ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№4 (45) 2020

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря* 2009 *г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (45) 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

ИНФОРМАТИКА

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– технические (информатика, вычислительная техника и управление);
– физико-математические (физика, математика).

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *Г.Н. Петухова*, *Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 09.12.20. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 16,28. Уч.-изд. л. 14,18. Тираж 100 экз. Заказ № 584.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2020
© Проблемы физики, математики и техники, 2020
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2020

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

***Published since December*, 2009**

There are 4 times a year

№ 4 (45) 2020

CONTENTS

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

– Technics (Informatics, Computer Science and Control);

– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 546.8, 661.682

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПОКРЫТИЯ НА ОСНОВЕ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ ДЛЯ ПЛАНАРИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МИКРОСХЕМ

В.В. Васькевич[1], В.Е. Гайшун[1], Д.Л. Коваленко[1], Сунгвок Мин[2], М.И. Москвичёв[1], А.Н. Петлицкий[3], Д.В. Жигулин[3]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Университет Кёнги*, *Сеул*
[3]*«Белмикроанализ» филиала НТЦ «Белмикросстемы» ОАО «ИНТЕГРАЛ»*, *Минск*

DIELECTRIC SOL-GEL COATINGS BASED ON SILICA DIOXIDE FOR SURFACE PLANARIZATION OF INTEGRAL MICROCIRCUITS

V.V. Vaskevich[1], V.E. Gaishun[1], D.L. Kovalenko[1], Sungwook Mhin[2], M.I. Moskvichyov[1], A.N. Petlitskiy[3], D.V. Zhyhulin[3]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Kyonggi University*, *Seoul*
[3]*JSC "INTEGRAL"*, *Minsk*

Исследованы условия формирования золь-гель покрытий для планаризации поверхности в зависимости от состава пленкообразующего раствора. Определены оптимальные режимы нанесения пленкообразующего раствора методом центрифугирования. Экспериментальным путем подобраны режимы термообработки полученных покрытий, и установлено влияние термообработки на толщину и сплошность формируемых покрытий. Проведены исследования шероховатости и планаризации поверхности алюминиевой металлизации интегральной схемы, с помощью получаемых золь-гель покрытий, методами профилометрии и сканирующей зондовой микроскопии. Для анализа однородности структуры слоев золь-гель покрытий проведены исследования планарности и толщины с использованием растрового электронного микроскопа.

Ключевые слова: *пленкообразующий раствор*, *золь-гель*, *термообработка*, *толщина покрытия*, *профилограмма*, *планаризация.*

The conditions for the formation of sol-gel coatings for surface planarization were investigated depending on the composition of the film-forming solution. The optimal modes of applying a film-forming solution by spin-coating method were determined. The modes of heat treatment of the obtained coatings have been selected experimentally, and the effect of heat treatment on the thickness and continuity of the formed coatings has been established. By the methods of profilometry and scanning probe microscopy the roughness and planarization of the surface of the aluminum metallization of an integrated circuit using the obtained sol-gel coatings have been studied. To analyze the homogeneity of the layer structures of the deposited sol-gel coatings, studies of planarity and thickness were carried out using a scanning electron microscope.

Keywords: *film-forming solution*, *sol-gel*, *heat treatment*, *coating thickness*, *profilogram*, *planarization.*

Введение

Современное развитие конденсаторных и транзисторных элементов интегральных схем требует внедрения новых тонкопленочных материалов в микроэлектронную промышленность. Чтобы увеличить количество транзисторных структур без изменения технологических процессов, необходима разработка доступных материалов для возможности получения многоуровневых системы. Для таких целей требуется покрытие для обеспечения сглаживания поверхности нижнего уровня готовой интегральной схемы, для возможности формирования на поверхности еще одного интегрального слоя [1]. Такие покрытия обеспечивают сглаживание поверхности с 1 мкм до 100–150 нм, и в то же время, для снижения временной задержки в интегральных схемах с многоуровневыми системами, имеют низкую диэлектрическую проницаемость.

Для создания необходимого диэлектрического слоя в настоящее время используют тонкие слои, сформированные вакуумными методами (фосфоросиликатного стекла, борофосфоросиликатного стекла и др.) [2].

Интерес к диэлектрическим золь-гель пленкам на основе диоксида кремния, синтезированных химическим методом, привлекает к себе внимание, из-за простоты и дешевизны метода, что подтверждается публикациями, в которых описана методика получения устойчивых покрытий на основе гидролиза тэтроэтилортосиликата [3]. Однако такие покрытия характеризуются отсутствием пластичности, которая дает возможность сглаживать большие перепады металлизации до 2 мкм, что негативно сказывается на их использовании в качестве межслойного диэлектрика при производстве интегральных микросхем.

© Васькевич В.В., Гайшун В.Е., Коваленко Д.Л., Сунгвок Мин, Москвичёв М.И., Петлицкий А.Н., Жигулин Д.В., 2020

Значительное развитие в последнее время получили так называемые органо-неорганические гибриды, в частности, материалы на основе модифицированных соединений кремния, титана, фосфора и другие [4]–[8]. В таких покрытиях фрагменты органических соединений встроены в каркас исходной матрицы, и они устойчивы к термическому расширению композиционной поверхности микросхемы. Таким образом поставленная в работе задача по получению диэлектрических планаризующих золь-гель покрытий для микроэлектронных интегральных схем (0,3–0,5 мкм) является актуальной задачей.

1 Синтез золь-гель покрытий

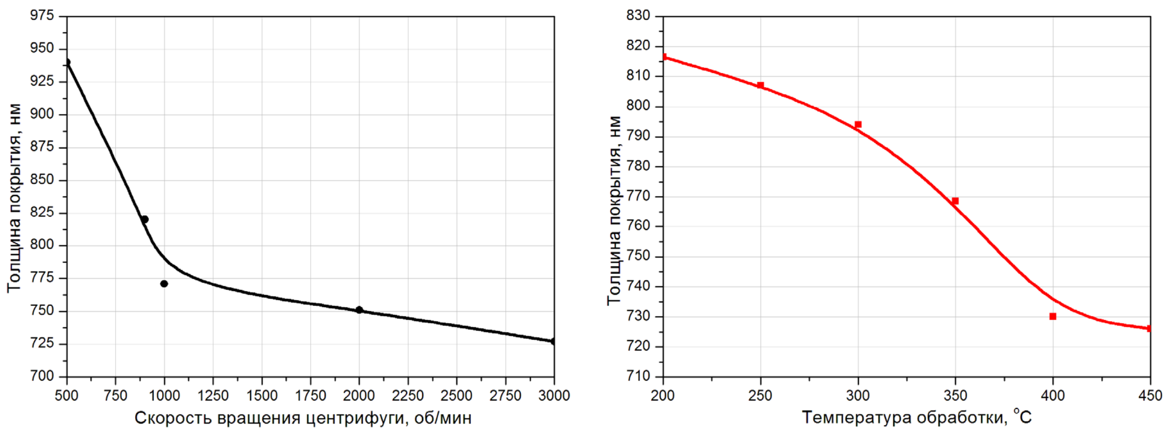
В растворах пленкообразующих веществ должно осуществляться оптимальное соотношение исходных кремний органических веществ, растворителя и катализатора. Это должно одновременно обеспечить, с одной стороны, быстрый частичный или полный гидролиз в растворе с сохранением образующихся продуктов гидролиза соответствующих кислот или гидроокисей элементов в виде золя и, с другой стороны, – мгновенный окончательный гидролиз в тонком слое на обрабатываемой поверхности с выделением прозрачной плёнки соответствующей гидроокиси. Кроме того, только при оптимальных соотношениях компонентов в растворе образующиеся пленки сцепляются достаточно прочно с поверхностью обрабатываемого материала [9]–[10].

В ходе выполнения работы экспериментальным путем был подобран оптимальный состав на основе металлорганических соединений кремния – метилтриэтоксисиалана и тетраэтилортосиликата производства фирмы Sigma-Aldrich.

Пленкообразующий раствор готовят следующим образом. Требуемое количество метилтриэтоксисилана ($CH_3Si(OC_2H_5)_3$) и тетраэтилортосиликата ($Si(C_2H_5O)_4$) смешивают между собой, и полученную смесь заливают изобутиловым спиртом ($(CH3)_2CHCH_2OH$) или изопропиловым спиртом (C_3H_7OH) и перемешивают. После смешивания в раствор добавляют раствор ортофосфорной (соляной, азотной) кислоты или их композиции и перемешивают. При этом в растворе начинает протекать реакция гидролиза, и он нагревается. После завершения процесса гидролиза температура раствора опускается до комнатной температуры. Для полного созревания раствора его необходимо выдержать при температуре окружающей среды (22 ± 2)° С в течение 2–3 дней.

На предприятиях электронной промышленности для нанесения пленок используют установку с автоматическим захватом пластины, нанесения раствора методом центрифугирования и последующей термообработке в печке. Обычно процесс центробежного формования подразделяют на четыре стадии: нанесение раствора, растекание, удаление лишнего раствора и испарение растворителей. Избыток жидкости попадает на подложку на стадии нанесения, жидкость радиальным потоком стекает с подложки под действием центробежной силы.

Для формирования однородных покрытий необходимой толщины, экспериментальным путем были подобраны режимы нанесения золь-гель пленок методом центрифугирования. Подбор режимов нанесения проводили на центрифуге для нанесения тонких пленок Apogee Cee 200X. Использование данной центрифуги позволяет точно устанавливать различные режимы нанесения пленкообразующего раствора, регулировать скорость вращения в пределах от 1 об/мин до 12000 об/мин. Дает возможность программировать несколько режимов нанесения в одном цикле (например, нанесение производиться на скорости вращения 100 об/мин, после чего центрифуга ускоряется до 6000 об/мин для подсушивания сформированного слоя). В результате экспериментальным путем были подобраны оптимальные режимы нанесения пленкообразующих растворов на пластины с металлической разводкой диаметром 100 мм. Установлено, что



а) *б*)

Рисунок 1.1 – Зависимость толщины получаемых золь-гель покрытий от скорости вращения центрифуги (*а*) и температуры отжига (*б*) скорость вращения центрифуги оказывает влияние на толщину формируемых покрытий. С увеличением скорости вращения центрифуги толщина формируемого покрытия уменьшается (рисунок 1.1, *а*) до определенного значения, после которого толщина пленки не изменяется и зависит только от вязкости исходного пленкообразующего раствора.

Для улучшения планаризации поверхности металлической разводки интегральной схемы, дополнительно были сформированы двухслойные покрытия.

После нанесения пластины помещают в муфельную печь и производят отжиг на воздухе. Отверждение покрытия происходит в результате испарения растворителей, либо за счет реакций полимеризации или конденсации. Скорость отверждения покрытий зависит от состава пленкообразующего раствора, толщины покрытия, температуры и способа сушки, и других факторов.

В ходе термообработки происходит испарение растворителя и усиление поликонденсационных процессов, образование пространственной структуры кремнийорганического полимера. Однородное покрытие на поверхности подложки получается только при равномерном прогреве детали. Для предотвращения образования трещин на участках металлизации и переходах между участками без металлизации был подобран режим термообработки. Пластину в печи разогревают до 400° С в течении 120 минут (скорость нагрева ≈ 3,3° С в мин.) и выдерживают при данной температуре в течении 60 минут, после чего подложка с покрытием остывает в течении 60–80 минут вместе с печкой. После термообработки и остывания пластины извлекают из печи и помещают в специальные пластиковые контейнеры для дальнейшего перемещения и исследования их свойств.

Результаты исследования показывают, что для окончательного формирования покрытия достаточно температуры обработки 400° С. При дальнейшем увеличении температуры толщина покрытия практически не изменяется, что свидетельствует об полном уплотнении покрытия и формировании в нем оксидной SiO_2 матрицы (рисунок 1.1, *б*).

Установлено, что увеличение температуры обработки приводит к уплотнению получаемого покрытия и, как следствие, уменьшению его толщины. При температурах отжига от 350° С до 450° С на поверхности пластин, формируется однородное покрытие без включений и трещин. Температуры отжига ниже 350° С не подходят для использования в технологии планаризации, так как покрытие имеет не до конца сформированный вид, отличается большим содержанием пор и не выдерживает дальнейшие технологии (подразумевающие частичное стравливание в кислотных травителях).

После формирования покрытий были проведены исследования показателя преломления и толщины полученных образцов с использованием быстродействующего лазерного эллипсометра ЛЭФ-757. Измерения проводили в 5 разных точках пластины и определяли среднее значение. Результаты исследования толщины и показателя преломления показывают, что использование в исходном составе разных растворителей и кислот не оказывает влияния на показатель преломления получаемых покрытий и в среднем составляет 1,42–1,44.

Установлено, что использование в качестве растворителя изобутилового спирта приводит к незначительному увеличению (до 20 нм) толщины формируемых покрытий. При использовании в качестве катализатора ортофосфорной кислоты происходит увеличении скорости протекания химических реакций в золе, что приводит к увеличению его вязкости и, как следствие, к увеличению толщины получаемых покрытий.

2 Результаты и их обсуждение

Первичные исследования планарности полученных золь-гель покрытий проводили с помощью профилометр Surtronic 25 (Taylor Hobson, Великобритания). Данный профилометр позволяет оперативно оценить уровень планаризации и шероховатости поверхности получаемых образцов. На рисунке 2.1 представлены профилограммы шероховатости поверхности.

