$

где знаком «+» обозначена операция эрмитова сопряжения.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением плоских монохроматических волн

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t); \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Подставляя выражения (1.7) в уравнения Максвелла без источников, получим алгебраические уравнения

$$n_0 (i\mathbf{n})^\times \mathbf{H} = -i\mathbf{D}; \quad n_0 (i\mathbf{n})^\times \mathbf{E} = i\mathbf{B}, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.9}$$

в которых единичный вектор  $\mathbf{n}$  связан с волновым вектором  $\mathbf{k}$  по формуле

$$\mathbf{k} = \mathbf{n} \omega n_0 / c$$

и для показателя преломления введено обозначение  $n_0$ .

Исключая с учётом уравнений (1.8) векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  из системы уравнений (1.3), а затем исключая и вектор  $\mathbf{H}$ , получим следующее алгебраическое уравнение для вектора  $\mathbf{E}$ :

$$\left[ P - in_0 L (i\mathbf{n}^\times) - in_0 (i\mathbf{n}^\times) M - n_0^2 (i\mathbf{n}^\times) Q (i\mathbf{n}^\times) \right] \mathbf{E} = 0. \tag{1.10}$$

Используя (1.3), исключим вектор  $\mathbf{D}$  из первого уравнения (1.9), в результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (P\mathbf{E} + L\mathbf{B}) &= 0; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

В дальнейшем уравнения (1.11) нам понадобятся для упрощения процедуры нахождения собственных значений показателя преломления.

Из (1.10) следует, что дисперсионное уравнение для величины  $n_0$  имеет форму:

$$\det \left[ P - in_0 L (i\mathbf{n}^\times) - in_0 (i\mathbf{n}^\times) M - n_0^2 (i\mathbf{n}^\times) Q (i\mathbf{n}^\times) \right] = 0. \tag{1.12}$$

Решение алгебраического уравнения (1.12) в случае произвольного направления распространения волны относительно направления движения среды – весьма громоздкая задача, поэтому в данной работе мы ограничимся рассмотрением двух частных случаев.

## 2 Распространение волн вдоль и против направления движения среды

Пусть волновой вектор  $\mathbf{k}$  распространяющейся волны и вектор скорости движения среды  $\mathbf{V}$  коллинеарны. При этом мы будем полагать, что  $\tau = \mathbf{n}$ . В этом случае из выражений (1.6) следуют формулы для матриц –

$$\begin{aligned}
 P &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[ \varepsilon \mu - |\xi|^2 - \beta^2 - \beta^2 \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) (\mathbf{n} \circ \mathbf{n}) - 2i\alpha \beta \mathbf{n}^\times \right]; \\
 L(i\mathbf{n}^\times) &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[ \left( \xi - \beta^2 \xi^* \right) (i\mathbf{n}^\times) - i\beta \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) (1 - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \right]; \\
 (i\mathbf{n}^\times) M &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[ \left( \beta^2 \xi - \xi^* \right) (i\mathbf{n}^\times) - i\beta \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 - 1 \right) (1 - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \right]; \\
 (i\mathbf{n}^\times) Q (i\mathbf{n}^\times) &= \mu^{-1} \gamma^2 \times \\
 &\times \left[ \left( 1 - \beta^2 \left( \varepsilon \mu - |\xi|^2 \right) \right) (1 - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) + 2i\alpha \beta (i\mathbf{n}^\times) \right],
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

а также выражения для векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{n} P &= \mu^{-1} \left( \mu \varepsilon - |\xi|^2 \right) \mathbf{n}; \\ \mathbf{n} L &= \mu^{-1} \gamma^2 \left[ \xi - \beta^2 \xi^* - 2i\alpha \beta \right] \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Учитывая (2.2) в уравнениях (1.11), получим условие ортогональности

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{2.3}$$

Условие (2.3) и структура входящих в уравнение (1.10) матриц (2.1) определяют возможность нахождения собственных значений величины  $n_0$  не в результате прямого решения дисперсионного уравнения (1.12), а с использованием метода, посредством которого удастся упростить задачу. Для этого рассмотрим следующее вспомогательное равенство [6]:

$$(in^*)E = \lambda E, \quad (2.4)$$

которое по сути является формулировкой задачи на собственные значения  $\lambda$  для матрицы  $in^*$ . Найдём эти значения. Умножая (2.4) слева на  $in^*$  и выполнив в правой части полученного таким образом равенства замену по формуле (2.4), приведём его к виду

$$(in^*)(in^*)E = \lambda^2 E. \quad (2.5)$$

С учётом второй из формул (1.5) и условия ортогональности векторов  $n$  и  $E$  (2.3) преобразуем (2.5) к следующему виду:

$$(1 - \lambda^2)E = 0,$$

откуда следует, что  $\lambda = \pm 1$ .

Учитывая условие ортогональности (2.3), можно исключить из формул (2.1) слагаемые, содержащие матрицу  $n \circ n$ , так как при подстановке (2.1) в уравнение (1.10) эти слагаемые обуславливают появление скалярного произведения  $n \cdot E$ . Учитывая равенство (2.4), заменим в (2.1) матрицы  $in^*$  величиной  $\lambda$ . С учётом этих преобразований представим уравнение (1.10) в виде

$$\begin{aligned} & \left[ \varepsilon\mu - |\xi|^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta\lambda + \right. \\ & \left. + 2n_0(\alpha(1 + \beta^2)\lambda - \beta(\varepsilon\mu - |\xi|^2 - 1)) - \right. \\ & \left. - n_0^2(1 - \beta^2(\varepsilon\mu - |\xi|^2) + 2\alpha\beta\lambda) \right] E = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) содержит только единичную матрицу, поэтому задача о нахождении собственных значений величины  $n_0$  теперь состоит в решении квадратного уравнения, получаемого приравниванием к нулю множителя при  $E$  в (2.6). Для упрощения решения этого уравнения введём обозначения [7]

$$\begin{aligned} n_+ &= \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + \alpha; \\ n_- &= \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} - \alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Величины, определённые по формулам (2.7), являются показателями преломления неподвижной биизотропной среды, в которой распространяется плоская монохроматическая волна – правоциркулярно поляризованная и левоциркулярно поляризованная соответственно. Из (2.7) следуют выражения

$$\begin{aligned} n_+ n_- &= \varepsilon\mu - |\xi|^2; \\ n_+ - n_- &= 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учётом (2.8) уравнение для  $n_0$  запишем в форме

$$\begin{aligned} & (n_+ + \lambda\beta)(n_- - \lambda\beta) - \\ & - n_0((\beta n_+ + \lambda)(n_- - \lambda\beta) + (\beta n_- - \lambda)(n_+ + \lambda\beta)) + \\ & + n_0^2(\beta n_+ + \lambda)(\beta n_- - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Решения этого уравнения представим в виде

$$\begin{aligned} n_{0(+)}^{(\lambda)}(\beta) &= \frac{n_+ + \lambda\beta}{\beta n_+ + \lambda}; \\ n_{0(-)}^{(\lambda)}(\beta) &= \frac{n_- - \lambda\beta}{\beta n_- - \lambda}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

После подстановки в (2.9) значений  $\lambda = \pm 1$  получим четыре выражения для показателя преломления в лабораторной системе отсчёта  $K$ :

$$\begin{aligned} n_{0(+)}^{(+)}(\beta) &= \frac{n_+ + \beta}{\beta n_+ + 1}; & n_{0(+)}^{(-)}(\beta) &= \frac{n_+ - \beta}{\beta n_+ - 1}; \\ n_{0(-)}^{(-)}(\beta) &= \frac{n_- + \beta}{\beta n_- + 1}; & n_{0(-)}^{(+)}(\beta) &= \frac{n_- - \beta}{\beta n_- - 1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из формул (2.10) видно, что они попарно связаны между собой равенствами

$$\begin{aligned} n_{0(+)}^{(+)}(\beta) &= -n_{0(+)}^{(-)}(-\beta); \\ n_{0(-)}^{(+)}(\beta) &= -n_{0(-)}^{(-)}(-\beta). \end{aligned}$$

Величины  $n_{0(+)}^{(+)}(\beta)$ ,  $n_{0(-)}^{(-)}(\beta)$  положительно определены, а знак величин  $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$ ,  $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$  может меняться в зависимости от значения параметра  $\beta$ . Далее произведём анализ показателей преломления (2.10) и их трансформацию при переходе в покоящуюся систему отсчёта.

### 3 Анализ показателей преломления

При переходе из лабораторной системы отсчёта  $K$  в покоящуюся  $K'$  величины  $n_{0(+)}^{(+)}(\beta)$  и  $n_{0(-)}^{(-)}(\beta)$  преобразуются в показатели преломления  $n_+$  и  $n_-$  соответственно. Так как все эти четыре величины положительны, то в обеих системах отсчёта волны распространяются вдоль направления движения среды.

Величины  $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$  и  $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$  при переходе в покоящуюся систему отсчёта становятся равными  $-n_+$  и  $-n_-$  соответственно, т. е. электромагнитные волны распространяются против направления движения среды в этой системе отсчёта.

Обсудим теперь, как будут распространяться эти волны в лабораторной системе отсчёта. При этом будем полагать, что  $n_{\pm} > 1$ .

Рассмотрим четыре случая:

1)  $\beta < 1/n_{\pm}$  ( $V < c/n_{\pm}$ ). При таких значениях  $\beta$  величины  $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$ ,  $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$  отрицательны. Таким образом, в лабораторной системе отсчёта волны будут распространяться против направления движения среды;

2)  $\beta > 1/n_{\pm}$  ( $V > c/n_{\pm}$ ). В этом случае величины  $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$ ,  $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$  положительны и

соответствующие волны распространяются вдоль направления движения среды в лабораторной системе отсчёта;

3)  $\beta = 1/n_{\pm}$  ( $V = c/n_{\pm}$  – фазовая скорость волны в системе покоя). При таком значении  $\beta$  волна будет «покоиться» в лабораторной системе отсчёта;

4)  $1/n_{+} < \beta < 1/n_{-}$  ( $c/n_{+} < V < c/n_{-}$ ). В случае таких значений  $\beta$  величина  $n_{0(+)}^{(-)}(\beta)$  положительна, а величина  $n_{0(-)}^{(+)}(\beta)$  отрицательна, т. е. в лабораторной системе отсчёта правоциркулярно поляризованная волна распространяется вдоль направления движения среды, а левоциркулярно поляризованная – противоположно.

Отметим, что выводы, аналогичные первым трём, могут быть сделаны и при анализе формулы (7.8) для  $\vartheta = 0$ , приведенной в работе [8] для описания движущейся изотропной среды. Четвёртый вывод не применим в случае изотропной среды.

#### Заключение

Таким образом, в данной работе получено дисперсионное уравнение для описания распространения плоской монохроматической волны в движущейся биизотропной среде в произвольном направлении относительно направления движения среды. Точные решения дисперсионного уравнения (показатели преломления) найдены в частных случаях: когда волновой вектор направлен вдоль направления движения биизотропной среды и противоположно ему.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Aladadi, Y.T. Classification and characterization of electromagnetic materials / Y.T. Aladadi, M.A.S. Alkanhal // Scientific Reports. – 2020. – Vol. 10, № 11406. – P. 1–11.
2. Tanisli, M. Octonionic Maxwell's equations for bi-isotropic media / M. Tanisli, M.E. Kansu // Journal of Mathematical Physics. – 2011. – Vol. 52, № 5. – P. 053511.
3. Иванов, О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.В. Иванов. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 262 с.
4. *Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media* / I.V. Lindell [et. al.]. – Boston and London: Artech House, 1994. – 500 p.
5. *Теоретическая физика: в 10 т.* / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 4-е изд. – Москва: Физматлит, 2005. – Т. 8: Электродинамика сплошных сред. – 656 с.
6. Годлевская, А.Н. Волновые функции фотона в естественно гиротропной среде / А.Н. Годлевская, В.Н. Капшай // Оптика и спектроскопия. – 1989. – Т. 66, № 4. – С. 830–834.
7. Капшай, В.Н. Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 7–21.
8. Болотовский, Б.М. Современное состояние электродинамики движущихся сред (Безграничные среды) / Б.М. Болотовский, С.Н. Столяров // УФН. – 1974. – Т. 114, Вып. 4. – С. 569–608.

Поступила в редакцию 29.04.2021.

УДК 538.958

## ФОТОАКТИВНЫЕ СВОЙСТВА НАНОКОМПОЗИЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ $ZnO_x : MgO$ , ОСАЖДЕННЫХ В ВАКУУМЕ И МЕТОДОМ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ СИНТЕЗА

В.В. Малютина-Бронская<sup>1</sup>, А.В. Семченко<sup>2</sup>, А.В. Рогачёв<sup>2</sup>, М.А. Ярмоленко<sup>2</sup>,  
В.В. Сидский<sup>2</sup>, К.Д. Данильченко<sup>2</sup>, С.А. Сорока<sup>1</sup>, Э.В. Русу<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

<sup>2</sup>Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

<sup>3</sup>Институт электронной инженерии и нанотехнологий им. Д.В. Гицу АН Молдовы, Кишинев

## PHOTOACTIVE PROPERTIES OF $ZnO_x : MgO$ NANOCOMPOSITE COATINGS DEPOSITED IN VACUUM AND BY SOL-GEL METHOD

V.V. Malyutina-Bronskaya<sup>1</sup>, A.V. Semchenko<sup>2</sup>, A.V. Rogachev<sup>2</sup>, M.A. Yarmolenko<sup>2</sup>,  
V.V. Sidskiy<sup>2</sup>, C.D. Danilchenko<sup>2</sup>, S.A. Soroka<sup>1</sup>, E.V. Rusu<sup>3</sup>

<sup>1</sup>SSPA "Optics, optoelectronics and laser technology", Minsk

<sup>2</sup>Francisk Skorina Gomel State University

<sup>3</sup>D.V. Gitsu Institute of Electronic Engineering and Nanotechnology of the Academy of Sciences of Moldova, Chisinau

Представлены результаты определения эффективности использования вакуумного осаждения и золь-гель синтеза при формировании наноконпозиционных покрытий  $ZnO_x : MgO$  с шириной запрещенной зоны большей 5 В и с высокой чувствительностью к УФ- и видимому излучению. Показано, что спектральная чувствительность гетероструктуры с шириной запрещенной зоны  $ZnO_x : Mg$  порядка 6,2 эВ к УФ-излучению (278 нм) составила от 0,3 А / Вт до 3,23 А / Вт при смещении от 10 В до 14 В соответственно.

**Ключевые слова:** пленки  $ZnO : MgO$ , золь-гель метод, электронно-лучевое диспергирование, запрещенная зона, вольт-амперные характеристики, спектральная чувствительность.

Results of determination of efficiency of use of vacuum deposition and sol-gel synthesis of study for formation of nanocomposite coatings of  $ZnO_x : MgO$  with band gap width greater than 5 eV and with high sensitivity to UV and visible radiation are presented. It has been shown that spectral sensitivity of heterostructure with band gap width  $ZnO_x : Mg$  about 6.2 eV to UV radiation (278 nm) was from 0.3 A / W to 3.23 A / W at shift from 10 V to 14 V respectively.

**Keywords:**  $ZnO : MgO$  films, sol-gel method, electron-beam dispersion, band gap, volt-ampere characteristics, spectral sensitivity.

### Введение

В последние годы в мире активно разрабатываются материалы для датчиков ультрафиолетового (УФ) излучения [1]–[2]. Данные датчики позволяют решать ряд задач промышленного, медицинского, экологического характера, также они могут найти применение в космической и военной технике, при проведении научных исследований. Широкое использование УФ-датчиков обусловлено их преимуществами, такими как незначительная реакция на солнечное излучение, которое является мощным источником оптических помех, излучение от нагретых частей оборудования и других источников видимого и инфракрасного излучения.

Поиск новых материалов, проявляющих чувствительность к УФ излучению, является актуальной задачей. В числе предъявляемых к таким материалам требований, наряду с высокой термической стабильностью, радиационной и химической стойкостью, важным является значение ширины запрещенной зоны. В [3]–[6]

показана высокая перспективность использования для данных целей тонких покрытий  $ZnO$ , путем легирования которых возможно изменение ширины запрещенной зоны. Данные слои, наряду с другими свойствами, обладают фоточувствительностью, что делает возможным их применение при изготовлении солнечных элементов, светоизлучающих диодов и др. Для варьирования оптических и электрических свойств  $ZnO$  легируют металлами из периодической таблицы группы III, такими как В, Al, Mg, Са, Cd и Ga [7]–[9]. При выборе легирующей добавки необходимо, чтобы радиус легирующего элемента был приблизительно равен радиусу замещаемого элемента и в итоге образовалось соединение с небольшими искажениями кристаллической решетки. Радиус иона  $Mg^{2+}$  (0,57 А) сравним с радиусом иона  $Zn^{2+}$  (0,60 А), что делает магний подходящим в качестве легирующего элемента для замены Zn в его решетке и облегчения увеличения запрещенной зоны [10]–[13].

Следует отметить, что структурные параметры оксидных слоев сложного состава в значительной степени определяются условиями и режимами их формирования. Анализ применяемых при синтезе широкозонных полупроводниковых материалов технологических приемов [10]–[16] указывает на ряд преимуществ при использовании для этих целей золь-гель метода, вакуумного осаждения. Основной целью настоящей работы является оценка эффективности данных методов при формировании сложноксидных соединений  $ZnO_x : MgO$  с шириной запрещенной зоны свыше 5 эВ, определение их чувствительности к УФ-излучению.

### 1 Методика эксперимента

1.1. *Вакуумное электронно-лучевое осаждение.* Нанесение покрытий  $ZnO_x : MgO$  производилось путем воздействия на мишень потока электронов с энергией 800–1600 эВ и плотностью 0,01–0,03 А/см<sup>2</sup> с помощью устройства, схема которого приведена в [17]. Процесс осаждения покрытий производился при начальном давлении остаточных газов в вакуумной камере  $\approx 4 \cdot 10^{-3}$  Па.

В качестве материала мишени были использованы порошки металлического цинка и магния. Толщина осаждаемых слоев измерялась с помощью кварцевого измерителя толщины (КИТ) непосредственно при нанесении с помощью кварцевого измерителя. В работе осаждались трехслойные системы – магний + цинк + магний. Толщины наносимых слоев соотносились как 2 : 1 : 2.

Термообработку трехслойных систем осуществляли в атмосфере воздуха при температуре 500° С в течение 60 минут.

1.2. *Золь-гель метод.* Золь-гель методом получены слои на основе пленок  $ZnO:Mg$  с использованием отдельного гидролиза. В качестве метода нанесения использовался метод центрифугирования. В качестве исходных материалов использовали дигидрат ацетата цинка ( $ZnAc$ ) [ $Zn(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$ ]; ацетат магния ( $Mg(CH_3COO)_2$ ); изопропиловый спирт; дистиллированная вода [ $H_2O$ ]; диэтаноламин (DEA) [ $HOCH_2CH_2NHCH_2CH_2OH$ ]. Плёнкообразующий раствор (ПОР) был приготовлен следующим образом: ацетат цинка и ацетат магния отдельно растворяли в изопропиловом спирте и перемешивали при 60° С в течение 10 минут. Когда раствор трансформировался в эмульсию, в него был добавлен диэтаноламин при молярном соотношении DEA /  $ZnAc$  1 : 1 и  $H_2O$  /  $ZnAc$  2 : 1 соответственно. Аналогично изготавливался золь на основе ацетата магния. Затем золи смешивались в различных концентрациях для получения пленок с различным соотношением компонентов (1 : 1, 1 : 2, 1 : 5). Было изготовлено 3 варианта золя: в золь № 1 дополнительно была добавлена

соляная кислота, в золь № 2 – уксусная, в золь № 3 – азотная. Осаждение пленки производилось методом центрифугирования со скоростью вращения 2000 об/мин в течение 40 с с последующей сушкой каждого слоя при 60° С в течение 10 минут (2 слоя). Окончательную термообработку производили при температурах 250° С и 450° С в течение 30 минут. Золи, содержащие уксусную кислоту (серия 2), не обеспечивали адгезию к поверхности подложки.

Соотношения концентраций магния и цинка в приготовленных растворах приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Составы плёнкообразующих растворов

Образец	Соотношение Zn:Mg	Образец	Соотношение Zn:Mg
(1) 1 : 1	1 : 1	(3) 1 : 1	1 : 1
(1) 1 : 2	1 : 2	(3) 1 : 2	1 : 2
(1) 1 : 5	1 : 5	(3) 1 : 5	1 : 5

Золь наносили методом центрифугирования (5 слоёв), что соответствует толщине пленки 0,4 мкм.

В качестве подложек использовали кварцевое стекло и 2 типа кремниевых пластин: КДБ-4,5(р-тип); КЭФ-20 (п-тип). После каждого нанесения слоя плёнки предварительно сушили в печи (SNOL) в течении 5 минут, при температуре 250° С. После нанесения пятого слоя проводили отжиг при температуре 550° С в течении часа.

1.3. *Методики измерений.* Значение ширины запрещенной зоны покрытий определяли на основании анализа электронных спектров поглощения, получаемых с помощью спектрофотометра Cary-50 (Varian, США) согласно модели Таунса [10], [11].

Исследование морфологии покрытия осуществлялось с помощью сканирующего зондового микроскопа Solver P47 PRO, в котором реализована схема сканирования образцом. В качестве зондов использовались кремниевые кантилеверы серии NSG11S с типичной силовой константой 5,5 Н/м и резонансной частотой 220 кГц.

Измерение фотоэлектрических характеристик (вольт-амперные характеристики) проводилось на автоматизированном базовом лазерном испытательном комплексе (рисунок 1.1), на котором реализованы методики измерения фотоэлектрических характеристик, соответствующих ГОСТ-17772-88 [18]. Оптический модуль комплекса включает в себя систему позиционирования испытуемого образца, мультиспектральный источник лазерного излучения, представляющий собой набор из 9 лазерных диодов с длинами волн 405, 450, 520, 660, 780, 808, 905, 980 и 1064 нм с общим оптоволоконным выводом и с платами управления, а также с калиброванной мощностью излучения порядка 2 мВт (рисунок 1.1). В качестве источника УФ (278 нм) использовался



светодиод TO-3535BC-UVC265-30-6V-E мощностью 300 мВт, размещенный в специализированной оснастке.

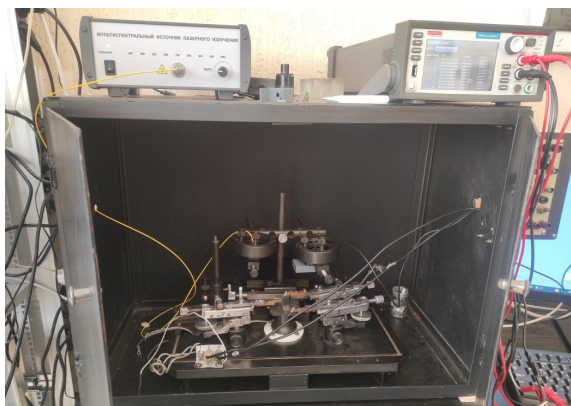


Рисунок 1.1 – Внешний вид светоизолирующего бокса с зондовой системой для измерения электрических и фотоэлектрических характеристик некорпусированных структур

## 2 Результаты исследований и их обсуждение

Трехслойное покрытие Mg + Zn + Mg после нанесения методом электронно-лучевого диспергирования являлось оптически непрозрачным. После термообработки покрытие имеет однородную высокодисперсную структуру, становится прозрачным в видимой области. Это указывало на окисление металлических слоев в процессе термической обработки. Наличие верхнего и нижнего слоев магния не является препятствием для окисления среднего слоя цинка. Значение  $E_g$  для трехслойного покрытия до термообработки составило 3,06 эВ. Оно близко к значению, характерному для оксида цинка, что указывает на возможность окисления тонких слоев покрытия на стадии нанесения и последующей выдержки на воздухе. Более низкое значение ширины запрещенной зоны по сравнению с классической величиной, характерной для ZnO (3,37 эВ), может быть связано с увеличением количества кислородных вакансий в структуре оксида. После отжига вследствие взаимной диффузии и интенсивного окисления формируется однородное

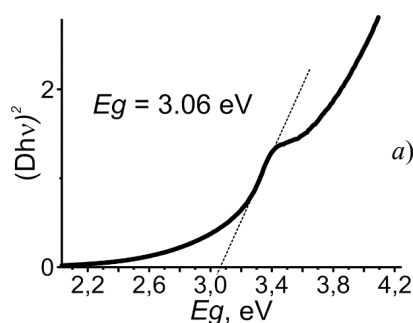


Рисунок 2.1 – Зависимость  $(Dh\nu)^{1/2}$  от энергии фотона покрытий Mg + Zn + Mg, нанесенной методом электронно-лучевого диспергирования, до (а) и после отжига при 500° С (б)

сложнооксидное покрытие с шириной запрещенной зоны  $E_g = 5,82$  эВ.

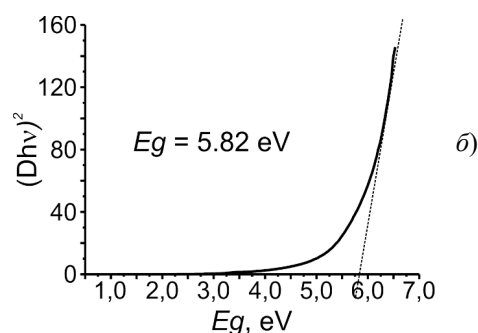
Золь-гель слои ZnO:Mg с различным содержанием Mg, отожженные при температуре 500° С в течение 60 минут, характеризуются светоослаблением в видимом диапазоне 5–10%. Поскольку на спектре поглощения некоторых пленок имеется два максимума, то им будут соответствовать два значения запрещенной зоны (таблица 2.1, рисунок 2.2). Значение  $E_g$  в диапазоне 3,21–3,36 эВ указывает на присутствие в тонкослойной системе оксида цинка. Это значение совпадает чуть ниже величины, характерной для ZnO (3,37 эВ). Для золь с высоким содержанием магния ширина запрещенной зоны ZnO : Mg составляет 5,7–6,2 эВ.

Таблица 1 – Зависимость ширины запрещенной зоны пленок ZnO:Mg от состава золь

№ золь (ZnO:Mg)	Ширина запрещенной зоны, $E_g$ , эВ
1 (1 : 1)	3,31
1 (1 : 2)	3,36 / 5,21
1 (1 : 5)	5,7
3 (1 : 1)	3,28 / 4,72
3 (1 : 2)	6,0
3 (1 : 5)	6,2

Определение фотоэлектрических характеристик было проведено на структурах ZnO : Mg / Si. Установлено, что исследуемые пленки проявляют фоточувствительность в видимом и/или УФ диапазоне. При этом для пленок ZnO : Mg на кремниевых подложках КДБ-4,5 фоточувствительность оказалась существенно ниже в сравнении с пленками, нанесенными на кремниевые подложки КЭФ-20.

Селективной чувствительностью к УФ и коротковолновой части видимого диапазона обладали только образцы с большой шириной запрещенной зоны (~5 эВ), не имеющие самостоятельные фазы оксида цинка (ширина запрещенной зоны ~3 эВ). В качестве примера такого материала выбран образец № 3 (1 : 5).



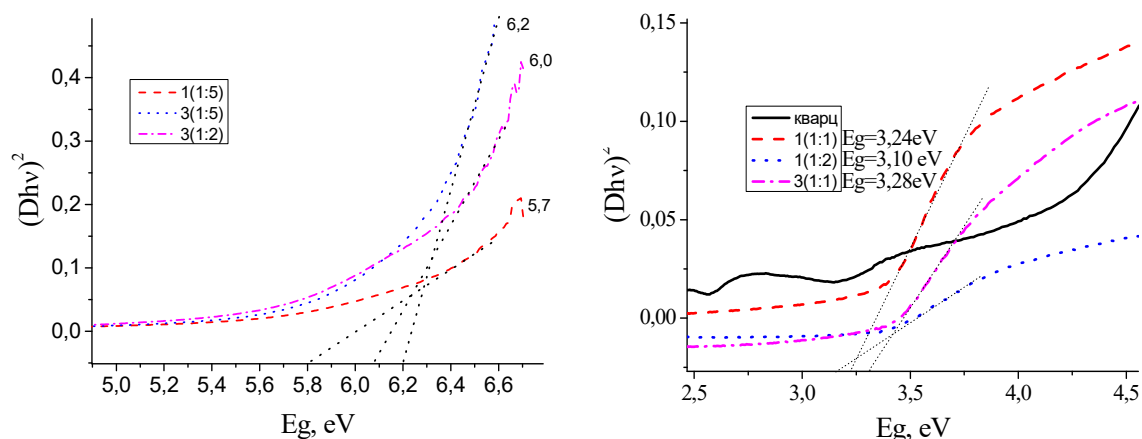


Рисунок 2.2 – Зависимость  $(Dhv)^{1/2}$  от энергии фотонов золь-гель слоев ZnO : Mg с различным соотношением ингредиентов

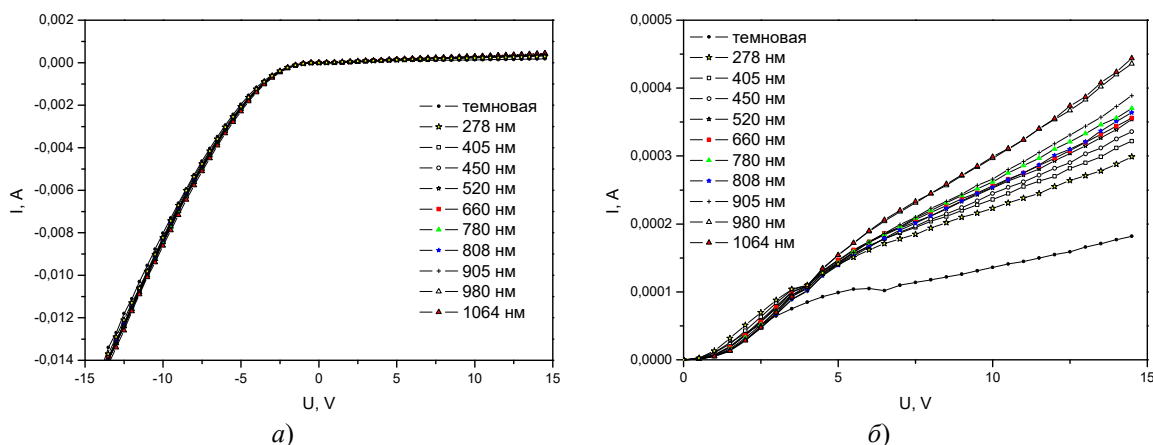


Рисунок 2.3 – Вольт-амперная характеристика структуры ZnO : Mg / Si (КЭФ-20) (образец № 3 (1 : 1)) общий вид (а) и при положительном смещении (б) под воздействием оптического излучения с различной длиной волны

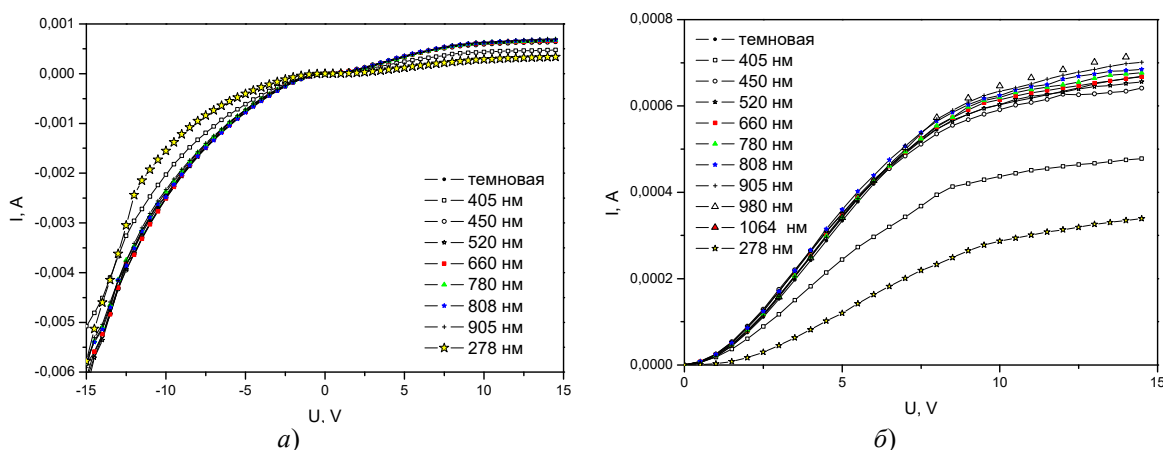


Рисунок 2.4 – Вольт-амперная характеристика структуры ZnO : Mg / Si (КЭФ-20) (образец № 3 (1 : 5)) общий вид (а) и при положительном смещении (б) под воздействием оптического излучения с различной длиной волны

На рисунках 2.3 и 2.4 представлены ВАХ структур ZnO : Mg / Si (КЭФ-20) для образцов № 3 (1 : 1) и № 3 (1 : 5) при воздействии оптического излучения с длинами волн от 278 нм до

1064 нм. Увеличение силы тока относительно темновой для образца № 3 (1 : 1) свидетельствует об электронном типе проводимости, которая характерна для оксида цинка. Существование

фазы оксида цинка в тонкой пленке № 3 (1 : 1) также подтверждается измеренными значениями ширины запрещенной зоны  $E_g = 3,28$  эВ. Для образца № 3 (1 : 5) регистрируется снижение силы тока относительно темнового при освещении образца излучением коротковолнового диапазона, что свидетельствует о генерации дырок.

На рисунке 2.5 показаны характеристики спектральной чувствительности для образцов № 3 (1 : 1) и № 3 (1 : 5) при напряжении смещения 10 В и 14 В. Проведенные ранее исследования фотоэлектрических характеристик структур типа  $ZnO / Si$  показали, что такие системы имеют максимальную спектральную чувствительность при высоких напряжениях [10]. Фоточувствительность в образце № 3 (1 : 1) при смещении 10 В и 14 В (кривые 1 и 2 рисунка 2.5) наблюдается в диапазоне длин волн от 278 нм до 400 нм. На длине волны 278 нм спектральная чувствительность составляла 0,3 А / Вт и 0,4 А / Вт при смещении 10 В и 14 В соответственно. В видимом диапазоне значение чувствительности  $\sim 0,1$  А / Вт. Для образца № 3 (1 : 5) (кривые 3 и 4 рисунка 2.5) фоточувствительность наблюдается в диапазоне длин волн от 278 нм до 517 нм и от 278 до 655 нм при смещении 10 В и 14 В соответственно. Однако по абсолютному значению чувствительность выше, и на длине волны 278 нм составляла 2,97 А / Вт и 3,23 А / Вт при смещении 10 В и 14 В соответственно. В остальном диапазоне исследуемых длин волн чувствительность незначительна и близка к нулю.

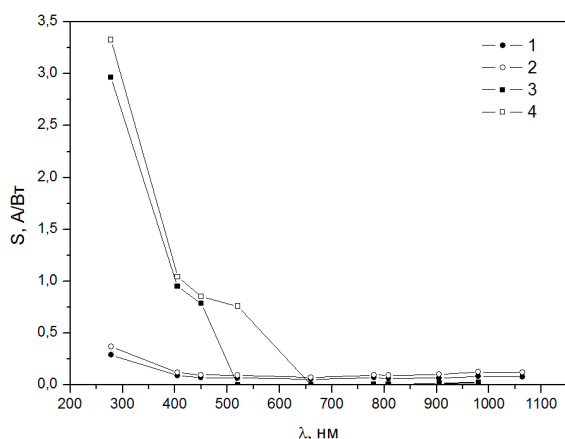


Рисунок 2.5 – Спектральная чувствительность структур  $ZnO : Mg / Si$  (КЭФ-20) для образцов № 1 (1 : 5) (графики 1 и 2) и № 3 (1 : 5) (графики 3 и 4) при напряжении смещения  $U = 10$  В и  $U = 14$  В, соответственно

Отметим, что полученные высокие значения спектральной чувствительности данных материалов возможны, если исследуемая структура работает в предлавином режиме и при наличии резкого гетероперехода, поскольку это способствует более полному собиранию неравновесных

носителей заряда и ускоренному движению неосновных носителей заряда к гетеропереходу [19].

Введение ионов Mg приводит не только к увеличению ширины запрещенной зоны, но и к появлению дополнительных поверхностных состояний. Наличие таких состояний обуславливает фотогенерацию избыточных носителей заряда и может способствовать повышению фоточувствительности [20]. Было установлено, что при воздействии УФ в ряде образцов уменьшался общий ток, что можно объяснить возможной генерацией неосновных носителей заряда (дырок), обусловленных ионами Mg, и при воздействии оптического излучения происходят дополнительные рекомбинационные процессы. Отметим, что при сильном легировании может иметь место инверсия типа проводимости [16], однако для исследованных пленок  $ZnMgO$  было установлено, что характерным типом проводимости является электронный. При этом селективная фоточувствительность к УФ возникает в образцах с самым большим значением ширины запрещенной зоны.

### Выводы

Установлена высокая эффективность использования вакуумного осаждения и золь-гель синтеза исследования для формирования нанокмпозиционных покрытий  $ZnO_x : MgO$  с шириной запрещенной зоны большей 5 эВ и с высокой чувствительностью к УФ- и видимому излучению.

Полученные гетероструктуры  $ZnO : Mg / Si$  (КЭФ 20) проявляют селективную фоточувствительность к УФ-излучению при приложении напряжения более 10В. Спектральная чувствительность гетероструктуры с шириной запрещенной зоны  $ZnO : Mg$  порядка 6,2 эВ к УФ-излучению (278 нм) составила от 0,3 А / Вт до 3,23 А / Вт при смещении от 10 В до 14 В соответственно. В остальном диапазоне исследуемых длин волн чувствительность незначительна и близка к нулю.

Полученные результаты демонстрирует возможность использования исследуемых гетероструктур для солнечно-слепых датчиков.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Liu, K. ZnO-Based Ultraviolet Photodetectors / K. Liu, M. Sakurai, M. Aono // Sensors. – 2010. – Vol. 10. – P. 8604–8634.
2. Полупроводниковые фотоприемники: ультрафиолетовый, видимый и ближний инфракрасный диапазоны спектра: учебник / И.Д. Анисимова [и др.]; ред. В.И. Стафеев. – М.: Радио и связь, 1984. – 216 с.
3. Gradient bandgap narrowing in severely deformed ZnO nanoparticles / Yuanshen Qi [et al.] // Materials Research Letters. – 2021. – Vol. 9. – P. 58–64.

4. *Maensiri, S.* Synthesis and optical properties of nanocrystalline ZnO powders by a simple method using zinc acetate dihydrate and poly (vinyl pyrrolidone) / S. Maensiri, P. Laokul, V. Promarak // *Journal of Crystal Growth*. – 2006. – Vol. 289. – P. 102–106.
5. *Beyer, W.* Transparent conducting oxide films for thin film silicon / W. Beyer, J. Hupkes, H. Stiebig // *Thin Sol. Films*. – 2007. – № 516. – P. 147.
6. *Induced surface reactivity modification in Zinc oxide-based thin films* / V. Sabayev, D. Aronov, L. Oster, G. Rosenman // *Appl. Phys. Lett.* – 2008. – Vol. 93, № 144. – P. 104
7. *Паршина, Л.С.* Импульсное лазерное напыление эпитаксиальных пленок ZnO *n*- и *p*- типа при легировании элементами III и V группы: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.27.03 / Институт проблем лазерных информационных технологий. – Шатура, 2011. – 19 с.
8. *Формирование материалов с модифицированными свойствами в потоках низкотемпературной плазмы* / А.А. Сердобинцев [и др.] // *Известия СГУ, серия физическая*. – 2013. – Вып. 2, Т. 13. – С. 47–50.
9. Effect of magnesium dopant on the structural, morphological and electrical properties of ZnO nanoparticles by sol-gel method / S.J. Priscilla [et al.] // *National Conference on Chemistry and Materials-2019*. – 2021. – Vol. 36, Part 4. – P. 793–796. – DOI:10.1016/j.matpr.2020.07.005.
10. *Tailoring microstructure and optical properties of MgZnO film on glass by substrate temperature* / K. Gu [et al.] // *Materials Letters*. – 2020. – Vol. 278. – P. 128416.
11. *A comparative analysis for effects of solvents on optical properties of Mg doped ZnO thin films for optoelectronic applications* / F. Baig, M.W. Ashraf, A. Asif, M. Imran // *Optik*. – 2020. – Vol. 208. – P. 164534.
12. *Magnesium-doped zinc oxide nanorod-nanotube semiconductor / p-silicon heterojunction diodes* / Y. Caglar [et al.] // *Applied Physics A*. – 2016. – Vol. 122. – P. 733. – DOI:10.1007/s00339-016-0251-0.
13. *Novel sputtering method to obtain wide band gap and low resistivity in as-deposited magnesium doped zinc oxide films* / M. Loeza-Poot [et al.] // *Materials Science in Semiconductor Processing*. – 2019. – Vol. 104. – P. 104646. – DOI:10.1016/j.mssp.2019.104646
14. *Structural and Optical Properties of Mg Doped ZnO Thin Films Deposited by DC Magnetron Sputtering* / A.Sh. Asvarov [et al.] // *Journal of Nano- and Electronic Physics*. – 2016. – Vol. 8. – P. 04053.
15. *Effects of oxygen/argon ratio and annealing on structural and optical properties of ZnO thin films* / B. Zhou [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2012. – Vol. 258. – P. 5759–5764. – DOI:10.1016/j.apusc.2012.02.088.
16. Preparation of *p*-type ZnMgO thin films by Sb doping method / X.H. Pan [et. al.] // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 2007. – Vol. 40. – P. 4241–4244.
17. *Электронно-лучевой синтез, структура и свойства однокомпонентных и легированных магнем покрытий оксида цинка* / М.А. Ярмоленко [и др.] // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2020. – № 4 (45). – С. 81–87.
18. *Автоматизированный базовый лазерный испытательный комплекс для тестирования перспективных видов полупроводниковых фотоприемников* / В.В. Малютина-Бронская [и др.] // *Сб. материалов 13-й международной научно-технической конференции «Приборостроение – 2020»* (18–20 ноября 2020 г., г. Минск, Беларусь), Минск: БИТУ. – 2020. – С. 391–392.
19. *Preparation of p-type ZnMgO thin films by Sb doping method* / V. Malyutina-Bronskaya [et al.] // *Journal of Physics D Applied Physics*. – 2007. – Vol. 40. – P. 4241–4244.
20. *Зи, С.* Физика полупроводниковых приборов. В 2-х книгах. Кн. 1; пер. с англ. / С. Зи. – 2-е перераб. и доп. изд. – М.: Мир, 1984. – 456 с.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ, проект Т19МЛДГ008 от 21.06.2019.

