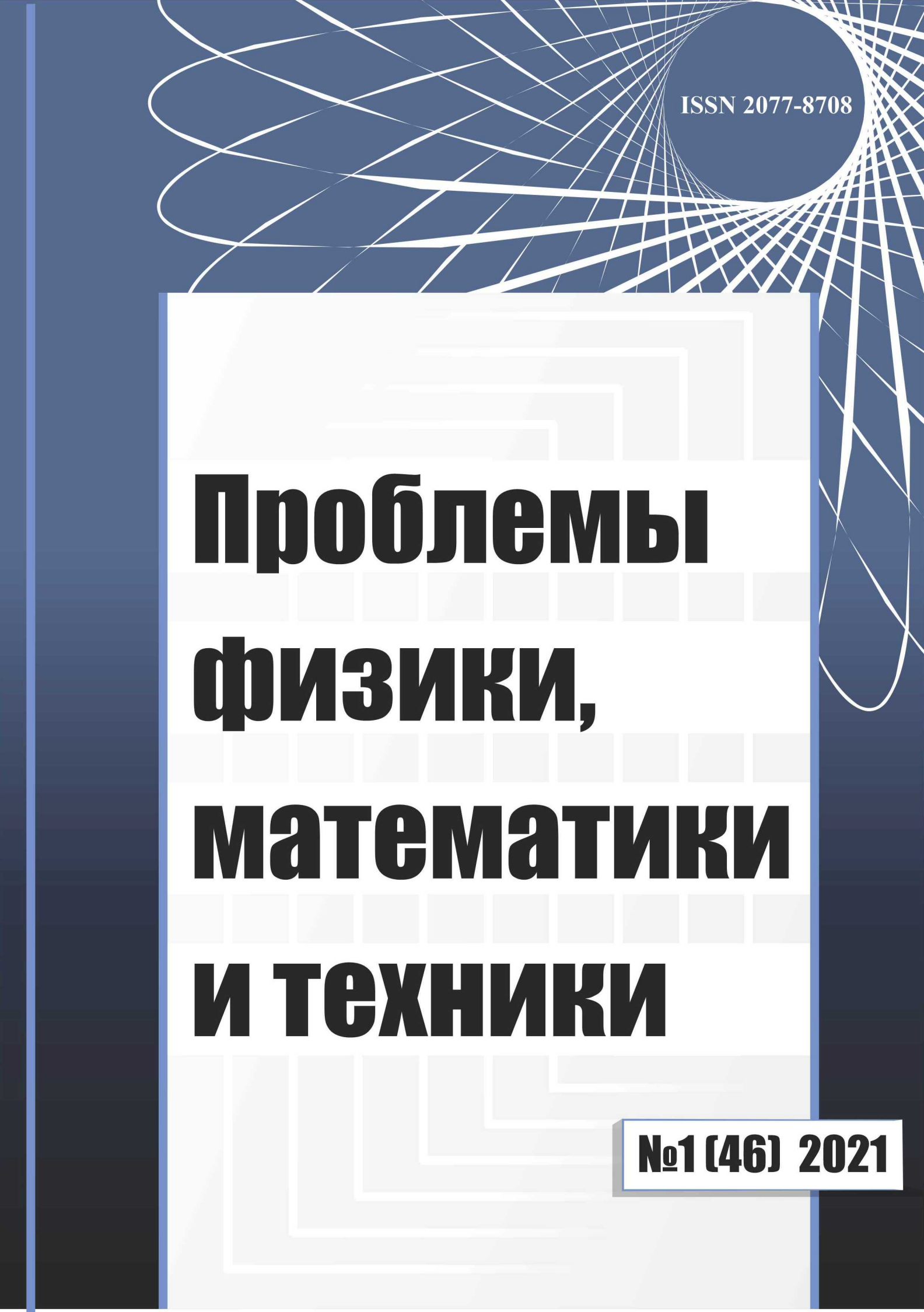




ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№1 (46) 2021

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (46) 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Андреев В.В.** Методика вычисления сечения бинарных реакций с поляризованными частицами 7
- Гиргель С.С.** Решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. III. Пространственно-временные волновые пакеты Куммера – Куммера и Трикоми – Куммера с непрерывным угловым индексом 13
- Кулак Г.В., Ропот П.И., Бестугин А.Р., Шакин О.В.** Акустооптический спектроанализатор на бесселевых световых пучках 19
- Кулеш Е.А., Рогачёв А.В., Пилипцов Д.Г., Цзян Сяохун, Руденков А.С.** Структура и свойства а-С покрытий, содержащих металлы и продукты их взаимодействия с азотом, углеродом 24
- Федосюк В.М.** Механизм роста пленок висмута на начальных стадиях электрохимического осаждения 31
- Ярмоленко М.А., Саркисов О.А., Имин Лю, Рогачёв А.В.** Влияние плазменной обработки покрытий на основе кремнийорганических полимеров, осажденных методом электроннолучевого диспергирования, на их структуру и морфологию 38

МАТЕМАТИКА

- Гальмак А.М.** О порождающих множествах l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ 44
- Йи С., Каморников С.Ф., Тютянов В.Н.** Об одном свойстве наследственных насыщенных решеточных формаций 50
- Кузьмина Е.В.** Обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка с рациональным коэффициентом специального вида 54
- Малинковский Ю.В., Немилостивая В.А.** Квазиобратимость сетей Джексона с экспоненциальным ограничением на время пребывания заявок 62
- Рябченко Н.В., Старовойтов А.П.** Рациональная аппроксимация функций Миттаг – Леффлера 65

ИНФОРМАТИКА

- Акиншева И.В., Филиппова А.А.** Реализация алгоритма расчета логистических затрат по доставке молока 69
- Демиденко О.М.** Создание моделей вычислительного процесса и рабочей нагрузки на локальную вычислительную сеть 74
- Кротюк Ю.М., Кузнечик О.О., Ткаченко В.В.** Информационная поддержка конструкторско-технологической подготовки аддитивного производства: киберфизический подход 79

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- **технические;**
- **физико-математические.**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *Г.Н. Петухова, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 10.03.21. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.

Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 9,72. Тираж 100 экз. Заказ № 134.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2021
© Проблемы физики, математики и техники, 2021
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2021

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 1 (46) 2021

CONTENTS

PHYSICS

Andreev V.V. Method for calculating the cross section of binary reactions with polarized particles	7
Girgel S.S. Solutions of the wave equation in parabolic rotary coordinates. III. Spatiotemporal wave packets of Kummer – Kummer and Tricomi – Kummer with the continuous angular index	13
Kulak G.V., Ropot P.I., Bestugin A.R., Shakin O.V. Acousto-optical spectrum analyzer based on Bessel light beams	19
Kulesh E.A., Rogachev A.V., Pilipsou D.G., Jiang Xiaohong, Rudenkov A.S. Structure and properties of a-C films containing metals and products of their interaction with nitrogen, carbon	24
Fedosyuk V.M. The mechanism of bismuth films growth at initial stages of electrochemical deposition	31
Yarmolenko M.A., Sarkisov O.A., Liu Yiming, Rogachev A.V. The effect of plasma treatment of coatings based on organosilicon polymers deposited by electron beam dispersion on their structure and morphology	38

MATHEMATICS

Gal'mak A.M. On sets of generators of l -ary semigroup $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$	44
Yi X., Kamornikov S.F., Tyutyaynov V.N. One property of hereditary saturated formations	50
Kuzmina E.V. Generalized solutions of the differential first-order equation with the special rational coefficient	54
Malinkovskii Yu.V., Niamilastsivaya V.A. Quasi-reversibility of Jackson's networks with exponential constraint on the sojourn time of claims	62
Ryabchenko N.V., Starovoitov A.P. Rational approximation of the Mittag – Leffler functions	65

INFORMATION SCIENCE

Akinsheva I.V., Philippova A.A. Implementation of an algorithm for calculation of logistics costs for milk delivery	69
Demidenko O.M. Creation of models of the computational process and operational load on the local area network	74
Krotiuk Y.M., Kuznechik O.O., Tkachenko V.V. Information support for design and technological preparation for additive manufacturing: cyber-physical approach	79

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- **Technics;**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Data-bases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 539.12

МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ СЕЧЕНИЯ БИНАРНЫХ РЕАКЦИЙ С ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

В.В. Андреев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

METHOD FOR CALCULATING THE CROSS SECTION OF BINARY REACTIONS WITH POLARIZED PARTICLES

V.V. Andreev

F. Scorina Gomel State University

Разработана новая методика вычисления сечений бинарных реакций с поляризованными частицами. Методика основана на непосредственном вычислении матричных элементов в специальном виде с помощью метода базисных спиноров. Приведены новые аналитические формулы для интегрирования дифференциальных сечений по углу рассеяния бинарной реакции.

Ключевые слова: бинарная реакция, диаграмма Фейнмана, биспинор, спиральность.

A new technique for calculating the cross sections for binary reactions with polarized particles has been developed. The technique is based on direct calculation of matrix elements in a special form using the method of basis spinors. New analytical formulas for integrating differential cross sections with respect to the scattering angle of a binary reaction are presented.

Keywords: binary reaction, Feynman diagram, bispinor, helicity.

Введение

Парциальное разложение матричных элементов реакций взаимодействий, как известно, представляет собой удобный аппарат для анализа угловых распределений вторичных частиц. При этом сечение реакции можно получить в относительно общем виде. Однако использование этого разложения применительно к диаграммам Фейнмана наталкивается на ряд проблем.

Во первых, это вычисление коэффициентов парциального разложения. Структура диаграмм Фейнмана не позволяет находить их непосредственно. Для t - и u -канальных матричных элементов бинарных реакций зависимость от угловых переменных содержится в знаменателях, что автоматически приводит к бесконечному ряду по полному угловому моменту в классическом парциальном разложении.

Во-вторых, при интегрировании дифференциального сечения по угловым переменным возникают специфические интегралы, которые требуют специальных методов их вычисления, что составляет дополнительную трудность при получении численных значений сечений бинарных реакций [1].

В данной работе представлена новая методика вычисления диаграмм Фейнмана и их квадратичных комбинаций, основанная на разложении Джакоба-Вика для бинарных реакций. В этом подходе также решается задача интегрирования дифференциального сечения бинарной реакции с помощью точного аналитического вычисления возникающих интегралов.

1 Разложение Джакоба – Вика для бинарных реакций

В этом разделе изложим некоторые элементы разложения Джакоба – Вика для бинарных реакций $a(p_1, \lambda_1) + b(p_2, \lambda_2) \rightarrow c(k_1, \tau_1) + d(k_2, \tau_2)$ в системе центра инерции.

Удобно определить двухчастичный базис состояний $|i\rangle = |a, b\rangle$ и $|f\rangle = |c, d\rangle$ в переменных полного импульса двух частиц

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{P}_f = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (1.1)$$

и импульса относительного движения. В системе центра инерции, где $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, относительные импульсы состояний определяются уравнениями

$$\mathbf{p}_{12} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \mathbf{k}_{12} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (1.2)$$

Пусть в сферической системе координат импульсы (1.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{12} &= p_{12} \{ \sin \theta_i \cos \phi_i, \sin \theta_i \sin \phi_i, \cos \theta_i \}, \\ p_{12} &= |\mathbf{p}_{12}|, \\ \mathbf{k}_{12} &= k_{12} \{ \sin \theta_f \cos \phi_f, \sin \theta_f \sin \phi_f, \cos \theta_f \}, \\ k_{12} &= |\mathbf{k}_{12}|. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Разложение Джакоба – Вика S -матричных элементов для бинарной реакции в системе центра инерции можно представить в виде [2], [3]:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tau_1, \tau_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \rangle &= \\ = \delta^{(3)}(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \langle \mathbf{k}_{12}, \tau_1 \tau_2 | S | \mathbf{p}_{12}, \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$= \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} D_{\lambda_{12}, \tau_1}^{*J} (\phi, \theta, -\phi) \langle \mathbf{k}_{12}, \tau_1 \tau_2 | S_J | \mathbf{p}_{12}, \lambda_1 \lambda_2 \rangle.$$

Индексы D -функции Вигнера $\lambda_{12} = \lambda_1 - \lambda_2$ и $\tau_{12} = \tau_1 - \tau_2$ являются функциями спиральностей частиц a, b, c и d . Углы ϕ, θ связаны с сферическими углами $\phi_{f,i}, \theta_{f,i}$ формулой

$$D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{*J} (\phi, \theta, -\phi) = \sum_{\rho} D_{\rho, \tau_1 - \tau_2}^{*J} (\phi_f, \theta_f, -\phi_f) D_{\rho, \lambda_1 - \lambda_2}^J (\phi_i, \theta_i, -\phi_i). \quad (1.5)$$

В частности,

$$\cos \theta = \cos \theta_f \cos \theta_i + \cos(\phi_f - \phi_i) \sin \theta_f \sin \theta_i. \quad (1.6)$$

Соответственно, парциальная спиральная амплитуда $\langle \mathbf{k}_{12}, \tau_1 \tau_2 | S_J | \mathbf{p}_{12}, \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ связана с матричным элементом $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tau_1, \tau_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ посредством уравнения

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}_{12}, \tau_1 \tau_2 | S_J | \mathbf{p}_{12}, \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ & \times D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^J (\phi, \theta, -\phi) \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tau_1, \tau_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В отличие от классической работы [2] в выражениях (1.4) и (1.7) не выделяется отдельно функция $\delta(E_a + E_b - E_c - E_d)$, связанная с сохранением энергии. Наличие этой функции приводит к тому, что в системе центра инерции

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{12} &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_c^2, m_d^2)}{2\sqrt{s}}, \\ \mathbf{p}_{12} &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2\sqrt{s}}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где функция Каллена имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda(a, b, c) &= (a - b - c)^2 - 4bc = \\ &= \left(a - [\sqrt{b} + \sqrt{c}]^2 \right) \left(a - [\sqrt{b} - \sqrt{c}]^2 \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Поэтому в формулах (1.4) и (1.7) парциальные амплитуды матрицы $\mathcal{S}$ зависят только от одной инвариантной переменной $s = P_i^2$, а все нормировочные множители включены в парциальные амплитуды.

Разложения (1.4) и (1.7) обобщены на случай с $\mathbf{P}_i \neq 0$ в [3] с использованием так называемых пуанкаре-инвариантных операторов спиральностей

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{W_j^\mu P_\mu}{\sqrt{(p_j P_i)^2 - m_j^2 P_i^2}}, \quad j = (a, b), \quad (1.10)$$

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{W_j^\mu P_\mu}{\sqrt{(p_j P_f)^2 - m_j^2 P_f^2}}, \quad j = (c, d), \quad (1.11)$$

где W – оператор спина Паули – Любанского.

В системе $\mathbf{P} = 0$ все эти операторы совпадают с операторами спиральностей частиц реакции.

Использование пуанкаре-инвариантных операторов спиральностей приводит к тому, что соотношения (1.4) и (1.7) по форме не изменяются. Для получения соотношений в системе отсчета с $\mathbf{P}_i \neq 0$ необходимо сделать замены вида

$$\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}_j, \quad j = (a, b, c, d). \quad (1.12)$$

Для реакции распада $a \rightarrow c + d$ парциальные разложения упрощаются и определяются только одной парциальной амплитудой с $J = S$, где S – спин частицы a .

2 Методика вычисления дифференциального сечения

Итак из общей релятивистской теории реакций следует, что S -матричный элемент может быть представлен в виде (1.4). Отсюда следует, что соответствующий любой диаграмме Фейнмана бинарной реакции

$$a(p_1, \lambda_1) + b(p_2, \lambda_2) \rightarrow c(k_1, \tau_1) + d(k_2, \tau_2) \quad (2.1)$$

матричный элемент может быть также представлен в виде разложения (1.4)

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, t) = \\ &= \sum_{J=0}^{\infty} \frac{2J+1}{4\pi} h_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(J) D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{*J} (\phi, \theta, -\phi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если матричный элемент $\mathcal{M}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, t)$ (2.2) зависит

только от инвариантной переменной $s = (p_1 + p_2)^2$, то ряд по J обрывается. Тогда такое разложение становится удобным для практических расчетов. Однако, если имеется зависимость от переменной Мандельштама $t = (p_2 - k_2)^2$ (или $u = (p_1 - k_2)^2$), то ряд становится бесконечным. Для устранения этих недостатков предлагается новая методика, основанная на разложении Джакоба – Вика.

Матричный элемент диаграммы Фейнмана можно представить в виде произведения множителя $\widetilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi)$, который содержит спиновую структуру внешних частиц и инвариантного скалярного коэффициента $F(s, t)$

$$\mathcal{M}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, t) = F(s, t) \widetilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi). \quad (2.3)$$

Зависимость от угловых переменных θ, ϕ

для $\widetilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi)$ присутствует только в числителе этой функции.

Инвариантный коэффициент $F(s, t)$ зависит только от скалярных произведений импульсов частиц. В отличие от $\widetilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi)$ коэффициент $F(s, t)$ для t - и u -канальных диаграмм содержит зависимость от углов в знаменателе (знаменатели пропагаторов, входящих в диаграмму Фейнмана), т. е.,

$$F(s, t) \sim \frac{1}{t - m^2}, \quad F(s, u) \sim \frac{1}{u - m^2}. \quad (2.4)$$

Поэтому разложение (2.2) становится бесконечным рядом по J из-за присутствия инвариантных коэффициентов (2.4) и вследствие соотношения [4, с. 1027, формула 8.791]

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - m^2} &= \frac{x}{\cos \theta - y} = \\ &= (-x) \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) Q_{\ell}(y), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где x и y являются функциями, зависящими только от s и масс частиц бинарной реакции, а функции $P_{\ell}(y)$ и $Q_{\ell}(y)$ – полиномы Лежандра первого и второго рода.

Матричный элемент $\widetilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi)$ можно разложить уже в конечный ряд вида

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi) &= \\ &= \sum_{J=0}^k \widetilde{h}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(J, s) D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $k = \max(|\lambda_{12}|, |\tau_{12}|)$ (максимальное из возможных значений).

Коэффициенты разложения (2.6) вычисляются посредством уравнения

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(J, s) &= \frac{2J + 1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ &\times D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^J(\phi, \theta, -\phi) \widetilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

3 Вычисление спиральных амплитуд методом базисных спиноров

Для получения $\widetilde{\mathcal{M}}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(s, \theta, \phi)$ в виде (2.6) используем метод базисных спиноров [5]–[7], в котором удастся представить матричный элемент в наиболее удобном виде для интегрирования по угловым переменным θ, ϕ .

Основной задачей вычисления матричных элементов диаграмм Фейнмана является преобразование функции с фермионными состояниями вида

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda_p, \lambda_k}(p, s_p; k, s_k) &= \\ &= \bar{w}_{\lambda_p}^D(p, s_p) Q w_{\lambda_k}^B(k, s_k), \end{aligned} \quad (3.1)$$

в явно скалярную функцию.

В соотношении (3.1) индексы λ_p и λ_k – проекции спина для фермионов с 4-импульсами p, k и векторами поляризации s_p, s_k . Функция $w_{\lambda_p}^D(p, s_p)$ для $D = +1$ является биспинором Дирака фермиона $u_{\lambda_p}(p, s_p)$, а для $D = -1$ биспинором Дирака антифермиона $v_{\lambda_p}(p, s_p)$.

3.1 Базис пространства Минковского и изотропная тетрада

В пространстве Минковского введем четверку (тетраду) ортонормированных 4-векторов l_A ($A = 0, 1, 2, 3$), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(l_{\mu} l_{\nu}) = g_{\mu\nu}, \quad l_0^2 = -l_1^2 = -l_2^2 = -l_3^2 = 1, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} l_{\mu}^{\mu} l_{\nu}^{\nu} l_{\rho}^{\rho} l_{\sigma}^{\sigma} &= -\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}, \\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} l_0^{\mu} l_1^{\nu} l_2^{\rho} l_3^{\sigma} &= \epsilon^{0123} = 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Используя векторы l_{μ} , определим светоподобные векторы, которые образуют изотропную тетраду в пространстве Минковского:

$$b_{\rho} = \frac{l_0 + \rho l_3}{2}, \quad n_{\lambda} = \frac{\lambda l_1 + i l_2}{2}, \quad (\rho, \lambda = \pm 1). \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.2) и (3.4) следует:

$$(b_{\rho} b_{-\rho}) = \frac{\delta_{\lambda, \rho}}{2}, \quad (n_{\lambda} n_{-\rho}) = \frac{\delta_{\lambda, \rho}}{2}, \quad (b_{\rho} n_{\lambda}) = 0, \quad (3.5)$$

3.2 Базисные спиноры

С помощью векторов изотропной тетрады (3.4) определим безмассовые базисные спиноры (биспиноры) $u_{\lambda}(b_{-1})$ и $u_{\lambda}(b_1)$:

$$\hat{b}_{-1} u_{\lambda}(b_{-1}) = 0, \quad u_{\lambda}(b_1) = \hat{b}_1 u_{-\lambda}(b_{-1}), \quad (3.6)$$

$$\omega_{\lambda} u_{\lambda}(b_{\pm 1}) = u_{\lambda}(b_{\pm 1}) \quad (3.7)$$

с проективной матрицей

$$\omega_{\lambda} = \frac{1}{2}(I + \lambda \gamma_5)$$

и условием нормировки

$$u_{\lambda}(b_{\pm 1}) \bar{u}_{\lambda}(b_{\pm 1}) = \omega_{\lambda} \hat{b}_{\pm 1}. \quad (3.8)$$

Фазовое соглашение, которое будет определять связь между спинорами с разной спиральностью, выберем в виде

$$\hat{n}_{\lambda} u_{-\rho}(b_{-1}) = \delta_{\lambda, \rho} u_{\rho}(b_{-1}). \quad (3.9)$$

Соотношения (3.6), (3.7) и (3.9) можно записать в обобщенном виде:

$$\hat{b}_{\rho} u_{\lambda}(b_A) = \delta_{\rho, -A} u_{-\lambda}(b_{-A}), \quad (3.10)$$

$$\omega_{\lambda} u_{\rho}(b_A) = \delta_{\rho, \lambda} u_{\lambda}(b_A), \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_{\rho} u_{\lambda}(b_A) &= (-A) \delta_{\rho, A \times \lambda} u_{-\lambda}(b_A), \\ &(A, \rho, \lambda = \pm 1). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Важным свойством базисных спиноров является соотношение полноты, которое доказывается с помощью (3.6), (3.7) и (3.8)

$$\sum_{\lambda, A=-1}^1 u_{\lambda}(b_A) \bar{u}_{-\lambda}(b_{-A}) = I. \quad (3.13)$$

Спинорные произведения базисных спиноров (3.6) задаются простыми соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\lambda}(b_C) u_{\rho}(b_A) &= \delta_{\lambda, -\rho} \delta_{C, -A}, \\ &(C, A, \lambda, \rho = \pm 1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3 «Строительные блоки» фейнмановских диаграмм

Рассмотрим специальный случай матричного элемента (3.1), когда $p = b_C$ и $k = b_{-A}$, т. е.

$$\Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A}[Q] = \bar{u}_\rho(b_C) Q u_{-\sigma}(b_{-A}), \quad (3.15)$$

который и будем далее называть **базовым матричным элементом**.

С помощью основных соотношений МБС несложно найти выражение для (3.15) в терминах векторов изотропной тетрады $b_{\pm 1}, n_{\pm 1}$ для различных видов оператора Q , например

$$\Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A}[\gamma^\mu] = \delta_{\sigma,-\rho} \left(\delta_{C,-A} \tilde{b}_{-A}^\mu + A \delta_{C,A} \tilde{n}_{-A \times \rho}^\mu \right). \quad (3.16)$$

Произведение двух базовых элементов (3.15) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A}[\gamma^\mu] \Gamma_{\rho',\sigma'}^{C',A'}[\gamma_\mu] = \\ & = 2\delta_{\rho,-\sigma} \delta_{\rho',-\sigma'} \left[AA' \delta_{C,A} \delta_{C',A'} \delta_{A\sigma,-A'\sigma'} + \right. \\ & \quad \left. + \delta_{C,-A} \delta_{C',-A'} \delta_{A'\sigma,-A\sigma'} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

С помощью соотношения полноты амплитуда процесса может быть представлена в виде композиции функций $\Gamma_{\sigma,\rho}^{C,A}$ (3.15). Такие вставки позволяют разбить фермионную линию (3.1) на произведение фермионных линий с базисными спинорами $u_\lambda(b_A)$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\lambda_p, \lambda_k}(p, s_p, k, s_k; Q) = \\ & = \sum_{A, C, \sigma, \rho=-1}^1 \left\{ \bar{w}_{\lambda_p}^D(p, s_p) u_{-\sigma}(b_{-C}) \right\} \times \\ & \times \left\{ \bar{u}_\sigma(b_C) Q u_{-\rho}(b_{-A}) \right\} \left\{ \bar{u}_\rho(b_A) w_{\lambda_k}^F(k, s_k) \right\} = \\ & = \sum_{\sigma, \rho=-1, A, C=-1}^1 \bar{s}_{\sigma, \rho}^{(C,D)}(p, s_p) \Gamma_{\sigma, \rho}^{C,A}[Q] s_{\rho, \lambda_k}^{(A,F)}(k, s_k). \end{aligned} \quad (3.18)$$

В соотношении (3.18) выделены коэффициенты разложения $s, \bar{s}$ физических спиноров по базисным спинорам, которые являются частными случаями базового матричного элемента $\Gamma[Q]$:

$$s_{\rho, \lambda}^{(A,D)}(p, s_p) = \bar{u}_\rho(b_A) w_{\lambda}^D(p, s_p) \quad (3.19)$$

и обладают следующим свойством:

$$\bar{s}_{\rho, \lambda}^{(A,B)}(p, s_p) = s_{-\rho, \lambda}^{*(-A,B)}(p, s_p). \quad (3.20)$$

Коэффициент разложения (3.19) для спиральных состояний фермиона можно представить в виде [8]

$$\begin{aligned} & s_{\rho, \lambda}^{(A,B)}(p, s_H) = \\ & = (B\lambda) f_{\rho, \lambda, B} \sqrt{\omega_{m_p}(p) - (B\lambda\rho)|\mathbf{p}|} \times \\ & \times D_{A\rho/2, -B\lambda/2}^{*1/2}(\phi_p, \theta_p, -\phi_p), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $f_{\lambda, \rho, B} = \delta_{\rho, -\lambda} + B\delta_{\rho, \lambda}$.

3.4 Вычисление спиральных амплитуд

Вычислим матричный элемент t -канальной диаграммы Фейнмана с обменом γ -квантом для процесса

$$e^-(p_1, \lambda_{p_1}) e^+(p_2, \lambda_{p_2}) \rightarrow e^-(k_1, \lambda_{k_1}) e^+(k_2, \lambda_{k_2}),$$

который определяется формулой:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} &= \frac{e^2}{(k_2 - p_2)^2} \bar{u}_{\lambda_{k_1}}(k_1) \times \\ & \times \gamma_\mu u_{\lambda_{p_1}}(p_1) \bar{v}_{\lambda_{p_2}}(p_2) \gamma^\mu v_{\lambda_{k_2}}(k_2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Расчеты проведем в системе центра инерции. Следуя разработанной методике, в качестве скалярного инвариантного множителя $F(s, t)$ выберем функцию

$$F(s, t) = \frac{e^2}{(k_2 - p_2)^2} = \frac{2e^2}{(s - 4m_e^2)(1 - \cos \theta)}. \quad (3.23)$$

Согласно (2.3) остальная часть (3.22) определяет множитель $\widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}$.

Используя разложение (3.18) для фермионных цепочек и уравнение (3.17) после подстановки коэффициентов разложения и тривиального суммирования получим:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} &= s \sum_{J=0}^1 D_{\lambda_{p_12}, \lambda_{k_12}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi) \times \\ & \times \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_{p_1} & \lambda_{k_1} & 1/2 \\ -\lambda_{p_2} & -\lambda_{k_2} & 1/2 \end{array} \middle| J \right\} \times \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[2(-1)^J \beta_e^2 \delta_{\lambda_{p_1}, \lambda_{k_1}} \delta_{\lambda_{p_2}, \lambda_{k_2}} \delta_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} + \right. \\ & \left. + (1 + \lambda_{k_1} \lambda_{p_1} \beta_e^2) \delta_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} + \eta_e \delta_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, -\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \right], \end{aligned}$$

где $s = (p_1 + p_2)^2$, $\eta_e = 2m_e / \sqrt{s}$, $\beta_e = \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}}$

и $\lambda_{p_12} = (\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2}) / 2$, $\lambda_{k_12} = (\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}) / 2$.

Для расчета (3.24) использовалось разложение Клебша – Гордана для произведения двух D -функций Вигнера

$$\begin{aligned} & D_{\lambda_1, \lambda_2}^{j_1}(\phi, \theta, \varphi) D_{m_1, m_2}^{j_2}(\phi, \theta, \varphi) = \\ & = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & j \\ m_1 & m_2 & j \end{array} \middle| j \right\} D_{\lambda_1+m_1, \lambda_2+m_2}^j(\phi, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.25)$$

с дополнительной функцией от произведения коэффициентов Клебша – Гордана

$$\mathbf{C} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \right\}$$

группы SU(2)

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & j \\ m_1 & m_2 & j \end{array} \middle| j \right\} = \\ & = \mathbf{C} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_1 & m_1 & \lambda_1 + m_1 \end{array} \right\} \mathbf{C} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j \\ \lambda_2 & m_2 & \lambda_2 + m_2 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В данном случае метод базисных спиноров сразу дал искомый результат для представления

функции $\widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}$ в виде (2.6).

4 Квадратичная комбинация матричных элементов

Поскольку дифференциальное сечение процесса (2.1) пропорционально квадрату модуля амплитуды, тогда оно будет содержать квадратичные комбинации матричных элементов диаграмм Фейнмана. Запишем произвольную квадратичную комбинацию матричных элементов двух диаграмм Фейнмана $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*$, используя (2.3) и (2.6):

$$\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = \sum_{J, J'} F_1(s, t) F_2^*(s, t) h_1^J h_2^{J'} \times \times D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{*J}(\phi, \theta, -\phi) D_{\lambda_{12}, \tau_{12}}^{J'}(\phi, \theta, -\phi), \quad (4.1)$$

Здесь введена сокращенная запись для коэффициентов $h^J = \tilde{h}_{\tau_1, \tau_2}^{\lambda_1, \lambda_2}(J, s)$. Еще раз отметим, что суммирование по J и J' в (4.1) ограничено параметром $k = \max(|\lambda_{12}|, |\tau_{12}|)$.

Уравнение (4.1) трансформируется к виду

$$\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = \sum_{J, J'} F_1(s, t) F_2^*(s, t) h_1^J h_2^{*J'} \times \times \sum_{\ell=|J-J'|}^{J+J'} (-1)^{\lambda_{12}-\tau_{12}} \left\{ \begin{matrix} \lambda_{12} & -\lambda_{12} & J \\ \tau_{12} & -\tau_{12} & J' \end{matrix} \right\} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (4.2)$$

с помощью разложения (3.25).

Таким образом, с учетом (2.4) зависимость от угла θ для квадратичной комбинации (4.7) содержится в функциях вида

$$\frac{P_{\ell}(x)}{(x-y)}, \quad \frac{P_{\ell}(x)}{(x-y_1)(x-y_2)}, \quad (4.3)$$

где $x = \cos \theta$, а константы $y, y_{1,2}$ зависят от переменной s и масс частиц бинарной реакции (2.1).

С учетом экспериментальных ограничений при определении характеристик частиц реакции, дифференциальное сечение требуется не для всей возможной области $-1 \leq z \leq 1$, а для некоторого интервала $(z_1, z_2), |z_{1,2}| \leq 1$. Следовательно, при вычислении сечения возникает задача расчета интегралов вида

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{P_{\ell}(x)}{(x-y)} dx, \quad \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_{\ell}(x)}{(x-y_1)(x-y_2)} dx, \quad |y_{1,2}| \geq 1. \quad (4.4)$$

5 Вычисление интегралов

Задача расчета функций (4.4) оказалась непростой. Как показано в [1], при непосредственном численном расчете (4.4) возникали нестабильности, особенно при $x = \cos \theta \sim \pm 1$. Это, в свою очередь, приводит к низкой скорости программ интегрирования и падению точности расчетов.

Для решения указанных проблем в [1] предложено инвариантные коэффициенты $F_n(s, t)$ численно рассчитывать, используя обобщенный ряд Фурье

$$F_n(s, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{t} c_{n,\ell}(s) P_{\ell}(\cos \theta), \quad (5.1)$$

где

$$c_{n,\ell}(s) = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx t F_n(s, t) P_{\ell}(x). \quad (5.2)$$

Такой обобщенный ряд Фурье является стабильным при численном интегрировании. На практике требуется порядка 20 обобщенных коэффициентов Фурье $c_{n,\ell}(s)$. При этом такая процедура воспроизводит полный расчет $F_n(s, t)$ с точностью примерно до шести знаков для углов рассеяния и энергий LEP2 [1].

Явный множитель t в (5.1) и (5.2) был включен для того, чтобы учесть полюс t -канала в функциях $F_n(s, t)$; без этого множителя разложение будет менее эффективным и требует гораздо большего количества членов в сумме по ℓ в (5.2). Явный вид (5.1) и (5.2) обусловлен также тем, что все фермионы считались безмассовыми.

Оригинальная новизна нашего подхода состоит в том, чтобы получить аналитические формулы для вычисления интегралов вида (4.4) для любого значения ℓ и для произвольных масс частиц. Данный подход существенно повышает эффективность вычислительной методики.

При вычислении квадрата матричных элементов в предлагаемом подходе возникают интегралы по угловым переменным вида

$$\mathcal{I}_{\ell,0}(z_2, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} P_{\ell}(x) dx, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2, z_1, y) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_{\ell}(x)}{(x-y)} dx \quad (5.4)$$

$$\text{и} \quad \mathcal{I}_{\ell,2}(z_2, z_1, y_1, y_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_{\ell}(x)}{(x-y_1)(x-y_2)} dx. \quad (5.5)$$

Интеграл

$$\mathcal{I}_{\ell,3}(z_2, z_1, y) = \mathcal{I}_{\ell,2}(z_2, z_1, y, y) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_{\ell}(x)}{(x-y)^2} dx \quad (5.6)$$

является вспомогательным и также может встречаться в расчетах.

Интеграл (5.3) несложно рассчитать в общем виде:

$$\mathcal{I}_{\ell,0}(z_2, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} P_{\ell}(z) dz = \frac{F_{\ell}(z_2) - F_{\ell}(z_1)}{2\ell+1}, \quad (5.7)$$

где

$$F_{\ell}(z) = P_{\ell+1}(z) - P_{\ell-1}(z), \quad P_{-1}(z) = 1. \quad (5.8)$$

Для вычисления интеграла (5.4) используем новое соотношение для полиномов Лежандра (автору не удалось найти его в известных справочниках по специальным функциям, и было получено им самостоятельно)

$$\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y} = \quad (5.9)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) P_k(x) (P_k(y) w_{n-1}(y) - P_n(y) w_{k-1}(y)),$$

$$n \geq 1,$$

где $w_n(y)$ является полиномом переменной z [4, с. 1033, формула 8.831]:

$$w_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)} P_k(y) P_{n-k}(y) = \quad (5.10)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(2n+1-4k)}{(2k+1)(n+1-k)} P_{n-2k}(y), \quad w_{-1}(y) = 0.$$

Для $n = 0$ соотношение (5.9) обращается в ноль.

Для сокращения дальнейшей записи введем обозначение

$$R_{k,n}(y) = P_k(y) w_{n-1}(y) - P_n(y) w_{k-1}(y). \quad (5.11)$$

Тогда путем вычитания получим соотношение:

$$\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2, z_1, y) = \quad (5.12)$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x) - P_\ell(y)}{x - y} dx + P_\ell(y) \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{x - y} dx.$$

С помощью формулы (5.9) и тривиального интегрирования в (5.12) получим

$$\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2, z_1, y) = P_\ell(y) \ln \left| \frac{y - z_2}{y - z_1} \right| + \quad (5.13)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \mathcal{I}_{k,0}(z_2, z_1) R_{k,n}(y).$$

Интеграл (5.5) с помощью тождества

$$\frac{1}{(x - y_1)(x - y_2)} = \frac{1}{y_1 - y_2} \left[\frac{1}{x - y_1} - \frac{1}{x - y_2} \right] \quad (5.14)$$

преобразуется к уравнению

$$\mathcal{I}_{\ell,2}(z_2, z_1, y) = \frac{1}{y_1 - y_2} \times \quad (5.15)$$

$$\times \{ \mathcal{I}_{\ell,1}(z_2, z_1, y_1) - \mathcal{I}_{\ell,1}(z_2, z_1, y_2) \}, \quad y_1 \neq y_2.$$

На основе вышеизложенной методики вычитания для интеграла (5.6), также несложно получить формулу для расчета $\mathcal{I}_{\ell,3}$:

$$\mathcal{I}_{\ell,3}(z_2, z_1, y) = P_\ell(y) \frac{z_2 - z_1}{(y - z_1)(y - z_2)} + \quad (5.16)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \mathcal{I}_{k,1}(z_2, z_1, y) R_{k,n}(y),$$

которая проще, чем производная от выражения (5.13).

Формулы (5.13), (5.15) и (5.16) справедливы как для положительных, так и для отрицательных значений переменной $y, y_{1,2}$. Поэтому эти формулы могут быть использованы и для интегралов вида

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x+y)} dx, \quad \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x \mp y_1)(x \pm y_2)} dx, \quad \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x+y_1)(x+y_2)} dx.$$

Использование соотношений (5.13), (5.15) и (5.16) для расчета сечения намного проще, чем использование обобщенного ряда Фурье (5.1).

Заключение

Таким образом, методика аналитического или численного расчета дифференциального сечения бинарной реакции содержит следующие компоненты: представление матричных элементов диаграмм Фейнмана в виде (2.3) с использованием (2.6). Данную задачу для спиральных состояний частиц эффективно решает метод базисных спиноров, который во многих случаях сразу позволяет получить разложение (2.6). Квадратичные комбинации матричных элементов различных диаграмм Фейнмана определяются компактным соотношением (4.2) вследствие (2.3) и (2.6). Задача интегрирования по углу рассеяния для квадратичных комбинаций матричных элементов решается с помощью оригинального способа аналитического расчета интегралов, описанного в разделе 5. Аналитические выражения для интегралов позволяют повысить точность численных расчетов и увеличить эффективность программ по вычислению сечений бинарных реакций. Данная методика может быть эффективным инструментом для расчета не только дифференциального сечения бинарной реакции, но и для вычисления ширин распадов вида $1 \rightarrow 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Electroweak radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow W^+W^- \rightarrow 4$ fermions in double pole approximation: The RACOONWW approach* / A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth, D. Wackerroth // Nucl. Phys. B. – 2000. – Vol. 587. – P. 67–117.
2. *Jacob, M. On the general theory of collisions for particles with spin* / M. Jacob, G.C. Wick // Annals of Physics. – 1959. – Vol. 7, № 4. – P. 404–428.
3. *Верле, Ю. Релятивистская теория реакций* / Ю. Верле. – Москва: Атомиздат, 1969. – 442 с.
4. *Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 4-е переработанное изд. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110 с.
5. *Andreev, V.V. Analytic calculation of Feynman amplitudes* / V.V. Andreev // Physics of Atomic Nuclei. – 2003. – Vol. 66, № 2. – P. 383–393.
6. *Andreev, V.V. Scattering QCD amplitudes with massive fermions using recursive relations* / V.V. Andreev // Nonlinear phenomena in complex systems. – 2009. – Vol. 12, №4. – P. 338–342.
7. *Андреев, В.В. Вычисление фейнмановских диаграмм техникой блоков* / В. В. Андреев // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 7–12.
8. *Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами* / В.В. Андреев. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 294 с.

Поступила в редакцию 08.01.2021.

УДК 535.42

РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. III. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ КУММЕРА – КУММЕРА И ТРИКОМИ – КУММЕРА С НЕПРЕРЫВНЫМ УГЛОВЫМ ИНДЕКСОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION IN PARABOLIC ROTARY COORDINATES. III. SPATIOTEMPORAL WAVE PACKETS OF KUMMER – KUMMER AND TRICOMI – KUMMER WITH THE CONTINUOUS ANGULAR INDEX

S.S. Girkel

F. Scorina Gomel State University

Предложены и анализируются аналитические выражения в замкнутой форме для пространственно-временных волновых пакетов Куммера – Куммера и Трикоми – Куммера с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах. Сформулированы физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких мод, чтобы они переносили конечную мощность.

Ключевые слова: пространственно-временные волновые пакеты, параболические вращательные координаты, моды Куммера – Куммера, моды Трикоми – Куммера.

Analytical expressions in the closed form for spatiotemporal wave packets of Kummer-Kummer and Tricomi-Kummer with continuous angular index m in parabolic rotary coordinates are offered and analyzed. Physical restrictions on possible values of free parameters of such modes that they transfer finite power are formulated.

Keywords: spatiotemporal wave packets, parabolic rotary coordinates, modes Kummer – Kummer, modes Tricomi – Kummer.

Введение

Поиск новых типов оптических полей ведется как в направлении нахождения новых решений, так и направлении обобщения уже известных решений. В последнее время нами изучаются световые поля, описываемые комплексными амплитудами с непрерывным угловым индексом m . Настоящая работа является продолжением работ [1]–[2], где изучались возможные новые типы световых полей типа Куммера – Куммера ($K-K$) и Трикоми – Куммера ($T-K$). Амплитуды таких полей с непрерывным угловым индексом m являются точными решениями волнового уравнения в параболических вращательных координатах.

Достаточно общее решение волнового уравнения для световых монохроматических волн в параболических вращательных безразмерных координатах можно записать в виде [1], [2]

$$E = e^{i(Q+T)} \cdot (X + iY)^m \times \\ \times (a_1 M_- + a_2 M_{1-} + a_3 U_- + a_4 \tilde{U}_-) \times \\ \times (a_5 M_+ + a_6 M_{1+} + a_7 U_+ + a_8 \tilde{U}_+).$$

Здесь представленные функции

$$M_{\pm 1} = (R \pm Q)^{-m} M(a - m, 1 - m; \mp i(R \pm Q)),$$

$$M_{\pm} = M(a, m + 1; \mp i(R \pm Q)),$$

$$U_{\pm} = U(a, m + 1; \mp i(R \pm Q)),$$

$$\tilde{U}_{\pm} = e^{\mp i(R \pm Q)} U(m + 1 - a, m + 1; \pm i(R \pm Q))$$

выражаются через функции Куммера M и Трикоми U . Безразмерные координаты и переменные:

$$kx = X; \quad ky = Y; \quad kz = Z;$$

$$\omega t = T;$$

$$k\rho = k\sqrt{x^2 + y^2} = R_{\perp} = \sqrt{X^2 + Y^2};$$

$$R = kr = \sqrt{X^2 + Y^2 + Q^2};$$

$$Q = Z - iZ_0.$$

Независимыми функциями в E можно выбрать по одной функции из каждой скобки, например $U_+ M_{-1}$. В общем случае параметры a комплексные, т. е. $a = a' + ia''$. В [1], [2] исследовались новые виды световых полей типа $K-K$ и $T-K$.

В данной работе этот подход распространяется на более общие решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. Получены выражения, описывающие пространственно-временные волновые пакеты (ПВВП) $K-K$ и $T-K$ с непрерывным угловым индексом m и обсуждаются физически приемлемые значения их свободных параметров.

1 ПБВП $K-K$ в параболических вращательных координатах

Амплитуда реального пучка, чтобы последний переносил конечную мощность, должна удовлетворять условиям квадратичной интегрируемости (КИ). В работах [1], [2] нами было установлено, что для непараксиальных пучков $K-K$ и $T-K$ с непрерывным угловым индексом m путем подбора параметров можно, в лучшем случае, добиться, чтобы амплитуда E убывала как $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$ при $R_{\perp} \rightarrow \infty$, т. е. квази-КИ. Поэтому в настоящей работе будут найдены новые дополнительные решения волнового уравнения с непрерывным угловым индексом m , описывающие так называемые ПБВП $K-K$ и $T-K$ в параболических вращательных координатах и обладающие строго КИ.

Известно, что если $f(X, Y, Z, T)$ является решением волнового уравнения, то, согласно первому преобразованию Бейтмена [3]–[5] в безразмерном виде

$$f(X, Y, Z, T) \rightarrow f_1(X, Y, Z, T) = \frac{1}{Z+T} f\left(\frac{BX}{Z+T}, \frac{BY}{Z+T}, \frac{S^2 - B^2}{2(Z+T)}, \frac{S^2 + B^2}{2(Z+T)}\right), \quad (1.1)$$

где $S^2 = R^2 - T^2$, функция $f_1(X, Y, Z, T)$ также является решением волнового уравнения. Это преобразование пригодно для любого решения волнового уравнения и дает новые решения из известных. Большинство авторов (Besiries [6], [7], Utkin [8], Borisov [9]) полагают $B = 1$, тем самым исключая случай $B = 0$. Однако Hillion [10], [11] полагает B произвольным комплексным числом. Мы также считаем, что в преобразовании Бейтмена (1.1) параметр B может быть любым, и, в частности, равным нулю. Компьютерное моделирование в системе Maple подтверждает вывод о том, что допустим параметр $B = 0$.

Чтобы избавиться от неопределенности при $Z+T \rightarrow 0$ произведем комплексификацию координаты Z в (1.1) соотношением $Z \rightarrow Q = Z - iZ_0$. Здесь $Z_0 > 0$, а Q – безразмерный комплексный параметр пучка, широко применяемый в теории гауссовых световых пучков.

Предварительно применим преобразование (1.1) к волне $E = e^{i(Z+T)} \cdot (X+iY)^m$, которая обладает бесконечной энергией и бесконечной переносимой мощностью. Тогда получаем

$$E = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \times \exp\left(\frac{i(X^2 + Y^2)}{Q+T}\right) \cdot \exp(i(Z-T)). \quad (1.2)$$

Это выражение описывает гауссов ПБВП, движущийся вдоль оси OZ со скоростью $v_{\text{фаз}} = \omega/k$. Его амплитуда убывает по гауссову закону

в направлениях, перпендикулярных оси OZ . Поэтому пакет (1.2) переносит конечную мощность и является аналогом сфокусированной волновой моды (*focus wave mode*) с внедренным оптическим вихрем. Его перетяжка движется в противоположном направлении Z . При $m \neq 0$ – пакет полый. Здесь и далее полагаем угловой индекс m непрерывным, $m \geq 0$.

А. Обсудим применение комплексифицированного ($Z \rightarrow Q = Z - iZ_0$) преобразования Бейтмена (1.1) для следующего решения

$$E = e^{i(Z+T)} \cdot (X+iY)^m \cdot M_+ M_-$$

[1], [2], описывающего пучки $K-K$ в параболических вращательных безразмерных координатах. Получаем ПБВП $K-K$ с амплитудой

$$E(sM_+ M_-) = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right) \times \\ \times M\left(a, m+1; i \frac{\sqrt{4B^2 R_{\perp}^2 + (S^2 - B^2)^2 - (S^2 - B^2)}}{2(Q+T)}\right) \times \\ \times M\left(a, m+1; -i \frac{\sqrt{4B^2 R_{\perp}^2 + (S^2 - B^2)^2 + (S^2 - B^2)}}{2(Q+T)}\right). \quad (1.3)$$

Здесь и далее нижний индекс s при амплитуде E означает *spatio*, т. е. ПБВП. Полагая затем, для простоты, $B = 0$, $\text{Re}(S - B) > 0$ в (1.3), находим амплитуду

$$E(sMM) = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \exp\left(i \frac{S^2}{Q+T}\right) \times \\ \times M\left(a, m+1; -i \frac{S^2}{Q+T}\right).$$

Здесь вторая функция Куммера M обратилась в константу, которую мы не пишем.

Применяя преобразование Куммера к оставшейся функции M , получаем ПБВП K в упрощенной форме с амплитудой

$$E(sM) = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \times \\ \times M\left(m+1-a, m+1; i \frac{S^2}{Q+T}\right). \quad (1.4)$$

По сравнению с общим решением (1.3) здесь, благодаря ограничению $B = 0$, осталась одна функция M вместо двух, исчезли корни в ее аргументе и исчез гауссиан. Последнее выражение (1.4) описывает локализованные ПБВПы. Поскольку (1.4) является строгим решением волнового уравнения, то ПБВПы можно также назвать сфокусированными волновыми модами или даже световыми пулями. Амплитуда ПБВП экспоненциально убывает в поперечных оси OZ направлениях. Это подтверждает также графическое моделирование интенсивности рассматриваемых полей. При $a = 0$ выражение (1.4)

редуцируется к амплитуде, которая описывает гауссов ПБВП.