Результаты исследования показывают, что шероховатость поверхности участка алюминия уменьшается с $Ra = 46{,}5$ нм (без покрытия) до $Ra = 9{,}27$ нм (с золь-гель покрытием). Максимальная глубина пор уменьшилась с 0,75 мкм до 100 нм, это свидетельствует о хорошем заполнении золем неровностей поверхности.

Так как профилометр не регистрирует участки с малой шириной металлизации 3–7 мкм, дальнейшее исследование проводили на участках с шириной металлизации 15 мкм с промежутками в 15 мкм (рисунки 2.2, 2.3).

Результаты исследования высоты профиля указывают на сглаживание участков перехода с опорной пластины кремния на металлизацию с 1 мкм (пластина без покрытия) до 0,4–0,5 мкм (пластина с золь-гель покрытием). Использование однослойного золь-гель покрытия позволяет улучшить планаризацию поверхности в 2 раза за счет хорошего заполнения раствором промежуточных участков между металлизацией.

Для более детального исследования планаризации интегральных схем золь-гель покрытиями провели исследования поверхности с использованием сканирующего зондового микроскопа СОЛВЕР Р47-PRO (ООО НТ-МДТ, Москва). Для исследования заполняемости участков с различной шириной металлических структур и расстоянием

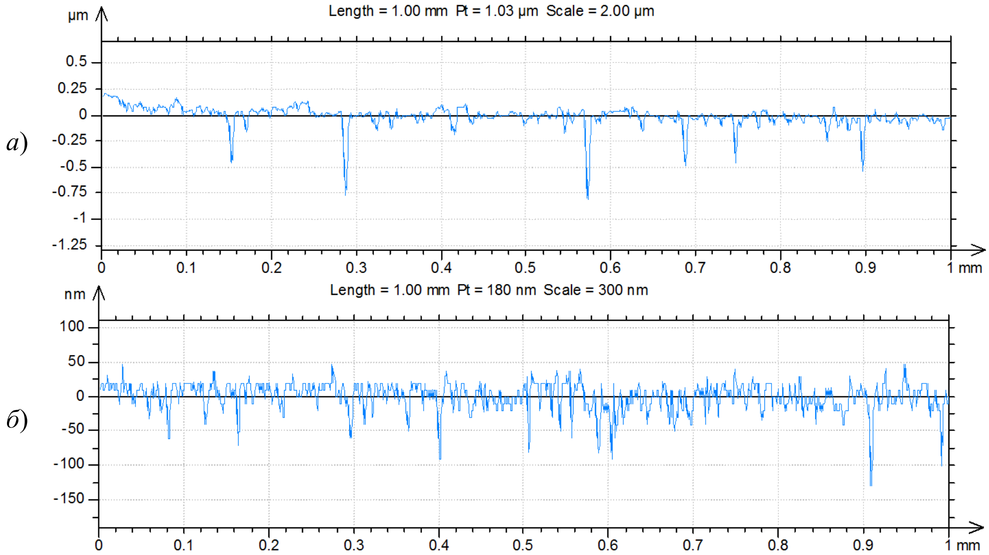


Рисунок 2.1 – Общая профилограмма участка 1 мм с алюминиевой металлизацией: *а*) без покрытия, б) с золь-гель покрытием

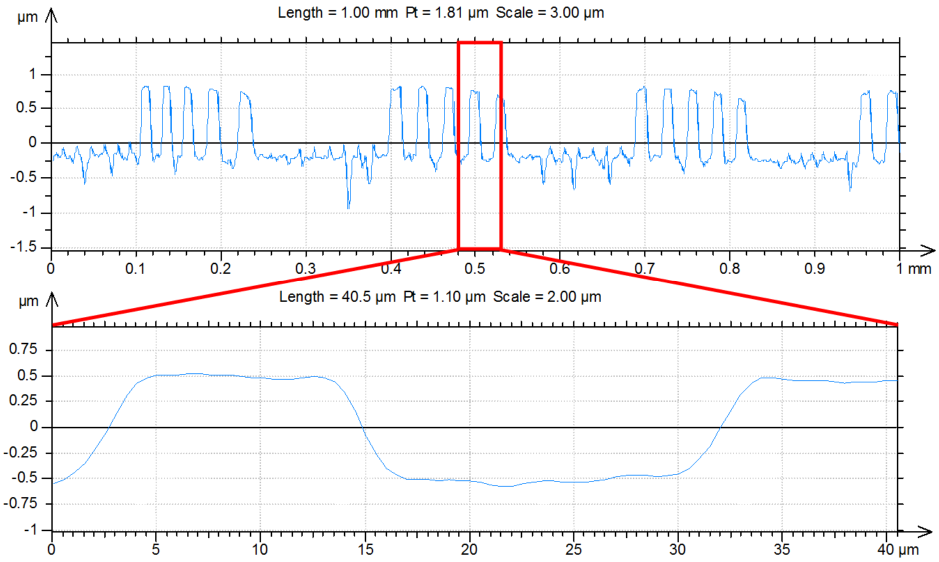


Рисунок 2.2 – Общая профилограмма исследуемого участка без покрытия

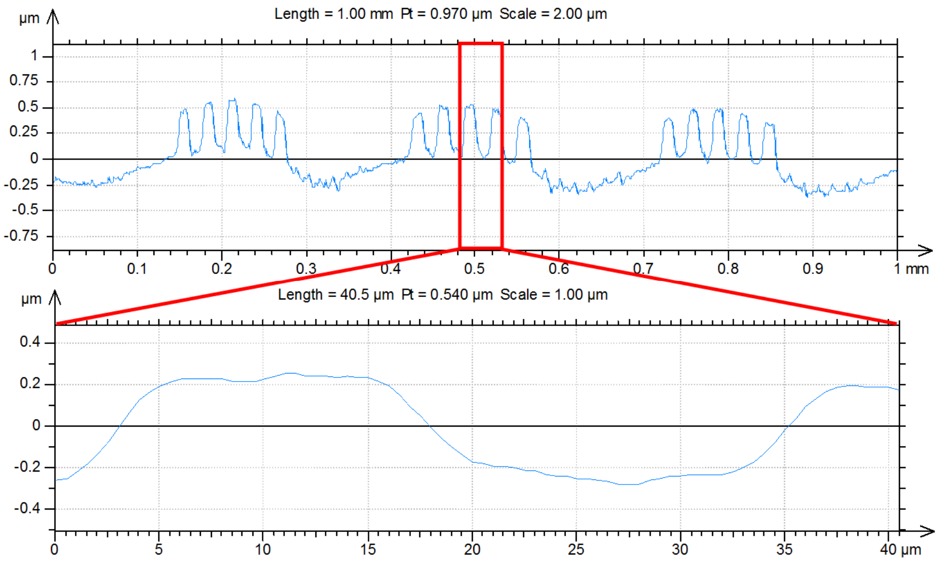


Рисунок 2.3 – Общая профилограмма исследуемого участка с золь-гель покрытием

между ними были подготовлены тестовые пластины со специальными структурными элементами (рисунок 2.4): ширина металлизации 15 мкм, ширина зазора 15 мкм; ширина металлизации 3 мкм, ширина зазора 15 мкм; ширина металлизации 15 мкм, ширина зазора 3 мкм; ширина металлизации 3 мкм, ширина зазора 3 мкм.

Результаты исследования выбранного участка (рисунок 2.5) показывают о сглаживании поверхности структурного участка после нанесения одного слоя золь-гель покрытия с 900 нм до 600 нм, после формирования двухслойного золь-гель покрытия до 150 нм, что является хорошим результатом и свидетельствует о полном заполнении плёнкообразующим раствором узких участков между металлизацией.

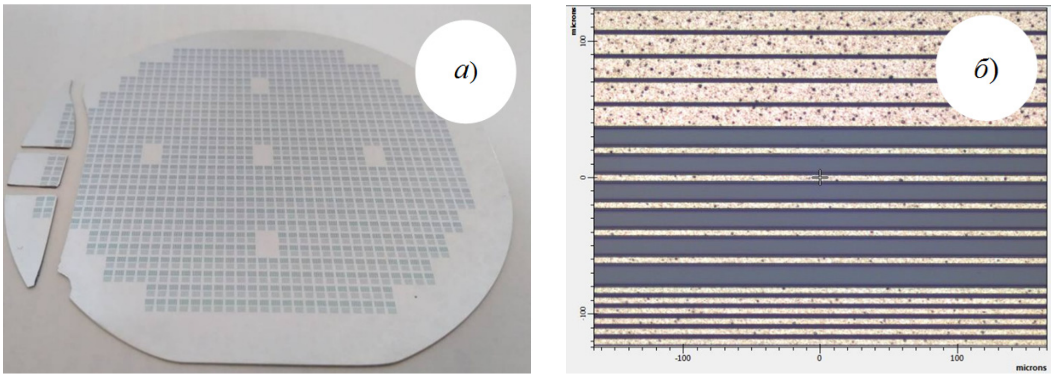


Рисунок 2.4 – Внешний вид исследуемой пластины (*а*) и увеличенное изображение тестовых участков металлизации (*б*)

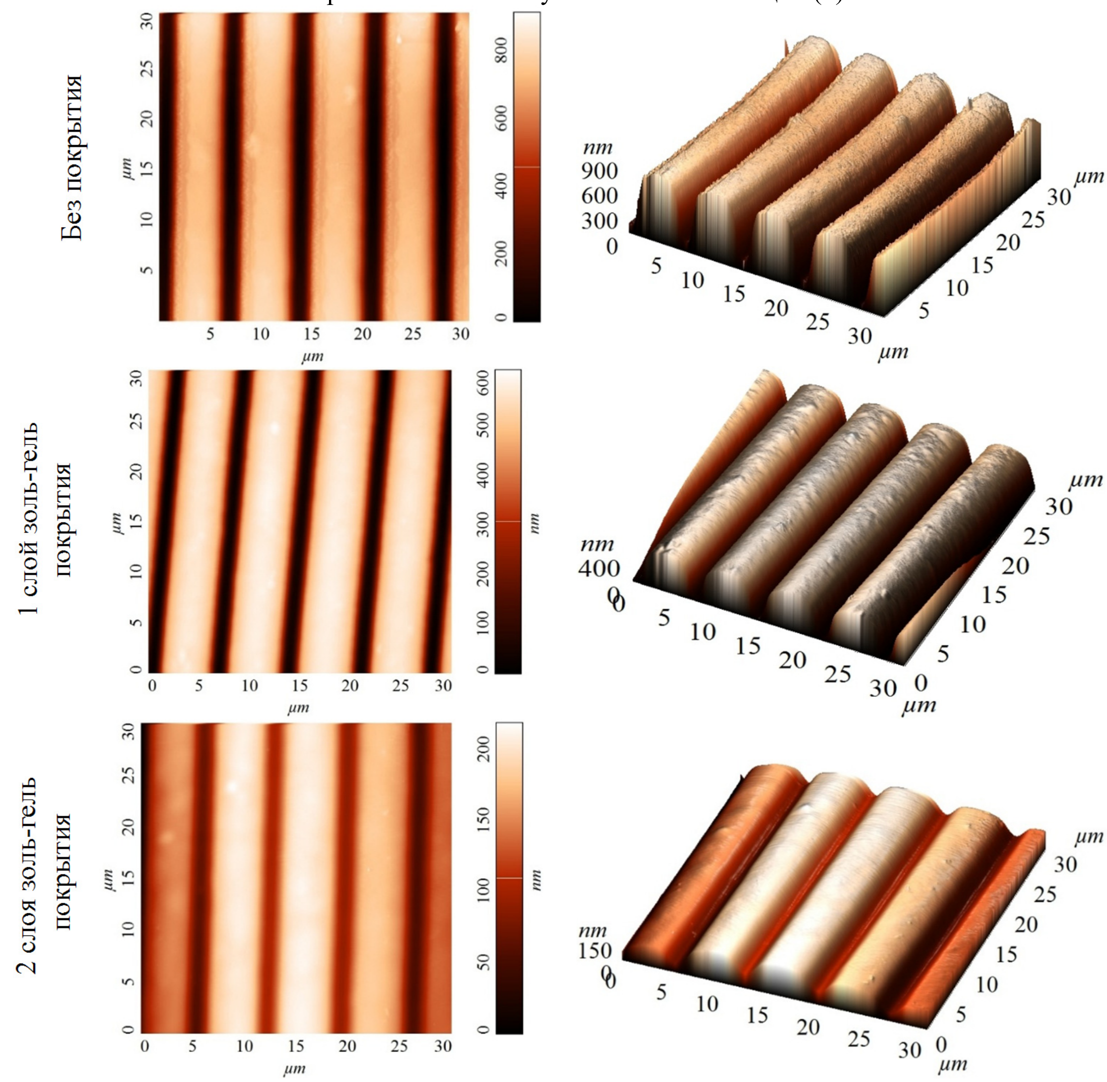


Рисунок 2.5 – АСМ изображения тестового участка пластины с шириной металлизации 3 мкм и шириной зазора 3 мкм

На рисунке 2.6 представленны результаты исследования планаризации всех видов структурных участков тестовой пластины.

Из результатов исследований трехмерных АСМ изображений поверхности структурных элементов следует, что использование разработанных двухслойных золь-гель покрытий позволяет планаризировать поверхность нижнего уровня металлизации и уменьшить перепад высот с 1 мкм до 80–150 нм в зависимости от структурного участка.