Поступила в редакцию 16.04.2021.

УДК 541.64

## РАДИАЦИОННАЯ СТОЙКОСТЬ ЛЕГИРОВАННЫХ МЕТАЛЛАМИ КРЕМНИЙОРГАНИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ, ОСАЖДАЕМЫХ ИЗ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

А.А. Рогачёв<sup>1</sup>, Имин Лю<sup>2</sup>, М.А. Ярмоленко<sup>2</sup>, Лихун Гао<sup>3</sup>, Чжуа Ма<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт химии новых материалов Национальной Академии Наук Беларуси, Минск

<sup>2</sup>Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

<sup>3</sup>Пекинский технологический институт

## RADIATION RESISTANCE OF METAL-ALLOYED ORGANOSILICON COATINGS DEPOSITED FROM THE GAS PHASE

A.A. Rogachev<sup>1</sup>, Yiming Liu<sup>2</sup>, M.A. Yarmolenko<sup>2</sup>, Lihong Gao<sup>3</sup>, Zhuang Ma<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

<sup>2</sup>Francisk Skorina Gomel State University

<sup>3</sup>Beijing Institute of Technology

Определены молекулярная структура, морфология и радиационная стойкость кремнийорганических покрытий, легированных оксидами меди или вольфрама. Покрытия формировались из летучих продуктов электроннолучевого диспергирования механической смеси кремнийорганической смолы и соединений металлов. Показано, что медь- и вольфрам-содержащие кремнийорганические покрытия характеризуются значительно более низким содержанием метильных фрагментов. Влияние оксида вольфрама проявляется также в снижении содержания шитых фрагментов в молекулярной структуре покрытия. Однокомпонентные и легированные металлами кремнийорганические слои являются высокодисперсными и бездефектными. Длительное воздействие УФ излучения не вызывает заметных изменений в их морфологии и молекулярной структуре.

**Ключевые слова:** нанокмпозиционные покрытия, кремнийорганические покрытия, ацетат меди, оксид вольфрама, электроннолучевое осаждение.

The molecular structure, morphology, and radiation resistance of organosilicon coatings doped with copper or tungsten oxides have been determined. The coatings were formed from volatile products of electron beam dispersion of organosilicon resin and metal compounds mechanical mixtures. The copper- and tungsten-containing organosilicon coatings are characterized by a significantly lower content of methyl fragments. The effect of tungsten oxide is manifested in a decrease in the content of crosslinked fragments in the molecular structure of the coating. One-component and metal-doped organosilicon layers are highly dispersed and defect-free. Prolonged exposure to UV radiation does not cause noticeable changes in their morphology and molecular structure.

**Keywords:** nanocomposite coatings, organosilicon coatings, copper acetate, tungsten oxide, electron beam deposition.

### Введение

Известно, что воздействие на поверхность частиц высоких энергий сопровождается протеканием в твердых телах различных физико-химических процессов, что может привести к значительным микро- и макроструктурным повреждениям. При этом характер изменений зависит в значительной степени от условий и режимов воздействия, природы обрабатываемых материалов. Структурные повреждения металлов в основном связаны с образованием, перераспределением и взаимодействием точечных дефектов (вакансий и межузельных атомов), кластеров вакансий, линейных дислокаций, радиационно-индуцированных сегментов дислокаций и т. д. [1]–[3]. Облучение полимерных материалов быстрыми тяжелыми ионами, коротковолновым излучением приводит к значительным изменениям в их химической структуре и физических свойствах. Такое воздействие может инициировать образование новых химических связей и их

разрыв, прививку макромолекул, рекристаллизацию, аморфизацию, окисление и другие процессы. Известно, что наличие ароматических колец в полимерной цепи оказывает сильное стабилизирующее влияние на радиационно-индуцированную сшивку или разложение за счет резонансных энергетических механизмов, а полимеры, содержащие в составе макромолекул ароматические функциональные группы, проявляют более высокую радиационную устойчивость [4]. Формирование нанокмпозиционных систем на основе данных полимеров, наполнение их наноструктурами (W, Mo, Zn, B, Si и др.) является перспективным технологическим направлением повышения радиационной стойкости данных материалов. Выбор при этом метода осаждения таких покрытий их газовой фазы обеспечивает высокую однородность состава, не накладывает ограничения на состав и природу вводимых наполнителей [5].

Основной целью настоящей работы является установление закономерностей формирования наноконпозиционных покрытий на основе кремнийорганических полимеров и оксидов меди, вольфрама, деградации их структуры и свойств при воздействии на них ионизирующего излучения.

### 1 Методики формирования кремнийорганических покрытий, исследования их молекулярной структуры, морфологии и свойств

Кремнийорганические покрытия осаждали из летучих продуктов, генерируемых воздействием на порошок кремнийорганической смолы К-42 (олигометилфенилсилоксан) потока низкоэнергетических электронов с энергией 800–1600 эВ и плотностью 0,01–0,03 А / см<sup>2</sup> [6]. Начальное давление остаточных газов в вакуумной камере составляло  $\approx 4 \cdot 10^{-3}$  Па и в процессе осаждения не превышало 10<sup>-1</sup> Па.

Температура подложек при осаждении тонких слоев соответствовала комнатной (25° С). Толщина покрытий контролировалась непосредственно при осаждении с помощью кварцевого измерителя толщины и не превышала 1 мкм. В работе сравнительному анализу подвергались только покрытия с одинаковым значением эффективной толщины.

С целью активационной обработки летучих продуктов электроннолучевое диспергирование осуществляли в условиях горения в вакуумной камере электрического разряда: 1500 В, 20 мА.

Легирование покрытий оксидом меди проводилось путем введения в состав диспергируемой мишени ацетата меди. В зоне воздействия потока электронов, в газовой фазе, при термообработке нанесенного покрытия ацетат меди разлагался с образованием оксида. Введение в состав покрытия оксида вольфрама достигалось путем диспергирования в механические смеси порошков кремнийорганической смолы и оксида

вольфрама (VI) в различном массовом соотношении компонентов.

Подложками при проведении ИК-спектроскопических исследований служили пластины NaCl, электронной микроскопии (РЭМ) – пластины монокристалла кремния.

Обработка образцов УФ излучением проводилась в камере с помощью лампы высокого давления ДРЛ-250, для которой характерно наличие нескольких резонансов в диапазоне от 312 нм до 579 нм.

Термообработку сформированных покрытий осуществляли в атмосфере воздуха при температуре 100° С, 200° С, 300° С и 500° С в течение 60 минут.

Определение молекулярной структуры сформированных покрытий проводили с использованием ИК-Фурье спектрофотометра Vertex-70 (Bruker).

При исследовании морфологии нанесенных слоев использовали растровый электронный микроскоп (РЭМ, Quanta 200 F). Данные о химическом составе покрытий получали с помощью энергодисперсионного спектрометра Avalon 8000 (Princeton Gamma Tech).

Значение ширины запрещенной зоны устанавливали на основании анализа электронных спектров поглощения, получаемых с помощью спектрофотометра Cary-50 (Varian, США) согласно модели Таунца [7], [8].

### 2 Результаты и их обсуждение

Установлено, что молекулярная структура покрытий на основе кремнийорганической смолы К-42 в сравнении с исходным олигомером имеет заметные отличия (таблица 2.1). Выраженным следствием воздействия потока низкоэнергетических электронов на смолу является отщепление углеводородных заместителей. Наиболее подвержены к отщеплению метильные заместители в сравнении с фенильными.

Таблица 2.1 – Результаты ИК-спектроскопических исследований покрытий на основе кремнийорганической смолы К-42 (соотнесение с полосой при 1135 см<sup>-1</sup>)

Покрытие	Si – O – Si cage (1100 см <sup>-1</sup> )	SiO <sub>2</sub> -like structure (1065 см <sup>-1</sup> )	Si – O – Si network (1025 см <sup>-1</sup> )	Si – (CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> (850 см <sup>-1</sup> )	Si – CH <sub>3</sub> (800 см <sup>-1</sup> )	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> / CH <sub>3</sub>
Порошок	1,38	1,60	1,88	1,07	0,50	1,44
К-42	1,47	2,15	1,90	0,05	0,19	6,06
К-42 (плазма)	1,33	1,89	1,81	0,15	0,34	3,91
К-42 (отжиг 200° С)	1,16	4,28	1,12	0,15	0,27	5,32
К-42 (плазма + отжиг 200° С)	1,31	2,59	1,05	0,21	0,35	3,79
К-42 + ацетат Cu (отжиг 200° С)	1,19	2,0	1,51	0,04	0,10	4,72
К-42 + ацетат Cu (отжиг 200° С) + плазма	1,37	2,56	1,95	0,03	0,10	5,54



Для покрытий и исходной смолы характерно приблизительно одинаковое содержание сшитых структур типа «sage» и межмолекулярных сшивок. При этом для покрытия регистрируется более высокое содержание кварцеподобных структур. Можно предположить, что основной процесс формирования кварцеподобной структуры происходит непосредственно на подложке. Структуры типа «sage» изначально содержатся в структуре кремнийорганической смолы и, соответственно, могут присутствовать в генерируемых летучих фрагментах. Образование сшитых структур «sage» возможно и в зоне воздействия потока электронов. Однако их перенос на подложку во многом определяется режимом нанесения.

Отжиг покрытия на основе смолы К-42 сопровождается формированием кварцеподобной структуры. При этом фиксируется снижение содержания сшитых структур типа «sage», межмолекулярных сшивок, происходит изменение соотношения содержания углеводородных фрагментов.

Молекулярная структура однокомпонентных покрытий, сформированных в условиях плазменной обработки летучих фрагментов разрушения смолы, характеризуется более высоким содержанием углеводородных заместителей. При этом концентрация сшитых структур «sage» и межмолекулярных связей не отличается от их содержания в структуре исходной смолы.

Следует отметить, что отсутствие взаимосвязи между содержанием кварцеподобной структуры и соотношением углеводородных заместителей указывает на отсутствие гомогенности структуры покрытия.

Анализ ИК-спектров композиционных покрытий на основе К-42 и ацетата меди показывает слабую зависимость молекулярной структуры таких слоев от режимов нагрева и плазменной обработки. В частности, отжиг композиционного покрытия, сформированного в условиях плазменной активационной обработки, не сказывается на содержании «sage» структур. При этом он способствует более заметному повышению содержания кварцеподобных структур. Рост кварцеподобных образований при отжиге ранее был зафиксирован для отожженного однокомпонентного покрытия, сформированного в отсутствие плазменной обработки. Таким образом, при формировании покрытий на основе К-42 их молекулярная структура определяется процессами в зоне воздействия потока электронов. После термической обработки композиционное покрытие может рассматриваться как кварцеподобная матрица с частицами меди и его оксида. На основе электронных спектров определены значения ширины запрещенной зоны ( $E_g$ ) кремнийорганических покрытий (рисунок 2.1).

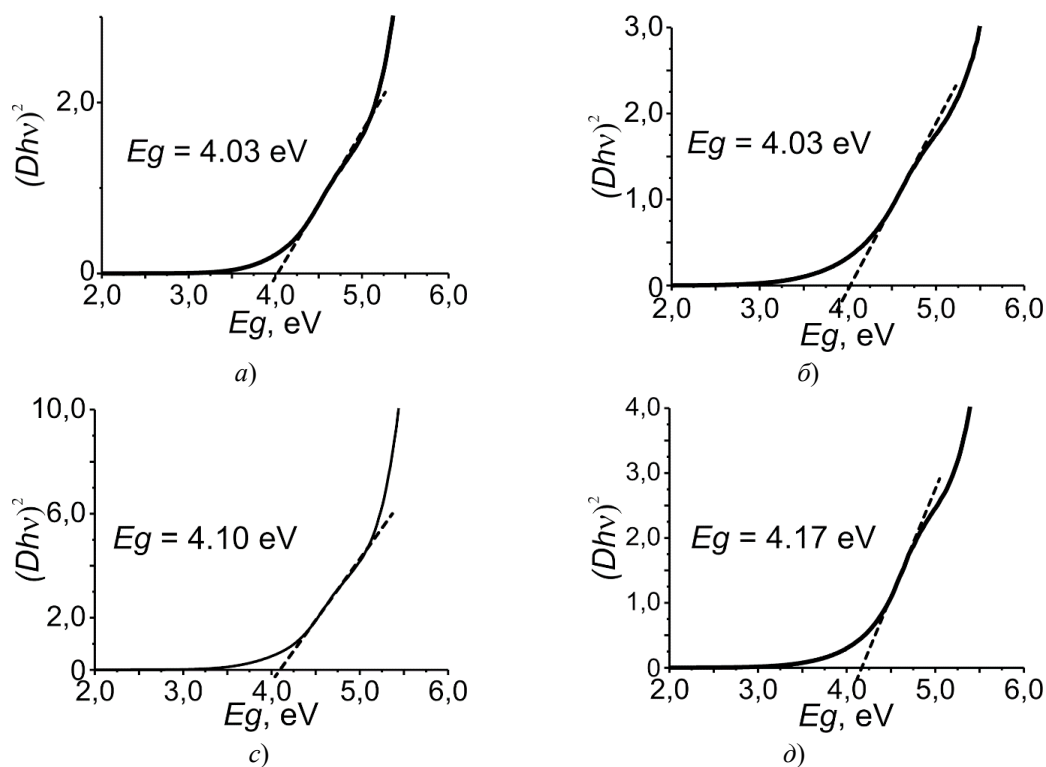


Рисунок 2.1 – Значения ширины запрещенной зоны для кремнийорганических покрытий на основе К-42 без применения (а, б) и с применением плазменной обработки (с, д):

а, с – до отжига; б, д – после отжига (200° С)



Таблица 2.2 – Влияние плазменной обработки на молекулярную структуру покрытий на основе К-42 (соотнесение с полосой при 1135 см<sup>-1</sup>)

Покрытие	Si – O – Si cage (1107 см <sup>-1</sup> )	SiO <sub>2</sub> -like structure (1065 см <sup>-1</sup> )	Si – O – Si network (1025/1000 см <sup>-1</sup> )	Si – (CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> (850 см <sup>-1</sup> )	Si – CH <sub>3</sub> (800 см <sup>-1</sup> )
К42	1,38	1,87	1,15/1,16	0,38	0,70
К42 + WO <sub>3</sub> (2:1)	1,24	1,53	0,84/0,78	0,31	0,58
К42 + WO <sub>3</sub> (1:1)	1,27	1,59	0,92/0,88	0,33	0,58

Следует отметить, что для кремния значение  $E_g$  составляет 1,12 эВ. Для диоксида кремния  $E_g$  меняется от 5,03 эВ до 8,9 эВ [9]–[11]. Величина  $E_g$  для сформированного кремнийорганического слоя равна 4,03 эВ. При этом отжиг не оказывает влияния на значение  $E_g$ . В работе [9] установлено, что присутствие в составе покрытий на основе SiO<sub>2</sub> кластеров кремния приводит к снижению величины  $E_g$  до 3,2 эВ. Анализ условий и режимов окисления кремния, приведенных в работах [9]–[11], их сравнение с режимами осаждения сформированных покрытий показывают, что значения  $E_g$  однозначно обусловлены образованием кварцеподобной структуры и низкотемпературная обработка (200° С) не оказывает определяющее влияние на электрофизическую структуру покрытия.

Величина ширины запрещенной зоны для покрытий, сформированных в условиях плазменной обработки и подвергнутых отжигу, достигает 4,17 эВ (рисунок 2.1). Согласно данным ИК-спектроскопии покрытия характеризуются более высоким содержанием углеродных заместителей в сравнении с покрытиями, сформированными в отсутствие плазменной обработки. Косвенно это может указывать на более низкие температуры в зоне воздействия потока низкоэнергетических электронов на мишень. Это, в свою очередь, может сказываться на снижении содержания частиц кремния в структуре наносимого слоя. При отжиге покрытия изменения в молекулярной структуре были обусловлены процессами образования SiO<sub>2</sub> областей и разрушением межмолекулярных связей. Формирование кварцеподобной структуры ответственно за рост величины  $E_g$  при отжиге.

Величина  $E_g$  для медьсодержащего кремнийорганического слоя занимает среднее положение между значениями  $E_g$  для отожженных слоев на основе ацетата меди (1,2...2,17 эВ) и кремнийорганической смолы К-42 (4,03...4,17 эВ) и составляет 3,03 эВ. Отжиг композиционного покрытия сопровождается незначительным ростом ширины запрещенной зоны ( $E_g = 3,14$  эВ). С учетом установленных выше структурных

изменений при нагреве формирования кварцеподобной структуры, отмеченный рост является вполне предсказуемым.

При осаждении легированных оксидом вольфрама кремнийорганических покрытий установлено более высокое давление летучих продуктов, что указывает на протекание в мишени химических взаимодействий между продуктами деструкции оксида вольфрама и кремнийорганической смолой с образованием значительного количества неконденсирующихся на подложке кремнийорганических фрагментов.

В осажденном кремнийорганическом покрытии влияние оксида вольфрама проявляется в снижении содержания сшитых фрагментов в молекулярной структуре покрытия (таблица 2.2).

Согласно данным ИК-спектроскопии, отжиг таких покрытий также приводит к образованию кварцеподобного слоя, содержащего оксид вольфрама. Наличие поглощения в области валентных колебаний ОН-групп указывает на высокую пористость покрытия после отжига.

Результаты определения химического состава покрытий представлены в таблице 2.3. Следует отметить значительно более низкое содержание углеродсодержащих фрагментов и повышение концентрации кислорода в составе композиционных покрытий.

Таблица 2.3 – Результаты анализа химического состава покрытий

Элементный состав, at. %	Тип покрытия			
	WO <sub>3</sub>	К-42	К-42 + WO <sub>3</sub> (1:1)	4-х слойная система К-42 + WO <sub>3</sub>
W	15,37	–	0,27	1,68
O	84,63	18,57	41,98	26,36
C	–	31,54	18,63	19,77
Si	–	49,89	39,12	52,20

Однокомпонентные и легированные металлами кремнийорганические слои являются высокодисперсными и бездефектным (рисунок 2.2). Покрытие формируют частицы, средний размер которых не превышает 50 нм. Можно предположить, что образование частиц происходит непосредственно в процессе отжига.

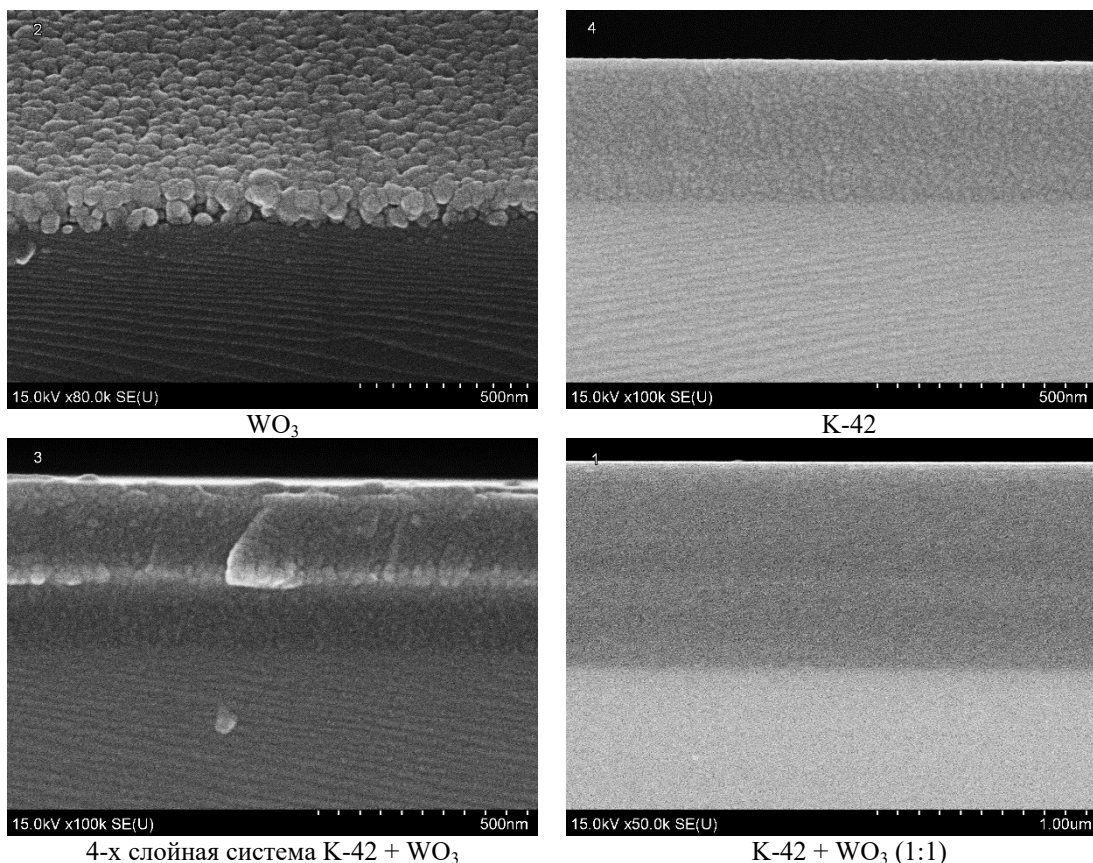


Рисунок 2.2 – Электронно-микроскопические изображения покрытий после термообработки (500° С, 60 мин)

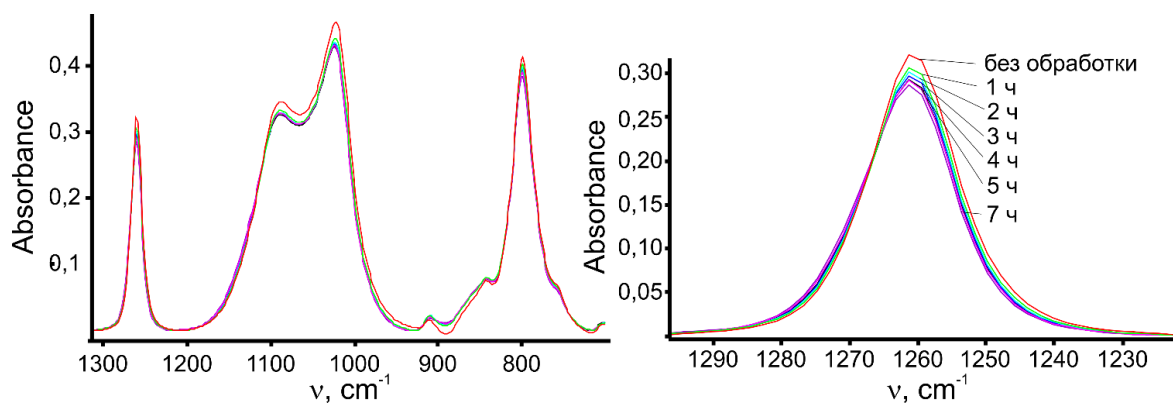


Рисунок 2.3 – ИК-спектры кремнийорганического покрытия после УФ обработки

Для покрытий, сформированных в результате воздействия потока электронов на смесь порошков К-42 и  $WO_3$ , характерных структурных элементов зафиксировать не удалось. Возможно, присутствующий в объеме покрытия оксид вольфрама снижает подвижность кремнийорганических фрагментов при отжиге покрытия. Для многослойного покрытия характерно наличие в кремнийорганических слоях дискретных структурных элементов.

Определено влияние УФ обработки на структуру кремнийорганического слоя. Даже

длительное воздействие УФ излучения (7 часов) не вызывает заметных изменений в молекулярной структуре кремнийорганического слоя (рисунок 2.3). УФ обработка инициирует малоинтенсивное отщепление метильных групп. Высвобождение из объема тонкого слоя низкомолекулярных углеводородных фрагментов приводит к частичному разрушению Si–O–Si связей в сшитых областях.

УФ обработка двухслойной системы К-42 +  $WO_3$  не сопровождается изменением молекулярной структуры кремнийорганического слоя.

Результат обусловлен снижением интенсивности УФ излучения, поглощаемого кремнийорганическим слоем покрытия. За снижение интенсивности УФ излучения ответственен верхний слой оксида вольфрама. Следует отметить, что слой оксида вольфрама не способен препятствовать отщеплению метильных заместителей от кремнийорганических молекул. Если обработка УФ-излучением приводила бы к отщеплению углеводородных заместителей, то данный процесс был бы зафиксирован и для двухслойного покрытия.

Воздействие потока низкоэнергетических электронов на молекулярную структуру кремнийорганического покрытия аналогично любому другому физическому воздействию – нагреву и УФ обработке. Результаты ИК-спектроскопии указывают, что электронно-лучевая обработка также приводит к отщеплению метильных фрагментов, что сопровождается частичным разрушением Si – O – Si связей.

### Заключение

Предложена методика осаждения из летучих продуктов диспергирования кремнийорганических покрытий, легированных оксидами меди или вольфрама, и определены их молекулярная структура, морфология, стойкость к действию УФ излучения. Показано, что в сравнении со структурой исходной кремнийорганической смолы, макромолекулы покрытия имеют меньшую концентрацию метильных заместителей. При этом молекулярная структура однокомпонентных покрытий, сформированных в условиях плазменной обработки летучих фрагментов разрушения смолы, характеризуется более высоким содержанием углеводородных заместителей. Отжиг кремнийорганических покрытий сопровождается формированием кварцеподобной структуры. Ширина запрещенной зоны покрытия составляет 4,03...4,17 эВ и слабо изменяется при отжиге покрытия и его осаждении в условиях плазменной активации летучих продуктов.

Медь- и вольфрамсодержащие кремнийорганические покрытия характеризуются значительно более низким содержанием метильных фрагментов. Влияние оксида вольфрама проявляется в снижении содержания сшитых фрагментов в молекулярной структуре тонкого слоя.

Однокомпонентные и легированные металлами кремнийорганические слои являются высокодисперсными и бездефектным. Длительное воздействие УФ излучения не вызывает заметных изменений в их морфологии и молекулярной структуре.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Zinkle, S.J. Radiation-induced effects on microstructure / S.J. Zinkle // *Comprehensive Nuclear Materials*. – Elsevier, Oxford, 2012. – P. 65–98.

2. *Formation mechanism and the role of nanoparticles in Fe-Cr ODS steels developed for radiation tolerance* / L.L. Hsiung [et al.] // *Physical Review B*. – 2010. – Vol. 82. – P. 184103.

3. *Interface enabled defects reduction in helium ion irradiated Cu / V nanolayers* / E. Fu [et al.] // *Journal of nuclear materials*. – 2010. – Vol. 407. – P. 178–188.

4. Drobny, J.G. Radiation-resistant polymers and their applications / J.G. Drobny // *Ionizing Radiation and Polymers Principles*. – 2013. – P. 213–224.

5. *Magnesium containing coatings formed by a low-energy electron beam* / J. Xiao, A.V. Rogachev, V.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, Xiaohong Jiang, Dongping Sun, M.A. Yarmolenko // *Surface & Coatings Technology*. – 2018. – Vol. 349. – P. 61–70.

6. *The structure and properties of bioactive multilayer coatings applied by a low-energy electron beam on the implant surface* / Y. Liu, A.V. Rogachev, V.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, Xiaohong Jianga, Dongping Suna, Jintao Xiao, M.A. Yarmolenko // *Surface & Coatings Technology*. – 2019. – Vol. 378. – P. 124969.

7. Barman, B. Luminescence properties of ZnS quantum dots embedded in polymer matrix / B. Barman, K.C. Sarma // *Chalcogenide Letters*. – 2011. – Vol. 8, № 3. – P.171 – 176.

8. *Synthesis and characterization of sol-gel derived ZnS:Mn<sup>2+</sup> nanocrystallites embedded in a silica matrix* / B. Bhattacharjee, D. Ganguli, K. Iakoubovskii, A. Stesmans, S. Chaudhuri // *Bull. Mater. Sci.* – 2002. – Vol. 25, № 3. – P. 175–180.

9. Паринава, Е.В. Электронно-энергетическое строение и фазовый состав аморфных нанокomпозитных пленок a-SiO<sub>x</sub>-a-Si:H: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.10 / Е.В. Паринава. – Воронеж, 2016. – 162 с.

10. Нецименко, В.В. Структура, свойства и радиационная стойкость оксидных микро- и нанопорошков и отражающих покрытий, изготовленных на их основе: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.04.07 / В.В. Нецименко. – Томск, 2016. – 273 с.

11. Чибисов, А.Н. Влияние примесных атомов на атомную и электронную структуру нанопористых силикатов / А.Н. Чибисов, М.А. Чибисова // *Вестник ТОГУ*. – 2012. – Т. 26. – С. 41–48.

*Работа выполнена в рамках проекта с БРФФИ № X20ПТИ-001 от 04.05.2020 г. «Стойкие к облучению нанокomпозиционные покрытия: синтез, структура и свойства».*

Поступила в редакцию 17.04.2021.

УДК 544.556.1:546.26:620.3

## ВЛИЯНИЕ РЕЖИМОВ ФОРМИРОВАНИЯ НА МОРФОЛОГИЮ И ФАЗОВЫЙ СОСТАВ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, АРМИРОВАННЫХ МНОГОСЛОЙНЫМИ УГЛЕРОДНЫМИ НАНОТРУБКАМИ

А.С. Руденков, Д.Г. Пилипцов, М.А. Ярмоленко, А.С. Побияха

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## INFLUENCE OF FORMATION MODES ON MORPHOLOGY AND PHASE COMPOSITION OF CARBON COATINGS REINFORCED WITH MULTILAYER CARBON NANOTUBES

A.S. Rudenkov, D.G. Piliptsov, M.A. Yarmolenko, A.S. Pobiyaha

*Francisk Skorina Gomel State University*

Рассмотрены морфологические особенности и фазовый состав углеродных покрытий, армированных углеродными нанотрубками и сформированных с различной частотой следования импульсов катодно-дугового источника углеродной плазмы. Показано, что армированные углеродные покрытия характеризуются большей субшероховатостью и перепадами рельефа (до 500 нм) по сравнению с неармированными нанотрубками покрытиями, что обусловлено присутствием агломератов МУНТ и их случайным распределением по поверхности. Установлено, что агломераты МУНТ вносят существенный вклад в формирование итогового КР-спектра, что, по всей видимости, обусловлено увеличением числа дефектов и аморфизацией стенок МУНТ в результате воздействия потока углеродной плазмы.

**Ключевые слова:** углеродные покрытия, углеродные нанотрубки, морфология, фазовый состав.

The morphological features and phase composition of carbon coatings reinforced with carbon nanotubes and formed with different pulse repetition rates of a cathode-arc carbon plasma source are considered. It is shown that reinforced carbon coatings are characterized by greater sub-roughness and relief differences (up to 500 nm) as compared to coatings unreinforced with nanotubes, which is due to the presence of MWCNT agglomerates and their random distribution over the surface. It was found that agglomerates of MWCNTs make a significant contribution to the formation of the final Raman spectrum, which is most likely due to an increase in the number of defects and amorphization of the MWCNT walls as a result of the action of a carbon plasma flow.

**Keywords:** carbon coatings, carbon nanotubes, morphology, phase composition.

### Введение

Наноконпозиционные углеродные покрытия характеризуются уникальными физико-химическими и механическими свойствами, что определяет их высокую перспективность и эффективность при модифицировании поверхности различных функциональных материалов [1]–[3]. Свойства углеродных покрытий в значительной степени определяются их фазовым составом и структурой, которые, в свою очередь, зависят от выбора методов синтеза и технологических режимов генерации углеродной плазмы [3]–[5]. Одним из эффективных технологических приемов воздействия на фазовый состав углеродных покрытий является введение в их состав легирующих элементов (металлов) [6], а также наноструктур [7]. Необходимо отметить, что на стадии формирования наноконпозиционных покрытий, а также в процессе их эксплуатации на границе раздела фаз протекают сложные химические и диффузионные процессы, кинетика и механизм которых изучены недостаточно.

Армирование углеродных покрытий наноразмерными объектами, в частности многослойными углеродными нанотрубками (МУНТ),

позволяет нивелировать их основные недостатки (низкая термостойкость, высокий уровень внутренних напряжений), поскольку благодаря высокой прочности углерод-углеродных связей и рекордно большой плотности упаковки атомов модуль Юнга МУНТ может варьироваться от 0,45 до 2,0 ТПа [8], а коэффициент теплопроводности при 100 К достигает 37 Вт / (м·К) [9].

Однако, интеграция технологий армирования наноструктурами и формирования углеродных слоев ионно-плазменными методами, является сложной технологической задачей. Влияние параметров потока углеродной плазмы, генерируемого импульсным катодно-дуговым источником, на структуру покрытий, содержащих углеродные нанотрубки, изучено недостаточно.

Целью настоящей работы является определение влияния режимов генерации углеродной плазмы на морфологические особенности и фазовый состав углеродных покрытий, армированных многослойными нанотрубками.

### 1 Методика эксперимента

Процесс синтеза экспериментальных образцов проходил в два этапа. На первом этапе была

подготовлена суспензия на основе этилового спирта и нанотрубок (диаметр 40–60 нм, длина не более 2 мкм), которая помещалась в ультразвуковую ванну и обрабатывалась в течение 10 минут с целью снижения доли крупных агломератов МУНТ. Затем полученная смесь помещалась в ультразвуковую ячейку (УЗ). Генерация паро-газового потока, направляемого на кремниевую подложку, осуществлялась при частоте УЗ равной 1,7 МГц. Воздействие ультразвука на подобные растворы является комплексным и характеризуется разделением частиц с различной массой, капиллярно-акустическим и тепловым эффектами, активацией диффузии, протеканием своеобразных химических и физико-химических процессов [10].

После нанесения МУНТ образцы подвергались сушке при комнатной температуре. На втором этапе на кремниевую подложку с МУНТ и на чистую кремниевую подложку из плазмы импульсного катодно-дугового разряда осаждались углеродные покрытия при частоте следования импульсов 1 Гц, 3 Гц, 5 Гц (напряжение разряда во всех случаях – 350 В).

Морфологические особенности покрытий, содержащих МУНТ, были изучены средствами атомно-силовой микроскопии (АСМ) с помощью прибора Solver Pro производства NT-MDT (Москва, Россия). Исследования осуществлялись в полуконтактном режиме. Изображения в режиме топографии и фазового контраста позволяют с высокой степенью достоверности оценить морфологические особенности и относительные механические параметры поверхности покрытий различной природы. Статистический анализ полученных результатов выполнялся в программе Gwydion.

Анализ фазового состава углеродных покрытий, армированных МУНТ осуществлялся методами спектроскопии комбинационного рассеяния средствами программного обеспечения OPUS при помощи спектрометра Senterra с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм, мощностью 0,2–10 мВт.

Оптические изображения поверхности экспериментальных образцов были получены при помощи оптического микроскопа КР-спектрометра Senterra с 400-кратным увеличением (поле 340×250 мкм).

## 2 Результаты и их обсуждение

Показано, что полученные образцы углеродных покрытий, содержащих углеродные нанотрубки (МУНТ + С), характеризуются большей степенью неоднородности по сравнению с однокомпонентными углеродными покрытиями (С) и представляют собой аморфную углеродную матрицу с включениями агломератов МУНТ различных размеров (рисунок 2.1).

Для покрытий МУНТ + С, сформированных с частотой следования импульса 1 Гц, характерно наличие деформированных участков, вызванных, вероятно, высоким уровнем внутренних напряжений. Известно [4], [11], [12], что частота следования импульсов источника углеродной плазмы оказывает существенное влияние на фазовый состав и механические свойства покрытий на основе углерода. При увеличении частоты следования импульсов усиливается тепловая нагрузка на катод и на подложку, что способствует увеличению содержания графитовой фазы и снижению уровня внутренних напряжений.

Результаты атомно-силовой микроскопии подтверждают данные оптической микроскопии, свидетельствующие о наличии ярко выраженных структурных неоднородностей у покрытий МУНТ + С.

Для неармированных углеродных покрытий характерно снижение значения субшероховатости и средней высоты отдельных структурных образований при увеличении частоты следования импульсов (таблица 2.1), что, по всей видимости, связано с ростом интенсивности процессов миграции адсорбированных атомов и частиц по поверхности подложки вследствие увеличения ее температуры.

Углеродные покрытия, содержащие углеродные нанотрубки, имеют более высокие значения субшероховатости и перепады высот (рисунок 2.2) отдельных структурных образований (до 500 нм) по сравнению с неармированными нанотрубками покрытиями, что обусловлено присутствием агломератов МУНТ и их случайным распределением по поверхности. При этом зависимость геометрических параметров покрытия от частоты следования импульсов является немонотонной.

Таблица 2.1 – Статистическая обработка результатов АСМ углеродных покрытий (числитель) и покрытий, содержащих МУНТ (знаменатель)

Частота следования импульсов при осаждении углеродных слоев, Гц	Средняя высота, нм	Ra, нм	Rms, нм
1	$\frac{24,3}{248,7}$	$\frac{1,3}{45,2}$	$\frac{3,6}{62,2}$
3	$\frac{9,0}{199,4}$	$\frac{0,8}{14,9}$	$\frac{1,9}{28,9}$
5	$\frac{4,0}{210,3}$	$\frac{0,5}{29,5}$	$\frac{1,2}{43,3}$

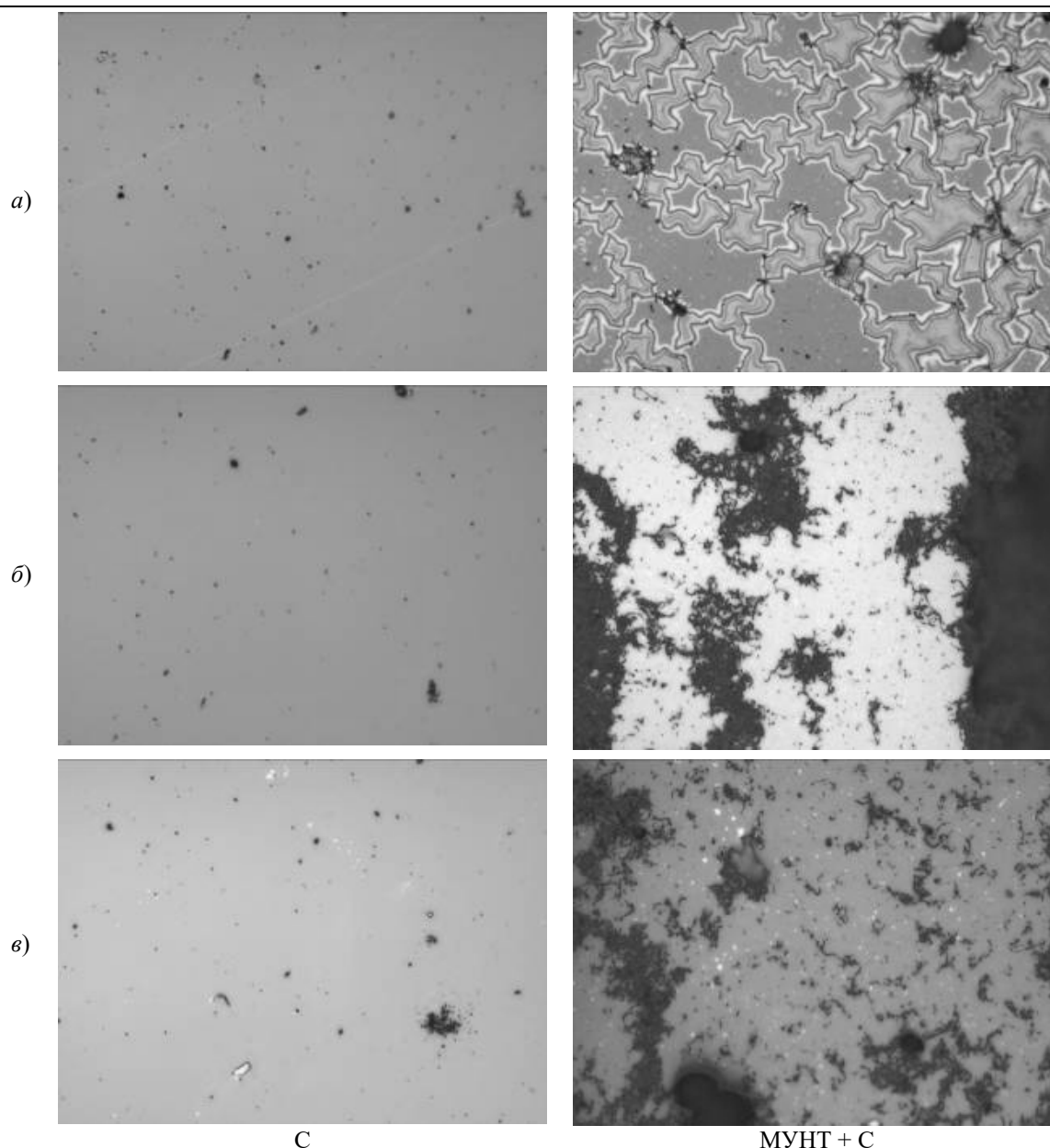


Рисунок 2.1 – Оптические изображения (340×250 мкм) углеродных покрытий (С) и углеродных покрытий, осажденных на МУНТ (МУНТ + С), с различной частотой следования импульсов: *a* – 1 Гц; *б* – 3 Гц; *в* – 5 Гц

Анализ фазового состава углеродных покрытий, содержащих МУНТ, подтверждает результаты оптической и атомно-силовой микроскопии и свидетельствует о том, что покрытия содержат в себе крупные агломераты МУНТ (рисунок 2.3), способные вызывать появление пиков, характерных только для МУНТ.