Проанализируем условия КИ для ПБВП (1.4). Условие КИ: $E \rightarrow R_{\perp}^d$, причем $d < -1$. Согласно Флюгге, [12, с. 304], при $|L| \rightarrow \infty$

$$M(a, b, L) \rightarrow \frac{e^{-i\pi a} \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} L^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} L^{a-b} e^L,$$

если $a \neq 0, -1, -2, \dots$. Без ограничения общности можно при анализе не учитывать зависимости от Q и T . Тогда, при $R_{\perp}^2 = X^2 + Y^2 \rightarrow \infty$ получаем

$$E \rightarrow \frac{R_{\perp}^{m-2a} \exp\left(\frac{iR_{\perp}^2}{Q+T}\right)}{\Gamma(m+1-a)} + \frac{R_{\perp}^{2a-m-2}}{\Gamma(a)}.$$

1. Пусть $Z_0 > 0$ в $Q = Z - iZ_0$. Тогда при $a = -n = 0, -1, -2, \dots, m \geq 0$ пакет (1.4) превращается в ПБВП Лагерра с амплитудой

$$E_{sLG} = \frac{1}{Q+T} \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \cdot L_n^m \left(\frac{iS^2}{Q+T} \right)$$

и обладающий строго КИ!

2. Кроме того, находим, что при $Z_0 > 0$ возможны следующие варианты анализа условий КИ функции E_{sKK} (1.4):

1. Если $a' > \frac{m+2}{2}$, тогда $|E| \rightarrow \infty$ и $W \rightarrow \infty$.

Здесь и далее W – переносимая мощность.

2. Если $a' = \frac{m+2}{2}$, тогда $E \rightarrow const$, но $W \rightarrow \infty$.

3. Если $a' \in \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+2}{2} \right)$, тогда $E \rightarrow 0$, но $W \rightarrow \infty$.

4. Если $a' = \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$, т. е. квази-КИ, но $W \rightarrow \infty$.

5. Если $a' < \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow 0$ и $W \rightarrow const$, т. е. строгая КИ! Здесь условие 5 включает в себя также условие 1 ($a = -n = 0, -1, -2, \dots$).

Б. Для пучка

$$E(M_{-}M_{+}) = e^{i(Z+T)} \times \\ \times (X+iY)^m (R+Q)^{-m} M(a, 1+m; i(R-Q)) \times \\ \times M(a-m, 1-m; -i(R+Q))$$

применим 1 преобразование Бейтмена. Затем, полагая $B \rightarrow 0$, находим амплитуду ПБВП

$$E(sM_{-}M_{+}) = \\ = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X+iY}{S^2} \right)^m M\left(1-a, 1-m; \frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Установим условия КИ для ПБВП $E(sM_{-}M_{+})$.

При $|R_{\perp}| \rightarrow \infty$ получаем

$$E(sM_{-}M_{+}) \rightarrow \left(\frac{R_{\perp}^{-2+2a-m}}{\Gamma(a-m)} + \frac{R_{\perp}^{m-2a}}{\Gamma(1-a)} \exp\left(\frac{iR_{\perp}^2}{Q+T}\right) \right).$$

Пусть $Z_0 > 0$ в $Q = Z - iZ_0$.

Тогда при $a-m = -N+1 = 0, -1, -2, \dots$ – КИ строго.

При $Z_0 > 0$ находим, что возможны также следующие варианты условий КИ функции $E(sM_{-}M_{+})$:

– если $a' > \frac{m+2}{2}$, тогда $|E| \rightarrow \infty$ и $W \rightarrow \infty$;

– если $a' = \frac{m+2}{2}$, тогда $E \rightarrow const$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' \in \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+2}{2} \right)$, тогда $E \rightarrow 0$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' = \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' < \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow 0$ и $W \rightarrow const$.

Строгая КИ.

В. Обсудим пучки $K-K$ типа $E(M_{-1}M_{+1})$. Согласно [2], его амплитуду можно взять в форме

$$E_{*}(M_{-1}M_{+1}) = e^{i(Q+T)} \cdot (X-iY)^m \times \\ \times M(a+m, 1+m; -i(R+Q)) \times \\ \times M(a+m, 1+m; i(R-Q)).$$

При заменах $a+m = a_1$, $Y \rightarrow (-Y)$ последний пучок $E_{*}(M_{-1}M_{+1})$ преобразуется в пучок $E(M_{-}M_{+})$, рассмотренный ранее в [7]. Используя полученные выше результаты (1.4) для пучка $E(M_{-}M_{+})$, сразу можем записать выражения для ПБВП $E_{*}(sM_{-1}M_{+1})$. Амплитуда ПБВП

$$E_{*}(sM_{-1}M_{+1}) = \frac{1}{Q+T} \times \\ \times \left(\frac{X+iY}{S^2} \right)^m M\left(1-a, 1-m; \frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Условия КИ для ПБВП $E_{*}(sM_{-1}M_{+1})$:

– если $a' > \frac{-m+2}{2}$, тогда $|E| \rightarrow \infty$ и $W \rightarrow \infty$;

– если $a' = \frac{-m+2}{2}$, тогда $E \rightarrow const$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' \in \left(\frac{-m+1}{2}, \frac{-m+2}{2} \right)$, тогда $E \rightarrow 0$,

но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' = \frac{-m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$, но $W \rightarrow \infty$;

– если $a' < \frac{-m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow 0$ и $W \rightarrow const$.

Строгая КИ.

Г. Наконец, обсудим пучки с амплитудой в форме

$$E(M_{-1}M_{+}) = e^{i(Q-T)} \times \\ \times (X+iY)^m (R-Q)^{-m} M(a, 1+m; -i(R+Q)) \times \\ \times M(a-m, 1-m; i(R-Q)).$$

Здесь в работе [2] мы брали $Z < 0$. Однако, для получения ВППВ удобнее заменить в $E(M_{-1}M_{+})$ переменную $Q \rightarrow (-Q)$. Тогда получаем

$$E_*(M_{-1}M_{+}) = e^{-i(Q+T)} \times \\ \times (X+iY)^m (R+Q)^{-m} M(a, 1+m; -i(R-Q)) \times \\ \times M(a-m, 1-m; i(R+Q)).$$

Здесь можно взять $Z > 0$; $m \geq 0$. Применяем 1 преобразование Бейтмена. Затем, полагая $B \rightarrow 0$, находим, после некоторых преобразований, амплитуду ПБВП

$$E_*(sM_{-1}M_{+}) = \\ = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X+iY}{S^2} \right)^m M\left(1-a, 1-m; \frac{-iS^2}{Q+T}\right).$$

Установим условия КИ для ПБВП $E_*(sM_{-1}M_{+})$. Получаем, как для $E(sM_{-1}M_{+1})$

- если $a' > \frac{m+2}{2}$, тогда $|E| \rightarrow \infty$ и $W \rightarrow \infty$;
- если $a' = \frac{m+2}{2}$, тогда $E \rightarrow const$, но $W \rightarrow \infty$;
- если $a' \in \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+2}{2}\right)$, тогда $E \rightarrow 0$, но $W \rightarrow \infty$;
- если $a' = \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow R_{\perp}^{-1}$, но $W \rightarrow \infty$;
- если $a' < \frac{m+1}{2}$, тогда $E \rightarrow 0$ и $W \rightarrow const$.

Строгая КИ.

В отличие от пакетов $E(sM_{-1}M_{+1})$ здесь в $E_*(sM_{-1}M_{+1})$ следует полагать $Z_0 > 0$.

2 Физически реализуемые ПБВП ТК с непрерывным угловым индексом m

Предварительно обсудим возможности использования функций Трикоми U_{+} и U_{-} в (1.1).

При $Z \rightarrow \infty$ функции $U_{+} \rightarrow Q^{-a}$, $U_{-} \rightarrow \frac{R_{\perp}^2}{2Q}$, что

неплохо. Функции U_{+} и U_{-} при $|R_{\perp}| \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности, что физически неприемлемо. Попытки комплексифицировать переменные Z или X, Y функций U_{+} и U_{-} приводят к разрывам (скачкам) аргументов ($\mp i(R \pm Q)$) и соответственно амплитуд вблизи $Z = 0$, что также неприемлемо. Поэтому вариант $U_{-}U_{+}$ на всей оси Z не подходит. Однако можно использовать в

(1.1), например, функцию $M_{-}U_{+}$ при $Z > 0$ и функцию $U_{-}M_{+}$ при $Z < 0$. Далее мы будем обсуждать пучки в области полупространства.

А. Обсудим непараксиальные пучки $T-K$

$$E(U_{+}M_{-}) = e^{i(Z+T)} \times \\ \times (X+iY)^m M(a, m+1; i(R-Q)) \times \\ \times U(a, m+1; -i(R+Q)), \quad (2.1)$$

которые пригодны при $Z > 0$. Пусть при этом также $a = (m+1)/2$. Тогда

$$E = e^{i(Z+T)} \cdot (X+iY)^m \exp\left(\frac{i(R-Q)}{2}\right) J_{m/2}\left(\frac{R-Q}{2}\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{-i(R+Q)}{2}\right) (R+Q)^{-m/2} H_{m/2}^{(2)}\left(-\frac{R+Q}{2}\right) \rightarrow \\ \rightarrow e^{i(\Phi+T)} J_{m/2}\left(\frac{R-Q}{2}\right) H_{m/2}^{(1)}\left(\frac{R+Q}{2}\right).$$

Последний вариант (при $Z_0 = 0$) соответствует Ковалеву [10], формула (21). Такие пучки он называет пучками Ханкеля – Бесселя. У него упоминаются также фактически пучки $T-K$ $E(U_{-}M_{+})$. Применяем 1 преобразование Бейтмена для $E(U_{+}M_{-})$. Затем, полагая $B \rightarrow 0$, находим, после некоторых преобразований, амплитуду ПБВП

$$E(sU_{+}M_{-}) = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \times \\ \times U\left(a, 1+m; \frac{-iS^2}{Q+T}\right) \exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Установим условия КИ для ПБВП. При $|R_{\perp}| \rightarrow \infty$

амплитуда $E(sU_{+}M_{-}) \rightarrow R_{\perp}^{m-2a} \exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right)$. От-

сюда при $Z > 0 \cap Z_0 > 0 \cap m \geq 0$ – КИ ПБВП $E(sU_{+}M_{-})$ при произвольном параметре a . При $a = (m+1)/2$ ПБВП $E(sU_{+}M_{-})$ редуцируются к ПБВП Ханкеля – Бесселя.

Б. Обсудим непараксиальные пучки $T-K$ [2]

$$E_*(U_{+}M_{-1}) = e^{i(Q+T)} \cdot (R+Q)^{-m} \times \\ \times (X-iY)^m M(a+m, 1+m; i(R-Q)) \times \\ \times U(a, 1-m; -i(R+Q)). \quad (2.3)$$

Здесь $Z > 0 \cap m \geq 0$. Применяя 1 преобразование Бейтмена и полагая $B \rightarrow 0$, находим амплитуду ПБВП

$$E_*(sU_{+}M_{-1}) = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X-iY}{Q+T} \right)^m \times \\ \times U\left(a, 1-m; \frac{-iS^2}{Q+T}\right) \exp\left(\frac{iS^2}{Q+T}\right).$$

Отсюда следует, что условия КИ ПБВП $E(sU_{+}M_{-1})$ такие же, как для $E(sU_{+}M_{-})$, т. е. $Z > 0 \cap Z_0 > 0 \cap m \geq 0$ произвольном параметре a .

В. Обсудим теперь пучки $T-K$ [2]

$$E(\tilde{U}_+ M_-) = e^{i(T-Q)} \cdot (X+iY)^m \times \\ \times U(m+1-a, m+1; i(R+Q)) \times \\ \times M(m+1-a, m+1; -i(R-Q)).$$

Поменяем предварительно $T \rightarrow (-T)$ в $e^{i(T-Q)}$, чтобы в дальнейшем получить бегущее поле. Тогда

$$E_*(\tilde{U}_+ M_-) = e^{-i(T+Q)} \cdot (X+iY)^m \times \\ \times U(m+1-a, m+1; i(R+Q)) \times \\ \times M(m+1-a, m+1; -i(R-Q)).$$

Применяя 1 преобразование Бейтмена и полагая $B \rightarrow 0$, находим амплитуду ПБВП

$$E_*(sU_+ M_-) = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X+iY}{Q+T} \right)^m \times \\ \times U\left(m+1-a, 1+m; \frac{-iS^2}{Q+T}\right) \exp\left(\frac{-iS^2}{Q+T}\right).$$

Тогда, при $|R_\perp| \gg 1$ амплитуда волнового поля

$$E(\tilde{U}_+ M_-) \rightarrow R_\perp^{-m-2+2a} \exp\left(\frac{-iR_\perp^2}{Q+T}\right).$$

Отсюда условия КИ ПБВП $E_*(sU_+ M_-)$ следующие: $Z > 0 \cap Z_0 < 0 \cap m \geq 0$ при произвольном параметре a .

Г. Обсудим теперь пучки $T-K$ [2]

$$E_*(M_{-1} \tilde{U}_+) = e^{i(T-Q)} \cdot (X-iY)^m \cdot (R+Q)^{-m} \times \\ \times M(1-a, 1+m, -i(R-Q)) \times \\ \times U(-m+1-a, -m+1; i(R+Q)).$$

Предварительно выполним замену $T \rightarrow (-T)$ в $e^{i(T-Q)}$ и получаем при $Z > 0$ непараксиальные пучки $T-K$

$$E_{**}(M_{-1} \tilde{U}_+) = e^{-i(T+Q)} \cdot (X+iY)^m \cdot (R+Q)^{-m} \times \\ \times M(1-a, 1+m, -i(R-Q)) \times \\ \times U(-m+1-a, -m+1; i(R+Q)).$$

Применяя 1 преобразование Бейтмена и полагая $B \rightarrow 0$, находим амплитуду ПБВП

$$E_{**}(s\tilde{U}_+ M_{-1}) = \frac{1}{Q+T} \cdot \left(\frac{X-iY}{S^2} \right)^m \times \\ \times U\left(-m+1-a, 1-m; \frac{iS^2}{Q+T}\right) \exp\left(\frac{-iS^2}{Q+T}\right).$$

Тогда, при $|R_\perp| \gg 1$ амплитуда волнового поля

$$E_{**}(s\tilde{U}_+ M_{-1}) \rightarrow R_\perp^{-2-2a+m} \exp\left(\frac{-iR_\perp^2}{Q+T}\right).$$

Отсюда условия КИ ПБВП $E_{**}(s\tilde{U}_+ M_{-1})$ следующие: $Z > 0 \cap Z_0 < 0 \cap m \geq 0$ при произвольном параметре a , т. е. такие же, как для ПБВП $E_*(s\tilde{U}_+ M_-)$.

Аналогичные результаты получаются, если проанализировать варианты ПБВП $T-K$ других типов, включающих в свою амплитуду функции Трикоми $\tilde{U}_-$ и U_- . Здесь всегда $Z < 0$.

Заключение

В данной работе получены выражения, описывающие дополнительные типы 3D непараксиальных ПБВП $K-K$ и $T-K$ с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах.

Установлено, что для таких ПБВП $K-K$ и $T-K$ путем подбора свободных параметров всегда можно добиться строгой КИ амплитуды и, тем самым, переносимой конечной мощности пакета и его физической реализуемости. Существенно также, что здесь для КИ не требуется гауссова аподизация пучков. Показано, что непараксиальные пучки $T-K$ физически реализуемы только в области полупространства $Z > 0$ или при $Z > 0$. Компьютерное моделирование в системе Maple подтверждает все эти выводы.

Одновременный переход от дискретных значений m к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям параметра a сильно расширяет класс известных в настоящее время ПБВП с цилиндрической симметрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиргель, С.С. Решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. I. 3D световые пучки Куммера – Куммера с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 13–17.
2. Гиргель, С.С. Решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. II. 3D световые пучки Трикоми – Куммера и другие пучки с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 20–24.
3. Bateman, H. The conformal transformations of a space of four dimensions and their applications to geometrical optics / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1909. – Vol. 2. – P. 70–89.
4. Bateman, H. The transformations of the electrodynamical equations / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. – 1910. – Vol. 8. – P. 223–264.
5. Бейтмен, Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн / Г. Бейтмен. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 180 с.
6. Besieris, I.M. Bateman conformal transformations within the framework of the bidirectional spectral representation / I.M. Besieris, A.M. Shaarawi, A.M. Attiya // Progress In Electromagnetics Research, PIER. – 2004. – Vol. 48. – P. 201–231.
7. Besieris, I.M. Spatiotemporall localized null electromagnetic waves I. Luminal / I.M. Besieris,

A.M. Shaarawi // Progress In Electromagnetics Research B. – 2008. – Vol. 8. – P. 1–28.

8. Utkin, A.B. Mathieu Progressive Waves / A.V. Utkin // Commun. Theor. Phys. – 2011. – Vol. 56. – P. 733–739.

9. Борисов, В.В. Производящие функции сфокусированных волновых мод типа Бесселя – Гаусса / В.В. Борисов // Записки семинаров ПОМИ. – 2002. – Т. 285. – С. 53–57.

10. Hillion, P. The Courant-Hilbert solutions of the wave equation / P. Hillion // J. Math. Phys. – 1992. – Vol. 33, № 8. – P. 2749–2753.

11. Hillion, P. The Bateman solutions of the spinor wave equation / P. Yillion // Modern Physics Letters A. – 1993. – Vol. 8, № 22. – P. 2111–2115.

12. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике. Т. 2. / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.

13. Ковалёв, А.А. Лазерные пучки Ханкеля-Бесселя / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 297–304.

14. Изместьев, А.А. Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве / А.А. Изместьев // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 1970. – Т. XIII, № 9. – С. 1380–1388.

15. *Three-dimensional nonparaxial beams in parabolic rotational coordinates* / D. Deng [et al.] // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38, № 19. – P. 3934–3936.

16. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редакцию 14.10.2020.

УДК 534.535

АКУСТООПТИЧЕСКИЙ СПЕКТРОАНАЛИЗАТОР НА БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКАХ

Г.В. Кулак¹, П.И. Ропот², А.Р. Бестугин³, О.В. Шакин³¹Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина²Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск³Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург

ACOUSTO-OPTICAL SPECTRUM ANALYZER BASED ON BESSEL LIGHT BEAMS

G.V. Kulak¹, P.I. Ropot², A.R. Bestugin³, O.V. Shakin³¹I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University²B.I. Stepanov Institute of Physics of the NAS of Belarus, Minsk³State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg

Теоретически исследованы особенности неколлинеарной акустооптической дифракции квазибездифракционных бesselовых световых пучков в одноосных кристаллах для создания спектроанализаторов радиочастотных сигналов. Найдено выражение для эффективности дифракции в зависимости от параметров взаимодействующих бesselовых пучков *o*- и *e*-типа, а также от значений интегралов перекрытия и частотной расстройки брэгговского синхронизма. Показано, что в условиях отсутствия точного поперечного фазового синхронизма дифрагированных бesselовых световых пучков частотное разрешение акустооптического спектроанализатора составляет ~ 3,5 кГц.

Ключевые слова: неколлинеарное акустооптическое взаимодействие, бesselовы световые пучки, акустооптический спектроанализатор, одноосный кристалл, эффективность дифракции, частотное разрешение.

The features of non-collinear acousto-optical diffraction of quasi-diffraction Bessel light beams in uniaxial crystals for creating radio frequency signal spectro-analyzers are theoretically investigated. An expression is found for the diffraction efficiency depending on the parameters of interacting Bessel beams of *o*- and *e*-type, as well as on the values of the overlap integrals and the frequency detuning of the Bragg synchronism. It is shown that the frequency resolution of the acousto-optical spectrum analyzer is ~ 3.5 kHz in the absence of accurate transverse phase synchronism of diffracted Bessel light beams.

Keywords: non-collinear acousto-optical interaction, Bessel light beams, acousto-optical spectrum analyzer, uniaxial crystal, diffraction efficiency, frequency resolution.

Введение

В одноосных кристаллах реализуется широкоапертурная геометрия взаимодействия света и ультразвука [1]–[4]. При этом плоскость акустооптического (АО) взаимодействия проходит через оптическую ось, а волновой вектор ультразвуковой (УЗ) волны составляет с перпендикуляром к оптической оси некоторый угол $\alpha \neq 0$. АО дифракция световых волн в плосковолновом приближении, а также гауссовых световых пучков довольно хорошо изучена [1]. В настоящее время для целей оптической обработки информации большой интерес представляют бesselовы световые пучки (БСП), распространяющиеся в одноосных кристаллах [5], [6]. Для ряда важных применений значительный интерес представляют процессы неколлинеарного АО взаимодействия света и ультразвука в анизотропных средах [7], [8]. В частности, такие особенности АО взаимодействия перспективны для создания неколлинеарных перестраиваемых АО фильтров [2]–[4] и спектроанализаторов радиосигналов [9], [10].

В настоящей работе с использованием метода интегралов перекрытия рассмотрена АО

дифракция бesselовых световых пучков высоких порядков в заданном диапазоне спектра ультразвукового сигнала при неколлинеарном АО взаимодействии в кристаллах парателлурита (TeO_2) на медленной сдвиговой УЗ волне, распространяющейся под малым углом α к оси [110]. Такая геометрия неколлинеарного АО взаимодействия является наиболее эффективной и реализуется когда на диаграмме волновых векторов падающего и дифрагированного света касательные к волновым поверхностям параллельны (рисунок 0.1).

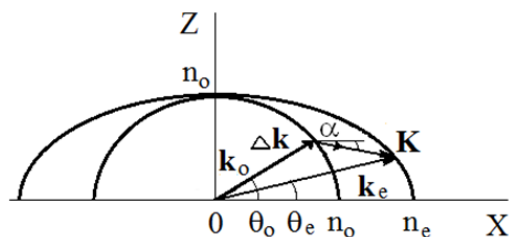


Рисунок 0.1 – Диаграмма волновых векторов падающего и дифрагированного света при заданной частоте (f) ультразвука и длине волны (λ) света

Параллельность касательных к поверхностям волновых векторов означает, что векторы групповых скоростей падающего и дифрагированного света коллинеарны. При этом отсутствует апертурный эффект, то есть два пучка света ортогональной поляризации до выхода из кристалла не испытывают пространственного разделения. Такая геометрия АО взаимодействия обеспечивает условие того, что, при заданной частоте ультразвука и длине волны света, условия брэгговского синхронизма автоматически выполняются в некотором диапазоне $\Delta\theta$. углов падения света θ_i [2], [3]. При этом следует учитывать, что, вследствие значительного сноса энергии акустической волны под углом Δ относительно нормали к пьезопреобразователю, длина АО взаимодействия l_d в плоскости дифракции XZ дается выражением [3]:

$$l_d = l_1 [1 - \cos(\Delta) / \sin(\Delta + \theta_o)].$$

Здесь l_1 – размер пьезопреобразователя в плоскости АО взаимодействия XZ , θ_o – угол падения света по отношению к оси X , причем угол сноса Δ УЗ пучка дается соотношением:

$$\Delta = \arctg \left\{ \left[c_{44} - \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right] \frac{\sin 2\alpha}{2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right] \cos^2 \alpha + c_{44} \sin^2 \alpha \right\},$$

где c_{11} , c_{12} , c_{44} – коэффициенты упругости кристалла.

Кроме обычного продольного фазового согласования, БСП должны удовлетворять условиям поперечного фазового согласования [5], [6]. Такое согласование связано с тем, что БСП с различными углами конусности имеют различную пространственную структуру и, как следствие, различные величины интегралов перекрытия дифрагированных пучков. При этом вычисление интегралов перекрытия (g_m) позволяет найти их максимальные значения в условиях поперечного синхронизма.

1 Теоретические результаты и обсуждение

Рассмотрим геометрию АО взаимодействия, при которой УЗ волна распространяется в кристалле TeO_2 в направлении оси X и занимает пространство между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Будем считать, что падающая волна в одноосном кристалле имеет обыкновенную «о» поляризацию и является бесселевым световым пучком o -типа [7], [8]. В свою очередь, дифрагированная волна имеет необыкновенную «е» поляризацию и является бесселевым пучком e -типа (рисунок 1.1). Ось падающего БСП o -типа расположена в плоскости XZ под углом θ_o к оси X [110]. При этом реализуются условия пространственного $\vec{k}_o \pm \vec{K} = \vec{k}_e + \Delta\vec{k}$ и временного $\omega \pm \Omega = \omega_d$ синхронизма, где $\vec{k}_o$ ($\vec{k}_e$) – волновой вектор бесселева

пучка o -типа (e -типа), $\vec{K}$ – волновой вектор УЗ волны, $\Delta\vec{k}$ – расстройка фазового синхронизма (продольное фазовое рассогласование). Система уравнений связанных волн для амплитуд падающего (A_o) пучка o -типа и дифрагированного (A_e) пучка e -типа имеет вид [1]:

$$\frac{dA_o}{dz} = -i \frac{k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} (\vec{e}_o^* \Delta \hat{\epsilon} \vec{e}_o) \rho d\varphi d\rho}{2k_{oz} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_o|^2 \rho d\varphi d\rho} A_e e^{-i\Delta k_z z}, \\ \frac{dA_e}{dz} = -i \frac{k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} (\vec{e}_e^* \Delta \hat{\epsilon} \vec{e}_o) \rho d\varphi d\rho}{2k_{ez} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_e|^2 \rho d\varphi d\rho} A_o e^{i\Delta k_z z}, \quad (1.1)$$

где звездочка «*» означает комплексное сопряжение. В уравнениях (1.1) вектор-функции поляризации падающего бесселева пучка o -типа и дифрагированного пучка e -типа даются следующими выражениями [11]:

$$\vec{e}_o = e_{o1} \vec{e}_1 + e_{o2} \vec{e}_2 + e_{o3} \vec{e}_3, \\ \vec{e}_e = e_{e1} \vec{e}_1 + e_{e2} \vec{e}_2 + e_{e3} \vec{e}_3, \quad (1.2) \\ e_{o1} = i q_{o\perp} \cos \theta'_o \times \\ \times \left(\frac{J_{m-1}(q_{o\perp} \rho) e^{-i\varphi} + J_{m+1}(q_{o\perp} \rho) e^{i\varphi}}{2} \right) + \\ + i q_{o\parallel} \sin \theta'_o J_m(q_{o\perp} \rho), \\ e_{o2} = q_{o\perp} \cos \theta'_o \times \\ \times \left(\frac{J_{m-1}(q_{o\perp} \rho) e^{-i\varphi} - J_{m+1}(q_{o\perp} \rho) e^{i\varphi}}{2\sqrt{1 + a^4 \tan^4 \theta'_o}} \right) + \\ + q_{o\perp} \sin^2 \theta'_o \left(\frac{J_{m+1}(q_{o\perp} \rho) e^{i\varphi} - J_{m-1}(q_{o\perp} \rho) e^{-i\varphi}}{2} \right), \\ e_{o3} = q_{o\perp} \cos \theta'_o \times \\ \times \frac{(J_{m-1}(q_{o\perp} \rho) e^{-i\varphi} - J_{m+1}(q_{o\perp} \rho) e^{i\varphi}) a^2 \tan \theta'_o}{2\sqrt{1 + a^4 \tan^4 \theta'_o}} + \\ + q_{o\perp} \sin 2\theta'_o \left(\frac{J_{m+1}(q_{o\perp} \rho) e^{i\varphi} - J_{m-1}(q_{o\perp} \rho) e^{-i\varphi}}{4} \right), \\ e_{e1} = k^{-1} n_o^{-2} n_e^{-2} \left\{ a q_{e\perp}^2 \sin^2 \theta'_e \times \right. \\ \times \left(\frac{J_{m-2}(q_{e\perp} \rho) e^{-i2\varphi'} - J_{m+2}(q_{e\perp} \rho) e^{i2\varphi'}}{4} \right) + \\ \left. + a q_{e\perp} q_{e\parallel} \cos \theta'_e \left(\frac{J_{m+1}(q_{e\perp} \rho) e^{i\varphi'} - J_{m-1}(q_{e\perp} \rho) e^{-i\varphi'}}{2} \right) \right\}, \\ e_{e2} = i k^{-1} n_o^{-2} n_e^{-2} \left\{ a q_{e\perp}^2 \sin 2\theta'_e \times \right. \\ \times \left(\frac{J_{m+2}(q_{e\perp} \rho) e^{i2\varphi'} + J_{m-2}(q_{e\perp} \rho) e^{-i2\varphi'}}{4} \right) -$$

$$\begin{aligned}
 & -aq_{e\perp}q_{e\parallel}\cos 2\theta'_e\left(\frac{J_{m-1}(q_{e\perp}\rho)e^{-i\varphi'}+J_{m+1}(q_{e\perp}\rho)e^{-i\varphi'}}{2}\right)- \\
 & -a\left(k^2-\frac{3q_{e\perp}^2}{2}\right)\sin 2\theta'_eJ_m(q_{e\perp}\rho)\Big\}, \\
 & e_{e3}=ik^{-1}n_o^{-4}\left\{-q_{e\perp}^2\sin 2\theta'_e\times\right. \\
 & \times\left(\frac{J_{m+2}(q_{e\perp}\rho)e^{i2\varphi'}+J_{m-2}(q_{e\perp}\rho)e^{-i2\varphi'}}{4}\right)+ \\
 & +q_{e\perp}q_{e\parallel}\sin 2\theta'_e\left(\frac{J_{m-1}(q_{e\perp}\rho)e^{-i\varphi'}+J_{m+1}(q_{e\perp}\rho)e^{-i\varphi'}}{2}\right)+ \\
 & \left.+q_{e\perp}^2(1+\cos^2\theta'_e+q_{e\parallel}^2\sin^2\theta'_e)J_m(q_{e\perp}\rho)\right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – единичные векторы в кристаллографической системе координат X_1, X_2, X_3 ; ρ, φ – цилиндрические координаты БСП, $\varphi' = \arctg[atg(\varphi)]$, $a = n_o / n_e$; $n_o (n_e)$ – обыкновенный (необыкновенный) показатель преломления кристалла; $q_{o\perp, e\perp} = k_{o, e} \sin \gamma_{o, e}$, $q_{o\parallel, e\parallel} = \sqrt{k_{o, e}^2 - q_{o\perp, e\perp}^2}$, причем $\gamma_{o, e}$ – параметр конусности БСП; $\theta'_o = 90^\circ - \theta_o$; $\theta'_e = 90^\circ - \arctg[atg(\theta_e)]$; $\Delta\hat{\epsilon}$ – изменение тензора диэлектрической проницаемости, индуцированное ультразвуковой волной.

Из (1.2) следует, что падающий и дифрагированный пучки соответственно o - и e -типа обладают сложной неоднородной по сечению пучка поляризационной структурой [11]. При этом векторы поляризации $\vec{e}_o$ и $\vec{e}_e$ моды бесселева пучка порядка m зависят от функций Бесселя пяти порядков $J_m, J_{m\pm 1}, J_{m\pm 2}$. Здесь, по определению, бесселев пучок порядка m имеет общий фазовый множитель $e^{i(mz+k_zz-\omega t)}$, то есть распространяется в кристалле с фазовой скоростью ω/k_z без изменения пространственного распределения поперечной составляющей.

Решение системы уравнений связанных волн (1.1) ищем с использованием следующих граничных условий: $A_o(z=0) = A$, $A_e(z=0) = 0$. Тогда эффективность дифракции имеет вид [1], [7], [8]:

$$\eta = \frac{\chi^2 \sin^2 \left[l_d \sqrt{\chi^2 + (\Delta k_z / 2)^2} \right]}{\chi^2 + (\Delta k_z / 2)^2}, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{\pi n_o^4 g_m P_{\text{эф}}}{2n\lambda_0 \sin(\theta_o + \alpha) \sin(\theta_e + \alpha)} \sqrt{\frac{2P_a}{l_1 l_2 \sigma \nu^3}}, \\
 \Delta k_z &= \left(-\frac{2\pi n_o}{\lambda_0 f_0} \right) \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left(\sqrt{(\xi(\theta_o) - \eta_0)^2 + 2\eta_0 \xi(\theta_o)(1 - \cos(\theta_o + \alpha))} - 1 \right) \Delta f,$$

$$\xi(\theta_o) = \frac{n_e}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 \theta_o + n_e^2 \sin^2 \theta_o}}, \quad \eta_0 = \frac{\lambda_0 f_0}{n_o \nu},$$

причем λ_0 – центральная длина световой волны, Δf – отклонение частоты УЗ от центральной, f_0 – центральная частота УЗ волны, ν – фазовая скорость сдвиговой УЗ волны;

$$P_{\text{эф}} = \left[(P_{12} - P_{11}) - P_{44} \frac{\sin(2\alpha)}{8} \right]$$

(P_{11}, P_{12}, P_{44} – фотоупругие постоянные, σ – плотность кристалла, ν – фазовая скорость УЗ волны, $n = (n_o + n_e) / 2$, P_a – мощность УЗ волны, l_1 – длина пьезопреобразователя вдоль оси $X_{\parallel}$ [110], l_2 – ширина пьезопреобразователя). При решении системы уравнений (1.1) находят комплексную амплитуду дифрагированной волны A_e . Тогда в качестве коэффициента дифференциального уравнения относительно A_e получаем интеграл перекрытия g_m дифрагированной волны вида [см. напр. 8]:

$$g_m = \frac{\left| \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} (\vec{e}_o^* \vec{e}_e) \rho d\varphi d\rho \right|}{\sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_e|^2 \rho d\varphi d\rho} \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_o|^2 \rho d\varphi d\rho}}, \quad (1.4)$$

где R_B – радиус БСП.

С использованием соотношений (1.3)–(1.4) рассмотрим физические характеристики АО дифракции с целью создания акустооптического спектроанализатора (АОСПА) на БСП. Для исследованной геометрии АО взаимодействия центральная частота УЗ волны полагалась $f_0 = 159$ МГц, длина волны света $\lambda_0 = 0,63$ мкм. Для данной длины волны света показатели преломления кристалла TeO_2 соответственно равны: $n_o = 2,26$, $n_e = 2,41$ [12]. Для пьезопреобразователя размером $l_1 = 1$ см, $l_2 = 0,5$ см максимальная эффективность дифракции ($\eta = 1$) достигается в условиях продольного и поперечного синхронизма при УЗ мощности $P_a = 23$ мВт.

Зависимости эффективности дифракции η от ширины спектра Δf АОСПА для центральной частоты ультразвука $f_0 = 159$ МГц, длины волны света $\lambda_0 = 0,63$ мкм представлены на рисунке 1.1.

Частотное разрешение спектроанализатора (Δf_a) АОСПА рассчитывалось по достижению эффективности дифракции η нулевого значения ($\eta = 0$). Рассматривался случай полного поперечного синхронизма дифрагированных БСП ($q_n = 0$) и отсутствия поперечного фазового синхронизма ($q_n \neq 0$). В обоих случаях параметр фазовой отстройки (q_n) и порядок БСП (m) подбирались так, чтобы эффективность дифракции достигала максимального значения на центральной частоте ультразвука f_0 . Как следует из

рисунка 1.1, а), разрешающая способность АОСПА в условиях поперечного синхронизма составила $\Delta f_a = 210$ кГц. Значительное улучшение разрешающей способности АОСПА достигается для тех же порядков БСП при условии нарушения поперечного синхронизма (рисунок 1.1, б). При этом частотное разрешение составляет $\Delta f_a = 3,52$ кГц. Данный физический эффект объясняется сложным пространственным распределением дифрагированных БСП в одноосных кристаллах [8], [10] и возможностью изменения интеграла перекрытия за счет варьирования параметров конусности дифрагированных БСП.

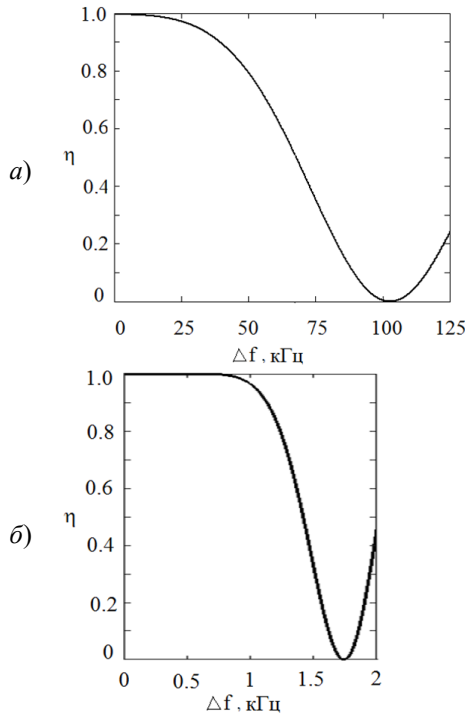


Рисунок 1.1 – Зависимость эффективности дифракции η от ширины УЗ спектра Δf

а) при условии поперечного синхронизма для различных порядков БСП $m = 0 \div 3$;

б) при отсутствии поперечного синхронизма ($q_n \neq 0$) для различных порядков БСП:

$m = 0, q_n = 6$; $m = 1, q_n = 0,98$; $m = 2, q_n = 0,5$;

$m = 3, q_n = 0,39$ (кристалл TeO_2 ; $\alpha = 10^\circ$;

$\gamma_o = \gamma_e = 0,5^0$, $R_B = 6$ мм, $P_a = 23$ мВт, $f = 159$ МГц, $l_1 = 1$ см, $l_2 = 0,5$ см, $\lambda_0 = 0,63$ мкм)

В условиях продольного и поперечного синхронизма наряду с рассмотренной разрешающей способностью, обусловленной селективными свойствами брэгговской дифракции, имеет место ее уменьшение, связанное с уширением ультразвукового и светового пучков [1], [2]. Расчет данных ширин спектра для ультразвукового (Δf_s) и светового (Δf_L) пучков достигается с использованием соотношений [1]:

$$\Delta f_{s,L} = 0,8 f_0 \varphi_{s,L} \tan \theta_o,$$

где φ_s – расходимость УЗ пучка, φ_L – расходимость светового пучка. Таким образом, общее частотное разрешение составляет:

$$\Delta f_{ob} = \Delta f_a + \Delta f_s + \Delta f_L.$$

Следует отметить, что для квазибездифракционных БСП выполняются естественные соотношения: $\Delta f_L \ll \Delta f_a$, $\Delta f_L \ll \Delta f_s$. В таком случае, использование БСП для АОСПА является предпочтительным, например, чем гауссовых пучков [1]. Положив, к примеру, $\Delta f_s = 25,2$ кГц, $\Delta f_L = 2,52$ кГц получим, что $\Delta f_{ob} = 239,48$ кГц при $q_n = 0$ и $\Delta f_{ob} = 33$ кГц при $q_n \neq 0$ (рисунок 1.2). Число разрешимых положений АОСПА дается соотношением: $N_f = \delta f / \Delta f_{ob}$, где δf – ширина исследуемого диапазона спектра УЗ сигнала [1].

2 Экспериментальная схема АО спектроанализатора

На рисунке 2.1 представлена схема АОСПА с пространственным интегрированием [12].

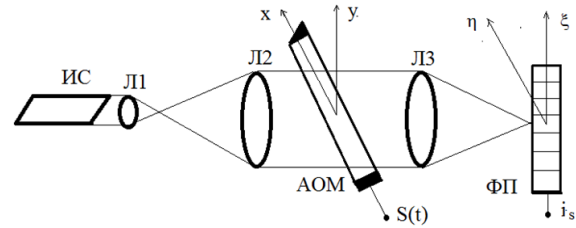


Рисунок 2.1 – Схема АОСПА с пространственным интегрированием (ИС – источник света, Л1, Л2, Л3 – сферические линзы, АОМ – акустооптический модулятор, $S(t)$ – временная функция радиосигнала, F – фокусное расстояние линзы Л3, ФП – фотоприемник)

В соответствии со схемой, приведенной на рисунке 2.1, квадрат напряженности поля дифрагированной волны в области фотоприемника выражается соотношением [12]:

$$|E_d^{+1}|^2 = \frac{|E_0|^2}{\lambda^2 F^2} \sin^2(\chi l_d) (2l_d)^2 (2h)^2 \times \left\{ \sin c \left[k_e l_d \left(\frac{\xi}{F} - \frac{\lambda}{\Lambda} \right) \right] \sin c \left(\frac{k_e}{F} h \eta \right) \right\},$$

где $2h$ – размер апертуры АОМ вдоль оси Y , E_0 – напряженность электрического поля падающей волны; $k_e = 2\pi / \lambda$ – волновое число дифрагированной волны, причем $\lambda = \lambda_0 / n_e$. Здесь полагалось, что в одночастотном режиме $S(t) = 1$. Тогда сигнальный ток фотоприемника находим из соотношения [12]:

$$i_s = \frac{S_i P_L \beta (2l_d) (2h)}{\lambda^2 F^2} \sin^2(\chi l_d) \times \left(\frac{F}{kl_d} \right) \left(\frac{F}{kh} \right) \int_{-\frac{kl_d}{F} \Delta \xi}^{\frac{kl_d}{F} \Delta \xi} \sin^2(\xi') d\xi' \int_{-\frac{kh}{F} \Delta \eta}^{\frac{kh}{F} \Delta \eta} \sin^2(\eta') d\eta',$$

где $2\Delta\xi$ – ширина элемента фотоприемника, $2\Delta\eta$ – высота элемента фотоприемника, β – коэффициент оптических потерь, P_L – мощность оптического излучения, S_I – чувствительность фотоприемника по току. Допустимая степень нелинейности $\alpha_B = (\chi_d^I)^2 / 12$. Данная величина определяет верхнюю границу динамического диапазона АОСПА с пространственным интегрированием и для БСП она $\sim (g_m)^2$.

Заключение

Таким образом, в одноосных кристаллах реализуется неколлинеарная АО дифракция бесселевых световых пучков *o*- и *e*-типов для различных мод *m*, перспективная для создания спектроанализаторов радиосигналов с высоким частотным разрешением. Найдено выражение для эффективности дифракции в зависимости от параметров взаимодействующих бесселевых пучков *o*- и *e*-типа, а также от значений интегралов перекрытия и частотной расстройки брэгговского синхронизма. Установлено, что в условиях отсутствия точного поперечного фазового синхронизма дифрагированных бесселевых световых пучков, частотное разрешение акустооптического спектроанализатора составляет $\sim 3,5$ кГц. Рассчитаны параметры схемы АОСПА с пространственным интегрированием на основе БСП и кристаллов TeO_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакиши, В.Н. Физические основы акустооптики / В.Н. Балакиши, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М.: Радио и связь, 1985. – 279 с.
2. Спектральное пропускание широкоапертурного брэгговского акустооптического фильтра на парателлурите / В.Б. Волошинов [и др.] // Журн. прикл. спектр. – 1990. – Т. 52, В. 2. – С. 284–289.
3. Зубринов, И.И. Широкополосный акустооптический фильтр / И.И. Зубринов, В.К. Сапожников, Д.В. Шелопут // ЖТФ. – 1997. – Т. 67, № 6. – С. 50–53.
4. Мачихин, А.С. Аберрации изображения в акустооптическом перестраиваемом фильтре / А.С. Мачихин, В.Э. Пожар // ЖТФ. – 2010. – Т. 80, В. 10. – С. 101–107.

5. *Second Harmonic Generation with Elliptical Bessel beams* / V.N. Belyi, N.A. Khilo, E.S. Petrova, A.G. Maschenko, V.E. Leparskii // Proc. SPIE. – 2002. – Vol. 4751. – P. 97–103.

6. *Generation of TH- and TE-polarized Bessel light beams at acousto-optic interaction in anisotropic crystals* / V.N. Belyi, P.A. Khilo, N.S. Kazak, N.A. Khilo // Optics commun. – 2014. – Vol. 325. – P. 84–91.

7. Дифракция бесселевых световых пучков на ультразвуке в одноосных гиротропных кристаллах / В.Н. Белый, Г.В. Кулак, Г.В. Крох, О.В. Шакин // Опт. и спектр. – 2016. – Т. 121, № 3. – С. 458–465.

8. Неколлинеарная акустооптическая фильтрация полихроматических бесселевых световых пучков в одноосных кристаллах / Г.В. Кулак, Г.В. Крох, П.И. Ропот, О.В. Шакин // Журн. прикл. спектр. – 2018. – Т. 85, № 3. – С. 487–492.

9. Акустооптический спектроанализатор радиосигналов с удвоенным разрешением на кристалле TeO_2 / В.С. Бондаренко, Н.А. Есепкина, В.Ю. Петрунькин, В.В. Чкалова, А.С. Щербаков // Письма в ЖТФ. – 1976. – Т. 2, В. 20. – С. 937–941.

10. Акустооптические спектроанализаторы на кристаллах / Н.А. Есепкина, А.А. Липовский, В.Ю. Петрунькин, А.С. Щербаков // Акустооптические методы обработки информации. Сб. научн. трудов под. ред. Г.Е. Корбукова, С.В. Кулакова. – Л.: Наука. – 1978. – С. 22–30.

11. Гиргель, С.С. Бесселевы световые пучки в одноосных кристаллах / С.С. Гиргель // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика. Сборник научных трудов. – Минск. – 2005. – С. 170–176.

12. Акустооптические процессоры спектрального типа. Научная серия «Функциональные устройства обработки сигналов»; под. ред. В.В. Проклова, В.Н. Ушакова. – М.: Радиотехника. – 2012. – 187 с.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (грант № Ф20Р-286).

Поступила в редакцию 28.09.2020.

СТРУКТУРА И СВОЙСТВА a-C ПОКРЫТИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МЕТАЛЛЫ И ПРОДУКТЫ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С АЗОТОМ, УГЛЕРОДОМ**Е.А. Кулеш¹, А.В. Рогачёв¹, Д.Г. Пилипцов¹, Сяохун Цзян², А.С. Руденков¹**¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины²Нанкинский университет науки и технологии**STRUCTURE AND PROPERTIES OF a-C FILMS CONTAINING METALS AND PRODUCTS OF THEIR INTERACTION WITH NITROGEN, CARBON****E.A. Kulesh¹, A.V. Rogachev¹, D.G. Piliptsou¹, Xiaohong Jiang², A.S. Rudenkov¹**¹F. Scorina Gomel State University²Nanjing University of Science and Technology

С использованием вакуумно-плазменных методов осаждены (Cu-CrN):a-C и (Al-CrN):a-C покрытия, определен их химический и фазовый состав, механические свойства. Методом РФЭС установлены особенности образования нитридных и карбидных соединений при содержании в покрытии хрома, меди или алюминия. Показано, что концентрация азотсодержащих связей и содержание карбидной фазы в (Al-CrN):a-C покрытии значительно превышает их содержание в (Cu-CrN):a-C покрытии. Определены триботехнические свойства покрытий при трении по стали ШХ15, Al_2O_3 и Si_3N_4 . Показано, что более низкое значение коэффициента трения регистрируется при контактом взаимодействии (Al-CrN):a-C со сталью ШХ15 (0,2), а минимальный коэффициент объёмного износа контртела получен в паре трения с Al_2O_3 ($1,08 \times 10^{-10} \text{ м}^3/(\text{Н} \cdot \text{м})$). Методом индентирования показано, что введение меди увеличивает пластичность покрытий, при этом их твердость снижается незначительно. (Al-CrN):a-C покрытия характеризуются более высокой твердостью (14,2 ГПа) и коэффициент упругого восстановления η_{IT} равен 51,8% при глубине индентирования 500 нм.

Ключевые слова: композиционные углеродные покрытия, карбиды и нитриды металлов, триботехнические свойства, механические свойства.

(Cu-CrN):a-C and (Al-CrN):a-C coatings were deposited using vacuum-plasma methods, their chemical and phase composition, mechanical properties were determined. The features of the formation of nitride and carbide compounds with the content of chromium, copper or aluminum in the coating have been established by the XPS method. It was shown that the concentration of nitrogen-containing bonds and the content of the carbide phase in the (Al-CrN):a-C coating significantly exceed their content in the (Cu-CrN):a-C coating. The tribotechnical properties of coatings during friction against steel ШХ15, Al_2O_3 and Si_3N_4 have been determined. It is shown that a lower value of the friction coefficient is recorded during contact interaction (Al-CrN):a-C with steel ШХ15 (0.2), and the minimum coefficient of volumetric wear of the counterbody was obtained in the pair of friction with Al_2O_3 ($1.08 \times 10^{-10} \text{ m}^3/(\text{N} \cdot \text{m})$). It was shown by the indentation method that the introduction of copper increases the ductility of the coatings, while their hardness decreases slightly. (Al-CrN):a-C coatings are characterized by a higher hardness (14.2 GPa) and the coefficient of elastic recovery η_{IT} is 51.8% at an indentation depth of 500 nm.

Keywords: composite carbon coatings, metal carbides and nitrides, tribotechnical properties, mechanical properties.

Введение

Низкие значения коэффициента трения, высокие твердость и износостойкость покрытий на основе углерода являются важными параметрами, определяющими их эффективное использование при решении различных технических задач [1]. Нитридные и карбидные соединения переходных металлов характеризуются более высокой термостойкостью, пластичностью в сравнении с a-C покрытиями и их использование в качестве компонентов композиционных материалов является одним из наиболее перспективных технологических приемов достижения высоких эксплуатационных свойств [2], [3].