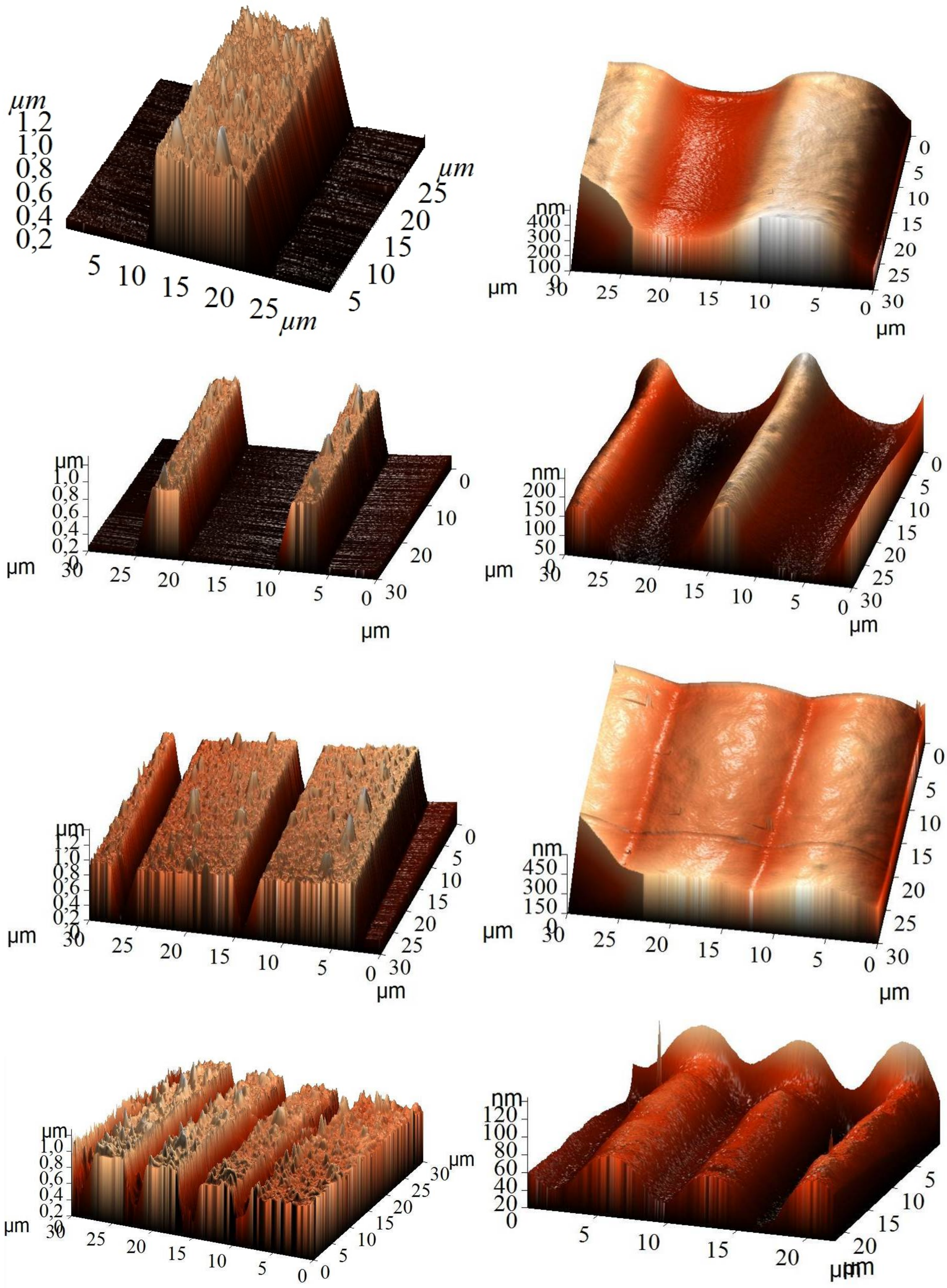
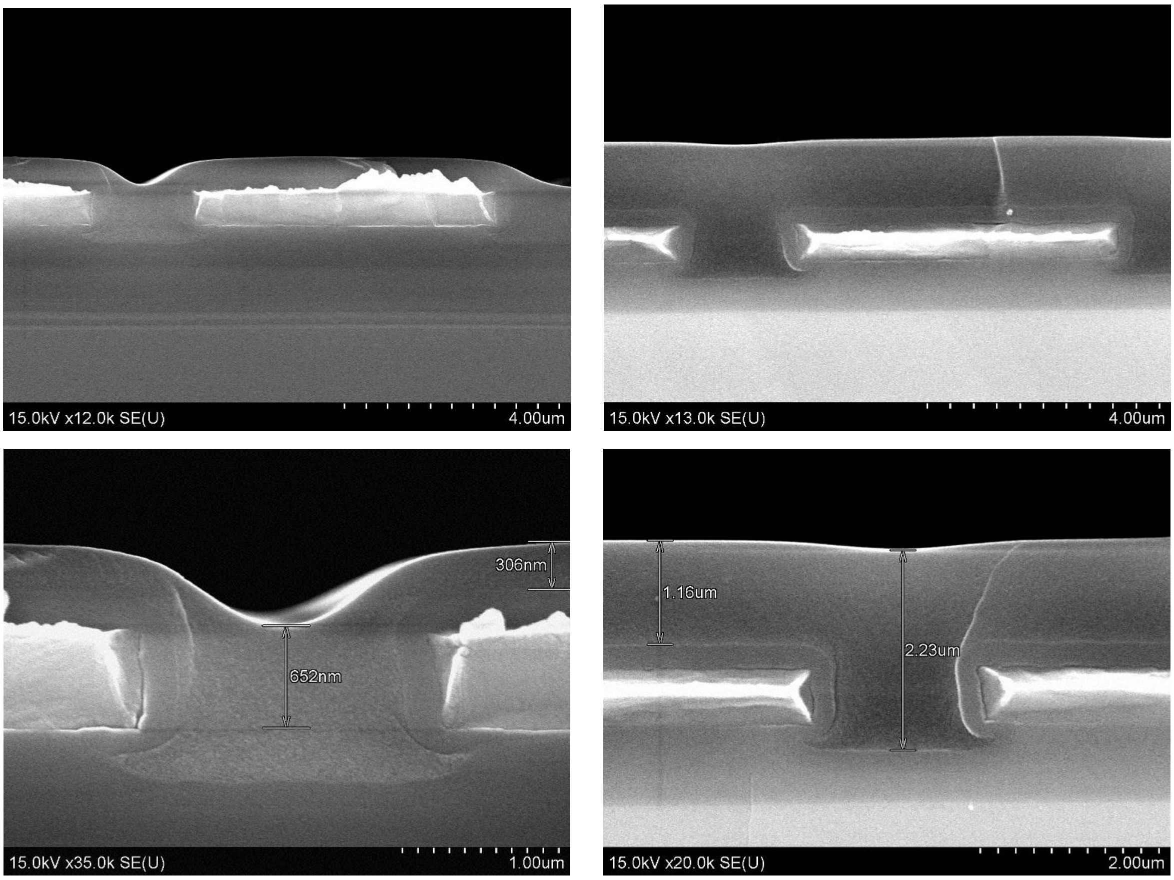


Рисунок 2.6 – 3D АСМ изображение структурных участков тестовой пластины до и после формирования двухслойных золь-гель покрытий



а) *б*)

Рисунок 2.7 – Изображения поверхности и продольных сколов исследуемых тестовых пластин с однослойным покрытием (*а*) и двухслойным покрытием (*б*)

Для определения степени планаризации, толщины и структуры слоев получаемых золь-гель покрытий, провели экспериментальное исследование полученных однослойных и двухслойных золь-гель покрытий с использованием растрового электронного микроскопа S-4800 (Hitachi, Япония).

На полученных РЭМ изображениях отчетливо просматриваются формируемые слои (кремниевая подложка, алюминиевая металлизация, золь-гель слой). Не зависимо от количества слоев полученные золь-гель покрытия имеют однородную структуру по всей толщине без видимых включений и дефектов, хорошо заполняют участки между металлизацией:

– толщина однослойного золь-гель покрытия: 306 нм на участках металлизации и 652 нм на участках кремниевой подложки;

– толщина двухслойного золь-гель покрытия: 1,16 мкм на участках металлизации и 2,23 мкм на участках кремниевой подложки.

Заключение

Приготовлены пленкообразующие растворы на основе металлорганических соединений кремния. Установлено, что использование в качестве растворителя изобутилового спирта приводит к незначительному увеличению (до 20 нм) толщины формируемых покрытий. Использование в качестве катализатора ортофосфорной кислоты приводит к увеличению скорости протекания химических реакций в золе, что повышает его вязкость и вызывает увеличение толщины получаемых покрытий.

Экспериментальным путем определены оптимальные режимы нанесения пленкообразующих растворов и отжига получаемых покрытий. Результаты исследования показывают, что термообработка при температуре 400° C в течении 60 минут достаточна для формирования плотного покрытия на поверхности кремниевых пластин с металлической разводкой.

Результаты исследования шероховатости поверхности получаемых пленок с использованием профилометра показывают, что нанесения наноструктурированных золь-гель покрытий позволяет уменьшить шероховатость поверхности алюминиевой металлизации с 46,5 нм (без покрытия) до 9,3 нм (с золь-гель покрытием). Исследование высоты профиля металлизации на участках пластины с шириной металлизации 15 мкм с промежутками в 15 мкм указывает на сглаживание этих участков с высотой 1 мкм (пластина без покрытия) до высоты 0,4–0,5 мкм (пластина с золь-гель покрытием).

Из результатов исследований трехмерных АСМ изображений поверхности структурных элементов следует, что формирование однослойного золь-гель покрытия позволяет уменьшить перепад высот металлизации с 900 нм до 500 нм, а формирование второго слоя покрытия до 100 нм на всех исследуемых участках тестовых пластин.

На полученных РЭМ изображениях отчетливо просматриваются формируемые слои (кремниевая подложка, алюминиевая металлизация, золь-гель слой). Полученные золь-гель покрытия по всей толщине имеют однородную структуру без видимых включений и дефектов, хорошо заполняют участки между металлизацией.

Авторы работы выражают благодарность ЗАО «Группа Кремний ЭЛ» за предоставленные образцы тестовых пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Redzheb*, *M.* Enabling bottom-up nanoelectronics fabrication by selective sol-gel dielectric-on-dielectric deposition / M. Redzheb, S. Armini // Materials Science and Engineering. – 2021. – Vol. 263. – P. 114808.

2. *Термостимулированное течение легкоплавких стекол при планаризации рельефа поверхности микроэлектронных структур* / С.П. Жвавый, Г.Д. Ивлев, В.А. Пилипенко, В.Н. Пономарь // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68, № 11. – С. 135–137.

3. *Планаризация межуровневого диэлектрика с использованием жидкого стекла* / В.А. Пилипенко, В.Н. Пономарь, В.В. Горушко, В.В. Понарядов, Н.С. Куксова, А.В. Демьянович // Вестник БГУ. – 2005. – № 3. – С. 32–36.

4. *Изолирующие слои многоуровневой разводки интегральных схем с низкой диэлектрической проницаемостью* / В.А. Васильев [и др.] // Электронная промышленность. – 2004. – № 4. – С. 145–153.

5. *Коваленко*, *Д.Л.* Синтез и исследование силикатных золь-гель покрытий для микро- и наноэлектроники / Д.Л. Коваленко, В.Е. Гайшун, В.В. Васькевич // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии. – 2014. – Т. 12, № 2. – С. 279–293.

6. *Effects of annealing temperature on ultra-low dielectric constant* SiO_2 *thin films derived from sol-gel spin-on-coating* / W.C. Ee, K.Y. Cheong // Physica B: Condensed Matter. – 2008. – Vol. 403, iss. 4. – P. 611–615.

7. *Munishamaiah*, *K.* Improved dielectric properties of microwave irradiated sol-gel derived SiO_2–TiO_2 thin film / K. Munishamaiah // Results in Engineering. – 2019. – Vol. 4. – P. 100033.

8. *Das*, *S.* Inorganic – organic hybrid nanoparticles from n-octyl triethoxy silane / S. Das, T.K. Jain, A. Maitra // Journal of Colloid and Interface Science. – 2002. – № 252. – P. 82–88.

9. *Исследование структурно-механических свойств защитных золь-гель покрытий на основе оксидов* Si, Ti, Zr *и их комплексов* / Д.Л. Коваленко, В.Е. Гайшун, В.В. Васькевич, А.С. Русыкин, М.И. Москвичёв, В.А. Черчук, Мин Сунгвок // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 21–24.

10. *Защитные золь-гель покрытия с гидрофобными свойствами* / Д.Л. Коваленко, В.Е. Гайшун, В.В. Васькевич, В.В. Сидский // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 15–19.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (№ Т19КОР-002).

Поступила в редакцию 18.10.2020.

УДК 699.86 661.682

РАЗРАБОТКА НОВЫХ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НАНОРАЗМЕРНОГО ДИОКСИДА КРЕМНИЯ

В.Е. Гайшун[1], Я.А. Косенок[1], М.И. Москвичёв[1], О.И. Тюленкова[1], Т.А. Савицкая[2], И.М. Кимленко[2], И.А. Старостенко[3]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск*
[3]*ОАО «Гомельстройматериалы»*

DEVELOPMENT OF NEW THERMAL INSULATING MATERIALS USING NANOSIZED SILICON DIOXIDE

V.E. Gaishun[1], Ya.A. Kosenok[1], M.I. Moskvichyov[1], O.I. Tyulenkova[1], T.A. Savitskaya[2], I.M. Kimlenko[2], I.A. Starostenko[3]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University, Minsk*
[3]*JSC "GomelStroyMaterialy"*

Представлены технологии получения и модификации теплоизоляционных материалов при использовании в их составе наноразмерного диоксида кремния. Определено влияние гидрофобизирующей эмульсии при введении в состав связующего минераловатных плит на их характеристики. Разработана технология получения пористых теплоизоляционных материалов на основе наноразмерных аэросилов и исследованы их структурные и механические свойства.