На спектре 1 представлено три характерных для МУНТ пика (рисунок 2.3). G-пик вблизи  $1570\text{ см}^{-1}$  обусловлен наличием «правильных» графеновых слоев и колебаниями  $sp^2$ -гибридизированных атомов углерода в плоскости графенового слоя [13]. D-пик вблизи  $1450 - 1300\text{ см}^{-1}$  свидетельствует о степени структурной неупорядоченности, обусловленной образованием

$sp^3$ -гибридизированных связей, дефектами стенок МУНТ, представляющих собой слои графена, а также наличием аморфного углерода [13], [14]. Возникновение пика вблизи  $2700\text{ см}^{-1}$  одни авторы [15] объясняют наличием C – H связей, другие [13] – модой G' спектра рассеяния второго порядка и связывают с окислением стенок МУНТ.

Соотношение  $I_D / I_G$  в случае МУНТ используется для оценки степени дефектности их стенок [13], [16]. В общем случае значение этого соотношения обусловлено следующими факторами: количеством дефектов, количеством включений аморфной фазы, диаметром нанотрубок.



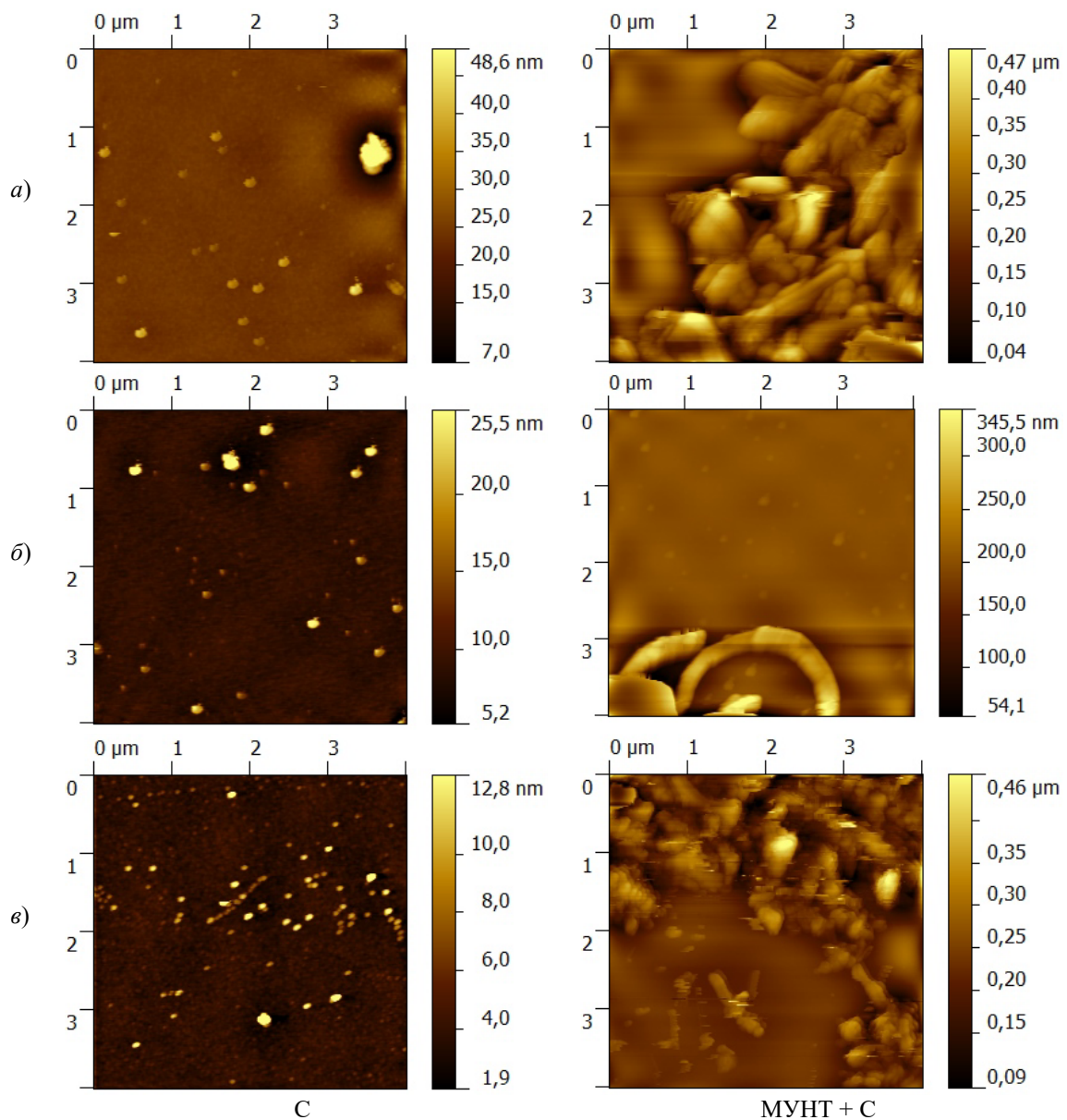


Рисунок 2.2 – АСМ изображения (4×4 мкм) углеродных покрытий (С) и углеродных покрытий, осажденных на МУНТ (С+МУНТ), с различной частотой следования импульсов: а – 1 Гц; б – 3 Гц; в – 5 Гц

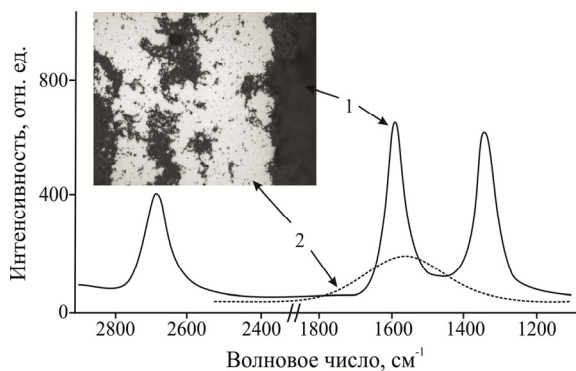


Рисунок 2.3 – КР спектр характерных областей углеродного покрытия, содержащего МУНТ

Спектр 2 (рисунок 2.3) является классическим для углеродных покрытий, сформированных из плазмы импульсного катодно-дугового разряда [2]–[4]. Для дальнейшего анализа фазового состава пик в интервале 1800–1000 см<sup>-1</sup> раскладывался на две составляющих посредством функции Гаусса (G-пик около 1570 см<sup>-1</sup> и D-пик около 1400–1385 см<sup>-1</sup>). Соотношение  $I_D / I_G$  связано с размером отдельных кластеров следующей зависимостью [17]:

$$I_D / I_G = c(\lambda) / L_a, \quad (2.1)$$

где  $I_D$  и  $I_G$  – интенсивности соответствующих пиков;  $L_a$  – размер зерен графита (нм);  $c(\lambda)$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от длины волны возбуждающего излучения (нм).



Таблица 2.2 – Параметры КР спектров углеродных покрытий (числитель) и углеродных покрытий, содержащих МУНТ (знаменатель)

Частота следования импульсов при осаждении углеродных слоев, Гц	D-пик		G-пик		$I_D / I_G$
	Положение, см <sup>-1</sup>	Ширина, см <sup>-1</sup>	Положение, см <sup>-1</sup>	Ширина, см <sup>-1</sup>	
1	1393	176	1559	216	0,16
	1435	188	1578	190	0,47
3	1399	185	1561	215	0,17
	1464	197	1590	188	0,54
5	1431	164	1576	194	0,28
	1384	180	1569	168	0,56

Из анализа спектров (таблица 2.2, рисунок 2.4) углеродных покрытий следует, что с ростом частоты следования импульсов катодно-дугового разряда соотношение  $I_D / I_G$  возрастает. Данный факт согласно формуле (2.1) свидетельствует об уменьшении размеров отдельных структурных образований и согласовывается с результатами атомно-силовой спектроскопии (таблица 2.1).

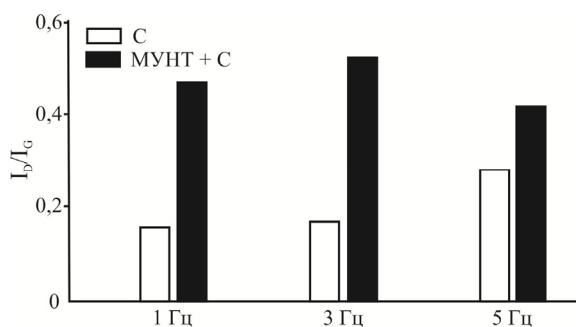


Рисунок 2.4 – Влияние частоты следования импульсов источника углеродной плазмы на соотношение интенсивностей D- и G- пиков КР спектров углеродных покрытий (С) и углеродных покрытий, содержащих МУНТ

Соотношение  $I_D / I_G$  КР-спектров углеродных покрытий, содержащих МУНТ в 2–3 раза выше, чем аналогичное соотношение для углеродных покрытий без МУНТ, что, по всей видимости, вызвано вкладом дефектов стенок МУНТ в интенсивность D-пика, поскольку размер отдельных структурных образований в случае введения МУНТ в состав углеродных слоев согласно данным атомно-силовой микроскопии возрастает, что противоречит формуле (2.1).

Более высокое значение соотношения  $I_D / I_G$ , по сравнению с углеродными покрытиями, в случае покрытий с МУНТ может быть вызвано аморфизацией стенок нанотрубок вследствие воздействия потоков углеродной плазмы, генерируемых импульсным катодно-дуговым источником.

Необходимо отметить, что с ростом частоты следования импульсов соотношение  $I_D / I_G$  КР спектров покрытий с МУНТ также возрастает.

Данный факт может быть вызван ростом степени дефектности стенок МУНТ вследствие изменения интенсивности ионной бомбардировки из-за увеличения плотности потока углеродной плазмы.

С ростом частоты следования импульсов и для углеродных покрытий без МУНТ, и для углеродных покрытий, содержащих МУНТ, характерно уменьшение ширины G-пика, что свидетельствует об увеличении содержания графитовой фазы вследствие роста температуры подложки, возрастания плотности потока углеродной плазмы.

#### Выводы

Показано, что углеродные покрытия, содержащие углеродные нанотрубки, характеризуются большей степенью неоднородности по сравнению с неармированными углеродными покрытиями и представляют собой аморфную углеродную матрицу с включениями агломератов МУНТ различных размеров

Средствами спектроскопии комбинационного рассеяния установлено, что с увеличением частоты следования импульсов катодно-дугового источника наблюдается рост соотношения  $I_D / I_G$  как в случае углеродных покрытий без МУНТ, так и содержащих МУНТ. В первом случае такой рост, в первую очередь, обусловлен уменьшением размеров кластеров  $sp^2$ -гибридизированных атомов углерода и графитизацией покрытия вследствие увеличения температуры подложки из-за увеличения плотности потока углеродной плазмы. Во-втором случае такой рост связан с увеличением числа дефектов и аморфизацией стенок МУНТ вследствие ионной бомбардировки, что также объясняет более высокие, по сравнению с неармированными покрытиями, значения  $I_D / I_G$  КР-спектров покрытий, содержащих нанотрубки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы / Д.Г. Филиппов, А.С. Руденков, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Цзян Сяо Хун, Чжоу Бин. – М.: Радиотехника, 2020. – 283 с.

2. Robertson, J. Diamond-like amorphous carbon / J. Robertson // *Material Science and Engineering: Elsevier Science*. – 2002. – Vol. R, № 37. – P. 129–281.
  3. *Structure and mechanical properties of Ni and Cr binary doped amorphous carbon coatings deposited by magnetron sputtering and pulse cathodic arc* / Z. Bingbing [et. al.] // *Thin Solid Films*. – 2020. – Vol. 701. – Article 137942.
  4. *Influences of pulse frequency on the structure and anti-corrosion properties of the a-C:Cr films* / Y. Zhuang [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2015. – Vol. 351. – P. 1197–1203.
  5. *The Structure and Mechanical Properties of Multilayer Metal-Carbon Coatings Deposited in Pulse Plasma of Arc Discharge* / D.G. Piliptsov, A.V. Rogachev, A.S. Rudenkov, E.A. Kulesh, A.P. Luchnikov // *Key Engineering Materials*. – 2018. – Vol. 781. – P. 53–57.
  6. Руденков, А.С. Влияние концентрации металла на фазовый состав, структуру и свойства углерод-металлических покрытий / А.С. Руденков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2015. – № 3 (24). – С. 26–32.
  7. Мищенко, С.В. Углеродные наноматериалы: производство, свойства, применение / С.В. Мищенко, А.Г. Ткачев. – М.: Машиностроение, 2008. – 320 с.
  8. Харрис, П. Углеродные нанотрубы и родственные структуры: Новые материалы XXI века / П. Харрис. – М.: Техносфера, 2003. – 336 с.
  9. Колокольцев, С.Н. Углеродные материалы: свойства, технологии, применения / С.Н. Колокольцев. – Долгопрудный: Интеллект, 2012. – 296 с.
  10. *Применение ультразвука высокой интенсивности в промышленности* / В.Н. Хмелев [и др.]. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2010. – 203 с.
  11. *Influences of pulse frequency on structure and mechanical properties of DLC films synthesized by pulsed cathodic arc evaporation* / B. Ye [et al.] // *Applied Mechanics and Materials*. – 2014. – Vol. 670–671. – P. 560–564.
  12. *A comparison study between atomic and ionic nitrogen doped carbon films prepared by ion beam assisted cathode arc deposition at various pulse frequencies* / B. Zhou [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2013. – Vol. 287. – P. 150–158.
  13. *Исследование спектров комбинационного рассеяния функционализированных углеродных нанотрубок* / Т.П. Дьячкова [и др.] // *Фундаментальные исследования*. – 2015. – № 9, Ч. 3. – С. 444–449.
  14. *A Review of the Application and Performance of Carbon Nanotubes in Fuel Cells* / C. Luo [et al.] // *Journal of Nanomaterials*. – 2015. – Vol. 2015. – P. 1–10.
  15. *Raman spectra of MWCNTs and MWCNT-based H<sub>2</sub>-adsorbing system* / H.-B. Zhang [et al.] // *Carbon*. – 2002. – Vol. 40. – P. 2429–2436.
  16. *Spectroscopic investigation of the carbon nanotubes and polysiloxane coatings on titanium surface* / J. Marchewka [et al.] // *Journal of Molecular Structure*. – 2020. – Vol. 1212. – Article 128176.
  17. Tuinstra, F. Raman spectrum of graphite / F. Tuinstra, J.L. Koenig // *Journal of Chemical Physics*. – 1970. – Vol. 53. – P. 1126–1130.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках договора №Т20М-002 «Структура и свойства углеродных покрытий, армированных углеродными нанотрубками».*

Поступила в редакцию 19.03.2021.

УДК 539.3

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Э.И. Старовойтов<sup>1</sup>, Ю.М. Плескачевский<sup>2</sup>, А.В. Яровая<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

<sup>2</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск

## DEFORMATION OF A THREE-LAYER CIRCULAR PLATE UNDER CREEP CONDITIONS

E.I. Starovoitov<sup>1</sup>, Yu.M. Pleskatshevsky<sup>2</sup>, A.V. Yarovaya<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel

<sup>2</sup>Belarusian National Technical University, Minsk

Аналитическое решение краевой задачи об осесимметричном изгибе круговой трехслойной пластины в условиях ползучести получено с помощью экспериментально-теоретического метода Ильющина. Используются физические уравнения состояния наследственной теории линейной вязкоупругости. Предполагалось подобие ядер ползучести материалов слоев. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины принята гипотеза ломаной линии. В несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом заполнителе принята гипотеза Тимошенко. В качестве исходного взято известное решение аналогичной задачи теории упругости для подобной трехслойной пластины. Проведена численная апробация полученного решения.

**Ключевые слова:** трехслойная пластина, изгиб, подобие ядер ползучести, экспериментально-теоретический метод.

The analytical solution of the boundary value problem of axisymmetric bending of a circular three-layer plate under creep conditions is obtained using the experimental-theoretical Ilyushin method. The physical equations of state of the hereditary theory of linear viscoelasticity are used. The similarity of the creep cores of the layer materials was assumed. The polyline hypothesis is used to describe the kinematics of a plate package that is not symmetric in thickness. In the bearing layers, the Kirchhoff hypotheses are valid. In a relatively thick placeholder, the Timoshenko hypothesis is accepted. The well-known solution of a similar problem in the theory of elasticity for such a three-layer plate is taken as the initial one. Numerical approbation of the obtained solution is carried out.

**Keywords:** three-layer plate, bending, similarity of creep nuclei, experimental-theoretical method.

### Введение

В процессе развития техники и строительства все большее распространение получили слоистые конструкции, одним из элементов которых являются трехслойные пластины. При условии обеспечения минимальных весовых показателей и удовлетворения ограничений на прочность и жесткость они являются оптимальными несущими конструкциями.

Квазистатическому и динамическому деформированию слоистых элементов конструкций посвящен ряд публикаций. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач рассмотрены в монографиях [1]–[5]. Динамике оболочек под действием различных нагрузок посвящены статьи [6]–[8]. В публикациях [9]–[12] рассмотрены колебания трехслойных пластин под действием локальных, резонансных и мгновенных нагрузок. Решения выписаны в виде разложения в ряд по собственным функциям.

Изучение изгиба трехслойных и многослойных балок проведено в работах [13], [14]. Результаты исследования изотермического деформирования трехслойных круговых и прямоугольных

пластин, в том числе со сжимаемым заполнителем и связанных с упругим основанием Винклера и Пастернака, содержатся в статьях [15]–[23]. Для прямоугольных пластин решения получены конечно-элементным методом Галеркина. Для круговых – решения выписаны в конечном виде с использованием функций Бесселя.

Влияние температуры на напряженно-деформированное состояние трехслойных цилиндрических оболочек рассматривалось в статьях [24], [25]. Деформирование трехслойных пластин в температурном поле исследовано в работах [26]–[28]. Постановка краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины в своей плоскости и ее общее решение опубликованы в [29]–[31]. Исследование влияния развития трещин на прочность упругопластических пластин проведено в [32]–[34].

В данной работе с помощью метода аппроксимаций построено аналитическое решение краевой задачи об изгибе линейной вязкоупругой несимметричной по толщине круговой трехслойной пластины осесимметричной нагрузкой.

### 1 Изгиб упругой пластины

Кинематика деформирования пластины соответствует гипотезе ломаной линии. Для тонких внешних несущих слоев толщиной  $h_1 \neq h_2$  принимаются гипотезы Кирхгофа о прямолинейности, несжимаемости и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. Относительно толстый жесткий наполнитель ( $h_3 = 2c$ ), воспринимает нагрузку в тангенциальном направлении, для него справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали, которая после приложения нагрузки поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi$ . Постановка задачи и ее решение приводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . За координатную принимается срединная плоскость наполнителя (рисунок 1.1). Внешняя нагрузка  $q(r)$  параллельна оси  $z$ . Относительному сдвигу слоев на контуре пластины препятствует жесткая диафрагма, устраняющая относительный сдвиг в наполнителе ( $\psi = 0$  при  $r = r_0$ ).

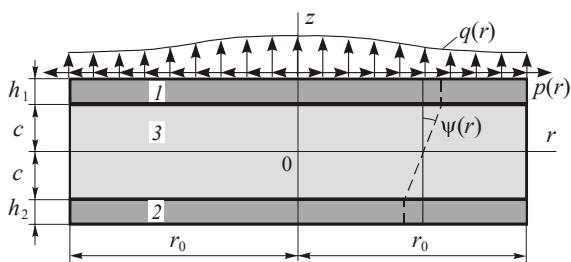


Рисунок 1.1 – Расчетная схема пластины

В соответствии с осесимметричностью внешней нагрузки окружные перемещения в слоях отсутствуют  $u_\varphi^{(k)} = 0$  ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя). При этом искомые величины – прогиб пластины  $w$ , относительный сдвиг в наполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной плоскости  $u$  зависят только от радиальной координаты  $r$  и не зависят от окружной координаты  $\varphi$ . В дальнейшем перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу  $r_0$ ,  $h_k$  – относительная толщина  $k$ -го слоя.

Решение краевой задачи об изгибе упругой круговой трехслойной пластины, с защемленным контуром, получено в [1]:

$$u = \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[ \left( a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \psi + \frac{q r}{16} (r^2 - 1) \right], \quad (1.1)$$

$$\psi = \frac{b_2 q}{4 c b_3 G_3} \left( \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} - r \right), \quad (1.2)$$

$$w = \frac{b_2^2 q}{4 c b_3^2 G_3} \left( \frac{I_0(\beta r) - I_0(\beta)}{\beta I_1(\beta)} - \frac{1}{2} (r^2 - 1) \right) + \frac{q}{64 b_3} (r^2 - 1)^2, \quad (1.3)$$

где  $I_0(\beta r)$ ,  $I_1(\beta r)$  – модифицированные функции Бесселя; коэффициенты

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),$$

$$a_3 = h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+,$$

$$a_4 = c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right),$$

$$a_5 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_6 = h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,$$

$$\beta = \frac{2 c b_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2},$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-;$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1},$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}, \quad \gamma_1 = \frac{b_2}{b_1 b_3 - b_2^2};$$

$K_k, G_k$  – модули объемной и сдвиговой деформаций материала  $k$ -го слоя.

### 2 Методика решения задачи линейной вязкоупругости

Физические уравнения состояния для линейно вязкоупругой среды записываются в следующей девиаторно-сферовой форме:

$$2G \varepsilon_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \int_0^t \Gamma(t - \tau) s_{ij}(\tau) d\tau,$$

$$K \theta(t) = \sigma(t), \quad (2.1)$$

где  $s_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформаций;  $\theta = \varepsilon_{kk}$  – объемная относительная деформация;  $\sigma = \sigma_{kk} / 3$  – сферическая часть тензора напряжений;  $G, K$  – модули сдвига и объемной деформации в момент приложения нагрузки,  $\Gamma(t)$  – ядро ползучести материала.

Следовательно, согласно уравнениям (2.1) деформации  $\varepsilon_{ij}$  в данный момент времени  $t$  определяются не только действующим мгновенным значением девиатора напряжений  $s_{ij}$ , но и всей предшествующей историей их изменения. Для описания этого используется некоторая наследственная функция  $\Gamma(t)$ , называемая ядром ползучести, которая является положительной монотонно убывающей функцией и определяется экспериментально. Она имеет своим аргументом разность  $(t - \tau)$ , показывая инвариантность уравнений (2.1) относительно начала отсчета времени. Объемное деформирование  $\theta$  считается упругим.

Если из уравнений (2.1) выразить напряжения через деформации, то получим

$$s_{ij}(t) = 2G \left( \varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right),$$

$$\sigma(t) = K \theta(t), \quad (2.2)$$

где  $R(t)$  – ядро релаксации материала.

Уравнения (2.2) можно переписать в операторном виде:

$$s_{ij} = 2G^* \varepsilon_{ij}, \quad \sigma = K\theta, \quad (2.3)$$

где операторы

$$G^* = G(1 - R^*), \quad R^* f = \int_0^t R(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

А.А. Ильюшин сформулировал теорему о том, что решение задачи теории упругости может быть представлено в следующей символической форме [35]:

$$u = f + \omega\varphi + \frac{1}{\omega} \xi + \frac{1}{1 + \beta_k \omega} \chi_k,$$

где  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\xi$ ,  $\chi_k$  – известные функции координат, внешних нагрузок, заданных перемещений на границе, температуры; параметр  $\omega = 2G / 3K$ ;  $\beta_k$  – постоянные коэффициенты; по повторяющемуся индексу  $k$  проводится суммирование.

Если решение задачи теории упругости в подобном виде представимо, то решение соответствующей задачи линейной вязкоупругости в операторном виде будет следующим:

$$u^* = f^* + \omega^* \varphi^* + \frac{1}{\omega^*} \xi^* + \frac{1}{1 + \beta_k \omega^*} \chi_k^*, \quad (2.4)$$

где  $\omega^* = 2G^* / 3K$ .

Рассмотрим процедуру перехода в решении (2.4) от операторов к оригиналам. Для этого введем оператор Ильюшина

$$g_{\beta k}^* \equiv \frac{1}{1 + \beta_k \omega^*}.$$

Если оператору  $g_{\beta k}^*$  соответствует известная функция времени, то обращение решения (2.4) в оригиналы будет следующее:

$$u(t) = f(t) + \frac{2G}{3K} \left( \varphi(t) - \int_0^t R(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right) + \frac{3K}{2G} \left( \xi(t) + \int_0^t \Gamma(t - \tau) \xi(\tau) d\tau \right) + \int_0^t g_{\beta k}^*(t - \tau) d\chi_k(\tau). \quad (2.5)$$

А.А. Ильюшиным разработана методика экспериментального определения функций  $g_{\beta k}(t)$ , поэтому в дальнейшем считаем их известными для применяемых материалов слоев.

### 3 Изгиб линейно вязкоупругой трехслойной пластины

Решение задачи линейной вязкоупругости для круговой трехслойной, защемленной по контуру, пластины получим из решения (1.1)–(1.3), воспользовавшись рассмотренным методом аппроксимаций Ильюшина. Дополнительно ограничимся классом материалов заполнителя, для которых выполнение условия  $\beta < 1$ . Это выполняется, если модуль упругости заполнителя  $G_3$ ,

$K_3$  гораздо меньше, чем соответствующие параметры материалов несущих слоев. Это позволяет аппроксимировать модифицированные функции Бесселя при  $0 < x < 1$  с достаточной степенью точности следующей формулой [36]:

$$I_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^n - \frac{1}{\Gamma(n+2)} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2}.$$

В этом случае точность подобного представления функций  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  можно оценить с помощью остаточного члена ряда в форме Лагранжа:

$$R_0(x) = \frac{I_0^{IV}(\vartheta x)}{4!} x^4, \quad R_1(x) = \frac{I_1^V(\vartheta x)}{5!} x^5, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Производные бесселевых функций будут

$$I_0^{IV}(x) = \frac{1}{8}(3I_0(x) + 4I_2(x) + I_4(x)),$$

$$I_1^V(x) = \frac{1}{32}(10I_0(x) + 15I_2(x) + 6I_4(x) + I_6(x)).$$

Функции  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  монотонно возрастают, поэтому для них справедливы следующие оценки:

$$R_0(x) = \frac{I_0^{IV}(1)}{4!} x^4, \quad R_1(x) = \frac{I_1^V(1)}{5!} x^5.$$

С помощью таблиц функций Бесселя [36] получим следующую численную оценку:

$$R_0(x) = 0,0240x^4, \quad R_1(x) = 0,00432x^5.$$

Решения задачи об изгибе круговой трехслойной линейно вязкоупругой пластины проведем с использованием дополнительной гипотезы о подобии ядер релаксации:

$$R_k(t) = c_k R(t), \quad c_k \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad R_3(t) \equiv R(t), \quad (3.1)$$

т. е., ядра релаксации материалов несущих слоев пластины и заполнителя отличаются на постоянный множитель  $c_k$ .

Проведем в коэффициентах  $a_i$  решения (1.1)–(1.3) замену модуля сдвига  $G_k$  на соответствующий оператор вязкоупругости  $G_k^*$  (2.3). В полученных величинах  $a_i^*$  выделим операторы Ильюшина  $g_{\beta k}^*$ :

$$g_{\beta k}^* = \frac{1}{1 + \beta_k \omega^*}, \quad \omega^* = \frac{2G^*}{3K}, \quad \beta_k = \text{const}. \quad (3.2)$$

В соответствии с гипотезой подобия ядер релаксации (3.1) получим формулы, связывающие операторы вязкоупругости материалов несущих слоев и заполнителя:

$$G_k^* = G_k(1 - c_k) + \frac{c_k G_k}{G} G^*,$$

$$G \equiv G_3, \quad G^* \equiv G_3^*, \quad K \equiv K_3.$$

Отсюда

$$K_k^{+*} = K_{k1} + K_{k2} \omega^*, \quad K_{k1} = K_k + \frac{4}{3} G_k (1 - c_k),$$

$$K_{k2} = 2c_k G_k K / G.$$

и операторы  $a_i^*$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) преобразуются к виду

$$a_i^* = a_{i1} + a_{i2} \omega^*,$$

ГДЕ

$$\begin{aligned}
 a_{1\alpha} &= \sum_{k=1}^3 h_k K_{k\alpha}^+, \quad a_{2\alpha} = c(h_1 K_{1\alpha} - h_2 K_{2\alpha}), \\
 a_{3\alpha} &= h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) K_{1\alpha} - h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) K_{2\alpha}, \\
 a_{4\alpha} &= c^2 \left[ h_1 K_{1\alpha} + h_2 K_{2\alpha} + \frac{2}{3} c K_{3\alpha} \right], \\
 a_{5\alpha} &= c \left[ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) K_{1\alpha} + h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) K_{2\alpha} + \frac{2}{3} c^2 K_{3\alpha} \right], \\
 a_{6\alpha} &= h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_{1\alpha} + \\
 &+ h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_{2\alpha} + \frac{2}{3} c^3 K_{3\alpha} \\
 &(\alpha = 1, 2).
 \end{aligned}$$

Остальные операторы выражаются через  $a_i^*$ :

$$\begin{aligned}
 b_1^* &= \frac{a_1^* a_4^* - a_2^{*2}}{a_1^*}, \quad b_2^* = \frac{a_1^* a_5^* - a_2^* a_3^*}{a_1^*}, \quad b_3^* = \frac{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}}{a_1^*}, \\
 \beta^{*2} &= \frac{2c b_3^* G_3^*}{b_1^* b_3^* - b_2^{*2}}.
 \end{aligned}$$

Теперь решение задачи линейной вязкоупругости в операторах следует формально из (1.1)–(1.3) при добавлении звездочки сверху искомым функциям и коэффициентам, содержащих величины  $\omega^*$ :

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{a_3^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \left[ \left( a_5^* - \frac{a_2^* a_6^*}{a_3^*} \right) \psi^* + \frac{q^* r}{16} (r^2 - 1) \right], \\
 \psi^* &= -\frac{b_2^* q^*}{4c b_3^* G_3^*} \left( \frac{I_1(\beta^* r)}{I_1(\beta^*)} - r \right), \\
 w^* &= \frac{b_2^{*2} q^*}{4c b_3^{*2} G_3^*} \left( \frac{I_0(\beta^* r) - I_0(\beta^*)}{\beta^* I_1(\beta^*)} - \frac{1}{2} (r^2 - 1) \right) + \\
 &+ \frac{q^*}{64 b_3^*} (r^2 - 1)^2. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Выразим входящие в решение (3.3) величины со звездочками через операторы  $g_{\beta k}^*$ ,  $\omega^*$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b_3^*} &= \alpha_1 g_{\beta 1}^* + \alpha_2 g_{\beta 2}^*, \\
 \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} &= \alpha_3 g_{\beta 3}^* + \alpha_4 g_{\beta 4}^* + \alpha_0 \frac{1}{\omega^*}.
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись приведенной выше аппроксимацией функций Бесселя, получим для других операторов, входящих в выражение для относительного сдвига со звездочкой:

$$\begin{aligned}
 \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} \frac{I_1(\beta^* r)}{I_1(\beta^*)} &= \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} r \left( r^2 + \frac{8(1-r^2)}{8+\beta^{*2}} \right), \\
 \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^* (8+\beta^{*2})} &= \alpha_5 g_{\beta 3}^* + \alpha_6 g_{\beta 4}^* + \alpha_7 g_{\beta 5}^* + \alpha_8 g_{\beta 6}^* +
 \end{aligned}$$

$$+ \alpha_9 g_{\beta 7}^* + \alpha_{10} g_{\beta 8}^* + \alpha_{11} \frac{1}{\omega^*},$$

$$\frac{b_2^{*2}}{b_3^* G_3^*} = \alpha_{12} \frac{1}{\omega^*} + \alpha_{13} g_{\beta 3}^* + \alpha_{14} g_{\beta 4}^* + \alpha_{15} g_{\beta 3}^{*2} + \alpha_{16} g_{\beta 4}^{*4}.$$

Оператор в выражении (3.3) для прогиба  $w^*$  принимает вид

$$\frac{b_2^{*2}}{b_3^* G_3^*} \frac{I_0(\beta^* r) - I_0(\beta^*)}{\beta^* I_1(\beta^*)} = \frac{4b_2^{*2} (r^2 - 1)}{b_3^* G_3^* (8 + \beta^{*2})}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \frac{b_2^{*2}}{b_3^* G_3^* (8 + \beta^{*2})} &= \\
 &= \alpha_{17} \frac{1}{\omega^*} + \alpha_{18} g_{\beta 3}^{*2} + \alpha_{19} g_{\beta 4}^{*2} + \sum_{n=3}^8 \alpha_{17+n} g_{\beta n}^*.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\alpha_m$  ( $m = 1, 2, \dots, 41$ ) и  $\beta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) из-за их громоздкости здесь не приводятся.

Операторы, входящие в выражение (3.3) для радиального перемещения  $u^*$  будут следующими:

$$\begin{aligned}
 \frac{a_3^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} &= \alpha_{26} g_{\beta 1}^* + \alpha_{27} g_{\beta 2}^*, \\
 \frac{a_3^* a_5^* - a_2^* a_6^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} &= \\
 &= \alpha_{28} g_{\beta 1}^* + \alpha_{29} g_{\beta 2}^* + \alpha_{30} g_{\beta 3}^* + \alpha_{31} g_{\beta 4}^* + \alpha_{32} \frac{1}{\omega^*},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a_3^* a_5^* - a_2^* a_6^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \frac{b_2^* I_1(\beta^* r)}{b_3^* G_3^* I_1(\beta^*)} &= \\
 &= \frac{a_3^* a_5^* - a_2^* a_6^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^*} r \left( r^2 + \frac{8(1-r^2)}{8+\beta^{*2}} \right),
 \end{aligned}$$

$$\frac{a_3^* a_5^* - a_2^* a_6^*}{a_1^* a_6^* - a_3^{*2}} \frac{b_2^*}{b_3^* G_3^* (8 + \beta^{*2})} = \alpha_{33} \frac{1}{\omega^*} + \sum_{n=1}^8 \alpha_{33+n} g_{\beta n}^*.$$

Используя полученные разложения операторов, решение (3.3) можно переписать в изображениях следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{r(r^2 - 1)q^*}{4c} \left( \left( \frac{c}{4} \alpha_{26} + \alpha_{28} \right) g_{\beta 1}^* + \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{c}{4} \alpha_{27} + \alpha_{29} \right) g_{\beta 2}^* + \right. \\
 &+ \left. \alpha_{30} g_{\beta 3}^* + \alpha_{31} g_{\beta 4}^* + (\alpha_{32} - 8\alpha_{33}) \frac{1}{\omega^*} - \sum_{n=1}^8 \alpha_{n+33} g_{\beta n}^* \right), \\
 \psi^* &= \frac{r(r^2 - 1)q^*}{4c} \times \\
 &\times \left( (\alpha_0 - 8\alpha_1) \frac{1}{\omega^*} + \sum_{n=3}^4 \alpha_n g_{\beta n}^* - 8 \sum_{n=3}^8 \alpha_{n+2} g_{\beta n}^* \right), \\
 w^* &= \frac{(r^2 - 1)^2 q^*}{64} (\alpha_1 g_{\beta 1}^* + \alpha_2 g_{\beta 2}^*) + \\
 &+ \frac{(r^2 - 1)q^*}{8c} \left( (8\alpha_{17} - \alpha_{12}) \frac{1}{\omega^*} + 8 \sum_{n=3}^8 \alpha_{n+17} g_{\beta n}^* + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=3}^4 ((8\alpha_{n+15} - \alpha_{n+12})g_{\beta n}^{*2} - \alpha_{n+10}g_{\beta n}^*) \quad (3.4)$$

Изображению  $1/\omega^*$  отвечает ядро ползучести  $\Gamma(t)$ , изображениям операторов  $g_{\beta n}^*$  (3.2) соответствуют оригиналы  $g_{\beta n}(t)$ , определяемые экспериментально.

Решение задачи об изгибе трехслойной круговой линейно вязкоупругой пластины следует из операторного решения (3.4) после расшифровки входящих туда операторов с помощью представления (2.5):

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= \\ &= \frac{r(r^2-1)}{4c} \left[ (\alpha_0 - 8\alpha_1) \left( q(t) + \int_0^t R(t-\tau)q(\tau)d\tau \right) + \right. \\ &+ \sum_{n=3}^4 \alpha_n \int_0^t g_{\beta n}(t-\tau)dq(\tau) - 8 \sum_{n=3}^8 \alpha_{n+2} \int_0^t g_{\beta n}(t-\tau)dq(\tau) \left. \right], \\ u(r, t) &= \\ &= \frac{r(r^2-1)}{4c} \left[ (\alpha_{32} - 8\alpha_{33}) \left( q(t) + \int_0^t R(t-\tau)q(\tau)d\tau \right) + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^2 \left( \left( \frac{c}{4} \alpha_{n+25} + \alpha_{n+27} \right) \int_0^t g_{\beta n}(t-\tau)dq(\tau) + \right. \\ &+ \alpha_{n+29} \int_0^t g_{\beta(n+2)}(t-\tau)dq(\tau) \left. \right) - \\ &- \sum_{n=1}^8 \alpha_{n+33} \int_0^t g_{\beta n}(t-\tau)dq(\tau) \left. \right], \\ w(r, t) &= \frac{(r^2-1)^2}{64} \sum_{n=1}^2 \alpha_n \int_0^t g_{\beta n}(t-\tau)dq(\tau) + \\ &\frac{r^2-1}{8c} \left[ (8\alpha_{17} - \alpha_{12}) \left( q(t) + \right. \right. \\ &+ \left. \int_0^t R(t-\tau)q(\tau)d\tau \right) + 8 \sum_{n=3}^8 \alpha_{n+17} \int_0^t g_{\beta n}(t-\tau)dq(\tau) + \\ &+ \sum_{n=3}^4 \left( (8\alpha_{n+15} - \alpha_{n+12}) \int_0^t g_{\beta n}(t-\tau)d \int_0^t g_{\beta n}(t-\tau)dq(\tau) - \right. \\ &\left. \left. \alpha_{n+10} \int_0^t g_{\beta n}(t-\tau)dq(\tau) \right) \right]. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Аналитическое решение (3.5) справедливо для трехслойной круговой пластины с защемленным контуром, материалы слоев которой обладают вязкоупругими свойствами и для ядер релаксации которых выполняется условие подобия (3.1). При свободном опирании контура количество экспериментальных функций  $g_{\beta n}(t)$  не увеличивается.

#### 4 Численные результаты

Численная апробация решения (3.5) проведена для круговой трехслойной пластины, слой которой составлены из материалов Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т. Ядро релаксации принима-

лось в виде, предложенном А.Р. Ржаницыным. Относительные толщины слоев сэндвич пластины  $h_1 = h_2 = 0,04$ ,  $h_3 = 0,2$ . Величина интенсивности поперечной распределенной нагрузки  $q = 3$  МПа. Все необходимые механические и прочностные параметры этих материалов заимствованы из монографии [1].

На рисунке 4.1 показано изменение прогиба и относительного сдвига в заполнителе вдоль радиуса для упругой и вязкоупругой пластин. Учет ползучести материалов добавляет к максимальному расчетному прогибу упругой пластины 10,3%.