Разработка и оптимизация методов формирования покрытий на основе углерода, содержащих слои карбидов и нитридов переходных металлов, с целью направленного улучшения их механических свойств (снижения внутренних

напряжений, увеличения пластичности) является актуальной задачей. Наличие в структуре покрытий элементов с различной химической активностью дает возможность формировать в объеме слоя заданное фазовое и структурное состояние, что, в конечном счете, позволяет реализовать высокие механические характеристики покрытий, определяемые, в частности, оптимальным отношением твердости, прочности, ударной вязкости и износостойкости [4], [5].

Одним из приоритетных направлений современного материаловедения является разработка многокомпонентных нанокомпозитных структур, содержащих такие элементы, как Cu, Ti, Al, Cr и продукты их взаимодействия с азотом и углеродом [6], [7]. Изучение особенностей осаждения, структуры и механических свойств таких систем позволит определить оптимальный состав и технологические приемы регулирования

их свойств [8], [9]. Использование в качестве легирующих элементов алюминия или меди, характеризующихся различной химической активностью по отношению к углероду и азоту, создаст условия для формирования в объеме покрытий фазы с отличающимися механическими свойствами, выполняющими, в частности, при трении различные функции (нитридные и карбидные соединения хрома повышают термостойкость покрытия с сохранением его высокой твердости [10], медные слои в зоне контакта снижают коэффициент трения, повышают износостойкость покрытия [11]–[13]).

Целью данной работы является установление структурного и фазового состояния, механических свойств сформированных из импульсной углеродной плазмы покрытий, содержащих в своем составе медь, алюминий, хром и продукты их взаимодействия с углеродом, азотом.

1 Методика получения покрытий и исследования их структуры и свойств

Для осаждения металлосодержащих покрытий на основе аморфного углерода применяли оборудование, схематически представленное на рисунке 1.1. Его важной особенностью является испарение металлов из отдельных электродуговых испарителей, что позволяет осуществлять контроль скорости его осаждения и, таким образом, формировать покрытия с заданным химическим составом.

Углеродная компонента покрытия осаждалась из потока углеродной плазмы, формируемой испарением графитового катода импульсной дугой. Введение азота в состав покрытия проводили в процессе испарения дугой постоянного тока катодов, изготовленных из хрома и алюминия (меди), в атмосфере азота при его парциальном давлении $6,3 \times 10^{-2}$ Па. Отношение концентраций

хрома и алюминия (меди) изменяли за счет регулирования токов дуговых испарителей. Данным методом были получены (Al-CrN):a-C и (Cu-CrN):a-C покрытия.

Химический состав и концентрацию элементов в покрытиях определяли методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) с использованием прибора PHI Quantera при возбуждении вещества K α -излучением алюминия с энергией кванта 1486,6 эВ и суммарной мощностью 250 Вт.

Триботехнические испытания проводили по схеме «сфера-плоскость» при возвратно поступательном перемещении индентора со скоростью 10 мм/с при нормальной нагрузке 1 Н. В качестве инденторов использовали шарики диаметром 4 мм, изготовленные из стали ШХ15, Al₂O₃ и Si₃N₄. После проведения триботехнических испытаний измеряли диаметр пятна контакта и рассчитывали коэффициент объёмного износа контртела j (м³ / Н×м).

В качестве характеристик механических свойств использовали значения стойкости к упругой деформации, характеризующейся индексом пластичности (H/E), стойкость к пластической деформации (H^3/E^2) и коэффициент упругого восстановления η_{IT} [14]–[17]. Измерения механических свойств проводили методом индентирования («НаноСкан 4D», ФГБНУ «ТИС-НУМ», РФ) в режиме с линейной разверткой прикладываемой силы нагружения (Lin. Force) с применением индентора типа Беркович по стандартной методике (ISO 14577) с однократным нагружением и разгрузением. С целью обеспечения метрологически достоверных значений измеренных параметров на каждом образце покрытий проводилось по 15 измерений при идентичных условиях нагружения. Для расчета коэффициента

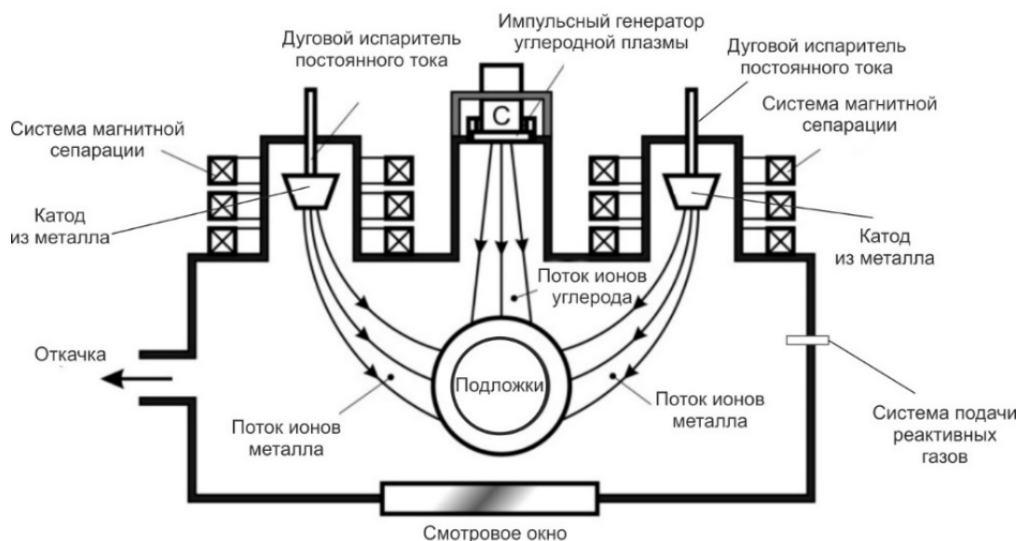


Рисунок 1.1 – Схема вакуумной установки для формирования покрытий

упругого восстановления использовали значения максимальной глубины индентирования $h_{\max}$ и остаточной глубины отпечатка Δh при трех различных значениях максимальной нагрузки, а именно: 5 мН, 15 мН и 50 мН. Данные нагрузки на индентор обеспечивали глубины вдавливания порядка 100 нм, 250 нм и 500 нм, что позволило определить упругие свойства в различных по толщине приповерхностных слоях.

2 Полученные результаты и их анализ

На рисунке 2.1 приведены обзорные РФЭ-спектры для (Al-CrN):a-C и (Cu-CrN):a-C покрытий. Их анализ показывает, что в покрытиях присутствуют Cu, Cr, Al, N и C. Установлено также содержание кислорода с концентрацией меньше 2%, введение которого в объем слоя наиболее вероятно после нанесения покрытия при напуске воздуха в камеру.

РФЭ-спектры (Cu-CrN):a-C покрытия, полученные при высоком разрешении, указывают на

образование в покрытии при таких условиях осаждения различных химических связей между элементами (рисунок 2.2). Так, в C1s спектре можно выделить полосы поглощения, свидетельствующие об образовании в покрытии C – Cr, C – C, C – N и C – O связей (рисунок 2.2, а). Низкая интенсивность компоненты C – Cr указывает на относительно слабую химическую способность к взаимодействию между атомами хрома и углерода. Согласно спектру Cr2p (рисунок 2.2, б) хром в (Cu-CrN):a-C покрытии присутствует как металлическая компонента, нитрид хрома или оксид [12], [13].

Медь присутствует в покрытии преимущественно в виде металла или оксидов CuO или Cu₂O. В спектре азота N1s обнаружены пики, которые характерны для N – Cr, N – Csp² N – Csp³ взаимодействия. В спектре состояния O1s присутствуют полосы поглощения, указывающие на наличие связей оксида хрома, оксида меди и O – C связи (рисунок 2.2, з).

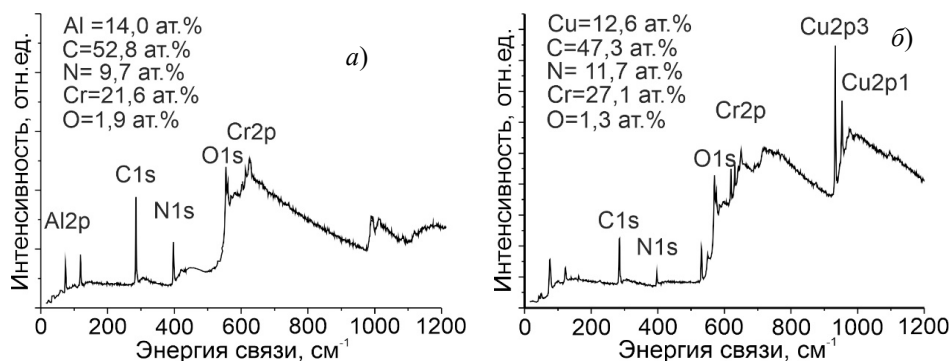


Рисунок 2.1 – Обзорные РФЭ-спектры (Al-CrN):a-C (а), (Cu-CrN):a-C (б) покрытий

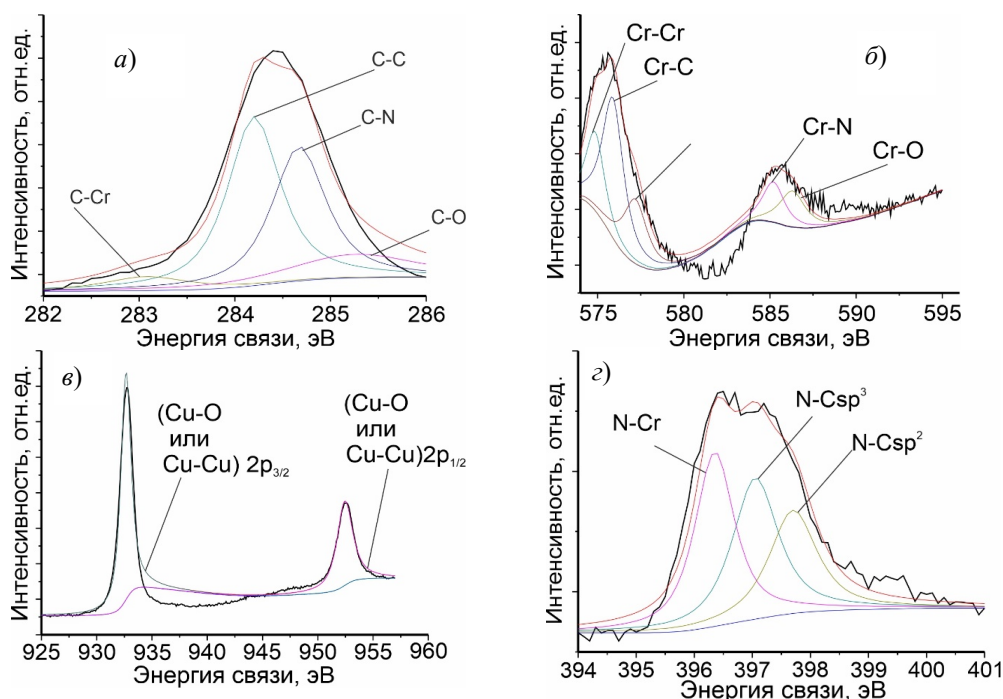


Рисунок 2.2 – Спектр состояния C1s (а), Cr2p (б), Cu2p (в) и N1s (з) (Cu-CrN):a-C покрытия

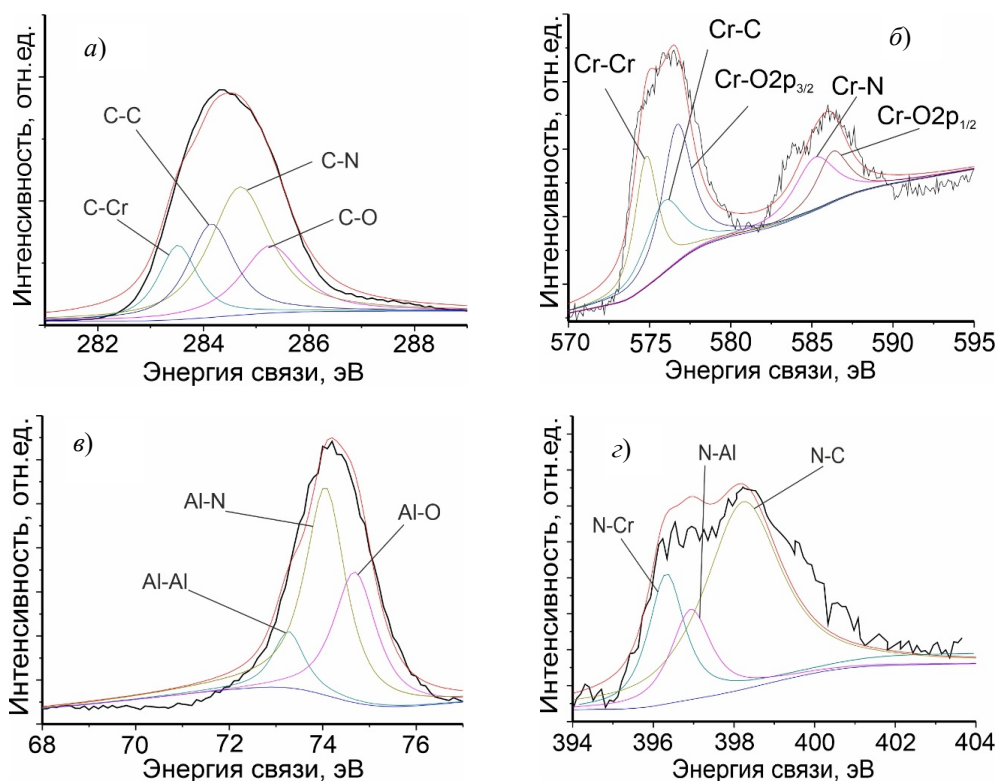


Рисунок 2.3 – Спектр состояния C1s (а), Cr2p (б), Al2p (в), N1s (г) (Al-CrN):а-С покрытия

При замене в составе покрытий меди на алюминий проявляются особенности химического взаимодействия компонентов (рисунок 2.3). Так, вблизи энергии 285 эВ состояния C1s атомов углерода наблюдается интенсивный пик, который возможно разложить на компоненты для связей типа C – Cr, C – C, C – N и C – O (рисунок 2.3, а), интенсивность которых отличается от значений, представленных на рисунке 2.2, а. В C1s спектре состояния атомов углерода (Al-CrN):а-С покрытия обнаружены пики, ответственные за C – Cr, C – C, C – N и C – O взаимодействие. Интенсивность и площадь данных пиков (таблица 2.1) показывает на преимущественное образование связей углерода с азотом. В РФЭ спектре состояния Cr2p (рисунок 2.3, б) обнаружены связи, определяющие Cr – Cr, Cr – C, Cr – O и Cr – N взаимодействие.

Следует отметить, что отношение площадей пиков Cr – C, Cr – N и Cr – Cr в спектре Cr2p (рисунок 2.2, б и 2.3, б), контуры которых соответствуют металлическому хрому, взаимодействию хрома с азотом и углеродом, практически одинаковы. Таким образом, введение Al в слой CrN не приводит к изменению относительной доли Csp^3 - и Csp^2 -фаз в сравнении с (Cu-CrN):а-С покрытием. Однако концентрация азотсодержащих связей и содержание карбидной фазы в (Al-CrN) / а-С покрытии значительно более высокие (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Параметры РФЭ-спектров C1s состояния атомов углерода для композиционных покрытий

Покрытие	C-C / C-Me	C-C / C-N	C-C / C-MeN
(Al-CrN):а-С	1,51	0,56	3,38
(Cu-CrN):а-С	7,44	1,23	2,08

Результат разложения спектра состояния Al2p для (Al-CrN):а-С покрытия (рисунок 2.3, в) показывает, что алюминий в покрытии присутствует как в виде оксида, нитрида так и в виде металлических включений. Химические связи, характерные для образования сложного нитрида в спектре (Cr-Al)-N покрытия, не обнаружены. Анализ состояний Cu2p и N1s (Cu-CrN):а-С покрытий (рисунки 2.2, а и з), не позволил выявить формирование соединений типа Cu – N или Cu – C, что связано с низкой химической активностью меди с азотом и углеродом [14], [15].

Согласно таблице 2.1, при легировании алюминием нитридной компоненты покрытия в углеродном слое происходит увеличение не только доли ($Csp^3 + Csp^2$) фазы, но и формирование пиридинподобных связей (C – N связей) [16]. Информацию об отношении углеродной компоненты покрытия к нитридной/карбидной фазе можно получить из данных, приведенных в таблице 2.1.

Изменения в химическом и фазовом составе покрытия сказываются на их триботехнических и

механических свойствах. Установлено, что коэффициент трения пары (Al-CrN):a-C и ШХ15 значительно ниже, чем для пары трения (Cu-CrN):a-C – ШХ15 (рисунок 2.4, таблица 2.2). При этом если при трении (Al-CrN):a-C (а) покрытия меньшее значение коэффициента трения регистрируется при контакте со сталью ШХ15, то при контактом взаимодействии (Cu-CrN):a-C покрытия со сталью ШХ15 коэффициент трения имеет более высокие значения в сравнении с другими контртелами. Анализ дорожек трения показал, что при трении медьсодержащих углеродных покрытий в паре с твердыми контртелами Al_2O_3 и Si_3N_4 в зоне трения формируются пластичные пленки меди, выполняющие роль твердой смазки и обеспечивающие низкие значения коэффициента трения.

Как показано в таблице 2.2, коэффициент объёмного износа контртел различной природы в паре трения с (Al-CrN) / a-C покрытием достигает более высоких значений и определяется

фазовым составом контактирующих поверхностей, наличием макрочастиц в зоне трения, а также попаданием в зону трения продуктов разрушения (Al-CrN):a-C покрытия, имеющих высокую твердость, что определяет преимущественно абразивный характер износа поверхности контртела (рисунок 2.4, а). Покрытия, содержащие в составе нитридного слоя медь, показывали более низкие значения коэффициентов объёмного износа контртел, чем покрытия с алюминием (таблица 2.2).

Определение механических свойств (Cu-CrN):a-C и (Al-CrN):a-C покрытий проводилось на основании анализа кривых нагружения-разгружения при различных нагрузках, представленных на рисунке 2.5.

Известно [16], [17], что для увеличения стойкости к разрушению, вызванной упругой деформацией, и уменьшения пластической деформации, покрытие должно показывать высокие значения твердости и обладать при этом

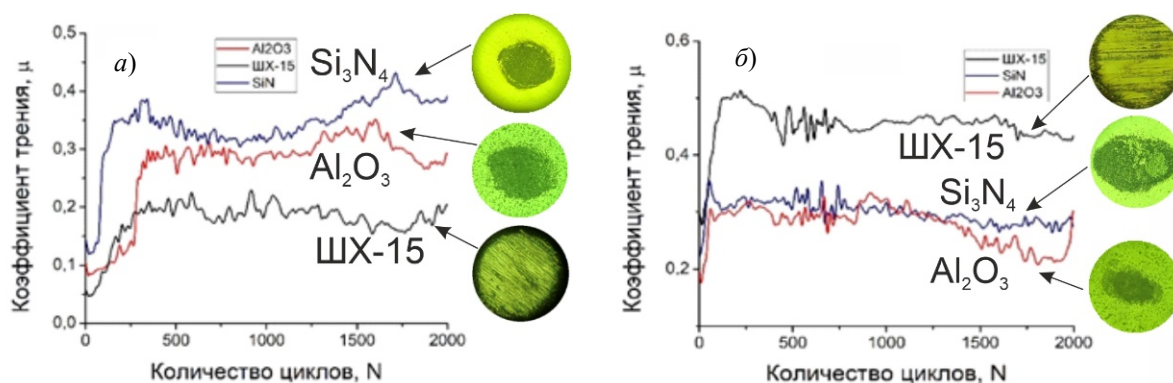


Рисунок 2.4 – Кинетические зависимости коэффициента трения (Al-CrN):a-C (а) и (Cu-CrN):a-C (б) покрытий

Таблица 2.2 – Параметры трения композиционных покрытий

Покрытие	(Cu-CrN):a-C			(Al-CrN):a-C		
	ШХ15	Al_2O_3	Si_3N_4	ШХ15	Al_2O_3	Si_3N_4
Коэффициент трения μ	0,458	0,267	0,302	0,192	0,291	0,363
Коэффициент объёмного износа контр тела, $j \times 10^{-10} \text{ м}^3/(\text{Н} \cdot \text{м})$	1,16	1,08	1,98	1,47	1,75	3,51

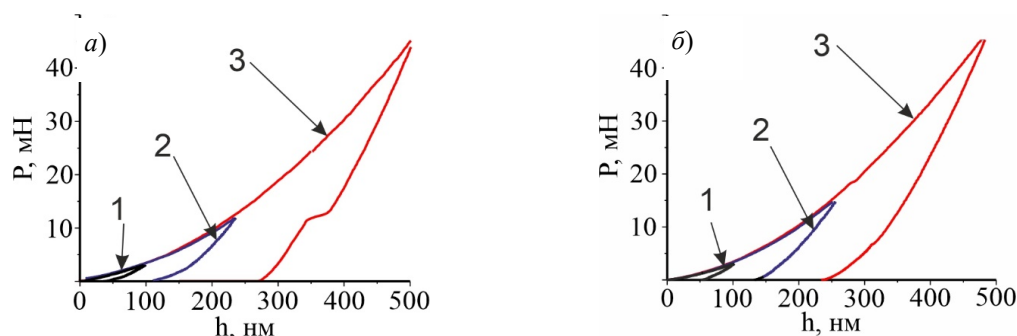


Рисунок 2.5 – P-h диаграммы при нагрузке 5 (1), 15 (2) и 50 мН (3) (Cu-CrN):a-C (а) и (Al-CrN):a-C (б) покрытий

Таблица 2.3 – Механические свойства покрытий

Покрытие	$H_{ср}$, ГПа	$E_{ср}$, ГПа	H / E	H^3 / E^2	η_{IT} , %		
					P_1 , мН	P_2 , мН	P_3 , мН
(Al-CrN) / а-С	14,2±1,3	187,6±8,3	0,08	0,082	38,0	40,8	51,8
(Cu-CrN) / а-С	13,3±1,9	207,5±20,5	0,06	0,054	54,1	52,4	45,2

низким модулем упругости. Высокая твердость покрытия гарантирует стабильность процесса трения и определяет снижение абразивного износа, а низкий модуль упругости обеспечивает высокую устойчивость к пластической деформации и позволяет нагрузке, вызванной давлением контртела, распределяться в пределах более широкой области, чем область контактного давления. По высоким значениям отношения H / E можно судить о повышенной износостойкости покрытий. Эта закономерность была подтверждена на основе данных таблиц 2.2 и 2.3, а также теоретически и экспериментально на примере других покрытий триботехнического назначения [17], [18].

В работах [18], [19] упругие свойства материалов предложено классифицировать согласно значениям индекса пластичности, определяемого как H / E , и, как показано в работе [19], значения H / E характеризуют структурное состояние покрытий. При этом более износостойким является покрытие с более высокими значениями H , E , H / E и значениями коэффициента упругого восстановления η_{IT} .

Полученные композиционные покрытия имеют индекс пластичности H / E в диапазоне от 0,05 до 0,08, что согласуется с результатами определения их структуры и фазового состава. Для покрытий, содержащих в качестве легирующего элемента медь, характерны более низкие значения H / E в сравнении с легированными алюминием. Более низкое значение H / E для (Cu-CrN):а-С покрытия показывает больший вклад работы, затрачиваемой индентором на совершение пластической деформации в материале покрытия. Значения H / E для покрытий (Al-CrN) / а-С равно 0,8 и указывает, что для данного покрытия характерно меньшее влияние пластической деформации, и, следовательно, кинетика трения и разрушения будет протекать по механизму, характерному для алмазоподобного а-С покрытия. Для алмазоподобных покрытий характерна высокая стойкость к упругой деформации и значения H / E находятся в диапазоне 0,08–0,2 (для TiN, CrN, ZrN покрытий $H / E \approx 0,08$). Введение легирующих металлов в объем композиционного покрытия позволяет уменьшить H / E , тем самым увеличив пластичность покрытий, оказав при этом незначительное влияние на твердость полученных слоев (таблица 2.3).

Значения H^3 / E^2 , характеризующие сопротивление материала пластической деформации, коррелируют со значениями твердости и показывают, что максимальные значения H^3 / E^2 наблюдаются для (Al-CrN) / а-С покрытия, что находится в соответствии с результатами определения фазового состава покрытий.

На основании P-h диаграмм (рисунок 2.5) определен коэффициент упругого восстановления η_{IT} покрытий при различных максимальных нагрузках на индентор (P_1 , P_2 и P_3) (таблица 2.3). Установлено, что η_{IT} зависит от глубины индентирования и структуры покрытия. Значения коэффициента упругого восстановления полученных покрытий значительно меньше, чем для алмазоподобных покрытий, η_{IT} которых находится в диапазоне от 70% до 85%. Установлено, что для (Al-CrN):а-С покрытия значения твердости максимальны и при этом значения $\eta_{IT} = 51,8\%$ при глубине индентирования 500 нм.

Заключение

Предложены методики формирования многокомпонентных покрытий из отдельных источников на основе аморфного углерода и металлов и их соединений. Методом РФЭС определен химический и фазовый состав (Cu-CrN):а-С и (Al-CrN):а-С покрытий. Показано, что медь в покрытии присутствует в виде отдельной металлической фазы и в поверхностных слоях частично в виде оксида меди. Углерод в покрытии образует химические соединения с хромом и азотом, в структуре (Al-CrN):а-С покрытия происходит образование связей C–N и C–Cr. Алюминий присутствует преимущественно в виде оксида Al_xO_y .

Определены триботехнические свойства композиционных покрытий при трении с контртелами различной природы (сталь ШХ15, Al_2O_3 и Si_3N_4). Показано, что минимальные значения коэффициента трения характерны для (Al-CrN):а-С покрытия ($\mu = 0,192$) при трении с ШХ15. Минимальный коэффициент объемного износа контртела получен в паре трения (Al-CrN):а-С и Al_2O_3 и составляет $1,08 \times 10^{-10} \text{ м}^3 / (\text{Н} \cdot \text{м})$.

Методом наноиндентирования определены индекс пластичности H / E , стойкость к пластической деформации H^3 / E^2 и коэффициент упругого восстановления η_{IT} осажденных покрытий на основе углерода и легированных нитридных слоев. Показано, что введение меди позволяет

снизить H/E , тем самым увеличить пластичность покрытий, оказав при этом незначительное влияние на твердость полученных слоев.

Согласно анализу кривых нагрузки-разгрузки определен коэффициент упругого восстановления η_{IT} покрытий при различных максимальных нагрузках на индентор. Установлено, что для (Al-CrN):a-C покрытия твердость максимальна (14,2 ГПа) и значение η_{IT} достигает 51,8% при глубине индентирования 500 нм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рогачев, А.В. Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–292.
2. Основные технологические методы повышения триботехнических свойств композиционных покрытий на основе углерода / А.В. Рогачев [и др.] // Материалы МНТК «Актуальные проблемы физики твердого тела». – Минск, 2007. – Т. 3. – С. 377–380.
3. Композиционные углеродные покрытия, осаждаемые из импульсной катодной плазмы / Д.Г. Пилипцов [и др.]. – 2020. – М.: Радиотехника. – 283 с.
4. Мацевитый, В.М. Покрытия для режущих инструментов [монография] / В.М. Мацевитый. – Харьков: Вища школа, 1987. – 128 с.
5. Musil, J. Hard and superhard nanocomposite coatings / J. Musil // Surface and Coatings Technology. – 2000. – Vol. 125. – P. 322–330.
6. Multifunctional nanolaminated PVD coatings in the system Ti – Al – N – C by combination of metastable fcc phases and nanocomposite microstructures / M. Stueber [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2006. – Vol. 200. – P. 6162–6171.
7. Choe, H.J. Tribological properties and thermal stability of TiAlCN coatings deposited by ICP-assisted sputtering / H.J. Choe, S.-H. Kwon, J.-J. Lee // Surface and Coatings Technology. – 2013. – Vol. 228. – P. 282–285.
8. Структура и механические свойства композиционных титан-углеродных покрытий, формируемых комбинированным методом / Е.А. Кулеш [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 35–43.
9. Пилипцов, Д.Г. Морфология и механические свойства наноконпозиционных медь-углеродных покрытий, осаждаемых в импульсной плазме / Д.Г. Пилипцов, А.В. Рогачёв, Н.Н. Федосенко // Наноматериалы и наноструктуры. – 2011. – Т. 2, № 2. – С. 37–42.

10. *Micro-impact testing of AlTiN and TiAlCrN coatings* / B.D. Beake [et al.] // Wear. – 2019. – Vol. 418. – P. 102–110.

11. *Structure, morphology, and mechanical properties of AlCrN coatings deposited by cathodic arc evaporation* / A. Gilewicz [et al.] // J. of Mat. Eng. and Performance. – 2019. – Vol. 28. – P. 1522–1531.

12. Zhao, W. Friction-Wear Characterization of cathodic arc ion plated CrC coating under different lubrication conditions / W. Zhao, S. Zhu, D. Kong // Journal of Superhard Materials. – 2019. – Vol. 41. – P. 402–411.

13. Amanov, A. The influence of DLC coating on the mechanical and frictional properties of unpeened and peened Cu-based bimetal under dry sliding conditions / A. Amanov, I.-S. Cho, S. Sasaki // Materials Chemistry and Physics. – 2014. – Vol. 143, № 2. – P. 814–824.

14. *Investigation on the structure and properties of $Al_xCr_{1-x}N$ coatings deposited by reactive magnetron co-sputtering* / X. Wang [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. – 2010. – Vol. 502. – P. 243–249.

15. *Structure, hardness and thermal stability of TiAlN and nanolayered TiAlN / CrN multilayer films* / H.C. Barshilia [et al.] // Vacuum. – 2005. – Vol. 77. – P. 169–179.

16. *A comparison study between atomic and ionic nitrogen doped carbon films prepared by ion beam assisted cathode arc deposition at various pulse frequencies* / Z. Bing [et al.] // Applied Surface Science. – Vol. 287. – 2013. – P. 150–158.

17. Lawn, B.R. Elastic recovery at hardness indentations / B.R. Lawn, V.R. Howes // J. of Materials Science. – 1981. – Vol. 16. – P. 147–151.

18. *Nanoindentation measurements on modified diamond-like carbon thin films* // N. Dwivedi [et al.] // Applied Surface Science. – 2011. – Vol. 257. – P. 9953–9959.

19. Leyland, A. On the significance of the H/E ratio in wear control: a nanocomposite coating approach to optimized tribological behavior / A. Leyland, A. Matthews // Wear. – 2000. – Vol. 246. – P. 1–11.

Работа выполнена в рамках проекта Т19КИТГ-002 «Исследование гетерогенной структуры и разработка основ технологии осаждения высокопластичных аморфных покрытий на основе углерода и металлов (нитридов)» на 2019–2021 г.

Поступила в редакцию 01.02.2021.

МЕХАНИЗМ РОСТА ПЛЕНОК ВИСМУТА НА НАЧАЛЬНЫХ СТАДИЯХ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ОСАЖДЕНИЯ

В.М. Федосюк

Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск

THE MECHANISM OF BISMUTH FILMS GROWTH AT INITIAL STAGES OF ELECTROCHEMICAL DEPOSITION

V.M. Fedosyuk

Scientific and Practical Materials Research Centre of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Исследованы процессы электроосаждения пленок Вi из перхлоратного электролита на начальных стадиях. Впервые показано и объяснено, почему при длительности осаждения 1 с происходит со-осаждение Pb и Bi. Обсуждена взаимосвязь условий синтеза с химическим составом и микроструктурой пленок Вi. Анализ микроструктурных особенностей выявил изменение механизма роста пленок от столбчатой до слоисто-гранулированной формы с увеличением длительности осаждения. Такое anomальное поведение объясняется появлением сильной текстуры Вi и эффектами слияния зерен в процессе роста. Исследования пористости показали, что пленки Вi имеют плотноупакованную микроструктуру.

Ключевые слова: висмут, свинец, электроосаждение, перхлоратный электролит, микроскопия.

The processes of Bi films electrodeposition from perchlorate electrolyte at the initial stages have been investigated. For the first time it has been shown and explained why, with deposition duration of 1 s, the co-deposition of Pb and Bi occurs. The correlation between the synthesis conditions and the chemical composition and microstructure of Bi films is discussed. Analysis of microstructural features revealed a change in the growth mechanism of Bi films from a columnar to a layered-granular form with an increase in the electrodeposition duration. This anomalous behavior is explained by the appearance of a strong Bi texture and the effects of grain coalescence during growth. Porosity studies have shown that Bi films have a closely-packed microstructure.

Keywords: bismuth, lead, electrodeposition, perchlorate electrolyte, microscopy.

Введение

Висмут является химическим элементом, обладающим весьма необычными физическими свойствами, включая термоэлектрические, электронные и магнитные [1]–[3]. Например, наноструктурированные тонкие пленки Вi продемонстрировали экзотические магнито-электронные свойства, которые делают их привлекательными материалами для применения в спинтронике [4], [5]. Висмут имеет высокое положительное магнитосопротивление [6], а также используется в качестве электродов благодаря его каталитическим свойствам и механической стабильности. С точки зрения исследования конденсированных сред и других важных приложений, пленки Вi используются для проверки нескольких явлений квантового ограничения [7]–[9]. Чувствительные детекторы к ионизирующим излучениям на основе Вi, такие как микрокалориметры, демонстрируют высокие значения поглощения рентгеновских лучей из-за большого атомного номера Вi и низкой теплоемкости [7], [10], [11]. Использование композитов и покрытий на основе Вi является прекрасной альтернативой свинцовой защите от протонного излучения благодаря экологической чистоте Вi [12]. Подложки с нанесенным Вi подслоем и дендритной микроструктурой демонстрируют супергидрофобные свойства [13].

Электрохимическое осаждение – один из наиболее перспективных методов синтеза тонких и толстых пленок. Оно обеспечивает такие преимущества, как низкие производственные затраты, низкая температура синтеза, высокую скорость роста и высокий уровень чистых и однородных пленок. Кроме того, электроосаждение позволяет изменять стехиометрию, толщину и микроструктуру пленок, которыми можно управлять путем изменения условий осаждения. Можно получать пленки с различными свойствами, изменяя такие параметры, как плотность тока, состав электролита и тип подложки. Показано, что Вi можно осаждать в различных конфигурациях, таких как плотные или мелкозернистые пленки [14] и разреженные частицы (шестиугольники, дендриты, стержни, проволоки) [15], [16]. Нанопроволоки Вi, осажденные в матрицу Al_2O_3 , показали возможность их использования для улучшения термоэлектрических характеристик [17], [18]. Многие авторы сосредоточили свое внимание на осаждении Вi на благородные металлы и неметаллические подложки, такие как полупроводники [19], [20] и стеклоуглерод [21]. Однако число авторов, синтезирующих пленки висмута на металлических подложках, очень ограничено [12], [22], [23]. Большинство предыдущих исследований было посвящено электроосаждению пленок Вi из винных, сили-

катных, нитратных, стеариновых, сульфатных и пирофосфатных электролитов [13], [14], [19], [24], [25]. Однако литература по изучению перхлоратных электролитов недостаточно полна [12], [26]. Этот электролит имеет ряд преимуществ: получение однородных и плотных покрытий, высокие скорости осаждения, а также его выход по току примерно 100%. Получение толстых покрытий является одной из основных задач при изготовлении радиационных экранов, поэтому использование электролита, позволяющего достичь высоких скоростей электроосаждения, весьма актуально [12]. Максимальное повышение эффективности защиты от различных ионизирующих излучений является важным для применения в области защиты полупроводниковых приборов, а также для более глубокого понимания контролируемости роста Вi. Более того, исследования начальной стадии электроосаждения Вi в перхлоратном электролите, включая процессы зарождения и механизм их роста, крайне ограничены. Следовательно, глубокое понимание зарождения и роста во время электроосаждения Вi имеет решающее значение для получения пленок хорошего качества.

Поэтому целью работы является исследование процессов электроосаждения Вi из перхлоратного электролита в гальваностатическом режиме, а также механизмов его зарождения и роста на ранних стадиях. Данные исследования будут способствовать более детальному пониманию процессов получения мелкозернистых и плотных пленок, как перспективного материала для многих практических применений.

1 Методика эксперимента

Экспериментальные образцы представляли собой тонкие пленки Вi, электроосажденные на медную подложку толщиной 70 мкм. Подготовку поверхности перед осаждением проводили путем обработки подложек в смеси венской извести (СаО и MgO). Затем обезжиренную поверхность подложек полировали в растворе персульфата аммония (120 г/л $(\text{NH}_4)_2\text{S}_2\text{O}_8$ + 20 г/л H_2SO_4) в течение 30 с при комнатной температуре для удаления оксидной пленки с поверхности. Электрохимическое осаждение Вi проводили из перхлоратного электролита (40 г/л Bi_2O_3 , 400 мл/л HClO_4 , дистиллированная H_2O до 1 л) в гальваностатическом режиме в следующих условиях: температура 20–25 °С, плотность тока 10–20 mA/cm^2 . В качестве анодов использовались висмутовые палочки, содержащие 97,5% Вi и до 2,5% PbO_2 . Электроосаждение Вi выполняли с использованием источника питания MCP M10-QS1001, соединенного с устройством управления. Длительность электроосаждения варьировалась от 1 до 30 с.

Исследование морфологии поверхности пленок Вi проводилось на сканирующем электронном микроскопе (СЭМ) JEOL JSM-7500F при уско-

ряющем напряжении 5 кВ. Пористость (р) оценивалась с помощью программного обеспечения Gwyddion, путем обработки СЭМ изображений. Химический состав Вi образцов исследовали методом рентгеновского энергодисперсионного микроанализа (РЭМ) с использованием микроанализатора Bruker XFlash MIN SVE. Ускоряющее напряжение во время экспериментов составляло 9–14 кэВ. Толщина Вi пленок определялась с помощью алмазного зонда наноиндентора Hysitron TI 750 Ubi [27].

2 Результаты и их обсуждение

С целью исследования влияния условий синтеза (режимов осаждения), а именно плотности тока (D_c) и длительности осаждения (t) на микроструктуру пленок Вi, были выбраны следующие параметры осаждения: D_c 10 и 20 mA/cm^2 , которые находятся в диапазоне рабочих плотностей тока для перхлоратного электролита, а также длительность осаждения (t) 1–30 с. В результате были получены две серии образцов при различных условиях синтеза. Описание основных экспериментальных образцов и их характеристик представлено в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Описание экспериментальных образцов

Серия	D_c , mA/cm^2	t , s	Состав Pb:Bi (C), %	Толщина (h), нм	Пористость (P)	Средний размер зерна, нм
1	10	1	84.5:15.5	15	12.5	192
		5	0.9:99.1	252	11.5	196
		15	0:100	1575	8.4	222
		30	0:100	4950	2.9	241
2	20	1	82.9:17.1	30	8.4	201
		5	1.2:98.8	445	4.8	207
		15	0:100	3704	3.0	335
		30	0:100	9879	0.9	386

Результаты РЭМ анализа экспериментальных образцов показали, что электроосажденные пленки Вi всех серий содержат такие элементы, как Вi, Pb, Cu, O и C (рисунок 2.1). Содержание O и C в образцах находится на фоновом уровне. Присутствие Cu фазы обусловлено использованием медных подложек для осаждения Вi и малой длительностью осаждения, что способствует образованию очень тонкой Вi пленки на поверхности подложек. Кроме того, было отмечено интересное поведение двух основных фаз – Pb и Вi в пленках. Наличие этих фаз зависит как от длительности осаждения, так и от значения D_c . Для более детального изучения такой аномалии для каждой серии образцов рассчитывалась относительная процентная концентрация (C) двух основных фаз. В расчетах не учитывалось содержание других химических элементов (O, C,

Cu). Концентрация определялась из соотношения:

$$C = 100\% \cdot C_{\text{Bi}} (C_{\text{Pb}}) / (C_{\text{Bi}} + C_{\text{Pb}}),$$

где C_{Bi} – содержание Bi фазы в образце, ат. % и C_{Pb} – содержание Pb фазы в образце, атом. %.

Исследование химического состава (рисунок 2.1) показало, что для всех серий образцов выделяются три основных области: область I – фаза, обогащенная Pb, с концентрацией свинца до 84,5%; область II – фаза, обогащенная Bi с небольшим количеством Pb (до 1,9%); область III – фаза чистого Bi. На ранних стадиях роста происходило аномальное со-осаждение Pb и Bi из-за того, что Pb осаждается предпочтительнее, чем Bi, что обусловлено значениями их электрохимических потенциалов.

К сожалению, данные о таком со-осаждении Pb и Bi не упоминались в научной литературе. Во-первых, вероятно, исследователи не изучали электрохимическое осаждение Bi из перхлоратного электролита и процессы роста на начальных стадиях. Во-вторых, исследователи использовали аноды из чистого Bi для электроосаждения. Однако в нашем случае наличие примеси Pb в пленках связано с ее присутствием в исходных Bi анодах. В электрохимии такие аноды обычно используются для нанесения пленок Bi, поскольку Bi часто получают путем обработки полиметаллических свинцовых концентратов, где допустимо присутствие небольшого количества примесей Pb в Bi (до 3%) [28].

Увеличение плотности тока до 20 мА/см² приводит к снижению Pb фазы с Pb_{84.5}:Bi_{15.5} до Pb_{82.9}:Bi_{17.1} (область I на рисунке 2.1). Отмечено, что область II смещается в сторону уменьшения длительности осаждения, что указывает на присутствие смешанной фазы Pb:Bi (обогащенная Bi), наблюдаемой от 3–10 с (для $D_c = 10$ мА/см²) до 3–5 с (для $D_c = 20$ мА/см²). Показано, что при двукратном увеличении D_c время, необходимое

для образования фазы, обогащенной Bi, также уменьшается вдвое (с 10 до 5 с). После этого содержания Bi в пленках достигает 99,1% (рисунок 2.1, область II). Наконец, формирование сплошной пленки Bi (концентрация Bi составляет 100%) без присутствия Pb с увеличением D_c до 20 мА/см² происходит при длительности осаждения более 5 с (таблица 2.1), в отличие от $D_c = 10$ мА/см², где область III наблюдается после 10 с осаждения.

Оценку толщины пленок осуществляли методом наноиндентирования [29]. Для всех серий исследуемых образцов наблюдалось увеличение толщины (таблица 2.1) с ростом длительности осаждения. Таким образом, варьируя не только плотностью тока, но и длительностью осаждения (в будущем можно будет использовать импульсное осаждение), можно получать пленки с заданной морфологией.

Морфология поверхности электроосажденных пленок Bi была изучена методом СЭМ (рисунок 2.2). Показано, что морфология пленок Bi зависит от условий синтеза (плотности тока, длительность осаждения) и толщины пленки [11]. Эта тенденция наблюдалась также в пленках Bi толщиной 200 нм и более, полученных в электролите на основе винной кислоты [6]. Однако морфология таких пленок Bi была иной и варьировалась от гранулированной до игольчатой. Из рисунка 2.2 видно, что с увеличением плотности тока до 20 мА/см² и длительности осаждения до 30 с морфология зерен изменяется, а их средний размер увеличивается (таблица 2.1). Результаты анализа СЭМ изображений показали, что осаждение Bi происходит в несколько стадий. Первая стадия (область I на рисунке 2.1) представляет собой богатую Pb фазу и характеризуется столбчатобразной формой (рисунок 2.2,

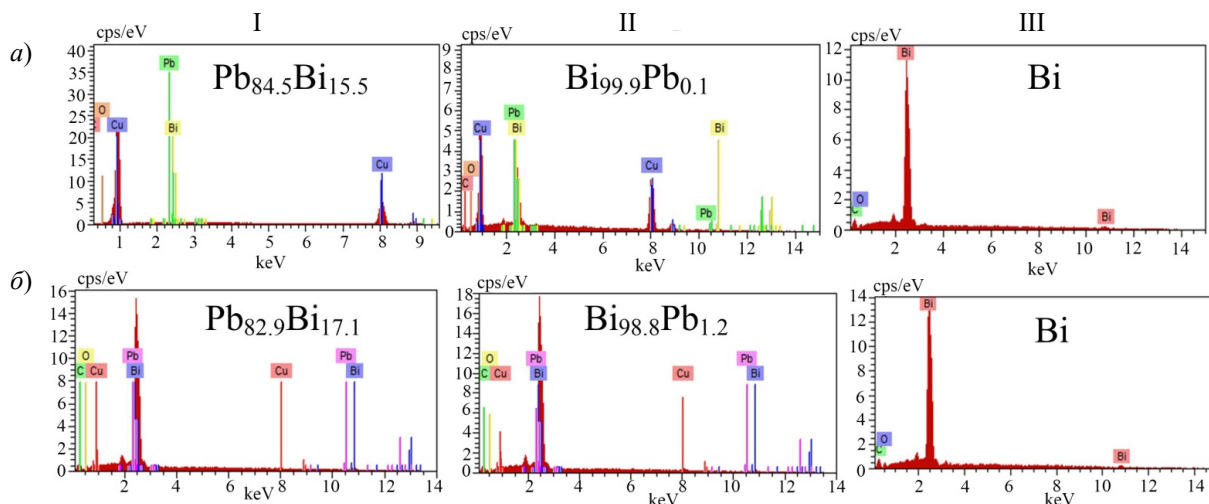


Рисунок 2.1 – Результаты исследования химического состава Bi образцов серии 1 (a) и 2 (б) методом рентгеновского энергодисперсионного микроанализа

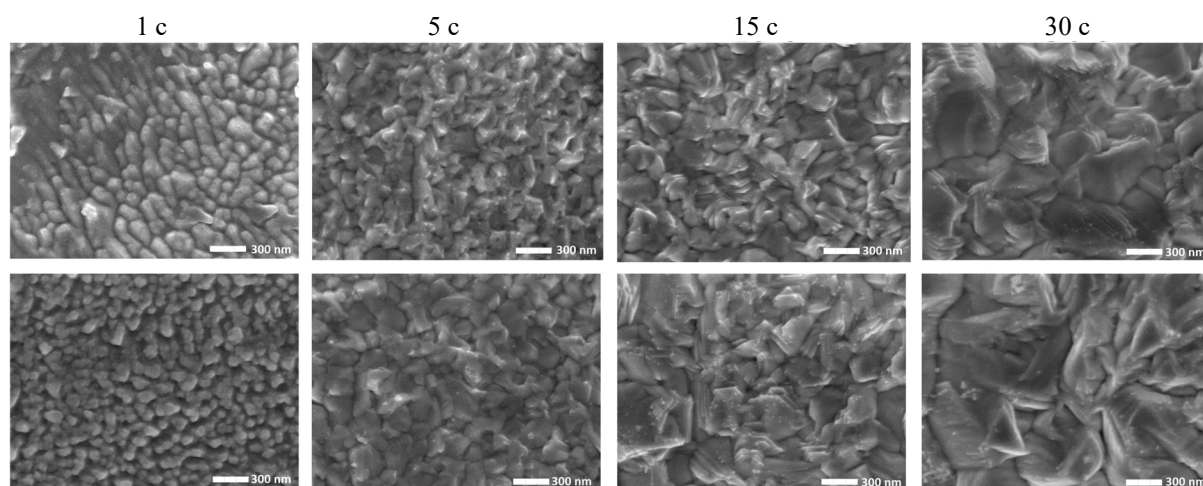


Рисунок 2.2 – СЭМ изображения морфологии поверхности Вi пленок, электроосажденных при плотности тока 10 mA/cm^2 (а) и 20 mA/cm^2 (б) с варьируемой длительностью

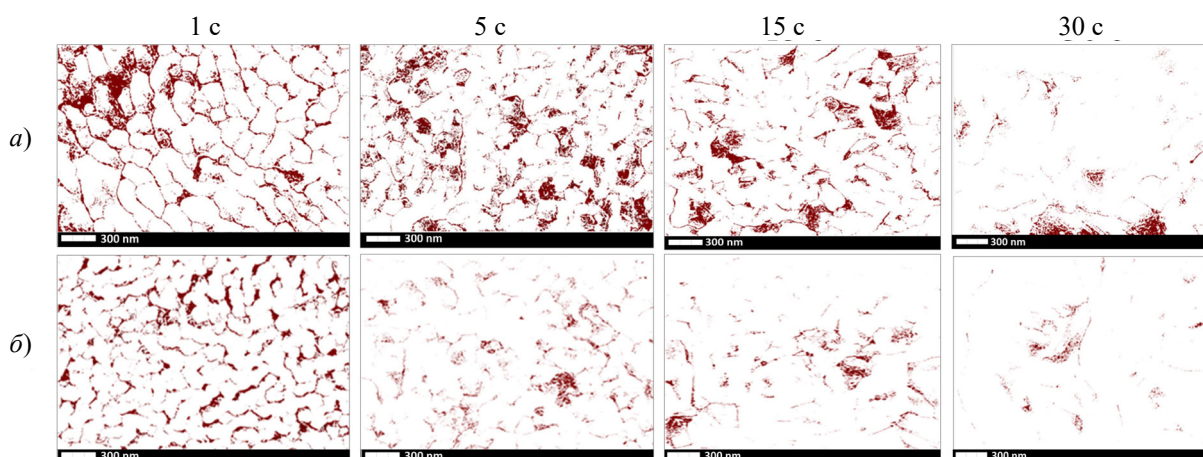


Рисунок 2.3 – Контрастные изображения пористости Вi пленок, электроосажденных при плотности тока 10 mA/cm^2 (а) и 20 mA/cm^2 (б) с варьируемой длительностью

длительность 1 с). В этом случае форма зерна представляет собой эллипсоид, большая ось которого расположена в плоскости, параллельной подложке (средний размер зерна $\sim 200 \text{ nm}$), а малая ось в перпендикулярной плоскости к подложке. В зависимости от условий электроосаждения зерна эллиптической формы могут формироваться с большой осью, как параллельной, так и перпендикулярной подложке. Затем наблюдается вторая стадия, которая сопровождается изменением морфологии зерен до гранулированной формы (рисунок 2.2, длительность 5 с). Наконец, на третьей стадии через 15 с осаждения наблюдается слоистая гранулированная морфология зерен Вi, характерная для ромбоэдрического Вi [30].