Ключевые слова: *пирогенный диоксид кремния, гидрофобизирующая эмульсия, плиты минераловатные теплоизоляционные, плотность, водопоглощение, теплопроводность.*

The technologies for obtaining and modifying heat-insulating materials using nanosized silica are presented. The effect of a hydrophobizing emulsion upon the addition to the binder of mineral wool boards on their characteristics has been determined. A technology for the production of porous heat-insulating materials based on nanosized aerosils has been developed and their structural and mechanical properties have been studied.

Keywords: *pyrogenic silica, hydrophobizing emulsion, mineral wool insulation boards, density, water absorption, thermal conductivity.*

Введение

Проблема улучшения энергоэффективности жилого фонда в Республике Беларусь является актуальной в условиях постоянного повышения стоимости энергоносителей. Применение современных теплоизоляционных материалов и инженерных решений позволяет увеличить энергетическую эффективность, снизить массу, повысить срок эксплуатации зданий и сооружений [1], а также снизить расход строительных материалов при их возведении. Таким образом, задача получения новых строительных материалов для увеличения энергоэффективности зданий и сооружений является актуальной.

Современные теплоизоляционные материалы могут быть разделены на две группы – органические и неорганические, в зависимости от типа применяемого сырья в технологии их производства. К утеплителям на неорганической основе относятся волокнистые теплоизоляционные материалы из минерального сырья и стекловолокна [2]. В Республике Беларусь успешно налажено производство минераловатных изделий на ОАО «Гомельстройматериалы». Эти теплоизоляционные материалы имеют значительно меньшую стоимость по сравнению с зарубежными аналогами, но обладают невысокими значениями температуро- и водостойкости, имеют ограниченный срок эксплуатации и содержат вредные вещества в своем составе.

Улучшение эксплуатационных и теплофизических характеристик волокнистых утеплителей становится возможным посредством введения многокомпонентных связующих в состав, обеспечивающих снижение водопоглощения, а также повышение тепло- и огнезащитных свойств. Исследования по выбору связующего для производства теплоизоляционных плит показали эффективность использования для этих целей композиций из компонентов органического и неорганического происхождения [3].

Пирогенные кремнеземы или аэросилы широко используются во многих областях техники в качестве наполнителей полимеров, тиксотропных добавок, адсорбентов, эффективно связывающих органические вещества со средней и высокой молекулярной массой [4]–[6]. Они могут найти применение в составе связующих,

© Гайшун В.Е., Косенок Я.А., Москвичёв М.И., Тюленкова О.И., Савицкая Т.А., Кимленко И.М., Старостенко И.А., 2020

используемых при производстве минераловатных плит, строительных и теплоизоляционных материалов.

Цель работы – разработка новых и повышение качества имеющихся теплоизоляционных материалов при использовании в их составе наноразмерного диоксида кремния.

1 Экспериментальная часть

Аэросил представляет собой порошок диоксида кремния, состоящий из плотных непористых сферических частиц с размерами от 7 до 40 нм и удельной поверхностью от 50 до 400 м^2/г. Для исследований и синтеза новых теплоизоляционных материалов был выбран аэросил ОХ-50 (Evonik Resource Efficiency GmbH, Германия) как наиболее химически чистый (> 99.8% SiO_2) порошок с минимальной удельной поверхностью и слабой агрегированностью первичных частиц. Удельная поверхность аэросила ОХ-50, определенная по методу Брунауэра – Эммета – Теллера, $S_{БЭТ} \approx 50$ м^2/г, средний диаметр первичных частиц около 40 нм (рисунок 1.1). Аэросил ОХ-50 образует стабильные водные композиции, состоящие из индивидуальных первичных наночастиц, а также агрегатов частиц размером до 100 нм. Благодаря слабой агрегированности частиц аэросила могут быть получены водные композиции с концентрацией диоксида кремния до 25 масс. % [7].

Рисунок 1.1 – Структура гидрофильной частицы аэросила

В данной работе описан синтез двух видов материалов – гидрофобизирующей эмульсии, используемой для добавления в связующее для теплоизоляционных материалов, в частности минераловатных плит, а также синтез пористых неорганических теплоизоляционных материалов.

Для получения эмульсий были использованы следующие химические вещества: силиконовое масло; полидиметилсилоксан (ПДМС 200); SiO_2 – водная суспензия наночастиц аэросила ОХ-50 (СПС-54, 16 масс. %); гидроксиэтилцеллюлоза (ГЭЦ); бидистиллированная вода. Оптимальное мольное соотношение составило: СПС-54:ПДМС – 5:1. Стадии получения гидрофобизирующей эмульсии включают добавление силиконового масла и ультразвуковое диспергирование. Использование ультразвукового диспергирования на стадии образования водной эмульсии ПДМС-200 позволило предотвратить фазовое разделение системы ПДМС – SiO_2 – ПАВ. Наиболее стабильная эмульсия образуется при добавлении гидроксиэтилцеллюлозы при соотношении компонентов 1:0,045. Образующаяся система может быть отнесена к типу множественных эмульсий [8].

Для приготовления раствора связующего смешивают смолу с гидрофобизирующей эмульсией и остальными компонентами в необходимых пропорциях. Смесь из расходных баков поступает в объемные дозаторы, затем в промежуточный бак с мешалкой, далее в расходный бак с мешалкой, откуда по трубопроводу с помощью насосов раствор связующего подается для нанесения его на минеральные волокна.

Для получения пористых неорганических теплоизоляционных материалов были использованы следующие химические вещества: водный раствор силикатов натрия (плотность – 1,42 кг/м^3, силикатный модуль – 3,3), аэросил ОХ-50, натрий тетраборнокислый 10-водный (чда), графитовый порошок. Исходные компоненты брали в соотношениях, представленных в таблице 1.1, и перемешивали до получения однородной смеси.

Таблица 1.1 – Состав пористых неорганических теплоизоляционных материалов на основе диоксида кремния

Состав	№ образца	
	1	2
Водный раствор силикатов натрия, масс.%	87,4	87,0
Аэросил ОХ-50, масс. %	9,7	9,7
Натрий тетраборнокислый, масс. %	2,9	2,8
Графитовый порошок, масс. %	–	0,5

Затем смесь высушивали в термошкафу с температурой 60° С и измельчали до получения частиц с размерами 1–5 мм. Частицы засыпали в металлическую форму и помещали в муфельную печь с температурой 500° С, где происходило вспенивание материала.

Плотность образцов была установлена согласно ГОСТ 12730.1–78 при состоянии их естественной влажности [9]. Исследования механических свойств образцов теплоизоляционных материалов проводили с помощью пресса LR10KPLUS (LLOYD Instruments). Теплопроводность определялась с помощью измерителя теплопроводности ИТП-МГ4 «100». Горючесть полученных образцов определяли с использованием трубчатой электропечи.

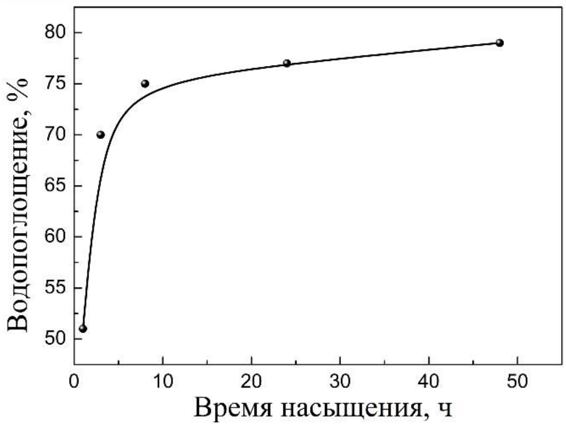
Испытания разработанных теплоизоляционных материалов проведены в производственных условиях ОАО «Гомельстройматериалы».

2 Результаты и их обсуждение

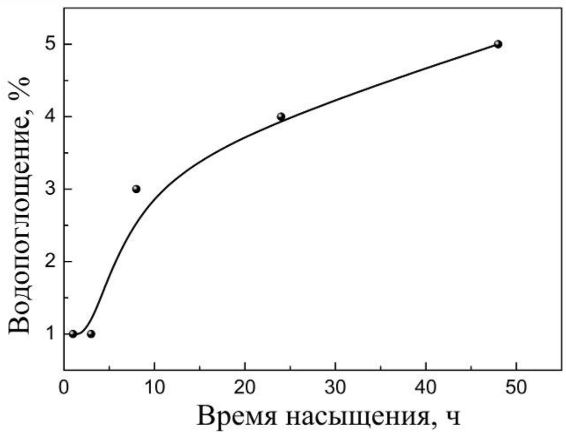
Исследование влияния гидрофобизирующей эмульсии в составе связующего на механические характеристики плит минераловатных теплоизоляционных показывает, что при применении разработанной эмульсии повышается однородность плит, снижается хрупкость базальтового волокна, повышаются водоотталкивающие свойства теплоизоляционных плит. После выдержки в воде в течение 24-х часов водопоглощение исследуемых образцов практически достигает постоянных значений, и его конечные показатели у образца минераловатных теплоизоляционных плит с применением гидрофобизирующей эмульсии в составе связующего составляет не более 5% по массе, в отличие от образца без добавления эмульсии (рисунок 2.1). Это является немаловажным фактором, поскольку при эксплуатации зданий гидрофобизированные поверхности служат барьером, препятствующим проникновению влаги в толщу материала, и вода будет просто скатываться с обработанных поверхностей стен за счет влагозащиты и кольматации пор (рисунок 2.2).

По результатам исследований плотность образцов минераловатных плит составила 120–130 кг/м^3, прочность на сжатие при 10%-ой линейной деформации – 0,04 МПа, прочность на изгиб – 0,1 МПа. Теплопроводность образцов минераловатных плит составила не более 0,040 Вт/(м·К).

Механизм действия наночастиц аэросила ОХ-50 в составе связующего заключается в следующем. Гидрофобизирующая эмульсия с добавлением аэросила ОХ-50 используется в качестве дополнительного связующего, благодаря которому достигается создание достаточно прочной структуры базальтоволокнистого материала, а также повышается термо- и водостойкость теплоизоляционного материала. Кроме того, совместное применение эмульсии и кремнийорганической жидкости приводит к образованию гидрофобной кремнийорганической системы, которая обеспечивает защиту материала от влаги, повышая срок службы и эксплуатационные свойства изделия. Увеличение прочности достигается за счет дополнительных склеенных контактов, приходящихся на одно волокно, так как мицеллы золя кремниевой кислоты оседают в местах соприкосновения волокон между собой. Применение эмульсии обеспечивает большее количество коллоидных частиц в единице объема теплоизоляционной массы, что, в свою очередь, обеспечивает большее количество склеенных контактов между волокнами. Также добавление кремнезёмсодержащей суспензии приводит к снижению водопоглощения (не более 5%) теплоизоляционных плит, что достигнуто за счет частичной замены щелочного золя кремниевой кислоты фенолоспирта.



а)



б)

Рисунок 2.1 – Зависимость водопоглощения в образцах минераловатных теплоизоляционных плит без использования в составе связующего гидрофобизирующей эмульсии (*а*) и с использованием гидрофобизирующей эмульсии (*б*)

Рисунок 2.2 – Минеральная вата, пропитанная гидрофобизирующей эмульсией

Испытания образцов минераловатных плит на возгораемость на базе НПЦ учреждения

а) *б*)

Рисунок 2.3 – Внешний вид образцов пористых теплоизоляционных материалов
(*а* – образец № 1, *б* – образец № 2)

Таблица 2.1 – Структурно-механические характеристики пористых теплоизоляционных материалов

№ образца	Плотность, кг/м^3	Теплопроводность, Вт/(м·К)	Диаметр пор, мм	Прочность на сжатие при 10%-ой линейной деформации, МПа
1	190	0,045	0,1-0,5	0,25
2	220	0,070	0,1-1,0	0,40

Таблица 2.2 – Результаты испытаний образцов теплоизоляционных материалов на возгораемость

№ образца	Температура в печи, °С	Температура на поверхности образца, °С	Температура внутри образца, °С	Масса образца, гр.		Потеря массы образца, %
				до испытания m_H	после испытания m_K	
1	750	749	748	24,1	23,9	0,83
2	750	749	748	23,6	23,4	0,85

«Гомельское областное управление МЧС», для которых при приготовлении связующего использовалась разработанная эмульсия, позволили установить, что получаемые плиты относятся к группе негорючих материалов.

Пористые неорганические теплоизоляционные материалы представляют собой высокопористые структуры с распределением пор по всему объёму. Образец № 1 без добавления углерода имеет белую окраску, образец № 2 – светло-серую (рисунок 2.3).

Формирование пористой структуры в разработанных пористых материалах происходит по следующему принципу: после растворения наноразмерного диоксида кремния в водном растворе силикатов натрия образуются соединения кремниевой кислоты, которые затем полимеризуются. Полимеризация кремниевой кислоты сопровождается переходом от цепочной структуры к слоистой, а затем к образованию каркасной трехмерной сетки. Данный процесс сопровождается захватом молекул воды, находящейся как в химически связанном состоянии, так и в адсорбированом. В процессе термической обработки вода, содержащаяся в смеси, закипает и испаряется, что приводит к образованию пор.