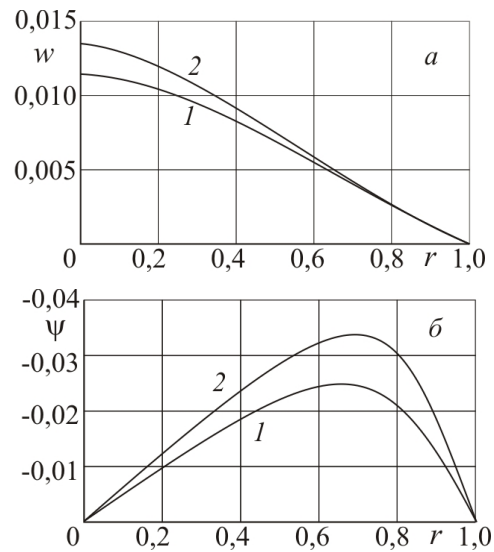


Рисунок 4.1 – Изменение прогиба (а) и относительного сдвига (б) вдоль радиуса: 1 – упругая пластина, 2 – вязкоупругая

#### Заключение

Следовательно, аналитическое решение задачи об изгибе круговой трехслойной вязкоупругой пластины включает ядро ползучести и восемь экспериментальных функций  $g_{\beta n}(t)$ . Экспериментальное нахождение этих функций связано с определенными трудностями, поэтому часто удобно использовать численные методы решения подобных задач. Предложенное общее аналитическое решение линейной задачи вязкоупругости для трехслойной круговой пластины и численные результаты могут быть применены в инженерной практике.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.



3. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморадикационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Белорусская наука, 2017. – 276 с.
4. Головки, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
5. Плескачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. наука, 2004. – 386 с.
6. Tarlakovskii, D.V. Two-Dimensional Non-stationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – № 43 (2). – P.145–152.
7. Горшков, А.Г. Гармонические колебания трехслойной цилиндрической вязкоупругопластической оболочки / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2001. – № 9. – С. 100–107.
8. Paimushin, V.N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour / V.N. Paimushin // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – № 53 (1). – P. 3–26.
9. Старовойтов, Э.И. Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 793–806.
10. Deshpande, V.S. Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / V.S. Deshpande, N.A. Fleck // J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71, № 5. – P. 637–645.
11. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
12. Škec, L. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection / L. Škec, G. Jelenić // Acta Mechanica. – 2014. – Vol. 225, № 2. – P. 523–541.
13. Belinha, J. Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method / J. Belinha, L.M. Dints // Composite Structures. – 2007. – Vol. 78, № 3. – P. 337–350.
14. Julien, D. Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenized Love-Kirchhoff Model / D. Julien, S. Karam // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol. 56, № 2. – P. 561–580.
15. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409–416.
16. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.
17. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.
18. Козел, А.Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А.Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.
19. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (4). – С. 53–57.
20. Захарчук, Ю.В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10. – С. 55–66.
21. Захарчук, Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.
22. Старовойтов, Э.И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.
23. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.
24. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2018. – № 6 (111). – С. 98–104.
25. Zenkour, A.M. Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates / M.A. Zenkour, N.A. Alghamdi // Journal of Sandwich Structures and Materials. – 2010. – Vol. 12, № 1. – P. 7–46.
26. Zenkour, A.M. Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol. 17, № 6. – P. 419–432.
27. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

28. *Нестерович, А.В.* Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А.В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

29. *Нестерович, А.В.* Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

30. *Нифагин, В.А.* Метод асимптотических разложений в теории упругопластических трещин / В.А. Нифагин, М.А. Бубич // *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* – 2011. – № 4. – С. 60–66.

31. *Гундина, М.А.* Энергетические инварианты в теории упругопластических трещин /

М.А. Гундина // *Наука и техника.* – 2017. – Т. 16, № 4. – С. 355–362.

32. *Гундина, М.А.* Определение начального направления развития трещины в момент страгивания / М.А. Гундина // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2019. – № 1 (38). – С. 40–44.

33. *Ильюшин, А.А.* Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победра. – М.: Наука, 1970. – 280 с.

34. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1979. – 342 с.

*Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T20P-047).*

*Поступила в редакцию 25.01.2021.*

УДК 621.373.8:621.937:549.517.14

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗДЕЛЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР ИЗ СТЕКЛА ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ КОНТУРАМ

С.В. Шалупаев<sup>1</sup>, Ю.В. Никитюк<sup>1</sup>, А.А. Середа<sup>1</sup>, И.Ю. Аушев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

<sup>2</sup>Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск

## MODELING THE PROCESS OF SEPARATING MULTILAYER HETEROGENEOUS GLASS STRUCTURES ALONG CURVED CONTOURS

S.V. Shalupaev<sup>1</sup>, Y.V. Nikitjuk<sup>1</sup>, A.A. Sereda<sup>1</sup>, I.Y. Aushev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Francisk Skorina Gomel State University

<sup>2</sup>University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk

В рамках теории термоупругости выполнен сравнительный анализ полей термоупругих напряжений, возникающих в многослойных структурах из стекла (триплекс) в процессе двухлучевого управляемого лазерного термораскалывания. При этом вдоль линии обработки предварительно наносится серия каналов перпендикулярных поверхности материала. Показано, что при наличии каналов величина максимальных растягивающих напряжений существенно увеличивается и зависит от радиуса каналов, расстояния между ними и параметров обработки. Серия нанесенных каналов вдоль линии обработки позволяет контролировать инициализацию и развитие трещины вдоль линии обработки по криволинейным траекториям.

**Ключевые слова:** термораскалывание, моделирование, метод конечных элементов, температура, триплекс, термоупругие напряжения.

Within the framework of the theory of thermoelasticity, a comparative analysis of the fields of thermoelastic stresses arising in multilayer glass structures (triplex) in the process of two-beam controlled laser thermal cleavage is carried out. In this case, a series of channels perpendicular to the surface of the material is preliminarily applied along the processing line. It is shown that in the presence of channels, the magnitude of the maximum tensile stresses increases significantly and depends on the radius of the channels, the distance between them and the processing parameters. A series of applied channels along the machining line allows control of crack initiation and propagation along the machining line along curved paths.

**Keywords:** thermal cleavage, modeling, finite element method, temperature, triplex, thermoelastic stresses.

### Введение

Многослойное стекло (триплекс) используется для производства ограждений, элементов декора, прочных конструкций из стекла, стеклопакетов и бронированных стекол, элементов остекления кузова автомобиля. В ряде случаев требуется разделение готовых листов триплекса, подрезка краев, в том числе и по криволинейным траекториям.

В промышленных условиях, резка триплекса чаще всего осуществляется надрезанием стекла с двух сторон, после чего его аккуратно разламывают. Затем специальные инфракрасные нагревательные элементы прогревают всю линию надреза. Во время такой процедуры склеивающая пленка размягчается и позволяет отделить две части триплекса друг от друга. Также используют и гидроабразивную резку, в основе которой лежит принцип эрозийного воздействия смеси высокоскоростной водяной струи и твердых абразивных частиц на обрабатываемый материал. Физическая суть механизма гидроабразивной резки состоит в отрыве и уносе из полости реза частиц материала скоростным потоком твердофазных частиц.

Авторами данной статьи в работе [1] показано, что для разделения ламинированного стекла (триплекс), вместо механического нанесения поверхностного дефекта при помощи алмазного режущего инструмента можно использовать лазерно-индуцированную трещину вдоль линии разделения, полученную в процессе двухлучевого управляемого лазерного термораскалывания, сущность которого заключается в последовательном локальном нагреве и охлаждении вдоль линии разделения, в результате которого образуется несквозная трещина в области воздействия хладагента, следующая за лазерным пучком вдоль линии обработки [1]. Дальнейшее развитие трещины по всей толщине стеклянной пластины до ПВХ пленки возможно за счет механического, теплового или ультразвукового докалывания. При этом образуются бездефектные кромки разделенных пластин, что увеличивает их прочность в сравнении с механическим нанесением дефекта алмазным режущим инструментом и избавляет от необходимости дальнейшей обработки разделенной поверхности (шлифовка, полировка). При дальнейшем воздействии в области разделения

инфракрасными нагревательными элементами для размягчения пленки и окончательного разделения триплекса, бездефектные края снижают риск возникновения трещины в области разделения вследствие возникновения термоупругих напряжений.

Использование данного метода для разделения по криволинейной траектории обусловлено рядом трудностей. Это и отклонение формируемой профиля трещины от линии резки, и сложности в ее инициализации в заданной позиции на поверхности материала [2]–[3].

В работах [4]–[10] приведены исследования по получению несквозных каналов в хрупких неметаллических материалах, таких как силикатное и кварцевое стекло, полупроводниковые кристаллы, например арсенид галлия, посредством импульсного оптического пробоя поверхности микро-, пико- и фемтосекундными лазерами. При этом образуются каналы диаметром 100–500 мкм.

В работе [11] проведены теоретические исследования и показана возможность использования таких каналов для инициализации разделяющей трещины в процессе двулучевого управляемого лазерного термораскалывания триплекса по прямолинейным траекториям.

Таким образом, представляется целесообразным моделирование процесса двулучевого лазерного термораскалывания многослойных неоднородных структур из стекла с использованием серии таких каналов, выполненных вдоль контура обработки для инициализации разделяющей трещины и в качестве направляющих при ее развитии по криволинейным траекториям.

### 1 Постановка задачи

В соответствии с рисунком 1.1 вдоль линии обработки наносится серия сквозных отверстий 3, полученных посредством импульсного оптического пробоя поверхности микро-, пико- и фемтосекундными лазерами. Лазерный пучок 1 и хладагент 2 круглого сечения движутся вдоль линии обработки.

В качестве образца для моделирования выбрана конструкция из двух пластин силикатного float-стекла толщиной 3 мм с PVB пленкой толщиной 0,38 мм, радиус траектории движения лазерного пучка и хладагента, а также линии, вдоль которой располагаются сквозные каналы  $R = 4$  см, а радиус каналов выбраны для моделирования 150, 225, 300 мкм, угловой сектор между каналами 1,5, 3 и 4,5 градуса. Свойства стекла и PVB пленки представлены в работах [12]–[18].

Пучок  $\text{CO}_2$ -лазера, энергия которого поглощается в тонком поверхностном слое материала, моделируется как поверхностный тепловой источник, с плотностью мощности теплового источника  $0,8 \cdot 10^6$  Вт / м<sup>2</sup> и поперечным сечением в виде круга радиусом 2 мм. Лазерные пучки и

хладагент формируются симметрично с обеих сторон ламинированного стекла (триплекс). При используемых параметрах подачи воздушно-водяной смеси обеспечивается охлаждение поверхности стекла с коэффициентом теплоотдачи равным 6800 Вт / (м<sup>2</sup>·К) [19]. Хладагент подается на поверхность в виде мелкодисперсной воздушно-водяной смеси диаметром 6 мм. При этом пучок  $\text{CO}_2$ -лазера и хладагент на поверхности обрабатываемой пластины располагали непосредственно друг за другом на линии обработки.

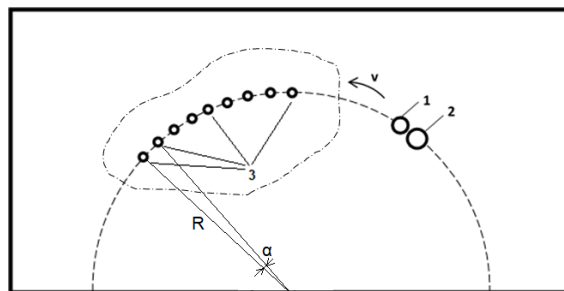


Рисунок 1.1 – Схема комбинированного лазерного термораскалывания по криволинейным траекториям

Скорость обработки материала  $v$  по схемам, представленным на рисунке 1.1, выбрана равной 10 мм / с. Одним из необходимых условий, которое должно соблюдаться при реализации процесса управляемого лазерного термораскалывания силикатных стекол, является то, что температура материала не должна превышать определенное значение, так называемую «температуру стеклования», которая для выбранных нами стекол составляет порядка 780 К. Вследствие того, что стекло является аморфным веществом, при превышении данного значения оно теряет упругие свойства.

### 2 Результаты моделирования

На рисунке 2.1, а) представлено расчетное распределение термоупругих напряжений, направленных перпендикулярно линии разделения (вдоль радиуса окружности), на поверхности обрабатываемого материала в области воздействия лазерного пучка и хладагента в фиксированный момент времени при реализации двулучевого лазерного термораскалывания и при отсутствии сквозных каналов, нанесенных вдоль линии обработки. На рисунке 2.1, б) показан расчетный график зависимости аналогичных напряжений вдоль линии обработки. Расчеты выполнены с использованием метода конечных элементов, реализованных в инженерном пакете Ansys [20].

Полученное распределение характерно для процесса управляемого лазерного термораскалывания. На поверхности материала в области подачи хладагента, где происходит резкое охлаждение материала, возникает зона сильных растягивающих

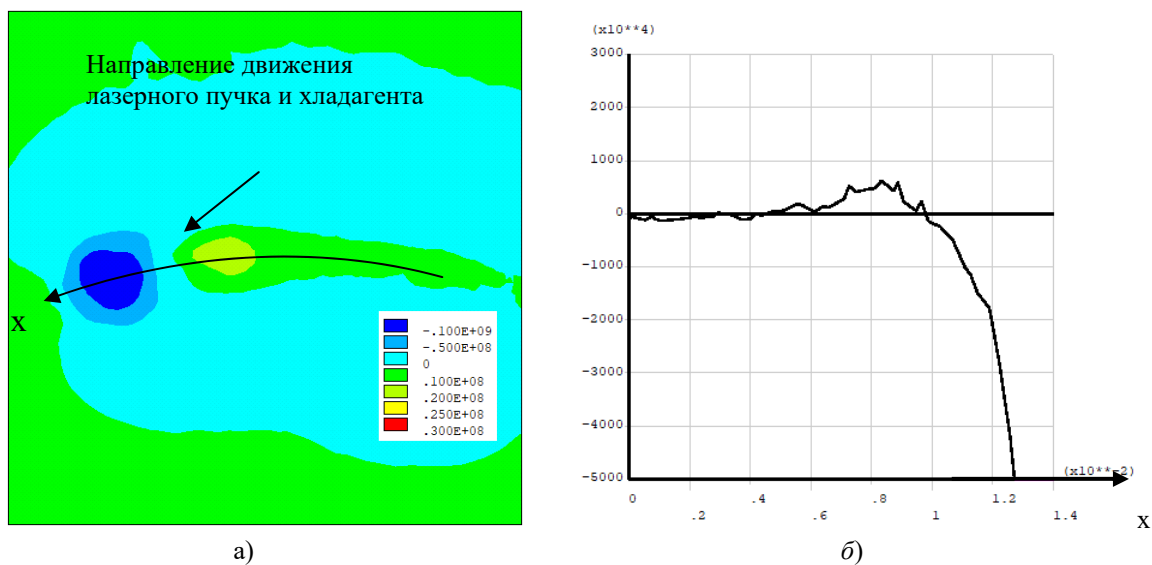


Рисунок 2.1 – Расчетное распределение и график зависимости термоупругих напряжений  $\sigma_R$ , Па: а) на поверхности материала; б) вдоль линии обработки

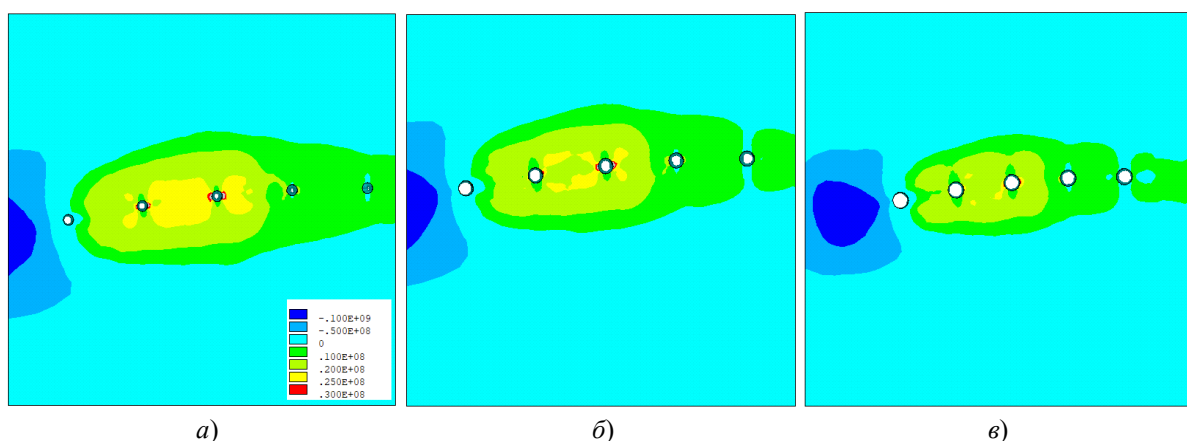


Рисунок 2.2 – Расчетное распределение термоупругих напряжений  $\sigma_R$ , Па, для  $\alpha = 3^\circ$  и радиуса сквозных каналов: а) 150 мкм; б) 225 мкм; в) 300 мкм

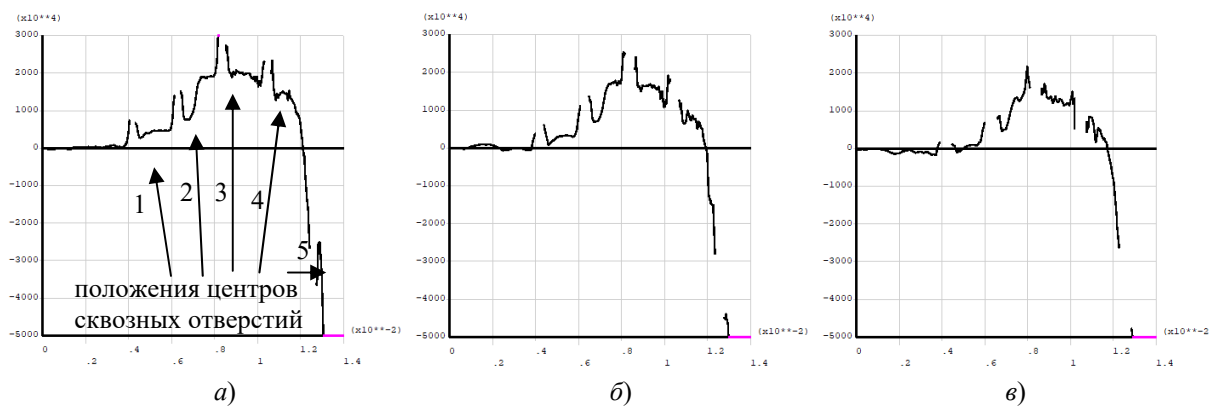


Рисунок 2.3 – Расчетный график зависимости термоупругих напряжений  $\sigma_R$ , Па на поверхности материала вдоль линии обработки для  $\alpha = 3^\circ$  для радиуса сквозных каналов: а) 150 мкм; б) 225 мкм; в) 300 мкм

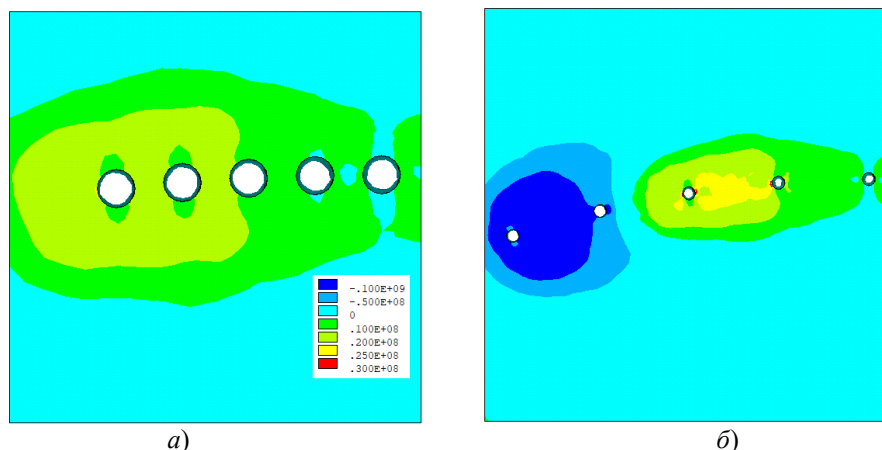


Рисунок 2.4 – Расчетное распределение термоупругих напряжений  $\sigma_R$ , Па: для угла сектора между центрами каналов  $3^\circ$  для радиуса сквозных каналов: а) для  $\alpha = 1,5^\circ$  и радиуса сквозных каналов 300 мкм; б) для  $\alpha = 4,5^\circ$  и радиуса сквозных каналов 225 мкм

Таблица 2.1 – Расчетные значения максимальных растягивающих напряжений  $\sigma_R$ , МПа в области сквозных каналов в процессе двулучевого лазерного термораскалывания триплекса

Угол сектора, $^\circ$	1,5			3			4,5		
Радиус сквозного канала R, мкм	150	225	300	150	225	300	150	225	300
Величина напряжений, МПа	43,6	27,2	20,6	45,7	37,4	30,2	43,5	32,8	30,3

напряжений. При этом максимум по величине напряжений 16,3 МПа смещен относительно линии воздействия  $\text{CO}_2$ -лазера и хладагента (наблюдается характерная асимметрия в распределении напряжений вдоль линии обработки. Максимальное значение напряжений вдоль линии обработки, как видно из графика на рисунке 2.1, б), значительно ниже. Вследствие этого инициализация и развитие трещины происходит со смещением от линии обработки.

Максимальные значения температур не превышают температуры стеклования и составляют 680 К.

На рисунке 2.2 представлено расчетное распределение термоупругих напряжений, при наличии сквозных каналов, центры которых лежат на линии обработки, для величины угла сектора между центрами каналов  $\alpha = 3^\circ$  и разных значениях радиуса сквозных каналов. На рисунке 2.3 – расчетный график зависимости аналогичных напряжений вдоль линии обработки.

Как видно из представленных на рисунках 2.2, 2.3 результатов расчета, наличие сквозных каналов выравнивает картину термоупругих напряжений относительно линии обработки. Максимум растягивающих напряжений находится в поверхностных слоях материала на линии обработки в зоне сквозных каналов, которые являются так называемыми «концентраторами напряжений». При этом величина растягивающих напряжений существенно выше, нежели в случае отсутствия каналов, что создает условия для стабильного зарождения разделяющей трещины от каналов, полученных посредством импульсного

оптического пробоя поверхности микро-, пико- и фемтосекундными лазерами (таблица 2.1). Между отверстиями в области подачи хладагента образуется зона растягивающих напряжений, которая обуславливает развитие разделяющей трещины вдоль линии обработки. Максимумы растягивающих напряжений, направленных перпендикулярно линии обработки (вдоль радиуса траектории обработки), образуются на торцах сквозных каналов. Уменьшение радиуса сквозных каналов ведет не только к увеличению величины максимальных растягивающих напряжений в области сквозных каналов, но и к общему увеличению напряжений в зоне между отверстиями. Все это формирует условия инициализации трещины от торца отверстий и ее развития вдоль линии обработки по направлению к зоне максимальных растягивающих напряжений в области следующего отверстия, т. е. распространению трещины от канала к каналу.

Анализ распределения напряжений, полученных в процессе моделирования двулучевого лазерного термораскалывания при значениях угла сектора между центрами сквозных каналов  $1,5^\circ$  и  $4,5^\circ$ , некоторые из которых представлены на рисунке 2.4, позволяет сделать вывод, что величина максимальных растягивающих напряжений  $\sigma_R$  на торцах отверстий, а также в зоне обработки между ними, ниже, чем при значениях угла сектора  $3^\circ$ . Таким образом, существует некоторое оптимальное значение расстояния между центрами отверстий, при которых можно добиться максимальной стабильности зарождения и развития разделяющей трещины. Это расстояние

обусловлено, радиусом кривизны траектории и параметрами обработки и может быть определено при моделировании каждого технологического режима разделения.

### Заключение

Выполненное численное моделирование схемы комбинированного лазерного термораскалывания по криволинейным траекториям показывает, что в области воздействия хладагента, вдоль линии, проходящей через центры соседних отверстий, на поверхности материала формируется область сильных растягивающих напряжений направленных поперечно линии обработки. Иницированная от отверстия трещина распространяется вдоль данной линии. При этом величина растягивающих напряжений в области воздействия хладагента при наличии каналов существенно выше, нежели при их отсутствии и зависит от диаметра отверстий, расстояния между ними и параметров обработки. Таким образом, серия нанесенных каналов вдоль линии обработки позволяет контролировать инициализацию и развитие трещины вдоль линии обработки по криволинейным траекториям.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Разработка технологии термораскалывания анизотропных и многослойных неоднородных структур лазерными пучками специальной геометрии: отчет о НИР (заключ.)* / ГГУ им. Ф. Скорины: рук. С.В. Шалупаев. – Гомель, 2021. – 69 с. – № ГР 20161487.
2. *Патент № 2164 РБ. Установка для лазерной резки хрупких неметаллических материалов* / С.В. Шалупаев, Е.Б. Шершнева, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа, А.Евтухов МКИ<sup>7</sup> С 03В 33/02. Заявка и 20050085, заявлено 2005.04.22, опубликовано 2005.09.30.
3. *Шалупаев, С.В.* Лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов по замкнутым криволинейным контурам / С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа // *Оптический журнал*. – 2008. – Т. 75, № 2. – С. 11–15.
4. *Эффект затягивания излучения СО<sub>2</sub>-лазера в узкий канал при обработке металлов комбинированным лазерным излучением* / А.В. Федин [и др.] // *Изв. РАН. Сер. физ.* – 1999. – Т. 63, № 10. – С. 2053–2058.
5. *Какорин, С.А.* Особенности фотовозбуждения и распределения температуры в полупроводнике при встречном двухчастотном воздействии / С.А. Какорин, В.Л. Комолов, М.Н. Либенсон // *Письма в ЖТФ*. – 1982. – Т. 8, вып. 9. – С. 513–517.
6. *Комолов, В.Л.* Разогрев и лазерное разрушение полупроводников / В.Л. Комолов, М.Н. Либенсон, Г.Д. Шандыбина // *Известия АН СССР, серия физическая*. – 1985. – Т. 46, № 6. – С. 1103–1110.

7. *Оптический пробой арсенида галлия при импульсном двухчастотном воздействии* / А.М. Бонч-Бруевич [и др.] // *Письма в ЖТФ*. – 1982. – Т. 8, вып. 8. – С. 507–510.

8. *Гагарин, А.П.* Исследование крупномасштабного воздействия лазерного излучения на металлы и стекла: автореф. дис. ... д-р. физ.-мат. наук: 05.27.03 / А.П. Гагарин. – М., 1999. – 40 с.

9. *Модификация кварцевого стекла лазерными импульсами фемтосекундной длительности* / В.В. Кононенко [и др.] // *Компьютерная оптика*. – 2009. – Т. 33, № 3. – С. 254–259.

10. *Сергеев, М.С.* Исследование крупномасштабного воздействия лазерного излучения на металлы и стекла: дис. ... канд. техн. наук: 01.04.05 / М.С. Сергеев. – СПб., 2016. – 131 с.

11. *Шалупаев, С.В.* Комбинированное лазерное термораскалывание многослойных неоднородных структур из стекла / С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа // Юбилейная научно-практич. конф., посвящ. 90-летию ГГУ им. Ф. Скорины (Гомель, 19–20 ноября 2020 г.): материалы: в 3 ч. / редкол.: С.А. Хахомов (гл. ред.) [и др.]. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2020. – С. 191–194.

12. *AGS. Technical Data Sheet – Planibel* [Электронный ресурс] / Официальный сайт AGS Glass UK Ltd. – Режим доступа: <https://www.agc-younglass.com/>. – Дата доступа: 10.03.2021.

13. *Camilla fors. Mechanical properties of interlayers in laminated glass – Experimental and Numerical Evaluation (Master's Dissertation)* [Электронный ресурс] / Официальный сайт Lund University. – Режим доступа: <http://www.byggmek.lth.se>. – Дата доступа: 20.03.2021.

14. *Properties of soda-lime silica float glass* [Электронный ресурс] / Technical Bulletin. NSG group. – Режим доступа: <https://www.pilkington.com/resources/ats129propertiesofglass20130114.pdf>. – Дата доступа: 10.04.2021.

15. ГОСТ 9438-97. Пленка поливинилбутиральная клеящая. Технические условия. – Введ. 01.07.2002. – Мн.: Белор. гос. ин-т стандартизации и сертификации, 2003. – 29 с.

16. *Properties of SGP and PVB* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.dupont.com/building.html>. – Дата доступа: 10.04.2021.

17. *Saflex® Clear PVB interlayer* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.saflex.com/products>. – Дата доступа: 10.04.2021.

18. *Кикоин, И.К.* Таблицы физических величин: справочник / И.К. Кикоин, В.Г. Аверин, Б.А. Аронзон; под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.

19. *Properties of SGP and PVB* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.dupont.com/building.html>. – Дата доступа: 10.04.2021.

20. *Ansys* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ansys.com>. – Дата доступа: 14.02.2021.

Поступила в редакцию 05.04.2021.



УДК 512.548

## О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ $l$ -АРНОЙ ГРУППЫ $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ . I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

## ON SETS OF GENERATORS OF $l$ -ARY GROUP $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ . I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Устанавливается связь между порождающими множествами группы  $A$  и порождающими множествами полиадической группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  с  $l$ -арной операцией  $[ ]_{l, \sigma, k}$ , которая определяется на  $k$ -ой декартовой степени произвольной группы  $A$  для любого целого  $l \geq 2$  и любой подстановки  $\sigma$  из множества  $S_k$  всех подстановок множества  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

**Ключевые слова:** группа,  $l$ -арная группа, порождающее множество.

The relationship between sets of generators in group  $A$  and sets of generators in polyadic group  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  with  $l$ -ary operation  $[ ]_{l, \sigma, k}$  that is defined on Cartesian power  $A^k$  of group  $A$  for arbitrary integer  $l \geq 2$  and arbitrary substitution  $\sigma$  from the set  $S_k$  of all substitutions of the set  $\{1, 2, \dots, k\}$  is described.

**Keywords:** group,  $l$ -ary group, set of generators.

### Введение

Ранее автором изучались порождающие множества  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  с  $l$ -арной операцией  $[ ]_{l, \sigma, k}$ , которая определяется на  $k$ -ой декартовой степени  $A^k$  произвольной полугруппы  $A$  для любого целого  $l \geq 2$  и любой подстановки  $\sigma$  из множества  $S_k$  всех подстановок множества  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Данная статья посвящена изучению порождающих множеств  $l$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ .

Частными случаями ( $l = k + 1$ ,  $\sigma = (12 \dots k)$ )  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  являются две полиадические операции Э. Поста [1], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Систематическому изучению свойств операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  посвящена монография [2].

### 1 Предварительные сведения

**Теорема 1.1** [2]. Пусть  $A$  – полугруппа,  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . Тогда

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где  $y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Если в универсальной алгебре  $\langle A, [ ] \rangle$  с одной  $l$ -арной операцией  $[ ]: A^l \rightarrow A$  для любого  $i = 1, \dots, l-1$  выполняется тождество ассоциативности

$$[[a_1 \dots a_l] a_{l+1} \dots a_{2l-1}] = [a_1 \dots a_l [a_{l+1} \dots a_{i+l}] a_{i+l+1} \dots a_{2l-1}],$$

то такую универсальную алгебру называют  $l$ -арной полугруппой, а  $l$ -арную операцию  $[ ]$  – ассоциативной.

$l$ -Арная полугруппа  $\langle A, [ ] \rangle$  называется  $l$ -арной группой, если в ней для любого  $i = 1, 2, \dots, l$  и всех  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_l \in A$  однозначно разрешимо уравнение

$$[a_1 \dots a_{i-1} x_i a_{i+1} \dots a_l] = b.$$

Необходимую информацию можно найти в [3]–[9].

**Теорема 1.2** [2]. Если  $A$  – группа, подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная группа.

Свойства  $l$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  подробно описаны в [2]. В частности, доказано, что в ней нет единиц, если  $\sigma$  – нетождественная подстановка.

Для любого элемента  $a$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  решение уравнения  $[x \underbrace{a \dots a}_{l-1}] = a$  обозначают символом  $\bar{a}$  и называют косым элементом для  $a$ .

Для любого подмножества  $M$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  полагают

$$\bar{M} = \{ \bar{a} \mid a \in M \}.$$

Согласно соответствующему определению для произвольных универсальных алгебр,  $l$ -арная подгруппа  $\langle B, [ ] \rangle$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  называется порожденной множеством  $M \subseteq A$ , если она совпадает с пересечением всех  $l$ -арных подгрупп  $\langle C, [ ] \rangle$  из  $\langle A, [ ] \rangle$  таких, что  $M \subseteq C$ . Множество  $M$  в этом случае называют порождающим для  $\langle B, [ ] \rangle$ .

Порождающее множество  $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  называют неприводимым, если любое его собственное подмножество не порождает  $\langle A, [ ] \rangle$ . Если порождающее множество  $l$ -арной

группы  $\langle A, [ ] \rangle$  конечно, то  $\langle A, [ ] \rangle$  называют конечно порожденной. Если порождающее множество  $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  состоит из  $n$  элементов, то  $\langle A, [ ] \rangle$  называют  $n$ -порожденной.

Известно, что подгруппа  $B$  группы  $A$  порождается множеством  $M \subseteq A$  тогда и только тогда, когда каждый элемент  $b$  из  $B$  либо совпадает с некоторым элементом из  $M$ , либо является произведением степеней элементов из  $M$ .

По другому критерию, подгруппа  $B$  группы  $A$  порождается множеством  $M \subseteq A$  тогда и только тогда, когда каждый элемент  $b$  из  $B$  либо совпадает с некоторым элементом из  $M \cup M^{-1}$ , либо является произведением элементов из  $M$  и обратных к ним, то есть

$$b = m_1^{\varepsilon_1} \dots m_r^{\varepsilon_r}, m_i \in M, \varepsilon_i = \pm 1, r = 1, 2, \dots$$

или, что то же самое,

$$b = m_1 \dots m_r, m_i \in M \cup M^{-1}, r = 1, 2, \dots$$

Порождающее множество неединичной группы может содержать её единицу, которую можно удалить, так как она совпадает как с нулевой степенью любого элемента  $a$  из порождающего множества, так и с произведением  $aa^{-1}$ . Поэтому далее в статье всегда порождающее множество  $M$  группы  $A$  не содержит её единицу.

Следующие две теоремы являются многоместными аналогами приведённых выше критериев порождаемости группы.

**Теорема 1.3** [4].  $l$ -Арная подгруппа  $\langle B, [ ] \rangle$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  порождается множеством  $M \subseteq A$  тогда и только тогда, когда каждый элемент  $b$  из  $B$  либо совпадает с некоторым элементом из  $M$ , либо может быть представлен в виде

$$b = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], r = 1, 2, \dots,$$

где в правой части все элементы под знаком  $l$ -арной операции являются степенями элементов из  $M$ .

**Теорема 1.4** [9].  $l$ -Арная подгруппа  $\langle B, [ ] \rangle$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  порождается множеством  $M \subseteq A$  тогда и только тогда, когда каждый элемент  $b$  из  $B$  либо совпадает с некоторым элементом из  $M$ , либо может быть представлен в виде

$$b = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], m_i \in M \cup \bar{M}, r = 1, 2, \dots$$

**Замечание 1.1.** Если в порождающем множестве  $M$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  имеется элемент  $c$ , который с помощью  $l$ -арной операции  $[ ]$  и унарной операции  $\bar{\phantom{x}}$  взятия косого элемента выражается через другие элементы множества  $M$ , то есть

$$c = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], m_i \in M \cup \bar{M}, m_i \neq c$$

для некоторого  $r = 1, 2, \dots$ , то этот элемент можно удалить из порождающего множества. В этом

случае  $l$ -арная группа  $\langle A, [ ] \rangle$  порождается множеством  $M \setminus \{c\}$ .

## 2 Порождающее множество

$$U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{e\}$$

В данном и в следующих разделах будет получен положительный ответ на следующий

**Вопрос 2.1.** Можно ли, зная порождающее множество группы  $A$ , построить порождающее множество  $l$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ ?

В статье символ 1 будет использоваться не только для обозначения единицы натурального ряда, но и для обозначения единицы группы и единицы полугруппы, если она в ней имеется. Для сокращения записей будем использовать также обозначение.

$$e = (\underbrace{1, \dots, 1}_k)$$

где 1 – единица полугруппы (группы).

**Лемма 2.1.** Пусть  $A$  – полугруппа с единицей 1, подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ . Тогда:

1) если  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k), \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in A^k$ , то

$$[\underbrace{\mathbf{b} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = (b_1 c_1, \dots, b_k c_k);$$

2) если  $\mathbf{b}_j = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b_j, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k$ ,

$j = 1, 2, \dots, k$ , то

$$\mathbf{b} = [\underbrace{\mathbf{b}_1 \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{b}_2}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{b}_3}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{b}_k}_{l-2}]_{l, \sigma, k};$$

3) если для фиксированного  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$   $\mathbf{c}_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, c_s, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, s = 1, 2, \dots, r$ ,

то

$$[\underbrace{\mathbf{c}_1 \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}_2}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}_3}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}_r}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = \\ = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, c_1 c_2 \dots c_r, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j});$$

4) если  $\mathbf{u}_{js} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_{js}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k$ ,

где  $j = 1, 2, \dots, k; s = 1, 2, \dots, r_j$ , то

$$(a_{11} a_{12} \dots a_{1r_1}, a_{21} a_{22} \dots a_{2r_2}, \dots, a_{k1} a_{k2} \dots a_{kr_k}) = \\ = [\underbrace{\mathbf{u}_{11} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u}_{12}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u}_{13}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u}_{1r_1}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \\ \underbrace{\mathbf{u}_{21} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u}_{22}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u}_{23}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u}_{2r_2}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \\ \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u}_{k1}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u}_{k2}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u}_{kr_k}}_{l-2}]_{l, \sigma, k}$$

**Доказательство.** 1), 2) Используется определение операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$ .

3) Применяется  $r - 1$  раз утверждение 1).

4) Согласно 2),

$$(a_{11} a_{12} \dots a_{1r_1}, a_{21} a_{22} \dots a_{2r_2}, \dots, a_{k1} a_{k2} \dots a_{kr_k}) = \\ = [\underbrace{\mathbf{v}_1 \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{v}_2}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{v}_3}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{v}_k}_{l-2}]_{l, \sigma, k}, \quad (2.1)$$

где

$$v_j = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_r}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, j = 1, 2, \dots, k.$$

А в силу 3),

$$v_j = [u_{j_1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} u_{j_2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} u_{j_r}]_{l, \sigma, k} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем требуемое равенство.  $\square$

**Замечание 2.1.** Равенство из утверждения 2) леммы 2.1 можно заменить более общим равенством

$$b = [b_{\alpha(1)} \underbrace{e \dots e}_{l-2} b_{\alpha(2)} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} b_{\alpha(k)}]_{l, \sigma, k},$$

где  $\alpha$  – любая подстановка из  $S_k$ .

Для подмножества  $M$  полугруппы  $A$  с единицей 1, натурального  $k \geq 2$  и любого  $j = 1, 2, \dots, k$  положим

$$U_j(M) = \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \mid a \in M\},$$

$$U(M) = \bigcup_{j=1}^k U_j(M).$$

Ясно, что если  $1 \notin M$ , то  $U_i(M) \cap U_j(M) = \emptyset$  для  $i \neq j$ .

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос 2.1.

**Теорема 2.1.** Если группа  $A$  порождается множеством  $M$ , подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством

$$U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{e\}.$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  и пусть  $a = (a_1, \dots, a_k)$  – произвольный элемент из  $A^k$ . Так как группа  $A$  порождается множеством  $M$ , то

$$a_i = b_{i_1} \dots b_{i_r}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.3)$$

для некоторых

$$b_{i_1}, \dots, b_{i_r} \in M \cup M^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad r_i = 1, 2, \dots$$

Положим

$$c_1 = (a_1, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}), c_2 = (1, a_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}), \dots$$

$$\dots, c_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, a_k) \in A^k,$$

$$c_{11} = (b_{11}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}), \dots, c_{1r_1} = (b_{1r_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \in A^k,$$

$$c_{i1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, b_{i1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i}), \dots$$

$$\dots, c_{ir_i} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, b_{ir_i}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i}) \in A^k,$$

$$\dots, c_{k1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, b_{k1}), \dots, c_{kr_k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, b_{kr_k}) \in A^k.$$

Согласно утверждению 2) леммы 2.1,

$$a = [c_1 \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_2 \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_k]_{l, \sigma, k} \quad (2.4)$$

Так как ввиду (2.3),

$$c_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, a_i = b_{i_1} \dots b_{i_r}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i}), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

то согласно утверждению 3) леммы 2.1,

$$c_i = [c_{i1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{i2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{ir_i}]_{l, \sigma, k} \quad (2.5)$$

Подставив в (2.4) вместо  $c_1, c_2, \dots, c_k$  их правые части из (2.5), видим, что элемент  $a$  может быть представлен в виде

$$a = [c_{11} \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{12} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{1r_1}$$

$$\underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{21} \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{22} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{2r_2}$$

$$\dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{k1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{k2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{kr_k}]_{l, \sigma, k} \quad (2.6)$$

где

$$e, c_{i1}, \dots, c_{ir_i} \in U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{e\}$$

для любых  $i = 1, 2, \dots$ . Следовательно, по теореме 1.3  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством  $U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{e\}$ .  $\square$

**Замечание 2.2.** Так как

$$U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{e\} = U(M \cup M^{-1} \cup \{1\}),$$

то множество  $U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{e\}$  в формулировке теоремы 2.1 можно заменить множеством  $U(M \cup M^{-1} \cup \{1\})$ .