Слоистость гранулированных зерен Вi происходит, по-видимому, из-за сильной текстуры роста (преимущественной ориентации зерен). Более того, слоистость увеличивается с ростом длительности осаждения для всех диапазонов плотностей тока (рисунок 2.2 а, б).

Образование гранулированных пленок Вi при электроосаждении в электролитах, содержащих нитрат висмута и азотную кислоту в качестве основных компонентов, также наблюдалось в работе [7]. Однако морфология зерен в нашем случае несколько иная: зерна более плотно упакованы, чем в работе [7], где пленки Вi имеют высокую пористость и шероховатость. Результаты исследования зависимости пористости пленок Вi от длительности осаждения (1–30 с) исследуемых образцов представлены на рисунке 2.3.

Исследование контрастных изображений пористости (рисунок 2.3), полученных из данных СЭМ, показало, что пленки Вi имеют плотноупакованную микроструктуру. Пористость уменьшается с увеличением длительности осаждения от 1 до 30 с для всех серий образцов. Средняя пористость пленок, обогащенных Pb фазой, полученных электроосаждением с длительностью 1 с, составляет 10,5%. Однако с увеличением длительности осаждения до 30 с средняя пористость снижается, и среднее значение становится

равным 1,9%. Причина уменьшения пористости с ростом как длительности осаждения, так и значения D_c является результатом роста зерен, их слияния и процессов заполнения пустот, а также увеличения плотности упаковки. Такая плотноупакованная микроструктура Bi пленок может быть использована при создании материалов, которые могут широко использоваться в областях, где важен высокий уровень плотности (низкая пористость) [10], [12], [31].

Результаты статистического анализа распределения среднего размера зерен в зависимости от D_c и длительности показаны на рисунке 2.4. Видно, что рост длительности осаждения до 30 с приводит к увеличению среднего размера зерен. На это поведение также существенно влияет значение D_c , что подтверждается данными СЭМ.

Отмечено, что при длительности осаждения до 5 с происходит медленное увеличение среднего размера зерна (не превышает 1,3 раза по сравнению с длительностью осаждения 1 с). Кроме того, через 5 с это увеличение заметно возрастает до 30 с осаждения для всех серий образцов. Далее, увеличение плотности тока от 10 mA/cm^2 до 20 mA/cm^2 приводит к более резкому росту среднего размера. Показано, что увеличение длительности осаждения до 30 с для всех диапазонов D_c позволяет получать пленки Bi с размером зерна в 1,3–1,9 раза большим, чем при осаждении с длительностью 1 с (таблица 2.1). Полученные результаты показывают, что в исследуемых диапазонах плотностей тока и длительности осаждения могут быть получены пленки $Pb:Bi$ и Bi со средним размером зерна (192–386 нм) и толщиной от 15 нм до 10 мкм.

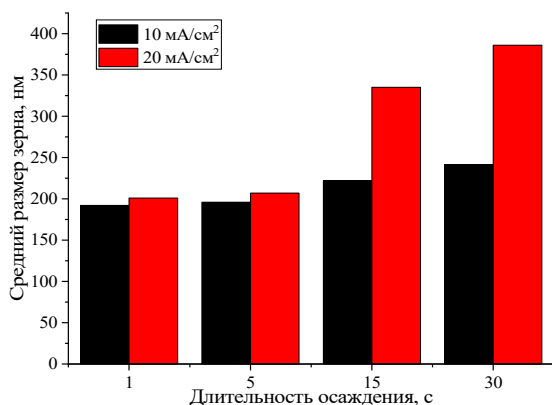
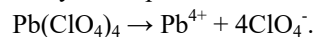


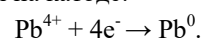
Рисунок 2.4 – График зависимости среднего размера зерна Bi пленок от длительности электроосаждения

В заключение можно отметить, что на начальных стадиях осаждения Bi пленок (при малой длительности) из перхлоратного электролита процесс электроосаждения осуществляется в два основных этапа. В момент включения электрохимической ячейки в системе возникает резкий

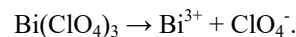
пусковой ток, который существует до тех пор, пока он не стабилизируется на заданном значении. Известно, что образование и рост металлической пленки на поверхности катода является потенциально-зависимым процессом [32]. В течение этого времени (1-й этап), который, по видимому, составляет порядка 1 с, происходит совместное осаждение Pb и Bi (образование фазы, богатой Pb). Однако этот процесс также связан с относительно медленным ростом зерен Bi , что подтверждается результатами РЭМ (рисунок 2.1). При электрохимическом растворении висмутовых анодов, состоящих из сплава, содержащего оксид свинца (IV), происходит его растворение в хлорной кислоте и далее диссоциация в раствор по следующей реакции:



Затем продиссоциированные ионы Pb^{4+} восстанавливаются на катоде:



Стандартный электрохимический потенциал восстановления $Pb^{4+} \rightarrow Pb^0$ составляет порядка 0,77 В. Следовательно, в первый момент времени Pb в основном восстанавливается на катоде, поскольку его потенциал более положительный по сравнению с потенциалом Bi . В перхлоратном электролите стандартный электродный потенциал Bi составляет 0,32 В. Процесс восстановления ионов Bi на катоде происходит из перхлората висмута:



Далее возникает 2-й этап электроосаждения Bi , который связан со стабилизацией тока, когда ток достигает заданного значения. В этом случае происходит преимущественный рост зерен Bi . Этот процесс связан с ростом зерен Bi на поверхности зерен Pb , который происходит быстрее с увеличением плотности тока (рисунок 2.2). При этом морфология поверхности все больше начинает напоминать зерна Bi , и с увеличением длительности осаждения до 30 с происходит рост только Bi .

Заключение

В работе исследованы пленки Bi , электроосажденные на медную подложку в гальваностатическом режиме с различной длительностью (1–30 с) и плотностью тока 10–20 mA/cm^2 . Исследованы особенности микроструктуры и химического состава на начальных стадиях роста Bi пленок, полученных в перхлоратном электролите. Результаты РЭМ показали, что при длительности осаждения 1 с пленки Bi характеризуются обогащенной Pb фазой. Объяснен механизм соосаждения Pb и Bi в пленках. Показана возможность осаждения пленок Pb с помощью Bi анодов, содержащих примесь PbO_2 при определенных условиях синтеза. Продемонстрирована зависимость морфологии пленок Bi от таких

параметров осаждения, как длительность и плотность тока. Показано, что на первой стадии осаждения образуется фаза, богатая Pb, имеющая столбчатую форму. Затем отмечен переход формы зерен в гранулированную и слоистогранулированную в результате процессов роста зерен Bi и их слияния. Исследование контрастных изображений пористости, полученных из данных СЭМ, показало, что пленки Bi имеют плотноупакованную микроструктуру. Значения средней пористости уменьшается с ростом длительности осаждения для всех серий образцов. Предложен новый подход к электроосаждению Bi с использованием перхлоратного электролита для формирования высококачественных плотных нанокристаллических пленок с контролируемой морфологией. Это позволит формировать пленки Bi для использования во многих практических применениях, особенно в областях, где важна высокая плотность, например, в радиационном материаловедении и ядерных технологиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ziegler, J.P. Status of reversible electro-deposition electrochromic devices / J.P. Ziegler // *Solar Energy Materials & Solar Cells*. – 1999. – Vol. 56. – P. 477–493.
2. Optical characterization of bismuth reversible electrodeposition / S.I. Córdoba De Torresi [et al.] // *J. Electroanalytical Chemistry*. – 1996. – Vol. 414. – P. 11–16.
3. Bismuth film voltammetric sensor on pyrolyzed photoresist/alumina support for determination of heavy metals / V. Rehacek [et al.] // *Electroanalysis*. – 2014. – Vol. 26. – P. 898–903.
4. Hofmann, P. The surfaces of bismuth: Structural and electronic properties / P. Hofmann // *Prog. Surf. Sci.* – 2006. – Vol. 81. – P. 191–245.
5. Spatial and energy distribution of topological edge states in single Bi(111) bilayer / F. Yang [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – Vol. 109. – P. 1–5.
6. Magnetotransport properties of electrodeposited bismuth films / B. O'Brien [et al.] // *J. Phys. Chem. C*. – 2008. – Vol. 112. – P. 12018–12023.
7. Microstructure and electrical transport in electrodeposited Bi films / J. Moral-Vico [et al.] // *J. Electroanal. Chem.* – 2019. – Vol. 832. – P. 40–47.
8. A route to fabricate single crystalline bismuth nanowire arrays with different diameters / L. Li [et al.] // *Chem. Phys. Lett.* – 2003. – Vol. 378. – P. 244–249.
9. Large magnetoresistance of electrodeposited single-crystal bismuth thin films / F. Yang [et al.] // *Science*. – 1999. – Vol. 284. – P. 1335–1337.
10. Optimization of X-ray absorbers for TES microcalorimeters / N. Iyomoto [et al.] // 2004. – Vol. 5501. – P. 145–154.
11. Development of Thick Electroplated Bismuth Absorbers for Large Collection Area Hard X-ray Transition Edge Sensors / L.M. Gades [et al.] // *IEEE Trans. Appl. Supercond.* – 2017. – Vol. 27. – P. 1–5.
12. Effect of the Synthesis Conditions and Microstructure for Highly Effective Electron Shields Production Based on Bi Coatings / D.I. Tishkevich [et al.] // *ACS Appl. Energy Mater.* – 2018. – Vol. 1. – P. 1695–1702.
13. Photoinduced switchable wettability of bismuth coating with hierarchical dendritic structure between superhydrophobicity and superhydrophilicity / C. Su [et al.] // *Appl. Surf. Sci.* – 2015. – Vol. 353. – P. 735–743.
14. Effects of polyethylene glycol and gelatin on the crystal size, morphology, and Sn^{2+} -sensing ability of bismuth deposits / Y. Tsai [et al.] // *Electrochim. Acta*. – 2011. – Vol. 56. – P. 7615–7621.
15. Synthesis and electrochemical sensing toward heavy metals of bunch-like bismuth nanostructures / Z. Zhang [et al.] // *Nanoscale Res. Lett.* – 2010. – Vol. 5. – P. 398–402.
16. Photoinduced switchable wettability of bismuth coating with hierarchical dendritic structure between superhydrophobicity and superhydrophilicity / C. Su [et al.] // *Appl. Surf. Sci.* – 2015. – Vol. 353. – P. 735–743.
17. Bismuth nanowire thermoelectrics / J. Kim [et al.] // *J. Mater. Chem. C*. – 2015. – Vol. 3. – P. 11999–12013.
18. Extreme reduction of thermal conductivity by embedding Al_2O_3 nanoparticles into single-crystalline Bi nanowires / J.W. Roh [et al.] // *Acta Mater.* – 2017. – Vol. 136. – P. 315–322.
19. Electrodeposition of bismuth from nitric acid electrolyte / E. Sandnes [et al.] // *Electrochim. Acta*. – 2007. – Vol. 52. – P. 6221–6228.
20. Electrodeposition of bismuth thin films on n-GaAs (110) / P.V. Vereecken [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2005. – Vol. 86. – P. 1–3.
21. Electrochemical synthesis of bismuth particles: Tuning particle shape through substrate type within a narrow potential window / D. Bilican [et al.] // *Materials (Basel)*. – 2017. – Vol. 10. – P. 1–10.
22. Microstructures and properties of electrodeposited Cu-Bi composite coatings / S.L. Tay [et al.] // *Int. J. Electrochem. Sci.* – 2014. – Vol. 9. – P. 2266–2277.
23. Bi-Cu film deposition in aqueous solutions / H. Wada [et al.] // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China (English Ed.)*. – 2009. – Vol. 19. – P. 791–794.
24. Electrodeposition of bismuth onto glassy carbon electrodes from nitrate solutions / M. Yang [et al.] // *Electroanal. Chem.* – 2005. – Vol. 583. – P. 46–55.
25. Nucleation and growth of bismuth electrodeposition from alkaline electrolyte / L. Zhou [et al.] // *Bull. Korean Chem. Soc.* – 2012. – Vol. 33. – P. 1541–1546.

-
26. *The Electrodeposition of Bismuth from Perchloric Acid Solutions* / M. Harbaugh [et al.] // Trans. Electrochem. Soc. – 1933. – Vol. 64. – P. 293.
27. *Anomalies in Ni-Fe nanogranular films growth* / T.I. Zubar [et al.] // J. Alloys Compd. – 2018. – Vol. 748. – P. 970–978.
28. *U.S. Geological Survey. Metals and Minerals: U.S. Geological Survey Minerals Yearbook*; USA. – U.S. Geological Survey, Reston, VA. – 2011. – Vol. 1. – 1101 p.
29. *Effect of layer thickness on the high temperature mechanical properties of Al / SiC nanolaminates* / S. Lotfian [et al.] // Thin Solid Films. – 2014. – Vol. 571. – P. 260–267.
30. *Electrochemical deposition regimes and critical influence of organic additives on the structure of Bi films* / D.I. Tishkevich [et al.] // J. Alloys Compd. – 2018. – Vol. 735. – P. 1943–1948.
31. *Absorber materials for transition-edge sensor X-ray microcalorimeters* / A.D. Brown [et al.] // J. Low Temp. Phys. – 2008. – Vol. 15. – P. 413–417.
32. *Стандартный электродный потенциал* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Стандартный_электродный_потенциал. – Дата доступа: 27.01.2021.
- Поступила в редакцию 29.01.2021.

ВЛИЯНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ ОБРАБОТКИ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ КРЕМНИЙОРГАНИЧЕСКИХ ПОЛИМЕРОВ, ОСАЖДЕННЫХ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОННОЛУЧЕВОГО ДИСПЕРГИРОВАНИЯ, НА ИХ СТРУКТУРУ И МОРФОЛОГИЮ

М.А. Ярмоленко¹, О.А. Саркисов², Лю Имин¹, А.В. Рогачёв¹

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

THE EFFECT OF PLASMA TREATMENT OF COATINGS BASED ON ORGANOSILICON POLYMERS DEPOSITED BY ELECTRON BEAM DISPERSION ON THEIR STRUCTURE AND MORPHOLOGY

M.A. Yarmolenko¹, O.A. Sarkisov², Yiming Liu¹, A.V. Rogachev¹

¹F. Scorina Gomel State University

²Belarusian State University of Transport, Gomel

Методами РФЭС, ИК спектроскопии и АСМ микроскопии определены изменения состава, молекулярной структуры и морфологии кремнийорганических покрытий К42 и композиционных слоев на основе К42 и фторуглеродных высокомолекулярных соединений при их плазменной обработке. Показано, что плазменная обработка покрытий вызывает разрушение Si – C связей, отщепление углеводородных фрагментов и образование кислородсодержащих групп, SiO₂-подобных структур, повышение шероховатости поверхностных слоев. При плазменной обработке композиционного покрытия происходит преимущественное разрушение фторуглеродной компоненты. Увеличение массовой доли ПТФЭ в исходной мишени не сопровождается монотонным снижением поверхностной энергии осаждаемого покрытия.

Ключевые слова: кремнийорганические покрытия, плазменная обработка, молекулярная структура, адсорбционные свойства, морфология.

Changes in the composition, molecular structure and morphology of organosilicon coatings and composite layers based on organosilicon and high-molecular fluorocarbon compounds during their plasma treatment were determined by XPS, IR spectroscopy, and AFM microscopy. The plasma treatment of coatings causes destruction of Si – C bonds, elimination of hydrocarbon fragments and the formation of oxygen-containing groups, SiO₂-like structures, and an increase in the roughness of surface layers is shown. The destruction of the fluorocarbon component occurs during the plasma treatment of the composite coating. An increase in the mass fraction of PTFE in the initial target is not accompanied by a monotonic decrease in the surface energy of the deposited coating.

Keywords: organosilicon coatings, plasma treatment, molecular structure, adsorption properties, morphology.

Введение

Кремнийорганические тонкие покрытия широко используются при решении сложных технических и технологических задач [1]. В частности, при модифицировании целлюлозосодержащих материалов [2], в качестве отрицательных фоторезистов в микроэлектронике [3], оптических покрытий в интегральной оптике [4], для повышения коррозионной стойкости [5] и во многих других приложениях. При этом их структура и свойства в значительной степени зависят от условий и режимов формирования. В работах [6], [7] отмечается, что в сравнении с широко используемыми растворными методами покрытия, осажденные из летучих продуктов электроннолучевого диспергирования, характеризуются меньшей дефектностью, являются более однородными и, что особенно важно, реализуют возможность формирования композиционных систем с участием полиэтилена, политетрафторэтилена и других полимеров с различной степенью

дисперсности и распределением по толщине. При этом достаточно простыми технологичными методами возможно изменение состава, молекулярной структуры композиционных покрытий и, соответственно, физико-химических свойств. В качестве наиболее эффективного приема изменения свойств рекомендуется применение плазменной обработки летучих продуктов диспергирования [8]. Протекающие при этом в газовой фазе процессы влияют на состав осаждаемых молекулярных фрагментов, их реакционную активность и, как следствие этого, изменяется характер межмолекулярного взаимодействия, формируются сшитые структуры без дополнительного термического воздействия. Эта особенность позволяет осаждать композиционные слои, содержащие компоненты с сильно отличающимися теплофизическими свойствами.

Основной целью настоящей работы является установление изменений состава, молекулярной структуры и морфологии покрытий на основе

кремнийорганических и органических полимеров, осажденных из летучих продуктов электроннолучевого диспергирования, протекающих при плазмохимическом модифицировании осажденных слоев.

1 Методики формирования кремнийорганических покрытий, исследования их молекулярной структуры, морфологии и свойств

Покрытия осаждали из газовой фазы, формируемой воздействием на мишень низкоэнергетического потока электронов с энергией 800–1600 эВ и плотностью 0,01–0,03 А/см² с помощью устройства, схема которого представлена на рисунке 1.1. Процесс осаждения покрытий производился в вакуумной камере при начальном давлении остаточных газов $\approx 4 \cdot 10^{-3}$ Па. Температура подложек при осаждении тонких слоев соответствовала комнатной. Анализу подвергались покрытия с одинаковой эффективной толщиной, определяемой кварцевым измерителем толщины.

В качестве материала мишени использовали порошки кремнийорганической смолы олигометилфенилсилоксана (К42), политетрафторэтилена (ПТФЭ). Композиционные мишени изготавливались в результате перемешивания в вибромельнице порошковых материалов в различном массовом соотношении.

Подложками при проведении ИК-спектроскопических исследований служили пластины NaCl, атомно-силовых исследований (АСМ), рентгеноспектрального анализа (РФЭС), измерения краевого угла смачивания – пластины монокристалла кремния.

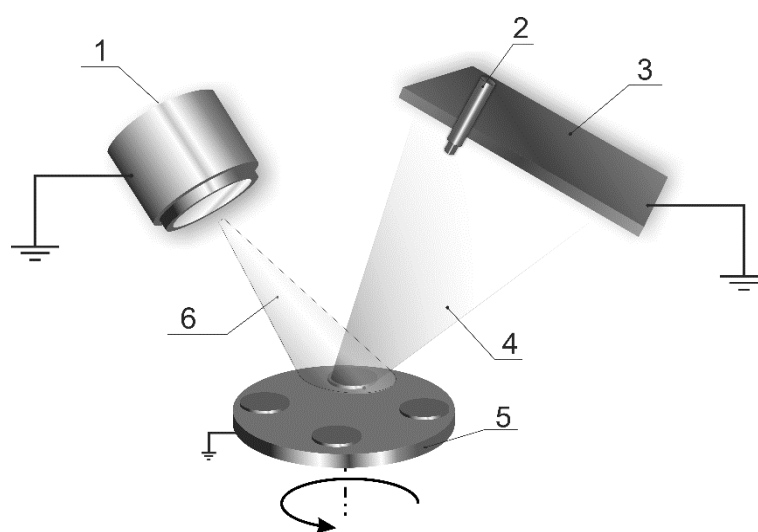
Плазменную обработку покрытий осуществляли в атмосфере остаточного воздуха при давлении 10–20 Па. Кремниевые подложки с нанесенными покрытиями располагали на заземленном

подложкодержателе. На расстоянии 10 см от подложкодержателя располагался сетчатый электрод. На электрод подавалось переменное напряжение (50 Гц) 1 кВ относительно подложкодержателя. Ток разряда не превышал 60 мА. Время обработки соответствовало 15, 45, 75, 135, 210 и 250 минутам. Обработка в течение отмеченных временных промежутков позволяла получать повторяющиеся и достоверные результаты изменения молекулярной структуры.

Ионно-лучевая обработка осуществлялась при помощи ионного источника «АИДА» (рабочий газ – азот, $P = 10^{-2}$ Па, ток – 2 А, ускоряющее напряжение – 150 В, ток соленоида – 0,8 А, энергия ионов не более 0,3 кэВ). Обработка осуществлялась 5, 10 и 20 минут.

Термообработку сформированных покрытий осуществляли в атмосфере воздуха при температуре 100° С, 200° С и 300° С в течение 60 минут. В ряде случаев термообработка проводилась в вакууме при следующих параметрах: давление – 10 Па, температура – 500° С, продолжительность – 60 минут.

Определение молекулярной структуры сформированных покрытий осуществляли с использованием ИК-Фурье спектрофотометра Vertex-70 (Bruker). Химический состав тонких слоев определяли методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС). Измерения проводили на спектрометре PHI Quantera II Scanning XPS Microprobe с использованием источника AlK α монохроматического рентгеновского излучения ($h\nu = 1486,7$ эВ) мощностью 150 Вт (ULVAC-PHI, США). Калибровку прибора осуществляли по линии C1s с энергией связи 284,6 эВ. Соотношение полос проводили на основании атласа эталонных спектров и литературных источников.



1 – источник электронов; 2 – кварцевый измеритель толщины;
3 – подложкодержатель; 4 – поток генерируемых фрагментов разрушения мишени;
5 – мишени; 6 – электронный луч

Рисунок 1.1 – Схема нанесения покрытия из газовой фазы

Исследования морфологии нанесенных слоев проводили с помощью сканирующего атомно-силового микроскопа (АСМ) Solver P47 PRO (НТ-МДТ, Россия), в котором реализована схема сканирования образцом. В качестве зондов на АСМ применяли кремниевые кантилеверы серии NSG11S с типичной силовой константой 5,5 Н/м и резонансной частотой 220 кГц.

Смачиваемость покрытий оценивали измерением статического краевого угла смачивания их водой. Статические углы смачивания регистрировались при комнатной температуре с использованием Krüss DSA 100 гониометра. Каплю дистиллированной воды (5 мкл) наносили на поверхность покрытия. Для каждого образца проводили измерение не менее 10 капель. Погрешность измерений составляла $\pm 2^\circ$.

2 Результаты исследования и их обсуждение

Согласно результатам РФЭС-исследований плазменная обработка покрытия на основе кремнийорганической смолы K42 сопровождается отщеплением углеводородных заместителей, разрушением Si – C и Si – OH связей, возникновением кислородсодержащих групп (рисунок 2.1).

Возникновению кислородсодержащих групп предшествуют процессы деструкции углеводородных фрагментов с последующим образованием свободных радикалов. Их взаимодействие с кислородом остаточной атмосферы и приводит к возникновению кислородсодержащих C – O и C = O групп. Плазменная обработка покрытий значительно инициирует их образование. Структурные превращения в тонком слое с участием Si – O и C – O, C = O связей приводят к возникновению сшитых объемных структур. В частности, на это указывает появление фрагментов Si – (O)₃.

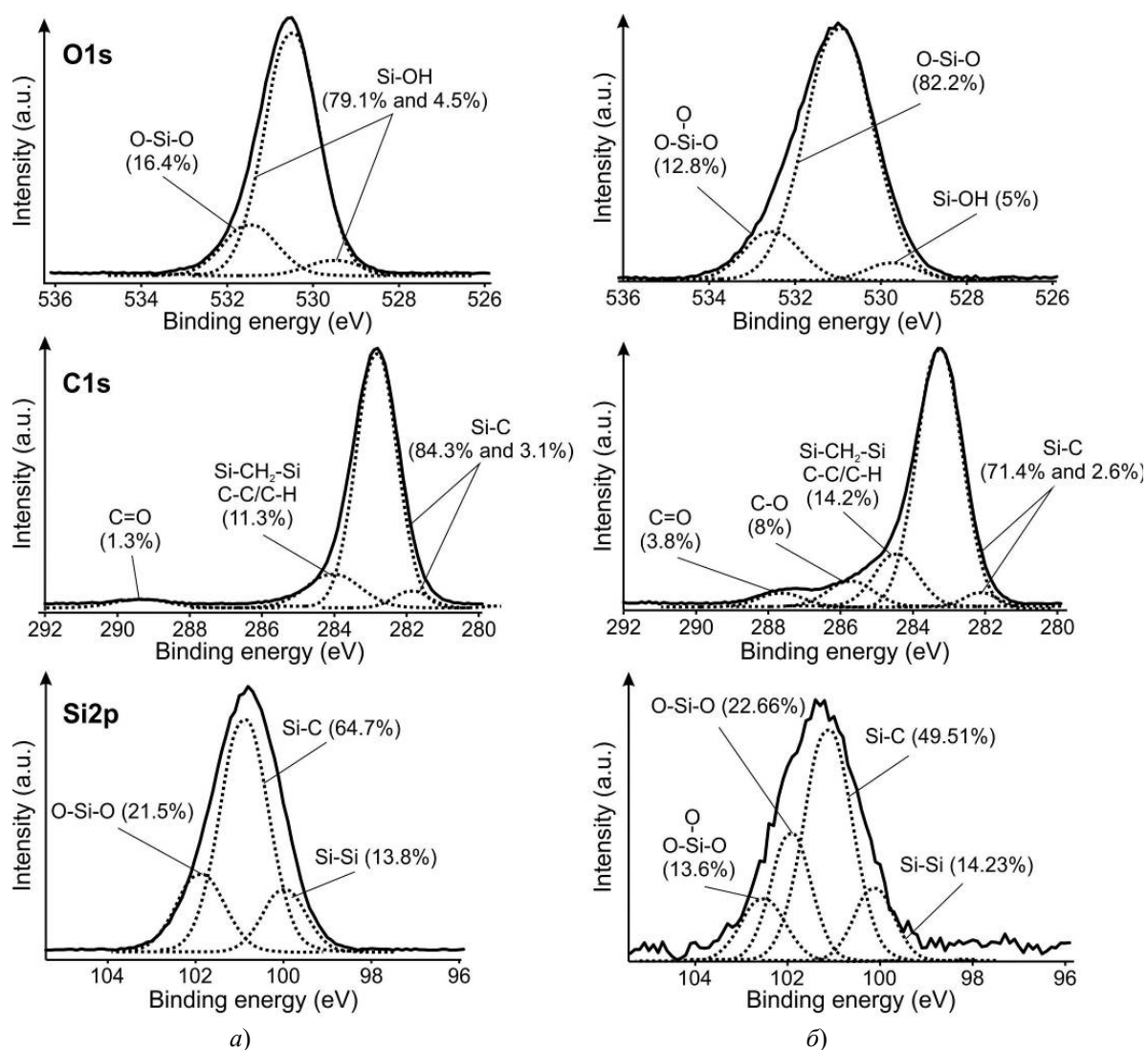


Рисунок 2.1 – РФЭС спектры покрытий на основе кремнийорганической смолы K42 без обработки (а) и после обработки в плазме тлеющего разряда (10 мин) (б)

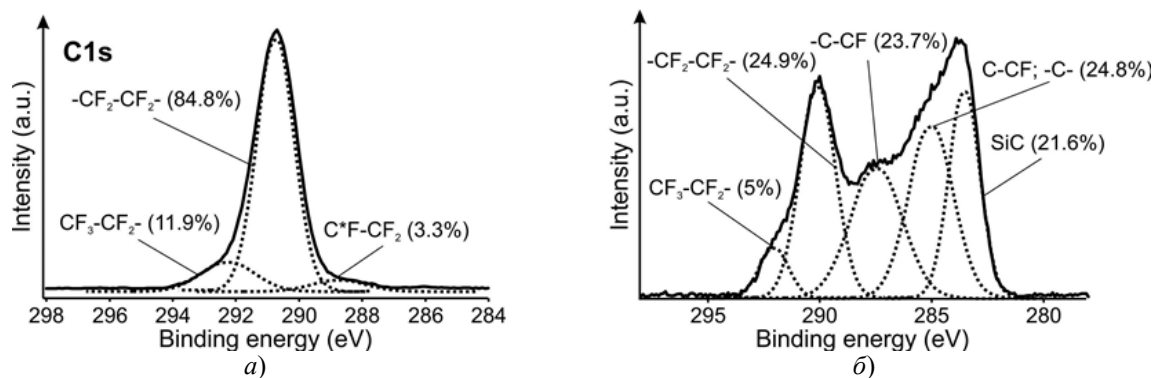


Рисунок 2.2 – РФЭС спектры покрытий на основе ПТФЭ без обработки (а) и после обработки в плазме тлеющего разряда (10 мин) (б)

Таблица 2.1 – Результаты анализа ИК-спектров композиционных покрытий на основе К42 и ПТФЭ

Вид обработки	D_{1020} / D_{1139}	D_{1060} / D_{1139}	D_{1261} / D_{1139}	D_{638} / D_{625}
без обработки	1,57	1,74	0,44	1,80
10 мин	1,46	1,70	0,45	1,15
20 мин	1,41	1,65	0,44	1,34

Значительное влияние плазменная обработка оказывает и на структуру покрытий на основе ПТФЭ (рисунок 2.2). Под действием активных компонентов разрядной плазмы происходит заметное изменение состава и структуры фторуглеродных молекул. Регистрируется разрушение С–F связей, появление однокомпонентных углеродных структур. Следствием интенсивного травления и карбонизации фторуглеродного слоя является образование Si–C связей между покрытием и кремниевой подложкой.

В ИК-спектре кремнийорганических покрытий присутствуют полосы поглощения при 1020, 1060, 1100 и 1139 см^{-1} , соотносимые с поглощением циклических структур (тримеров, D3), линейных короткоцепочечных и фенилзамещенных силоксанов соответственно (рисунок 2.3). Для фенилзамещенных силоксанов характерны две полосы поглощения при 1100 см^{-1} и 1139 см^{-1} . Поглощение при 1265 см^{-1} обусловлено деформационными колебаниями Si–CH₃ связей. Результаты анализа ИК-спектров композиционных покрытий при использовании в качестве полосы внутреннего стандарта полосы поглощения при 1139 см^{-1} представлены в таблице 2.1.

Увеличение продолжительности обработки покрытия отражается в снижении значений соотношения D_{1020} / D_{1139} . При этом необходимо учитывать отщепление фенильных заместителей и, соответственно, уменьшение оптической плотности полосы при 1139 см^{-1} . Повышение длительности обработки покрытия приводит к более выраженным процессам деструкции циклических структур и короткоцепочечных силоксановых фрагментов. При этом отметим отсутствие влияния длительности обработки на значение

соотношения D_{1261} / D_{1139} . Подобное может быть обусловлено близкими значениями скоростей деструкции метильных и фенильных заместителей.

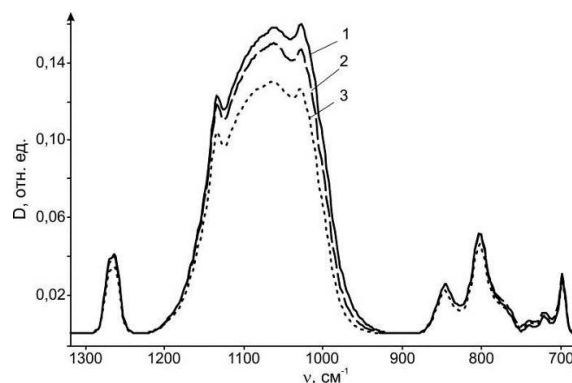


Рисунок 2.3 – ИК-спектры кремнийорганических покрытий ПТФЭ без обработки (1), после обработки в плазме тлеющего разряда 10 мин (2) и 20 мин (3)

Плазменная обработка оказывает заметное влияние и на молекулярную структуру фторуглеродного покрытия. Полосу при 625 см^{-1} относят к дефектной структуре, при 638 см^{-1} – связывают с наличием регулярной спирали. Под дефектами структуры подразумевают участки цепи, где происходят взаимные переходы между лево- и правовращающимися спиралями. Отсутствие прямой зависимости количества образующихся в покрытии дефектов от времени плазменной обработки (таблица 2.1) обусловлено одновременным протеканием процессов дефектообразования и травли тонкого слоя при обработке. Известно, что травлению в наибольшей

степени подвержен дефектный слой. Поэтому после длительной плазменной обработки во фторуглеродном слое фиксируется более низкое содержание дефектов структуры.

Таким образом, на основании результатов ИК-спектроскопии композиционные покрытия на основе К42 и ПТФЭ могут рассматриваться как высокодисперсные механические смеси компонентов. В ИК-спектре присутствуют все полосы поглощения, характерные для исходных составляющих мишени. Влияние плазменной обработки на компоненты композиционного слоя осуществляется практически независимо друг от друга.

Увеличение массовой доли ПТФЭ в композиционной мишени сопровождается заметным снижением дисперсности покрытия и перепада высот по оси Z (рисунок 2.4).

Повышение шероховатости покрытий при их обработке в плазме тлеющего разряда является следствием интенсивного травления композиционного слоя. Анализ АСМ снимков покрытий позволяет заключить, что травлению в значительной мере подвержен фторуглеродный ком-

понент композиционного слоя. Влияние плазменной обработки на шероховатость покрытия К42 + ПТФЭ с высоким содержанием кремний-органической компоненты является менее выраженным.

Изменение состава К42 + ПТФЭ покрытия, его плазменная обработка оказывает влияние на их адсорбционные свойства, поверхностную энергию и ее составляющие компоненты (таблица 2.2).

Необходимо отметить, что после плазменной обработки поверхность покрытий приобретает лиофильные свойства и измерение поверхностной энергии по методу Фоукса не представляется возможным. Важной особенностью является то, что увеличение массовой доли ПТФЭ в исходной мишени не сопровождается монотонным снижением поверхностной энергии осаждаемого покрытия. Возможно, данный результат обусловлен присутствием в составе покрытия продуктов химического взаимодействия компонентов мишени.

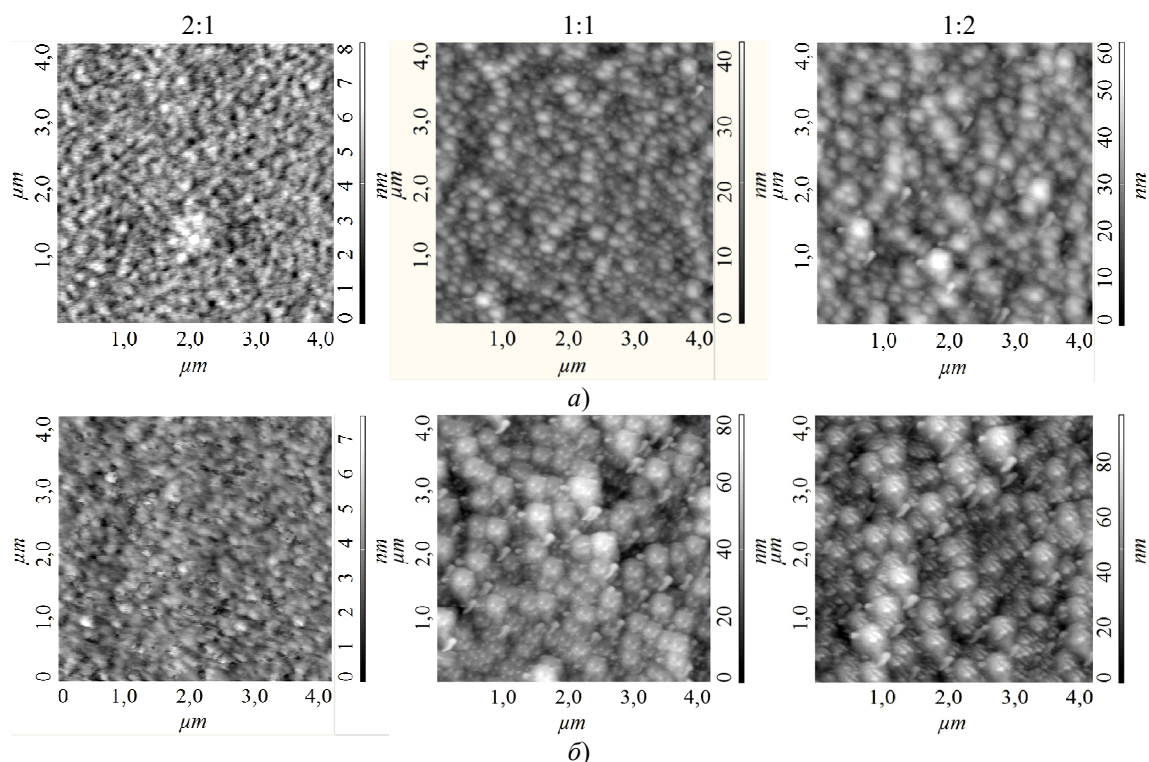


Рисунок 2.4 – АСМ изображения покрытий с различным соотношением компонентов К42 + ПТФЭ без обработки (а) и после обработки в плазме тлеющего разряда (20 мин) (б)

Таблица 2.2 – Результаты измерения поверхностной энергии покрытий на основе К42 и ПТФЭ

Соотношение К42 + ПТФЭ	Угол смачивания глицерина, град.	Угол смачивания водой, град.	Дисперсионный компонент, мДж/м ²	Полярный компонент, мДж/м ²	Поверхностная энергия, мДж/м ²
2:1	102	108	6,6	3,4	10,0
1:1	132	123	0,3	7,1	7,4
1:2	139	127	1,0	7,1	8,1

Заключение

Плазменная обработка кремнийорганического покрытия сопровождается разрушением Si – C связей, отщеплением углеводородных фрагментов и возникновением кислородсодержащих групп. В наибольшей степени это проявляется в отношении метильных заместителей. Следствием отмеченного процесса является возникновение SiO₂-подобных структур. При этом плазменная обработка не оказывает заметного влияния на Si – O – Si связи в сшитых структурах типа «клетка» и «сетка».

Показано, что композиционные покрытия на основе К42 и фторуглеродных высокомолекулярных соединений могут рассматриваться как высокодисперсные механические смеси компонентов. В ИК-спектре присутствуют все полосы поглощения, характерные для исходных составляющих мишени. Влияние плазменной обработки на компоненты композиционного слоя осуществляется независимо друг от друга. Увеличение массовой доли ПТФЭ в исходной мишени не сопровождается монотонным снижением поверхностной энергии осаждаемого покрытия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones, R.G. Silicon-Containing Polymers. The Science and Technology of their Synthesis and Applications / R.G. Jones, W. Ando, J. Chojnowski. – London: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 768 p.
2. Deposition of Organosilicone Plasma Polymer onto Cellulose Networks / S. Sapieha [et al.] // Plasma Chemistry and Plasma Processing. – 1989. – Vol. 9. – P. 225–234.
3. Organosilicon Polymers for Lithographic Applications / J.M. Shaw [et al.] // Polymer engineering and science. – 1983. – Vol. 23. – P. 1054–1058.

4. Tien, P.K. Thin Organosilicon Films for Integrated Optics / P.K. Tien, G. Smolinsky, R.J. Martin // Applied Optics. – 1972. – Vol. 11. – P. 637–642.

5. Application of plasma deposited organosilicon thin films for the corrosion protection of metals / F. Fracassi [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2003. – Vol. 174–175. – P. 107–111.

6. Микро- и нанокмпозиционные полимерные покрытия, осаждаемые их активной газовой фазы / М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачёв, П.А. Лучников, А.В. Рогачёв, Сянь Хун Джанг. – М.: Радиотехника, 2016. – 424 с.

7. Рогачёв, А.А. Физико-химия полимерных покрытий, осаждаемых из активной газовой фазы / А.А. Рогачёв. – М.: Научный мир, 2014. – 287 с.

8. Ярмоленко, М.А. Влияние технологических режимов формирования на структуру и свойства покрытий на основе полимеров, осаждаемых из активной газовой фазы (обзор). 1. Влияние условий и режимов генерации активной газовой фазы / М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачёв, А.В. Рогачёв // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 29–38.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках договора №Т19КИТГ-015 «Плазменные полианилин-металлические нанокмпозиционные покрытия».

Поступила в редакцию 19.02.2021.

УДК 512.548

О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ l -АРНОЙ ПОЛУГРУППЫ $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия

ON SETS OF GENERATORS OF l -ARY SEMIGROUP $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies

Решена задача нахождения по известному порождающему множеству полугруппы A порождающего множества l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$, которая определяется на k -ой декартовой степени произвольного группоида A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества S_k всех подстановок множества $\{1, 2, \dots, k\}$.

Ключевые слова: полугруппа, l -арная полугруппа, порождающее множество.

The problem of finding, from a known generating set of the semigroup A , the generating set of the l -ary semigroup $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ with the l -ary operation $[]_{l, \sigma, k}$, which is defined on the k -th Cartesian power of an arbitrary groupoid A for any integer $l \geq 2$ and any permutation σ from the set S_k of all permutations of the set $\{1, 2, \dots, k\}$ has been solved.

Keywords: semigroup, l -ary semigroup, set of generators.

Введение

Данная статья посвящена изучению порождающих множеств l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$, которая определяется [1] на k -ой декартовой степени произвольного группоида A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества S_k всех подстановок множества $\{1, 2, \dots, k\}$ следующим образом.

Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$x \overset{\sigma}{\circ} y = (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

а затем l -арную операцию

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, k} = x_1 \overset{\sigma}{\circ} (x_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (x_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (x_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} x_l)) \dots)).$$

Понятно, что операция $[]_{l, \sigma, k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Если $\sigma = (12 \dots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$x \circ y = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [2, определения 2.2.3], а операция $[]_{l, \sigma, k}$ – с операцией $[]_{l, k}$ из того же определения. Операции $\circ$ и $[]_{l, k}$ впервые были определены в [3], где также впервые была определена и операция $[]_{l, \sigma, k}$ для случая полугруппы A . Заметим также, что операция $[]_{n, n-1}$ аналогична n -арной операции, которую Э. Пост определил на множестве всех n -арных подстановок [4].

1 Вспомогательные результаты

Следующая теорема позволяет находить значения l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, не используя явно n -арную операцию $\overset{\sigma}{\circ}$.

Теорема 1.1 [2], [3]. Пусть A – полугруппа,

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, 2, \dots, k.$$

Если в универсальной алгебре $\langle A, [] \rangle$ с одной l -арной операцией $[]: A^l \rightarrow A$ для любого $i = 1, \dots, l-1$ выполняется тождество ассоциативности

$$[[a_1 \dots a_l] a_{l+1} \dots a_{2l-1}] = [a_1 \dots a_l [a_{l+1} \dots a_{l+i} a_{l+i+1} \dots a_{2l-1}]],$$

то такую универсальную алгебру называют l -арной полугруппой, а l -арную операцию $[]$ – ассоциативной.

Теорема 1.2 [2], [3]. Если A – полугруппа, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

Теорема 1.3 [1]. Если полугруппа A содержит более одного элемента, σ – нетождественная подстановка из S_k , то в l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ нет единицы.

Для l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ этот результат был доказан ранее в [2].

Согласно соответствующему определению для произвольных универсальных алгебр, l -арная подполугруппа $\langle B, [] \rangle$ l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ называется порожденной множеством $M \subseteq A$, если она совпадает с пересечением всех

l -арных подполугрупп $\langle C, [\] \rangle$ из $\langle A, [\] \rangle$ таких, что $M \subseteq C$. Множество M в этом случае называют *порождающим*.

Порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A, [\] \rangle$ называют *неприводимым* или *базисом*, если любое его собственное подмножество не порождает $\langle A, [\] \rangle$. Если порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A, [\] \rangle$ конечно, то $\langle A, [\] \rangle$ называют *конечно порожденной*. Если порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A, [\] \rangle$ состоит из n элементов, то $\langle A, [\] \rangle$ называют *n -порожденной*.

Известно, что подполугруппа B полугруппы A порождается множеством $M \subseteq A$ тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из M , либо является произведением элементов из M , то есть

$$b = m_1 \dots m_r, \quad m_i \in M, \quad r = 1, 2, \dots$$

Аналогичное утверждение справедливо для многоместного аналога полугруппы.

Предложение 1.1. l -Арная подполугруппа $\langle B, [\] \rangle$ l -арной полугруппы $\langle A, [\] \rangle$ порождается множеством $M \subseteq A$ тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из M , либо может быть представлен в виде

$$b = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], \quad m_i \in M, \quad r = 1, 2, \dots$$

Замечание 1.1. Если в порождающем множестве M l -арной полугруппы $\langle A, [\] \rangle$ имеется элемент c , который с помощью l -арной операции $[\]$ выражается через другие элементы множества M , то есть

$$c = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], \quad m_i \in M, \quad m_i \neq c$$

для некоторого $r = 1, 2, \dots$, то этот элемент можно удалить из порождающего множества. В этом случае l -арная полугруппа $\langle A, [\] \rangle$ порождается множеством $M \setminus \{c\}$.

2 Порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$

В данном разделе будет получен положительный ответ на следующий

Вопрос 2.1. Можно ли, зная порождающее множество полугруппы A с единицей, построить порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$?

Прежде чем отвечать на этот вопрос, докажем несколько вспомогательных утверждений. При этом для сокращения записей будем использовать обозначение

$$\mathbf{e} = (\underbrace{1, \dots, 1}_k),$$

где 1 – единица полугруппы A .

Согласно теореме 1.3, указанный элемент $\mathbf{e}$ не является единицей l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Лемма 2.1. Пусть A – полугруппа с единицей 1 , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k), \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in A^k.$$

Тогда:

$$1) [\underbrace{\mathbf{b} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = (b_1 c_1, \dots, b_k c_k);$$

$$2) \mathbf{b} = [(b_1, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} (1, b_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} (1, \dots, 1, b_{k-1}, 1) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} (1, \dots, 1, b_k)]_{l, \sigma, k}.$$

Доказательство. 1) Полагая

$$[\underbrace{\mathbf{b} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = (d_1, \dots, d_k),$$

и, применяя определение операции $[\]_{l, \sigma, k}$, а также тождественность подстановки σ^{l-1} , получим

$$d_j = b_j \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} c_{\sigma^{l-1}(j)} = b_j \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} c_j = b_j c_j.$$

Следовательно, верно равенство из 1).

2) Прежде всего заметим, что, согласно теореме 1.2, l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной.

Обозначая правую часть равенства из 2) через $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_k)$, а затем, снова используя определение операции $[\]_{l, \sigma, k}$ и, применяя $k-1$ раз утверждение 1), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= [(b_1, b_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\ &\quad (1, 1, b_3, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-3})]_{l, \sigma, k} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} (1, \dots, 1, b_{k-1}, 1) \\ &\quad \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} (1, \dots, 1, b_k)]_{l, \sigma, k} = \\ &= [(b_1, b_2, b_3, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-3}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \\ &\quad (1, \dots, 1, b_{k-1}, 1) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} (1, \dots, 1, b_k)]_{l, \sigma, k} = \\ &\quad \dots \\ &= [(b_1, \dots, b_{k-1}, 1) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} (1, \dots, 1, b_k)]_{l, \sigma, k} = \\ &= (b_1, \dots, b_k) = \mathbf{b}, \end{aligned}$$

т. е. $\mathbf{h} = \mathbf{b}$. Следовательно, верно равенство из 2). $\square$

Следующее следствие получается применением $r-1$ раз утверждения 1) леммы 2.1.