Результаты исследований структурно-механических характеристик полученных теплоизоляционных материалов показывают, что при дополнительном введении углерода в количестве 0,5 масс. %, увеличивается плотность и прочность материала (таблица 2.1).

После испытания образцов на распространение пламени по поверхности установлено, что полученные термоизоляционные материалы относятся к группе негорючих материалов РП 1 (пламя не распространяется).

Были проведены испытания образцов на возгораемость и распространение пламени по поверхности Результаты испытаний на возгораемость представлены в таблице 2.2.

Заключение

Разработаны технологии получения и модификации неорганических теплоизоляционных материалов с применением наноразмерного пирогенного диоксида кремния.

Полученная новая гидрофобизирующая эмульсия при введении в состав связующего минераловатных плит повышает водоотталкивающие свойства теплоизоляционных изделий без повышения их горючести. Использование гидрофобизирующих эмульсий позволит отказаться от дефицитных и дорогостоящих импортных компонент, применяемых в настоящее время в процессе производства минераловатных плит, и повысить конкурентоспособность выпускаемой продукции.

Технология получения пористого теплоизоляционного материала на основе диоксида кремния позволяет получать материалы, обладающие стабильными структурно-механическими характеристиками.

Сравнительный анализ характеристик показывает, что минераловатные плиты, модифицированные гидрофобизирующей эмульсией, имеют меньшую теплопроводность 0,040 Вт/(м·К) и плотность 120–130 кг/м^3, в отличие от полученных пористых теплоизоляционных материалов, теплопроводность которых составляет 0,045–0,070 Вт/(м·К), плотность до 220 кг/м^3. Преимуществом пористых теплоизоляционных материалов является повышенная устойчивость к воздействию высоких температур, высокая прочность на сжатие при 10%-ой линейной деформации (до 0,40 МПа) по сравнению с минераловатными плитами (0,04 МПа).

Применение полученных теплоизоляционных материалов в строительной отрасли позволяет увеличить энергетическую эффективность, снизить массу, повысить срок эксплуатации зданий и сооружений, а также снизить расход строительных материалов при их возведении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сапронова*, *О.М.* Повышение энергоэффективности зданий и сооружений / О.М. Сапронова, Т.П. Бирюкова // Вестник МГСУ. – 2011. – № 4. – С. 337–341.

2. *Сухарев*, *М.Ф.* Производство теплоизоляционных материалов / М.Ф. Сухарев, И.М. Майзель, В.Г. Сандлер. – М.: Высшая школа, 1981. – 231 с.

3. *Гурьев*, *В.В.* Особенности технологического производства теплоизоляционных изделий из базальтовых волокон и их физико-механические свойства / В.В. Гурьев, Е.И. Непрошин // Базальтоволокнистые материалы: сб. статей. – М.: Информконверсия, 2001. – С. 129–155.

4. *Применение модифицированных аэросилов в золь-гель синтезе легированных стеклообразных материалов* / Е.Н. Подденежный [и др.] // Физика и химия стекла. – 2003. – Т. 29, № 5. – С. 654–661.

5. *Водные композиции на основе наноразмерных частиц диоксида кремния для химико-механической полировки пластин монокристаллического кремния* / Я.А. Косенок, В.Е. Гайшун, О.И. Тюленкова, В.Г. Денисман // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 26–31.

6. *Майзельс*, *А.* Использование коллоидного диоксида кремния AEROSIL® при производстве гелей, мазей, эмульсий / А. Майзельс // Фармацевтические технологии и упаковка. – 2015. – № 2. – С. 20–21.

7. *Гунько*, *В.М.* Вода на межфазной границе / В.М. Гунько, В.В. Туров, П.П. Горбик; под ред. В.В. Гончарука. – Киев: Наукова думка, 2009. – 694 с.

8. *Стабилизация гидрофобизующих эмульсий на основе полиметилсилоксановой жидкости гидроксиэтилцеллюлозой и диоксидом кремния* / Т.А. Савицкая, И.М. Кимленко, А.А. Бурейко, В.Е. Гайшун, Я.А. Косенок // Свиридовские чтения: сб. ст. – 2019. – Вып. 15. – С. 147–156.

9. *ГОСТ* 12730.1-78. Бетоны. Методы определения плотности. – Введ. 1980-01-01. – Минск: Гос. комитет по стандартизации РБ. – 8 с.

Поступила в редакцию 16.11.2020.

ФИЗИКА

УДК 535.42

РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. II. 3D СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ ТРИКОМИ – КУММЕРА И ДРУГИЕ ПУЧКИ С НЕПРЕРЫВНЫМ УГЛОВЫМ ИНДЕКСОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION IN PARABOLIC ROTARY COORDINATES. II. 3D TRICOMI – KUMMER LIGHT BEAMS AND OTHER BEAMS WITH THE CONTINUOUS ANGULAR INDEX

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Предложены и анализируются аналитические выражения в замкнутой форме для непараксиальных и параксиальных 3D пучков Трикоми – Куммера (*T – K*) и других пучков с непрерывным угловым индексом *m* в параболических вращательных координатах. Сформулированы физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков. Показано, что параксиальные пучки без гауссиана могут переносить конечную мощность.

Ключевые слова: *непараксиальные пучки*, *параксиальные пучки*, *параболическиее пучки*, *пучки Трикоми – Куммера.*

Analytical expressions in the closed form for nonparaxial and paraxial 3D Tricomi – Kummer (*T – K*) beams and other beams with continuous angular index *m* in parabolic rotary coordinates are offered and analyzed. Physical restrictions on possible values of free parameters of such beams are formulated. It is shown, that paraxial beams without Gaussian can transfer finite power.

Keywords: *nonparaxial beams*, *paraxial beams*, *parabolic beams*, *Tricomi – Kummer beams.*

Введение

Потребности науки и техники приводят к необходимости поиска новых типов оптических полей. Исследования ведутся как в направлении нахождения новых решений, так и направлении обобщения уже известных решений. В работах [1]–[7] были введены пучки Бесселя [1], Бесселя – Гаусса [2], [3], Куммера – Гаусса [4], Куммера [5], Вебера – Гаусса [6] и Куммера – Куммера (*К-К*) [7] непрерывного порядка.

В данной работе этот подход распространяется на другие решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. Получены выражения, описывающие 3*D* световые пучки *Т – К* и другие типы пучков *К – К* с непрерывным угловым индексом *m* и обсуждаются физически приемлемые значения их свободных параметров. Некоторые решения с дискретным порядком *m* в параболических вращательных координатах обсуждались, например, в [8]–[10].

1 Дополнительные решения волнового уравнения в параболических координатах вращения

В работе [7] для монохроматических волн решения волнового уравнения в параболических координатах вращения

$$\left[x=\xi\eta\cos\varphi;\;\; y=\xi\eta\sin\varphi;\;\; z=(\eta^2-\xi^2)/2\right]$$

были представлены в безразмерном виде

$$E=e^{i(Z\pm T)}\cdot\left(X+iY\right)^m\cdot(c_1M_-+c_2U_-)(c_5M_++c_6U_+),$$

где

$$M_\pm=M\left(a,m+1;\mp i(R\pm Z)\right);$$

$$U_\pm=U\left(a,m+1;\mp i(R\pm Z)\right);$$

$$kx=X;\;\; ky=Y;\;\; kz=Z;\;\; \omega t=T;$$

$$k\rho=k\sqrt{x^2+y^2}=R_\perp=\sqrt{X^2+Y^2};$$

$$R=kr=\sqrt{X^2+Y^2+Q^2};\;\; Q=Z-iZ_0.$$

Затем были исследованы решения типа

$$E(M_+M_-)=e^{i(Z\pm T)}\cdot\left(X+iY\right)^m\cdot M_+M_-.$$

В настоящей работе получены и исследованы дополнительно другие типы световых пучков в параболических координатах вращения. Согласно Абрамовиц [11], гипергеометрическое уравнение, кроме решения $w(z)=M(a,b,z)$, имеет при $b\neq 0,\pm1,\pm2,...$ еще другие независимые решения. Поэтому общее решение волнового уравнения, при $b\neq 0,\pm1,\pm2,...,$ для световых монохроматических волн в параболических вращательных безразмерных координатах можно записать в виде

$$E=e^{i(Q+T)}\cdot\left(X+iY\right)^m\cdot(a_1M_-+a_2M_{1-}+a_3U_-+a_4\tilde{U}_-)\times$$
$$\times(a_5M_++a_6M_{1+}+a_7U_-+a_8\tilde{U}_-). \qquad (1.1)$$

© *Гиргель С.С.*, 2020

Здесь обозначены функции

$$M_{\pm 1}=(R\pm Q)^{-m}M\left(a-m,1-m;\mp i(R\pm Q)\right);$$

$$\tilde{U}_{\pm}=e^{\mp i(R\pm Q)}U\left(m+1-a,m+1;\pm i(R\pm Q)\right).$$

В (1.1) можно выбрать по одной независимой функции из каждой скобки, например U_+M_{-1}. В общем случае параметры a комплексные, т. е. $a=a'+ia''$. В параксиальном приближении, которое характеризует нижний индекс *p*, например,

$$U_{+p}=U\left(a,m+1;-i2Q\right);$$

$$U_{-p}=U\left(a,m+1;+i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right).$$

А) Амплитуда реального пучка, чтобы пучок переносил конечную мощность, должна удовлетворять условиям квадратичной интегрируемости (КИ). Проанализируем условия КИ для непараксиальных волновых пучков *К – К* типа

$$E(M\_M_{+1})=e^{i(Q+T)}\cdot\left(X+iY\right)^m(R+Q)^{-m}\times$$

$$\times M\left(a,m+1;i(R-Q)\right)\cdot M\left(a-m,1-m;-i(R+Q)\right).$$

При $Z>0$ и m – нецелом, следуя Флюгге [12], получаем при $|R_\perp|\to\infty$ амплитуду

$$E(M\_M_{+1})\to$$

$$\to\left(\frac{R_\perp^{-a}}{\Gamma(b-a)}+\frac{R_\perp^{a-b}e^{iR_\perp}}{\Gamma(a)}\right)\left(\frac{R_\perp^{-a+m}}{\Gamma(1-a)}+\frac{R_\perp^{a-1}e^{-iR_\perp}}{\Gamma(a-m)}\right).$$

Строго КИ нет. Если $a'=\frac{m}{2}$ или $a'=\frac{m+2}{2}$, тогда $E\to const$. Внутри интервала $\left(\frac{m}{2},\frac{m+2}{2}\right)$ при возрастании $|R_\perp|$ функция $|E|$ убывает. При $a'=\frac{m+1}{2}$ (лучший вариант) $E\to R_\perp^{-1}$. Это – на границе КИ и можно назвать случай $E\to R_\perp^{-1}$ квази-КИ. Квази-КИ при реальных апертурных ограничениях будет приводить к практической реализации пучков $E(M\_M_{+1})$. При $a=\frac{m+1}{2}$, с точностью до постоянных множителей,

$$E(M\_M_{+1})=e^{i(m\varphi+T)}\cdot J_{m/2}\left(\frac{R-Q}{2}\right)\cdot J_{-m/2}\left(-\frac{R+Q}{2}\right).$$

Это – стоячая волна. Однако, если взять комплексный параметр a таким, чтобы $a'=\frac{m+1}{2}$, тогда возникает бегущая волна с квази-КИ, как для волн типа $E(M\_M_+)$.

Обсудим теперь возможные варианты, когда одна из функций Куммера *M* становится присоединенным полиномом Лагерра.

а) Пусть $a-m=n$, тогда при $|R_\perp|\to\infty$ амплитуда $E(M\_M_{+1})\to\left(R_\perp^{2n-m}+R_\perp^{-1}\right)$. Отсюда при $(a=m-n)\cap(m\ge 2n+1)$ амплитуда $E\to R_\perp^{-1}$, а при $(a=n)\cap(m=2n)$ амплитуда $E\to const$.

б) Аналогично, пусть $a=1+n$, тогда при $|R_\perp|\to\infty$ амплитуда $E(M\_M_{+1})\to\left(R_\perp^{2n-m}+R_\perp^{-1}\right)$. Отсюда при $(a=1+n)\cap(m\ge 2n+1)$ амплитуда $E\to R_\perp^{-1}$, а при $(a=1+n)\cap(m=2n)$ амплитуда $E\to const$.

Пучок $E(M\_M_{+1})$ в параксиальном приближении описывается выражением

$$E(M_{-p}M_{+1p})=e^{i(Z+T)}\times$$

$$\times\left(X+iY\right)^m Q^{-m}M\left(a-m,1-m;-2iQ\right)\times$$

$$\times M\left(a,m+1;i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right).$$

Выясним условия его КИ. При $|R_\perp|\to\infty$ амплитуда $E(M_{-p}M_{+1p})\to R_\perp^m M\left(a,m+1;i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)$. Отсюда условия КИ для $E(M_{-p}M_{+1p})$ такие же, как для $E(M_{-p}M_{+p})$ [7]. Компьютерное моделирование интенсивности пучков подтверждает выводы о возможностях осуществления КИ таких пучков.