### 3 Порождающее множество

$$U_j(M) \cup U_j(M^{-1}) \cup \{e\}$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 3.1.** Пусть  $A$  – полугруппа с единицей 1,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k, k \leq l$ . Тогда для любых  $b \in A, i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  существует такое  $r \in \{1, 2, \dots, k\}$ , что

$$[\underbrace{e \dots e}_{k-r} \underbrace{(1, \dots, 1, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j})}_{j-1} \underbrace{e \dots e}_{l-k+r-1}]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i}).$$

**Доказательство.** Так как  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , то множество

$$\{\sigma(j), \sigma^2(j), \dots, \sigma^k(j) = j\}$$

совпадает с множеством  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Поэтому для любого  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  существует такое  $r \in \{1, \dots, k\}$ , что  $i = \sigma^r(j)$ , откуда

$$j = \sigma^{k-r}(i). \quad (3.1)$$

Положим

$$[\underbrace{e \dots e}_{k-r} \underbrace{(1, \dots, 1, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j})}_{j-1} \underbrace{e \dots e}_{l-k+r-1}]_{l, \sigma, k} = (c_1, \dots, c_k), \quad (3.2)$$

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) = (b_1, \dots, b_k). \quad (3.3)$$

Тогда, применяя к левой части равенства (3.2) определение операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$ , получим

$$c_s = \underbrace{1 \dots 1}_{k-r} b_{\sigma^{k-r}(s)} \underbrace{1 \dots 1}_{l-k+r-1} = b_{\sigma^{k-r}(s)}, \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

то есть

$$c_s = b_{\sigma^{k-r}(s)}, s = 1, 2, \dots, k. \quad (3.4)$$

Кроме того, из того же определения следует, что среди компонент  $c_1, \dots, c_k$  одна компонента равна  $b$ , а остальные  $k - 1$  компонент равны 1.

Так как согласно (3.1),  $j = \sigma^{k-r}(i)$ , то из (3.3) и (3.4) вытекает  $c_i = b_j = b$ , а для остальных  $k - 1$  компонент с индексами  $s \neq i$  имеем  $c_s = 1$ . Следовательно, верно равенство из условия леммы.  $\square$

Следующая теорема позволяет сузить порождающее множество из теоремы 2.1.

**Теорема 3.1.** Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ ,  $k$  делит  $l - 1$ . Тогда для любого  $j = 1, 2, \dots, k$   $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством

$$U_j(M) \cup U_j(M^{-1}) \cup \{e\} = U(M \cup M^{-1} \cup \{1\}).$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  и пусть  $a$  – произвольный элемент из  $A^k$ . Так как  $\sigma^l = \sigma$ , то применима теорема 2.1. Равенство (2.6) из этой теоремы показывает, что он может быть представлен в виде

$$a = [v_1 \dots v_{m(l-1)+1}]_{l, \sigma, k} \quad (3.5)$$

для некоторого  $m \geq 2$  и некоторых

$$v_1, \dots, v_{m(l-1)+1} \in U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{e\}. \quad (3.6)$$

Так как

$$U(M) = \bigcup_{j=1}^k U_j(M), \quad U(M^{-1}) = \bigcup_{j=1}^k U_j(M^{-1}),$$

то из (3.6) следует, что для любого  $s = 1, \dots, m(l - 1) + 1$  либо  $v_s = e$ , либо  $v_s \in U_j(M) \cup U_j(M^{-1})$ , либо  $v_s \in U_i(M) \cup U_i(M^{-1})$  для некоторого  $i = 1, 2, \dots, k, i \neq j$ . В последнем случае

$$v_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i})$$

для некоторого  $b \in M \cup M^{-1}$ . Тогда по лемме 3.1

$$v_s = [e \dots e \underbrace{(1, \dots, 1)}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}, e \dots e]_{l, \sigma, k} \quad (3.7)$$

для некоторого  $r_i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Заменяя в (3.5) все  $v_s$ , отличные от  $e$  и не принадлежащие множеству  $U_j(M) \cup U_j(M^{-1})$ , их правыми частями из (3.7), получим

$$a = [u_1 \dots u_{n(l-1)+1}]_{l, \sigma, k} \quad (3.8)$$

для некоторого  $n \geq 2$ , где

$$u_1, \dots, u_{n(l-1)+1} \in U_j(M) \cup U_j(M^{-1}) \cup \{e\}.$$

Следовательно, по теореме 1.3  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством  $U_j(M \cup M^{-1} \cup \{1\})$ .  $\square$

#### 4 Порождающее множество $U_j(M) \cup \{e\}$

Для получения основного результата статьи нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 4.1.** Пусть  $A$  – полугруппа с единицей 1,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ ,  $l = rk + 1, r \geq 1, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,

$$x = (x_1, \dots, x_k),$$

$$a_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 2, \dots, l. \quad (4.1)$$

Тогда

$$[xa_2 \dots a_l]_{l, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где

$$b_j = x_j a_{k+1} a_{2k+1} \dots a_{rk+1},$$

$$b_s = x_s a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \dots a_{(r-1)k+m_s+1}$$

для любого  $s \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k\}$ ,  $m_s$  однозначно определяется из условия  $\sigma^{m_s}(s) = j$ .

*Доказательство.* Положим

$$a_i = (a_{i1} = 1, \dots, a_{i(j-1)} = 1, a_{ij} = a_i,$$

$$a_{i(j+1)} = 1, \dots, a_{ik} = 1), i = 2, \dots, l,$$

и применив определение операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$ , получим для любого  $s = 1, 2, \dots, k$

$$b_s = x_s a_{2\sigma(s)} \dots a_{k\sigma^{k-1}(s)} a_{(k+1)\sigma^k(s)}$$

$$a_{(k+2)\sigma^{k+1}(s)} \dots a_{(2k)\sigma^{2k-1}(s)} a_{(2k+1)\sigma^{2k}(s)}$$

...

$$a_{((r-1)k+2)\sigma^{(r-1)k+1}(s)} \dots a_{(rk)\sigma^{k-1}(s)} a_{(rk+1)\sigma^k(s)},$$

откуда, ввиду тождественности подстановки  $\sigma^k$ , следует

$$b_s = x_s a_{2\sigma(s)} \dots a_{k\sigma^{k-1}(s)} a_{(k+1)s}$$

$$a_{(k+2)\sigma(s)} \dots a_{(2k)\sigma^{k-1}(s)} a_{(2k+1)s}$$

...

$$a_{((r-1)k+2)\sigma(s)} \dots a_{(rk)\sigma^{k-1}(s)} a_{(rk+1)s}. \quad (4.2)$$

Так как

$$\sigma(j) \neq j, \dots, \sigma^{k-1}(j) \neq j,$$

то при  $s = j$ , ввиду (4.1), в правой части равенства (4.2) все сомножители, отличные от элементов

$$x_j, a_{(k+1)j} = a_{k+1}, a_{(2k+1)j} = a_{2k+1}, \dots, a_{(rk+1)j} = a_{rk+1},$$

равны 1. Следовательно,

$$b_j = x_j a_{k+1} a_{2k+1} \dots a_{rk+1}.$$

Если  $s \neq j$ , то есть  $s \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k\}$ , то найдется  $m_s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$  такое, что  $\sigma^{m_s}(s) = j$ . Поэтому в правой части равенства (4.2) все сомножители, отличные от элементов

$$x_s, a_{(m_s+1)\sigma^{m_s}(s)} = a_{(m_s+1)j} = a_{m_s+1},$$

$$a_{(k+m_s+1)\sigma^{m_s}(s)} = a_{(k+m_s+1)j} = a_{k+m_s+1},$$

$$a_{(2k+m_s+1)\sigma^{m_s}(s)} = a_{(2k+m_s+1)j} = a_{2k+m_s+1},$$

...

$$a_{((r-1)k+m_s+1)\sigma^{m_s}(s)} = a_{((r-1)k+m_s+1)j} = a_{(r-1)k+m_s+1},$$

равны 1. Следовательно,

$$b_s = x_s a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \dots a_{(r-1)k+m_s+1}. \quad \square$$

Полагая в лемме 4.1  $l = k + 1$  или, что то же самое,  $r = 1$ , получим

**Следствие 4.1.** Пусть  $A$  – полугруппа с единицей 1,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,

$$x = (x_1, \dots, x_k),$$

$$a_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 2, \dots, k + 1,$$

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k).$$

Тогда

$$b_j = x_j a_{k+1}, b_s = x_s a_{m_s+1}$$

для любого  $s \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k\}$ , где  $m_s$  однозначно определяется из условия  $\sigma^{m_s}(s) = j$ .

Полагая в следствии 4.1  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ k)$ , получим

**Следствие 4.2.** Пусть  $A$  – полугруппа с единицей  $1, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

$$\mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 2, \dots, k+1,$$

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k} = (b_1, \dots, b_k).$$

Тогда

$$b_1 = x_1 a_j, b_2 = x_2 a_{j-1}, \dots, b_{j-1} = x_{j-1} a_2, b_j = x_j a_{k+1},$$

$$b_{j+1} = x_{j+1} a_k, \dots, b_{k-1} = x_{k-1} a_{j+2}, b_k = x_k a_{j+1}.$$

**Доказательство.** Так как для цикла  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ k)$  имеем

$$j = \sigma^{j-1}(1) = \sigma^{j-2}(2) = \dots = \sigma(j-1) = \sigma^k(j) = \sigma^{k-1}(j+1) = \dots = \sigma^{j+1}(k-1) = \sigma^j(k),$$

то из  $\sigma^{m_s}(s) = j$  следует

$$m_1 = j-1, m_2 = j-2, \dots, m_{j-1} = 1, m_j = k,$$

$$m_{j+1} = k-1, \dots, m_{k-1} = j+1, m_k = j.$$

Подставляя правые части полученных равенств в формулы

$$b_j = x_j a_{k+1}, b_s = x_s a_{m_s+1}$$

из следствия 4.1, получим требуемые равенства из условия.  $\square$

**Замечание 4.1.** Если в следствии 4.2 положить  $j = 1$ , то есть

$$\mathbf{a}_i = (a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \in A^k, i = 2, \dots, k+1,$$

то

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где

$$b_1 = x_1 a_{k+1}, b_2 = x_2 a_k, \dots, b_{k-1} = x_{k-1} a_3, b_k = x_k a_2.$$

Если в следствии 4.2 положить  $j = k$ , то есть

$$\mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, a_i) \in A^k, i = 2, \dots, k+1,$$

то

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где

$$b_1 = x_1 a_k, b_2 = x_2 a_{k-1}, \dots, b_{k-1} = x_{k-1} a_2, b_k = x_k a_{k+1}.$$

**Лемма 4.2.** Пусть  $A$  – группа,  $b \in A$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $\mathbf{S}_k, l = rk + 1, r \geq 1$ . Тогда в  $l$ -арной группе  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  для любого  $j = 1, 2, \dots, k$  элемент

$$(\underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{k-j})$$

является косым для элемента

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}).$$

**Доказательство.** Положим

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где

$$\mathbf{x} = (\underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{k-j}),$$

$$\mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{a}_l = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}),$$

то есть

$$\begin{aligned} & [(\underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{k-j}) \\ & (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \dots (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) ]_{l, \sigma, k} = \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{l-1} = (b_1, \dots, b_k). \end{aligned}$$

Так как в обозначениях леммы 4.1

$$x_j = b^{1-r}, a_{k+1} = a_{2k+1} = \dots = a_{rk+1} = b,$$

$$x_s = b^{-r}, a_{m_s+1} = a_{k+m_s+1} =$$

$$= a_{2k+m_s+1} = \dots = a_{(r-1)k+m_s+1} = b,$$

то

$$b_j = x_j a_{k+1} a_{2k+1} \dots a_{rk+1} = b^{1-r} b^r = b,$$

$$b_s = x_s a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \dots$$

$$\dots a_{(r-1)k+m_s+1} = b^{-r} b^r = 1$$

для любого  $s \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k\}$ , где  $m_s$  однозначно определяется из условия  $\sigma^{m_s}(s) = j$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} & [(\underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{k-j}) \\ & (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \dots (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) ]_{l, \sigma, k} = \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{l-1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}). \quad \square \end{aligned}$$

Полагая в лемме 4.2  $r = 1$ , получим

**Следствие 4.3.** Пусть  $A$  – группа,  $b \in A$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $\mathbf{S}_k$ . Тогда в  $(k+1)$ -арной группе  $\langle A^k, [ ]_{k+1, \sigma, k} \rangle$  для любого  $j = 1, 2, \dots, k$  элемент

$$(\underbrace{b^{-1}, \dots, b^{-1}}_{j-1}, 1, \underbrace{b^{-1}, \dots, b^{-1}}_{k-j})$$

является косым для элемента

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}).$$

Полагая в следствии 4.3  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ k)$ , получим

**Следствие 4.4.** Пусть  $A$  – группа,  $b \in A$ . Тогда в  $(k+1)$ -арной группе  $\langle A^k, [ ]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$  для любого  $j = 1, 2, \dots, k$  элемент

$$(\underbrace{b^{-1}, \dots, b^{-1}}_{j-1}, 1, \underbrace{b^{-1}, \dots, b^{-1}}_{k-j})$$

является косым для элемента

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}).$$

Следующая лемма является следствием утверждения 1) леммы 2.1.

**Лемма 4.3.** Пусть  $A$  – группа,  $b \in A$ , подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $r$  – целое,  $r \geq 1$ . Тогда:

$$\begin{aligned} & \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j} \right) = \\ & = \left[ \left( \underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{k-j} \right) \right. \\ & \left. \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \left( \underbrace{b^r, \dots, b^r}_{j-1}, b^{r-2}, \underbrace{b^r, \dots, b^r}_{j-1} \right) \right]_{l, \sigma, k} \end{aligned}$$

для любого  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Лемма 4.4.** Пусть  $A$  – группа,  $b \in A$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ ,  $l = rk + 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,

$$\mathbf{u} = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j} \right).$$

Тогда:

1) существуют элементы

$$\mathbf{u}_{11} = \dots = \mathbf{u}_{1r}, \dots, \mathbf{u}_{(j-1)1} = \dots = \mathbf{u}_{(j-1)r},$$

$$\mathbf{u}_{j1} = \dots = \mathbf{u}_{j(r-2)},$$

$\mathbf{u}_{(j+1)1} = \dots = \mathbf{u}_{(j+1)r}, \dots, \mathbf{u}_{k1} = \dots = \mathbf{u}_{kr} \in \mathbf{U}(M)$  такие, что

$$\begin{aligned} & \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j} \right) = \\ & = \left[ \bar{\mathbf{u}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{11} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{12} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{1r} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \right. \\ & \dots \\ & \mathbf{u}_{(j-1)1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{(j-1)2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{(j-1)r} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\ & \mathbf{u}_{j1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{j2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{j(r-2)} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\ & \mathbf{u}_{(j+1)1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{(j+1)2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{(j+1)r} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\ & \dots \\ & \left. \mathbf{u}_{k1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{k2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{kr} \right]_{l, \sigma, k}; \quad (4.3) \end{aligned}$$

2) существуют  $t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_k \in \{1, 2, \dots, k\}$  такие, что

$$\begin{aligned} & \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j} \right) = \\ & = \left[ \bar{\mathbf{u}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_1-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{e} \right. \\ & \dots \\ & \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_2-2} \\ & \dots \\ & \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_{j+1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_{j+1}-2} \\ & \dots \\ & \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_{k-1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_{k-1}-2} \end{aligned}$$

$$\left[ \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_k} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_k-1} \right]_{l, \sigma, k}. \quad (4.4)$$

**Доказательство.** 1) Положив в утверждении 4) леммы 2.1

$$r_1 = \dots = r_{j-1} = r, r_j = r-2, r_{j+1} = \dots = r_k = r,$$

$$\mathbf{u}_{11} = \mathbf{u}_{12} = \dots = \mathbf{u}_{1r} = \left( b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1} \right) \in \mathbf{U}(M),$$

...

$$\mathbf{u}_{(j-1)1} = \mathbf{u}_{(j-1)2} = \dots = \mathbf{u}_{(j-1)r} = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{j-2}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j+1} \right) \in \mathbf{U}(M),$$

$$\mathbf{u}_{j1} = \mathbf{u}_{j2} = \dots = \mathbf{u}_{j(r-2)} = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j} \right) \in \mathbf{U}(M),$$

$$\mathbf{u}_{(j+1)1} = \mathbf{u}_{(j+1)2} = \dots = \mathbf{u}_{(j+1)r} = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_j, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j-1} \right) \in \mathbf{U}(M),$$

...

$$\mathbf{u}_{k1} = \mathbf{u}_{k2} = \dots = \mathbf{u}_{kr} = \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, b \right) \in \mathbf{U}(M),$$

получим

$$\begin{aligned} & \left( \underbrace{b^r, \dots, b^r}_{j-1}, b^{r-2}, \underbrace{b^r, \dots, b^r}_{j-1} \right) = \\ & = \left[ \mathbf{u}_{11} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{12} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{1r} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \right. \\ & \dots \\ & \mathbf{u}_{(j-1)1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{(j-1)2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{(j-1)r} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\ & \mathbf{u}_{j1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{j2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{j(r-2)} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\ & \mathbf{u}_{(j+1)1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{(j+1)2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{(j+1)r} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\ & \dots \\ & \left. \mathbf{u}_{k1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{k2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{kr} \right]_{l, \sigma, k}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

По лемме 4.2

$$\begin{aligned} & \left( \underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{b^{-r}, \dots, b^{-r}}_{k-j} \right) = \\ & = \overline{\left( \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j} \right)} = \bar{\mathbf{u}} \in \overline{U_j(M)} \subseteq \overline{U(M)}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Подставляя правые части равенств (4.5) и (4.6) в правую часть равенства из формулировки леммы 4.3, получим равенство (4.3).

2) Согласно лемме 3.1, для любого

$$s \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k\}$$

существуют  $t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_k \in \{1, 2, \dots, k\}$  такие, что

$$\mathbf{u}_{11} = \mathbf{u}_{12} = \dots = \mathbf{u}_{1r} = \left[ \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_1} \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j} \right) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_1-1} \right]_{l, \sigma, k}$$

...

$$\mathbf{u}_{(j-1)1} = \mathbf{u}_{(j-1)2} = \dots = \mathbf{u}_{(j-1)r} =$$



$$\begin{aligned}
 &= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_{j-1}} \underbrace{\mathbf{e}(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}_{j-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-j} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_{j-1}-1}]_{l, \sigma, k}, \\
 &\quad \mathbf{u}^{(j+1)1} = \mathbf{u}^{(j+1)2} = \dots = \mathbf{u}^{(j+1)r} = \\
 &= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_{j+1}} \underbrace{\mathbf{e}(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}_{j-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-j} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_{j+1}-1}]_{l, \sigma, k}, \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \mathbf{u}_{k1} = \mathbf{u}_{k2} = \dots = \mathbf{u}_{kr} = \\
 &= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_k} \underbrace{\mathbf{e}(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}_{j-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-j} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_k-1}]_{l, \sigma, k}.
 \end{aligned}$$

С учётом записанных равенств, а также нейтральности в  $l$ -арной группе  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  последовательности  $\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1}$ , равенство (4.3) принимает вид (4.4).  $\square$

**Теорема 4.1.** Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ ,  $l = rk + 1, r \geq 1$ . Тогда для любого  $j = 1, 2, \dots, k$   $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством  $U_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ .

*Доказательство.* Зафиксируем  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  и пусть  $\mathbf{a}$  – произвольный элемент из  $A^k$ . Равенство (3.8) из теоремы 3.1 показывает, что он может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{n(l-1)+1}]_{l, \sigma, k} \quad (4.7)$$

для некоторого  $n \geq 2$  и для некоторых

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n(l-1)+1} \in U_j(M) \cup U_j(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}. \quad (4.8)$$

Из (4.8) следует, что для любого  $s = 1, \dots, n(l-1)+1$ , либо  $\mathbf{u}_s = \mathbf{e}$ , либо  $\mathbf{u}_s \in U_j(M) \cup U_j(M^{-1})$ , либо  $\mathbf{u}_s \in U_i(M) \cup U_i(M^{-1})$  для некоторого  $i = 1, 2, \dots, k, i \neq j$ . Таким образом, необходимо рассмотреть пять возможных случаев: 1)  $\mathbf{u}_s = \mathbf{e}$ ; 2)  $\mathbf{u}_s \in U_j(M)$ ; 3)  $\mathbf{u}_s \in U_j(M^{-1})$ ; 4)  $\mathbf{u}_s \in U_i(M), i \neq j$ ; 5)  $\mathbf{u}_s \in U_i(M^{-1}), i \neq j$ .

В случае 3) имеем

$$\mathbf{u}_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \quad (4.9)$$

для некоторого  $b \in M$ . Тогда согласно утверждению 2) леммы 4.4, равенство (4.9) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_s &= [\underbrace{\bar{\mathbf{u}} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_1-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_1-2}]_{l, \sigma, k} \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_2-2} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_{j-1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_{j-1}-2} \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_{j+1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_{j+1}-2} \\
 &\quad \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_{k-1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_{k-1}-2} \\
 &\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_k} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_k-1}
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

для некоторых  $t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_k \in \{1, 2, \dots, k\}$ , где

$$\mathbf{u} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in U_j(M).$$

В случае 4) имеем

$$\mathbf{u}_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i})$$

для некоторого  $b \in M$ . Тогда по лемме 3.1

$$\mathbf{u}_s = [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-r_i} \underbrace{\mathbf{e}(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}_{j-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-j} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+r_i-1}]_{l, \sigma, k} \quad (4.11)$$

для некоторого  $r_i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

В случае 5) имеем

$$\mathbf{u}_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, b^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i})$$

для некоторого  $b \in M$ . Тогда по лемме 3.1

$$\mathbf{u}_s = [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-r_i} \underbrace{\mathbf{e}(1, \dots, 1, b^{-1}, 1, \dots, 1)}_{j-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-j} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+r_i-1}]_{l, \sigma, k}$$

для некоторого  $r_i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Применяя к правой части записанного равенства утверждение 2) леммы 4.4, получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_s &= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-r_i} \underbrace{\mathbf{e}(1, \dots, 1, b^{-1}, 1, \dots, 1)}_{j-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-j} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+r_i-1}]_{l, \sigma, k} = \\
 &= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \bar{\mathbf{u}} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-r_i} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_1-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_1-2} \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_2-2} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_{j-1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_{j-1}-2} \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_{j+1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_{j+1}-2} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \dots \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{u} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-t_k} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_k-1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+t_k-1}]_{l, \sigma, k} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

для некоторых  $t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_k \in \{1, 2, \dots, k\}$ , где

$$\mathbf{u} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in U_j(M).$$

Заменив в (4.7) все  $u_s$ , отличные от  $e$  и не принадлежащие  $U_j(M)$ , их правыми частями из (4.10), (4.11) и (4.12), получим

$$a = [w_1 \dots w_{v(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}$$

для некоторого  $v \geq 2$ , где

$$w_1, \dots, w_{v(l-1)+1} \in U_j(M) \cup \overline{U_j(M)} \cup \{e\}.$$

Следовательно, по теореме 1.4  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством  $U_j(M) \cup \{e\}$ .  $\square$

### 5 Следствия из теоремы 4.1

**Замечание 5.1.** Ясно, что если в теореме 4.1 порождающее множеством  $M$  группы  $A$  бесконечно, то его мощность совпадает с мощностью порождающего множества  $U_j(M) \cup \{e\}$   $l$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ . Для конечного порождающего множества  $M$  имеет место

**Следствие 5.1.** Если  $A$  –  $n$ -порожденная группа,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ ,  $k$  делит  $l-1$ , то  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $(n+1)$ -порожденной.

Следующее следствие вытекает из теоремы 4.1 при  $l = k+1$ .

**Следствие 5.2.** Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ . Тогда  $(k+1)$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{k+1, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством  $U_j(M) \cup \{e\}$  для любого  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Полагая в теореме 4.1 и следствии 5.2  $\sigma = (1\ 2 \dots k)$ , получим ещё два следствия.

**Следствие 5.3.** Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ ,  $k$  делит  $l-1$ . Тогда  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, (1\ 2 \dots k), k} \rangle$  порождается множеством  $U_j(M) \cup \{e\}$  для любого  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Следствие 5.4.** Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ . Тогда  $(k+1)$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{k+1, (1\ 2 \dots k), k} \rangle$  порождается множеством  $U_j(M) \cup \{e\}$  для любого  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Полагая в следствии 5.4  $k = 2$ , получим

**Следствие 5.5.** Если группа  $A$  порождается множеством  $M$ , то тернарная группа  $\langle A^2, [ ]_{3, (1\ 2), 2} \rangle$  порождается любым из множеств

$$U_1(M) \cup \{(1, 1)\}, U_2(M) \cup \{(1, 1)\}.$$

Если в теореме 4.1 и следствиях из неё в качестве группы  $A$  взять циклическую группу, то получим соответствующие следствия.

**Следствие 5.6.** Пусть циклическая группа  $A$  порождается элементом  $a$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ ,  $k$  делит  $l-1$ . Тогда  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается двухэлементным множеством

$$\{(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}), (\underbrace{1, \dots, 1}_k)\}. \quad (5.1)$$

для любого  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Следствие 5.7.** Пусть циклическая группа  $A$  порождается элементом  $a$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ . Тогда  $(k+1)$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{k+1, \sigma, k} \rangle$  порождается двухэлементным множеством (5.1) для любого  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Следствие 5.8.** Пусть циклическая группа  $A$  порождается элементом  $a$ ,  $k$  делит  $l-1$ . Тогда  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, (1\ 2 \dots k), k} \rangle$  порождается двухэлементным множеством (5.1) для любого  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Следствие 5.9.** Пусть циклическая группа  $A$  порождается элементом  $a$ . Тогда  $(k+1)$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{k+1, (1\ 2 \dots k), k} \rangle$  порождается двухэлементным множеством (5.1) для любого  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Следствие 5.10.** Пусть циклическая группа  $A$  порождается элементом  $a$ . Тогда тернарная группа  $\langle A^2, [ ]_{3, (1\ 2), 2} \rangle$  порождается любым из множеств

$$\{(a, 1), (1, 1)\}, \{(1, a), (1, 1)\}.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
2. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Dornte, W. Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
4. Русаков, С.А. Алгебраические  $n$ -арные системы / С.А. Русаков. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. Белоусов, В.Д.  $n$ -Арные квазигруппы / В.Д. Белоусов. – Кишинев: Штиинца, 1972. – 228 с.
6. Ušan, J.  $n$ -Groups in the light of the neutral operations / J. Ušan // Matematika Moravica. – 2003. – Special Vol. – 162 p.
7. Кулаженко, Ю.И. Полиадические операции и их приложения / Ю.И. Кулаженко. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2014. – 311 с.
8. Щучкин, Н.А. Введение в теорию  $n$ -групп / Н.А. Щучкин. – Волгоград: Принт, 2019. – 236 с.
9. Гальмак, А.М. Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

Поступила в редакцию 06.04.2021.

УДК 517.9 + 537.86

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА КОЛЕБАНИЯ В СЛОЖНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, В.В. Орлов

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF RANDOM DISTURBANCES ON OSCILLATIONS IN COMPLEX QASILINEAR SYSTEMS WITH DELAY

S.P. Zhogal, S.I. Zhogal, V.V. Orlov

*Francisk Skorina Gomel State University*

Исследованы вопросы воздействия случайных сил на колебательные процессы в системах, описываемых дифференциальными уравнениями, содержащих как звенья с сосредоточенными параметрами, так и звенья с распределенными параметрами и запаздыванием, связанные между собой запаздывающими связями. Описывается поэтапное применение метода усреднения нелинейной механики и метода уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова к исследованию таких систем.

**Ключевые слова:** стохастические дифференциальные уравнения, запаздывание, стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, звенья с сосредоточенными параметрами, звенья с распределенными параметрами, метод усреднения нелинейной механики, метод уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова.

The questions of the influence of random forces on oscillatory processes in systems described by differential equations containing both links with lumped parameters and links with distributed parameters and delay, connected by delay connections, are investigated. The step-by-step application of the averaging method of nonlinear mechanics and the method of Fokker – Planck – Kolmogorov equations to the study of such systems is described.

**Keywords:** stochastic differential equations, delay, stochastic partial differential equations, units with lumped parameters, units with distributed parameters, averaging method of nonlinear mechanics, method of Fokker – Planck – Kolmogorov equations.

### Введение

В современной науке и технике, особенно в таких отраслях, как теория управления, радиофизика, радиотехника и электроника необходимо исследовать динамические системы с учетом случайных возмущений. Исследование влияния случайных сил, шумов, других случайных факторов на колебательные процессы в различных сложных технических системах, содержащих как звенья с сосредоточенными параметрами, так и звенья с распределенными параметрами и запаздыванием, связанные между собой запаздывающими связями, является важной задачей и имеет большое теоретическое и практическое значение [1]–[2]. В работах [3]–[4] доказаны теоремы о существовании и единственности, непрерывной зависимости от параметра и начальных условий решений сложных стохастических дифференциально-функциональных систем. Результаты работ [3]–[4] обосновывают применимость к подобным системам метода усреднения нелинейной механики в сочетании с методом уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК). Рассмотрим поэтапное применение методов усреднения нелинейной механики и уравнений ФПК для данного класса динамических систем.

### 1 Постановка задачи

Рассмотрим возмущенную колебательную систему, описываемую квазилинейными стохастическими дифференциально-функциональными уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u(t, \bar{x})}{\partial t^2} = \mathcal{L}_{\bar{x}}^{(2m)}[\bar{x}, u(t, \bar{x})] + \varepsilon f \left[ v_s t, \bar{x}, u(t - \Delta_r, \bar{x}), y_k(t - \Delta_r), \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{x})}{\partial t}, \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{x})}{\partial x_i}, \frac{dy_k(t - \Delta_r)}{dt} \right] + \quad (1.1)$$

$$+ \sqrt{\varepsilon} g \left[ v_s t, \bar{x}, u(t - \Delta_r, \bar{x}), y_k(t - \Delta_r), \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{x})}{\partial t}, \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{x})}{\partial x_i}, \frac{dy_k(t - \Delta_r)}{dt} \right] dw_0(t);$$

$$\frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} + \omega_k^2 y_k(t) = \varepsilon \tilde{\Phi}_k \left[ v_s t, u(t - \Delta_r, \bar{\zeta}), y_p(t - \Delta_r), \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{\zeta})}{\partial t}, \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{\zeta})}{\partial x_i}, \frac{dy_p(t - \Delta_r)}{dt} \right] + \quad (1.2)$$

$$+ \sqrt{\varepsilon} \tilde{h}_k \left[ v_s t, u(t - \Delta_r, \bar{\zeta}), y_p(t - \Delta_r), \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{\zeta})}{\partial t}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{\zeta})}{\partial x_l}, \frac{dy_p(t - \Delta_r)}{dt} \right] \frac{dw_k(t)}{dt}$$

$$(k, p = \overline{1, K}, r = \overline{0, R}, l = \overline{1, n}, s = \overline{1, M}).$$

с краевым и начальными условиями

$$\mathcal{L}_x^{(q, \beta)} [u(t, \bar{x})]_{x \in S} = 0, \quad q = \overline{1, m}, \quad (1.3)$$

$$u(t, \bar{x})|_{t \in E_0} = \varphi_0(t, \bar{x}), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u(t, \bar{x})}{\partial t} \Big|_{t \in E_0} = \varphi_1(t, \bar{x}), \quad (1.5)$$

$$y_k(t)|_{t \in E_0} = h_{k0}(t), \quad k = \overline{1, K}, \quad (1.6)$$

$$\frac{dy_k(t)}{dt} \Big|_{t \in E_0} = h_{k1}(t), \quad k = \overline{1, K}, \quad (1.7)$$

где  $t \in E_0 \cup [0, T] \subset R$ ,  $T < \infty$ ,  $E_0$  – начальное множество значений времени  $t$  вида  $[-\Delta_{max}, 0]$ , где  $\Delta_{max} = \max\{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_R\}$ ,  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  –  $n$ -мерный вектор пространственных координат, принадлежащий ограниченной области  $\Gamma \cup S$ ,  $\mathcal{L}_x^{(2m)}$  – линейный дифференциальный оператор эллиптического типа порядка  $2m$  с дифференцированием по пространственным координатам, имеющий постоянные или зависящие от  $\bar{x}$  коэффициенты,  $f, g, \tilde{\varphi}_k, \tilde{h}_k$ ,  $k = \overline{1, K}$  – нелинейные функционалы, периодические с периодом  $2\pi$  по аргументам  $v_s t$  и удовлетворяющие определенным условиям гладкости,  $w_k(t)$ ,  $k = \overline{0, K}$  – стохастически независимые винеровские процессы единичной интенсивности,  $\omega_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $v_s$ ,  $s = \overline{1, M}$  – положительные постоянные,  $\Delta_r$ ,  $r = \overline{0, R}$  – неотрицательные постоянные ( $\Delta_0 = 0$ ),  $\bar{\zeta} \in \Gamma$  – некоторое фиксированное значение  $\bar{x}$ ,  $\mathcal{L}_x^{(q, \beta)}$  – линейные дифференциальные операторы порядка  $\beta \leq 2m - 1$ ,  $h_{k0}(t)$ ,  $h_{k1}(t)$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $\varphi_0(t, \bar{x})$ ,  $\varphi_1(t, \bar{x})$  – функции, удовлетворяющие определенным условиям гладкости,  $\varepsilon > 0$  – малый параметр.

## 2 Исследование системы методами усреднения нелинейной механики и марковских диффузионных процессов

Наряду с системой (1.1)–(1.7) рассмотрим однородную краевую задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^{(2m)} [\bar{x}, X(\bar{x})] + \lambda X(\bar{x}) &= 0, \\ \mathcal{L}_x^{(q, \beta)} [X(\bar{x})]_{x \in S} &= 0, \quad q = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть задача (2.1) имеет положительные собственные значения  $\lambda_s = \Omega_s^2$ ,  $s = \overline{1, 2, \dots}$ , которые соответствуют собственным функциям  $X_s(\bar{x})$ .

Будем искать решение возмущенной задачи (1.1) в виде ряда

$$u(t, \bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) X_n(\bar{x}), \quad (2.2)$$

где  $z_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – функции, подлежащие определению. Подставляя (2.2) в уравнения (1.1), (1.2) и начальные условия (1.4), (1.5), умножая (1.1), (1.4), (1.5) последовательно на  $X_n(\bar{x})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и интегрируя по области  $\Gamma$ , получаем счетную систему обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_n(t)}{dt^2} + \Omega_n^2 z_n(t) &= \varepsilon f_n[v_s t, z_p(t - \Delta_r), y_k(t - \Delta_r), \\ &\dot{z}_p(t - \Delta_r), \dot{y}_k(t - \Delta_r)] + \sqrt{\varepsilon} f_n[v_s t, z_p(t - \Delta_r), \\ &y_k(t - \Delta_r), \dot{z}_p(t - \Delta_r), \dot{y}_k(t - \Delta_r)] \frac{dw_0(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} + \omega_k^2 y_k(t) &= \varepsilon \tilde{\varphi}_k[v_s t, z_p(t - \Delta_r), y_l(t - \Delta_r), \\ &\dot{z}_p(t - \Delta_r), \dot{y}_l(t - \Delta_r)] + \sqrt{\varepsilon} \tilde{h}_k[v_s t, z_p(t - \Delta_r), \\ &y_l(t - \Delta_r), \dot{z}_p(t - \Delta_r), \dot{y}_l(t - \Delta_r)] \frac{dw_k(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$(n, p = \overline{1, 2, \dots}; k, l = \overline{1, K}; r = \overline{0, R}; s = \overline{1, M})$$

с начальными условиями:

$$z_n(t)|_{t \in E_0} = \varphi_n^0(t), \quad \frac{dz_n(t)}{dt} \Big|_{t \in E_0} = \varphi_n^1(t), \quad n = \overline{1, 2, \dots}, \quad (2.5)$$

$$y_k(t)|_{t \in E_0} = h_{k0}(t), \quad \frac{dy_k(t)}{dt} \Big|_{t \in E_0} = h_{k1}(t), \quad k = \overline{1, K}. \quad (2.6)$$

Пусть выполняются условия резонанса

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N p_n^{(i, \sigma)} \Omega_n + \sum_{k=1}^K q_k^{(i, \sigma)} \omega_k + \sum_{\mu=1}^M r_{\mu}^{(i, \sigma)} v_{\mu} &\approx \Omega_{\sigma} \\ (\sigma = \overline{1, N}; i = \overline{1, J_{\sigma}}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N p_n^{(i, l)} \Omega_n + \sum_{k=1}^K q_k^{(i, l)} \omega_k + \sum_{\mu=1}^M r_{\mu}^{(i, l)} v_{\mu} &\approx \omega_l \\ (l = \overline{1, K}; i = \overline{1, J_l}), \end{aligned}$$

где  $p_n^{(i, \sigma)}, q_k^{(i, \sigma)}, r_{\mu}^{(i, \sigma)}, p_n^{(i, l)}, q_k^{(i, l)}, r_{\mu}^{(i, l)}$  – небольшие целые числа, а резонансов другого вида нет. Тогда  $z_n(t)$  при  $n > N$  будут ничтожно малы и ими можно пренебречь, сводя бесконечную систему стохастических дифференциальных уравнений (2.3)–(2.6) к конечной, состоящей из  $N + K$  уравнений.