Следствие 2.1. Пусть A – полугруппа с единицей 1 , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{c}_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, d_s, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, \quad s = 1, 2, \dots, r$$

для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} &[\underbrace{\mathbf{c}_1 \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}_2}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{c}_r]_{l, \sigma, k} = \\ &= (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, d_1 d_2 \dots d_r, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}). \end{aligned}$$

Для подмножества M полугруппы A с единицей 1 , натурального $k \geq 1$ и любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ положим

$$U_j(M) = \{(1, \dots, 1, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \mid a \in M\},$$

$$U(M) = \bigcup_{j=1}^k U_j(M).$$

Замечание 2.1. Ясно, что если $1 \in M$, то $e \in U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$, откуда $e \in U(M)$. Если же $1 \notin M$, то $e \notin U(M)$.

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос 2.1.

Теорема 2.1. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U(M) \cup \{e\}$.

Доказательство. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент из A^k . Так как полугруппа A порождается множеством M , то

$$a_j = b_{j1} \dots b_{jr_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2.1)$$

для некоторых

$$b_{j1}, \dots, b_{jr_j} \in M, \quad r_j = 1, 2, \dots$$

Для $j = 1, 2, \dots, k$, $s = 1, \dots, r_j$ положим

$$c_j = (1, \dots, 1, a_j, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k,$$

$$c_{js} = (1, \dots, 1, b_{js}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k.$$

Согласно утверждению 2) леммы 2.1,

$$a = [c_1 \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_2 \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_k]_{l, \sigma, k}, \quad (2.2)$$

а, ввиду (2.1) и следствия 2.1,

$$c_j = (1, \dots, 1, b_{j1} \dots b_{jr_j}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) = [c_{j1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{j2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} c_{jr_j}]_{l, \sigma, k}, \quad (2.3)$$

где, как не сложно заметить,

$$c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jr_j} \in U_j(M) \subseteq U(M).$$

Заметим, что число элементов под знаком l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$ в правой части (2.3) равно

$$(r_j - 1)(l - 1) + 1,$$

а число элементов под знаком l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$ в правой части (2.2) равно

$$(l-2)(k-1) + \sum_{j=1}^k (r_j - 1)(l-1) + 1 = (r_1 + \dots + r_k - 1)(l-1) + 1.$$

Подставив в (2.2) вместо $c_1, c_2, \dots, c_k$ их правые части из (2.3), видим, что элемент a может быть представлен в виде

$$a = [u_1 \dots u_{t(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}$$

для некоторых

$$u_1, \dots, u_{t(l-1)+1} \in U(M) \cup \{e\},$$

где $t = r_1 + \dots + r_k - 1$. Следовательно, по предложению 1.1 l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U(M) \cup \{e\}$. $\square$

Сформулируем ряд следствий из теоремы 2.1.

Считая в теореме 2.1 σ циклом длины t из S_k , получим

Следствие 2.2. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M , σ – цикл длины t из S_k , t делит $l-1$. Тогда l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U(M) \cup \{e\}$.

Полагая в следствии 2.2 $\sigma = (12 \dots t)$, $l = t + 1$, получим

Следствие 2.3. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M , $(12 \dots t) \in S_k$. Тогда $(t+1)$ -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{t+1, (12 \dots t), k} \rangle$ порождается множеством $U(M) \cup \{e\}$.

Полагая в следствии 2.2 $t = k$, $\sigma = (12 \dots k)$, $l = k + 1$, или в следствии 2.3 $t = k$, получим

Следствие 2.4. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M . Тогда $(k+1)$ -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ порождается множеством $U(M) \cup \{e\}$.

Полагая в следствии 2.4 $k = 2$, получим

Следствие 2.5. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M . Тогда тернарная полугруппа $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$ порождается множеством $U(M) \cup \{(1, 1)\}$.

Если множество M , порождающее полугруппу A , содержит единицу 1 этой полугруппы, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то, ввиду замечания 2.1, $e \in U(M)$. Поэтому в этом случае множество $U(M)$ совпадает с множеством $U(M) \cup \{e\}$. Это позволяет переформулировать теорему 2.1 для случая $1 \in M$.

Теорема 2.2. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M , $1 \in M$, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U(M)$.

Замечание 2.2. Для теоремы 2.2 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 2.2–2.5.

Ясно, что множества M и $U_j(M)$ имеют одинаковую мощность для любого $j = 1, 2, \dots, k$. Поэтому, если M счётное множество, то множества $U_j(M)$ и $U(M)$ также счётные. Если же множество M содержит n элементов, то множество $U_j(M)$ также содержит n элементов, а множество $U(M)$ содержит $k(n-1) + 1$ элементов, если $1 \in M$; kn элементов, если $1 \notin M$. Это позволяет дополнить теорему 2.1 следующим предложением

Предложение 2.1. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается n -элементным множеством M , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) если $1 \in M$, то l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является $(k(n-1) + 1)$ -порожденной;

2) если $1 \notin M$, то l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является $(kn + 1)$ -порожденной.

Следующее предложение, являющееся следствием теоремы 2.1, формально включает в себя и эту теорему.

Предложение 2.2. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается любым подмножеством множества A^k , включающим множество $U(M) \cup \{e\}$. В частности, она порождается множеством

$$U(A) = \bigcup_{j=1}^k U_j(A).$$

Если в условиях теоремы 2.1 множество M содержит более одного элемента, то любой элемент $(a_1, \dots, a_k)$ из A^k , у которого, по крайней мере, две компоненты отличны от 1, не принадлежит множеству $U(M) \cup \{e\}$. Например, для любого элемента $a \in M$, $a \neq 1$ элемент $(a, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2})$ не принадлежит множеству

$U(M) \cup \{e\}$. Потому теорему 2.1 можно дополнить ещё одним предложением.

Предложение 2.3. Если полугруппа A с единицей 1 порождается неоднородным множеством M , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается её собственным подмножеством $U(M) \cup \{e\}$.

Замечание 2.3. Из предложения 2.3 следует, что если полугруппа A с единицей 1 порождается неоднородным множеством M , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не может быть неприводимым порождающим множеством для самой себя.

В связи с теоремой 2.1 представляют интерес следующие два вопроса.

Вопрос 2.2. Если в условиях теоремы 2.1 порождающее множеством M неприводимо, то будет ли неприводимым порождающее множество $U(M) \cup \{e\}$?

Вопрос 2.3. Можно ли в формулировке теоремы 2.1 обойтись без элемента e ?

Следующий пример показывает, что ответы на оба вопроса – отрицательные.

Пример 2.1. В качестве исходной полугруппы рассмотрим циклическую группу $A = \{1, a\}$, которая порождается множеством $M = \{a\}$. Тогда $A^2 = \{e = (1, 1), u = (1, a), v = (a, 1), w = (a, a)\}$,

$$U_1(M) = \{v\}, U_2(M) = \{u\}, U(M) = \{u, v\}.$$

Согласно теореме 2.1, множество

$$U(M) \cup \{e\} = \{e, u, v\}$$

порождает тернарную полугруппу $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$.

Так как

$$\begin{aligned} [uuu]_{3, (12), 2} &= v, [vvv]_{3, (12), 2} = u, \\ [uuv]_{3, (12), 2} &= [vu]_{3, (12), 2} = u, \\ [vvu]_{3, (12), 2} &= [uv]_{3, (12), 2} = v, \end{aligned}$$

$$[uvu]_{3, (12), 2} = u, [vuv]_{3, (12), 2} = v,$$

то $\langle U(M), [\]_{3, (12), 2} \rangle$ – тернарная подполугруппа тернарной полугруппы $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$. Следовательно, множество $U(M)$ не порождает тернарную полугруппу $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$, что даёт отрицательный ответ на вопрос 2.3.

Равенства

$$[uuu]_{3, (12), 2} = v, [vvv]_{3, (12), 2} = u$$

показывают, что порождающее множество $\{e, u, v\}$ не является неприводимым, так как из него можно удалить либо элемент u , либо элемент v . Полученные порождающие множества $\{e, u\}$ и $\{e, v\}$ будут уже неприводимыми. Таким образом, и на вопрос 2.2 ответ – отрицательный.

Так как

$$[uuw]_{3, (12), 2} = e, [uwe]_{3, (12), 2} = v,$$

то $\{u, w\}$ – ещё одно порождающее множество, причем неприводимое. Неприводимым порождающим множеством является и множество $\{v, w\}$, так как

$$[vvw]_{3, (12), 2} = e, [vwe]_{3, (12), 2} = u.$$

Таким образом, тернарную полугруппу $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$ порождают каждое из следующих четырех двухэлементных неприводимых множеств

$$\{e, u\}, \{e, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}.$$

Отметим, что последние два множества не содержат e , но при этом $w \notin U(M)$.

Кроме множества $\{e, u, v\}$, тернарную полугруппу $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$ порождают также каждое из следующих трехэлементных множеств

$$\{e, u, w\}, \{e, v, w\}, \{u, v, w\}.$$

Теорему 2.2 можно проиллюстрировать следующим примером.

Пример 2.2. Так как мультипликативная полугруппа $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел порождается множеством $\mathbb{P} \cup \{1\}$, состоящим из единицы и всех простых чисел, то по теореме 2.2 l -арная полугруппа $\langle \mathbb{N}^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством

$$\begin{aligned} U(\mathbb{P} \cup \{1\}) &= \bigcup_{j=1}^k U_j(\mathbb{P} \cup \{1\}) = \\ &= \bigcup_{j=1}^k \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, p, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \mid p \in \mathbb{P} \cup \{1\}\}. \end{aligned}$$

Как показывает следующий пример, в некоторых частных случаях l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ из теоремы 2.1 порождается множеством $U(M)$, которое не содержит элемент e .

Пример 2.3. Пусть $A = \{1, a\}$ – циклическая группа из примера 2.1, которая порождается множеством $M = \{a\}$, $k = 3$, $\sigma = (123) \in S_3$. Тогда

$$\begin{aligned} A^3 &= \{e = (1, 1, 1), (1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1), \\ &\quad (1, a, a), (a, 1, a), (a, a, 1), (a, a, a)\}, \end{aligned}$$

$$U(M) = \{u = (1, 1, a), v = (1, a, 1), w = (a, 1, 1)\}.$$

По теореме 2.1 4-арная полугруппа $\langle A^3, [\]_{4, (123), 3} \rangle$ порождается множеством

$$U(M) \cup \{e\} = \{u, v, w, e\}.$$

Но так как $[uvv]_{4, (123), 3} = e$, то $<A^3, [\]_{4, (123), 3}>$ порождается множеством $U(M)$.

Приведём ещё один важный пример.

Пример 2.4. Известно (см., например, [5]), что для любого порождающего множества M симметрической группы S_n и любого преобразования α из симметрической полугруппы F_n , у которого множество $\{\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n)\}$ состоит из $n-1$ элементов, множество $M \cup \{\alpha\}$ является порождающим для симметрической полугруппы F_n . В качестве преобразования α можно взять, например, преобразование

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Так как симметрическая группа S_n порождается [6] двухэлементным множеством

$$\{\alpha_1 = (123 \dots n), \alpha_2 = (12)\},$$

то симметрическая полугруппа F_n порождается трёхэлементным множеством

$$M_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha\}.$$

Принимая во внимание теорему 2.1 и предложение 2.1, видим, что l -арная полугруппа $<F_n^k, [\]_{l, \sigma, k}>$, где подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, является $(3k+1)$ -порождённой, так как порождается $(3k+1)$ -элементным множеством $U(M_1) \cup \{e\}$, где

$$e = (\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_k),$$

ε – тождественное преобразование множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Так как симметрическая группа S_n порождается [6] $(n-1)$ -элементным множеством

$$\{\beta_1 = (12), \beta_2 = (23), \dots, \beta_{n-1} = (n-1 n)\},$$

то симметрическая полугруппа F_n порождается n -элементным множеством

$$M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \alpha\}.$$

Принимая во внимание теорему 2.1 и предложение 2.1, видим, что l -арная полугруппа $<F_n^k, [\]_{l, \sigma, k}>$, где подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, является $(kn+1)$ -порождённой, так как порождается $(kn+1)$ -элементным множеством $U(M_2) \cup \{e\}$.

Так как симметрическая группа S_n порождается [6] $(n-1)$ -элементным множеством

$$\{\gamma_1 = (1n), \gamma_2 = (2n), \dots, \gamma_{n-1} = (n-1 n)\},$$

то симметрическая полугруппа F_n порождается n -элементным множеством

$$M_3 = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}, \alpha\}.$$

Принимая во внимание теорему 2.1 и предложение 2.1, видим, что l -арная полугруппа $<F_n^k, [\]_{l, \sigma, k}>$, где подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, является $(kn+1)$ -порождённой, так как порождается $(kn+1)$ -элементным множеством $U(M_3) \cup \{e\}$.

При доказательстве следующей теоремы используется тот факт, что в симметрической группе S_k имеются подстановки, удовлетворяющие условию $\sigma^k = \sigma$. В качестве такой подстановки можно взять, например, любой цикл из S_k длины $k-1$, в частности, цикл $(12 \dots k-1)$.

Теорема 2.3. Пусть полугруппа A порождается множеством M , которое не содержит единицу 1 этой полугруппы, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^k = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $<A^k, [\]_{k, \sigma, k}>$ является k -арной полугруппой, которая порождается множеством $U(M)$, не содержащим e .

Доказательство. Так как полугруппа A порождается множеством M , которое не содержит ее единицу 1, то для некоторого $k \geq 2$ найдутся такие $b_1, \dots, b_k \in M$, что

$$b_1 b_2 \dots b_k = 1. \quad (2.4)$$

Кроме того, согласно замечанию 2.1, множество $U(M)$ не содержит e .

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и положим

$$v_1 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, \underbrace{b_1, 1, \dots, 1}_{k-j}),$$

$$v_2 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\sigma(j)-1}, \underbrace{b_2, 1, \dots, 1}_{k-\sigma(j)}),$$

...

$$v_{k-1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\sigma^{k-2}(j)-1}, \underbrace{b_{k-1}, 1, \dots, 1}_{k-\sigma^{k-2}(j)}),$$

$$v_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\sigma^{k-1}(j)-1}, \underbrace{b_k, 1, \dots, 1}_{k-\sigma^{k-1}(j)}) = \\ = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, \underbrace{b_k, 1, \dots, 1}_{k-j}).$$

Так как $\sigma^k = \sigma$, то по теореме 1.2 $<A^k, [\]_{k, \sigma, k}>$ – k -арная полугруппа.

Используя определение операции $[\]_{k, \sigma, k}$, тождественность подстановки σ^{k-1} , а также (2.4), получим

$$[v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k]_{k, \sigma, k} = \\ = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, \underbrace{b_1 b_2 \dots b_{k-1} b_k}_{k-j}, \underbrace{1, \dots, 1}_k) = (1, \dots, 1) = e,$$

то есть

$$e = [v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k]_{k, \sigma, k}, \quad (2.5)$$

где, как несложно заметить,

$$v_i \in U_{\sigma^{i-1}(j)}(M) \subseteq U(M), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Согласно теореме 2.1 k -арная полугруппа $<A^k, [\]_{k, \sigma, k}>$ порождается множеством $U(M) \cup \{e\}$, то есть всякий элемент $a \in A^k$ может быть представлен в виде

$$a = [u_1 \dots u_{l(k-1)+1}]_{k, \sigma, k} \quad (2.6)$$

для некоторых $u_1, \dots, u_{l(k-1)+1} \in U(M) \cup \{e\}$.

Заменяя в правой части (2.6) элементы u_i , совпадающие с e , правой частью из (2.5), видим, что всякий элемент $a \in A^k$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{r(k-1)+1}]_{k, \sigma, k}$$

для некоторых $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{r(k-1)+1} \in U(M)$. Таким образом, по предложению 1.1 k -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{k, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U(M)$. $\square$

Заметим, что пример 2.3 не является следствием теоремы 2.3, так как $\sigma^k = (123)^3$ – тождественная подстановка.

Пример 2.5. Снова рассмотрим циклическую группу $A = \{1, a\}$, которая порождается множеством $M = \{a\}$. Полагая в теореме 2.3 $k = 4$, $\sigma = (123) \in S_4$, получим 4-арную полугруппу $\langle A^4, [\]_{4, (123), 4} \rangle$, которая порождается множеством

$$U(M) = \{\mathbf{u}_1 = (a, 1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (1, a, 1, 1), \\ \mathbf{u}_3 = (1, 1, a, 1), \mathbf{u}_4 = (a, 1, 1, 1)\},$$

не содержащим элемент $\mathbf{e} = (1, 1, 1, 1)$, который может быть представлен в виде

$$\mathbf{e} = [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_4]_{4, (123), 4}.$$

Отметим, что тернарная полугруппа $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$ из примера 2.1 и 4-арные полугруппы $\langle A^3, [\]_{4, (123), 3} \rangle$ и $\langle A^4, [\]_{4, (123), 4} \rangle$ из примеров 2.3 и 2.5 являются полиадическими группами, в которых согласно теореме 1.3 нет единиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Об операции $[\]_{l, \sigma, k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.
2. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
4. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Ляпин, Е.С. Полугруппы / Е.С. Ляпин. – М.: Физматгиз, 1960. – 592 с.
6. Коксетер, Г.С.М. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер. – М.: Наука, 1980. – 240 с.

Поступила в редакцию 05.01.2021.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НАСЛЕДСТВЕННЫХ НАСЫЩЕННЫХ РЕШЕТОЧНЫХ ФОРМАЦИЙ

С. Йи¹, С.Ф. Каморников², В.Н. Тютянов³

¹Чжэцзянский политехнический университет, Ханчжоу, Китай

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

³Международный университет «МИТСО», Гомель

ONE PROPERTY OF HEREDITARY SATURATED FORMATIONS

X. Yi¹, S.F. Kamornikov², V.N. Tyutyanyan³

¹Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, China

²F. Scorina Gomel State University

³Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel

Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация. Доказывается, что если для каждой силовской подгруппы P конечной группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая $\mathfrak{F}$ -подгруппа T , что $VT = G$, то $G \in \mathfrak{F}$. В статье решаются проблемы 19.87 и 19.88 из «Коуровской тетради».

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, добавление, формация, обобщенно субнормальная подгруппа, решеточная формация.

Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary saturated formation. It is proved that if for every Sylow subgroup P of a finite group G and every maximal subgroup V of P there is a $\mathfrak{F}$ -subgroup T such that $VT = G$, then $G \in \mathfrak{F}$. Problems 19.87 and 19.88 from the «Kourovka Notebook» are solved in the article.

Keywords: finite group, Sylow subgroup, supplement, formation, generally subnormal subgroup, lattice formation.

Введение

Подгруппа H называется *добавлением* к подгруппе K в группе G , если $G = KH$. Понятно, что в каждой группе любая подгруппа обладает добавлением. Более того, подгруппа K может иметь несколько добавлений. Например, в случае, когда $K = G$, любая подгруппа группы G является добавлением к K .

Как показывают многочисленные исследования, строение конечной группы G существенно зависит от свойств добавлений к некоторым ее подгруппам. В данной работе строение G изучается в зависимости от свойств добавлений к максимальным подгруппам всех ее силовских подгрупп. Главная наша цель – доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация. Тогда и только тогда конечная группа G принадлежит $\mathfrak{F}$, когда для каждой максимальной подгруппы любой силовской подгруппы группы G существует добавление в G , принадлежащее $\mathfrak{F}$.

1 Определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [1] и [2].

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$ -*корадикалом* группы G).

Наследственная формация – это формация, замкнутая относительно взятия подгрупп. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$ такая, что $H_{i-1}/\text{Core}_{H_{i-1}}(H_i) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп в любой группе образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы.

Все наследственные насыщенные решеточные формации описаны в работе [3] (см. также [4]).

Лемма 1.1 [3, теорема 2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является решеточной, когда формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$;
- 2) существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{E}_{\pi_i})$;
- 3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{M})} \mathfrak{M}$ – наследственная локальная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{M}^2$;
- 4) всякая нециклическая критическая группа G формации $\mathfrak{M}$, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является примитивной с неабелевым цоколем $N = G^{\mathfrak{M}}$, причем G/N – циклическая примарная группа.

Напомним, что критической группой формации $\mathfrak{F}$ называется группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то через $D_0\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, представимых в виде $H_1 \times \dots \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Если π – некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{X}_\pi$ – это класс всех π -групп из $\mathfrak{X}$. В частности, $\mathfrak{E}_\pi$ – формация всех разрешимых π -групп.

Каждая наследственная насыщенная решеточная формация $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга, т. е. классом, который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и, кроме того, из $G = AB$, где A и B – нормальные $\mathfrak{F}$ -подгруппы из G , всегда следует, что G принадлежит $\mathfrak{F}$.

Из определения класса Фиттинга следует, что в любой группе G существует $\mathfrak{F}$ -радикал $G_{\mathfrak{F}}$, т. е. наибольшая нормальная подгруппа группы G , принадлежащая $\mathfrak{F}$ (она совпадает с произведением всех нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп из G). В дальнейшем мы будем опираться на следующий результат, устанавливающий связь $\mathfrak{F}$ -субнормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп группы с ее $\mathfrak{F}$ -радикалом.

Лемма 1.2 [2, лемма 3.1.6]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация. Если подгруппа H является $\mathfrak{F}$ -субнормальной в группе G и принадлежит формации $\mathfrak{F}$, то H содержится в $\mathfrak{F}$ -радикале группы G .

Лемма 1.3. Пусть N – нормальная подгруппа группы G . Если для каждой максимальной подгруппы любой силовой подгруппы группы G существует добавление в G , принадлежащее $\mathfrak{F}$, то и для каждой максимальной подгруппы любой силовой подгруппы группы G/N существует добавление в G/N , принадлежащее $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть R/N – неединичная силовая p -подгруппа группы G/N . Если

R_1/N – максимальная подгруппа группы R/N , то по теореме Силова $R_1 = P_1N$ для некоторой силовой p -подгруппы P_1 группы R_1 . При этом P_1 – максимальная подгруппа некоторой силовой p -подгруппы P_2 группы R . Очевидно, P_2 – силовая p -подгруппа группы G . По условию $G = TP_1$ для некоторой $\mathfrak{F}$ -подгруппы T группы G . Отсюда заключаем, что

$$G/N = TP_1/N = (TN/N)(P_1N/N) = (TN/N)(R_1/N).$$

При этом из изоморфизма $TN/N \simeq T/T \cap N$ следует, что подгруппа TN/N принадлежит формации $\mathfrak{F}$. $\square$

2 Доказательство теоремы

Если группа G принадлежит $\mathfrak{F}$, то ввиду наследственности формации $\mathfrak{F}$ для каждой максимальной подгруппы из любой силовой подгруппы группы G каждое добавление в G принадлежит $\mathfrak{F}$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что оно неверно и G – контрпример минимального порядка. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Группа G не является простой.

Предположим, что группа G является простой. По условию для каждой силовой подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая $\mathfrak{F}$ -подгруппа T , что $VT = G$. Очевидно, $|G:T|$ – степень простого числа. Но тогда группа G обладает максимальной подгруппой H , индекс которой в G является степенью простого числа. Отсюда ввиду [5, теорема 1] справедливо одно из следующих утверждений:

(а) $G = A_n$ и $H \simeq A_{n-1}$, где $n = p^k$;

(б) $G = L_n(q)$ и H – стабилизатор линии или гиперплоскости, при этом

$$|G:H| = \frac{q^n - 1}{q - 1} = p^k$$

(n – простое число);

(с) $G = L_2(11)$ и $H \simeq A_5$;

(д) $G = M_{23}$ и $H = M_{22}$ или $G = M_{11}$ и $H = M_{10}$;

(е) $G = PSU_4(2) \simeq PSp_4(3)$ и H – параболическая подгруппа индекса 27.

Ввиду произвольного выбора простого числа p для любого простого $p \in \pi(G)$ группа G содержит максимальную подгруппу, индекс которой является степенью p . Простая проверка показывает, что ни одна из групп, перечисленных в (а)–(е), таким свойством не обладает. Следовательно, G не является простой.

Пусть далее N – минимальная нормальная подгруппа группы G .

Шаг 2. $G/N \in \mathfrak{F}$.

Ввиду леммы 1.3 условия теоремы переносятся на фактор-группу G/N . А так как $|G/N| < |G|$, то ввиду выбора группы G группа G/N принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Шаг 3. N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $\Phi(G) = 1$ и $C_G(N) \subseteq N$.

Так как формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, то $\Phi(G) = 1$. Если предположить, что в G существует минимальная нормальная подгруппа L , отличная от N , то ввиду утверждения шага 1 $G/L \in \mathfrak{F}$. А так как класс $\mathfrak{F}$ является формацией, то отсюда имеем $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G . Таким образом, G – примитивная группа, а значит, $C_G(N) \subseteq N$ ($C_G(N) = N$, если N – абелева группа; $C_G(N) = 1$, если N – неабелева группа).

Шаг 4. N – абелева группа.

Предположим, что N не является абелевой. Пусть $\pi(N) = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$, где $s \geq 3$.

По условию для каждой максимальной подгруппы любой силовой подгруппы группы G существует добавление в G , принадлежащее $\mathfrak{F}$. Понятно, что любое такое добавление имеет индекс, являющийся степенью простого числа. Пусть T_1 и T_2 – некоторые из этих добавлений, причем индексы их взаимно просты. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $|G:T_1| = p_1^k$ и $|G:T_2| = p_2^t$. Предположим, что оба добавления T_1 и T_2 содержат подгруппу N . Тогда, очевидно, подгруппы T_1 и T_2 $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G . Кроме того, по условию подгруппы T_1 и T_2 принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Отсюда по лемме 1.2 подгруппы T_1 и T_2 содержатся в $\mathfrak{F}$ -радикале $G_{\mathfrak{F}}$ группы G . Так как индексы подгрупп T_1 и T_2 взаимно просты, то $G = \langle T_1, T_2 \rangle \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, т. е. группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G .

Итак, если T_i – принадлежащее формации $\mathfrak{F}$ добавление к некоторой максимальной подгруппе из силовой p_i -подгруппы группы G , то в системе подгрупп $\{T_i \mid i = 1, 2, \dots, s\}$ не более чем одна из подгрупп $T_1, T_2, \dots, T_s$ содержит N . Таким образом, возможны два случая:

- 1) каждая из подгрупп $T_1, T_2, \dots, T_s$ не содержит N ;
- 2) подгруппы $T_1, T_2, \dots, T_{s-1}$ не содержат подгруппу N , а подгруппа T_s содержит N .

Подгруппа N представима в виде

$$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_m,$$

где $N_1, N_2, \dots, N_m$ – изоморфные простые неабелевы группы. Если любая из подгрупп $T_1, T_2, \dots, T_s$ не содержит N , то для любого $i = 1, 2, \dots, s$ из $|G:T_i| = p_i^{k_i}$, где $k_i \geq 1$, очевидно, следует, что подгруппа N_1 содержит максимальную подгруппу H_i , индекс которой является степенью простого числа p_i . С учетом [5, теорема 1] проверка показывает, что ни одна из простых групп таким свойством не обладает.

Следовательно, подгруппы $T_1, T_2, \dots, T_{s-1}$ не содержат подгруппу N , а подгруппа T_s содержит N . В этом случае для любого $i = 1, 2, \dots, s-1$ из $|G:T_i| = p_i^{k_i}$, где $k_i \geq 1$, следует, что подгруппа N_1 содержит максимальную подгруппу H_i , индекс которой является степенью простого числа p_i . Так как $s \geq 3$, то ввиду [5, теорема 1] (см. шаг 1) получаем, что $N_1 \simeq L_2(7)$.

Пусть T – принадлежащее $\mathfrak{F}$ добавление к некоторой максимальной подгруппе из силовой 3-подгруппы группы G . Предположим, что T не содержит N . Тогда, как показано выше, подгруппа $N_1 \simeq L_2(7)$ содержит максимальную подгруппу индекса 3, что невозможно. Следовательно, $N \subseteq T$. Тогда T – $\mathfrak{F}$ -субнормальная $\mathfrak{F}$ -подгруппа группы G , а значит, по лемме 1.2 T содержится в $G_{\mathfrak{F}}$. При этом индекс $G_{\mathfrak{F}}$ в группе G равен 3^t , где $t \geq 0$.

Предположим, что $t > 0$. Пусть V_1 – силовая 3-подгруппа группы $G_{\mathfrak{F}}$. Заключим эту подгруппу в максимальную подгруппу V из $P \in Syl_3(G)$. Тогда для любого принадлежащего $\mathfrak{F}$ добавления T к V в группе G имеем $TV \subseteq G_{\mathfrak{F}}V \subset G$, что противоречит условию теоремы. Значит, $G_{\mathfrak{F}} = G$ и $G \in \mathfrak{F}$. Снова имеем противоречие с выбором группы G .

Шаг 5. G – бипримарная группа.

Пусть N – p -группа. Предположим, что группа G не является бипримарной, т. е. ее порядок делится на различные простые числа q и r , отличные от p . По условию для каждой максимальной подгруппы из любой силовой подгруппы группы G существует добавление в G , принадлежащее $\mathfrak{F}$. Понятно, что все эти добавления имеют индекс, являющийся степенью простого числа. Пусть T_1 и T_2 – два таких добавления, причем $|G:T_1| = q^k$ и $|G:T_2| = r^t$. Понятно, что добавления T_1 и T_2 содержат подгруппу N . Тогда, очевидно, подгруппы T_1 и T_2 $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G . Кроме того, по условию подгруппы T_1 и T_2 принадлежат формации $\mathfrak{F}$.

Но тогда по лемме 1.2 подгруппы T_1 и T_2 содержатся в $\mathfrak{F}$ -радикале $G_{\mathfrak{F}}$ группы G . Так как индексы подгрупп T_1 и T_2 взаимно просты, то $G = \langle T_1, T_2 \rangle \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, т. е. группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G . Значит, G – бипримарная группа.

Будем полагать далее, что $\pi(G) = \{p, q\}$.

Шаг 6. $\mathfrak{F}_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ – формация всех нильпотентных $\{p, q\}$ -групп.

В силу леммы 1.1 формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующим условиям: $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$; существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{E}_{\pi_i})$; $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{M})} \mathfrak{M}$ – наследственная локальная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{M}^2$.

Предположим, что $\{p, q\} \subseteq \pi(\mathfrak{M})$. Тогда из $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{M})} \mathfrak{M}$ следует, что $G \in \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Если $\{p, q\} \subseteq \pi_i$ для некоторого $i \in I$, то из $G \in \mathfrak{E}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Снова приходим к противоречию. Таким образом, либо одно из простых чисел p и q принадлежит $\pi(\mathfrak{M})$, а другое $\pi(\mathfrak{H})$, либо числа p и q они принадлежат различным членам разбиения $\{\pi_i \mid i \in I\}$. Поэтому из $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{E}_{\pi_i})$ получаем, что $\mathfrak{F}_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ – формация всех нильпотентных $\{p, q\}$ -групп.

Шаг 7. Заключительное противоречие.

Так как G – $\{p, q\}$ -группа, $\mathfrak{F}_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$, то N – силовская p -подгруппа группы G . Так как N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то силовская q -подгруппа Q группы G максимальна в G . Отсюда и из условия теоремы получаем, что группа G нильпотентна. $\square$

3 Следствия

Приведем два следствия, дающие положительные ответы на вопросы 19.87 и 19.88 из «Куровской тетради» [6].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Следуя [7], будем говорить, что группа G является: σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; σ -нильпотентной, если она является прямым произведением некоторых σ -примарных групп; σ -разрешимой, если каждый главный фактор группы G является σ -примарной группой.

Как отмечено в [7], класс $\mathfrak{N}_{\sigma}$ всех σ -нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга. Кроме того, в силу леммы 1.1 эта формация является решеточной. Поэтому из теоремы имеем

Следствие 3.1. Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ -нильпотентная подгруппа T , что $VT = G$. Тогда G – σ -нильпотентная группа.

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{E}_{\sigma}$ всех σ -разрешимых групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга. Кроме того, $\mathfrak{E}_{\sigma} = \mathfrak{E} \mathfrak{E}_{\sigma}$ и все критические группы формации $\mathfrak{E}_{\sigma}$ являются простыми. Таким образом, в силу леммы 1.1 эта формация является решеточной. Поэтому из теоремы имеем

Следствие 3.2. Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ -разрешимая подгруппа T , что $VT = G$. Тогда G – σ -разрешимая группа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Белорусская наука, 2003. – 256 с.
3. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.
4. Yi, X. Subgroup-closed lattice formations / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2015. – Vol. 444. – P. 143–151.
5. Guralnick, R. Subgroups of prime power index in a simple group / R. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81, № 2. – P. 304–311.
6. Нерешенные вопросы теории групп: Куровская тетрадь. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2018. – 248 с.
7. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

Исследования С. Ёи выполнены при поддержке Китайского фонда естественных наук провинции Чжэцзян (Грант LY18A010028). Исследования С.Ф. Каморникова и В.Н. Тютянова выполнены при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта Ф20Р-291.

Поступила в редакцию 25.01.2021.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Е.В. Кузьмина

*Брестский государственный технический университет;
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина*

GENERALIZED SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL FIRST-ORDER EQUATION WITH THE SPECIAL RATIONAL COEFFICIENT

E.V. Kuzmina

*Brest State Technical University;
A.S. Pushkin Brest State University*

Рассмотрены решения в пространстве обобщенных функций линейного дифференциального уравнения первого порядка, в котором коэффициентом является обобщенная функция, порожденная рациональной функцией $\frac{2x-a}{x^2-ax}$, $a > 0$. Найдены условия существования обобщенного решения задачи Коши, показано, что обобщенное решение существует не для всех рассматриваемых коэффициентов.

Ключевые слова: обобщенная функция, дифференциальное уравнение с обобщенным коэффициентом, аналитическое представление.

Solutions in the space of generalized functions of a linear first-order differential equation in which the coefficient is the generalized function generated by the rational function $\frac{2x-a}{x^2-ax}$, $a > 0$ are considered. Conditions for the existence of a generalized solution to the Cauchy problem are found. It is shown that the generalized solution does not exist for all considered coefficients.

Keywords: generalized functions, differential equation with generalized coefficient, analytical representation.

Введение

Дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами имеют формальный характер, так как произведения коэффициентов на решение, входящие в такие уравнения, не определены. Поэтому обобщенная функция не может быть подставлена в уравнение и классическое определение решения для таких уравнений не имеет смысла. Общий подход к введению понятия решения для таких уравнений заключается в том, что обобщенные коэффициенты заменяются на их аппроксимации гладкими функциями и тогда решением называется предел решений аппроксимирующих уравнений, если он существует. Наибольшее внимание уделялось уравнениям, в которых коэффициенты являются дельта-функциями или, в более общем случае, производными функций ограниченной вариации. Для таких уравнений доказаны теоремы существования решений и им посвящена обширная литература (С. Альберверо [1], С.Т. Завалишин, А.Н. Сесекин [2], Н.В. Лазакович [3] и др.).

Но если коэффициент q не представляется как производная функции ограниченной вариации, то ситуация качественно меняется уже для простейших обыкновенных линейных уравнений первого порядка вида

$$u' + qu = 0.$$

В [4] доказано что, если обобщенная функция q является производной в смысле теории обобщенных функций от локально интегрируемой функции $\ln|x| + M\Theta(x)$, где $\Theta(x)$ есть функция Хэвисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

то обобщенное решение существует только при значениях числа $M = i\pi(1-2m)$, где $m \in \mathbb{Z}$. Это показывает, что утверждение о существовании обобщенного решения в общем случае не выполнено и общая задача заключается в выяснении того, от каких свойств коэффициентов зависит существование обобщенного решения.

При анализе обобщенных решений в [4] использовалось то, что при $x \neq 0$ коэффициент q совпадает с рациональной функцией $\frac{1}{x}$, причем существенно было то, что в числителе стоит число 1. Это показывает, что общая задача содержательна даже для рациональных коэффициентов специального вида. В данной работе вопрос о существовании обобщенного решения рассмотрен

для уравнений, в которых коэффициенты являются рациональными функциями более общего вида, имеющими особенности в двух точках и показано, какие отличия возникают при переходе к таким более общим уравнениям. Результаты естественным образом переносятся на случай рациональных коэффициентов, имеющих аналогичные особенности в конечном числе точек.

1 Классические, формальные и обобщенные решения задачи Коши

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$u' + \frac{2x-a}{x^2-ax}u = 0, \quad a, x \in \mathbb{R}, \quad a > 0. \quad (1.1)$$

Его классические решения есть функции вида

$$u(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^2-ax}, & x < 0; \\ \frac{C_1}{x^2-ax}, & 0 < x < a; \\ \frac{C_2}{x^2-ax}, & x > a, \end{cases}$$

где C, C_1, C_2 – произвольные постоянные. При $x < 0$ решение задачи Коши с условием $u(-1) = \frac{C}{a+1}$ есть функция $u(x) = \frac{C}{x^2-ax}$. При $x \rightarrow -0$ это решение уходит на бесконечность и в классической теории дифференциальных уравнений нет методов, позволяющих естественным образом продолжить это решение для $x > 0$.

Наряду с (1.1) можно рассмотреть аналогичное уравнение в пространстве функций на комплексной плоскости

$$u'(z) + \frac{2z-a}{z^2-az}u(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

где дифференцирование понимается по комплексной переменной z . У этого уравнения решение задачи Коши с условием $u(-1) = \frac{C}{a+1}$

является рациональной функцией $u(z) = \frac{C}{z^2-az}$,

однозначно определенной при $z \neq 0, z \neq a$ и, в частности, однозначно определенной на вещественной оси. Обратим внимание на то, что если $b(z)$ – произвольная рациональная функция, то аналогичное уравнение

$$u'(z) + b(z)u(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

может не иметь однозначно определенных аналитических решений, а в уравнении (1.1) коэффициент специально выбран таким, что соответствующее уравнение (1.2) имеет рациональное решение.

Рассмотрим уравнение (1.1) с точки зрения теории обобщенных функций (распределений) [5]. Прежде всего отметим, что функция

$$\frac{2x-a}{x^2-ax} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} \quad (1.3)$$

не является локально интегрируемой и не задает непосредственно обобщенную функцию. Но ей соответствует двухпараметрическое семейство распределений, которые определяются как производные в смысле обобщенных функций от локально интегрируемых функций

$$g(x) = \ln|x| + \ln|x-a| + M_1\Theta(x) + M_2\Theta(x-a), \quad (1.4)$$

где M_1 и M_2 – произвольные комплексные постоянные. Соответствующие распределения есть

$$q = P\left(\frac{1}{x}\right) + P\left(\frac{1}{x-a}\right) + M_1\delta_0 + M_2\delta_1, \quad (1.5)$$

где $\langle \delta_\tau, \varphi \rangle = \varphi(\tau)$,

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int \frac{1}{x} \varphi(x) dx$$

и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [5].

Поэтому с уравнением (1.1) связано семейство уравнений вида

$$u' + qu = 0 \quad (1.6)$$

с обобщенными коэффициентами (1.5) и эти уравнения могут иметь разные свойства при разных значениях M_1 и M_2 .

Если коэффициент в уравнении вида (1.6) является непрерывной функцией, то решение задачи Коши с условием $u(-1) = \frac{C}{a+1}$ задается

формулой

$$u(x) = \frac{1}{a+1} C e^{-g(x)+g(-1)}, \quad (1.7)$$

где g – первообразная для коэффициента. Для любой обобщенной функции q существует первообразная, которая в общем случае также является обобщенной функцией. Если первообразная есть регулярная обобщенная функция, т. е. соответствует обычной локально интегрируемой функции g , то она может быть подставлена в формулу (1.7) и для таких q получаем по этой формуле функцию, определенную на всей прямой, которую будем называть *формальным решением задачи Коши*.

Заметим, что рассматриваемые ниже вопросы связаны с существованием экспоненты в пространстве распределений, так как экспоненту можно определить как сумму ряда

$$e^{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k(x)}{k!}. \quad (1.8)$$

Тогда, если функция g локально ограничена, то ряд (1.8) сходится в пространстве распределений и его сумму естественно считать обобщенным решением рассматриваемого уравнения. Это выполнено, если q является производной функции

ограниченной вариации и, в частности, является суммой дельта-функций.

Для распределений (1.5) первообразные есть локально интегрируемые обычные функции (1.4) и поэтому определены и в явном виде выписываются по формуле (1.7) формальные решения задачи Коши

$$u(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^2 - ax}, & x < 0; \\ \frac{-Ce^{-M_1}}{x^2 - ax}, & 0 < x < a; \\ \frac{Ce^{-(M_1+M_2)}}{x^2 - ax}, & x > a. \end{cases} \quad (1.9)$$

Таким образом, выбор конкретной обобщенной функции, соответствующей коэффициенту (1.3) (т. е. выбор чисел M_1 и M_2), позволяет задать однозначно определенное продолжение решения задачи Коши через особенности: формальное решение (1.9) задачи Коши однозначно определено не только при $x < 0$, но и при $x > 0$ ($x \neq a$).

Но функции (1.4) не являются локально ограниченными и для них ряд (1.8) может расходиться в пространстве распределений. Полученные ниже результаты позволяют найти те значения M_1 и M_2 , при которых экспоненте из (1.7) можно придать смысл.

Построенное формально решение (1.9) нельзя рассматривать как обобщенную функцию и оно не является обобщенным решением. Этой функции, как и (1.3), при заданных M_1 и M_2 соответствует двухпараметрическое семейство обобщенных функций U . Поэтому при детальном исследовании уравнения (1.1) возникает четырехпараметрическое семейство распределений, которые могут быть кандидатами на обобщенное решение этого уравнения. Основная проблема заключается в том, что при подстановке такого распределения U в уравнение возникает произведение qU , которое не определено в классической теории.

Применим общий подход, согласно которому обобщенный коэффициент q следует заменить на его аппроксимацию гладкими функциями $q_\varepsilon(x)$, где ε – положительный малый параметр, и рассмотреть семейство уравнений

$$u'_\varepsilon(x) + q_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0. \quad (1.10)$$

Определение 1.1 [4]. Будем говорить, что задача Коши для уравнения (1.1) разрешима в пространстве распределений $D'(R)$, если у семейства $u_\varepsilon(x)$ решений уравнений (1.10), удовлетворяющих условию Коши $u_\varepsilon(x_0) = C_0$, существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon := U$$

в смысле сходимости в $D'(R)$. Распределение U будем называть *обобщенным решением задачи Коши при заданном способе аппроксимации*.

Согласно [4], решение задачи Коши для аппроксимирующего уравнения задается формулой

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{a+1} Ce^{-g_\varepsilon(x)+g_\varepsilon(-1)}, \quad (1.11)$$

где g_ε – первообразная для q_ε . Поэтому вопрос о построении обобщенного решения сводится к нахождению предела в пространстве распределений при $\varepsilon \rightarrow 0$ семейства экспонент (1.11) и основную сложность представляет выяснение того, для каких M_1 и M_2 такой предел существует.

Как уже отмечалось, произведение распределений в общем случае не определено. Если для распределений v и w заданы аппроксимации гладкими функциями $v_\varepsilon \rightarrow v$, $w_\varepsilon \rightarrow w$, то произведения $v_\varepsilon w_\varepsilon$ могут не иметь предела; если предел произведений существует, то его называют *произведением v и w при заданных способах аппроксимации*. Обратим внимание на то, что для более сложных уравнений, содержащих более двух слагаемых, из сходимости семейства решений $u_\varepsilon(x)$ аппроксимирующих уравнений в пространстве распределений не следует, что каждое слагаемое имеет предел, т. е. что определены все произведения, входящие в уравнение. Например, пусть решения семейства уравнений вида

$$u''_\varepsilon + p_\varepsilon u'_\varepsilon + q_\varepsilon u_\varepsilon = 0$$

сходятся к распределению U . Тогда $u''_\varepsilon \rightarrow U''$ и $p_\varepsilon u'_\varepsilon + q_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow -U''$, но при этом может оказаться, что произведения $p_\varepsilon u'_\varepsilon$ и $q_\varepsilon u_\varepsilon$ не имеют предела.

Для уравнений вида (1.10) из того, что $u_\varepsilon \rightarrow U$, следует, что $q_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow -U'$, поэтому обобщенное решение U должно быть таким распределением, для которого определено в указанном смысле произведение qU . Здесь распределение q порождено рациональной функцией (1.3), основной результат работы заключается в том, что обобщенное решение существует только для тех распределений (1.5), при которых формальное решение также является рациональной функцией, т. е. когда

$$e^{-M_1} = -1, e^{-M_2} = -1.$$

В [4] этот общий подход был применен для исследования уравнения с коэффициентом $\frac{1}{x}$, имеющим особенность в одной точке. В данной работе он применен для уравнений с коэффициентом, имеющим особенность в двух точках: 0 и a .

2 Решения аппроксимирующих уравнений

Для коэффициента (1.5) будем использовать аппроксимирующее семейство, порожденное аналитическим представлением

$$q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [q^+(x + i\varepsilon) - q^-(x - i\varepsilon)],$$

где q^+ – функция, аналитическая в верхней полуплоскости, q^- – в нижней полуплоскости [7]. Распределение называется *рациональным*, если в его аналитическом представлении функции $q^\pm$ являются рациональными.

Для распределения $P\left(\frac{1}{x}\right)$ соответствующее аппроксимирующее семейство есть

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x + i\varepsilon} + \frac{1}{x - i\varepsilon} \right] = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2},$$

а для δ -функции – семейство

$$\frac{i}{2\pi} \left[\frac{1}{x + i\varepsilon} - \frac{1}{x - i\varepsilon} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Поэтому для распределения (1.5) аппроксимирующее семейство может быть записано в виде

$$q_\varepsilon(x) = \lambda \frac{1}{x + i\varepsilon} + (1 - \lambda) \frac{1}{x - i\varepsilon} + \beta \frac{1}{(x + i\varepsilon) - a} + (1 - \beta) \frac{1}{(x - i\varepsilon) - a},$$

где $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{M_1 i}{2\pi}$, $\beta = \frac{1}{2} + \frac{M_2 i}{2\pi}$.

Из этого представления видно, что распределения (1.5) являются рациональными.

Теорема 2.1. Решения задачи Коши с условием $u(-1) = \frac{C}{a+1}$ для аппроксимирующих уравнений (1.10) при

$$q_\varepsilon(x) = \lambda \frac{1}{x + i\varepsilon} + (1 - \lambda) \frac{1}{x - i\varepsilon} + \beta \frac{1}{(x + i\varepsilon) - a} + (1 - \beta) \frac{1}{(x - i\varepsilon) - a}$$

представляются в виде

$$u_\varepsilon(x) = \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) \left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) \times \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon} \cdot \frac{-1+i\varepsilon}{-1-i\varepsilon} \right)^\lambda \left(\frac{x-i\varepsilon-a}{x+i\varepsilon-a} \cdot \frac{-a-1+i\varepsilon}{-a-1-i\varepsilon} \right)^\beta \quad (2.1)$$

и при $\varepsilon \leq 1$ для них имеет место оценка

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \frac{\text{const}}{|x| \cdot |x-a|}. \quad (2.2)$$

При $x \neq 0$, $x \neq a$ функции $u_\varepsilon(x)$ точечно сходятся к формальному решению (1.9) и при этом сходимость равномерная вне любой окрестности указанных точек.

Доказательство. Для функции

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \mp i \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2},$$

первообразная имеет вид

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) \mp i \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}.$$

Для функции

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon - a} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} \mp i \frac{\varepsilon}{(x-a)^2 + \varepsilon^2},$$

первообразной является

$$\frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) \mp i \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon}.$$

Следовательно, одной из первообразных для $q_\varepsilon(x)$ является функция

$$Q_\varepsilon(x) = \lambda \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) - i \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} \right] + (1-\lambda) \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) + i \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} \right] + \beta \left[\frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) - i \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon} \right] + (1-\beta) \left[\frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) + i \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon} \right].$$

Поэтому, согласно (1.11), решения аппроксимирующих уравнений есть

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{a+1} C e^{-Q_\varepsilon(x) + Q_\varepsilon(-1)}.$$

Для последующего анализа поведения u_ε представим экспоненту в более явном виде.