Б) Рассмотрим непараксиальный пучок *К – К* типа

$$E(M_{-1}M_+)=e^{i(Q+T)}\times$$

$$\times\left(X+iY\right)^m(R-Q)^{-m}M\left(a,m+1;-i(R+Q)\right)\times$$

$$\times M\left(a-m,1-m;i(R-Q)\right).$$

Он получается из $E(M\_M_{+1})$ заменами $R\to(-R)$. Здесь необходимо брать $Z<0$. Тогда при $|R_\perp|\to\infty$ амплитуда

$$E\to M\left(a,m+1;-iR_\perp\right)\cdot M\left(a-m,1-m+1;iR_\perp\right).$$

Условия КИ для пучка $E(M_{-1}M_+)$ такие же, как для $E(M\_M_{+1})$. При $a'=\frac{m}{2}$ и $a'=\frac{m+1}{2}$ $E\to const$. Лучший вариант $a'=\frac{m+1}{2}$, тогда снова имеем квази-КИ. Кроме того, еще существуют возможности квази-КИ а) и б), как для пучков вида $E(M\_M_{+1})$, рассмотренные выше.

В параксиальном приближении, при $Z<0$, получаем

$$E(M_{-1p}M_{+p})=e^{i(Q+T)}(X+iY)^m\times$$

$$\times Q^{-m}M\left(a-m,-m+1;-2iQ\right)\cdot M\left(a,1+m;i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right).$$

Отсюда условия КИ для пучков вида $E(M_{-1p}M_{+p})$ такие же, как для пучков $E(M_{-p}M_{+1p})$ и пучков $E(M_{-p}M_{+p})$, т. е. при $Z<0$ и $Z_0>0$ возможны следующие варианты:

1. Если $a'<\frac{m}{2}$, тогда $|E|\to\infty$ и $W\to\infty$.

2. Если $a' = \dfrac{m}{2}$, тогда $E \to const$, но $W \to \infty$.

3. Если $a' \in \left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{m+1}{2}\right]$, тогда $E \to 0$, но $W \to \infty$.

4. Если $a' > \dfrac{m+1}{2}$, тогда $E \to 0$ и $W \to const$.

Итак, необходимые и достаточные условия переносимой конечной мощности W параксиальных параболических пучков $K-K$ $E(M_{-1p}M_{+p})$ и, тем самым, их физической реализуемости следующие: $(Z_0 > 0) \cap \left(a' > \dfrac{m+1}{2}\right)$. При этом мнимая часть a'' параметра a не влияет на КИ. Компьютерное моделирование подтверждает эти выводы.

В) Обсудим непараксиальный пучок типа

$$E(M_{-1}M_{+1}) = e^{i(Q+T)} \times$$
$$\times \left(X + iY\right)^m R_\perp^{-2m} M\left(a-m, 1-m; -i(R+Q)\right) \times$$
$$\times M\left(a-m, 1-m; i(R-Q)\right).$$

При $X = Y \to 0$ и $m \ge 0$ возникает неопределенность в амплитуде типа $E \to 0/0$, поэтому делаем замену $m \to (-m)$ и получаем пучок

$$E_*(M_{-1}M_{+1}) = e^{i(Q+T)} \times$$
$$\times \left(X - iY\right)^m M\left(a+m, 1+m; -i(R-Q)\right) \times .$$
$$\times M\left(a+m, 1+m; i(R+Q)\right).$$

При последующих заменах $a + m = a_1$, $Y \to (-Y)$ пучок $E_*(M_{-1}M_{+1})$ преобразуется в пучок $E(M\_M_+)$, рассмотренный ранее в [7].

2 Волновые поля Трикоми – Куммера

Предварительно обсудим возможности использования функций Трикоми U_+ и U_- в (1.1). При $Z \to \infty$ функции $U_+ \to Q^{-a}$, $U_- \to \dfrac{R_\perp^2}{2Q}$, что неплохо. Функции U_+ и U_- при $|R_\perp| \to 0$ стремятся к бесконечности, что физически неприемлемо. Попытки комплексифицировать переменные Z или X, Y функций U_+ и U_- приводят к разрывам (скачкам) аргументов $(\mp i(R \pm Q))$ и соответственно амплитуд вблизи $Z = 0$, что также неприемлемо. Поэтому вариант U_U_+ на всей оси Z не подходит. Однако можно использовать в (1.1), например, функцию M_U_+ при $Z > 0$ и функцию U_M_+ при $Z < 0$. Далее мы будем обсуждать пучки *Т-К* в области полупространства.

А) Обсудим непараксиальные пучки $T-K$

$$E(U_+M_-) = e^{i(Z+T)} \cdot \left(X + iY\right)^m \times$$
$$\times M\left(a, m+1; i(R-Z)\right) \cdot U\left(a, m+1; -i(R+Z)\right), \quad (2.1)$$

которые пригодны при $Z > 0$. Рассмотрим возможности КИ непараксиальных пучков $T-K$ с амплитудой $E(U_+M_-)$, которые аналитичны при $Z > 0$. Тогда при $|R_\perp| \to \infty$ функция

$$\left(\frac{R_\perp^{-1}}{\Gamma(a)} + \frac{R_\perp^{-2a+m}}{\Gamma(m+1-a)}\right)\left(\frac{R_\perp^{-1}}{\Gamma(a)} + \frac{R_\perp^{-2a+m}}{\Gamma(m+1-a)}\right).$$

Отсюда, в лучшем случае, можно добиться только квази-КИ. Конкретно, при $a' \ge (m+1)/2$ функция $E(U\_M_+) \to R_\perp^{-1}$, т. е. имеет место квази-КИ; при $a' = m'/2$ функция $E \to const$; при $a' < m'/2$ функция $E \to \infty$.

В частности, пусть $a = (m+1)/2$. Тогда

$$E = e^{i(Z+T)} \cdot \left(X + iY\right)^m \exp\left(\frac{i(R-Z)}{2}\right) J_{m/2}\left(\frac{R-Z}{2}\right) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{-i(R+Z)}{2}\right)(R+Z)^{-m/2} H_{m/2}^{(2)}\left(-\frac{R+Z}{2}\right) \to .$$
$$\to e^{i(\varphi+T)} J_{m/2}\left(\frac{R-Z}{2}\right) H_{m/2}^{(1)}\left(\frac{R+Z}{2}\right).$$

Последний вариант соответствует Ковалеву [10], формула (21). Такие пучки он называет пучками Ханкеля – Бесселя. У него упоминаются также фактически пучки $T-K$ $E(U\_M_+)$. Таким образом, пучки Ханкеля – Бесселя обладают квази-КИ.

В статье Изместьева [8], формула (17), производится переход к параксиальному пределу у функции Трикоми, следуя преобразованию, предложенному Пинни [13]. Однако, как показывает компьютерное моделирование, преобразование Пинни не верно ни количественно, ни качественно. Поэтому проведем параксиализацию пучков $T-K$ с амплитудой $E(U_+M_-)$ стандартным путем. Тогда получаем

$$E(U_{+p}M_{-p}) = e^{i(Q-T)} \left(X + iY\right)^m \times$$
$$\times U_{+p}\left(a, m+1; -2iQ\right) \cdot M_{-p}\left(a, m+1; i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right). \quad (2.2)$$

Обсудим возможные условия КИ параксиальных пучков $E(U_{+p}M_{-p})$. Как видим, они такие же, как для пучков $E(M_{+p}M_{-p})$, рассмотренные в [7]. Итак, необходимые и достаточные условия переносимой конечной мощности W параксиальных параболических пучков $T-K$ (2.2) и, тем самым, их физической реализуемости следующие: $(Z_0 > 0) \cap \left(a' > \dfrac{m+1}{2}\right)$. При этом мнимая часть a'' параметра a не влияет на КИ. Компьютерное моделирование подтверждает эти выводы.

Б) Перейдем к непараксиальным пучкам $T-K$

$$E(U_+M_{-1}) = e^{i(Z+T)} \cdot (R-Q)^{-m} \times$$
$$\times \left(X + iY\right)^m M\left(a-m, 1-m; i(R-Q)\right) \times \quad (2.3)$$
$$\times U\left(a, 1+m; -i(R+Q)\right).$$

Существует неопределенность в выражении (2.3), при $X=Y=0$ и $Z>0$. Заменяя $m\to(-m)$ в (2.3) и преобразуя, устраняем неопределенность и получаем непараксиальные пучки $T-K$

$$E_*(U_+M_{-1})=e^{i(Z+T)}\cdot(R+Q)^{-m}\times$$
$$\times\left(X-iY\right)^m M\left(a+m,1+m;i(R-Q)\right)\times \quad (2.4)$$
$$\times U\left(a,1-m;-i(R+Q)\right).$$

Пусть $a+m=-n$, тогда при $\left|R_\perp\right|\to\infty$ функция $E_*(U_+M_{-1})\to R_\perp^{n-a}$ и нет КИ. При $1-a=n$ $E_*(U_+M_{-1})\to R_\perp^{-1}$, т. е. квази-КИ. При $\left|R_\perp\right|\to\infty$ функция $(R_\perp^{-2a-m}+R_\perp^{-1})(R_\perp^{-2a-m}+R_\perp^{-1})$. Тогда амплитуда непараксиальных пучков $E\to R_\perp^{-1}$, т. е. наблюдается квази-КИ, если удовлетворяется условие $a'\geq\dfrac{1-m}{2}$. При $a'=(-m)/2$ $E\to const$; при $a'<(-m)/2$ $\left|E\right|\to\infty$.

Исследуем условия КИ параксиальных пучков

$$E_*(U_{+p}M_{-1p})=e^{i(Z+T)}\cdot Q^{-m}\cdot\left(X-iY\right)^m\times$$
$$\times M\left(a+m,1+m;i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)\cdot U\left(a,1-m;-i2Q\right)).$$

При $\left|R_\perp\right|\to\infty$ функция

$$E_*(U_{+p}M_{-1p})\to\left(R_\perp^{-2a-m}+R_\perp^{2a-2+m}e^{i\frac{R_\perp^2}{2Q}}\right).$$

Пусть $Z_0>0$. Тогда при $a'=-\dfrac{m}{2}$ $E\to const$, при $a'=\dfrac{1-m}{2}$ – квази-КИ. Однако, при $a'>\dfrac{1-m}{2}$ – строгая КИ для $E_*(U_{+p}M_{-1p})$.

В) Обсудим теперь пучки $T-K$

$$E(\tilde U_+M_-)=e^{i(T-R)}\cdot\left(X+iY\right)^m\times$$
$$\times U\left(m+1-a,m+1;i(R+Q)\right)\cdot M\left(a,m+1;i(R-Q)\right).$$

Здесь необходимо $Z>0$. Тогда, при $\left|R_\perp\right|>>1$ амплитуда волнового поля

$$E(\tilde U_+M_-)\to R_\perp^{a-1}M\left(a,m+1;iR_\perp\right).$$

Исследуем условия КИ таких пучков. При $a=m+1+n<-n$ нет КИ. В общем случае, при $\left|R_\perp\right|>>1$, $E(\tilde U_+M_-)\to R_\perp^{-1}+R_\perp^{2a-2-m}$. При $a'\leq(m+1)/2$ $\left|E\right|\to R_\perp^{-1}$ – квази-КИ. Если $a'=(m+2)/2$, то $E\to const$. При $a=-n$ снова $\left|E\right|\to R_\perp^{-1}$, но это условие входит в условие $a'\leq(m+1)/2$.

В параксиальной аппроксимации (при $Z>>1$) функция

$$E(\tilde U_{+p}M_{-p})=e^{i(T-Q)}\cdot\left(X+iY\right)^m\times$$
$$\times U\left(m+1-a,m+1;i2Q\right)\cdot M\left(m+1-a,m+1;-i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)$$

и при $\left|R_\perp\right|>>1$

$$E(\tilde U_{+p}M_{-p})\to R_\perp^m\cdot M\left(m+1-a,m+1;-i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right).$$

Исследуем условия КИ.

1. При $m+1-a=-n$ $E\to R_\perp^{m+2n}$ и нет КИ.

2. При $(a=-n\cap m\geq0\cap Z_0<0)$ выполняются условия КИ.

3. Общий случай. Разлагаем M в ряд. Получаем при $\left|R_\perp\right|>>1$, что

$$E(\tilde U_{+p}M_{-p})\to\left(R_\perp^{-m-2+2a}+R_\perp^{-2a+m}\exp\left(-i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)\right).$$

КИ может быть лишь при $Z_0<0$. Анализ показывает, что при $a'=(m+2)/2$ $E\to const$ и нет КИ; при $a'=(m+1)/2$ $E\to R_\perp^{-1}$ и квази-КИ; при $a'<(m+1)/2$ – строго КИ.

Г) Рассмотрим теперь пучки $T-K$

$$E(M_{-1}\tilde U_+)=e^{i(T-Q)}\cdot\left(X+iY\right)^m\cdot\left(R-Q\right)^{-m}\times$$
$$\times M\left(1-a,1-m;-i(R-Q)\right)\cdot U\left(m+1-a,m+1;i(R+Q)\right).$$

Существует неопределенность в последнем выражении, при $X=Y=0$. Заменяя здесь $m\to(-m)$ и преобразуя, устраняем неопределенность и получаем непараксиальные пучки $T-K$

$$E_*(M_{-1}\tilde U_+)=e^{i(T-Q)}\cdot\left(X-iY\right)^m\cdot\left(R+Q\right)^{-m}\times$$
$$\times M\left(1-a,1+m,-i(R-Q)\right)\cdot U\left(-m+1-a,-m+1;i(R+Q)\right).$$

Амплитуда поля при $\left|R_\perp\right|>>1$

$$E_*(\tilde U_+M_{-1})\to R_\perp^{m-1+a}M\left(1-a,1+m;-iR_\perp\right).$$

Исследуем условия КИ пучков $E_*(M_{-1}\tilde U_+)$.