Приведем систему (2.3)–(2.6) к стандартной по Н.Н. Боголюбову форме. Для этого введем новые медленно изменяющиеся комплексно сопряженные переменные  $x_n(t)$  и  $x_{-n}(t) = \overline{x_n(t)}$ ,  $\tilde{y}_k(t)$  и  $\tilde{y}_{-k}(t) = \overline{\tilde{y}_k(t)}$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} z_n(t) &= x_n(t) e^{i\Omega_n t} + x_{-n}(t) e^{-i\Omega_n t}, \\ \dot{z}_n(t) &= i\Omega_n [x_n(t) e^{i\Omega_n t} - x_{-n}(t) e^{-i\Omega_n t}], \quad n = \overline{1, N}, \\ y_k(t) &= \tilde{y}_k(t) e^{i\omega_k t} + \tilde{y}_{-k}(t) e^{-i\omega_k t}, \\ \dot{y}_k(t) &= i\omega_k [\tilde{y}_k(t) e^{i\omega_k t} - \tilde{y}_{-k}(t) e^{-i\omega_k t}], \quad k = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Исходя из (2.8), несложно получить обратное преобразование вида:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \frac{1}{2} \left( z_n(t) + \frac{\dot{z}_n(t)}{i\Omega_n} \right) e^{-i\Omega_n t}, \\ x_{-n}(t) &= \frac{1}{2} \left( z_n(t) - \frac{\dot{z}_n(t)}{i\Omega_n} \right) e^{i\Omega_n t}, \quad n = \overline{1, N}, \\ \tilde{y}_k(t) &= \frac{1}{2} \left( y_k(t) + \frac{\dot{y}_k(t)}{i\omega_k} \right) e^{-i\omega_k t}, \quad (2.9) \\ \tilde{y}_{-k}(t) &= \frac{1}{2} \left( y_k(t) - \frac{\dot{y}_k(t)}{i\omega_k} \right) e^{i\omega_k t}, \quad k = \overline{1, K}. \end{aligned}$$

Применяя к выражениям (2.9) с учетом уравнений (2.3), (2.4) формулу Ито [1] дифференцирования сложной случайной функции, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_n(t)}{dt} &= \varepsilon F_n^1[v_s t, x_p(t - \Delta_r), \tilde{y}_l(t - \Delta_r), x_{-p}(t - \Delta_r), \\ &\tilde{y}_{-l}(t - \Delta_r), \Omega_p t, \omega_l t, \Delta_r] + \sqrt{\varepsilon} F_n^2[v_s t, x_p(t - \Delta_r), \\ &\tilde{y}_{-l}(t - \Delta_r), \Omega_p t, \omega_l t, \Delta_r] \frac{dw_0(t)}{dt}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}_k(t)}{dt} &= \varepsilon Y_k^1[v_s t, x_p(t - \Delta_r), \tilde{y}_l(t - \Delta_r), x_{-p}(t - \Delta_r), \\ &\tilde{y}_{-l}(t - \Delta_r), \Omega_p t, \omega_l t, \Delta_r] + \sqrt{\varepsilon} Y_k^2[v_s t, x_p(t - \Delta_r), \\ &\tilde{y}_l(t - \Delta_r), x_{-p}(t - \Delta_r), \tilde{y}_{-l}(t - \Delta_r), \Omega_p t, \omega_l t, \Delta_r] \frac{dw_k(t)}{dt} \\ &(n = \overline{\pm 1, \pm N}, k = \overline{\pm 1, \pm K}, s = \overline{1, M}, \\ &p = \overline{1, N}, l = \overline{1, K}, r = \overline{0, R}) \end{aligned}$$

с начальными условиями вида:

$$\begin{aligned} x_n(t)|_{t \in E_0} &= \frac{i\Omega_n \varphi_n^0(t) + \varphi_n^1(t)}{2i\Omega_n}, \quad n = \overline{\pm 1, \pm N} \\ \tilde{y}_k(t)|_{t \in E_0} &= \frac{i\omega_k h_{k0}(t) + h_{k1}(t)}{2i\omega_k}, \quad k = \overline{\pm 1, \pm K}, \quad (2.11) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} w_{-k}(t) &= w_k(t), \quad -\omega_{-k} = \omega_k, \quad -\Omega_{-n} = \Omega_n, \\ F_{-n}^1 &= F_n^1, \quad F_{-n}^2 = F_n^2, \quad Y_{-k}^1 = Y_k^1, \quad Y_{-k}^2 = Y_k^2, \\ \varphi_{-n}^0 &= \varphi_n^0, \quad \varphi_{-n}^1 = \varphi_n^1, \quad h_{-k0} = h_{k0}, \quad h_{-k1} = h_{k1}, \\ \left\{ \begin{matrix} F_n^1 \\ F_n^2 \end{matrix} \right\} &[v_s t, x_p(t - \Delta_r), \tilde{y}_l(t - \Delta_r), x_{-p}(t - \Delta_r), \\ &\tilde{y}_{-l}(t - \Delta_r), \Omega_p t, \omega_l t, \Delta_r] = \frac{e^{-i\Omega_n t}}{2i\Omega_n} \left\{ \begin{matrix} f_n \\ g_n \end{matrix} \right\} [v_s t, \\ &x_p(t - \Delta_r) e^{i\Omega_p(t - \Delta_r)} + x_{-p}(t - \Delta_r) e^{-i\Omega_p(t - \Delta_r)}, \dots, \\ &i\omega_l (\tilde{y}_l(t - \Delta_r) e^{i\omega_l(t - \Delta_r)} - \tilde{y}_{-l}(t - \Delta_r) e^{-i\omega_l(t - \Delta_r)})], \\ \left\{ \begin{matrix} Y_k^1 \\ Y_k^2 \end{matrix} \right\} &[v_s t, x_p(t - \Delta_r), \tilde{y}_l(t - \Delta_r), x_{-p}(t - \Delta_r), \\ &\tilde{y}_{-l}(t - \Delta_r), \Omega_p t, \omega_l t, \Delta_r] = \frac{e^{-i\omega_k t}}{2i\omega_k} \left\{ \begin{matrix} \tilde{\varphi}_k \\ \tilde{h}_k \end{matrix} \right\} [v_s t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_p(t - \Delta_r) e^{i\Omega_p(t - \Delta_r)} + x_{-p}(t - \Delta_r) e^{-i\Omega_p(t - \Delta_r)}, \dots, \\ i\omega_l (\tilde{y}_l(t - \Delta_r) e^{i\omega_l(t - \Delta_r)} - \tilde{y}_{-l}(t - \Delta_r) e^{-i\omega_l(t - \Delta_r)})]. \end{aligned}$$

Мы получили систему стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием в стандартной форме. Отметим, что система (2.3), (2.4) сводится к системе в стандартной форме относительно медленно меняющихся функций  $a_k(t)$ ,  $\alpha_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $b_n(t)$ ,  $\beta_n(t)$ ,  $n = \overline{1, N}$ , если вместо (2.8) применить следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} y_k(t) &= a_k(t) \cos[\omega_k t + \alpha_k(t)], \\ \dot{y}_k(t) &= -\omega_k a_k(t) \sin[\omega_k t + \alpha_k(t)], \quad k = \overline{1, K}, \\ z_n(t) &= b_n(t) \cos[\Omega_n t + \beta_n(t)], \quad (2.12) \\ \dot{z}_n(t) &= -\Omega_n b_n(t) \sin[\Omega_n t + \beta_n(t)], \quad n = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

которой соответствует обратное преобразование вида

$$\begin{aligned} a_k(t) &= \left[ y_k^2(t) + \frac{1}{\omega_k^2} \dot{y}_k^2(t) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha_k(t) &= -\omega_k t - \arctg \frac{\dot{y}_k(t)}{\omega_k y_k(t)}, \quad k = \overline{1, K}, \\ b_n(t) &= \left[ z_n^2(t) + \frac{1}{\Omega_n^2} \dot{z}_n^2(t) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.13) \\ \beta_n(t) &= -\Omega_n t - \arctg \frac{\dot{z}_n(t)}{\Omega_n z_n(t)}, \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

К системе (2.10) в силу теоремы о непрерывной зависимости от параметров и запаздываний [4] можно применить принцип усреднения на достаточно большом временном интервале.

Усреднение проводится в два этапа. Вначале усредняем нефлуктуационные члены, выделяя при этом переменные вида

$$\begin{aligned} \zeta_{(i,\sigma)}(t) &= \sum_{n=1}^N p_n^{(i,\sigma)} \Omega_n t + \sum_{k=1}^K q_k^{(i,\sigma)} \omega_k t + \sum_{\mu=1}^M r_\mu^{(i,\sigma)} v_\mu t - \Omega_\sigma t, \\ \zeta_{(i,l)}(t) &= \sum_{n=1}^N p_n^{(i,l)} \Omega_n t + \sum_{k=1}^K q_k^{(i,l)} \omega_k t + \sum_{\mu=1}^M r_\mu^{(i,l)} v_\mu t - \omega_l t, \end{aligned}$$

которые в силу условий резонанса (2.7) будут медленными и сохранятся в усредненных уравнениях. Затем составляем соответствующее уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК), в котором также проводим усреднение, но уже во флуктуационных членах.

### 3 О решении уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова для исследуемых систем

Решая полученное полностью усредненное уравнение ФПК при соответствующих краевых и начальных условиях, можно определить плотность распределения  $p(t, x_p, \tilde{y}_l, x_{-p}, \tilde{y}_{-l})$  и затем найти основные вероятностные характеристики случайных функций  $x_p(t)$ ,  $\tilde{y}_l(t)$ . Однако аналитическое решение уравнения ФПК для сложных

нелинейных систем является довольно трудной задачей [5], разрешимой лишь для некоторых частных случаев системы (1.1), (1.2), в большинстве же случаев для его решения требуется применение численных методов.

Если исходная система (1.1), (1.2) содержит только одно уравнение с сосредоточенными параметрами относительно  $y_1(t)$ , на систему действует внешняя сила, периодическая с периодом  $2\pi$  по  $\nu_1 t$ , и других внешних воздействий нет, а начальные условия (1.4), (1.5) имеют вид

$$u(t, \bar{x})|_{t \in E_0} = p_0 X_{\bar{s}}(\bar{x}) + \varepsilon \alpha(t, \bar{x}),$$

$$\frac{\partial u(t, \bar{x})}{\partial t} |_{t \in E_0} = q_0 X_{\bar{s}}(\bar{x}) + \varepsilon \beta(t, \bar{x})$$

и выполняются условия резонанса

$$\Omega_{\bar{s}} \approx \omega_1 \approx \nu_1,$$

то при достаточно малом положительном  $\varepsilon$  в системе будут наблюдаться колебания, близкие к одночастотным.

Применяя при сделанных предположениях к системе (2.3), (2.4), в которой  $k, l, s = 1, n, p = \bar{s}$ , преобразования (2.12), (2.13) и формулу дифференцирования Ито, получим систему из трех стохастических дифференциальных уравнений в стандартной форме относительно случайных функций  $a_1(t), b_{\bar{s}}(t), \eta_{1\bar{s}}(t) = \alpha_1(t) - \beta_{\bar{s}}(t)$ , в которой, как и в соответствующем уравнении ФПК, проведем усреднение.

К полученному полностью усредненному трехмерному уравнению ФПК применим метод разложения стационарного решения по целым степеням амплитуд колебаний, являющийся обобщением метода, предложенного Нгуеном Донг Анем [6] для решения двумерного стационарного уравнения ФПК, соответствующего квазилинейной динамической системе с одной степенью свободы.

Стационарное решение трехмерного уравнения ФПК при сделанных предположениях будет удовлетворять выражению

$$\begin{aligned} \Phi(a_1, b_{\bar{s}}, \eta_{1\bar{s}}) = & \ln C + \ln a_1^{\tau_1} + \ln b_{\bar{s}}^{\tau_2} + \\ & + \sum_{l, j=-1}^{\infty} \mu_{lj}(\eta_{1\bar{s}}) a_1^l b_{\bar{s}}^j, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\Phi(a_1, b_{\bar{s}}, \eta_{1\bar{s}}) = \ln p(a_1, b_{\bar{s}}, \eta_{1\bar{s}})$ ,  $C, \tau_1, \tau_2$  – постоянные,  $\mu_{lj}(\eta_{1\bar{s}})$  – неизвестные коэффициенты разложения, подлежащие определению. Подставляя ряд (3.1) в уравнение для логарифма плотности вероятностей  $p(a_1, b_{\bar{s}}, \eta_{1\bar{s}})$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $a_1$  и  $b_{\bar{s}}$ , получаем систему разделяющихся дифференциальных уравнений, из которой последовательно находим неизвестные  $\mu_{lj}(\eta_{1\bar{s}})$ .

Следует отметить, что данный метод требует довольно трудоёмких расчетов, которые целесообразно проводить с помощью современных пакетов компьютерной математики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рубаник, В.П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. – Минск: Изд-во «Университетское», 1985. – 143 с.
2. Иващицкая, О.В. Взаимодействие генератора с объемным резонатором при наличии нелинейных связей с запаздыванием / О.В. Иващицкая, В.П. Рубаник // Радиотехника и электроника. – 1987. – Т. 32, № 2. – С. 371–377.
3. Жогаль, С.П. О существовании и единственности решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–54.
4. Жогаль, С.П. О непрерывной в среднем квадратическом зависимости от начальных данных решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 2 (39). – С. 66–69.
5. Risken, H. The Fokker – Planck equation. Methods of solution and applications / H. Risken. – Berlin: Springer, 1984. – 454 p.
6. Митропольский, Ю.А. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка / Ю.А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. – Киев: Наукова думка, 1992. – 344 с.

Поступила в редакцию 26.04.2021.



УДК 517.538.52+517.538.53

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Н.В. Рябченко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

## TRIGONOMETRIC PADÉ APPROXIMANTS OF SPECIAL FUNCTIONS

N.V. Ryabchenko

Francisk Skorina Gomel State University

Для функций  $H_\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx / (\gamma)_k$ , где  $(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)$  и их тригонометрических аппроксимаций Паде  $\pi'_{n,m}(x; H_\gamma)$  найдена асимптотика убывания разности  $H_\gamma(x) - \pi'_{n,m}(x; H_\gamma)$  в случае, когда  $0 \leq m \leq m(n)$ ,  $m(n) = o(n)$  и  $n \rightarrow \infty$ . При сделанных предположениях установлено, что тригонометрические аппроксимации Паде  $\pi'_{n,m}(x; H_\gamma)$  приближают функцию  $H_\gamma$  равномерно на  $\mathbb{R}$  со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

**Ключевые слова:** аппроксимации Паде, асимптотические равенства, наилучшие равномерные приближения, тригонометрические аппроксимации.

For the functions  $H_\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx / (\gamma)_k$ , where  $(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)$  and their trigonometric Padé approximations  $\pi'_{n,m}(x; H_\gamma)$  the asymptotics of decreasing difference  $H_\gamma(x) - \pi'_{n,m}(x; H_\gamma)$  in the case is found, where  $0 \leq m \leq m(n)$ ,  $m(n) = o(n)$ , as  $n \rightarrow \infty$ . Particularly, we determine that, under the same assumption, the trigonometric Padé approximations  $\pi'_{n,m}(x; H_\gamma)$  converge to  $H_\gamma$  uniformly on the  $\mathbb{R}$  with the asymptotically best rate.

**Keywords:** Padé approximations, asymptotic equality, best uniform approximation, trigonometric Padé approximations, rational approximations.

### Введение

Пусть  $f \in C_{2\pi}$ , т. е. является вещественной  $2\pi$ -периодической функцией и представима в каждой точке прямой рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (0.1)$$

где коэффициенты Фурье  $a_k$  и  $b_k$  – действительные числа.

Обозначим через  $\mathcal{R}'_{n,m}$  класс всех рациональных тригонометрических функций

$$r'(x) = p'_n(x) / q'_m(x),$$

у которых  $p'_n(x)$ ,  $q'_m(x)$  являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами и  $\deg p'_n \leq n$ ,  $\deg q'_m \leq m$ . Определим наилучшие равномерные рациональные тригонометрические приближения  $f$  в классе  $\mathcal{R}'_{n,m}$ , полагая

$$R'_{n,m}(f) := \inf \{ \|f - r'\| : r' \in \mathcal{R}'_{n,m} \},$$

$$a \|g\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

Тригонометрической аппроксимацией Паде функции  $f$ , заданной рядом (0.1), назовем такую

рациональную дробь  $\pi'_{n,m}(x)$  из класса  $\mathcal{R}'_{n,m}$ , которая непрерывна на  $\mathbb{R}$ , представима своим рядом Фурье и имеет максимально возможный (по числу свободных параметров) порядок касания к ряду (0.1), т. е.

$$f(x) - \pi'_{n,m}(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx), \quad (0.2)$$

где  $\tilde{a}_k$  и  $\tilde{b}_k$  – действительные числа. Отметим, что в случае произвольного ряда Фурье (0.1) тригонометрические аппроксимации Паде могут не существовать [1].

Предполагая, что параметр  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ ,  $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$ , рассмотрим семейство функций  $\mathcal{H}' = \{H_\gamma\}$ , представимых в виде

$$H_\gamma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{(\gamma)_k}.$$

Основной целью данной работы является доказательство следующих теорем.

**Теорема 0.1.** Пусть  $H_\gamma \in \mathcal{H}'$ . Тогда для любых целых неотрицательных  $n$  и  $m$  тригонометрические аппроксимации Паде  $\pi'_{n,m}(x; H_\gamma)$

существуют и равномерно по всем  $x \in \mathbb{R}$  и  $m$ ,  $n \geq m-1$ , при  $n \rightarrow \infty$

$$H_\gamma(x) - \pi_{n,m}^t(x; H_\gamma) = \frac{(-1)^{m+1} m! (\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} \operatorname{Re} \left\{ i e^{2mz/(n+m)} z^{n+m+1} (1 + o(1)) \right\}. \quad (0.3)$$

**Теорема 0.2.** Пусть  $H_\gamma \in \mathcal{H}^t$ . Тогда если  $m(n) = o(n)$ , то равномерно по всем  $m$ ,  $0 \leq m \leq m(n)$ , при  $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}^t(H_\gamma) \sim \|H_\gamma - \pi_{n,m}^t(\cdot; H_\gamma)\| \sim \frac{m! |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|}.$$

Равномерно по всем  $m$ ,  $n \geq m-1$  и  $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}^t(H_\gamma) \asymp \|H_\gamma - \pi_{n,m}^t(\cdot; H_\gamma)\| \asymp \frac{m! |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|}.$$

Напомним, что бесконечно малые (б. м.) величины  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$  называются эквивалентными ( $\alpha_n \sim \beta_n$ ), если  $\alpha_n / \beta_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если существуют положительные постоянные  $A$  и  $B$ , для которых  $A\alpha_n \leq \beta_n \leq B\alpha_n$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то говорят, что б. м.  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  имеют одинаковый порядок при ( $\alpha_n \asymp \beta_n$ ).

Теоремы 0.1 и 0.2 при более ограничительных условиях  $m(n) = o(n^{2/3})$  были доказаны ранее в работе [2]. Метод работы [2] опирается на детерминантные представления числителя и знаменателя дроби  $\pi_{n,m}^t(x)$ , которые получены в [1]. Приведенные далее доказательства теорем 0.1 и 0.2 основаны на связи алгебраических и тригонометрических аппроксимаций Паде и метод их доказательства отличен от метода работы [2].

### 1 Доказательство теоремы 0.1

Рассмотрим алгебраические аппроксимации Паде  $\pi_{n,m}(z; F_\gamma)$  функции Миттаг – Леффлера

$$F_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\gamma)_k}.$$

В работе [3] установлено, что при  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$  для неотрицательных целых  $n$  и  $m$  аппроксимации Паде  $\pi_{n,m}(z; F_\gamma)$  существуют, являются рациональными дробями вида

$$\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z; F_\gamma) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n}{q_0 + q_1 z + \dots + q_m z^m},$$

где  $p_j, q_j \in \mathbb{R}$  и равномерно по всем  $|z| \leq 1$  и  $m$ ,  $n \geq m-1$  и  $n \rightarrow \infty$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) = \frac{(-1)^m m! (\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (1.1)$$

Далее будем опираться на следующую лемму [4, с. 345].

**Лемма 1.1.** Пусть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Положим  $c_k = a_k - ib_k$  ( $i$  – мнимая единица), и рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Тогда при  $z = e^{ix}$   $f(x) = \operatorname{Re}\{F(z)\}$ , а

$$\operatorname{Re}\{\pi_{n,m}(z; F)\} = \quad (1.2)$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m \{ \operatorname{Re}(p_j \bar{q}_k) \cos(j-k)x - \operatorname{Im}(p_j \bar{q}_k) \sin(j-k)x \}}{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \{ \operatorname{Re}(q_j \bar{q}_k) \cos(j-k)x - \operatorname{Im}(q_j \bar{q}_k) \sin(j-k)x \}},$$

где числитель и знаменатель  $\pi_{n,m}(z; F)$  имеют вид

$$P_n(z; F) = \sum_{j=0}^n p_j z^j, \quad Q_m(z; F) = \sum_{j=0}^m q_j z^j.$$

Возьмём в лемме 1.1 в качестве  $f(x)$  функцию  $H_\gamma(x)$ . Тогда при  $z = e^{ix}$

$$H_\gamma(x) = \operatorname{Re}\{-iF_\gamma(z)\},$$

а (1.2) примет вид

$$\operatorname{Re}\{\pi_{n,m}(z; -iF_\gamma)\} = \frac{-\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m p_j q_k \sin(j-k)x}{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m p_j p_k \cos(j-k)x}. \quad (1.3)$$

Умножая соотношение (1.1) на  $-i$  и выделяя действительную часть в левой и правой части полученного равенства, при  $z = e^{ix}$  получим

$$H_\gamma(x) - \operatorname{Re}\{\pi_{n,m}(z; -iF_\gamma)\} = \frac{(-1)^{m+1} m! (\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} \operatorname{Re}\{i e^{2mz/(n+m)} z^{n+m+1} (1 + o(1))\}.$$

Из представления (1.3) следует, что

$$\pi_{n,m}^t(x; H_\gamma) = \operatorname{Re}\{\pi_{n,m}(z; -iF_\gamma)\}.$$

Тем самым теорема 0.1 доказана.  $\square$

### 2 Доказательство теоремы 0.2

Предположим, что  $m(n) = o(n)$  и  $0 \leq m \leq m(n)$ . Тогда из (0.3) следует, что

$$H_\gamma(x) - \pi_{n,m}^t(x; H_\gamma) = \frac{(-1)^{m+1} m! (\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} \operatorname{Re}\{i e^{i(n+m+1)x} (1 + o(1))\}. \quad (2.1)$$

Пусть

$$\varphi(x) = \frac{(-1)^{m+1} m! (\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} i e^{i(n+m+1)x}.$$

Тогда опираясь на (2.1) легко показать, что при достаточно больших  $n$  знак разности  $H_\gamma(x) - \pi_{n,m}^t(x; H_\gamma)$  совпадает со знаком  $\operatorname{Re}\varphi(x)$ .

Когда  $x$  пробегает весь промежуток  $[0, 2\pi)$ , точка  $(n+m+1)x$  пробегает весь полуинтервал  $[0, 2\pi(n+m+1))$ . Поэтому существуют  $2(n+m+1)$  таких действительных чисел  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2(n+m+1)$ , что

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2(n+m+1)} < 2\pi,$$

$$\varphi(x_j) = \frac{(-1)^{m+j} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}}.$$

Следовательно, в точках  $x_j$  разность  $H_\gamma(x) - \pi'_{n,m}(x; H_\gamma)$  принимает значения с чередующимися знаками. В таком случае, согласно рациональному аналогу известной теоремы Валле Пуссена (см., например, [5]),

$$\begin{aligned} R'_{n,m}(H_\gamma) &\geq \min_{1 \leq j \leq 2(n+m+1)} |H_\gamma(x_j) - \pi'_{n,m}(x_j; H_\gamma)| \geq \\ &\geq \frac{m!(\gamma)_n}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|} (1 - |o(1)|). \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} R'_{n,m}(H_\gamma) &\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |H_\gamma(x) - \pi'_{n,m}(x; H_\gamma)| \leq \\ &\leq \frac{m!(\gamma)_n}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|} (1 + |o(1)|). \end{aligned}$$

Таким образом, первая часть теоремы 0.2 доказана. Вторая её часть доказывается аналогично.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Лабыч, Ю.А.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.
2. *Лабыч, Ю.А.* О рациональной аппроксимации периодической функции / Ю.А. Лабыч // Вестник полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2003. – № 3. – С. 77–86.
3. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Математический сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.
4. *Бейкер, Дж.* мл. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
5. *Lorentz, G.G.* Constructive Approximation, Advanced problems / G.G. Lorentz, M. v. Golitschek, Y. Makovoz. – New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. – 651 p.

Поступила в редакцию 05.03.2021.

## КРИТЕРИЙ $\sigma$ -РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

В.М. Селькин, И.В. Блинец, В.С. Закревская

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

## A $\sigma$ -SOLUBILITY CRITERION OF A FINITE GROUP

V.M. Sel'kin, I.V. Blisnets, V.S. Zakrevskaya

Francisk Skorina Gomel State University

На протяжении всей статьи все группы конечны и  $G$  всегда обозначает конечную группу. Более того,  $\sigma$  является некоторым разбиением множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ , т. е.  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ , где  $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$  и  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ .

Множество подгрупп  $\mathcal{H}$  группы  $G$  называется *полным холловым  $\sigma$ -множеством*  $G$ , если каждый член  $\neq 1$  множества  $\mathcal{H}$  является холловой  $\sigma_i$ -подгруппой группы  $G$  для некоторого  $i$  и  $\mathcal{H}$  содержит ровно одну холлову  $\sigma_i$ -подгруппу группы  $G$  для каждого  $i$ . Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется:  *$\sigma$ -перестановочной в  $G$* , если  $G$  обладает полным холловым  $\sigma$ -множеством  $\mathcal{H}$  таким, что  $AH^x = H^xA$  для всех  $H \in \mathcal{H}$  и всех  $x \in G$ ;  *$\sigma$ -субнормальной в  $G$* , если в  $G$  имеется цепь подгрупп  $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$  такая, что либо  $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ , либо  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  является  $\sigma$ -примарной группой для всех  $i = 1, \dots, t$ . Подгруппа  $A$  группы  $G$  является *слабо  $\sigma$ -перестановочной в  $G$* , если в  $G$  имеются  $\sigma$ -перестановочная подгруппа  $S$  и  $\sigma$ -субнормальная подгруппа  $T$  такие, что  $G = AT$  и  $A \cap T \leq S \leq A$ . В данной работе доказывается, что если в каждой максимальной цепи  $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$  группы  $G$  длины 3 хотя бы одна из подгрупп  $M_3$ ,  $M_2$ , или  $M_1$  является либо субмодулярной, либо слабо  $\sigma$ -перестановочной в  $G$ , то  $G$   $\sigma$ -разрешима.

**Ключевые слова:** конечная группа,  $\sigma$ -разрешимая группа,  $\sigma$ -субнормальная подгруппа,  $\sigma$ -перестановочная подгруппа, слабо  $\sigma$ -перестановочная подгруппа, модулярная подгруппа.

Throughout this paper, all groups are finite and  $G$  always denotes a finite group. Moreover,  $\sigma$  is some partition of the set of all primes  $\mathbb{P}$ , that is,  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ , where  $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$  and  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$  for all  $i \neq j$ . A set  $\mathcal{H}$  of subgroups of  $G$  is a *complete Hall  $\sigma$ -set* of  $G$  if every member  $\neq 1$  of  $\mathcal{H}$  is a Hall  $\sigma_i$ -subgroup of  $G$  for some  $\sigma_i \in \sigma$  and  $\mathcal{H}$  contains exactly one Hall  $\sigma_i$ -subgroup of  $G$  for every  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . A subgroup  $A$  of  $G$  is said to be:  *$\sigma$ -permutable in  $G$*  if  $G$  possesses a complete Hall  $\sigma$ -set  $\mathcal{H}$  such that  $AH^x = H^xA$  for all  $H \in \mathcal{H}$  and all  $x \in G$ ;  *$\sigma$ -subnormal in  $G$*  if there is a subgroup chain  $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$  such that either  $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$  or  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  is  $\sigma$ -primary for all  $i = 1, \dots, n$ . A subgroup  $A$  of  $G$  is said to be *weakly  $\sigma$ -permutable in  $G$*  if there is a  $\sigma$ -permutable subgroup  $S$  and a  $\sigma$ -subnormal subgroup  $T$  of  $G$  such that  $G = AT$  and  $A \cap T \leq S \leq A$ . In this paper it is proved that if in every maximal chain  $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$  of  $G$  of length 3 at least one of the subgroups  $M_3$ ,  $M_2$ , or  $M_1$  is either submodular or weakly  $\sigma$ -permutable in  $G$ , then  $G$  is  $\sigma$ -soluble.

**Keywords:** finite group,  $\sigma$ -soluble group,  $\sigma$ -subnormal subgroup,  $\sigma$ -permutable subgroup, weakly  $\sigma$ -permutable subgroup, modular subgroup.

### Введение

В этой статье все группы конечны и  $G$  всегда означает конечную группу. Кроме того,  $\mathbb{P}$  – это множество всех простых чисел,  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  и  $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ . Если  $n$  – целое число, символ  $\pi(n)$  обозначает множество всех простых чисел, делящих  $n$ ,  $\pi(G) = \pi(|G|)$  – множество всех простых чисел, делящих порядок  $G$ .

Подгруппа  $M$  группы  $G$  называется *модулярной в  $G$*  [1], если  $M$  – модулярный элемент (в смысле Куроша [1, С. 43]) решетки всех подгрупп  $\mathcal{L}(G)$  группы  $G$ , т. е.

(i)  $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$  для всех  $X \leq G$ ,  $Z \leq G$  таких, что  $X \leq Z$  и

(ii)  $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$  для всех  $Y \leq G$ ,  $Z \leq G$  таких, что  $M \leq Z$ .

Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *субмодулярной в  $G$* , если в  $G$  имеется цепь подгрупп  $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$

такая, что  $A_{i-1}$  является модулярной группой в  $A_i$  для всех  $i = 1, \dots, t$ .

Напомним теперь некоторые понятия теории  $\sigma$ -свойств групп [2]–[8].

Мы используем символ  $\sigma$  для обозначения некоторого разбиения множества  $\mathbb{P}$ . Таким образом,  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ , где  $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$  и  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$

для всех  $i \neq j$ .

Группа  $G$  называется:  $\sigma$ -*примарной*, если  $G$  является  $\sigma_i$ -группой для некоторого  $i \in I$ ;  $\sigma$ -*нильпотентной*, если  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$  для некоторых  $\sigma$ -примарных групп  $G_1, G_2, \dots, G_n$ ,  $\sigma$ -*разрешимой*, если каждый главный фактор группы  $G$  является  $\sigma$ -примарным.

Множество подгрупп  $\mathcal{H}$  группы  $G$  называется *полным холловым  $\sigma$ -множеством*  $G$ , если каждый член  $\neq 1$  множества  $\mathcal{H}$  является холловой  $\sigma_i$ -подгруппой группы  $G$  для некоторого  $i$  и  $\mathcal{H}$  содержит ровно одну холлову  $\sigma_i$ -подгруппу группы  $G$  для каждого  $i$ .

Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется:  $\sigma$ -*перестановочной* в  $G$ , если  $G$  обладает полным холловым  $\sigma$ -множеством  $\mathcal{H}$  таким, что

$$AH^x = H^x A$$

для всех  $H \in \mathcal{H}$  и всех  $x \in G$ ;  $\sigma$ -*субнормальной* в  $G$ , если в  $G$  имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

такая, что либо  $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ , либо  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  является  $\sigma$ -примарной группой для всех  $i = 1, \dots, t$ .

В работе [8] введено следующее обобщение понятия  $\sigma$ -перестановочности.

**Определение 0.1.** Мы говорим, что подгруппа  $A$  группы  $G$  является *слабо  $\sigma$ -перестановочной* в  $G$ , если в  $G$  имеются  $\sigma$ -перестановочная подгруппа  $S$  и  $\sigma$ -субнормальная подгруппа  $T$  такие, что  $G = AT$  и  $A \cap T \leq S \leq A$ .

В данной работе мы доказываем следующий результат.

**Теорема 0.2.** Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы  $G$  длины 3 хотя бы в одна из подгрупп  $M_3, M_2$ , или  $M_1$  является либо субмодулярной, либо слабо  $\sigma$ -перестановочной в  $G$ , то  $G$   $\sigma$ -разрешима.

В случае, когда  $\sigma = \{ \{2\}, \{3\}, \dots \}$  из теоремы 0.2 получаем следующие известные результаты.

**Следствие 0.3** (Цимерман [9]). Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы  $G$  длины 3 хотя бы одна из подгрупп  $M_3, M_2$ , или  $M_1$  является субмодулярной, то  $G$  разрешима.

**Следствие 0.4** (Спенсер [10]). Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы  $G$  длины 3 хотя бы одна из подгрупп  $M_3, M_2$ , или  $M_1$  является субнормальной в  $G$ , то  $G$  разрешима.

**Следствие 0.5** (Шмидт [11]). Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы  $G$  длины 3 хотя бы одна из подгрупп  $M_3, M_2$ , или  $M_1$  является модулярной в  $G$ , то  $G$  разрешима.

Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется  *$s$ -нормальной* в  $G$  [12], если для некоторой нормальной подгруппы  $T$  группы  $G$  имеет место

$$AT = G \text{ и } A \cap T \leq A_G.$$

Понятно, что каждая  $s$ -нормальная подгруппа является слабо  $\sigma$ -перестановочной в группе. Таким образом, мы получаем из теоремы 0.2 следующий результат.

**Следствие 0.6.** Если в каждой максимальной цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы  $G$  длины 3 хотя бы одна из подгрупп  $M_3, M_2$ , или  $M_1$  является  $s$ -нормальной в  $G$ , то  $G$  разрешима.

## 1 Некоторые предварительные результаты

Напомним, что символ  $\mathfrak{N}_\sigma$  обозначает класс

всех  $\sigma$ -нильпотентных групп;  $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$  –  $\sigma$ -нильпотентный корадикал группы  $G$ .

**Лемма 1.1** [3, следствие 2.4, лемму 2.5].

(1) Класс  $\mathfrak{N}_\sigma$  замкнут относительно взятия произведений нормальных подгрупп, гомоморфных образов и подгрупп.

(2) Если  $G/N$  и  $G/R$  –  $\sigma$ -нильпотентные группы, то факторгруппа  $G/(N \cap R)$   $\sigma$ -нильпотентна.

(3) Если  $E$  – нормальная подгруппа  $G$  и  $E/(E \cap \Phi(G))$   $\sigma$ -нильпотентна, то  $E$   $\sigma$ -нильпотентна.

**Лемма 1.2.** Пусть  $A, K$  и  $N$  – подгруппы группы  $G$ . Предположим, что  $A$   $\sigma$ -субнормальна в  $G$  и  $N$  нормальна в  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) подгруппа  $A \cap K$   $\sigma$ -субнормальна в  $K$ ;

(2) подгруппа  $AN/N$  является  $\sigma$ -субнормальной в  $G/N$ ;

(3) если  $N \leq K$  и  $K/N$   $\sigma$ -субнормальна в  $G/N$ , то  $K$   $\sigma$ -субнормальна в  $G$ ;

(4) если  $A$  является  $\sigma_i$ -группой, то  $A \leq O_{\sigma_i}(G)$ ;

(5) подгруппа  $A^{\mathfrak{N}_\sigma}$  субнормальна в  $G$ .

*Доказательство.* (1)–(4) [1, лемму 2.6].

(5) Предположим, что это утверждение неверно, и пусть  $G$  – контрпример минимального порядка.

По условию, в  $G$  существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$$

такая, что либо  $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ , или  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  является  $\sigma$ -примарной группой для всех  $i = 1, \dots, r$ .

Пусть  $M = A_{r-1}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $M \neq G$ .

Сначала покажем, что

$$A^{\sigma_i} \leq M_G.$$

Это ясно, если  $M$  нормальна в  $G$ . Теперь предположим, что  $G/M_G$  является  $\sigma_i$ -группой для некоторого  $i$ . Тогда  $G^{\sigma_i} \leq M_G$ .

Более того, из изоморфизма

$$AG^{\sigma_i} / G^{\sigma_i} \cong A / (A \cap G^{\sigma_i})$$

и леммы 1.1 мы получаем, что

$$A^{\sigma_i} \leq G^{\sigma_i} \leq M_G.$$

Выбор  $G$  означает, что  $A^{\sigma_i}$  субнормальна в  $AM_G$ , поэтому  $A^{\sigma_i}$  субнормальна в  $M_G$ . Следовательно  $A^{\sigma_i}$  субнормальна в  $G$ .  $\square$

**Лемма 1.3** [8, лемма 2.8]. Пусть  $A, K$  и  $N$  – подгруппы группы  $G$ . Предположим, что  $A$  слабо  $\sigma$ -перестановочна и  $N$  нормальна в  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если либо  $N \leq A$ , либо  $(|N|, |A|) = 1$ , то  $AN/N$  является слабо  $\sigma$ -перестановочной в  $G/N$ .

(2) если  $G$  является  $\sigma$ -полной группой силовского типа,  $N \leq K$  и  $K/N$  слабо  $\sigma$ -перестановочна в  $G/N$ , то  $K$  слабо  $\sigma$ -перестановочна в  $G$ .

(3) если  $G$  является  $\sigma$ -полной группой силовского типа и  $A \leq E \leq G$ , тогда  $A$  слабо  $\sigma$ -перестановочна в  $E$ .

(4) если  $A \leq E \leq G$  и  $E$  нормальна в  $G$ , то  $A$  является слабо  $\sigma$ -перестановочной в  $E$ .

**Лемма 1.4** [9, леммы 1, 4 и 7]. Пусть  $A, K$  и  $N$  – подгруппы группы  $G$ . Предположим, что  $A$  субмодулярна и  $N$  нормальна в  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) подгруппа  $AN/N$  является субмодулярной в  $G/N$ ;

(2)  $N \cap K$  субмодулярна в  $K$ ;

(3) если  $\mathfrak{F}$  – формация всех абелевых групп с элементарными силовскими подгруппами, то  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $A^{\delta}$  подгруппы  $A$  субнормален в  $G$ ;

(4) если  $A$  разрешима и  $N$  – неабелева минимальная нормальная подгруппа в  $G$ , то

$$A \leq C_G(N).$$

**Лемма 1.5** [13, VI, теорема 26.1]. Если  $G$  – группа Шмидта, то  $G = P \rtimes Q$ , где  $P = G^{\sigma}$  является силовской  $p$ -подгруппой в  $G$ , а  $Q = \langle x \rangle$  – циклическая силовская  $q$ -подгруппа в  $G$  для некоторых простых чисел  $p \neq q$ .

## 2 Доказательство основного результата

*Доказательство теоремы 0.2.* Предположим, что данная теорема не верна и пусть  $G$  – контрпример минимального порядка.

(1) Если  $R$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G$ , то  $G/R$  –  $\sigma$ -разрешимая группа. Следовательно,  $R$  – единственная минимальная нормальная подгруппа в  $G$ ,  $C_G(R) \leq R$  и  $R$  не является  $\sigma$ -примарной группой.

Сначала покажем, что группа  $G/R$   $\sigma$ -разрешима для любой минимальной нормальной подгруппы  $R$  группы  $G$ .

Предположим, что это неверно. Тогда  $G/R$  не является нильпотентной группой и поэтому  $G/R$  имеет подгруппу Шмидта  $H/R$ . Тогда  $H/R$  – разрешимая группа по лемме 1.5, поэтому  $H < G$ . Более того, из леммы 1.5 следует, что для любого простого  $p$ , делящего  $|H/R|$ , и для любой силовской  $p$ -подгруппы  $P$  группы  $H/R$  следует, что  $P$  содержится в некоторой 2-максимальной подгруппе в  $G/R$ . Следовательно,  $R$  содержится в некоторой 3-максимальной подгруппе группы  $G$ .

Пусть теперь

$$M_3 / R < M_2 / R < M_1 / R < M_0 / R = G / R$$

– произвольная максимальная цепь длины 3 в  $G/R$ . Тогда  $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$  является максимальной цепью в  $G$  длины 3 и поэтому для некоторого  $i > 0$  подгруппа  $M_i$  является либо субмодулярной, либо слабо  $\sigma$ -перестановочной в  $G$ . Но тогда  $M_i/R$  – либо субмодулярная, либо слабо  $\sigma$ -перестановочная в  $G/R$  подгруппа ввиду лемм 1.2 (2) и 1.3 (1). Следовательно, гипотеза выполняется для  $G/R$ , поэтому из выбора группы  $G$  следует, что  $G/R$   $\sigma$ -разрешима, что противоречит выбору группы  $G$ .

Если в  $G$  имеется минимальная нормальная подгруппа  $N \neq R$ , то  $G/N$   $\sigma$ -разрешима и, следовательно,

$$R \cong R/1 \cong RN/N$$

является  $\sigma$ -примарной, поэтому  $G$  является  $\sigma$ -разрешимой группой. Следовательно  $R$  – единственная минимальная нормальная подгруппа в  $G$  и  $R$  не является  $\sigma$ -примарной группой и, следовательно, абелевой группой. Таким образом, утверждение (1) является верным, поскольку  $C_G(R)$  является нормальной подгруппой в  $G$ .

Пусть  $p$  – любое нечетное простое число, разделяющее  $|R|$  и  $R_p$  – силовская  $p$ -подгруппа в  $R$ . Ввиду аргумента Фраттини и утверждения (1) следует, что существует максимальная подгруппа  $M$  в  $G$  такая, что  $N_G(R_p) \leq M$  и  $G = RM$ . Ясно, что  $M_G = 1$ . Более того, для некоторой силовской  $p$ -подгруппы  $G_p$  группы  $G$  имеем  $R_p = G_p \cap R$ , поэтому

$$G_p \leq N_G(R_p) \leq M$$

и, следовательно,  $p$  не делит  $|G : M|$ .



(2)  $D := M \cap R$  не является нильпотентным. Следовательно,  $D \not\leq \Phi(M)$  и  $D$  не является  $p$ -группой.

Предположим, что это неверно. Тогда  $D$  – нильпотентная нормальная подгруппа в  $M$  и  $R_p$  является силовской  $p$ -подгруппой в  $D$ . Более того,  $R_p$  нормальна в  $M$ , поскольку  $D$  нильпотентна и, следовательно, подгруппа  $Z(J(R_p))$  нормальна в  $M$ . Поскольку  $M_G = 1$ , то

$$N_G(Z(J(R_p))) = M.$$

Тогда  $N_R(Z(J(R_p))) = D$  – нильпотентная группа. Отсюда следует, что  $R$   $p$ -нильпотентна по теореме Глаубермана – Томпсона о нормальных  $p$ -дополнениях. Но тогда  $R$  –  $p$ -группа, противоречие. Следовательно, имеем (2).

(3)  $V = 1$  для любой субнормальной подгруппы из  $G$ , содержащейся в максимальной подгруппе  $F$  из  $G$  с условием  $F_G = 1$ .

Предположим, что  $V \neq 1$ . Утверждение (1) влечет, что

$$1 < V^G = V^{RF} = V^F \leq F_G$$

согласно [15, часть А, лемма 14.3], что противоречит условию. Таким образом, утверждение (1) является верным.

(4)  $V^{\sigma_i} \neq 1$  для любой неединичной  $\sigma$ -субнормальной подгруппы  $V$  группы  $G$ .

Действительно, предположим, что  $V^{\sigma_i} = 1$ . Тогда  $V$   $\sigma$ -нильпотентна и поэтому для некоторого  $i$  имеет место

$$1 < O_{\sigma_i}(V) \leq O_{\sigma_i}(G)$$

ввиду леммы 1.2 (4), что противоречит утверждению (1).

(5) Если  $H$  является слабо  $\sigma$ -перестановочной подгруппой  $G$ , содержащейся в максимальной подгруппе  $K$  группы  $G$  с условием  $K_G = 1$ , то для некоторой  $\sigma$ -субнормальной подгруппы  $T$  группы  $G$  имеет место  $G = HT$  и  $H \cap T = 1$ .

Согласно определению слабо  $\sigma$ -перестановочной подгруппы, в  $G$  существуют  $\sigma$ -перестановочная подгруппа  $S$  и  $\sigma$ -субнормальная подгруппа  $T$  такие, что  $G = HT$  и

$$H \cap T \leq S \leq H.$$

Предположим, что  $S \neq 1$ . Тогда  $S_G = 1 = K_G$ , поэтому  $S^G / S_G = S^G / 1 \cong S^G$  является неединичной  $\sigma$ -нильпотентной подгруппой в  $G$  и поэтому для некоторого  $i$  имеет место

$$1 < O_{\sigma_i}(S^G) \leq O_{\sigma_i}(G),$$

что противоречит утверждению (1). Значит  $S = 1$  и поэтому  $T \cap H = 1$ .