Пусть $\arg(x + iy)$ есть непрерывная ветвь аргумента комплексного числа $x + iy$, определенная на комплексной плоскости с выброшенной положительной действительной полуосью и принимающая значения на интервале $(0; 2\pi)$. Тогда

$$\arg(x + i\varepsilon) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon},$$

$$\arg(x - i\varepsilon) = \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}$$

и

$$Q_\varepsilon(x) = \ln|x - i\varepsilon| + i \arg(x - i\varepsilon) - \frac{3\pi}{2}i + \lambda \left[\ln|x + i\varepsilon| + i \arg(x + i\varepsilon) - \frac{\pi}{2}i \right] - \lambda \left[\ln|x - i\varepsilon| + i \arg(x - i\varepsilon) - \frac{3\pi}{2}i \right] + \ln|x - i\varepsilon - a| + i \arg(x - i\varepsilon - a) - \frac{3\pi}{2}i + \beta \left[\ln|x + i\varepsilon - a| + i \arg(x + i\varepsilon - a) - \frac{\pi}{2}i \right] - \beta \left[\ln|x - i\varepsilon - a| + i \arg(x - i\varepsilon - a) - \frac{3\pi}{2}i \right].$$

Равенство

$$\operatorname{Ln}(x + iy) = \ln|x + iy| + i \arg(x + iy)$$

задает непрерывную ветвь логарифма комплексного числа. Это позволяет после преобразований записать Q_ε в виде

$$Q_\varepsilon(x) = \ln|x - i\varepsilon| + i \arg(x - i\varepsilon) -$$

$$\begin{aligned} & -3\pi i + i\lambda [\arg(x+i\varepsilon) - \arg(x-i\varepsilon) + \pi] + \\ & + \ln|x-i\varepsilon-a| + i\arg(x-i\varepsilon-a) + \\ & + i\beta [\arg(x+i\varepsilon-a) - \arg(x-i\varepsilon-a) + \pi] = \\ & = \operatorname{Ln}(x-i\varepsilon) + \lambda \left[\operatorname{Ln} \frac{x+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} + \pi i \right] + \\ & + \operatorname{Ln}(x-i\varepsilon-a) + \beta \left[\operatorname{Ln} \frac{x+i\varepsilon-a}{x-i\varepsilon-a} + \pi i \right] - 3\pi i. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(-1) &= \operatorname{Ln} \left(\frac{x-i\varepsilon}{-1-i\varepsilon} \right) + \operatorname{Ln} \left(\frac{x-i\varepsilon-a}{-a-1-i\varepsilon} \right) + \\ &+ \lambda \operatorname{Ln} \left[\frac{x+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \cdot \frac{-1-i\varepsilon}{-1+i\varepsilon} \right] + \beta \operatorname{Ln} \left[\frac{x+i\varepsilon-a}{x-i\varepsilon-a} \cdot \frac{-a-1-i\varepsilon}{-a-1+i\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} z &= z(x, \varepsilon) = \exp \left(-\operatorname{Ln} \left[\frac{x+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \cdot \frac{-1-i\varepsilon}{-1+i\varepsilon} \right] \right) = \\ &= \frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon} \cdot \frac{-1+i\varepsilon}{-1-i\varepsilon}, \\ l &= l(x, \varepsilon) = \exp \left(-\operatorname{Ln} \left[\frac{x+i\varepsilon-a}{x-i\varepsilon-a} \cdot \frac{-a-1-i\varepsilon}{-a-1+i\varepsilon} \right] \right) = \\ &= \frac{x-i\varepsilon-a}{x+i\varepsilon-a} \cdot \frac{-a-1+i\varepsilon}{-a-1-i\varepsilon}. \end{aligned}$$

После представления рассматриваемой функции $Q_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(-1)$ в виде суммы логарифмов получаем выражение для экспонент, задающих решения, в виде произведения

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{a+1} C e^{-Q_\varepsilon(x) + Q_\varepsilon(-1)} = \\ &= \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) \left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) z^\lambda(x, \varepsilon) l^\beta(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим, что если число λ целое, то степень z^λ определена однозначно, а при нецелом λ функция z^λ многозначна. Но здесь $|z(x, \varepsilon)| = 1$ и z представляется в виде $z(x, \varepsilon) = e^{i\tau(x, \varepsilon)}$. Поэтому выражение z^λ определено однозначно по формуле $z^\lambda = e^{i\lambda\tau(x, \varepsilon)}$. Аналогично задается ветвь функции l^β .

Оценка (2.2) очевидным образом следует из (2.3).

Найдём предел в смысле точечной сходимости рассматриваемого семейства функций. Очевидно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} &\rightarrow \frac{1}{x}, \\ \frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} &\rightarrow \frac{a+1}{x-a}. \end{aligned}$$

Если $x \neq 0$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ значения $z(x, \varepsilon)$ стремятся к 1, причем сходимость неравномерная в окрестности точки 0, так как $z(0, \varepsilon) \rightarrow -1$. При этом, если $x < 0$ значения $z(x, \varepsilon)$ стремятся

к 1 из верхней полуплоскости, поэтому аргумент $\tau(x, \varepsilon)$ стремится к нулю, $\lambda\tau(x, \varepsilon)$ также стремится к нулю и $z(x, \varepsilon)^\lambda$ стремится к 1.

Но если $x > 0$, то значения $z(x, \varepsilon)$ стремятся к 1 из нижней полуплоскости, аргумент $\tau(x, \varepsilon)$ стремится к 2π , $\lambda\tau(x, \varepsilon) \rightarrow \lambda 2\pi$ и $z(x, \varepsilon)^\lambda$ стремится к $e^{i2\pi\lambda}$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (z(x, \varepsilon))^\lambda = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ e^{i2\pi\lambda}, & x > 0. \end{cases}$$

Аналогично получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $l(x, \varepsilon)$ стремится к 1 при $x \neq a$, при этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (l(x, \varepsilon))^\beta = \begin{cases} 1, & x < a; \\ e^{i2\pi\beta}, & x > a. \end{cases}$$

Следовательно, при $x \neq 0$, $x \neq a$, семейство $u_\varepsilon(x)$ точно сходится к формальному решению (1.9), так как $e^{i2\pi\lambda} = -e^{-M_1}$, $e^{i2\pi\beta} = -e^{-M_2}$, причем вне окрестностей точек 0 и a сходимость равномерная.

В частности, если числа λ и β целые, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (z(x, \varepsilon))^\lambda = 1$, $x \neq 0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (l(x, \varepsilon))^\beta = 1$, $x \neq a$, а тогда $u_\varepsilon(x)$ точно сходится к рациональной

$$\text{функции } \frac{C}{x^2 - ax}. \quad \square$$

3 Существование обобщенных решений

Основной результат работы заключается в исследовании сходимости аппроксимирующих решений (1.11) в пространстве обобщенных функций.

Согласно (2.3), семейство $u_\varepsilon(x)$ представлено в виде произведения четырех семейств, сходящихся в пространстве распределений. Но из сходимости множителей не следует сходимость их произведений и ниже показано, что сходимость имеет место только в особых случаях, когда формальное решение является рациональной функцией.

Теорема 3.1. Если числа λ и β целые, то решения задачи Коши для аппроксимирующих уравнений (1.10) при

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(x) &= \lambda \frac{1}{x+i\varepsilon} + (1-\lambda) \frac{1}{x-i\varepsilon} + \\ &+ \beta \frac{1}{(x+i\varepsilon)-a} + (1-\beta) \frac{1}{(x-i\varepsilon)-a} \end{aligned}$$

имеют предел в пространстве распределений, т. е. существует обобщенное решение задачи Коши. При этом обобщенными решениями могут быть только четыре распределения:

$$1) U_1 = \frac{C}{a} \left[P \left(\frac{1}{x-a} \right) - P \left(\frac{1}{x} \right) + i\pi\delta_a - i\pi\delta_0 \right],$$

при $\lambda \leq 0$ и $\beta \leq 0$;

$$2) U_2 = \frac{C}{a} \left[P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_a - i\pi\delta_0 \right],$$

при $\lambda \leq 0$ и $\beta > 0$;

$$3) U_3 = \frac{C}{a} \left[P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_a + i\pi\delta_0 \right],$$

при $\lambda > 0$ и $\beta \leq 0$;

$$4) U_4 = \frac{C}{a} \left[P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_a + i\pi\delta_0 \right],$$

при $\lambda > 0$ и $\beta > 0$.

Доказательство. При целых значениях λ и β все сомножители в (2.3) являются рациональными функциями, а для произведений такого вида условия существования предела в пространстве распределений получены в [6]. Поэтому утверждения теоремы 3.1 являются следствием общих результатов из [6]. Чтобы не записывать довольно громоздкую формулировку общего результата из [6], проведем явное доказательство.

Используя (2.1), запишем решения $u_\varepsilon(x)$ в виде

$$u_\varepsilon(x) = \frac{C}{a+1} (1+i\varepsilon)^{1-\lambda} (1-i\varepsilon)^\lambda \times \\ \times (a+1+i\varepsilon)^{1-\beta} (a+1-i\varepsilon)^\beta \cdot \widetilde{u_\varepsilon(x)},$$

где

$$\widetilde{u_\varepsilon(x)} = \frac{1}{(x+i\varepsilon)^\lambda} \frac{1}{(x-i\varepsilon)^{1-\lambda}} \times \\ \times \frac{1}{(x+i\varepsilon-a)^\beta} \frac{1}{(x-i\varepsilon-a)^{1-\beta}}.$$

Числовой множитель

$$\frac{C}{a+1} (1+i\varepsilon)^{1-\lambda} (1-i\varepsilon)^\lambda (a+1+i\varepsilon)^{1-\beta} (a+1-i\varepsilon)^\beta$$

сходится к C и не влияет на сходимость, поэтому достаточно исследовать поведение функций $\widetilde{u_\varepsilon(x)}$.

Пусть $\lambda \leq 0$ и $\beta \leq 0$. Обозначив $-\lambda = n$ и $-\beta = m$, получаем

$$\widetilde{u_\varepsilon(x)} = \frac{(x+i\varepsilon)^n}{(x-i\varepsilon)^{1+n}} \frac{(x+i\varepsilon-a)^m}{(x-i\varepsilon-a)^{1+m}} = \\ = \frac{((x-i\varepsilon)+2i\varepsilon)^n}{(x-i\varepsilon)^{1+n}} \frac{((x-i\varepsilon-a)+2i\varepsilon)^m}{(x-i\varepsilon-a)^{1+m}} = \\ = \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k (x-i\varepsilon)^{n-k} (2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon)^{1+n}} \frac{\sum_{k=0}^m C_m^k (x-i\varepsilon-a)^{m-k} (2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon-a)^{1+m}} = \\ = \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k (2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon)^{1+k}} \frac{\sum_{k=0}^m C_m^k (2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon-a)^{1+k}} = \\ = \left[\frac{1}{x-i\varepsilon} + 2i\varepsilon \frac{n}{(x-i\varepsilon)^2} - 2\varepsilon^2 \frac{n(n-1)}{(x-i\varepsilon)^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{4i\varepsilon^3}{3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(x-i\varepsilon)^4} + \dots + \frac{(2i\varepsilon)^n}{(x-i\varepsilon)^{1+n}} \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{x-i\varepsilon-a} + 2i\varepsilon \frac{m}{(x-i\varepsilon-a)^2} - 2\varepsilon^2 \frac{m(m-1)}{(x-i\varepsilon-a)^3} - \right. \\ \left. - \frac{4i\varepsilon^3}{3} \frac{m(m-1)(m-2)}{(x-i\varepsilon-a)^4} + \dots + \frac{(2i\varepsilon)^m}{(x-i\varepsilon-a)^{1+m}} \right].$$

Каждое из семейств $\frac{1}{(x-i\varepsilon)^{1+k}}$ и $\frac{1}{(x-i\varepsilon-a)^{1+k}}$

сходится в пространстве распределений, причем к функциям, имеющим особенности в разных точках: 0 и a , а значит, существует предел произведения

$$\frac{1}{(x-i\varepsilon)^i} \frac{1}{(x-i\varepsilon-a)^j} \quad (i = \overline{1, 1+n}, j = \overline{1, 1+m}).$$

Поэтому, если раскрыть скобки, то все слагаемые, содержащие ε в качестве множителя, стремятся к нулю. И остается только семейство

$$\frac{1}{(x-i\varepsilon)} \frac{1}{(x-i\varepsilon-a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x-i\varepsilon-a} - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right),$$

которое сходится в пространстве распределений к

$$\frac{1}{a} \left(P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_a - i\pi\delta_0 \right).$$

Таким образом, если $\lambda \leq 0$ и $\beta \leq 0$, то предел $u_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений существует и равен

$$\frac{C}{a} \left(P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_a - i\pi\delta_0 \right).$$

Аналогично в других случаях получаем, что при целых λ и β обобщенное решение является пределом семейства функций

$$C \frac{1}{(x-is(\lambda)\varepsilon)} \frac{1}{(x-is(\beta)\varepsilon-a)} = \\ = \frac{C}{a+i\varepsilon(s(\beta)-s(\lambda))} \left(\frac{1}{x-is(\beta)\varepsilon-a} - \frac{1}{x-is(\lambda)\varepsilon} \right),$$

где

$$s(n) = \begin{cases} 1, & n \leq 0; \\ -1, & n > 0. \end{cases}$$

Такие семейства исследуются аналогично и отличие заключается только в знаках при $i\varepsilon$. Таким образом, вид обобщенного решения определяется функцией $s(n)$ – модифицированным знаком целого числа. Получаем, что при целых λ и β предел решений $u_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений существует и равен

$$\frac{C}{a} \left(P\left(\frac{1}{x-a}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi s(\beta)\delta_a - i\pi s(\lambda)\delta_0 \right). \quad \square$$

Теорема 3.2. Если хотя бы одно из чисел λ или β не является целым, то решения задачи

Коши для аппроксимирующих уравнений (1.10) не имеют предела в пространстве распределений и обобщенное решение задачи Коши не существует.

Доказательство. Пусть число λ не является целым. Для доказательства достаточно показать, что хотя бы для одной основной функции φ не существует конечный предел интегралов

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx.$$

Если $\varphi(0) = 0$, то оценка (2.2) позволяет применить теорему Лебега о мажорированной сходимости и получить существование предела. Поэтому расходимость может иметь место, только если $\varphi(0) \neq 0$.

Для пояснения того, за счет чего возникает расходимость, рассмотрим сначала пример уравнения, соответствующий $\lambda = 1/2$ и $\beta = 1/2$:

$$u' + \left[P\left(\frac{1}{x}\right) + P\left(\frac{1}{x-a}\right) \right] u = 0.$$

Решения аппроксимирующих уравнений в этом случае не задаются с помощью рациональных функций и записываются в виде

$$u_{\varepsilon}(x) = \frac{C}{a+1} \times \frac{(1+i\varepsilon)^{1/2} (1-i\varepsilon)^{1/2} (a+1-i\varepsilon)^{1/2} (a+1+i\varepsilon)^{1/2}}{(x-i\varepsilon)^{1/2} (x+i\varepsilon)^{1/2} (x-i\varepsilon-a)^{1/2} (x+i\varepsilon-a)^{1/2}}.$$

Для этого случая

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon}(x) &= \frac{1}{4} \ln(x^2 + \varepsilon^2) - i \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{4} \ln(x^2 + \varepsilon^2) + i \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{4} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) - i \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{4} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2) + i \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) + \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + \varepsilon^2), \end{aligned}$$

поэтому выбор ветвей степени при вычислении степени $1/2$ таков, что семейство решений аппроксимирующих уравнений сходится к формальному решению

$$u(x) = \frac{C}{|x(x-a)|}$$

и их поведение определяется поведением множителя

$$\exp(-Q_{\varepsilon}(x)) = \frac{1}{(x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \frac{1}{((x-a)^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}.$$

Пусть $0 < 2h < a$. Возьмем функцию $\varphi(x)$ такую, что $\varphi(x) = 1$ при $|x| < h$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 2h$. Ввиду равномерной сходимости $u_{\varepsilon}(x)$ на множестве $\{x: h \leq |x| \leq 2h\}$, для любой основной функции существует предел интегралов

$$\int_{h \leq |x| \leq 2h} u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx$$

и вопрос сводится к рассмотрению интегралов

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^h u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \\ &= C \int_{-h}^h \frac{\sqrt{(1+\varepsilon^2)((a+1)^2 + \varepsilon^2)}}{(a+1)\sqrt{(x^2 + \varepsilon^2)((x-a)^2 + \varepsilon^2)}} dx. \end{aligned}$$

Здесь подынтегральные функции неотрица-

тельны и почти всюду сходятся к $\frac{1}{|x|} \frac{1}{|x-a|}$.

Если предположить, что существует предел таких интегралов, то по теореме Фату предельная функция должна быть интегрируемой и получаем противоречие.

В общем случае рассуждения аналогичны. Воспользуемся тем, что при $|x| < h$ семейство функций

$$\left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) l^{\beta}(x, \varepsilon)$$

равномерно сходится к гладкой функции $\frac{a+1}{x-a}$,

причем при $|x| < h$ имеет место оценка

$$\left| \left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) l^{\beta}(x, \varepsilon) - \frac{a+1}{x-a} \right| \leq \text{const} \cdot \varepsilon. \quad (3.1)$$

Это позволяет записать решение в виде

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon}(x) &= \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) \left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) l^{\beta}(x, \varepsilon) = \\ &= \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) \frac{a+1}{x-a} + \\ &+ \frac{C}{a+1} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) \left[\left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) l^{\beta}(x, \varepsilon) - \frac{a+1}{x-a} \right]. \end{aligned}$$

Существует такая основная функция φ , что

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{a+1} \text{ при } |x| < h \text{ и } \varphi(x) = 0 \text{ при } |x| > 2h.$$

Для этой функции получаем, что

$$\int_{|x| \leq 2h} u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon),$$

где

$$I_1(\varepsilon) = \frac{C}{a+1} \int_{|x| \leq h} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) dx,$$

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) &= \frac{C}{a+1} \int_{|x| \leq h} \left(\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right) z^{\lambda}(x, \varepsilon) \times \\ &\times \left[\left(\frac{a+1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a} \right) l^{\beta}(x, \varepsilon) - \frac{a+1}{x-a} \right] \frac{x-a}{a+1} dx, \end{aligned}$$

$$I_3(\varepsilon) = \int_{h \leq |x| \leq 2h} u_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx.$$

При $h \leq |x| \leq 2h$ сходимость равномерная, поэтому существует конечный предел у $I_3(\varepsilon)$.

Интеграл $I_1(\varepsilon)$ был рассмотрен в [4] при исследовании уравнения с коэффициентом $\frac{1}{x}$, он стремится к бесконечности, если λ не является целым. Более того, известно асимптотическое поведение этого интеграла – он растет со скоростью $\ln \varepsilon$, причем

$$\int_{|x| \leq h} \left| \frac{1}{x - i\varepsilon} \right| dx$$

растет со скоростью $\ln \varepsilon$.

Из этого и оценки (3.1) получаем, что

$$|I_2(\varepsilon)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$$

и, следовательно, для выбранной функции

$$\int u_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \infty,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, обобщенное решение уравнения (1.6) с коэффициентом q вида (1.5) существует, только когда

$$M_1 = i\pi(1 - 2\lambda),$$

$$M_2 = i\pi(1 - 2\beta),$$

где $\lambda, \beta \in \mathbb{Z}$.

Полностью аналогично изложенному выше получаем более общее утверждение.

Теорема 3.3. Если коэффициент q имеет вид

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{x - a_k} + b(x), \quad a_k \in \mathbb{R},$$

где $b(x)$ есть гладкая функция, a_k – различные числа, то обобщенные решения задачи Коши уравнения (1.6) существуют только при

$$M_k = i\pi(1 - 2m_k),$$

где m_k – целые числа. При этом существует ровно 2^N различных обобщенных решений, соответствующих разным m_k , которые могут быть определены как пределы семейств функций

$$u_\varepsilon(x) = C \left(\frac{1}{x - a_1 \pm i\varepsilon} \right) \times \left(\frac{1}{x - a_2 \pm i\varepsilon} \right) \dots \left(\frac{1}{x - a_N \pm i\varepsilon} \right) e^{B(x)},$$

где $B(x)$ – первообразная для функции $b(x)$, при произвольных выборах знаков $\pm$.

Заключение

Проведенное исследование показывает, что существование обобщенного решения линейного дифференциального уравнения с обобщенным коэффициентом достаточно сложным образом зависит от вида особенностей коэффициента.

Естественно рассмотреть уравнения с коэффициентами более общего вида

$$q(x) = \sum_{k=1}^N \frac{s_k}{x - a_k} + b(x),$$

где $b(x)$ есть гладкая функция. В [8] исследовано существование обобщенного решения при

$$q(x) = \frac{s}{x}, \quad \text{где } s - \text{натуральное число, и показано,}$$

что здесь ситуация усложняется по сравнению со случаем $s = 1$ – при аппроксимации этого коэффициента семейством гладких функций

$$q_\varepsilon(x) = \lambda \frac{s}{x + i\varepsilon} + (1 - \lambda) \frac{s}{x - i\varepsilon}$$

обобщенное решение существует только при условии, что число $\lambda s = m$ целое и при этом $m \geq s$ или $m \leq 0$.

Вопрос о существовании обобщенных решений при произвольных значениях s_k требует дополнительного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Холден. – М.: Мир, 1991. – 568 с.
2. Завалишин, С.Т. Импульсные процессы. Модели и приложения / С.Т. Завалишин, А.Н. Секин. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
3. Лазакович, Н.В. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций / Н.В. Лазакович, О.Л. Яблонский, А.К. Хмызов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 5–9.
4. Антоневиц, А.Б. Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А.Б. Антоневиц, Т.Г. Шагова // Таврический Вестник Информатики и Математики. – 2019. – № 3. – С. 23–36.
5. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
6. Шагова, Т.Г. Рациональные мнемофункции на $\mathbb{R}$ / Т.Г. Шагова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 2. – С. 6–17.
7. Бремерман, Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. – М.: Мир, 1968. – 276 с.
8. Антоневиц, А.Б. Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{s}{x}u = 0$ в пространстве распределений / А.Б. Антоневиц, Е.В. Кузьмина // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–66.

Поступила в редакцию 02.11.2021.

КВАЗИОБРАТИМОСТЬ СЕТЕЙ ДЖЕКSONA С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК

Ю.В. Малинковский, В.А. Немилостивая

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

QUASI-REVERSIBILITY OF JACKSON'S NETWORKS WITH EXPONENTIAL CONSTRAINT ON THE SOJOURN TIME OF CLAIMS

Yu.V. Malinkovskii, V.A. Niamilastsivaya

F. Scorina Gomel State University

Исследуются выходящие потоки при помощи процедуры обращения времени для экспоненциальной сети массового обслуживания, состоящей из центров двух видов – однолинейных и многолинейных. Длительность пребывания в центрах сети – это случайная величина, для которой при фиксированном числе требований в центре условное распределение является экспоненциальным. Установлена квазиобратимость марковского процесса состояний сети.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, однолинейные и многолинейные центры, ограниченная длительность пребывания, обращение времени, квазиобратимость.

Outbound flows are investigated using the reverse time procedure for an exponential queueing network containing knots of two types - single-line and multi-line. The sojourn time at the knots of network is limited by an exponential random variable for a fixed number of claims in the knot. The quasi-reversibility of the Markov network process is established.

Keywords: queueing network, single-line and multi-line knots, limited sojourn time, reverse time, quasi-reversibility.

Введение

Системы массового обслуживания, в которых время пребывания требований случайно и имеет экспоненциальное распределение, рассматривались в классической монографии [1]. Стохастические сети со случайным временем пребывания заявок в узлах исследовались в статьях [2]–[6]. В работах [7], [8] впервые исследовались стохастические сети, в которых отличалось поведение обслуженных заявок и заявок с истекшим временем пребывания. Стационарное распределение сетей Джексона с двумя типами обслуживающих центров и экспоненциальным временем пребывания требований в них найдено в [9]. В настоящей статье исследуется характер выходящих из этой сети потоков требований и доказывается квазиобратимость марковского процесса.

1 Модель сети массового обслуживания

В стохастическую сеть, содержащую N центров, поступает стационарный пуассоновский поток требований с интенсивностью λ . Поступающее в сеть массового обслуживания требование одномоментно и независимо от остальных требований следует в i -й центр с вероятностью p_{0i} , ($i = 1, \dots, N$, $p_{01} + p_{02} + \dots + p_{0N} = 1$). Число мест для ожидания требований в обслуживающих центрах бесконечно. Стохастическая сеть состоит из двух видов обслуживающих центров – однолинейных и многолинейных.

Длительность обслуживания требования единственным прибором i -го центра имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i ($i = 1, \dots, M$), условное распределение продолжительностей обслуживания требований в оставшихся $N - M$ центрах, когда в них находится n_i требований, – показательное с параметром $\mu_i(n_i)$, при этом $\mu_i(n_i) > 0$ если $n_i \in \mathbb{N}$ и $\mu_i(0) = 0$ ($i = M + 1, M + 2, \dots, N$). Длительность пребывания требования в i -ом центре является случайной величиной, условное распределение которой (если в i -м центре находится n_i требований) экспоненциальное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i}$

($i = 1, \dots, N$). Из этого вытекает, что, условная вероятность того, что пребывание любого требования завершится в промежутке времени $[t, t + h)$, если в момент t в i -м обслуживающем центре находилось n_i требований, равна $\frac{\nu_i}{n_i}h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$, а условная вероятность завершения пребывания по крайней мере одного из требований равна $\nu_i h + o(h)$. Если требование поступает в центр, не содержащий требований, оно сразу же начинает обслуживаться. Процессы поступления, обслуживания и пребывания требований в обслуживающих центрах являются

независимыми, а обслуживание требований производится в порядке их поступления. Требуется, обслуженное в i -м центре, одновременно и независимо от иных требований с вероятностью p_{ij} направляется в j -й центр, а с вероятностью p_{i0} оставляет сеть ($i, j = 1, \dots, N, p_{i0} + p_{i1} + \dots + p_{iN} = 1$). Требуется, продолжительность пребывания которого в i -м центре истекло, одновременно и независимо от других требований с вероятностью $r_{i,j}$ для $i = 1, \dots, M$ переходит в j -й центр обслуживания, а с вероятностью r_{i0} оставляет сеть ($j = 1, \dots, N, r_{i0} + r_{i1} + \dots + r_{iN} = 1$). Если же $i = M + 1, M + 2, \dots, N$, то оно ведёт себя как обслуженное, то есть с вероятностью p_{ij} направляется в j -й центр, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($j = 1, \dots, N$). Центр с номером 0 будем отождествлять с внешностью сети. Имеем две стохастические матрицы:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \dots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \dots & p_{0N} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N0} & r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{NN} \end{pmatrix}.$$

Матрица P является как маршрутной матрицей обслуженных требований, так и маршрутной матрицей неудовлетворенных требований для центров $i = M + 1, M + 2, \dots, N$, а R – маршрутной матрицей неудовлетворенных требований для центров $i = 1, \dots, M$. Таким образом, $p_{00} = r_{00} = 0, r_{0j} = p_{0j}$ для $j = 1, \dots, N$.

Матрица $S = (s_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, N)$, где

$$s_{0j} = p_{0j},$$

$$s_{ij} = \frac{\mu_i p_{ij} + v_i r_{ij}}{\mu_i + v_i} = \frac{\mu_i}{\mu_i + v_i} p_{ij} + \frac{v_i}{\mu_i + v_i} r_{ij},$$

$$i = 1, \dots, M, s_{ij} = p_{ij}, i = M + 1, M + 2, \dots, N,$$

стохастическая и отвечает за движение требований между центрами $0, 1, \dots, N$.

Состоянием сети в момент t будет значение многомерной цепи Маркова

$$\vec{n}(t) = (n_1(t), \dots, n_N(t))$$

с непрерывной длительностью, где $n_i(t)$ – число требований в i -ом центре в данный момент. Пространство состояний этой цепи $X = Z_+^N$, где $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Из неприводимости маршрутной матрицы и однозначной строгой положительности

интенсивностей выхода из состояний данной цепи в моменты скачков, следует неприводимость цепи Маркова $\vec{n}(t)$.

Напомним основные результаты, полученные нами ранее [9] и необходимые нам для исследования выходящих потоков сети.

Составлены уравнения равновесия для вертикальных сечений:

$$\lambda \varepsilon_i p_i (n_i - 1) = (\mu_i + v_i) p_i (n_i), \quad (1.1)$$

$$n_i = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, M;$$

$$\lambda \varepsilon_i p_i (n_i - 1) = (\mu_i (n_i) + v_i) p_i (n_i),$$

$$n_i = 1, 2, \dots, i = M + 1, M + 2, \dots, N.$$

Полученное нами в [9] уравнение трафика имеет следующий вид:

$$\varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i s_{ij} =$$

$$= p_{0j} + \sum_{i=1}^M \varepsilon_i \frac{\mu_i p_{ij} + v_i r_{ij}}{\mu_i + v_i} + \sum_{i=M+1}^N \varepsilon_i p_{ij}, \quad (1.2)$$

$$j = 1, \dots, N.$$

Будем предполагать, что маршрутная матрица S является неприводимой. Тогда уравнение трафика (1.2) при фиксированных $\mu_i, v_i, i = 1, \dots, N$ имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$.

В статье [9] была доказана

Лемма 1.1. При выполнении уравнения трафика (1.2)

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i s_{i0} = \sum_{i=1}^M \varepsilon_i \frac{\mu_i p_{i0} + v_i r_{i0}}{\mu_i + v_i} + \sum_{i=M+1}^N \varepsilon_i p_{i0} = 1.$$

2 Исследование выходящих потоков

Исследуем вид выходящих из стохастической сети потоков. Если обозначить интенсивность перехода цепи из одного состояния $n \in X$ в другое состояние $m \in X$ через $q(n, m)$, то получим

$$q(n, n + e_i) = \lambda p_{0i}, i = 1, \dots, N,$$

$$q(n, n - e_i) = (\mu_i p_{i0} + v_i r_{i0}) I_{\{n_i \neq 0\}}, i = 1, \dots, M, \quad (2.1)$$

$$q(n, n - e_i) = (\mu_i (n_i) + v_i) p_{i0} I_{\{n_i \neq 0\}},$$

$$i = M + 1, M + 2, \dots, N.$$

Используем теорему о конечномерных согласованных распределениях, тогда можно продолжить процесс на отрицательную полуось так, чтобы он оставался консервативным стационарным марковским процессом. Теперь рассмотрим два процесса: процесс $\{\vec{n}(t), t \in \mathbb{R}\}$ и процесс с

обращенным временем $\{\vec{n}^R(t), t \in \mathbb{R}\}$, где

$\vec{n}^R(t) = \vec{n}(-t)$, который, как известно [10], также является стационарным консервативным марковским

процессом с тем же стационарным распределением и теми же интенсивностями выхода из состояний, что и первоначальный процесс. Все характеристики процесса с обращенным временем будем обозначать аналогично первоначальному процессу, но с верхним индексом R . Используем тот факт, что интенсивности перехода процессов в прямом и обратном времени связаны зависимостью [10]

$$q^R(n, m) = \frac{p(m)}{p(n)} q(m, n).$$

Тогда из (2.1) и (1.1) найдём

$$\begin{aligned} q^R(n, n + e_i) &= \frac{p(n + e_i)}{p(n)} q(n + e_i, n) = \\ &= \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) I_{\{n_i \neq 0\}}, \quad i = 1, \dots, M; \\ q^R(n, n + e_i) &= \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i(n_i) + \nu_i} (\mu_i(n_i) + \nu_i) I_{\{n_i \neq 0\}} p_{i0} = \\ &= \lambda \varepsilon_i p_{i0}, \quad i = M + 1, M + 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} p_{0i}^R &= \varepsilon_i \frac{\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}}{\mu_i + \nu_i}, \quad i = 1, \dots, M, \\ p_{0i}^R &= \varepsilon_i p_{i0}, \quad i = M + 1, M + 2, \dots, N, \end{aligned}$$

тогда

$$q^R(n, n + e_i) = \lambda p_{0i}^R, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

В силу Леммы 1.1 $p_{01}^R + p_{02}^R + \dots + p_{0N}^R = 1$.

Итак, процесс с обращённым временем описывает некоторую сеть массового обслуживания. Причём, учитывая (2.2), входящий в эту сеть поток является стационарным пуассоновским с интенсивностью λ , а каждое требование просеивается на i -ый центр независимо от других требований с вероятностью p_{0i}^R . Используя известный факт, что процедура просеивания рекуррентна, получим, что и входящие потоки в сеть в обратном времени независимые стационарные пуассоновские потоки. Эти потоки для первоначальной стохастической сети являются выходящими потоками. Исходя из этого, мы можем сделать вывод, что выходящие из первоначальной стохастической сети потоки требований являются независимыми между собой стационарными пуассоновскими потоками. Более того, так как в сети в реверсивном времени текущее состояние не зависит от будущих поступлений, а будущие поступления для сети в обратном времени совпадают с прошлыми уходами из первоначальной сети, то этим доказано, что текущее состояние первоначальной стохастической сети не зависит от прошлых уходов. Таким образом, нами доказан следующий результат.

Теорема 2.1. В стационарном режиме процесс $\{\bar{n}(t), t \in \mathbb{R}\}$ является квазиобратимым, т. е. выходящие из сети потоки требований являются независимыми стационарными пуассоновскими, а текущее состояние сети не зависит от прошлых уходов требований из сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: Наука, 1987. – 431 с.
2. Ковалёв, Е.А. Сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях / Е.А. Ковалёв // АВТ. – 1985. – № 2. – С. 50–55.
3. Якубович, О.В. Стационарное распределение сети массового обслуживания с различными типами сигналов и положительных заявок и ограничением на время пребывания / О.В. Якубович // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – Ч. 2. – С. 207–211.
4. Якубович, О.В. Сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания положительных, отрицательных заявок и сигналов / О.В. Якубович, В.Е. Евдокимович // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 63–67.
5. Летунович, Ю.Е. Неоднородные сети с ограничением на время пребывания в режимах обслуживания / Ю.Е. Летунович // АВТ. – 2010. – № 5. – С. 33–41.
6. Якубович, О.В. Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок / О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (137). – С. 74–77.
7. Малинковский, Ю.В. Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания / Ю.В. Малинковский // АВТ. – 2015. – № 4. – С. 67–78.
8. Малинковский, Ю.В. Стационарное распределение вероятностей состояний G -сетей с ограниченным временем пребывания / Ю.В. Малинковский // АВТ. – 2017. – № 10. – С. 155–167.
9. Малинковский, Ю.В. Стационарное распределение сетей Джексона с экспоненциальным ограничением на времена пребывания заявок / Ю.В. Малинковский, В.А. Немилостивая // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 73–77.
10. Kelly, F.P. Reversibility and Stochastic Networks / F.P. Kelly. – N.Y.: Wiley, 1979. – 230 p.

Поступила в редакцию 16.02.2021.

УДК 517.538.52+517.538.53

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МИТТАГ – ЛЕФФЛЕРА

Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

RATIONAL APPROXIMATION OF THE MITTAG – LEFFLER FUNCTIONS

N.V. Ryabchenko, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

Установлено, что для функций Миттаг – Леффлера F_γ при $n \geq m-1$ и $n \rightarrow \infty$ аппроксимации Паде $\{\pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)\}$, которые являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями, приближают F_γ равномерно на компакте $D = \{z : |z| \leq 1\}$ со скоростью, асимптотически равной наилучшей. В частности, для функций Миттаг – Леффлера доказаны аналоги хорошо известных теорем Д. Браесса и Л. Треффзена, относящихся к аппроксимации функции $\exp(z)$.

Ключевые слова: аппроксимации Паде, асимптотические равенства, функции Миттаг – Леффлера, рациональные аппроксимации.

It is shown that for $m-1 \leq n$ the Padé approximants $\{\pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)\}$, which locally deliver the best rational approximations to the Mittag – Leffler functions F_γ , approximate the F_γ as $n \rightarrow \infty$ uniformly on the compact set $D = \{z : |z| \leq 1\}$ at a rate asymptotically equal to the best possible one. In particular, analogues of the well-known results of Braess and Trefethen relating to the approximation of $\exp(z)$ are proved for the Mittag – Leffler functions.

Keywords: Padé approximations, asymptotic equality, Mittag – Leffler functions, rational approximations.

Введение

Предполагая, что параметр $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$, рассмотрим однопараметрическое семейство целых функций $\mathcal{F} = \{F_\gamma\}$, представимых в виде

$$F_\gamma(z) = {}_1F_1(1; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\gamma)_k}, \quad (0.1)$$

где $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера. Ряды вида (0.1) принято называть гипергеометрическими рядами, а их суммы – гипергеометрическими функциями. Напомним, что функция Миттаг – Леффлера [1], [18] задаётся степенным рядом

$$E_{\rho, \beta}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(\rho p^{-1} + \beta)} \quad (\rho > 0, \beta \in \mathbb{C})$$

и является обобщением показательной функции. Принимая во внимание известное равенство $(\gamma)_p = \Gamma(p+\gamma)/\Gamma(\gamma)$, где, как и в предыдущей формуле, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, видим, что функции (0.1) являются функциями Миттаг – Леффлера. В частности, к таким функциям относится $F_1(z) = e^z = \exp z$.

При $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ рациональная аппроксимация функций $F_\gamma \in \mathcal{F}$ подробно изучалась в [3]. Мы хотим обобщить результаты этой работы, предполагая, что параметр γ может принимать и

комплексные значения. Как и в [3] в качестве аппарата приближения будем использовать аппроксимации Паде функции F_γ , однако, метод доказательства основной теоремы будет существенно отличаться от метода этой работы.

Каждой $F_\gamma \in \mathcal{F}$ поставим в соответствие таблицу Паде $[\pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)]_{n,m=0}^{\infty}$, элементами которой являются дроби

$$\pi_{n,m}(z; F_\gamma) = \frac{p_n(z; F_\gamma)}{q_m(z; F_\gamma)}$$

вида

$$r_{n,m}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}, \quad (0.2)$$

которые однозначно определяются тем, что имеют максимально возможный порядок касания к ряду (0.1) в классе рациональных функций вида (0.2) [4]. Для F_γ будем также рассматривать её

таблицу Чебышёва $[r_{n,m}^*(\cdot; F_\gamma)]_{n,m=0}^{\infty}$, состоящую из рациональных функций (0.2), наилучшим образом приближающих F_γ в равномерной норме, которые определяются из равенств (вообще говоря, неоднозначным образом)

$$\begin{aligned} R_{n,m}(F_\gamma; D) &= \inf \left\{ \|F_\gamma - r\| : r \in \mathcal{R}_{n,m} \right\} = \\ &= \|F_\gamma - r_{n,m}^*\|, \end{aligned}$$

где $\|g\| = \sup \{ |g(z)| : z \in D \}$, $D = \{z : |z| \leq 1\}$, а $\mathcal{R}_{n,m}$ – множество всех рациональных функций, представимых в виде (0.2) (если рациональная функция наилучшего приближения не единственна, то в качестве $r_{n,m}^*$ возьмем одну из таких функций).

Для экспоненты первые результаты об асимптотическом поведении строк таблиц Паде и Чебышёва были получены Э. Саффом [5], [6]. Хорошо известно [4], что дроби Паде $\pi_{n,m}(z; f)$ (учитывая современную терминологию, далее их будем называть аппроксимациями Паде) аналитической в окрестности нуля функции f являются локально наилучшими в классе $\mathcal{R}_{n,m}$ рациональными аппроксимациями степенного ряда, представляющего функцию f . Из результатов Э. Саффа, в частности, следует, что при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ бесконечно малые величины $\|e^z - \pi_{n,m}(z; e^z)\|$, $\|e^z - r_{n,m}^*(z; e^z)\|$ эквивалентны. Следовательно, для $\exp z$ локальные экстремальные аппроксимационные свойства её аппроксимаций Паде имеют глобальный характер. Позже в [7]–[9] эффект Саффа был установлен и для других целых функций. В этих работах соответствующие утверждения, как и у Э. Саффа, относятся в основном к строкам таблиц Паде и Чебышёва. В [10]–[12] для широкого класса целых функций ($\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, бесселевы функции, интеграл вероятности, функции Миттаг – Леффлера и др.) эффект глобальности экстремальных свойств дробей Паде был установлен для последовательностей $\{\pi_{n,m}(z; f)\}$ элементов таблиц Паде при $n+m \rightarrow \infty$ в предположении, что выполнены условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^4}{n} = 0. \quad (0.3)$$

К настоящему времени единственной нетривиальной функцией, для которой таблицы Паде и Чебышёва исследованы в полном объеме, является экспонента. В случае таблицы Паде соответствующее утверждение в виде гипотезы было сформулировано Г. Мейнардусом. Гипотеза Г. Мейнардуса доказана Д. Браессом [13]: для каждого $z \in D$ при $n+m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{n,m}(z; e^z) &= \\ &= \frac{(-1)^m m! n! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Здесь и далее предполагается, что оценка $o(1)$ равномерна по всем $z \in D$.

Поведение последовательностей элементов таблицы Чебышёва экспоненты полностью описано Л. Трефезеном [14]: при $n+m \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(e^z; D) = \|e^z - r_{n,m}^*(z; e^z)\| =$$

$$= \frac{m!n!}{(n+m)!(n+m+1)!} (1+o(1)).$$

Из результатов Д. Браесса и Л. Трефезена следует, что для экспоненты эффект Саффа при $n+m \rightarrow \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 0. \quad (0.4)$$

В этой связи в [3] было сделано предположение о том, что константа 4 в равенстве (0.3) не является точной. В этой же работе при $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ для функций Миттаг – Леффлера это предположение нашло подтверждение.

Перейдем непосредственно к формулировке основных результатов данной работы.

Теорема 0.1. Пусть $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Тогда при $n \geq m-1$ и $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in D$

$$\begin{aligned} F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) &= \\ &= \frac{(-1)^m m! (\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (0.5)$$

Основываясь на тождестве $e^{-z} = 1/e^z$ и определении аппроксимаций Паде, легко показать, что $\pi_{n,m}(z; e^z) = 1/\pi_{m,n}(-z; e^z)$. Поэтому при исследовании всей таблицы Паде экспоненты без потери общности достаточно рассмотреть поведение её элементов, лежащих не ниже главной диагонали, т. е. при $n \geq m$. Поэтому классический результат Д. Браесса является частным случаем теоремы 0.1. О необходимости условий $n \geq m-1$ в теореме 0.1 при $\gamma \neq 1$ смотри [15].

Теорема 0.2. Пусть $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Тогда, если $n \geq m-1$ и $m = o(n)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(F_\gamma; D) \sim \frac{m! |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|}. \quad (0.6)$$

Если же $n \geq m-1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = \theta$, $0 < \theta \leq 1$, то при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(F_\gamma; D) \asymp \frac{m! |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|}. \quad (0.7)$$

Напомним, что бесконечно малые (б. м.) величины $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ называются эквивалентными $(\alpha_n \sim \beta_n)$, если $\alpha_n/\beta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Бесконечно малые $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ имеют одинаковый порядок при $n \rightarrow \infty$ ($\alpha_n \asymp \beta_n$), если существуют такие положительные постоянные A и B , для которых $A\alpha_n \leq \beta_n \leq B\alpha_n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Сравнивая теоремы 0.1 и 0.2, нетрудно видеть, что если $m = o(n)$, то при $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ для функций Миттаг – Леффлера также имеет место эффект Саффа. В случае, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = \theta$,

$0 < \theta \leq 1$, мы можем лишь утверждать, что б. м. $\|F_\gamma - \pi_{n,m}(\cdot; F_\gamma)\|$ и $\|F_\gamma - r_{n,m}^*(\cdot; F_\gamma)\|$ имеют одинаковый порядок.

1 Доказательство теоремы 0.1

Доказательство теоремы 0.1 существенно отличается от доказательства аналогичной теоремы из [3], где рассматривался случай действительных γ . В своей основной части оно опирается на два известных в теории аппроксимаций Паде результата, принадлежащих Ван Россуму [16] и А.И. Аптекареву [17].

Утверждение 1.1 [16]. Если $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ и $n \geq m-1$, то

$$q_m(z; F_\gamma) F_\gamma(z) - p_n(z; F_\gamma) = \frac{(-1)^m m! z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m} (n+\gamma)_{m+1}} F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z). \quad (1.1)$$

Напомним, что

$${}_1F_1(\alpha, \beta; z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p} \frac{z^p}{p!}. \quad (1.2)$$

Утверждение 1.2 [17]. Если $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ и $n \geq m-1$, то при $n \rightarrow \infty$

$$q_m(z; F_\gamma) = e^{-\frac{mz}{n+m+\gamma+1}} (1 + o(1)). \quad (1.3)$$

Доказательству теоремы 0.1 предположим две леммы.

Лемма 1.1. Если $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, $n \geq m-1$ и

$$\Delta(n, m, k) = \frac{(m+1)_k}{(n+m+\gamma+1)_k} - \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^k,$$

то при произвольном m и достаточно больших n

$$|\Delta(n, m, k)| \leq \frac{k}{n+m+\gamma_1+1}, \quad (1.4)$$

где $k = 2, 3, \dots$, а $\gamma_1 = \operatorname{Re} \gamma$.

Доказательство проведём с помощью индукции по k . Пусть $k = 2$. Тогда легко заметить, что

$$\Delta(n, m, 2) = \frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \cdot \frac{n+\gamma}{(n+m+\gamma+1)(n+m+\gamma+2)}.$$

Поэтому при произвольном m и достаточно больших n

$$|\Delta(n, m, 2)| \leq \frac{2}{n+m+\gamma_1+1}.$$

При $k = 3$ неравенство (1.4) доказывается аналогично.

Предположим, что $k \geq 4$ и (1.4) справедливо для $k-1$ при произвольном m . Представим $\Delta(n, m, k)$ в виде

$$\Delta(n, m, k) = \frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \cdot \left[\Delta(n, m+1, k-1) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{m+2}{n+m+\gamma+2} \right)^{k-1} - \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^{k-1} \right]$$

С помощью формулы

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

преобразуем разность в квадратных скобках. В результате получим, что она равна

$$\frac{n+\gamma}{(n+m+\gamma+1)(n+m+\gamma+2)} \times \sum_{p=0}^{k-2} \left(\frac{m+2}{n+m+\gamma+2} \right)^p \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^{k-p-2}. \quad (1.5)$$

Отсюда и из предыдущего равенства, основываясь на предположении индукции, с учётом того, что при $k \geq 4$ и достаточно больших n

$$\left| \frac{m+2}{n+m+\gamma+2} \right| < \frac{11}{20},$$

$$\left| \frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right| < \frac{11}{20},$$

а сумма в (1.5) меньше 1, получаем

$$|\Delta(n, m, k)| \leq \frac{m+1}{n+m+\gamma_1+1} \times \left[\frac{k-1}{n+m+\gamma_1+2} + \frac{1}{n+m+\gamma_1+1} \right] \leq \frac{k}{n+m+\gamma_1+1}. \quad \square$$

Лемма 1.2. При $n \geq m-1$, и $n \rightarrow \infty$

$${}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z) = e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}} (1 + o(1)). \quad (1.6)$$

Доказательство. Из (1.2) следует, что

$${}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1)_k}{(n+m+\gamma+1)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

С другой стороны

$$e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{m+1}{n+m+\gamma+1} \right)^k \frac{z^k}{k!}.$$

Поэтому, так как $\Delta(n, m, 0) = \Delta(n, m, 1) = 0$, применяя лемму 1.1, получим

$$\left| {}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z) - e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}} \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta(n, m, k)}{k!} z^k \right| \leq \frac{1}{n+m+\gamma_1+1} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{(k-1)!}.$$

Отсюда, в силу ограниченности модуля функции $e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}}$ по совокупности параметров n, m и $z \in D$, вытекает (1.6). $\square$

Теперь для доказательства теоремы 0.1 достаточно воспользоваться утверждениями 1.1 и 1.2, легко проверяемым равенством

$$(n+\gamma)_{m+1} = \frac{(\gamma)_{n+m+1}}{(\gamma)_n}$$

и при этом учесть, что при $n \geq m-1$ и $n \rightarrow \infty$

$$e^{\frac{(m+1)z}{n+m+\gamma+1}} = e^{\frac{mz}{n+m}} (1 + o(1)), e^{-\frac{mz}{n+m+\gamma+1}} = e^{-\frac{mz}{n+m}} (1 + o(1)).$$

2 Доказательство теоремы 0.2

При достаточно больших n рассмотрим аналитическую в D функцию

$$\varphi(z) := F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma).$$

Покажем, что

$$\min_{|z|=1} |\varphi(z)| \leq R_{n,m}(F_\gamma; D) \leq \max_{|z|=1} |\varphi(z)|. \quad (2.1)$$

Правое неравенство в (2.1) вполне очевидно. Для доказательства левого неравенства воспользуемся следующей леммой Гончара – Дзядыка [18, лемма 3.1].

Лемма 2.1. Если аналитическая в односвязной области G и непрерывная на $\bar{G}$ функция φ имеет в G по крайней мере $n+1$ нуль с учетом кратности, то при произвольном $m \geq 0$ справедливо неравенство

$$R_{n,m}(\varphi; \bar{G}) \geq \min_{\partial G} |\varphi(z)|,$$

где ∂G – граница области G .

Из теоремы 0.1 следует, что в круге $\{z: |z| < 1\}$ с учетом кратности φ имеет $n+m+1$ нуль. Поэтому, применяя лемму 2.1, получим

$$\begin{aligned} R_{n,m}(F_\gamma; D) &= \|F_\gamma - r_{n,m}^*\| = \|F_\gamma - \pi_{n,m} - (r_{n,m}^* - \pi_{n,m})\| = \\ &= \|\varphi - \tilde{r}_{n+m,2m}\| \geq R_{n+m,2m}(\varphi; D) \geq \min_{|z|=1} |\varphi(z)|. \end{aligned}$$

Неравенство (2.1) доказано.