1. При $1-a=-n$ $E\to R_\perp^{m+2n}$. Условий КИ нет.

2. $E_*(\tilde U_+M_{-1})\to R_\perp^{m-1+a}\cdot M\left(a+m,1+m;-iR_\perp\right)$.

Если $a+m=-n$, то $E\to R_\perp^{-1}$ – квази-КИ.

3. Общий случай. При $\left|R_\perp\right|>>1$

$$E_*(\tilde U_+M_-)\to(R_\perp^{m+n-2+a}+R_\perp^{-1+n-a})$$

и нет строгой КИ. Тогда при $a'=(2-m)/2$ $E\to const$ и нет КИ; при $a'\leq(1-m)/2$ $E\to R_\perp^{-1}$ и квази-КИ.

Рассмотрим параксиальное приближение для пучков $E_*(M_{-1p}\tilde U_{+p})$. Получаем

$$E_*(M_{-1p}\tilde U_{+p})=e^{i(T-Q)}\times$$
$$\times\left(X-iY\right)^m Q^{-m}M\left(1-a,1+m,-i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)\times$$
$$\times U\left(-m+1-a,-m+1;i2Q\right).$$

Исследуем условия КИ. При $|R_\perp| >> 1$

$$E_*(M_{-1p}\tilde{U}_{+p}) \to R_\perp^m \cdot M\left(1-a, 1+m, -i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right).$$

Разлагая M в ряд, при $|R_\perp| >> 1$ получаем, что

$$E_*(\tilde{U}_{+p}M_{-1p}) \to \left(\frac{R_\perp^{2a-2+m}}{\Gamma(m+a)} + \frac{R_\perp^{-2a-m}}{\Gamma(1-a)}\exp\left(-i\frac{R_\perp^2}{2Q}\right)\right).$$

Необходимое условие КИ – $Z_0 < 0$. Тогда при $a' > (2-m)/2$ $|E| \to \infty$; при $a' = (2-m)/2$ $E \to const$ и нет КИ; при $a' = (1-m)/2$ $E \to R_\perp^{-1}$ и квази-КИ; при $a' < (1-m)/2$ строгая КИ и переносимая мощность $W \to const$.

Заключение

В данной работе проанализированы выражения, описывающие дополнительные типы 3D световых пучков $K-K$ и новых типов пучков $T-K$ с непрерывным угловым индексом m в параболических вращательных координатах. Частными случаями введенных здесь пучков являются соответствующие пучки с дискретным целочисленным индексом m.

Установлено, что для непараксиальных пучков $K-K$ и $T-K$ путем подбора свободных параметров можно добиться только квази-КИ. Показано, что непараксиальные пучки $T-K$ физически реализуемы только в области полупространства $Z > 0$ или при $Z > 0$.

В то же время для параксиальных версий рассматриваемых пучков существуют несколько возможностей для строгой КИ. Существенно также, что здесь для КИ не требуется гауссова аподизация пучков.

Одновременный переход от дискретных значений m к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям a сильно расширяет класс известных в настоящее время пучков с цилиндрической симметрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиргель*, *С.С.* Бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 13–16.

2. *Гиргель*, *С.С.* Обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 11–15.

3. *Гиргель*, *С.С.* Обобщенные асимметричные волновые пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 10–14.

4. *Гиргель*, *С.С.* Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 4–7.

5. *Гиргель*, *С.С.* Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

6. *Гиргель*, *С.С.* Оптические пучки Вебера – Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 1–5.

7. *Гиргель*, *С.С.* Решения волнового уравнения в параболических вращательных координатах. I. 3D световые пучки Куммера-Куммера с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 13–17.

8. *Изместьев*, *А.А.* Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве / А.А. Изместьев // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 1970. – Т. XIII, № 9. – С. 1380–1388.

9. *Three-dimensional nonparaxial beams in parabolic rotational coordinates* / Dongmei Deng [et al.] // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38, № 19. – P. 3934–3936.

10. *Ковалёв*, *А.А.* Лазерные пучки Ханкеля-Бесселя / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 3. – С. 297–304.

11. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

12. *Флюгге*, *З*. Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.

13. *Pinney*, *E*. Laguerre function in the mathematical foundations of the electromagnetic theory of the paraboloidal reflector / E. Pinney // Math. Fnd Physics. – 1946. – Vol. 25. – P. 49–79.

Поступила в редакцию 25.06.2020.

УДК 538.9

АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ НИКЕЛЯ

С.В. Короткевич[1], В.В. Свиридова[2]

[1]*РУП «Гомельэнерго»*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

ANALYSIS OF DEFORMATION PROCESSES IN SURFACE NICKEL LAYER

S.V. Korotkevich[1], V.V. Sviridova[2]

[1]*RUE "Gomelenergo"*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

На основании принципа наименьшего действия предложены инварианты для описания процессов формирования и эволюции структуры поверхности раздела металлов при внешних воздействиях. Данные инварианты могут быть использованы, в том числе, и при создании и разрушении наноматериалов.

Ключевые слова*: нано, субмикро, микро, мезо и макроуровни деформации, равновесная и неравновесная деформация, инварианты.*

On the basis of the principle of least action, invariants are proposed for describing the processes of formation and evolution of the structure of the interface between metals under external influences. These invariants can be used, among other things, in the creation and destruction of nanomaterials.

Keywords*: nano, submicro, micro, meso and macrolevels of deformation, equilibrium and nonequilibrium deformation, invariants.*

Введение

Механизмы упрочнения и разрушения поверхностного слоя металлов, а также условия его самоорганизации при равновесной деформации хорошо изучена [1], [2], чего нельзя сказать о самоорганизации процессов при неравновесной деформации в условиях фазовой нестабильности кристаллической решётки [3]. В соответствии с нелинейной механикой и мезомеханикой пластическое течение в нагруженном твёрдом теле является многоуровневым процессом и связано с потерей сдвиговой устойчивости на нано, микро, мезо и макромасштабных уровнях [4]. Интенсивность внешнего воздействия определяет структуру, свойства и механизмы разрушения поверхностных слоёв металлов. Физика процессов, протекающих на поверхности металла при многоцикловом, малоамплитудном и знакопеременном трибонагружении, описана в работах [5]–[8]. Установлены механизмы формирования элементов дефектной структуры для каждого из структурных уровней деформации (нано, микро, мезо и макро) поверхностного слоя никеля при многоцикловой малоамплитудной и знакопеременной деформации, где высокая плотность дислокаций и локальный градиент ориентации структурных элементов в кристаллической решётке никеля играет фундаментальную роль на каждом из масштабных уровней деформации. С использованием различных модельных представлений, а именно, экстинкционных контуров, локальной кривизны кристаллической решётки никеля и дислокационных вкладов в механизмы упрочнения осуществлена количественная оценка величин внутренних напряжений и параметров дефектной структуры поверхностного слоя никеля – в условиях его фазовой нестабильности, где величина внутренних напряжений сопоставима и превышает величину модуля упругости никеля $\approx 2{\cdot}10^{11}$ Па. В литературных источниках ограничены данные о таких высоко диспергированных материалах и их физико-химических свойствах [4], [5]. Общепринятая точка зрения, что формирование нанообъектов происходит при высокоэнергетическом воздействии или интенсивной пластической деформации и / или равноканальном угловом прессовании в направлении сверху вниз, когда в результате внешнего воздействия при контактных давлениях в ГПа имеет место фрагментация материала от макро, мезо, микро до наномасштаба [5]. Данные о формировании наноструктур при контактных давлениях $\approx 0{,}1{\div}0{,}2$ кПа в присутствии поверхностно-активных веществ в условиях неравновесной деформации крайне ограничены.

Остаётся открытым вопрос об установлении механизмов и доминирующих факторов, определяющих физико-химические и механические свойства (аморфность, сверхпластичностть, каталитическую активность и др.) поверхности раздела металлов в условиях неравновесной деформации. Определение основных закономерностей в области равновесной и неравновесной деформации является актуальной проблемой при создании наноматериалов с уникальными свойствами.

© *Короткевич С.В., Свиридова В.В.*, 2020

Целью настоящей работы является изучение механизмов пластической деформации на различных структурно-масштабных уровнях в условиях фазовой нестабильности поверхностного слоя никеля при трибонагружении и определение основных закономерностей, описывающих кинетику упрочнения и разрушения поверхностного слоя металлов.

1 Методика эксперимента

Исследовался поликристаллический никель чистотой 99,99%. Образцы в виде тонких дисков полировались электролитически и отжигались в вакууме 0,133 мПа при 973 К. Испытание на трение пары Ni – Mo проводилось на машине АЕ-5 с точной установкой площади контактирования при удельной нагрузке ≈ 84 кПа и линейной скорости ≈ 0,5 м/с. Правильное использование нагрузочно-скоростных параметров или верное применение масштабного фактора наряду с высокой чувствительностью метода ферромагнитного резонанса (ФМР) к структурным изменениям в тонком поверхностном слое толщиной ≈ 0,01 ÷1 мкм позволило увидеть при анализе экспериментальных данных осциллирующую кинетику изменения плотности дислокаций и интенсивности изнашивания, что позволило грамотно интерпретировать полученные результаты, которые хорошо согласуются с результатами работы [5]. Электронно-микроскопические исследования никеля осуществлялись на микроскопе ЭВМ-100АК и Hitachi-H800 методом тонких фольг на «просвет». Разрешение Hitachi H-800 составляет ≈ 0,1 нм. После испытания на трение фольги подвергались одностороннему электролитическому утонению с противоположной стороны от поверхности трения, что позволило исследовать приповерхностный объем, примыкающий к поверхности трения. Методика препарирования образцов никеля для просвечивающей электронной микроскопии приведена в работе [2].

2 Результаты и обсуждения

Анализ экспериментальных данных, приведенных в работах [3], [5]–[12] позволил автору на основании принципа наименьшего действия [13] установить две основные фундаментальные закономерности и предложить третью, сформулированную в работах [3], [14].

Первая закономерность. Определена асимметричная кинетическая зависимость между плотностью дислокаций и интенсивностью разрушения или изнашивания, а именно, увеличение плотности дислокаций до некоторого критического значения обуславливает упрочнение поверхностного слоя. Последнее определяет снижение интенсивности разрушения. Установлена обратно пропорциональная зависимость между локальным градиентом ориентации границ структурных элементов кристаллической решётки или плотностью дислокаций на каждом из структурно-масштабных уровней деформации и интенсивностью разрушения поверхностного слоя никеля. Таким образом, зависимость плотности дислокаций от времени униполярна кинетике интенсивности изнашивания [5] и выполняется выражение:

$$\rho \cdot I = const,$$

где ρ – плотность дислокаций, I – интенсивность изнашивания, область определения $const \geq 0$.

Вторая закономерность. Скорость увеличения (K_1) и снижения плотности дислокаций (K_2) при трибонагружении определяется предварительно сформированной структурой и разориентировкой внутренних границ раздела. Скорость увеличения плотности дислокаций при упрочнении поверхностного слоя никеля определяет и скорость снижения плотности дислокаций, и, соответственно, релаксации напряжений деформации для одного и каждого цикла изменения прочностных свойств. Выполняется выражение [13]:

$$\frac{K_1}{K_2} = const, \tag{2.1}$$

где $K = \Delta H / t$.

Необходимо отметить, что константа в выражении (2.1) близка к единице. Однако по мере аккумулирования энергии подповерхностными слоями с течением времени может доминировать хрупкий механизм разрушения, что приводит к увеличению скорости релаксации уширения линии феромагнитного резонанса (K_2).

Третья закономерность. Основным условием совместимости деформации на масштабно-структурных уровнях: нано, микро, мезо и макро является выполнение закона сохранения момента импульса, а именно, сумма моментов импульса равна нулю, что обеспечивает выполнение условия для зернограничного скольжения структурных элементов при пластической деформации. Выполняется закон сохранения момента импульса [3], [14]:

$$\sum_{i=1}^{N} RotJ_i = 0, \tag{2.2}$$

где J_i – потоки дефектов на i-м структурно-масштабном уровне.

Используем методы математической физики для описания процессов, протекающих в поверхностном слое никеля при трибонагружении. Зависимость $\Delta H(t)$ имеет нелинейный волновой характер (рисунок 2.1).

С точки зрения методов математической физики, если за уширение линии ФМР (ΔH) принять одну из независимых переменных, описывающих состояние поверхностного слоя никеля [15], тогда изменение состояния поверхностного слоя никеля при трибонагружении можно описать уравнениями в частных производных. С учётом рисунка 2.1, зависимость $\Delta H(t)$ имеет нелинейный волновой характер. Используем волновое уравнение для описания физики процессов деформирования и разрушения поверхности никеля:

$$\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu^2}\,\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial t^2}, \qquad (2.3)$$

где v – скорость изменения плотности дислокаций, ΔH – уширение линии ферромагнитного резонанаса.