(6)  $M$  не является ни слабо  $\sigma$ -перестановочной, ни субмодулярной в  $G$ . Следовательно,  $M$   $\sigma$ -разрешима.

Предположим, что  $M$  является слабо  $\sigma$ -перестановочной в  $G$ . Тогда для некоторой  $\sigma$ -субнормальной подгруппы  $T$  группы  $G$  имеет место  $G = MT$  и  $M \cap T = 1$  по утверждению (5). Более того,  $W := T^{\sigma_i} \neq 1$  и  $W$  – субнормальная в  $G$  подгруппа согласно лемме 1.2 (5).

Пусть теперь  $L$  – минимальная субнормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $W$ . Тогда  $L \leq R$ , поэтому  $p$  делит  $|L|$ , где  $|L|$  делит  $|T| = |G : M|$ . Но  $p$  не делит  $|G : M|$ , поскольку  $G_p \leq M$ , противоречие. Следовательно,  $M$  не является слабо  $\sigma$ -перестановочной в  $G$ .

Предположим, что  $M$  субмодулярна в  $G$ . Тогда  $M$  модулярна в  $G$  и поэтому

$$G \cong G / M_G = G / 1$$

сверхразрешима согласно [1, лемма 5.1.2]. Это противоречие завершает доказательство первой части утверждения (6). И тогда в любой максимальной цепи  $M_3 < M_2 < M_1 = M < G$  длины 3 группы  $G$  одна из подгрупп  $M_3$  или  $M_2$  является по условию либо слабо  $\sigma$ -перестановочной, либо субмодулярной в  $G$ . В первом случае эта подгруппа слабо  $\sigma$ -перестановочна в  $M$  согласно лемме 1.3 (3). Во втором случае эта подгруппа субмодулярна в  $M$  согласно лемме 1.4 (2). Таким образом, гипотеза сохраняется в  $M$  и поэтому  $M$   $\sigma$ -разрешима ввиду выбора группы  $G$ .

(7)  $R < G$ .

Предположим, что  $R = G$  – простая неабелева группа. И допустим, что некоторая собственная неединичная подгруппа  $A$  группы  $G$  является  $\sigma$ -субнормальной в  $G$ . Тогда в  $G$  имеется цепь подгрупп  $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$  такая, что либо  $A_{i-1}$  нормальна в  $A_i$ , либо  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  является  $\sigma$ -примарной группой для всех  $i = 1, \dots, n$ . Без ограничения общности можно считать, что  $V = A_{n-1} < G$ . Тогда  $V_G = 1$ , поскольку группа  $G = R$  является простой, поэтому  $G \cong G / 1$  является  $\sigma$ -примарной. Но тогда  $G$   $\sigma$ -нильпотентна, противоречие. Таким образом, каждая собственная неединичная подгруппа группы  $G$  не является  $\sigma$ -субнормальной в  $G$ .

Предположим теперь, что некоторая собственная неединичная подгруппа  $H$  группы  $G$  является субмодулярной в  $G$ , и пусть  $V$  – максимальная модулярная подгруппа группы  $G$  такая, что  $H \leq V$ . Тогда  $V$  – максимальная подгруппа в  $G$  такая, что  $G / V_G = G / 1$  сверхразрешима согласно [1, 5.1.2], противоречие. Следовательно, каждая собственная субмодулярная подгруппа группы  $G$  тривиальна.

Пусть  $Q$  – силовская  $q$ -подгруппа в  $G$ , где  $q$  – наименьшее простое число, делящее  $|G|$ , и пусть  $L$  – максимальная подгруппа в  $G$ , содержащая  $Q$ .

Тогда с учетом [14, IV, 2.8],  $|Q| > q$ . Пусть  $V$  – максимальная подгруппа в  $Q$ . Если  $|V| = q$ , то  $Q$  абелева, поэтому  $Q < L$ . Следовательно, существует 3-максимальная подгруппа  $W$  в группе  $G$  такая, что  $V \leq W$ . Но тогда некоторая собственная неединичная подгруппа группы  $G$  либо субмодулярна, либо  $\sigma$ -субнормальна в  $G$ , противоречие. Следовательно,  $|V| > q$ , что снова влечет, что некоторая собственная неединичная подгруппа группы  $G$  либо субмодулярна, либо  $\sigma$ -субнормальна в  $G$ . Это противоречие показывает, что утверждение (7) является верным.

(8) Если  $G_p \leq V \leq M$ , то  $V$  не является ни слабо  $\sigma$ -перестановочной, ни субмодулярной в  $G$ . Предположим, что для некоторой  $\sigma$ -субнормальной подгруппы  $T$  в  $G$  имеет место  $G = VT$  и  $V \cap T = 1$ . Ясно, что  $1 < T < G$ . Тогда подгруппа  $T^{\text{н}_\sigma}$  не является тривиальной согласно утверждению (4) и эта подгруппа является субнормальной  $G$  по лемме 1.2 (5). Следовательно, для минимальной субнормальной подгруппы  $Z$  группы  $G$ , содержащейся в  $T^{\text{н}_\sigma}$  имеет место  $Z \leq T$  и  $Z \leq R$ . Тогда  $Z$  является  $p'$ -группой, поскольку

$$V \cap T = 1 \text{ и } G_p \leq V.$$

С другой стороны,  $Z$  – это минимальная нормальная подгруппа в  $R$ , поэтому  $p$  делит  $|Z|$ . Это противоречие показывает, что  $V$  не является слабо  $\sigma$ -субнормальной в  $G$ .

Теперь предположим, что  $V$  субмодулярна в  $G$ . С учетом утверждения (3) и леммы 1.4 (3),  $V$  – собственная абелева подгруппа в  $M$ .

Предположим, что  $V \leq W < F < M$ , где  $F$  максимальна в  $M$ , а  $W$  максимальна в  $F$ . Тогда хотя бы одна из подгрупп  $W$  или  $F$  является абелевой субмодулярной подгруппой в  $G$ . Следовательно,  $G_p$  субмодулярна в  $G$ . Следовательно,

$$G_p \leq C_G(R)$$

по лемме 1.4 (3), противоречие. Следовательно,  $|G_p| = p$  и  $G_p = V$  – максимальная подгруппа в  $M$ , поэтому  $G_p = R_p$  является субмодулярной в  $R$ , противоречие.

Следовательно, утверждение (8) является верным.

(9)  $M = D \rtimes L$  – разрешимая группа, где  $L$  – группа простого порядка.

Ввиду [14, IV, 7.4] для некоторой максимальной подгруппы  $L$  группы  $M$  имеем  $G_p \leq L$  поскольку  $p > 2$  и  $G$  неразрешима. Сначала покажем, что  $G_p = L$ . Действительно, предположим, что для некоторой максимальной подгруппы  $V$  в  $L$  имеем  $G_p \leq V$ . Тогда в каждой максимальной цепи

$$V = M_3 < M_2 < M_1 = M < M_0 = G$$

из  $G$  длины 3 все подгруппы  $M_3, M_2$  и  $M_1$  не являются ни слабо  $\sigma$ -перестановочными, ни субмодулярными в  $G$ , противоречие.

Следовательно,  $G_p = L$  – максимальная подгруппа в  $M$ , поэтому  $M$  разрешима согласно [14, IV, 7.4]. Если  $G_p \leq D$ , то

$$D = M \cap R = M,$$

поскольку  $L \neq D$  по утверждению (2), откуда следует, что  $R = G$  вопреки утверждению (7). Следовательно,  $G_p \leq D$ , поэтому  $DL = M$ . Поэтому в случае  $|G_p| = p$  имеем  $D \cap L = 1$ , откуда следует, что  $M = D \rtimes L$  а значит, утверждение (9) верно, поскольку  $M$  разрешима.

Наконец, предположим, что  $|G_p| > p$ . Прежде заметим, что  $L$  не является ни слабо  $\sigma$ -перестановочной, ни субмодулярной в  $G$  по утверждению (8). Но с другой стороны,  $M$  также не является ни слабо  $\sigma$ -перестановочной, ни субмодулярной в  $G$  по утверждению (6). Следовательно, любая максимальная подгруппа в  $L = G_p$  либо слабо  $\sigma$ -перестановочна, либо субмодулярна в  $G$ .

Из  $G_p \not\leq D$  следует, что для некоторой максимальной подгруппы  $V$  из  $G_p$  имеем

$$R_p = R \cap G_p \leq V.$$

Предположим, что  $V$  слабо  $\sigma$ -перестановочна в  $G$ . Тогда для  $\sigma$ -субнормального дополнения  $T$  для  $V$  в  $G$  имеем  $T \cap R_p = 1$ . По лемме 1.2 (5) и утверждению (3) для некоторой минимальной субнормальной подгруппы  $Z$  группы  $G$  имеем  $Z \leq T^{\text{н}_\sigma} \leq T$ . Следовательно,  $Z \cap R = 1$  и тогда

$$ZR = Z \times R$$

ввиду [15, гл. А, 14.3], вопреки утверждению (1).

Следовательно,  $1 < V$  субмодулярна в  $G$ . Тогда  $R_p$  субмодулярна в  $G$  и, значит,  $R_p$  субмодулярна в  $R$  по лемме 1.3 (3), противоречие. Значит, утверждение (9) является верным.

*Заключительное противоречие.* Из утверждения (9) следует, что  $|D|$  – степень простого числа, что противоречит утверждению (2).  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
2. Скиба, А.Н. О  $\sigma$ -свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.
3. Skiba, A.N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
4. Skiba, A.N. Some characterizations of finite  $\sigma$ -soluble  $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.

5. *Skiba, A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
6. *Skiba, A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // *J. Algebra Appl.* – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.
7. *Skiba, A.N.* On Some Results in the Theory of Finite Partially Soluble Groups / A.N. Skiba // *Commun. Math. Stat.* – 2016. – Vol. 4. – P. 281–309.
8. *Huang, J.* On weakly  $\sigma$ -quasinormal subgroups of finite groups / J. Huang, B. Hu, A.N. Skiba // *Publ. Math. Debrecen.* – 2018. – Vol. 92, № 1-2, P. 201–216.
9. *Zimmermann, I.* Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // *Math. Z.* – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.
10. *Spencer, A.E.* Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // *Pacific J Math.* – 1968. – Vol. 27. – P. 167–173.
11. *Schmid, R.* Endliche Gruppen mit vilen modularen Untergruppen / R. Schmid // *Abhan. Math. Sem. Univ. Hamburg.* – 1970. – Vol. 34. – P. 115–125.
12. *Wang, Y.*  $c$ -normality of groups and its properties / Y. Wang // *J. Algebra.* – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.
13. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – 1978. – Москва: Наука, 1978.
14. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
15. *Doerk, K.* *Finite Soluble Groups* / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.

Поступила в редакцию 28.04.2021.

## СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ОПЕРЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

А.Ф. Ильюшенко<sup>1</sup>, О.К. Кривонос<sup>1</sup>, А.Д. Чорный<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Государственное научно-производственное объединение порошковой металлургии, Минск

<sup>2</sup>Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова НАН Беларуси, Минск

## APPROACH FOR DETERMINATION OF BALLISTIC COEFFICIENT OF AN TAIL AERODYNAMIC OBJECT

A.Ph. Ilyushchanka<sup>1</sup>, A.K. Kryvanos<sup>1</sup>, A.D. Chorny<sup>2</sup>

<sup>1</sup>State Research and Production Powder Metallurgy Association, Minsk

<sup>2</sup>A.V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of NAS of Belarus, Minsk

Рассмотрены возможные способы и предложена методика вычислительного эксперимента для расчета аэродинамических характеристик оперенных аэродинамических объектов. Проведена ее верификация на объекте простой формы (конус + цилиндр) с последующим согласованием полученных значений для исследуемого объекта с доступными экспериментальными данными. Методом вычислительного эксперимента рассчитаны коэффициенты формы и баллистические коэффициенты в зависимости от числа Маха для аэродинамического объекта с двумя формами головной части. Баллистические коэффициенты получены по законам 1943 года и 1958 года, а также по закону Сиаччи в виде функций от числа Маха. Полученные значения коэффициентов будут использованы в расчетах исходных данных для пуска аэродинамического объекта.

**Ключевые слова:** аэродинамический объект, коэффициент лобового сопротивления, моделирование обтекания тела, баллистический коэффициент.

Possible methods are considered and a computational experiment technique for calculating the aerodynamic characteristics of feathered aerodynamic objects is proposed. Its verification was carried out on an object of simple shape (cone + cylinder) with subsequent matching of the obtained values for the object under study with the available experimental data. The shape coefficients and drag coefficients are calculated depending on the Mach number for an aerodynamic object with two forms of the head by the method of a computational experiment. Ballistic coefficients are obtained according to the laws of 1943 and 1958, as well as according to the Siacci law as functions of the Mach number. The obtained drag coefficients will be used for calculation of the initial data for launching the aerodynamic object.

**Keywords:** aerodynamic object, drag coefficient, body flow simulation, ballistic coefficient.

### Введение

Вторая половина XX и начало XXI веков характеризуется бурным развитием ракетной техники и внедрением ее помимо вооруженной борьбы в другие сферы жизнедеятельности (геология, метеорология, геодезия, транспорт и др.). Современным образцам ракетной техники с учетом развиваемых ими скоростей предъявляются достаточно высокие требования к их аэродинамическим характеристикам, которые должны способствовать достижению ракетой заданной точки в пространстве с наименьшими затратами топлива на преодоление лобового сопротивления [1]. Из-за своей геометрической формы ракеты относятся к типу плохообтекаемых аэродинамических объектов. Аэродинамические объекты с оптимальной формой, как правило, принимаются за эталонные. Для них определяются баллистические характеристики, которые для удобства использования приводятся к табличной или графической форме, а впоследствии эти данные применяются для сопоставления с характеристиками разрабатываемых аэродинамических объектов [2].

Ввиду специфики доставляемой полезной нагрузки форма головной части аэродинамического объекта может отличаться от оптимальной. Такая особенность конструкции головной части учитывается при определении характеристик топливного заряда и двигательной установки на этапе проектирования, а также при уточнении исходных баллистических данных при пуске (угол бросания, время старта и др.) [3]. Необходимость уточнения исходных данных для пуска аэродинамического объекта обусловлено отличием лобового сопротивления головной части от эталонного аналога, которое будет причиной отклонения рассматриваемого объекта от требуемой точки доставки полезной нагрузки. Для таких аэродинамических объектов определяют баллистический коэффициент, значение которого в последующем используется для установления расчетных характеристик траектории их полета [2], [4], [5].

С учетом значимости баллистического коэффициента как основной аэродинамической характеристики, целью работы ставится разработка способа его определения для оперенных

аэродинамических объектов с головной частью, отличной от оптимальной.

### 1 Оценка баллистического коэффициента через аэродинамическое сопротивление аэродинамического объекта

Баллистические характеристики аэродинамических объектов представляют собой набор параметров, которые используются в прицельных системах для расчета требуемого момента времени пуска, обеспечивающего его попадание в заданную точку. К таким параметрам относятся дульное время и дульная скорость, закон изменения тяги двигателя во времени, закон изменения массы аэродинамического объекта во времени из-за выгорания топлива, закон изменения коэффициента силы лобового сопротивления от числа Маха [2], [4], [5].

Законы изменения массы и тяги во времени, а также силы лобового сопротивления от числа Маха представляют собой функциональные зависимости, которые устанавливаются расчетно-опытным путем и применяются в виде таблиц и графиков. Для удобства использования они заменяются системой числовых баллистических характеристик, таких как среднее ускорение, вызванное тягой ракетного двигателя, время работы двигателя, дульная масса, масса аэродинамического объекта в конце активного участка траектории после выгорания топлива, баллистический коэффициент аэродинамического объекта на пассивном участке траектории по отношению к заложенному закону сопротивления воздуха (закону Сиаччи, закону 1943 года, закону 1958 года) [2], [6].

Баллистический коэффициент характеризует степень силового взаимодействия аэродинамического объекта с набегающим потоком воздуха и поэтому необходим для расчета аэродинамических сил, действующих на рассматриваемый объект в полете. Формула для расчета баллистического коэффициента следует из стандартной формы записи силы лобового сопротивления. Если представить эту аэродинамическую силу в виде фундаментального выражения  $R = f(l, d, V, \rho, \nu, a, \delta)$ , где форма рассматриваемого объекта учитывается видом функции  $f$ , то с помощью теории подобия и размерностей можно показать, что

$$R = 0,5 \rho V^2 S_m C_x(\text{Re}, M, l/d, \delta),$$

где:  $C_x$  – коэффициент лобового сопротивления;  
 $S_m$  – площадь миделя. Сила сопротивления воздуха для плохообтекаемого аэродинамического объекта заданной формы зависит от его размеров, которые характеризуются калибром  $d$  и длиной  $l$ ;

$V$  – скорость поступательного движения;

$\nu$  – вязкость воздуха (рассчитывается через кинематический коэффициент вязкости);

$\rho$  – плотности воздуха;

$a$  – скорость звука в воздухе.

Таким образом, сила сопротивления  $R$  является функцией двух основных параметров – числа Рейнольдса  $\text{Re} = Vd/\nu$  и числа Маха  $M = V/a$ , а также удлинения  $l/d$  и угла нутации  $\delta$ . Скорости вращательного движения относительно собственной оси аэродинамического объекта мало сказываются на величине силы лобового сопротивления, поэтому их влиянием, как правило, пренебрегают [2].

Коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  определяют опытным или расчетным способами. Установившаяся практика предварительных баллистических расчетов сводит расчет  $C_x$  к сравнению с коэффициентом лобового сопротивления  $C_{xэм}$  для аэродинамического объекта, близкого по форме и принятого за эталонный [2], [4]–[6]. В настоящее время применяются таблицы функции  $C_{xэм}$  по закону Сиаччи [2], закону 1943 г. для пуль и снарядов современной обтекаемой формы, закону 1958 г. для оперенных снарядов и ракет [6]. Тогда коэффициент  $C_x$  для аэродинамических объектов, отличающихся от эталонных, представляется в виде

$$C_x(\text{Re}, M, \delta) = i_x C_{xэм}(\text{Re}, M, \delta),$$

где  $C_{xэм}$  отвечает выбранному закону [2], [6],  $i_x$  – коэффициент формы рассматриваемого объекта. Поскольку коэффициент  $C_x$  определяется при среднем значении угла нутации, то можно считать коэффициент формы  $i_x$  как функцию калибра  $d$ , удлинения  $l/d$ , так и угла нутации  $\delta$ . Из экспериментальных исследований следует, что для высокоскоростных оперенных АО характерные скорости движения таковы, что величина и характер функции лобового сопротивления  $C_x$  слабо зависят от числа Рейнольдса [2], [4]. Таким образом,

$$C_x(M) = i_x C_{xэм}(M).$$

Как видно, величина коэффициента формы  $i_x$  зависит от скорости (числа Маха) и выбранного закона сопротивления воздуха [2], [6]. Однако для баллистических расчетов он обычно рассматривается как постоянная величина в виде среднего значения для характерного диапазона скоростей аэродинамического объекта. При этом чем в большей степени форма рассматриваемого объекта, его калибр и характер движения около центра масс отличается от эталонных, тем больше коэффициент формы  $i_x$  отличается от единицы.

Таким образом, сила лобового сопротивления для аэродинамического объекта определяется как  $R = 0,5 \rho V^2 S_m i_x C_{xэм}(M)$ , тогда как ускорение (торможение), вызываемое этой силой в его полете, составит

$$j = \frac{R}{m} = 0,5 \frac{1}{m} \rho V^2 S_m i_x C_{xэм}(M),$$

где  $m$  – масса аэродинамического объекта, площадь  $S_m = \pi d^2 / 4$  для аэродинамического объекта с цилиндрической формой корпуса. Рассмотрим функцию изменения плотности воздуха в зависимости от высоты  $H(y) = \rho / \rho_0$ , где  $y$  – высота полета,  $\rho_0$  – плотность воздуха в точке пуска,  $\rho_{0н} = 1,206 \text{ кг/м}^3$  – плотность воздуха при нормальных условиях стрельбы (обычно принимают  $\rho_0 \approx \rho_{0н}$ ). Тогда ускорение

$$j = \frac{R}{m} = \frac{i_x d^2 \cdot 1000}{m} H(y) \frac{\pi}{8000} \rho_{0н} V^2 C_{xэм} (M) = CH(y)F(V).$$

Выражение  $C = 10^3 \frac{i_x d^2}{m}$  представляет собой баллистический коэффициент [2], [6]. Функция

$$F(V) = \frac{\pi}{8000} \rho_{0н} V^2 C_{xэм} (M) = 4,74 \cdot 10^{-4} V^2 C_{xэм} (M)$$

– функция скорости, или – закон сопротивления воздуха [6]. Следовательно, ускорение силы сопротивления воздуха пропорционально баллистическому коэффициенту и чем он больше, тем быстрее рассматриваемый аэродинамический объект теряет свою скорость в полете и, соответственно, тем он хуже в баллистическом отношении [2], [4]–[6].

Таким образом, расчет баллистического коэффициента сводится к определению коэффициента формы аэродинамического объекта как отношения коэффициентов лобового сопротивления рассматриваемого и эталонного объектов.

В настоящее время при проектировании аэродинамического объекта и нахождении его аэродинамических характеристик применяются, как правило, два подхода. Первый подход основан на экспериментальных исследованиях аэродинамики моделей таких объектов в аэродинамических трубах или на натурных испытаниях [7]. Второй – на методах численного моделирования обтекания аэродинамического объекта воздушным потоком с расчетом его аэродинамических характеристик [8], которые зависят от геометрической формы полезной нагрузки и рассматриваемого объекта в целом. В последнем случае процедура исследований основывается на требованиях и возможностях вычислительной гидрогазодинамики [8]–[11].

## 2 Физико-математическая модель внешнего обтекания оперенных аэродинамических объектов для расчета их аэродинамических характеристик

Физико-математическая модель обтекания оперенных аэродинамических объектов высокоскоростным потоком сжимаемого газа (воздуха) необходима для определения его аэродинамических характеристик путем решения дискретных аналогов системы уравнений газодинамики. При

этом для дискретизации уравнений применяется метод конечных объемов, описанный в работе [11], с привлечением решателя на основе расчета плотности или давления как специально разработанных для задач газовой динамики [8]–[10]. Получаемая при этом информация по изменению динамических полей давления, скорости и температуры необходима для визуализации воздушного потока около обтекаемых поверхностей аэродинамического объекта, а также расчета аэродинамических сил и их моментов, характерных коэффициентов давления, трения, лобового сопротивления, подъемной силы и т.д. Таким образом, реализуется принцип продувок рассматриваемого аэродинамического объекта в виртуальной аэродинамической трубе (принцип вычислительного эксперимента) [8].

На первом шаге моделирования с использованием трехмерной модели аэродинамического объекта подготавливается расчетная модель (рисунок 2.1, а), представляющая собой замкнутый объем со множеством поверхностей, включающих в себя как сам объект, так и область окружающей среды, в которой происходит перемещение воздушных масс относительно него. Такой подход имитирует расположение рассматриваемого объекта в рабочем участке виртуальной аэродинамической трубы. Размеры расчетной области выбираются из условия минимизации влияния краевых эффектов на воздушные потоки около аэродинамического объекта, т.е. реализуется принцип его полета в свободном пространстве.

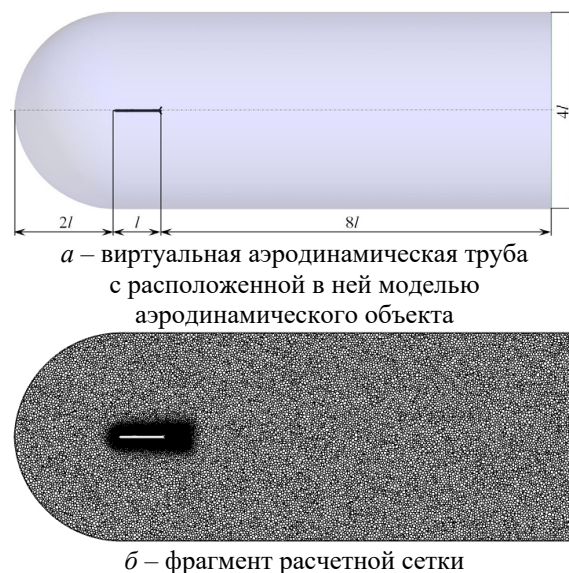


Рисунок 2.1 – Расчетная область (а) и полиэдрическая сетка (б)

Поскольку используется сеточный метод решения уравнений газовой динамики с их дискретизацией, описанный в работах [9]–[11], разбиение расчетной области вычислительными

ячейками производилось с учетом разрешения пристеночных явлений и пограничных слоев, возникающих при обтекании воздушным потоком модели аэродинамического объекта. Минимальный размер пристеночных ячеек выбирался из условия, что безразмерная толщина вязкого подслоя  $y^+ < 5$  [10], [11]. Данный факт необходим для достижения большей точности расчетов. На рисунке 2.1 б представлен вид расчетной сетки, полученной средствами ПО Ansys Meshing [12]. Расчетная сетка включала 3,5 млн. полиэдрических ячеек, что, как показали предварительные расчеты, оказалось достаточным для обеспечения сходимости по сетке.

Обтекание аэродинамического объекта набегающим потоком обычно предполагает возникновение зон турбулентного течения вблизи его поверхности. Число Рейнольдса  $Re$ , рассчитанное для рассматриваемых объектов (по калибру  $d$ , скорости набегающего потока  $V$  и кинематическому коэффициенту вязкости воздуха  $\nu$ , взятому при температуре окружающей среды), составило около  $10^7$ . Такое значение в соответствии с подходами, приведенными в работах [10], [13], подтверждает необходимость учета турбулентного характера обтекания воздушным потоком.

Для численного моделирования выбран метод RANS, который предполагает решение стационарных осредненных по Рейнольдсу [10], [13]:

- уравнений переноса импульса;
- уравнения неразрывности;
- уравнения энергии в формулировке для энтальпии.

Замыкание осредненных по Рейнольдсу уравнений сводится к определению рейнольдсовых напряжений и, как правило, к записи дополнительных дифференциальных уравнений для характеристик турбулентности с применением гипотезы о турбулентной вязкости. Для описания турбулентности использовалась SST  $k-\omega$  модель турбулентности Ментера (модель переноса сдвиговых напряжений Ментера) [14]. Модель сформулирована таким образом, что учитывает как процессы, происходящие в пограничных слоях около стенок, так и особенности развития свободных течений. В рассматриваемом случае реализуется ситуация, при которой существует пристеночное течение у поверхности аэродинамического объекта с формированием относительно большой следовой области за ним.

Для замыкания системы уравнений использовалось уравнение состояния совершенного газа для воздуха, по которому рассчитывается плотность. Удельная изобарная теплоемкость и удельная теплопроводность задаются по кусочно-линейному закону как функции от температуры, а динамический коэффициент вязкости рассчитывается по известной формуле Сазерленда [15].

Расчетная область определена следующими граничными условиями: вход, выход потока,

твердая стенка. На входе в расчетную область устанавливались число Маха, статическое давление и статическая температура (параметры окружающей среды). Интенсивность турбулентности  $Tu$  задавалась 1%, гидравлический диаметр соответствовал калибру  $d$  исследуемого объекта. На выходной границе расчетной области задавалось статическое давление (давление окружающей среды) и для сходимости итерационного процесса задавалась полная температура возвратного течения, которая равна температуре торможения, рассчитанной по газодинамическим функциям при заданных условиях окружающей среды и числе Маха.

Принято, что на выходной границе статическое давление приравнено как для набегающего потока. Следует отметить, что в задачах внешнего обтекания аэродинамического объекта возможна ситуация, когда отрывная зона, образующаяся за плохо обтекаемым телом, распространяется до выходной границы. В этом случае появляются условия для возникновения возвратного течения с выходной границы внутрь расчетной области. В данной работе выходная граница была достаточно удалена от исследуемого тела (рисунком 2.1, а), в результате чего все отрывные зоны располагались целиком внутри расчетной области [16].

На стенках обтекаемого аэродинамического объекта, контактирующих с окружающей средой, ставились условия прилипания (равенство нулю скоростей) и адиабатичности (тепловой поток равен нулю – сопряженная задача распространения тепла по материалу стенок не решалась). Для задания турбулентных характеристик (кинетической энергии турбулентных пульсаций  $k$  и завихренности  $\omega$ ) вблизи стенок применяется метод пристеночных функций с использованием логарифмического закона стенки [10], [11]. Профили турбулентных характеристик определены из соотношений для кинетической энергии

$$k = 1,5Tu^2V^2$$

и завихренности  $\omega = C_\mu^{3/4}k^{1/2}/l_t$ . Интенсивность турбулентности  $Tu = 0,16Re^{-1/8}$ . Масштаб длины турбулентности  $l_t = 0,07d$  [10], [11], [13].

Чтобы с помощью итерационных методов решить преобразованные методом конечных объемов в систему линейных алгебраических уравнений дискретные аналоги уравнений газовой динамики, необходимо задать определенное начальное приближение, с которого будет осуществляться итерационный процесс, т. е. процесс уточнения начального приближения к решению [11]. Выбор начального приближения оказывает значительное влияние на устойчивость расчета, а также на скорость его сходимости [9], [13], [16]. Так как при моделировании внешнего обтекания аэродинамического объекта можно выделить преимущественное направление потока в большей



части расчетной области, в качестве начального приближения в начале итерационного процесса в каждой ячейке расчетной области задавались такие же значения параметров потока, как и на входной границе [16].

Для решения осредненных по Рейнольдсу уравнений и уравнений SST –  $k - \omega$  модели с целью нахождения искомых функций применялись следующие численные методы:

- 1) неявный решатель по плотности или давлению;
- 2) пространственная дискретизация – схема «против потока» второго порядка точности;
- 3) вычисление потоков в решателе по плотности – схема AUSM (Advection Upstream Splitting Method);
- 4) вычисление градиентов – ячеечный метод наименьших квадратов [10], [11], [13].

Описанная выше модель на основе осредненных уравнений Рейнольдса реализована с помощью программного продукта «ANSYS Fluent 19.1» [12]. Расчеты проводились на 64 ядрах двух процессорных узлов высокопроизводительного компьютера «NANO» (ИТМО). Время расчета одного варианта, затраченное для достижения сходимости, составляло порядка 12 часов.

### 3 Тестовый расчет

Верификация физико-математической модели внешнего обтекания аэродинамического объекта, движущегося в воздухе, с оценкой точности расчета аэродинамических характеристик проведена на примере тела вращения простейшей геометрической формы – цилиндр с конической головной частью, трехмерная модель которого представлена на рисунке 3.1. Полученные из расчета аэродинамические коэффициенты сравнивались с доступными экспериментальными данными, приведенными в работе [17]. Угол при вершине конуса составлял  $\theta = 11^\circ$ , длина цилиндрической части –  $L = 7d$ , где  $d$  – диаметр цилиндра.

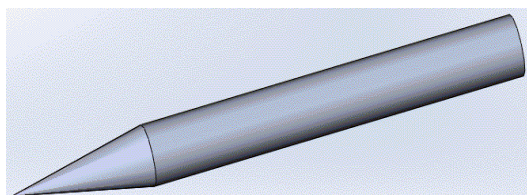


Рисунок 3.1 – Трехмерная модель составного тела «цилиндр с конической головной частью»

Численное моделирование проводилось для числа Маха  $M$  от 0,2 до 4 и стабилизированного движения (угол нутации  $\delta = 0^\circ$ ) при нормальных условиях окружающей среды по температуре и давлению ( $P_\infty = 101325$  Па,  $T_\infty = 288,15$  К). Доступные экспериментальные данные, используемые для сравнительного анализа, получены в аэродинамических трубах при реализации близких условий.

На рисунке 3.2 представлено распределение статической температуры и локального числа Маха. На обоих рисунках видно, что при обтекании цилиндра с конической головной частью образуется примыкающая к острой носовой части ударная волна. В местах резкого изменения геометрии, таких как переход с конуса на цилиндр или у основания цилиндра, происходит образование косых скачков уплотнения. В донной области за цилиндром образуется сложная структура потока в результате взаимодействия скачков уплотнения и интенсивного вихревого течения. Вихревой след, формирующий за цилиндром с конической головной частью область относительно слабо движущегося воздуха в виде конуса, имеет четко выраженные границы. За этой областью форма следа изменяется, он становится цилиндрическим. От конической части следа отходит ударная волна практически с коническим фронтом. Такое поведение потока согласуется с экспериментальными теневыми картинами, приведенными в работе [18].

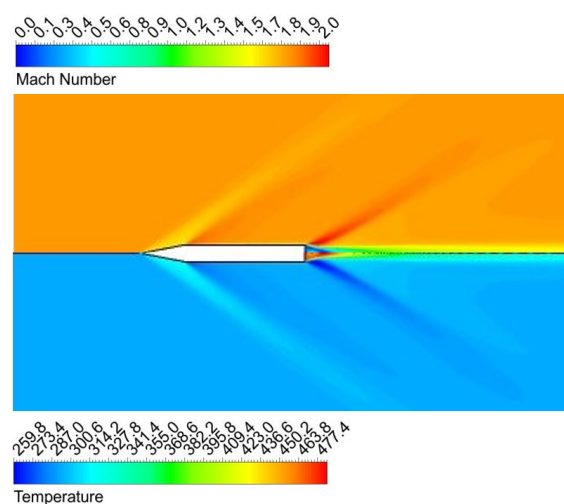


Рисунок 3.2 – Результаты численного моделирования течения воздуха вблизи цилиндра с конической головной частью при числе Маха  $M = 1,84$ : сверху – распределение локального числа Маха, снизу – статическая температура  $T, K$

На рисунке 3.3 приведены результаты по изменению коэффициента лобового сопротивления цилиндра с конической головной частью, полученные в численном моделировании и в эксперименте, описанном в работе [17]. Как видно, результаты находятся в хорошем качественном согласовании, что характеризует работоспособность применяемого расчетного метода. Это подтверждает возможность использования рассмотренного метода с продувками в виртуальной аэродинамической трубе для расчета баллистического коэффициента у разрабатываемого аэродинамического объекта с заданной формой головной части.

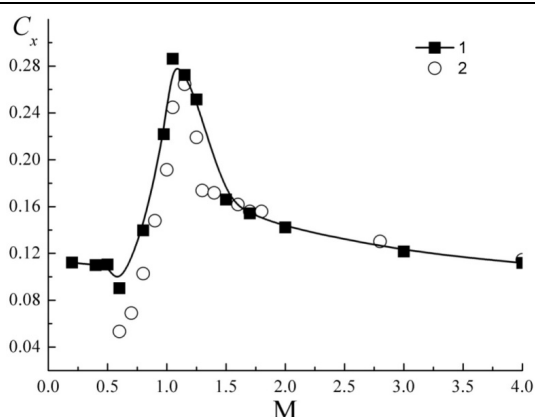


Рисунок 3.3 – Коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  в зависимости от числа Маха набегающего потока: 1 – численное моделирование; 2 – эксперимент [17]

#### 4 Баллистический коэффициент оперенного аэродинамического объекта

Баллистический коэффициент рассчитывали для двух оперенных аэродинамических объектов калибра 80 мм и одинакового удлинения ( $l/d = 16,4$ ) со следующей формой головной части:

а) острый конус со сферическим наконечником и два переходника цилиндрической формы и формы усеченного конуса («М1», с пассивной массой 8,64 кг);

б) острый конус со сферическим наконечником («М2», с пассивной массой 8,00 кг).

Как указано в работах [2], [4], для баллистических расчетов аэродинамических объектов баллистический коэффициент рассчитывается на пассивном участке траектории по отношению к заложенному закону сопротивления воздуха для нормальных условий стрельбы и при нулевой нутации. В этой связи индивидуальный закон сопротивления для рассмотренных оперенных аэродинамических объектов построен после моделирования их обтекания воздушным потоком при давлении  $P_\infty = 101325$  Па и температуре  $T_\infty = 288,15$  К для диапазона числа Маха  $M = 0,5 - 2$ .

Рисунок 4.1 демонстрирует коэффициент лобового сопротивления в зависимости от числа Маха набегающего потока для двух рассмотренных аэродинамических объектов («М1» и «М2»). Как видно, составная форма головной части модели «М1» приводит к увеличению сопротивления по сравнению с моделью «М2». При этом для модели «М2» максимальное сопротивление реализуется около значения числа Маха равного 1,05, а далее изменяется почти линейно, что согласуется с результатами для подобных объектов с простейшей геометрией [17]. Для модели «М1» этот максимум сдвинут до  $M = 1,4$ . Дозвуковая область ( $M < 0,6$ ) для обеих моделей характеризуется выходом лобового сопротивления на постоянное значение.

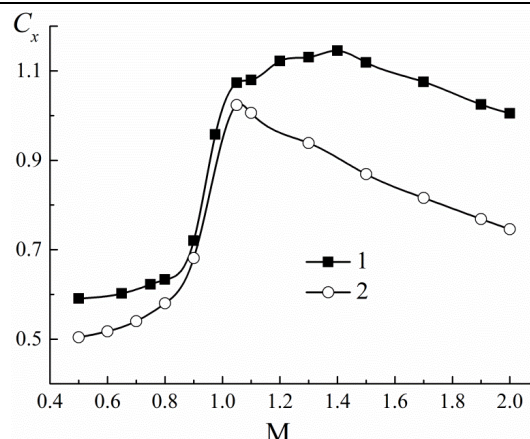


Рисунок 4.1 – Коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  в зависимости от числа Маха  $M$  набегающего потока: 1 – модель аэродинамического объекта «М1»; 2 – модель аэродинамического объекта «М2»

Как известно из работ [2], [5], [19], [20], проектирование оперенных аэродинамических объектов предполагает для предварительных расчетов использовать постоянную величину коэффициента формы  $i_x$ . Однако, как следует из данных рисунка 4.2, для закона 1958 года [6] можно рассматривать среднее значение  $i_x$  по числу Маха (1,94 для «М1»; 1,65 для «М2»), но для закона Сиаччи и закона 1943 года осреднение может вызвать погрешности в расчете. Такой результат вполне закономерен, поскольку закон 1958 года разрабатывался для оперенных снарядов и ракет, тогда как закон Сиаччи и закон 1943 года для пуль и снарядов обтекаемой формы.

Таким образом, для уточненных расчетов коэффициент формы  $i_x$  относительно эталонных законов сопротивления следует рассматривать в предположении его постоянства для выделенных характерных диапазонов скоростей или учитывать зависимость коэффициента формы от скорости (числа Маха). Поскольку обычно в технических документах на оперенные аэродинамические объекты указывается баллистический коэффициент, рассчитанный через коэффициент формы по закону Сиаччи, то далее рассмотрим его сравнение с рассчитанным по закону 1958 года [6], [20].

Нелинейное изменение коэффициента формы  $i_x$  в зависимости от числа Маха приводит к аналогичному изменению баллистического коэффициента. Как показано на рисунке 4.3, его постоянство реализуется фактически только для дозвуковой области (для «М1» баллистический коэффициент составляет 1,42 по закону 1958 года и 1,7 по закону Сиаччи; для «М2» – 1,35 и 1,6 соответственно). Тогда как для сверхзвуковой фазы полета для «М1» по закону 1958 года баллистический коэффициент меняется от 1,3 до 1,56, по закону Сиаччи от 1,33 до 1,07. Аналогично для «М2» по закону 1958 года при  $M > 1,1$  баллистический коэффициент почти постоянный и

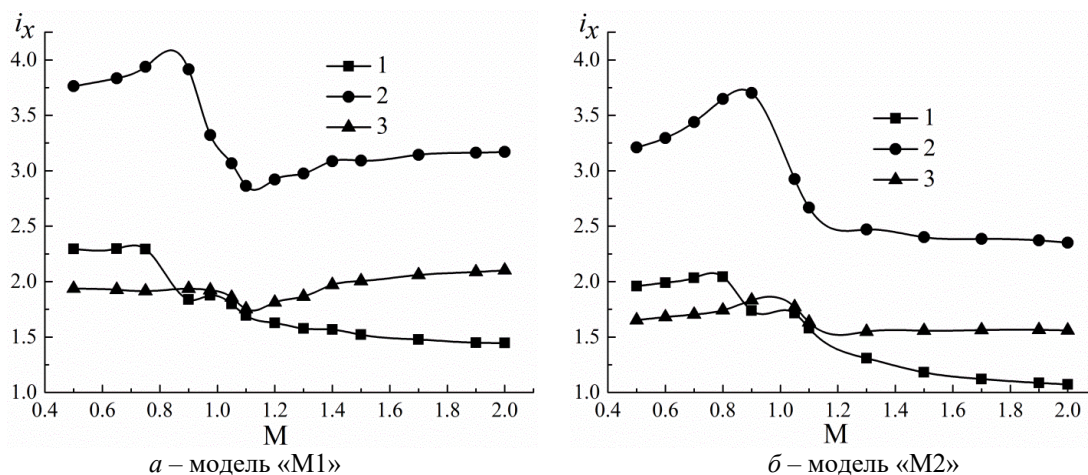


Рисунок 4.2 – Коэффициент формы  $i_x$  в зависимости от числа Маха набегающего потока при различных законах сопротивления: 1 – закон Сиаччи; 2 – закон 1943 года; 3 – закон 1958 года

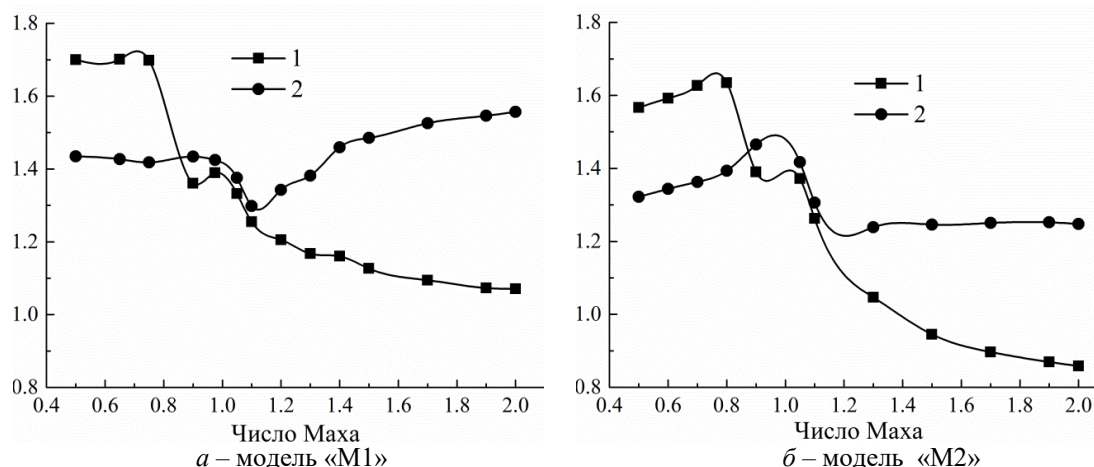


Рисунок 4.3 – Баллистический коэффициент в зависимости от числа Маха набегающего потока: 1 – закон Сиаччи; 2 – закон 1958 года

составляет около 1,24, а по закону Сиаччи меняется от 1,37 до 0,86.