Теперь для доказательства эквивалентности (0.6) достаточно заметить, что из (0.5) при $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$\max_{|z|=1} |\varphi(z)| \sim \min_{|z|=1} |\varphi(z)| \sim \frac{m! |(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}|}.$$

Соотношение (0.7) доказывается аналогично. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Mittag-Leffler, M.G. Sur la nouvelle fonction $E(x)$ / M.G. Mittag-Leffler // C.R. Akad. Sci. Paris. – 1903. – Vol. 137. – P. 554–558.
2. Джрбашян, М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966.
3. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сб. – 2007. – Vol. 198, № 7. – P. 109–122.
4. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.
5. Saff, E.B. The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function / E.B. Saff // II. Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 32. – P. 187–194.
6. Saff, E.B. On the degree of best rational approximation to the exponential function /

E.B. Saff // J. Approx. Theory. – 1973. – Vol. 9, № 2. – P. 97–101.

7. Lubinsky, D.S. Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth. II. / D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1988. – Vol. 4. – P. 321–339.

8. Levin, A.L. Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1990. – Vol. 6. – P. 257–286.

9. Березкина, Л.Л. О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций / Л.Л. Березкина, В.Н. Русак // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 4. – С. 27–32.

10. Русак, В.Н. О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций / В.Н. Русак, Та Хонг Куанг // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34, № 10. – С. 868–871.

11. Русак, В.Н. Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора / В.Н. Русак, А.П. Старовойтов // Матем. сборник. – 2002. – Т. 193, № 9. – С. 63–92.

12. Levin, A.L. Best rational approximation of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – Vol. 293. – P. 533–545.

13. Braess, D. On the degree of best rational approximation to the exponential function / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

14. Trefethen, L.N. The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk / L.N. Trefethen // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 380–384.

15. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.

16. Van Rossum, H. Systems of orthogonal and quasi-orthogonal polynomials connected with the Padé table I, II and III / H. Van Rossum // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – P. 517–534, 675–682.

17. Аптекарев, А.И. Об аппроксимациях Паде к набору $\{ {}_1F_1(1, c; \lambda_i z) \}_{i=1}^k$ / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.

18. Дзядык, В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ / В.К. Дзядык // Матем. сборник. – 1979. – Т. 108 (150), № 2. – С. 247–267.

Поступила в редакцию 23.11.2020.

УДК 664.012

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ ПО ДОСТАВКЕ МОЛОКА

И.В. Акиншева, А.А. Филиппова

Могилевский государственный университет продовольствия

IMPLEMENTATION OF AN ALGORITHM FOR CALCULATION OF LOGISTICS COSTS FOR MILK DELIVERY

I.V. Akinsheva, A.A. Philippova

Mogilev State University of Food Technology

Реализован алгоритм вычисления стоимости всего комплекса услуг, оказываемых логистической организацией по доставке молочной продукции, с наибольшей прибылью. В основе алгоритма лежит методика расчета, в которой использован принцип определения величины транспортных затрат с учетом конкретных экзогенных переменных, и модифицированный алгоритм Дейкстры для выбора «наилучшего» пути доставки продукта. Разработано web-приложение, которое позволяет проводить апробацию расчета себестоимости логистической услуги и вычисления прибыли от потенциально возможного перечня осуществления логистических услуг по закупке и доставке молока логистической организацией.

Ключевые слова: web-приложение, логистические услуги, молоко, модифицированный алгоритм Дейкстры, транспортные расходы, прибыль.

The algorithm for calculating the cost of the entire range of services provided by a logistics organization for the delivery of dairy products has been implemented with the greatest profit. The algorithm is based on the calculation method, which uses the principle of determining the value of transport costs, taking into account specific exogenous variables, and the modified Dijkstra's algorithm for choosing the "best" way of product delivery. The web-application allows you to test the calculation of the cost of a logistics service and calculate the profit from a potential list of logistics services for the purchase and delivery of milk by a logistics organization.

Keywords: web-application, logistics services, milk, modified Dijkstra's algorithm, transportation costs, profit.

Введение

Современный этап экономического развития Республики Беларусь определяется поиском новых путей и способов дальнейшего роста экономики страны в условиях введения торгово-экономических ограничений и частичным запретом на государственном уровне ввоза / вывоза продовольствия. Поэтому вопросы продовольственного обеспечения потребителей страны продукцией отечественных предприятий-производителей является актуальным. Важное значение имеет сфера производства продовольствия и доставки скоропортящегося продукта, например, молока. Поскольку организации-производители молока расположены по всей стране, а организации-потребители (переработчики сырья) находятся только в крупных городах, то решением проблемы доставки молока и молочной продукции занимаются логистические организации.

Для оценки систем в логистике существует два направления [1], [2]:

- логистика снабжения, основывающаяся на разработке алгоритмов для определения потоков материальных ресурсов от поставщиков;
- транспортная логистика, предусматривающая определение логистической схемы перемещения товаров.

В разрабатываемую систему включены организации-производители молока, логистические организации, а также организации-потребители, производящие молочную продукцию из получаемого сырья и устанавливающие цены на закупку молока. Для выполнения логистических операций логистической организацией при доставке продукта от организаций-производителей до организаций-потребителей используются различные транспортные средства. Транспортные расходы составляют до 50% общих расходов на выполнение логистических операций [3], [4].

Целью работы является реализация алгоритма для вычисления затрат на логистические процедуры, выполняемые логистической организацией, с наибольшей прибылью для нее.

Практическое значение работы заключается в использовании методики расчета затрат на оказание логистических услуг в разработанном программном продукте для устранения трудозатратного периода расчетов прибыли от услуг организации и упрощения определения наименее затратного варианта оказания логистических услуг при использовании модифицированного алгоритма Дейкстры.

В процессе апробации методики, обеспечивающей оценку различных вариантов оказания

логистических услуг по транспортировке сырья от предприятий-производителей, реализуется возможность принятия рационального экономически выгодного решения на основе ранжирования себестоимостей услуг с учетом регионально обусловленных факторов.

1 Алгоритм расчета прибыли от оказания логистических услуг

В основу методики выбора варианта оказания логистических услуг положены расчетные формулы, учитывающие следующие экзогенные переменные [2]:

- расстояние от предприятия, оказывающего логистические услуги, до места закупки молока у организаций-производителей (молочные фермы, молочно-животноводческие комплексы, хозяйства);

- расстояние от места закупки до организации-потребителя молока;

- характеристики транспортных средств (молоковозов), исходя из объема перевозимого молока;

- величина расхода топлива каждого молоковоза на 100 км пути: учитывается средний расход на 100 км или раздельный для порожнего транспорта (без молока) и с грузом (с молоком);

- стоимость одного литра топлива;

- состав молока по жирности, белку;

- стоимость жира и белка в молоке в зависимости от его сорта, определяемого в лаборатории организации-потребителя.

Так как организации-производители и организации-потребители распределены территориально, то для решения задачи о выборе «наилучшего» пути используется основанный на теории графов модифицированный алгоритм Дейкстры [4].

Пусть S – исходная вершина графа, с которой начинается построение маршрута; T – вершина, в которую требуется проложить «наилучший» маршрут; y – текущая (последняя) найденная в рамках алгоритма вершина, для которой уже построен кратчайший путь из S ; x – одна из используемых на итерационном шаге вершин графа; $d(x)$ – текущая используемая оценка в рамках алгоритма для «наилучшего» пути от S к x (в рассматриваемом); $l(y, x)$ – длина дуги (y, x) , причем для вершины x , для которой еще будет уточняться наилучший путь из S .

Если в используемом алгоритме $d(x_i) = P_i$, то

$$d(x) = \max \{P; d(y) + l(x, y)\}, \quad (1.1)$$

где P – прибыль организации, оказывающей логистические услуги [2].

В рамках алгоритма на каждой из итераций идет переписывание $y = x$. Процедура пересчета заканчивается, когда $y = T$, то есть «добрались» до конечной вершины T [2].

Стоимость закупаемого молока вычисляется в зависимости от [2]:

- количества жира и белка в одном его килограмме;

- цены жира и белка, задаваемых в соответствии с договорной ценой с организацией-потребителем за один килограмм;

- объема закупаемого молока, равного объему цистерны молоковоза.

$$C = (Q_{fat} \cdot P_{fat} + Q_p \cdot P_p) \cdot V \cdot 1,1, \quad (1.2)$$

где C – стоимость закупаемого молока;

Q_{fat} – количество жира в одном кг закупаемого молока;

P_{fat} – цена жира, формирующаяся на основе закупочной цены за один кг молока при составлении договора с организацией-переработчиком;

Q_p – количество белка в одном кг закупаемого молока;

P_p – цена белка, формирующаяся на основе закупочной цены за один кг молока при составлении договора с организацией-потребителем (переработчиком);

V – объем доставляемого молока.

Логистической организации при выборе типа транспортного средства (авторефрижераторы, изотермические фургоны, специальные цистерны) необходимо руководствоваться временными параметрами доставки молока, учитывая принятые сроки транспортировки [2].

Величина транспортных расходов определяется из выражения [2]

$$E_t = \frac{L_1 + L_2}{100} \cdot C_f \cdot P_f, \quad (1.3)$$

где E_t – величина транспортных расходов;

L_1 – путь, затрачиваемый на поездку от пункта закупки молока до пункта продажи организациям-потребителям;

L_2 – путь, затрачиваемый на поездку от последнего пункта продажи организациям-потребителям до пункта закупки (обратка);

C_f – расход топлива конкретного молоковоза на 100 км пути;

P_f – цена топлива за литр.

Себестоимость C_{prime} логистической услуги формируется из суммы транспортных расходов при доставке молока и величины затрат при закупке молока у организаций-производителей, с учетом НДС (выражения (1.2), (1.3)) [2].

$$C_{prime} = E_t + C = \left(\frac{L_1 + L_2}{100} \cdot C_f \cdot P_f \right) + (Q_{fat} \cdot P_{fat} + Q_p \cdot P_p) \cdot V \cdot 1,1. \quad (1.4)$$

Величина сдаваемого молока потребителю считается и измеряется в килограммах, а вместимость цистерн молоковозов (их объемы) измеряется в литрах. Следовательно, при сдаче молока потребителю производится перевод объема V сдаваемого молока в его массу M умножением объема на коэффициент 1,27:

$$M = 1,27 \cdot V. \quad (1.5)$$

На основе сложившихся цен на молочном рынке организация-потребитель устанавливает перед организациями, оказывающими ей логистические услуги, закупочную цену за 1 кг молока P_{pur} , которая закладывается в договор поставки между потребителем и поставщиком до начала процесса поставки. На ее основе определяются рациональные цены закупки жира P_g и белка P_p , рассчитываемые таким образом, чтобы организация, доставляющая молоко, получила свою прибыль за оказание логистической услуги, а не оказалась в убытке. А также на ее основе устанавливается стоимость C_{ser} оказываемой услуги, которая является произведением закупочной цены P_{pur} за 1 кг молока на массу всего доставленного продукта [2]:

$$C_{ser} = P_{pur} \cdot M \cdot 1,1. \quad (1.6)$$

Соответственно, прибыль P определяется разностью между ценой услуги, оказываемой нанимаемой логистической организацией, и себестоимостью логистической услуги этой организации, то есть с учетом выражений (1.2)–(1.6), получим [2]:

$$P = C_{ser} - C_{prime} = P_{pur} \cdot M \cdot 1,1 - \left(\frac{L_1 + L_2}{100} \cdot C_f \cdot P_f \right) + (Q_{fat} \cdot P_{fat} + Q_p \cdot P_p) \cdot V \cdot 1,1. \quad (1.7)$$

Прием сдаваемого организации-потребителю молока осуществляется на основе анализов, проводимых лабораторией по уровню жира и белка в составе продукта, исходя из требуемых значений по технологии переработки. В том числе проводится химический и бактериологический анализы. На их основе определяется сортность принимаемого молока на переработку.

В процессе транспортировки молока из пункта закупки в пункт сдачи уровень жира может повыситься в связи с колебанием молока в цистерне молоковоза. В этом случае производится разбавление молока «обратом» (сепарированным молоком) до соответствующего уровня, заранее определяемого в договоре потребителя с поставщиком согласно технологии переработки. Покупка продукта осуществляется по 3 сортам молока в соответствии с коэффициентом качества: высший сорт имеет коэффициент качества – 1,1; первый сорт – 1,0; второй сорт – 0,9 [2].

2 Web-приложение для расчета логистических затрат

Web-приложение разработано на языке программирования Python с использованием web-фреймворка Django, имеющего встраиваемую систему управления базами данных SQLite. Интерфейс приложения представлен на рисунке 2.1.

Путь от организации-производителя до организации-потребителя определяется автоматически. Для процедуры определения расстояния используется функция GoogleMap(), реализуемая с помощью языка программирования Python [5].

3 Выбор оптимального варианта оказания логистических услуг

Основным ограничением в разрабатываемом алгоритме является поставка товаров «точно в срок» (JIT-ограничение).

Поэтому оценка эффективности логистической системы от сокращения потерь продукта вследствие уменьшения времени на их транспортировку и хранение имеет вид [4], [6]

Результаты расчетов	
Параметр	Величина
Хозяйство	КСУП «Племзавод Рось»
Производство	ОАО «Березовский сыродельный комбинат»
Расстояние, км	500,0
Транспорт	Hyundai HD-170 (8200 л.)
Сорт молока	Экстра
Содержание белков, %	3,0
Содержание жиров, %	3,0
Договорная цена за 1 кг молока, бел. руб.	19,0
Транспортные расходы(Ет), бел. руб.	319,2
Стоимость закупаемого молока(С), бел. руб.	49790,4
Себестоимость логистической услуги(Сprime), бел. руб.	50109,6
Масса молока(М), кг.	10414,0
Стоимость оказываемой услуги(Сser), бел. руб.	217652,6
Прибыль(Р), бел. руб.	167543,0

[Вернуться на главную](#)

Рисунок 2.1 – Страница результатов расчета прибыли

$$I = \sum_{i=1}^n c_{ni} q_i, \quad (3.1)$$

где c_{ni} – потери, связанные с увеличением времени транспортировки груза от организации-производителя к организации-потребителю;

q_i – интенсивность потребления организации-потребителя (при расчете прибыли равна массе молока $q_i = M_i$), т.

Величина c_{ni} в выражении (3.1), как правило, нелинейно зависит от времени транспортировки. Функция для нахождения c_{ni} может быть описана следующей полиномиальной зависимостью:

$$c_{ni} = a_1 + a_2 t + a_3 t^2, \quad (3.2)$$

где a_1, a_2, a_3 – эмпирические коэффициенты, учитывающие вид продукта; t – продолжительность перевозки продуктов (ч),

$$t \leq 0,08t_2, \quad (3.3)$$

где t_2 – срок годности продукта, ч.

Рассмотрим варианты доставки молока логистической организацией от организаций-производителей к организациям-потребителям, расположенным на территории Республики Беларусь:

1 – КСУП «Племзавод Рось», п. Рось Волковысского района, Гродненская область – организация-производитель молока;

2 – ОАО «Беллакт», г. Волковыск;

3 – ОАО «Щучинский маслосырзавод», г. Щучин;

4 – ОАО «Молочный мир», г. Гродно;

5 – ОАО «Молодеченский молочный комбинат», г. Молодечно;

6 – ОАО «Березовский сыродельный комбинат», г. Береза;

7 – КПУП «Гормолзавод №3», г. Минск.

При расчете себестоимости логистической услуги C_{prime} путь пробега молоковозов увеличивается в зависимости от количества промежуточных точек и расстояний между ними.

Предположительно в парк молоковозов входит автомобиль DAF CF 85.340 с объемом цистерны 32000 л, средним расходом топлива 30 л на 100 км пути и средней скоростью движения в нагруженном состоянии 60 км/ч.

Получив значения прибылей каждого из потенциально возможных вариантов и используя программный продукт для выбора «наилучшего» пути, работник логистической организации (пользователь) может сделать выбор в сторону наиболее прибыльного, с учетом ограничения (3.3), варианта оказания логистической услуги.

При апробации расчета себестоимости логистической услуги был проведен анализ вариантов оказания логистических услуг с использованием следующих величин: расстояние до региона доставки молока; молоковоз, используемый при доставке продукта; сорт перевозимого молока. Если в системе заказы распределены

равномерно, то величина прибыли будет максимальной при минимальном расстоянии до точек доставки молока, как показано на рисунке 3.1 [4]. Для расчета использовались три организации-потребителя.

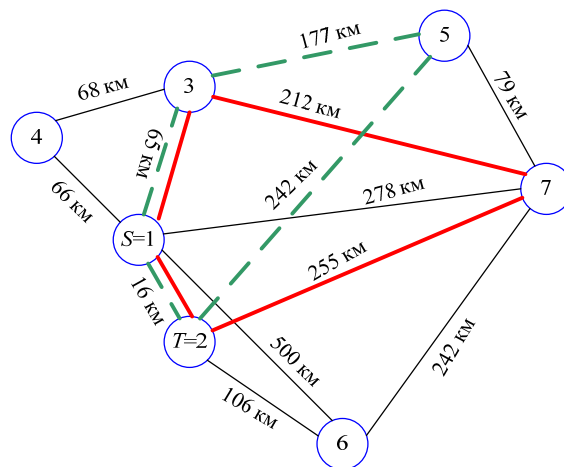


Рисунок 3.1 – Граф нахождения кратчайшего пути

Начальная точка $S = 1$, конечная точка $T = 2$. Минимальный путь 1 (на рисунке 3.1 выделен пунктирной линией): $x_1 - x_3 - x_7 - x_2 = y = T$; минимальный путь 2 (на рисунке 3.1 выделен жирной линией): $x_1 - x_3 - x_5 - x_2 = y = T$. Так как средняя скорость движения автомобиля 60 км/ч, то время в пути 1 без учета загрузки / отгрузки продукта 9,6 часа, что не удовлетворяет условию (3.3), время в пути 2 – 7,68 часа, что удовлетворяет условию (3.3).

Рассмотрим вариант, когда текущей используемой оценкой является прибыль логистической организации (рисунок 3.2): $d(x_5) = P_{1-5}$; $d(x_7) = P_{1-7}$.

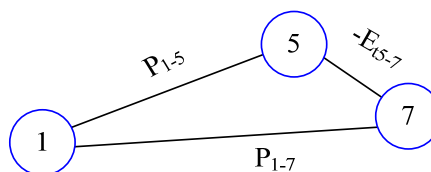


Рисунок 3.2 – Граф с отрицательной оценкой

Величина прибыли уменьшается на величину транспортных издержек на пути от пункта 5 до пункта 7: $d(x_{5-7}) = -E_{5-7}$.

Значением транспортных издержек со знаком «-» заполняются оценки, не имеющие связи с начальным пунктом движения. При расчете P_{1-5} использовался путь L_1 , при расчете P_{1-7} использовался путь L_2 , а при расчете E_{5-7} – только длина пути между пунктами 5 и 7.

Если использовать различные оценки прибыли для каждой из организации-потребителя, которые представлены на рисунке 3.1, и ограничить количество пунктов перевозки по времени,

определенном в условии (3.3), то с помощью модифицированного алгоритма Дейкстры можно определить оптимальный путь движения транспортного средства с максимизацией по прибыли логистической организации, проводя пересчет итераций для всех пунктов, согласно выражению (1.1), и используя выражения (3.1), (3.2) для оценки эффективности логистической системы.

Заключение

Предложенная методика расчета, используемый модифицированный алгоритм Дейкстры и разработанное для вычисления стоимости логистических услуг и определения прибыли деятельности логистической организации web-приложение, позволяют сделать рациональный выбор наилучшего с точки зрения получения прибыли варианта оказания логистических услуг по транспортировке молока с учетом территориального распределения организаций-производителей и организаций-потребителей.

Выполненная разработка может найти практическое применение при проработке и анализе дальнейших расчетов всего комплекса оказываемых логистических услуг по закупке и доставке молока, а также при планировании развития деятельности предприятий соответствующей специализации по регионам. Разработка подобных приложений должна способствовать увеличению прибыли организаций Республики Беларусь, сотрудничающих и включенных в молочную отрасль. Также будет оптимизирована работа отечественных логистических организаций:

упрощен трудоемкий и длительный по времени процесс их деятельности ввиду территориального расположения организаций-производителей и организаций-потребителей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аникина, Б.А. Управление цепями поставок. Теория и практика. Основы логистики: учебник / Б.А. Аникина; под ред. Т.А. Родкиной. – М.: Проспект, 2013. – 344 с.
2. Буткевич, А. Разработка методов и алгоритма расчета затрат на доставку молока от производителей потребителю-переработчику / А. Буткевич // Логистика. – 2017. – № 2. – С. 37–41.
3. Лубенцова, В.С. Математические модели и методы в логистике: учеб. пособие / В.С. Лубенцова; под ред. В.П. Радченко. – Самара: Самар. гос. ун-т, 2010. – 157 с.
4. Бродецкий, Г.Л. Экономико-математические методы и модели в логистике. Процедуры оптимизации: учеб. пособие / Г.Л. Бродецкий, Д.А. Гусев. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 195 с.
5. Мэтиз, Э. Изучаем Python. Программирование игр, визуализация данных, веб-приложения: пер с англ. / Э. Мэтиз – СПб.: Питер, 2017. – 496 с.
6. Еловой, И.А. Интегрированные логистические системы доставки грузов / И.А. Еловой. – Минск: Право и экономика, 2011. – 460 с.

Поступила в редакцию 22.12.2020.

СОЗДАНИЕ МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА И РАБОЧЕЙ НАГРУЗКИ НА ЛОКАЛЬНУЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНУЮ СЕТЬ

О.М. Демиденко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

CREATION OF MODELS OF THE COMPUTATIONAL PROCESS AND OPERATIONAL LOAD ON THE LOCAL AREA NETWORK

O.M. Demidenko

F. Scorina Gomel State University

Рассмотрено использование программно-технологического комплекса, позволяющего автоматизировать основные этапы имитационных экспериментов при проектировании, исследовании и модификации локальных вычислительных сетей (ЛВС), который включает в себя базовое программное обеспечение, проблемно-ориентированное технологическое обеспечение имитационного эксперимента, технологию использования программного обеспечения.

Ключевые слова: модель вычислительного процесса, рабочая нагрузка, локальная вычислительная сеть.

The use of a software and technological complex is considered. This complex allows you to automate the main stages of simulation experiments in the design, research and modification of local area networks (LAN), which includes basic software, problem-oriented technological support of the simulation experiment, software technology.

Keywords: model of computation process, operational load, local area network.

Введение

Анализ, проведенный в ходе проектного моделирования и эксплуатации локальных вычислительных сетей с использованием как аналитических, так и имитационных моделей, показал ограниченность возможностей исследования и адаптации вычислительного процесса под рабочую нагрузку на локальную вычислительную сеть у имеющихся в распоряжении исследователей средств моделирования [3].

В данной статье приведено описание состава и структуры программно-технологического комплекса исследований вычислительного процесса и рабочей нагрузки на локальную вычислительную сеть [5]. Показаны особенности реализации системы мониторинга параметров вычислительного процесса и рабочей нагрузки на локальную вычислительную сеть в составе предлагаемого программно-технологического комплекса исследования.

1 Базовое программное обеспечение

Для создания имитационных моделей вычислительного процесса и рабочей нагрузки на локальную вычислительную сеть был использован программно-технологический комплекс, позволяющий автоматизировать основные этапы имитационных экспериментов при проектировании, исследовании и модификации локальных вычислительных сетей (ЛВС), который включает в себя базовое программное обеспечение, проблемно-ориентированное технологическое обеспечение имитационного эксперимента и

технологию использования программного обеспечения [4], [6].

В качестве базового программного обеспечения использовалась система моделирования MICIS. Проблемно-ориентированное технологическое обеспечение имитационных экспериментов включало в себя набор библиотек: процедуры испытания и исследования свойств вновь создаваемых или модифицируемых имитационных моделей локальной вычислительной сети; типовых компонентов имитационных моделей вычислительного процесса узла сети; параметризованных имитационных моделей типового узла сети.

Библиотеки были реализованы в среде системы моделирования MICIS в виде соответствующих подсистем [1]. В них содержатся описания таких типовых элементов, как, центральный процессор (ЦП_и) и внешняя память (ВНП_и), требующих лишь указания конкретных значений параметров компонента для задания конкретного варианта функционирования имитационных моделей узла сети. Подобная библиотека позволяет конструктору моделей достаточно быстро формировать состав и структуру нового варианта узла ЛВС, используя при этом стандартные заготовки компонентов имитационных моделей вычислительного процесса в узле сети [2].

2 Классы статических компонент

Для имитационной модели узла ЛВС были взяты следующие классы статических компонент в соответствии с формальным представлением

вычислительного процесса в автоматизированной информационной системе узла:

- классы компонент, описывающие работу программных модулей (МВВ, МКО, МУД, МОБ, МОТ, МПЕ, МСЧ). При этом для каждого объекта (программного модуля) задается время обслуживания и вероятности передачи управления между модулями;

- ИБД – класс компонент, описывающий модули информационной базы данных. Для каждого модуля информационной базы данных (МИБД) задается объем $V_{ИБД}$ и матрица связей с остальными модулями (МПМ_{ij});

- ПД – классы компонент, описывающие функционирование программного обеспечения операционной системы. Предложены три класса: ПДПарал, ПДПослЦП, ПДПослБД.

Класс компонентов ПДПарал служит для имитации многозадачной работы операционной системы. Его основная функция – поквантовое выделение ресурса центрального процессора программным модулям и модулям информационной базы данных.

Два других класса служат для организации последовательной очереди к центральному процессору для соответствующих классов транзактов.

ГенерЗадан – класс компонентов для генерации транзактов, имитирующих работу различных классов пользователей.

Статические компоненты отображают путь обслуживания транзакта в системе. Были выделены два крупных класса транзактов, обслуживаемых системой: пользовательские и служебные. Класс служебных транзактов описывается компонентой На_Обр_ОС. Транзакты данного типа генерируются системой в процессе работы при необходимости обращения к программному модулю.

Пользовательский класс транзактов был разделен на три основных типа в соответствии с составом рабочей нагрузки: диалоговые, транзитные и фоновые. Каждый из типов генерировался соответствующим генератором. Для диалогового и транзитного типов случайным образом выбирался подтип транзакта. Подтипы были выделены в соответствии с функциональными действиями и отличаются в основном количеством программных модулей, обслуживающих транзакт, и передачей управления между ними.

3 Параметры имитационной модели

При задании начального состояния модели необходимо определить глобальные параметры имитационной модели:

- НагрНаУзел – задаются интенсивности поступления запросов пользователей каждого типа (для диалоговых пользователей задается время обдумывания);

- МаксКолБДнаУзлах – задает максимальное количество модулей информационной базы данных на узлах ЛВС;

- ВрЧтЗаписи – задает время обслуживания единицы информации информационной базы данных (параметр используется для расчета времени обращения к МИБД);

- КоэфСкорЦП – вектор коэффициентов скоростей центрального процессора для узлов ЛВС;

- признаки, задающие режимы работы имитационной модели: признаки ненадежной работы центрального процессора и ненадежной работы базы данных (если признак равен 0, то соответствующее устройство работает абсолютно надежно); признак распределенной обработки (не генерируются транзитные запросы, если признак равен 1).

Варьируя описанные глобальные параметры, количество компонентов и их параметры, можно исследовать влияние интенсивностей поступления заявок пользователей, коэффициентов скоростей центральных процессоров и объемов информационной базы данных на отклики имитационных моделей.

Таким образом, объектом имитации в данном случае является узел ЛВС, во внешней памяти которого могут располагаться модули информационной базы данных, связи между которыми не задаются.

В организации работы вычислительного процессора на узле ЛВС участвуют 7 типовых программных модулей ПМ_j ($j = \overline{1, 7}$):

- МВВ – ввода информации в ИБД ($j = 1$);

- МКО – корректировки информации в ИБД ($j = 2$);

- МУД – удаления информации из ИБД ($j = 3$);

- МОБ – обработки информации с использованием ИБД ($j = 4$);

- МОТ – формирования из ИБД отчетов по запросам пользователей ($j = 5$);

- МПЕ – печати информации, хранящейся в ИБД ($j = 6$);

- МСЧ – вычислительных операций на центральном процессоре без использования ИБД ($j = 7$).

Характеристики структуры запросов пользователей STR_{ij} ($t_{ОБСЛ}$, P_{ij}) задавались на основе данных, полученных в результате мониторинга. С использованием библиотеки описаний компонентов имитационных моделей узла сети оперативным образом была скомпонована имитационная модель, блок-схема которой представлена на рисунке 3.1.

4 Структура имитационной модели

Автоматическая «сборка» структуры имитационной модели вычислительного процесса узла ЛВС была обеспечена заданием значений параметров модулей ($F_{ij}(t_{ОБС})$) – функции распределения

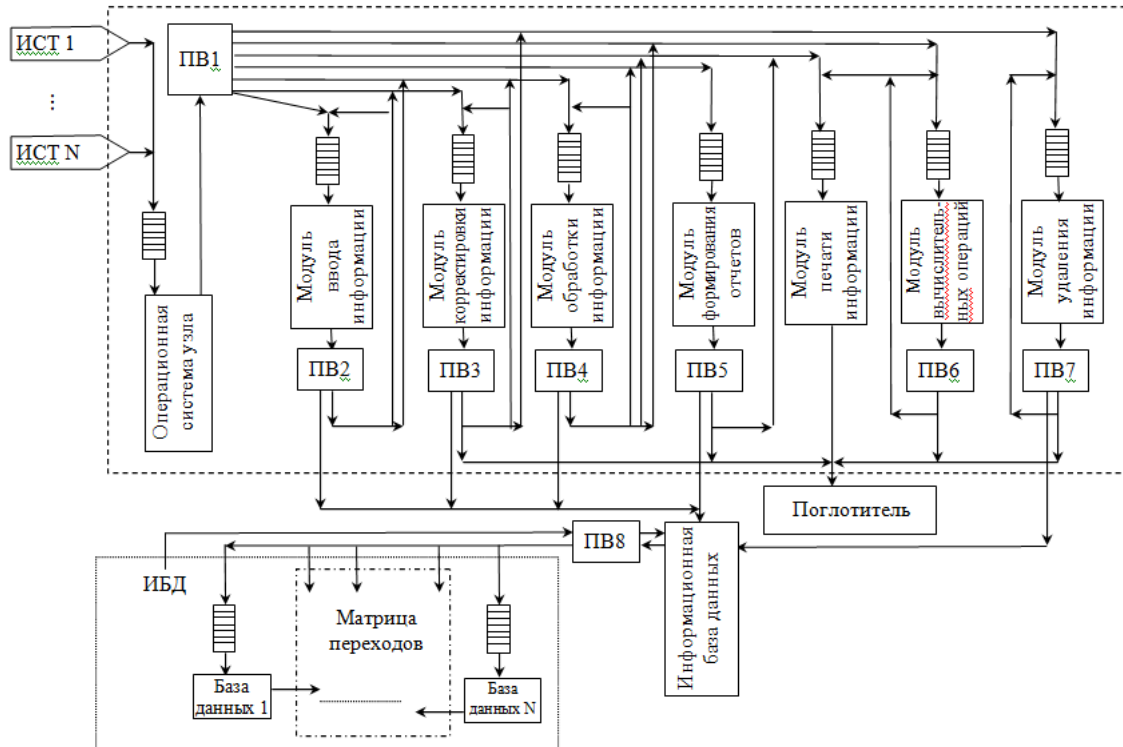


Рисунок 3.1 – Блок-схема имитационной модели узла сети

длительностей обслуживания i -го требования j -м ПМ $_j$; векторов вероятностей передачи управления между модулями) и указанием матриц (МК $_j$) коммутации ПМ $_j$ для каждого i -го типа требований.

С указанием фактических значений параметров источников требований (интенсивности поступления требований λ_i , и количество источников требований η_i) автоматически задается внешняя среда имитационной модели вычислительного процесса узла ЛВС или рабочей нагрузки на i -й узел ЛВС.

Каждому типу требований пользователей узла ЛВС соответствует свой трафик взаимодействия программных модулей ПМ $_j$ семи типов с разными вероятностями перехода (P_{ik}) транзакта i -го типа после выполнения k -го типа ПМ $_k$. Было использовано 6 типов запросов пользователей (транзактов):

- тип 0 (заказы пользователей на обработку в фоновом режиме);
- тип 1 (диалоговые запросы, использующие полный состав ПМ $_k$);
- тип 2 (диалоговые и транзитные запросы, выполняющие преимущественно специфические операции с информационной базой данных);
- тип 3 (транзитные запросы);
- тип 4 (диалоговые и транзитные запросы);
- тип 5 (диалоговые и транзитные запросы пользователей, выполняющие операции вывода на печать информации из информационной базы данных).

На блок-схеме имитационной модели вычислительного процесса в узле ЛВС показаны источники фоновых и транзитных запросов пользователей (ИС $_i$, нечетные $i = 1, 3, 5$), которые являются асинхронными, моделирующими поступление запросов согласно интенсивностям λ_Φ и λ_T .

Источники диалоговых запросов (ИД $_i$, четные $i = 2, 4$) являются синхронными, т. е. они ожидают сигнала окончания предыдущего цикла обслуживания диалогового запроса (в результате чего формируются следующие запросы через задаваемое время обдумывания $\tau_{обд}$), и, таким образом, интенсивность поступления диалоговых запросов i -го типа (λ_{ji}) может быть переменной и зависящей от операционной обстановки в вычислительном процессе узла ЛВС.

5 Конкуренция программных модулей за ресурсы

В имитационной модели вычислительного процесса узла ЛВС отображена конкуренция программных модулей за ресурсы центрального процессора и внешней памяти. Для этой цели используются устройства типа SUPZ и SUPM. Оба типа этих устройств с помощью синхротребований обеспечивают выбор из очереди синхротребований наиболее приоритетного ПМ $_k$. Эти синхротребования формируются одновременно при переходе требования от одного ПМ $_k$ к другому ПМ $_{k+1}$ таким образом, что устройства SUPZ и SUPM обеспечивают необходимую

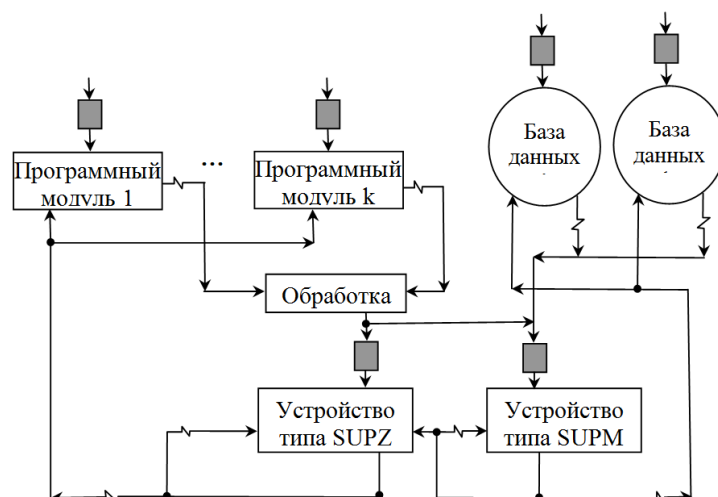


Рисунок 5.1 – Принцип реализации разделения ресурса ЦП и ИБД между запросами пользователей

дисциплину обслуживания супервизором узла ЛВС программных модулей в конкуренции $ПМ_k$ за ресурсы центрального процессора и внешней памяти.

Приведенная на рисунке 5.1 схема управления выполнением программных модулей обеспечивает такую организацию вычислительного процесса, при которой в каждый конкретный момент времени центральным процессором выполняется только один программный модуль.

Кроме того, обеспечивается учет затрат центрального процессора на работу супервизора задач и супервизора обмена ЛВС. Указанные модификации структуры имитационной модели вычислительного процессора узла ЛВС были обеспечены использованием технологической оболочки системы моделирования MICIS и наличием «заготовок» описаний фрагментов имитационных моделей вычислительного процесса в ЛВС для случая использования конкуренций за ресурсы сети. После отладки и верификации обе имитационные модели вычислительного процесса были каталогизированы в библиотеку комплекса.

Был определен состав параметров имитационной модели узла ЛВС. Взята рабочая нагрузка G , характеристики которой считаются неизменными в ходе выбора вариантов организации вычислительного процесса. Было задано ограничение о том, что в распоряжении исследователя имеется заданный состав оборудования.

В качестве управляющих параметров использовались:

λ_i – интенсивность поступления задач на обработку ($i = T; \Phi; D$);

ϑ_l – скорость работы центрального процессора l -го узла;

STR_l – структура базы данных;

$V_{ИБД}$ – объем исследуемой ИБД (малый, средний, большой).

Все параметры моделируемой системы можно классифицировать по темпу изменения и по функциональному назначению. Самым внутренним параметром является интенсивность поступления запросов пользователей в систему. Этот параметр можно динамически менять в процессе моделирования. Изменяя интенсивности поступления запросов, регулировалась внешняя нагрузкой системы.

Три типа интенсивностей задают работу трех типов пользователей автоматизированной информационной системы ЛВС. Первый тип, условно обозначенный буквой «Т», имитирует работу транзитных пользователей, т. е. тех, которые обращаются к узлу ЛВС через систему передачи данных. Второй тип, обозначенный буквой «Ф», обозначает «фоновых пользователей». Этот тип обслуживаемых запросов будет иметь место только в случае, если операционная система на узле ЛВС работает в режиме многозадачности.

Таким образом, к «фоновым пользователям» были отнесены задачи, выполняемые, в основном, в режиме многозадачности, т. е. в режиме конкуренции за ресурсы центрального процессора. Третий тип, обозначенный буквой «Д», определяет диалоговых пользователей. К ним относятся пользователи, работающие на исследуемом узле.

Следующим по важности параметром является скорость центрального процессора. В зависимости от класса решаемых задач можно менять либо скорость рабочего узла (ϑ_{pl}), либо скорости сервера и рабочих узлов (ϑ_{pl} и ϑ_s). Скорость задается в виде коэффициента ($\vartheta_{pl} = 0,66-6,66$). С точки зрения функционального назначения параметры интенсивностей и коэффициентов скоростей служат для поиска «узких» мест системы.

6 Структура информационной базы

Структура информационной базы данных является самым внешним из управляющих параметров. Она ($СТР_i$) задается количеством и типами модулей информационной базы данных (МИБД), их размещением на узлах (в случае исследования распределенной информационной базы данных) и, кроме того, объемом информации в базе ($V_{ИБД}$), скоростью обработки единицы информации базы и матрицей связей между МИБД. По функциональному назначению структура информационной базы данных служит для оптимизации архитектуры системы.

Характеристики операционной системы и характеристики программных модулей $ПМ_i$ являются задаваемыми параметрами, следовательно, редко изменяются. Характеристики операционной системы определяются через работу программы-диспетчера путем задания дисциплины обслуживания программных модулей. К характеристикам программных модулей $ПМ_i$ относятся время обслуживания каждого модуля на центральном процессоре и матрица передачи управления между модулями $M(P_{ij})$.

Заключение

Созданные таким образом имитационные модели вычислительного процесса и рабочей нагрузки на локальную вычислительную сеть при использовании системы моделирования MICIS позволили обеспечить технологическое проведение имитационных экспериментов, что дало возможность не прибегать к дорогостоящей и не всегда реализуемой процедуре проведения натуральных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко, О.М. Принципы формализации вычислительного процесса в ЛВС / О.М. Демиденко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2017. – № 6 (105). – С. 75–78.
2. Демиденко, О.М. Методика адаптации вычислительного процесса под рабочую нагрузку на узлах ЛВС / О.М. Демиденко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 96–99.
3. Хобня, А.И. Концептуальная модель механизмов обеспечения качества обслуживания в сетях с коммутацией пакетов / А.И. Хобня, В.Д. Левчук, О.М. Демиденко // Информатика. – 2016. – № 2. – С. 78–87.
4. Демиденко, О.М. Метод автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных телекоммуникационных сетей NGN / А.И. Хобня, О.М. Демиденко // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 97–102.
5. Демиденко, О.М. Технология мониторинга и адаптация вычислительного процесса под рабочую нагрузку на локальную вычислительную сеть / О.М. Демиденко. – Минск: Белорусская наука, 2002. – 193 с.
6. Левчук, В.Д. Реализация обмена данных между имитационной моделью и корпоративной информационной системой / В.Д. Левчук, Е.А. Левчук // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2010. – № 5 (62). – С. 115–118.

Поступила в редакцию 25.01.2021.

ИНФОРМАЦИОННАЯ ПОДДЕРЖКА КОНСТРУКТОРСКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ АДДИТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА: КИБЕРФИЗИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Ю.М. Кротюк¹, О.О. Кузнечик², В.В. Ткаченко¹

¹Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск

²Институт порошковой металлургии имени академика О.В. Романа, Минск

INFORMATION SUPPORT FOR DESIGN AND TECHNOLOGICAL PREPARATION FOR ADDITIVE MANUFACTURING: CYBER-PHYSICAL APPROACH

Y.M. Krotiuk¹, O.O. Kuznechik², V.V. Tkachenko¹

¹United Institute of Informatics Problems of the NAS of Belarus, Minsk

²State Scientific Institution «Powder Metallurgy Institute», Minsk

Анализируется содержание процессов конструкторско-технологической подготовки аддитивного производства, требований к информационному обеспечению системы поддержки принятия и воплощения конструкторско-технологических решений. Выдвигается и рассматривается в парадигме киберфизических систем концепция формирования гибких интегрированных аддитивных производств в виде многоуровневых матричных кластеров, организованных с использованием инфраструктуры распределенных вычислительных сетей и принципов функционирования сетевых центральных информационно-управляющих систем.

Ключевые слова: аддитивное производство, конструкторско-технологическая подготовка, киберфизическая система, автоматизированное проектирование.

The content of the processes of design and technological preparation of additive manufacturing, the requirements for the information support system for the adoption and implementation of design and technological decision is analyzed. The concept of forming flexible integrated additive industries in the form of multi-level matrix clusters organized using the infrastructure of distributed computer networks and the principles of functioning of network-centric information and control systems is proposed and considered in the paradigm of cyber-physical systems.

Keywords: additive manufacturing, design and technological preparation, cyber-physical system, computer-aided design.

Введение

Аддитивное производство – это та сфера технических инноваций, которая наряду с робототехникой и другими информационными технологиями: искусственный интеллект и машинное обучение, облачные вычисления и большие данные, кибербезопасность и дополненная реальность, Интернет вещей и умная среда обитания («умное предприятие») рассматривается в концепции «Индустрии 4.0» как одна из составляющих промышленной революции, совершающейся в процессе внедрения киберфизических систем в производство товаров и продуктов и для обслуживания человеческих потребностей. Киберфизические системы (Cyber-Physical System, CPS) – это системы, состоящие из различных природных объектов, искусственных подсистем и управляющих контроллеров, позволяющих представить такое образование как единое целое [1]–[4]. В CPS обеспечивается тесная связь и координация между вычислительными и физическими ресурсами и это является в некоторых случаях источником упрощенного понимания киберфизической системы как «цифровой трансформации», в результате которой

компьютеры осуществляют мониторинг и управление физическими процессами с использованием такой петли обратной связи, где происходящее в физических системах оказывает влияние на вычисления и наоборот. На наш взгляд необходимо согласиться с мнением [3] о том, что представление о CPS не должно ограничиваться интеграцией технических средств, пусть даже с появлением нового качества – саморегулирования, самоконфигурирования и самооптимизации. CPS меняет способ взаимодействия людей с инженерными системами, так же как Интернет изменил способ взаимодействия людей с информацией, однако люди все равно остаются главными в этом процессе. Человек, таким образом, выполняет роль «управляющего звена» высшего уровня, контролирующего работу в автоматизированных и самоорганизующихся процессах. Для этих сложных систем требуется кибернетический подход к моделированию, поскольку именно модели являются центральным моментом в науке и инженерии. CPS помогут усилить аналитические способности человека, поэтому есть потребность в создании интерактивных систем нового уровня, сохраняющих человека в контуре управления.

С этих позиций авторами анализируются требования и рассматриваются функции, которые могут и должны быть реализованы в системе информационной поддержки конструкторско-технологической подготовки аддитивного производства (КТПАП). При этом используются базовые положения теории систем автоматизированного проектирования (САПР), разработанные в Объединенном институте проблем информатики Национальной академии Беларуси (ОИПИ НАН Беларуси, в то время – Институт технической кибернетики АН БССР), а система информационной поддержки КТПАП рассматривается как САПР, по определению включающая систему управления проектом, взаимосвязанные объекты проекта и программно-технические средства для использования этих объектов в процессе производства изделий [5], [6].

В настоящее время рынок программных продуктов предлагает ряд программных приложений и систем, которые наделены таким функционалом (например, Siemens PLM, PTC Pro/ENGINEER, IBM PLM CATIA). Лежащие в их основе форматы представления данных, численные методы и алгоритмы вычислений позволяют пользователю получать цифровые описания сложных деталей, сборочных единиц и агрегатов («цифровых двойников» проектируемых изделий), а также результаты моделирования физических процессов, влияющих на формирование необходимых свойств или характеристик объектов проектирования в процессе изготовления их и эксплуатации. Преодоление вычислительной трудоемкости задач моделирования, многовариантного анализа и оптимизации достигается применением технологий параллельных и распределенных вычислений, суперкомпьютерных конфигураций, позволяющих сократить затраты времени на проектирование и добиться наилучших качественных показателей для конечного изделия. Имеется также широкий выбор более доступных по цене программных приложений для построения САПР. Как правило, конструкторская часть их достаточно универсальна. Однако, в технологической части их функционал позволяет автоматизировать лишь немногие процессы технологической подготовки, в силу чего совместимость с системами управления жизненным циклом изделия или производственной деятельностью предприятия (ERP-CALS) требует отдельного рассмотрения.

Приложения, ориентированные на технологическую подготовку производства, находятся в стадии интенсивного наращивания своих возможностей, но в некоторой степени отстают от быстрого расширения ассортимента и возможностей оборудования 3D печати. Это обостряет вопросы, которые возникают в процессе внедрения интегрированных информационных комплексов КТПАП, требующих кастомизации и

настройки под конкретные процессы подготовки производства. Нередко этот процесс требует реализации отдельной, совершенно уникальной функциональности, помощи третьей стороны для интеграции приобретаемой системы с теми программами, которые уже установлены на предприятии, или для изменения того, что имеется в системе. Ситуация по вопросу освоения аддитивных технологий, которая складывается на большинстве некрупных предприятий машиностроительного профиля, рассчитывающих на создание новых производств и выпуск конкурентоспособной продукции, лишний раз подтверждает эти положения, в то время как возможности, связанные с этим освоением, являются определяющими условиями перехода к VI технологическому укладу.

1 Аддитивное производство как объект информационных технологий

Аддитивные технологии определяют то поле проектной деятельности, на котором смыкаются перспективные конструкторско-технологические решения задачи «сборки» цельной детали или слоев исходных материалов, а по сути – синтеза нового материала («композитного» или «метаматериала») [7], [8]. При этом концепция аддитивного производства означает размытие границ между уровнями инженерно-технического проектирования (новая концепция – новый материал – производство, как показано на рисунке 1.1), что приводит к необходимости создания особой среды информационного обеспечения (средств интеграции информационных ресурсов) и пересмотра критериев разделения труда проектировщиков.

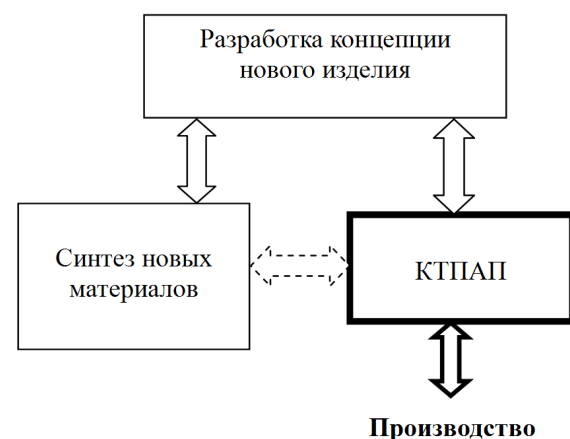


Рисунок 1.1 – Уровни инженерно-технического проектирования

Содержание конструкторско-технологической подготовки производства на различных предприятиях может существенно отличаться, так как зависит от многих составляющих и характера их деятельности: вида продукции, степени

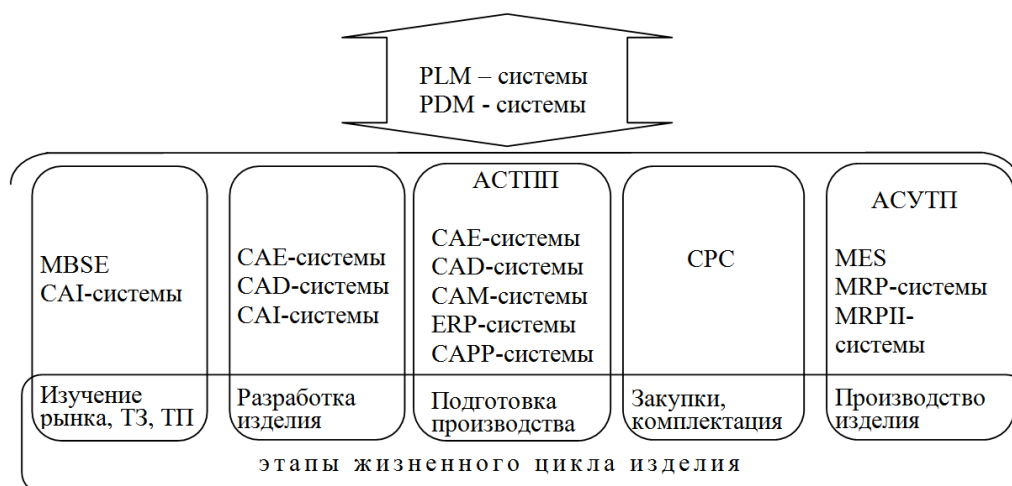


Рисунок 1.2 – Этапы конструкторско-технологической подготовки производства

унификации деталей и узлов, доступного оборудования, подготовки специалистов и другого, не исключающего конъюнктурную политику. В постановках и решениях частные задачи КТПАП могут быть разделены на организационные, производственные, дизайнерские, технологические, контрольно-испытательные, корректировочные и др., но в схеме на рисунке 1.1 они выделены общим блоком и показаны в разрезе уровней инженерно-технического проектирования, не учитывающих организационных и производственных вопросов.

Процессы конструкторского и технологического проектирования как неотъемлемые стадии продвижения любых новаций, в ходе развития вычислительной техники подверглись в наибольшей степени автоматизации благодаря относительно легкости алгоритмизации процессов инженерного расчета и перевода в цифровую форму конструкторско-технологической документации, используемой для управления программируемым оборудованием и создания информационно-поисковых систем с электронными базами данных. Это привело в свою очередь к созданию производственных комплексов с различной степенью интеграции систем информационного обеспечения КТПАП.

Безусловно, работы по внедрению интегрированных информационных комплексов КТПАП ведутся широким фронтом, но вопросы реального использования систем поддержки принятия решений на стадиях проектирования, относящихся к уровню концепции или уровню синтеза нового материала (материалов) с заданными характеристиками, в силу высокой стоимости таких систем рассматриваются в редких исключениях. Таким образом, несмотря на рост вычислительных мощностей и значимые достижения в области искусственного интеллекта, на практике концептуальное проектирование и выбор материалов из имеющейся номенклатуры, равно

синтез новых материалов и создание новых производственных технологий, остается прерогативой человека.

В проекции на «жизненный цикл» проектируемого изделия задачи, связанные с представлением объекта проектирования и показанные на рисунке 1.2, группируются следующим образом:

- изучение рынка, разработка технического предложения (ТП), технического задания (ТЗ). На этом этапе закладывается концепция будущего продукта, изделия. Он менее других этапов компьютеризирован в силу невозможности обойтись сегодня без привлечения интеллектуальных способностей человека. Именно этот этап проектирования определяет круг задач для «искусственного интеллекта» в том понимании этого термина, который его «ожидает» по мере раскрытия механизмов естественного интеллекта. Однако уже сейчас имеются программные продукты, ориентированные на поддержку решения изобретательских задач (Computer Aided Innovation, CAI) [9], [10], организации процессов концептуального проектирования, в основу которых положен междисциплинарный подход, получивший название модели-ориентированной системной инженерии (Model Based Systems Engineering, MBSE) [11];

- создание 3D моделей объекта (CAD-моделей) для работы с технологическим оборудованием аддитивного производства (3D печати), а также «цифрового двойника» для документирования, визуализации и взаимодействия специалистов в группе разработчиков. При этом необходимо иметь в виду, что исходные данные с техническим заданием могут иметь различную глубину проработки и форму представления (прототип детали, эскизная документация, 3D модель);

- моделирование технологического процесса получения этого объекта для отработки режимов 3D печати, а также последующих

технологических операций упрочнения, механообработки и т. д., влияющих на получение заданных характеристик этого объекта (изделие как таковое), построения, определения и упрощения процесса с учетом поведения объекта в этих режимах;

- моделирование поведения «цифрового двойника» объекта с целью прогнозирования его функциональных свойств как готового изделия в условиях нагружения и эксплуатации, а также уточнения и корректировки первичных моделей.

Технологическая подготовка в аддитивном производстве включает следующие этапы:

- валидация геометрии модели – визуальная и алгоритмическая проверка целостности геометрического представления модели, обеспечение заданной технологической точности;

- компоновка рабочего стола или камеры – импорт моделей в заданном объеме и с заданной точностью, приведение единиц измерений, позиционирование моделей в системе координат печатающего устройства;

- проектирование оснастки / поддержек – выявление мест, требующих проектирования дополнительной оснастки или поддержки, обеспечение наполняемости внутренних объемов;

- проверка аппаратной совместимости – проверка компоновки моделей на технологические и температурные ограничения печатающего устройства;

- генерация управляющих программ – составление и проверка числовых программ оборудования.

За редким исключением получение готового изделия в аддитивном производстве не заканчивается «спеканием», «склеиванием», «сплавлением» частиц материала (порошкового, проволоочного, пленочного). Требуется большой ассортимент основного и вспомогательного дорогостоящего оборудования: для подготовки (получения и хранения) исходных материалов, для контрольно-измерительных работ, для проведения дополнительных технологических операций (термообработки, механообработки, нанесения покрытий) с «заготовками» деталей, получаемых после 3D печати или стереолитографии. К такому оборудованию относятся различные печи, станки с числовым программным управлением, установки для упрочнения, поверхностной наплавки и др.

Установки для собственно 3D печати также отличаются большим разнообразием с учетом используемых материалов (металлических, керамических, полимерных) и процессов (селективного лазерного спекания, электронно-лучевого проплавления, фотолитографии, экструзии и др.). Технологические переходы и выбор между различными типами оборудования аддитивного производства могут осуществляться как в рамках одного производства, так и с привлечением контрагентов. Важным аспектом организации

аддитивного производства является то, что технологические операции, такие как 3D печать, отжиг, могут продолжаться сутками. Это порождает задачи составления расписаний технологических операций для загрузки оборудования, сложность решения которых «вручную» обусловлена разнородностью деталей в потоке заказов и многовариантностью построения технологических цепочек – возможно использование разного оборудования, решающего схожую задачу.

Реализация преимуществ аддитивного производства в таких условиях достигается только с применением информационных технологий последнего уровня и профессиональной готовностью специалистов к их использованию.

Даже на начальной стадии организации интегрированного в профильное предприятие элементарного аддитивного производства в качестве основного оборудования потребуется приобретение не только 3D-принтера, но и соответствующей вычислительной техники с программным обеспечением информационной поддержки КТПАП на базе программных приложений САПР (CAD/CAE/CAM) и организации внутренней локальной вычислительной сети с возможностями подключения интернета. Наличие по крайней мере одного рабочего места 3D-печати позволяет в условиях своего производства локализовать решение задач быстрого прототипирования перспективных образцов новой для предприятия продукции и минимизировать во многих случаях связанные с этим затраты. В пределах этого предприятия становление элементарного интегрированного аддитивного производства может осуществляться на базе такой административно-хозяйственной единицы, которая представляет собой, например, научно-производственную группу аддитивных технологий. В распоряжении такой группы может быть (рисунок 1.3) всего два автоматизированных рабочих места, каждое из которых имеет хотя бы одну станцию, объединенных одноуровневой локальной вычислительной сетью.

В дальнейшем, по мере перехода от быстрого прототипирования к созданию сначала экспериментальных образцов, а затем к выпуску опытных и установочных партий перспективной для профильного предприятия продукции, группа аддитивных технологий может последовательно преобразовываться в лабораторию, сектор, отдел и т. д., которые включают в себя группы или лаборатории с функциями САПР, а также производственные участки подготовки и осуществления 3D-печати. Для эффективного управления этим процессом в рамках интегрируемого аддитивного производства потребуется наращивание требований к информационно-коммуникационным связям и количеству уровней организации вычислительной сети. (Такое интегрированное аддитивное производство будет уже не элементарным).



Рисунок 1.3 – Структурная схема организуемого на базе группы аддитивных технологий элементарного интегрируемого аддитивного производства

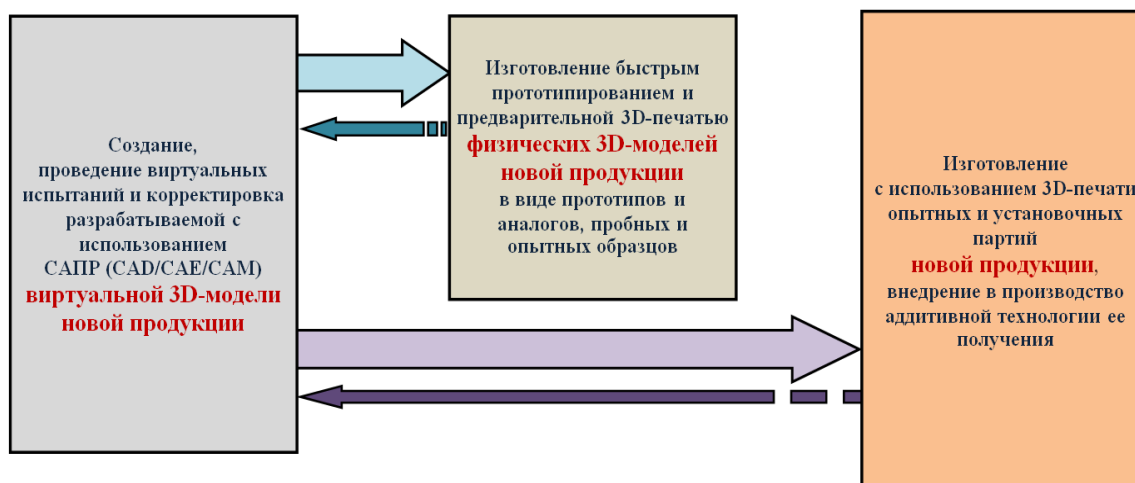


Рисунок 1.4 – Схема последовательности решения типовых задач КТПАП при внедрении в аддитивное производство вновь разрабатываемой продукции

Для поддержания требуемой производительности и надежности работы, а также минимизации простоев из-за ремонта или модернизации основного оборудования, включая устранение неполадок или обновление программного обеспечения, ответственный персонал интегрированного аддитивного производства вынужден, пользуясь интернетом, через многоуровневые районные и региональные локальные вычислительные сети обращаться к представителям либо производителя этого оборудования, либо сервисными центрами по его ремонту и обслуживанию, либо к представителю разработчика или распространителя программного обеспечения к этому оборудованию. Эти обращения связаны

с необходимостью представления им удаленного доступа и решения в режиме реального времени типовых задач:

- передача и обсуждение, в том числе и с помощью вебинара, получаемой от заказчика или разработчика 3D-модели изделия для его выпуска на профильном предприятии;
- обсуждение с представителями других аддитивных производств, использующих типовую аддитивную технологию 3D-печати или аналогичный исходный материал, в том числе и с помощью вебинара, общих технологических проблем, включая обслуживание и дистанционное управление однотипными 3D-принтерами.

Кроме вышеуказанных, при переходе к выпуску нового вида продукции ответственный персонал интегрируемого аддитивного производства может обращаться к представителям профильных научно-практических центров для решения типовых конструкторско-технологических задач (рисунок 1.4) с использованием САПР.

Ответственный персонал элементарного интегрируемого аддитивного производства также может пытаться решать и самостоятельно типовые задачи КТПАП с использованием САПР. В этом случае для снижения вероятности ошибок и сокращения времени на получение желаемого решения он будет вынужден через многоуровневые районные и региональные локальные вычислительные сети обращаться к представителям научно-практических центров развития информационных технологий для предоставления на определенное время специализированных программ и дополнительных вычислительных ресурсов с целью расширения возможностей имеющихся в его распоряжении средств информационной поддержки КТПАП.

2 Программные инструменты информационной поддержки КТПАП

Центральное место в информационно-вычислительной системе автоматизированного проектирования занимают базовые программные компоненты, приведенные на схеме рисунка 1.2. Ниже дана их краткая характеристика, которая никак не может претендовать на полноту охвата, но позволяет рассматривать направления использования применительно к аддитивным технологиям.

По функциональной полноте существующие САПР для общемашиностроительного проектирования разделяются условно на три уровня. К верхнему уровню относятся программные системы коллективного пользования сквозного проектирования и производства (тяжелые САПР). На сегодняшний день к ним относятся CATIA (Dassault Systemes); UNIGRAPHICS NX (Siemens PLM Software) и Pro/ENGINEER(PTC).

На среднем уровне располагаются программные комплексы, которые позволяют создавать трехмерные параметрические модели сравнительно несложного изделия методом твердотельного моделирования, выполнять проверочные расчеты деталей и сборок: Solid Works (SolidWorks Corp., США), AutoCAD Inventor и Autodesk Mechanical Desktop (AutoDesk, США), Solid Edge (Siemens PLM Software, Германия), T-FLEX (Топ Системы, Россия), КОМПАС-3D (Аскон, Россия) и др. Эти САПР относятся к категории индивидуального пользования.

К нижнему уровню (легкие САПР) могут быть отнесены программы для автоматизации разработки и сопровождения технической документации (чертежей и спецификаций, технологических карт, ведомостей). Например: AutoCADLT

(AutoDesk), T-Flex CAD 2D (Топ Системы), КОМПАС-График (Аскон), CADMECH (Интермех). САМ-системы, предназначенные для подготовки управляющих программ оборудования с числовым программным управлением, могут быть в виде автономных программ или интегрированных с другими программными приложениями, поддерживающими широкий список импортируемых форматов 2D и 3D геометрической информации: как проприетарных (SolidWorks, Parasolid, DWG, NX и других) при наличии соответствующих трансляторов, так и открытых (STEP, IGES) форматов.

Типовая структура автоматизированной системы технологической подготовки производства (АСТПП) включает:

- информационно-поисковую подсистему, являющуюся базой данных для работы остальных подсистем;

- подсистему автоматизированного проектирования технологического оснащения, предназначенную для разработки конструкции ступеней, штампов, кондукторов, прессформ, спецфрез и т. д.;

- подсистему автоматизированного расчета управляющих программ для оборудования с числовым программным управлением, применяемого при изготовлении как технологического оснащения, так и элементов конструкции изделий;

- подсистему автоматизированного проектирования технологических процессов для разработки маршрутных технологий, операционных технологий, оформления карт, ведомостей и другой технологической документации.

Примерами АСТПП являются ADEM (Группа компаний ADEM), T-Flex Технология (Топ Системы), Компас Вертикаль (Аскон). Среди примеров программ, ориентированных на применение в аддитивном производстве, необходимо указать ATSS (Национальный исследовательский университет МАИ, Россия), Digimat (eXstream engineering), Additive Manufacturing (ESI Group), Simufact Additive (MSC&Software Company). Последние два примера – логичное расширение линейки программных продуктов этих же компаний от задач моделирования сварочных процессов и термической обработки к аддитивным технологиям.

Применение CAD/CAM-систем тесно связано с системами инженерного анализа (CAE). Основой CAE-систем являются различные численные методы расчетов: метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод конечных объемов. Используя инструменты CAE-приложений, инженер может оценить работоспособность будущего изделия, не прибегая к значительным временным и денежным затратам на изготовление и испытания экспериментальных образцов. В системах полнофункционального инженерного анализа, обладающих мощными средствами,

большими хранилищами типов для сеток конечных элементов, а также всевозможных физических процессов предусмотрены собственные средства моделирования геометрии. Кроме того, есть возможность импорта через промышленные стандарты Parasolid, ACIS. Самыми известными среди подобных систем считаются ANSYS, LS DYNA, AI*NASTRAN и MSC.NASTRAN, ADAMS, Marc.

Средства инженерного анализа, которые включены в тяжелые САПР, имеют возможно менее мощный функционал, но благодаря единству описания геометрии позволяют сразу отслеживать изменения модели. Расчетные данные структурированы и интегрированы в общую систему проектирования САПР. В отдельных случаях CAE-систем, оперирующих с данными в собственных форматах, используется встроенный инструментариий CAD-системы, в других – обеспечивается считывание геометрических описаний в обменных форматах из CAD-приложений.

Для максимально полного использования возможностей аддитивных технологий ведущие разработчики САПР-приложений предлагают пользователю программные продукты с функциями топологической оптимизации, под которой понимается процесс изменения конструктивных элементов с целью снижения массогабаритных характеристик и улучшения функциональных особенностей без снижения прочности и долговечности изделия. Такие возможности открываются для специалистов, готовых к применению новых подходов к проектированию деталей – бионического дизайна – практически со всеми упомянутыми выше программами [12], [13].

В общем случае инструментариий современных CAE-систем позволяет решать те или иные проектные задачи, в т. ч. связанные с моделированием процессов 3D печати. (Для этого разработчиками CAE-систем предлагаются специальные приложения как надстройки или программные оболочки для базового комплекса). Однако применение их требует очень высокой квалификации проектировщика и не только большого опыта его работы с CAD/CAE-приложением, но и знания особенностей используемого процесса 3D печати, свойств материала и характеристик конкретного оборудования. Как правило, производитель предоставляет свое оборудование, комплектую его технологическим программным обеспечением, рассчитанным на применение определенного материала или его ограниченной номенклатуры. Особенности же используемого процесса обработки материала остаются для потребителя скрытыми, что усложняет выбор параметров рабочего режима 3D печати.

Действующими стандартами аддитивного производства определены выходные форматы файлов описания рабочих 3D моделей (STL, VRML, WRL, IGES, AMF, X3D), а программное

обеспечение нижнего уровня, как правило, ориентировано на систему команд G-code, широко применяемую в автоматизированном производстве и поддерживаемую в САМ-приложениях. В то же время формат данных управляющих программ может зависеть от модели 3D принтера и функционала его встроенных программно-аппаратных средств.

Оценивая возможности использования рассмотренных программных продуктов с позиции потребителя, перед которым стоит задача создания цифрового двойника изделия и получения образца такого изделия с требуемыми характеристиками за минимальное количество итераций, можно говорить о проблемах, с которыми он сталкивается на пути внедрения аддитивных технологий.

Основными недостатками доступного для большинства небольших предприятий и проектных организаций общемашиностроительного профиля программного обеспечения КТПАП являются:

- отсутствие достаточного объема сведений об алгоритмах и методиках расчета, необходимых для инженерно обоснованного и осознанного их применения;
- ограничения базы данных по номенклатуре материалов, оборудования или связям с нормативными документами, используемыми на предприятии, что усложняет выбор проектных решений, другие программные ограничения по точности расчета и функциональности;
- отсутствие гарантированной технической и пользовательской поддержки и возможности оперативных доработок, непрозрачный механизм ценообразования под частные задачи пользователя или новые производства;
- невозможность расширения функциональности силами пользователя для проведения специальных инженерных расчетов, в том числе связанных с модернизацией или применением специализированного технологического оборудования 3D печати.

Применение современных методов и средств проектирования изделий на предприятиях связано с необходимостью согласования технологических схем проектирования с методологиями проектирования и инженерного анализа, реализованными в составе используемых программных продуктов. Специфика работы многих отечественных проектных организаций общемашиностроительного профиля заключается в вынужденном использовании нескольких CAD-систем, а также пакетов математического моделирования и программных инструментов для проведения инженерных расчетов и исследований. Отсутствие единой среды разработки приводит к разнобразию методологий проектирования и настроек рабочей среды, формирующих индивидуальный стиль, которое мешает групповой работе.

Очевидно, что необходимо наличие программных решений, которые обеспечили бы возможность построения интегрированных сред проектирования самими проектировщиками с учетом специфики решаемых ими задач, возможность их развития и адаптации при проектировании сложных технических объектов.

С этой целью в ОИПИ НАН Беларуси проводились исследования по формированию интегрированной среды информационной поддержки процессов проектирования и инженерного анализа конструкций сложных технических объектов (ИСППИА) [14]. Такая среда предназначена для обеспечения совместного функционирования приложений от различных разработчиков и настройки ее инструментов и конфигурации согласно нуждам предприятия. Процесс проектирования и инженерного анализа конструкции осуществляется в рамках единого графического интерфейса и на основе единой базы данных, доступных для графического моделирования с пакетами инженерного анализа и специализированными приложениями для расчетов и оптимизации параметров элементов конструкции и конструкции в целом.

Условием успешности реализации процесса КТПАП является следование основным принципам создания автоматизированных информационных систем:

– *принципа системного единства*. Все элементы комплексной системы являются частями единого целого, где функционирование отдельных блоков подчинено общей цели – созданию изделий с заданными свойствами и характеристиками;

– *принципа модульности*. Модульная структура позволяет добиться их относительной независимости модулей в процессе функционирования и минимизирует затраты, связанные с изменениями в процессе сопровождения;

– *принципа открытости*. Система может быть расширена за счет добавления в нее новых элементов по мере развития технологий;

– *принципа эргономичности*. Модульная структура обеспечивает удобство и правильное разделение функций между пользователями (конструкторами, технологами), участвующими в процессе.

Дополнительно можно отметить принцип применения групповой технологии. Применение групповой технологии подразумевает классификацию деталей в группы, представляющие собой совокупность объектов, подобных друг другу по геометрической форме, размерам и технологическим процессам их изготовления. Отнесение детали к существующей группе на основе ее формы и размеров позволяет быстро найти в технологической базе данных предприятия последовательность процессов, используемых для изготовления похожих деталей и модифицировать ее для изготовления новой детали.

По результатам НИР, выполненной в рамках государственной научно-технической программы и программы научных исследований, на основе совокупности математических и инструментальных средств (в том числе, на базе отраслевых суперкомпьютерных конфигураций) создан экспериментальный образец такой системы ИСППИА:

– объединены в рамках единого графического интерфейса и на основе единой базы данных инструментальные программные средства построения интегрированной среды: среда графического моделирования, пакеты инженерного анализа и специализированные приложения, используемые в заданной предметной области для реализации процедур расчетов и оптимизации параметров элементов конструкции и конструкции в целом;

– разработаны алгоритмы функционирования ИСППИА в режиме клиент-серверного приложения;

– проведено тестирование экспериментального образца среды на реальной информации о проектируемых объектах.

Архитектура ИСППИА отвечает перечисленным выше принципам построения автоматизированных информационных систем. Для сборки компонентов и обеспечения их совместного функционирования используется программа, именуемая платформой распределенных компонентов. Эти средства, будучи апробированы при создании САПР инструментов поперечно-клиновой прокатки, успешно использовались при создании интегрированной среды проектирования и инженерного анализа машиностроительных конструкций для агротехники и могут служить базой для создания эффективной специализированной системы компьютеризации инженерного труда для решения конструкторско-технологических задач аддитивного производства.

3 Формирование гибкого матричного кластера в условиях развития интегрируемого аддитивного производства

Одним из решающих обстоятельством является то, что подготовка и выполнение конструкторских и технологических операций в аддитивном производстве должны осуществляться в тесном взаимодействии специалистов с разных рабочих мест. Оперативная взаимосвязь их может быть организована только с применением сетевых технологий. В задании на построение такой сети необходимо принять во внимание, что в ней целесообразно выделить несколько (виртуальных) подсетей, ориентированных на решение отдельных задач:

– сеть для специалистов, решающих конструкторско-технологические задачи;

– сеть обеспечения технологического процесса;

– сеть сервисного обслуживания и ремонта.

Характеристики компьютерной сети должны обеспечивать оперативное взаимодействие территориально разнесенных пользователей с учетом неравномерности ее загрузки. Набор программных приложений, определяемый перечнем задач КТПАП, целесообразно дополнить специализированным приложением-путеводителем, содержащим справочные сведения по кадровому составу и компетенциям специалистов, которая выполняла бы роль агрегатора рабочих мест в пределах каждой из подсетей для быстрого выполнения задач или решения возникающих при этом проблем.

Важнейшее требование при организации корпоративной сети – сделать максимально эффективной, эргономичной и защищенной работу предприятия или организации. Нередки ситуации, когда усилия, затраченные на организацию внутренней сети, сопровождаются издержками из-за неправильного подхода к реализации потенциальных преимуществ использования корпоративной сети, а именно: повышения производительности труда за счет грамотной организации параллельных вычислительных процессов, чего невозможно достичь при наличии мощных, но автономных вычислительных устройств; устойчивости к сбоям и отказам отдельных элементов, объединенных в единой системе, за счет дублирования данных на различные типы сетевых носителей и переключения запросов и процессов на работоспособные сегменты внутренней сети.

Выполнение одновременно большого количества различных задач, имеющих целью общий результат, существенно ускоряется, когда между различными структурами и подразделениями организации налажена бесперебойная коммуникация. При этом проще осуществлять контроль коммерческой и технической безопасности, защиту важных корпоративных данных, имея доступ ко всем программным и аппаратным элементам и периферийным устройствам одновременно.

Принимая во внимание разветвленность, производительность и иерархичность у имеющихся и создаваемых многоуровневых вычисли-

тельных сетей, которые привели к появлению облачных технологий, следует полагать, что необходимость решения указанных выше типовых информационно-технологических задач для элементарных интегрируемых аддитивных производств при увеличении их количества, с последующим переходом в многоуровневые гибкие аддитивные производства, неизбежно приведет к появлению, пусть даже и на ограниченное время, двух и более гибких матричных кластеров (рисунок 3.1). Один из них будет охватывать информационно-технологические задачи виртуального моделирования и прогнозирования, а другой – перепрограммирование, диагностику и настройку (калибровку) 3D-принтеров, включая контроль за режимами 3D-печати и устранение возникающих при этом аварийных ситуаций. Отметим, что увеличение количества элементарных (одноуровневых) с последующим возможным их преобразованием в более сложные (многоуровневые) интегрируемые аддитивные производства будут только поддерживать развитие этих гибких матричных кластеров.

Пример организации ячейки элементарного гибкого матричного кластера на базе локальной компьютерной сети приведен на рисунке 3.2. Для практической ее реализации выбрана и апробирована сетевая архитектура, обеспечивающая локализацию обмена данными и надежную их передачу между территориально разнесенными рабочими местами на технологических участках аддитивного производства Института порошковой металлургии имени академика О.В. Романа и высокопроизводительными вычислительными комплексами Республиканского суперкомпьютерного центра ОИПИ НАН Беларуси.

Гибкость кластерных решений для интегрируемого аддитивного производства состоит в создании новых возможностей и способов выполнения прикладных задач, в том числе, в возможности, при необходимости, подключения их вычислительных ресурсов и облачных технологий для решения той или иной возникшей проблемы на каком-либо другом гибком аддитивном производстве, условно выступающим в качестве

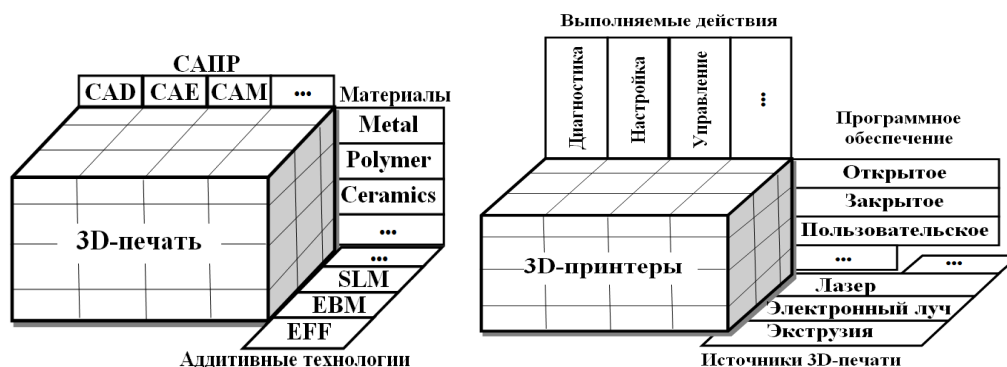


Рисунок 3.1 – Матричная структура формирования гибких кластеров интегрируемых аддитивных производств

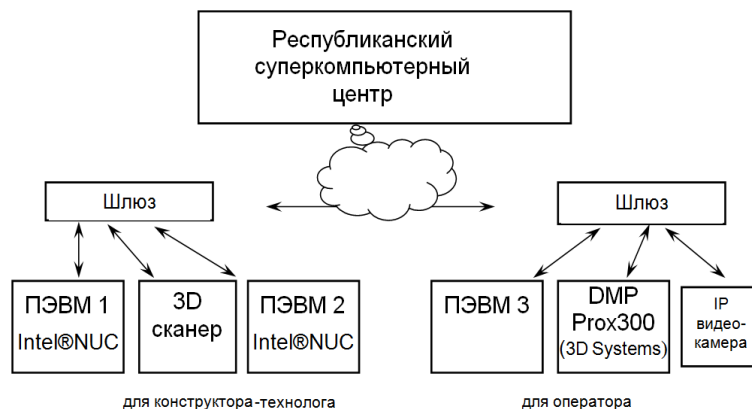


Рисунок 3.2 – Блок-схема ячейки элементарного гибкого матричного кластера

абонента. В таком представлении ситуации указанные кластеры следует рассматривать в сетевцентрической парадигме матричных информационно-управляющих систем (ИУС) [15].

Основой матричной архитектуры является решетка (грид-архитектура), в которой осуществляется как вертикальная связь между источниками информации, узлами принятия решений и исполнительными органами, так и горизонтальная интеграция между поставщиками, обработчиками и пользователями информации, работающими во взаимодействии с распределенным «многоядерным процессором» по предоставленному абонентом удаленному доступу. Особенностью такого «процессора» будет являться то, что в качестве одного из его ядер могут выступать вычислительные ресурсы входящего в гибкий матричный кластер какого-либо участка аддитивного производства.

Преимущества сетевцентрического управления реализуются при:

- наличии общих целей предприятия и отсутствии четкого планирования для нижестоящих уровней управления;
- взаимодействии и параллельности работы руководителей различного уровня и различных подразделений или лиц, принимающих решения, не имеющих четкой структуры подчиненности;
- координации деятельности руководителей и объектов управления с использованием возможностей глобальных информационных сетей;
- согласовании индивидуальных решений подсистем, каждая из которых работает на свою цель и выполняет свои задачи;
- самоорганизации системы за счет хорошо налаженного обмена информацией между ее компонентами и способности к быстрой их реорганизации в случае необходимости.

Сетевцентрические ИУС благодаря мерам, предусматривающим их устойчивость к частичным отказам каналов связи, высокий уровень защиты от несанкционированного доступа, перекрестный анализ данных, повышающий их достоверность, обеспечивают полноценный доступ к

информации, необходимой для вовлеченности каждого звена системы и понимания каждым общей стратегии и тактики, чтобы оперативно делегировать существенную часть полномочий по принятию решений нижним звеньям иерархической системы управления, вплоть до исполнителей, которые являются объектами управления.

Важное место в решении этих задач, помимо согласованию программных интерфейсов (API), отводится организации человеко-машинных интерфейсов, рассчитанных на разный уровень подготовки и специализацию участников, а также использованию элементов «искусственного интеллекта». Последнее согласуется с парадигмой киберфизических систем и означает, что заказы на выпуск изделий выполняются не по готовым или известным конструкторско-технологическим решениям, а по результатам проектирования «с нуля», то есть подготовки технического задания с привлечением моделей MBSE, инструментов извлечения и формирования «знаний» о физико-химических процессах и оборудовании аддитивных технологий, в том числе с использованием самой последней информации, доступной из глобальной сети интернет. Актуализация знаний в предметной области является важной конкурентной и прогностической составляющей в принятии проектных решений.

4 Интегрированная среда информационной поддержки конструкторско-технологической подготовки аддитивного производства

Интегрированная система информационной поддержки процессов КТПАП представляет собой операционную среду (рисунок 4.1) с набором инструментальных средств (программных компонент) для компьютеризации инженерной деятельности и позволяет реализовать ряд функциональных задач, возникающих при конструкторско-технологическом проектировании:

- создания и ведения базы нормативных данных;
- управления процессом выполнения проектных процедур;

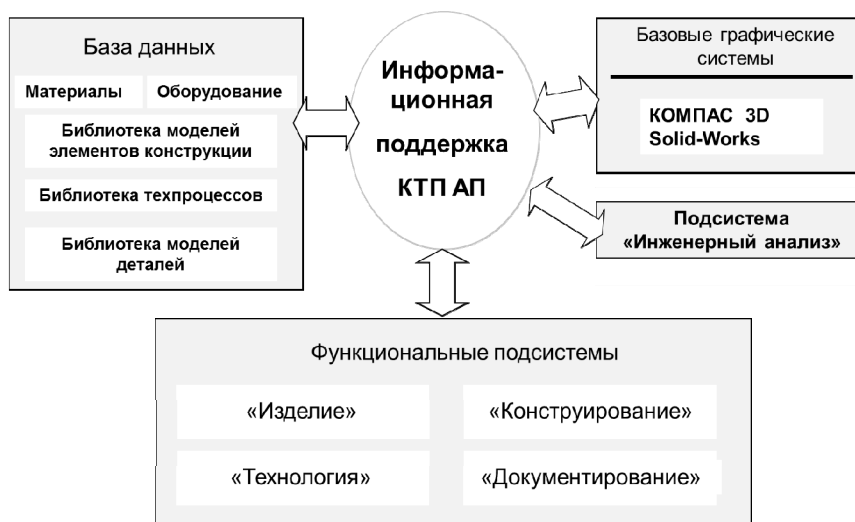


Рисунок 4.1 – Компоненты системы информационной поддержки КТПАП

- ведения библиотеки моделей элементов конструкции, типовых узлов, и проектов-аналогов;
- поддержки процессов формирования конструкции из типовых элементов;
- поддержки процессов расчета параметров элементов конструкции;
- поддержки процессов расчета параметров конструкции;
- поддержки процессов подготовки данных для инженерного анализа элементов и узлов конструкции;
- поддержки процессов формирования и документирования результатов инженерного анализа конструкции;
- автоматизации процесса формирования спецификаций конструкции;
- поддержки процесса формирования технологической документации.

Основными принципами создания ИСПИА являются:

- информационная и техническая совместимость средств, используемых в составе ПО;
- унификация, типизация и стандартизация средств и подсистем;
- максимально возможная инвариантность к проектируемым объектам и отраслевой специфике;
- возможность развития используемых библиотек элементов конструкции конструктором в процессе эксплуатации;
- модульная структура ПО.

Управление всеми процессами информационного обмена обеспечивает программа-менеджер из состава комплекса, в т. ч.:

- информационную поддержку процессов описания и подготовки данных для проектирования элементов конструкции;
- хранение нормативных данных и библиотек параметризованных 3D моделей элементов конструкции и сборочных узлов;

- совместное функционирование программных приложений и взаимодействие между функциональными подсистемами в процессе реализации проектных процедур, предоставление информации автоматизированным системам, задействованным в процессе проектирования;
- реализацию расчетных процедур, генерацию отчетов.

Основой реализации проектных процедур является метод декомпозиции – разбиения проектируемого изделия на составные элементы (детали) и группы элементов (сборочные единицы) и дальнейшего проектирования элементов изделия для выделенных элементов (групп элементов) с последующим решением задачи сборки изделия из элементов и групп.

Для обеспечения поддержки процессов инженерного анализа конструкций и выполнения прочностных расчетов используются программные средства расчета элементов конструкций, программные средства расчета конструкций и программные средства подготовки расчетных данных для пакета LS-DYNA. Данные программные средства обеспечивают интеграцию инженерных пакетов ANSYS и LS-DYNA с базовой системой геометрического моделирования и позволяют проводить численное моделирование конструкций в различных постановках (одномерный или трехмерный случай на базе конечных элементов типа BEAM, трехмерный случай на базе конечных элементов типа SOLID).

Взаимодействие пользователя с системой осуществляется посредством графического интерфейса, обеспечивающего наглядное, интуитивно понятное представление структуры размещенной в системе информации, быстрый и логичный переход к базовым и дополнительным функциям.

Следует иметь в виду, что используемые компоненты можно также модифицировать

независимо друг от друга для наращивания функций, но при этом необходимо учитывать общие требования, предъявляемые к их структуре и форме взаимодействия друг с другом.

Структура комплекса допускает расширение, совершенствование и обновление средств автоматизации проектирования без изменения основной части комплекса. При этом важным аспектом является возможность совершенствования и адаптации к условиям конкретного производства самими пользователями (соответствующими подразделениями предприятия-потребителя).

Такая возможность базируется на применении в системе доступных с точки зрения потребителя программных сред, применении легко корректируемых потребителем БД и использовании в процессе создания программных средств унифицированных решений по структуризации объекта проектирования и интерфейсам пользователя в процессе работы с этими структурами.

Комплексирование средств компьютерной графики и геометрического моделирования по предложенной схеме позволяет охватить этапы конструкторско-технологического проектирования сложных технических объектов, изготовление которых связано с выбором различных цепочек и режимов технологических операций с использованием импульсно-плазменной и импульсной селективной лазерной обработки материалов-геттеров, и автоматизировать выполнение перечисленных ниже функций:

- создания и ведения базы данных, обеспечивающей хранение библиотечных сборочных моделей конструктивных элементов и моделей элементов конструкции, а также шаблонов их чертежей, хранение параметров проектов конструкций и файлов моделей этих проектов;
- создания нового проекта или открытия существующего, закрытия и сохранения проекта;
- редактирования текущего проекта путем добавления, замены, удаления элементов конструкции с применением специальных форм;
- редактирования элементов конструкции проекта путем ввода, замены, удаления значений параметров с применением специальных табличных форм;
- редактирования рабочей базы данных проекта;
- выполнения задачи расчета параметров геометрических моделей проектируемых элементов конструкции;
- справочной поддержки конструктора в процессе работы;
- взаимодействия со средой геометрического моделирования конструкций: открытие, переключение моделей элементов конструкции, создание сборочных конструкций;
- автоматизации и информационной поддержки процессов расчета параметров элементов конструкции;

– поддержки процессов оптимизации параметров конструкции, которая осуществляется путем вариации параметров формы, размеров и свойств конструкции;

– выявления мест, требующих проектирования дополнительной оснастки или поддержки;

– проверки компоновки моделей на технологические температурные ограничения печатающего устройства;

– составление и проверки числовых программ печатающего оборудования;

– поддержки процессов инженерного анализа элементов (включая подготовку данных для расчета напряженно-деформированного состояния конструкции, проведение прочностных расчетов балочных элементов и объемного изделия);

– удаленной поддержки процессов инженерного анализа унифицированных элементов для сложных задач с использованием вычислительных мощностей высокопроизводительной мультипроцессорной вычислительной системы класса «СКИФ К-1000»;

– поддержки процессов выпуска конструкторской документации (чертежи, спецификации) по результатам проектирования;

– предоставления информации автоматизированным системам, задействованным в процессе проектирования.

Автоматизация соответствующих проектных функций в рассматриваемой технологии реализуется набором компонент – библиотекой, базовыми компонентами которой могут служить образцы инструментальных программных средств, разработанные в ОИПИ НАН Беларуси. Для сборки компонент и обеспечения их совместного функционирования используется программа, именуемая платформой распределенных компонент.

Совместимость конструкторской, расчетной и технологической моделей при организации взаимодействия между системами CAE/CAM в интегрированной среде позволяет охватывать полный цикл подготовки аддитивного производства, включая функции компоновки рабочей камеры оборудования, генерацию послойного представления модели с дополнительными поддерживающими элементами будущей детали и составления управляющих команд в форматах данных для используемого оборудования.

Базовые функции дополняются также программно-алгоритмическими средствами, в которых учитывается специфика процесса 3D печати для металлургических принтеров с использованием высокомоментных концентрированных потоков энергии. Среди программ, позволяющих решать задачи анализа термо-нагруженного состояния, прогнозирования напряжений, расчета прочности и деформаций изделий из металлических порошков, необходимо выделить ESI Additive Manufacturing и Simufact Additive. Эти

программы представляют собой интегрированные вычислительные платформы для моделирования процесса послойного наращивания детали из металлических частиц. В частности, средствами Simufact Additive поддерживается моделирование технологического процесса спекания частиц порошка с учетом всех его физических характеристик, включая процессы селективного лазерного плавления (Selective Laser Melting, SLM), прямого лазерного спекания металлов (Direct Metal Laser Sintering DMLS), селективного лазерного плавления металлических порошковых материалов (LaserCUSING), электронно-лучевого плавления (Electron Beam Melting, EBM). При этом Simufact Additive поддерживает импорт высокоточных моделей большой размерности для деталей вместе с поддерживающими элементами из практически любой CAD системы с различными форматами файлов: IGES, STL, STEP, Catia V4/V5/V6, Unigraphics, SolidWorks, ACIS, Autodesk Inventor, Parasolid и дает возможность:

- вычислить деформации детали и уменьшить или вообще избежать искажения ее формы;
- выбрать оптимальное направление печати;

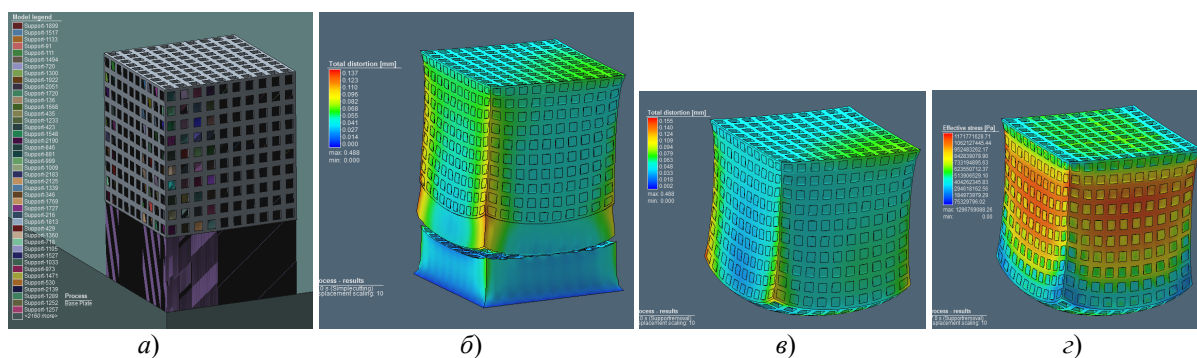
– оптимизировать поддерживающую структуру;

– получить состояние детали после термической обработки, удаления опорной пластины и поддерживающих элементов;

– минимизировать остаточные напряжения;

– уменьшить затраты материалов и энергии в процессе производства.

В результате расчета вычисляются коробление в детали, напряжения, визуализируется ее деформация с любым масштабным множителем. Следующим шагом является корректировка исходной модели путем внесения в ее геометрию рассчитанных деформации с обратным знаком. Экспорт описания детали с деформированной геометрией позволяет подобрать такую исходную форму детали, которая после процесса печати даёт минимальное отклонение от требуемой, компенсируя коробление, возникающее при создании этой детали. Результаты моделирования средствами Simufact Additive на примере ячеистой детали из металлического порошка, подготовленной нами в качестве прототипа материала-геттера, приведены на рисунке 4.2.



а) исходная модель с основанием и поддержками;
 б) общая деформация после удаления основания;
 в), г) – общая деформация и внутренние напряжения после удаления поддержек
 (деформации детали относительно габаритных размеров показаны в масштабе 10:1)

Рисунок 4.2 – Моделирование детали с ячеистой структурой

Важным является также то, что технология Simufact Additive встраивается в общую линейку программного обеспечения MSC Software, в частности, комбинируется с топологической оптимизацией, которую можно моделировать в программной среде MSC Nastran. Таким образом, можно спроектировать деталь ажурной формы, которая обеспечит эффективное использование материала, и промоделировать процесс послойного изготовления такой детали согласно особенностям той технологии нанесения материала, которой соответствует выбранный тип оборудования 3D печати.

Заключение

Проведенный анализ конструкторско-технологических задач, решаемых в процессе подготовки производства изделий с использованием

аддитивных технологий, позволил определить базовый состав функций, выполнение которых должно быть автоматизировано в системе информационной поддержки КТПАП, а также направление развития гибких интегрированных аддитивных производств, учитывающее возможности внедрения информационно-управляющих систем на основе матричной архитектуры и расширения круга предприятий, осваивающих аддитивное производство.

Предложена концепция формирования гибких интегрированных аддитивных производств в виде многоуровневых матричных кластеров, организованных с использованием распределенных вычислительных сетей и принципов функционирования сетевых информационных управляющих систем, предоставляющих возможности использования готовой инфраструктуры

поддержки распределенных вычислений (грид-сети), средств обеспечения защиты данных и информационной безопасности кластерных решений аддитивного производства.

Показана необходимость создания особой, опирающейся на парадигму киберфизических систем, среды информационного обеспечения процессов КТПАП, что обусловлено синергией условий решения конструкторских и технологических задач, быстрым накоплением новых знаний в сфере аддитивных технологий и уточнением в связи с этим моделей управления процессом проектирования. Определены компоненты и структура интегрированной среды информационной поддержки процессов КТПАП в разрезе этапов жизненного цикла изделия и с учетом результатов апробации программных приложений с применением высокопроизводительных вычислительных систем, на которых продемонстрированы возможности использования ранее разработанных инструментальных средств интегрированной среды информационной поддержки процессов проектирования и инженерного анализа конструкций сложных технических объектов, а также заимствованных программ для анализа «поведения» детали, получаемой по аддитивной технологии из металлического порошка, на примере моделирования ее «цифрового двойника».

ЛИТЕРАТУРА

1. Дробот, В.С. Перспективы развития киберфизических систем / В.С. Дробот // Control Engineering Россия. – 2018. – № 5 (77). – С. 30–31.
2. Manganello, K. Will Industry 5.0 Really Be Revolutionary? / K. Manganello // IT Tomas [Электронный ресурс]. – 2019/09/10. – Режим доступа: <https://www.thomasnet.com/insights/will-industry-5-0-really-be-revolutionary/>. – Дата доступа: 15.01.2021.
3. Черняк, Л. Киберфизические системы Cyber-Physical System, CPS / Л. Черняк // Деловой портал [Электронный ресурс]. – 2017/08/17. – Режим доступа: <https://www.tadviser.ru/a/374827>. – Дата доступа: 15.01.2021.
4. Индустрия 4.0 в Беларуси: быть или не быть? / Экономическая газета. 2019. – 18.05.2019. – С. 1.
5. Автоматизация проектно-конструкторских работ и технологической подготовки производства в машиностроении: в 2 т.; под ред. О.И. Семенкова. – Минск, 1976.
6. Семенков, О.И. Введение в системы автоматизации проектирования / О.И. Семенков. – Минск: Наука и техника. – 1979. – 88 с.

7. Ильющенко, А.Ф. Аддитивные технологии и порошковая металлургия / А.Ф. Ильющенко. – Минск: Медисонт. – 2019. – 268 с.

8. Дресвянников, В.А. Классификация аддитивных технологий и анализ направлений их экономического использования / В.А. Дресвянников, Е.П. Страхов // Модели, системы и сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2018. – № 2 (26). – С. 16–28.

9. Зарипова, В.М. Классификация автоматизированных систем поддержки инновационных процессов на предприятии (COMPUTER AIDED INNOVATION – CAI) / В.М. Зарипова, И.Ю. Петрова, Е.С. Цырульников // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. – 2012, № 2. – С. 26–35.

10. Кобликов, И.А. Автоматизированные системы поддержки этапа концептуального проектирования / И.А. Кобликов, С.А. Фоменков, Д.М. Коробкин // Наука сегодня: проблемы и перспективы развития : сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции, г. Вологда, 25 ноября 2015 г.: в 3 ч. Ч. 1. – Вологда: ООО «Маркер», 2015. – С. 30–33.

11. Шейников, С. Реализация практик модели-ориентированной системной инженерии в комплексном PLM-решении от Siemens Digital Industries Software / С. Шейников // CAD/CAM/CAE Observer #6 (138) 2020. – С. 39–43.

12. Обзор софта для топологической оптимизации и бионического дизайна / Top3DShop [Электронный ресурс] 27 апреля 2018 в 10:00. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/company/top3dshop/blog/411999/>. – Дата доступа: 15.01.2021.

13. Бобков, И. Топологическая оптимизация или генеративный дизайн? / И. Бобков // isicad:: Ваше окно в мир САПР ISICAD International Science Intensive Computer Aided Design services [Электронный ресурс]. – 25 июля 2018. – Режим доступа: https://isicad.ru/ru/articles.php?article_num=19982. – Дата доступа: 15.01.2021.

14. Гривачевский, А.Г. Инструментальные программные средства для создания САПР сложных технических объектов / А.Г. Гривачевский, Ю.М. Кротюк // Проблемы создания информационных технологий. Сб. научных трудов. – Минск: Информационно-вычислительный центр Белстата. – Вып. 28. – 2018. – С. 23–31.

15. Микрюков, А.А. Парадигма сетевцентрического управления предприятием и особенности ее реализации / А.А. Микрюков // Инновации и инвестиции. – 2019. – № 5. – С. 75–78.

Поступила в редакцию 01.02.2021.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfint.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).