В таблице 3.1 для предварительных расчетов аэродинамических объектов приведены средние значения баллистического коэффициента для обеих рассмотренных моделей («M1» и «M2») для дозвукового и сверхзвукового диапазона скоростей. Для переходной области ( $0,9 < M < 1,1$ ) могут использоваться промежуточные значения.

Таблица 3.1 – Средняя величина баллистического коэффициента для двух моделей аэродинамического объекта

Модель	Баллистический коэффициент			
	закон Сиаччи		закон 1958 года	
	$M < 0,9$	$M > 1,1$	$M < 0,9$	$M > 1,1$
«M1»	1,7	1,14	1,42	1,45
«M2»	1,6	0,98	1,35	1,26

Достоверность расчетных данных баллистических коэффициентов рассматривалась с

точки зрения сопоставления результатов, полученных по двум численным методам второго порядка точности (расчет по плотности или по давлению [9]–[11]), с расчетами, проведенными по результатам практических пусков оперенных аэродинамических объектов. Результаты практических пусков аэродинамических объектов типа «M1» предоставлены ОХП «НИИ ИП с ОП» (г. Минск, Беларусь). Значения баллистических коэффициентов, полученные расчетным методом и по результатам практических пусков, представлены на рисунке 4.4.

Как видно из рисунка 4.4, различие, вносимое используемыми численными методами, составляет порядка 5%, при этом результаты расчетов ложатся между значениями, полученными по экспериментальной методике. Незначительное отклонение свидетельствует о достоверности полученного значения баллистических коэффициентов для рассматриваемых оперенных аэродинамических объектов и целесообразности выбранного способа их определения.



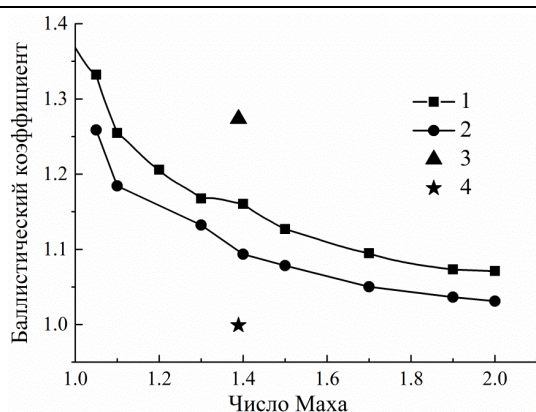


Рисунок 4.4 – Сравнение баллистического коэффициента для аэродинамического объекта типа «М1», полученного различными способами:  
 1 – расчет по плотности 2 порядок точности;  
 2 – расчет по давлению 2 порядок точности;  
 3 – практические пуски (камера 120 кадр/сек);  
 4 – практические пуски (камера 10 000 кадр/сек)

### Заключение

Построена методика вычислительного эксперимента для расчета аэродинамических характеристик оперенных аэродинамических объектов и проведена ее верификация на объекте простой формы (конус + цилиндр) с получением согласования с доступными экспериментальными данными. Методом вычислительного эксперимента рассчитаны коэффициенты формы и баллистические коэффициенты в зависимости от числа Маха для аэродинамических объектов с двумя формами головной части.

Баллистические коэффициенты получены по закону 1943 года, по закону 1958 года и по закону Сиаччи в виде функций от числа Маха. Результаты выполненных исследований с методикой вычислительного эксперимента для определения баллистических характеристик аэродинамических объектов сложной формы, индивидуальные нормированные законы сопротивления и зависимости баллистического коэффициента от числа Маха и режима полета могут использоваться для установления исходных данных для пуска, а также характеристик траектории полета аэродинамических объектов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Павлюк, Ю.С. Баллистическое проектирование ракет: учебное пособие для вузов / Ю.С. Павлюк. – Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1996. – 92 с.
2. Биматов, В.И. Внешняя баллистика: учебное пособие. Ч. 1 / В.И. Биматов, В.Д. Мерзляков, В.П. Степанов. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1993. – 168 с.
3. Алемасов, В.Е. Теория ракетных двигателей: учебник для студентов высших технических учебных заведений / В.Е. Алемасов, А.Ф. Дрегаллин, А.П. Тишин; под ред. В.П. Глушко. – М.: Машиностроение, 1989. – 464 с.

4. *Авиационные средства поражения* / Ф.П. Миропольский [и др.]; под ред. Ф.П. Миропольского. – М.: Военное изд-во, 1995. – 255 с.

5. *Боевая авиационная техника: авиационное вооружение* / Д.И. Гладков [и др.]; под ред. Д.И. Гладкова. – М.: Военное изд-во, 1987. – 279 с.

6. *ГОСТ В 24288-80 «Снаряды неуправляемые артиллерийские, реактивные, активно-реактивные. Метод расчета траектории полета»* (государственный военный стандарт РБ). – 55 с.

7. Харитонов, А.М. Техника и методы аэрофизического эксперимента. Ч. 1. Аэродинамические трубы и газодинамические установки: учебник / А.М. Харитонов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 220 с.

8. *Роль компьютерного моделирования и физического эксперимента в исследованиях аэрогазодинамики ракетно-космических систем в процессе проектирования* / Н.П. Алабова [и др.] // *Космическая техника и технологии*. – 2014. – № 3 (6). – С. 14–21.

9. Молчанов, А.М. Математическое моделирование задач газодинамики и тепломассообмена: монография / А.М. Молчанов. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 206 с.

10. Wilcox, D.C. *Turbulence modeling for CFD* / D.C. Wilcox. – La Canada, California: DCW Industries Inc, 1998. – 537 p.

11. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоиздат, 1984. – 152 с.

12. *ANSYS FLUENT CAE Expert* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://cae-expert.ru/product/ansys-fluent>. – Дата доступа: 16.03.2021.

13. Гарбарук, А.В. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений / А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 88 с.

14. Menter, F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications / F.R. Menter // *AIAA Journal*. – 1994. – Vol. 32 (8). – P. 1598–1605.

15. Варгафтик, Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б. Варгафтик. – М.: Физматлит, 1963. – 708 с.

16. Пашков, В.А. Тепло-массообмен на поверхности элементов конструкции гиперзвуковых летательных аппаратов самолетных схем при полете в атмосфере: дис. к.т.н.: 01.04.14 / В.А. Пашков. – Москва, 2017. – 148 л.

17. Петров, К.П. Аэродинамика тел простейших форм / К.П. Петров – М.: Факториал, 1998. – 432 с.

18. Ван-Дайк, М. Альбом течения жидкости и газа / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1986. – 184 с.

19. Коновалов, А.А. Внешняя баллистика / А.А. Коновалов, Ю.В. Николаев. – М.: ЦНИИ информации, 1979. – 228 с.

20. Сычев, А.И. Неуправляемые авиационные ракеты калибра 80 мм: учебное пособие / А.И. Сычев, В.Г. Мартиросян, В.А. Перескоков. – М.: Изд-во МАИ, 2019. – 76 с.

Поступила в редакцию 25.03.2021.

## АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭМОЦИЙ ЗАИНТЕРЕСОВАННОСТИ У ОБУЧАЕМЫХ ПО МИМИКЕ ЛИЦА

С.В. Садов<sup>1</sup>, О.М. Демиденко<sup>2</sup>, И.А. Ерофеев<sup>1</sup>, В.С. Садов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск

<sup>2</sup>Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

## ALGORITHMS FOR DETERMINING THE EMOTIONS OF INTEREST IN STUDENTS BY FACIAL EXPRESSIONS

S.V. Sadau<sup>1</sup>, O.M. Demidenko<sup>2</sup>, I.A. Yerafeyeu<sup>1</sup>, V.S. Sadau<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State University, Minsk

<sup>2</sup>Francisk Skorina Gomel State University

Представлены разработанные алгоритмы определения эмоций заинтересованности у обучаемых по мимике с использованием ключевых точек на изображении лица, позволяющие организовать в реальном времени эффективный контроль за качеством учебного процесса при дистанционных формах обучения.

**Ключевые слова:** алгоритмы, эмоции, изображения лица, лицевые ориентиры, классификатор.

The developed algorithms for determining the emotions of interest in students by facial expressions using key points on the face image are presented. These algorithms allow organizing effective real-time control over the quality of the educational process in distance learning.

**Keywords:** algorithms, emotions, facial images, facial marks, classifier.

### Введение

В современном мире всё больше интеллектуальной деятельности уходит в интернет, в том числе и обучение. Это привело к потере, в значительной мере, обратной связи между обучающимися и преподавателями, затруднило управление процессом обучения в реальном времени.

В связи с этим актуальными становятся вопросы создания инструмента для контроля качества занятий, происходящих онлайн, посредством оценки на эмоциональном уровне степени вовлеченности обучающихся в учебный процесс.

Эмоции (emotion – волнение, возбуждение) – субъективные состояния человека, возникающие в ответ на воздействие внешних и внутренних раздражителей и проявляющиеся в форме непосредственных переживаний (удовольствия или неудовольствия, радости, страха, гнева и т. д.) [1].

Эмоции человек не только переживает, но и выражает внешне в виде телесных проявлений, прежде всего мимики.

Среди эмоциональных состояний человека занятого умственным трудом можно выделить интерес, сосредоточенность и недоумение, которые стимулируют к занятию этим видом деятельности, особенно к обучению [2], [3]. С другой стороны, наличие таких эмоций у обучающихся может служить оценкой качества учебного процесса.

В процессе работы авторы столкнулись с проблемой отсутствия баз данных лиц, выражающих интересующие нас эмоции. В связи с

чем было принято решение создать собственную базу данных, разработать процедуры преобразования полученных данных, выделить их характерные особенности и разработать классический алгоритм оценки эмоций по мимике, основанный на лицевых ориентирах [4].

Для этого велись записи лекций по предмету «Интегральная Электроника» в БГУ, а также мероприятий, посвящённых настольным играм.

В рамках исследования теоретических данных и обработки записей были проверены гипотезы о том, что лицо можно разделить на области и анализировать выражение лица по совокупности движений лицевых мышц данных областей. Были выделены следующие области: брови, губы, глаза. Так же было решено скуку или усталость принять за нейтральное выражение.

### 1 Алгоритм определения эмоционального состояния обучаемых по мимике

В соответствии с предложенным алгоритмом предполагается, что учебная аудитория оснащена необходимым оборудованием для видео или фотосъемки лиц, обучаемых во время их работы. Это позволяет преподавателю контролировать и корректировать, при необходимости в реальном времени, ход учебного процесса или проводить его анализ постфактум по сохраненным видеоданным.

Структурная схема алгоритма определения эмоций заинтересованности обучаемых по выражениям их лиц приведен на рисунке 1.1.

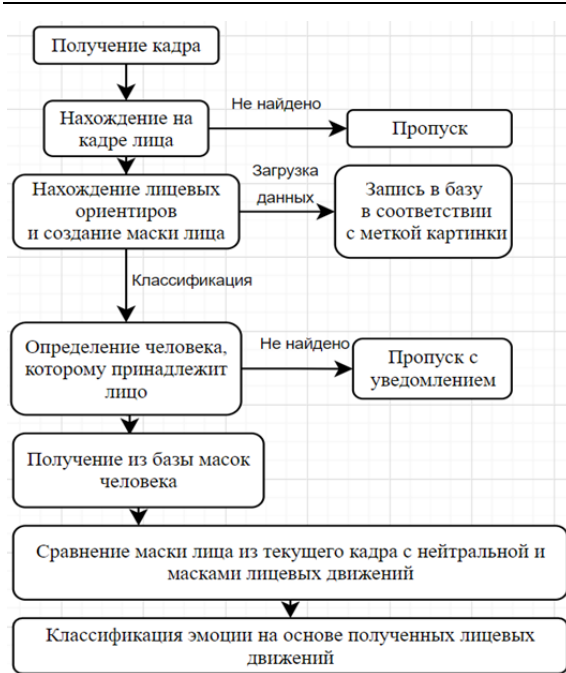


Рисунок 1.1 – Структурная схема алгоритма определения эмоций заинтересованности по изображению лица

В общем виде алгоритм можно разбить на два этапа: этап загрузки данных и этап анализа текущих изображений обучаемых и оценки степени их вовлеченности в учебный процесс.

На этапе загрузки формируется база данных группы обучаемых, которая содержит предварительно полученные изображения их лиц, выражающие нейтральную эмоцию и эмоции с различной степенью заинтересованности. По этим изображениям для каждого обучаемого с использованием системы лицевых ориентиров создаются так называемые маски или эмоциональные портреты.

На втором этапе поступающий видеоряд разбивается на фреймы, на которых осуществляется поиск лиц. Если лицо обнаружено, то на нем находятся лицевые ориентиры, высчитывается маска лица, определяется, какому человеку из известных системе оно принадлежит. Если с заданной точностью человек не принадлежит к группе известных системе людей, то алгоритм сигнализирует об этом и пропускает картинку. Если лицо принадлежит знакомому системе человеку, то извлекаются маски данного человека из базы данных, созданной на этапе загрузки данных.

Затем определяется, выражает ли найденное лицо эмоцию из списка интересующих нас. Для этого обнаруженное изображение лица и его изображения, взятые из базы данных, сравниваются. С учетом того, что выражение лица можно представить как совокупность смещений отдельных его областей, мы пришли к следующему

алгоритму сравнения: обнаруженное изображение лица сравнивается с его изображением, выражающим нейтральную эмоцию, взятым из базы, и их разница разбивается на фрагменты. Каждый фрагмент сравнивается с соответствующими масками смещений. Полученная совокупность смещений далее передается в классификатор, который на основании байесовской сети и полученной совокупности фрагментов определяет наличие той или иной эмоции из интересующих.

## 2 Алгоритм формирования структуры «маска лица»

Введем следующие определения и понятия:

1. Лицевой ориентир – характерная точка на лице. Такой точкой может быть кончик носа, переносица, левый уголок глаза, правый уголок губ и т. д.

2. Якорная точка – лицевой ориентир, относительно которого измеряется положение остальных точек.

3. Нейтральное лицо – лицо, характерное для человека в момент расслабленности, спокойствия, отсутствия проявляемых эмоций.

4. Эмоциональное лицо – лицо, характерное для человека в момент яркого выражения какой-либо эмоции.

5. Нормальное расстояние – значение абсолютного смещения лицевых ориентиров, принятое за единицу измерения относительного смещения.

6. Маска лица – таблица значений, характеризующих положение точек на лице.

7. Таблица отклонений – таблица значений, характеризующих смещение точек одной маски относительно другой маски.

8. Лицевое движение – смещение области лица, характеризующее совокупностью смещений точек в данной области.

9. Дополнительное расстояние – расстояние между парой точек, ни одна из которых не является якорной.

10. Маска лицевого движения – таблица отклонений для фрагмента лица, характеризующая конкретное лицевое движение.

Для разметки лица использовалась библиотека dlib [5], которая позволяет найти лицо на изображениях и установить местоположение лицевых ориентиров.

В данной работе применялся 68 точечный шаблон лицевых ориентиров.

Примеры пронумерованного шаблона маски, нейтрального и эмоционального лиц с обозначенными ориентирами показаны на рисунках 2.1–2.2.

Для анализа лица использовать абсолютное значение положения точки (лицевого ориентира) представляется неэффективно, т. к. при повороте, наклоне и других движениях головы точки смещаются, при этом выражение лица может оставаться прежним.



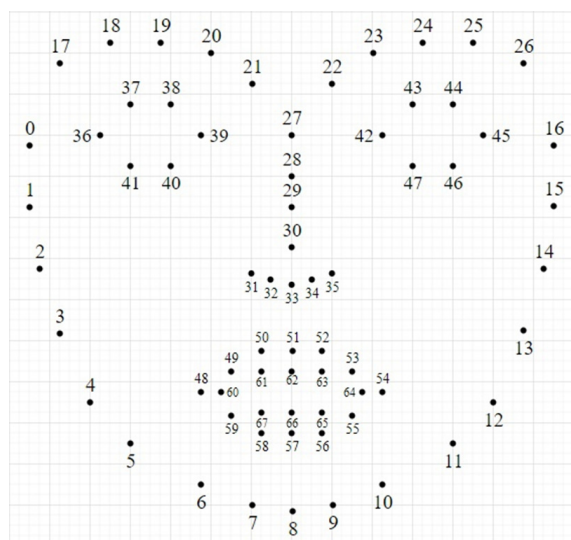


Рисунок 2.1 – Пронумерованный шаблон лицевых ориентиров

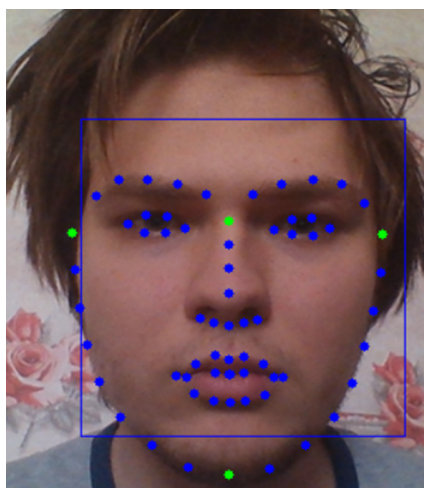


Рисунок 2.2 – Нейтральное лицо с установленными ориентирами

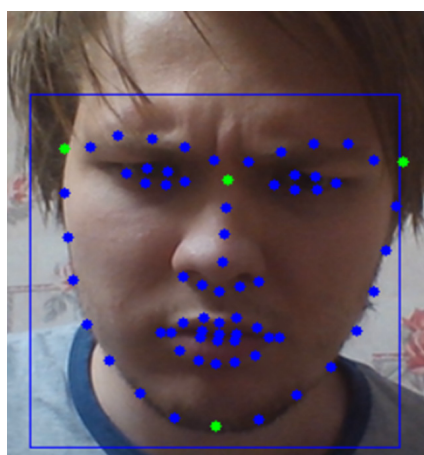


Рисунок 2.3 – Эмоциональное лицо с установленными ориентирами

Для введения относительных значений были выбраны точки наименее подвижные и наиболее показательные в рамках интересующих нас эмоций. Опытным путём было выявлено, что наиболее подходящими под эти цели являются:

- *переносица* – точка 27,
- *левый висок* – точка 0,
- *правый висок* – точка 16,
- *подбородок* – точка 8.

Назовём эти точки якорными.

Для нормализации расстояний на лице было использовано следующее, эмпирически полученное, выражение:

$$0,05(r_g + r_v) = r_{norm},$$

где  $r_g$  – это расстояние между висками,

$r_v$  – расстояние между переносицей и подбородком,

$r_{norm}$  – норма, единица измерений лицевых смещений.

Множитель 0,05 обусловлен тем, что изменения между нейтральным лицом и эмоциональным лицом, о котором речь пойдёт далее, значительно меньше расстояния между якорными точками.

Положение каждого лицевого ориентира описывается расстояниями от него до 4 якорных точек. Например, левый конец левой брови, точка номер 17, описывают 4 расстояния:

$$r_0 = 1,17, \quad r_8 = 10,726,$$

$$r_{16} = 10,381, \quad r_{27} = 4,899,$$

где  $r_i$  – расстояния до соответствующих якорных точек, описанных выше.

Алгоритм нахождения положения лицевого ориентира на лице приведен на рисунке 2.4.



Рисунок 2.4 – Алгоритм определения положения лицевого ориентира на лице

Совокупность полученных расстояний от лицевых ориентиров до якорных точек и будет маской лица.



Для более точной регистрации поджатия губ, открывания рта и глаз в маску лица дополнительно вводятся расстояния, характеризующие позиции верхнего и нижнего края каждой губы или её толщину, нижнего края верхней губы и верхнего края нижней губы или расстояния между губ, а также верхнего века и нижнего века относительно друг друга соответственно. Для этого выделяются множества точек, характеризующих соответствующие области, и из этих множеств берутся пары точек. Например, точка 50 и точка 61 принадлежат множеству верхнего края верхней губы и нижнего края верхней губы соответственно, и находятся напротив друг друга в маске. Измеряется абсолютное расстояние между этими двумя точками и делится на норму. Совокупность таких расстояний, записанных слева направо, и будет характеризовать позиции соответствующих областей относительно друг друга. Назовём эти расстояния дополнительными.

Пример табличного описания маски нейтрального лица через дополнительные расстояния приведен в таблице 2.1, а табличное описание дополнительных расстояний нейтрального лица в таблицах 2.2 и 2.3.

Таблица 2.1 – Табличное описание маски нейтрального лица

n	0	8	16	27
0	0,0	10,0656	11,1442	5,6079
1	1,4707	8,8001	11,0753	5,7889
2	2,8918	7,6115	11,1357	6,2419
3	4,3191	6,4753	11,3239	6,9207
4	5,6621	5,3953	11,4906	7,6183
5	6,9175	4,2304	11,4502	8,1729
6	8,0572	2,9035	11,1006	8,5069
7	9,0872	1,545	10,6083	8,7463
8	10,0656	0,0	9,8572	8,8558
9	10,836	1,5297	8,9182	8,7968
10	11,2969	2,8589	7,8982	8,5551
11	11,5269	4,1158	6,738	8,1381
12	11,4684	5,189	5,521	7,5341
13	11,3343	6,3033	4,1978	6,8765
14	11,1708	7,4516	2,8042	6,2391
15	11,1271	8,6382	1,4217	5,8207
16	11,1442	9,8572	0,0	5,6003
17	1,697	10,6999	10,1986	4,6022
18	2,6119	10,9259	9,5649	4,0249
19	3,4803	10,7375	8,5957	3,1398
20	4,3023	10,3787	7,5601	2,1978
21	5,0366	9,9044	6,5663	1,282
22	6,5411	9,8265	5,0354	1,2315
23	7,5771	10,3445	4,3054	2,2165
24	8,5973	10,6403	3,4782	3,1342
25	9,5822	10,8235	2,6221	4,0377
26	10,259	10,5918	1,6874	4,6558
27	5,6079	8,8558	5,6003	0,0

n	0	8	16	27
28	5,6119	8,0411	5,5407	0,8148
29	5,6798	7,2255	5,6541	1,6305
30	5,9319	6,3565	5,843	2,4993
31	5,3046	5,5396	7,2735	3,6431
32	5,8457	5,297	6,8336	3,6541
33	6,3629	5,1605	6,3891	3,6974
34	6,8284	5,3029	5,8093	3,6114
35	7,2165	5,4864	5,3295	3,5971
36	2,1296	9,3015	9,0408	3,4803
37	2,8132	9,3498	8,4162	2,8268
38	3,5107	9,1738	7,7147	2,1213
39	4,0744	8,6358	7,0786	1,5555
40	3,4226	8,6563	7,7229	2,2159
41	2,716	8,8987	8,4309	2,904
42	7,1168	8,5332	4,0329	1,5976
43	7,8269	9,0664	3,388	2,2298
44	8,5311	9,2264	2,6876	2,9378
45	9,1265	9,1446	2,0361	3,5645
46	8,5346	8,7166	2,6097	3,0171
47	7,8269	8,5436	3,3176	2,3206
48	6,2528	3,8203	8,9537	5,9127
49	6,3434	3,9699	8,0497	5,2173
50	6,6178	4,1033	7,3534	4,8245
51	7,0594	3,9654	7,0093	4,8916
52	7,4205	4,1101	6,5081	4,7953
53	8,1839	3,9509	6,1852	5,2204
54	9,0742	3,7544	6,1173	5,9269
55	8,7849	3,039	6,8996	6,1802
56	8,3739	2,6634	7,4925	6,2584
57	8,0352	2,5531	7,9141	6,3033
58	7,595	2,7166	8,2428	6,2327
59	7,0617	3,0671	8,6479	6,1806
60	6,4424	3,669	8,6786	5,807
61	7,0292	3,5107	7,6921	5,4171
62	7,4181	3,4222	7,3383	5,4345
63	7,7897	3,5187	6,8885	5,3912
64	8,7785	3,6439	6,2808	5,7841
65	7,8598	3,4114	6,9609	5,4996
66	7,4925	3,3136	7,4072	5,5431
67	7,1069	3,4032	7,757	5,525

Таблица 2.2 – Табличное описание дополнительных расстояний нейтрального лица (губы)

	Губы, дополнительные расстояния		
Верхняя губа	0,5332	0,4887	0,5793
Между губ	0,0993	0,0993	0,0889
Нижняя губа	0,801	0,7998	0,7998

Таблица 2.3 – Табличное описание дополнительных расстояний нейтрального лица (глаза)

	Глаза, дополнительные расстояния	
Левый глаз	0,5793	0,5844
Правый глаз	0,5776	0,6236

### 3 Алгоритм записи «лицевого движения»

Для того что бы регистрировать лицевые движения или, согласно введённому определению, смещения, нам нужен эталон. Для этого создаётся маска нейтрального лица по алгоритму, приведённому ранее.

Далее для лиц, выражающих крайнюю степень интересующей нас эмоции, так же создаётся маска. После чего полученные значения основной маски, т. е. маски без дополнительных расстояний, пересчитываются в соответствии с выражением:

$$\frac{r_{new}^{in}}{r_e^{in}} - 1 = d^{in},$$

где  $n$  – номер ориентира,

$i$  – номер якорной точки,

$r_{new}$  – полученное расстояние,

$r_e$  – эталонное значение, взятое из таблицы-

описания маски нейтрального состояния.

Значения дополнительно введённых расстояний определяются по формуле:

$$\frac{r_{new}^n}{r_e^n} - 1 = d^{in},$$

где  $n$  – номер пары точек,

$r_{new}$  – полученное расстояние,

$r_e$  – эталонное значение, взятое из таблицы-

описания расстояния в нейтральном состоянии.

Таким образом определяется изменение положения лицевых ориентиров и дополнительных расстояний относительно якорных точек.

Далее разделяем таблицу отклонений точек на две области, сосредоточенные вокруг глаз и губ соответственно и получаем крайнее положение того или иного лицевого движения, которым является совокупность смещений точек соответствующей области при выражении интересующей нас эмоции. Назовём это маской лицевого движения.

Маски, характеризующие губы и глаза, также дополняются изменениями дополнительных расстояний. Так, например, в маску правого глаза после строки, соответствующей точке 47 (последняя точка, характеризующая правый глаз), в новую строку сначала записывается число, соответствующее изменению относительного расстояния между точками 43 и 47, за ним записывается число, описывающее расстояние между точками 44 и 46. Таким образом мы записываем с новой строки интересующую нас область слева направо.

Для маски губ добавляется три строки, первая из которых соответствует толщине верхней губы, вторая – расстоянию между губами, третья – толщине нижней губы.

Так как одна и та же эмоция может характеризоваться различными выражениями лица, мы берём каждое такое выражение и повторяем выше описанные операции.

Алгоритм определения лицевых движений представлен на рисунке 3.1, а пример их табличного описания – в таблицах 3.1, 3.2.

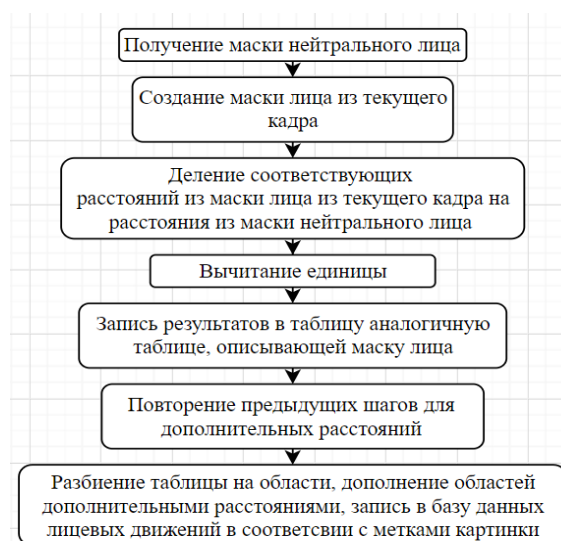


Рисунок 3.1 – Алгоритм определения лицевых движений

Таблица 3.1 – Пример табличного описания лицевых движений бровей

Левая бровь вверх				
$n$	0	8	16	27
17	0,2702	0,0136	0,0036	0,0356
18	0,2115	0,0314	0,0168	0,0793
19	0,1512	0,0446	0,0302	0,1491
20	0,0954	0,0415	0,0308	0,2149
21	0,0437	0,0271	0,03	0,309
Левая бровь вниз				
$n$	0	8	16	27
17	-0,2343	-0,0267	0,0021	0,0135
18	-0,1183	-0,0314	-0,0124	-0,0149
19	-0,0518	-0,0471	-0,0293	-0,0704
20	-0,0139	-0,0575	-0,0392	-0,1479
21	0,0262	-0,0582	-0,0518	-0,324
Правая бровь вверх				
$n$	0	8	16	27
22	0,0713	0,0475	0,0161	0,376
23	0,0659	0,0482	0,045	0,1866
24	0,0607	0,0543	0,0993	0,1248
25	0,0442	0,0391	0,137	0,0543
26	0,0194	0,0103	0,1329	-0,0102
Правая бровь вниз				
$n$	0	8	16	27
22	-0,0292	-0,0349	0,0113	-0,2217
23	-0,0257	-0,0464	-0,0295	-0,1495
24	-0,0103	-0,0361	-0,0827	-0,0615
25	-0,0034	-0,0277	-0,1454	-0,0312
26	0,0071	-0,019	-0,2471	-0,0084

Таблица 3.2 – Пример табличного описания лицевых движений губ

n	Улыбка			
	0	8	16	27
48	-0,026	0,2227	0,075	-0,0818
49	0,0625	0,0391	0,0904	-0,0296
50	0,101	-0,0412	0,093	-0,0029
51	0,1103	-0,0639	0,0963	0,008
52	0,1089	-0,0449	0,0895	0,0016
53	0,0914	0,052	0,0505	-0,0435
54	0,0723	0,2404	-0,0401	-0,101
55	0,0715	0,1577	0,0202	-0,0778
56	0,076	0,0695	0,052	-0,0557
57	0,0741	0,0415	0,0609	-0,0508
58	0,0742	0,0287	0,0693	-0,043
59	0,0315	0,1391	0,0705	-0,0667
60	-0,0126	0,1989	0,0835	-0,0738
61	0,0826	-0,0035	0,082	-0,0309
62	0,0878	-0,0124	0,0783	-0,0315
63	0,0885	0,0069	0,0701	-0,0377
64	0,0817	0,1843	-0,0092	-0,0819
65	0,0887	0,0255	0,0595	-0,0454
66	0,0875	0,0031	0,0683	-0,0406
67	0,0765	0,012	0,0776	-0,0399
Верхняя губа	0,429	0,3317	0,379	
Между губ	0,0474	0,067	0,067	
Нижняя губа	0,7123	0,665	0,7107	

#### 4 Классификация эмоций

Наличие на текущем кадре анализируемого видеоряда интересующей эмоции определяется по результатам сравнения полученных на текущем кадре масок лицевых движений в соответствии с выше описанными алгоритмами, с эталонными масками лицевых движений из базы данных.

В качестве классификатора определения наличия требуемой эмоции был использован

байесовский классификатор в виду его простоты и высокой эффективности для подобного рода задач, а также нетребовательности к размеру обучающей выборки [6], [7].

Математическая модель данного классификатора имеет вид:

$$p(C | F_1, F_2, F_3) = \frac{1}{Z} p(C) \prod_{i=1}^3 p(F_i | C),$$

где  $p(C | F_1, F_2, F_3)$  – вероятность наблюдения эмоции  $C$  при условии регистрации лицевого движения  $F_1$  в области бровей,  $F_2$  в области глаз и  $F_3$  в области губ,  $Z = p(F_1, F_2, F_3)$  – масштабный множитель.

Глаза и брови было решено не разделять из-за их высокой корреляции, которая негативно сказывается на качестве работы классификатора ввиду предположения о независимости признаков.

Соответственно, функция классификатора определяется следующим образом:

$$classify(f_1, f_2, f_3) = \arg_c \max_{p(C=c)} \prod_{i=1}^3 p(F_i = f_i | C = c).$$

В рамках работы было решено обучить существующую модель из библиотеки scikit-learn на основе собранной базы данных.

Если уверенность в наличии эмоции не превысит заданный порог ни для одной из эмоций – система помечает лицо как нейтральное. В противном случае система перечислит все эмоции в порядке убывания уверенности в их наличии.

#### 5 Апробация алгоритма

Важнейшим модулем разработанной системы является модуль выделения лицевых движений. Всего он выделил 10 лицевых движений и показал хороший результат: 5% ложно отрицательных и 13% ложно положительных ошибок (рисунок 5.1).

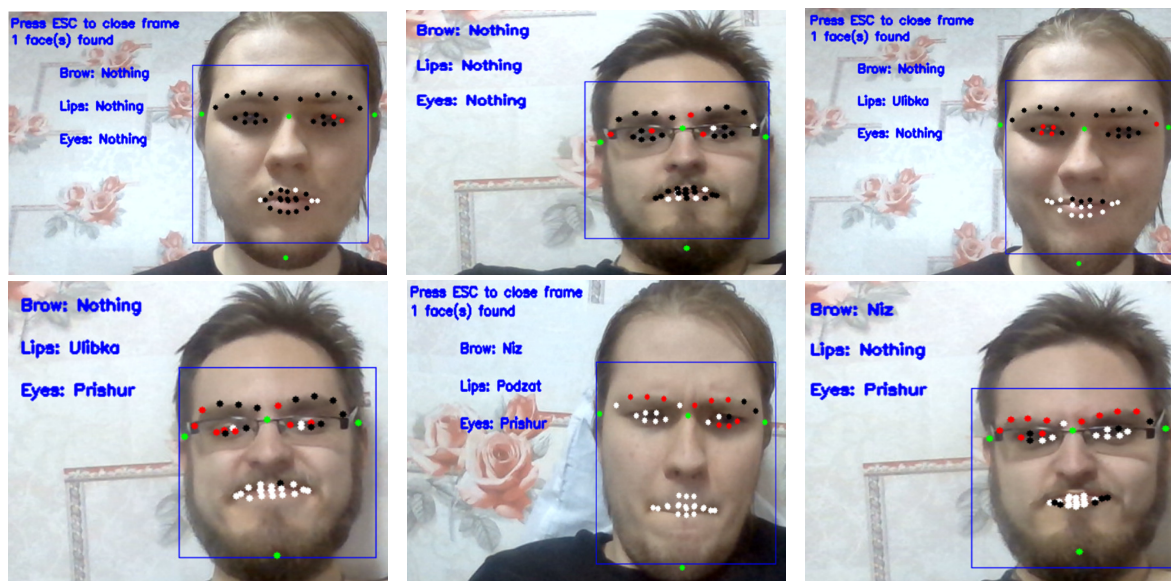


Рисунок 5.1 – Пример работы модуля регистрации лицевых движений

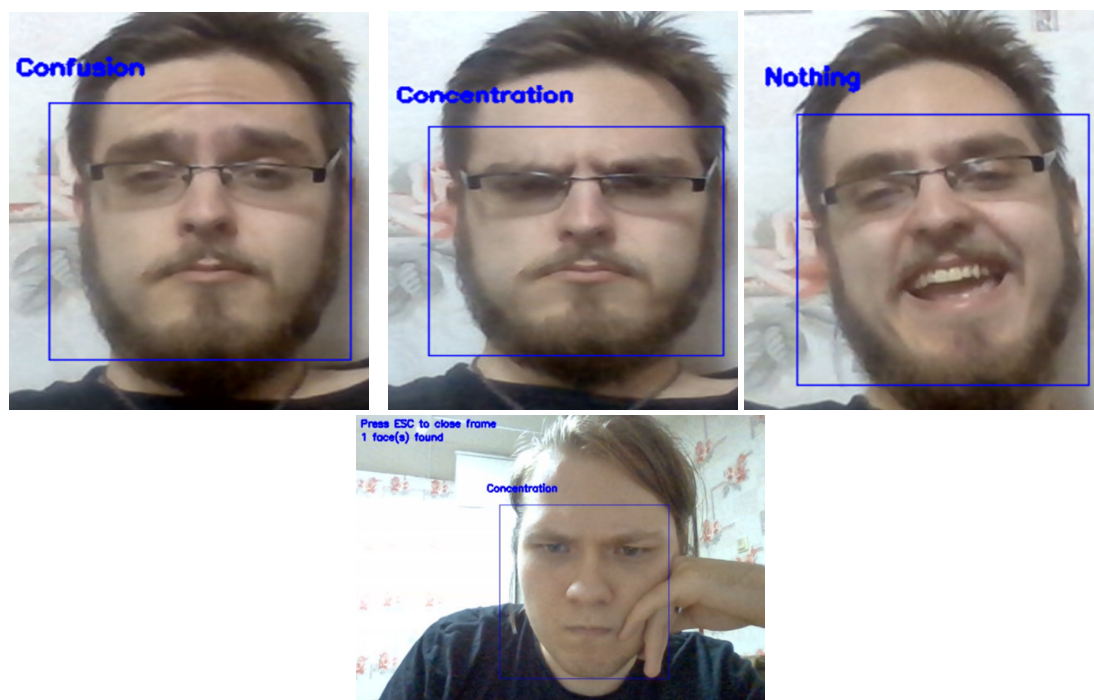


Рисунок 5.2 – Пример работы модуля выделения эмоций

Тестирование алгоритма выделения эмоции показало точность его работы 75% (рисунок 5.2). Связано это с недостаточным объемом базы данных для обучения классификатора.

#### Заключение

Широкое внедрение в образовательную сферу информационных технологий и дистанционных форм обучения потребовало создания соответствующей инфраструктуры и учебно-методического обеспечения.

В данной работе, исходя из известного предположения, что эмоциональное состояние человека в значительной мере влияет на его работоспособность, в том числе и в процессе его обучения, представлены результаты разработки алгоритмов определения наличия эмоций интереса, сосредоточенности и недоумения у обучающихся по мимике на основании анализа изображений их лиц с использованием лицевых ориентиров. Степень вовлеченности обучающихся в процесс обучения в значительной мере проявляется при выражении ими, в первую очередь, этих эмоций.

Тестирование алгоритма выделения интересных эмоций при использовании обученного на собственной ограниченной базе данных байесовского классификатора, показало точность его работы 75%, что позволяет на хорошем уровне управлять учебным процессом в реальном времени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинойн, Р.В.* Физиология эмоций: учеб.-метод. пособие / Р.В. Гинойн, А.Е. Хомутов // Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2010. – 66 с.
2. *Изард, К.Э.* Психология эмоций / К.Э. Изард. – СПб.: Питер, 2012. – 464 с.
3. *Renninger, K.A.* Effect of interest on attentional shift, recognition and recall in young children / K.A. Renninger, R.H. Wozniak // *Developmental Psychology*. – 1985. – Vol. 21, № 4. – С. 624–632.
4. *Face recognition homepage* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.face-rec.org/databases/>. – Дата доступа: 04.05.2016.
5. *Dlib C++ Library* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://dlib.net/>. – Дата доступа: 01.06.2021.
6. *Scikit-learn: machine learning in Python* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://scikit-learn.org/stable/index.html>. – Дата доступа: 01.04.2021.
7. *Rish, I.* An Empirical Study of the Naïve Bayes Classifier, *IJCAI 2001* / I. Rish. – *Work Empir Methods*. – *Artif Intell*.

Поступила в редакцию 23.04.2021.



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

## GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.



Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).