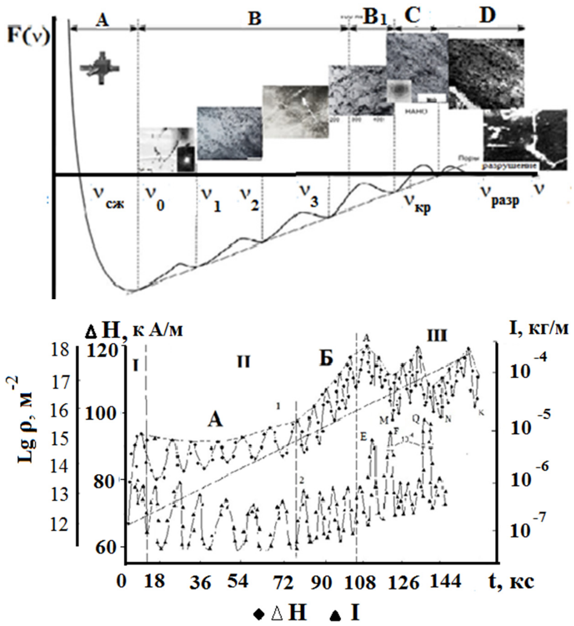


Рисунок 2.1 – Зависимость кинетики структурных изменений поверхностного слоя никеля при трении от потенциала Гиббса ($F(v)$), уширения линии ферромагнитного резонанса (ΔH) и интенсивности изнашивания (I)

Известно, что величина уширения линии ФМР (ΔH) прямо пропорциональна плотности дислокаций (ρ) [5]. Проведём анализ волнового уравнения с использованием экспериментальных данных, приведенных на рисунке 2.1. Рассмотрим область равновесной деформации (рисунок 2.1, область II) и область неравновесной деформации (рисунок 2.1, область III). Необходимо отметить, что отношение уширения линии ФМР (ΔH) ко времени (t), определённая как скорость изменения уширения линии ФМР (постоянная K), есть первая производная $\frac{\partial \Delta H}{\partial t}$. Вторая производная от уширения линии ФМР по времени $\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial t^2}$ есть ничто иное как скорость изменения $\frac{\Delta H}{\Delta t}$, то есть скорость изменения огибающей функции $\Delta H(t)$ на рисунке 2.1, которая показана пунктиром. Проведём анализ этой огибающей для областей II и III с использованием установленных экспериментально граничных условий.

Область равновесной деформации II состоит из двух частей: часть А и часть Б. Огибающая функции $\Delta H(t)$ для области А можно аппроксимировать прямой линией параллельной оси времени на рисунке 2.1. Тогда выполняется выражение: $\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial t^2} = 0$.

Произведение двух слагаемых ($1/v^2$) и $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)$ в волновом уравнении (2.3) равно нулю и, следовательно, выполняется выражение:

$$\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} = 0.$$

Из первого закона Фика: $J = -\frac{D \cdot dC}{dx}$, где J – диффузионный поток плотности дислокаций, прошедший через единицу площади в единицу времени, D – коэффициент диффузии, $dC\,/\,dx$ – градиент концентрации плотности дислокаций в направлении диффузии следует, что поток плотности дислокаций через единицу площади в единицу времени является величиной постоянной. Естественно предположить, что этот поток направлен вглубь от поверхности. Учитывая то, что локальный градиент ориентации структурных элементов (χ) прямо пропорционален плотности дислокаций, следует, что:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = const. \qquad (2.4)$$

Локальный градиент ориентации структурных элементов (χ) в направлении (OX) есть величина постоянная, которая обратно пропорционально снижается с увеличением расстояния от поверхности (рисунок 2.2). Тогда постоянная должна быть определена как в минус первой степени и тогда выражение (2.4) определяется в виде:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = const^{-1}. \qquad (2.5)$$

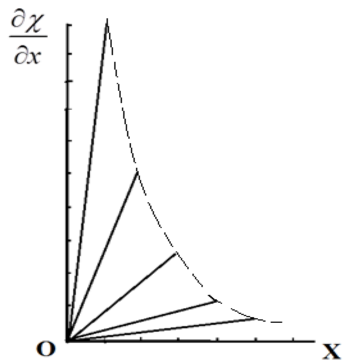


Рисунок 2.2 – Схема, качественно изображающая обратно пропорциональную зависимость изменения локального градиента ориентации структурных элементов (или плотности дислокаций) с увеличением расстояния или глубины от поверхности

Из анализа участка А области II на рисунке 2.1 следуют два вывода: поток плотности дислокаций через единицу площади в единицу времени является величиной постоянной, направленной вглубь от поверхности; изменение локального градиента ориентации структурных элементов в направлении от поверхности есть величина постоянная, которая убывает в соответствии с обратно пропорциональной зависимостью с увеличением расстояния от поверхности.

Перейдём к анализу участка Б области II на рисунке 2.1.

Анализ волнового уравнения (2.3) участка Б на рисунке 2.1 показывает, что огибающая скорости изменения $\Delta H / \Delta t$ представляет прямую линию, направленную под углом 45° к оси времени, так как

$$\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial t^2} \approx \frac{120\ \text{кА/м} - 95\ \text{кА/м}}{25\ \text{кс}} \approx 1\ \text{А/м} \cdot \text{с}.$$

Тогда выполняется выражение:

$$\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} \approx 1\ \text{А/м} \cdot \text{с}. \qquad (2.6)$$

Произведение двух величин равняется единице, когда каждое из них равно единице либо минус единице. Так как скорость движения плотности дислокаций по физическому смыслу не может принимать отрицательное значение, то выполняется система уравнений:

$$v = 1. \qquad (2.7)$$

и

$$\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} = 1. \qquad (2.8)$$

Скорость движения плотности дислокаций вглубь от поверхности никеля есть величина постоянная, что следует из выражения (2.7). Из выражения (2.8) с учётом того, что $\frac{\partial \Delta H}{\partial x} = J$, где J – поток плотности дислокаций через единичную площадь в единицу времени, следует выполнение выражения: $\frac{\partial J}{\partial x} = 1$, то есть градиент потока дислокаций вглубь от поверхности никеля есть величина постоянная. Другими словами, число линейных дефектов (дислокаций), проходящих через единицу площадок, выстроенных на некотором расстоянии друг от друга вглубь от поверхности, в единицу времени есть величина постоянная (рисунок 2.3). Количественная оценка выражения (2.5) с использованием выражения (2.6) и (2.7) показывает, что на каждом цикле изменения прочностных свойств на участке Б рисунка 2.1 поток плотности дислокаций (J) через единичную площадь в единицу времени составляет ≈ 0,25 А/м·с. С учётом того, что глубина поверхностного слоя никеля, в котором накапливается энергия фрикционного нагружения, составляет ≈ 100 мкм. Тогда распределение потока по глубине (градиент потока) с шагом $\Delta X = 25$ мкм (рисунок 2.3) через единичную площадь в единицу времени составляет ≈ 0,06 А/м·с.

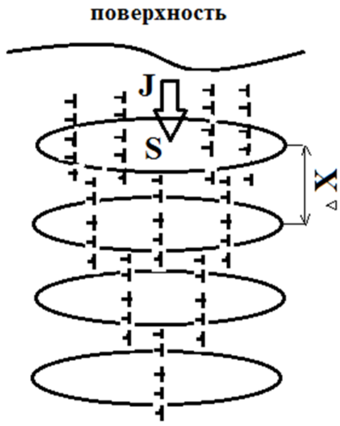


Рисунок 2.3 – Схема, качественно изображающая постоянный градиент потока плотности дислокаций с увеличением расстояния или глубины от поверхности

Из анализа участка Б области II на рисунке 2.1 следуют два вывода: скорость движения плотности дислокаций вглубь от поверхности является величиной постоянной ≈ 1 ($(\text{м}\cdot\text{с})^{-1}$); поток градиента плотности дислокаций через единицу площади в единицу времени является величиной постоянной равной ≈ 1 (м^{-4}) и направлен вглубь от поверхности.

Анализ волнового уравнения (2.3) в области неравновесных процессов (рисунок 2.1, область III) показывает, что огибающая скорости изменения $\Delta\text{H} / \Delta t$ представляет собой осциллирующую (периодически возрастающую и убывающую) во времени зависимость, то есть градиент потока плотности дислокаций $\left(\frac{\partial J}{\partial X}\right)$ периодически увеличивается и уменьшается (рисунок 2.4) и изменяет свой знак, то есть изменяет свое направление.

Необходимо отметить, что для участка А и Б области II на рисунке 2.1 наблюдалось только увеличение абсолютного значения огибающей, а низко частотной (НЧ) составляющей не было. Период НЧ составляющей градиента потока плотности дислокаций составляет 23÷25 кс. Скорость увеличения НЧ составляющей

$$\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial t^2} \approx \frac{120\ \text{кА/м} - 95\ \text{кА/м}}{10\ \text{кс}} \approx 2{,}5\ \text{А/м} \cdot \text{с}$$

обозначим её как K_1', а скорость снижения НЧ составляющей

$$\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial t^2} \approx \frac{120\ \text{кА/м} - 95\ \text{кА/м}}{6\ \text{кс}} \approx 4{,}2\ \text{А/м} \cdot \text{с}$$

обозначим её как K_2'. Отношение увеличения (K_1') к снижению (K_2') НЧ составляющей составляет ≈ 0,6.

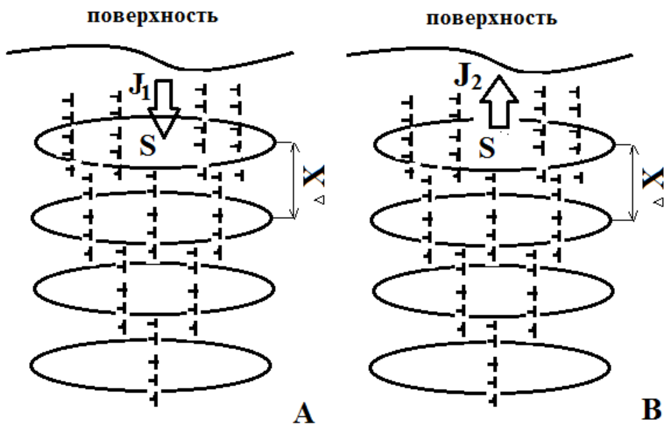


Рисунок 2.4 – Схема, качественно изображающая изменение направления градиента потока плотности дислокаций при увеличении и снижении напряжений внутри кристаллической решётки никеля с увеличением расстояния или глубины от поверхности: А – увеличение величины внутренних напряжений; Б – снижение величины внутренних напряжений

Выполняется выражение:

$$\frac{K_1'}{K_2'} = \frac{J_1}{J_2} = 0,6.$$

Градиент потока плотности дислокаций (J_2) при снижении величины напряжений превышает градиент потока плотности дислокаций (J_1) при увеличении величины напряжений в ≈ 1,7 раза. С учётом выполнения соотношения (2.2), где сумма потоков дефектов равна нулю, следует, что для выполнения условия пластичности и аморфности поверхностных слоёв никеля в пределах одного цикла НЧ составляющей (не включая точки M, N и K на рисунке 2.1) поток плотности дислокаций при снижении величины напряжений соответственно увеличивается в ≈ 1,7 раза.

Нисходящие и восходящие потоки дефектной структуры и осциллирующий характер напряжений определяют формирование высокоразвитого рельефа (рисунок 2.5), складки которого можно интерпретировать как гофрированный поверхностный слой. Высокая плотность дислокаций в локальных зонах, в виде ярко выраженных точек белого цвета, определяет динамическую рекристаллизацию с формированием структур с высоким модулем упругости.

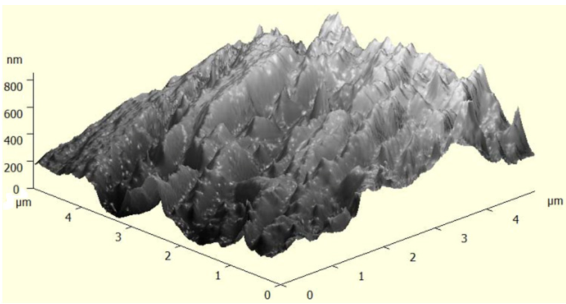


Рисунок 2.5 – Трёхмерное изображение СМ-изображения поверхности никеля с наноструктурными образованиями

В точках минимума (т. M, N и K) зависимости уширения линии ФМР (ΔH) от времени (t) (рисунок 2.1, кривая 1, область III), где происходит локализованный во времени лавинообразный селективный механизм разрушения с увеличением интенсивности изнашивания на два – три порядка (рисунок 2.1, область III, кривая 2, т. E, F, Q) имеет место нарушение закона сохранения момента импульса, т. е. выражения (2.2). Реализуется принцип наименьшего действия, где селективный механизм разрушения пористого слоя определяет удаление очагов несплошности материала (микротрещин, пор, двойников, дефектов упаковок и т. д.), что определяет сохранение долговечности материала с позиций синергетики и препятствует проникновению трещин вглубь от поверхности.

Из анализа области III на рисунке 2.1 следуют четыре вывода: градиент потока плотности дислокаций $\left(\frac{\partial J}{\partial X}\right)$ периодически увеличивается и уменьшается при увеличении времени трибонагружения; градиент потока плотности дислокаций изменяет своё направление; увеличение интенсивности градиента восходящих и нисходящих потоков плотности дислокаций обуславливает увеличение нижнего предела изменения интенсивности изнашивания, как минимум в ≈ 7 раз, а верхнего предела изменения интенсивности изнашивания при лавинообразном селективном механизме разрушения поверхностного слое на три порядка; градиент потока плотности дислокаций (J_2) при снижении величины напряжений превышает градиент потока плотности дислокаций (J_1) при увеличении величины напряжений в ≈ 1,7 раза.

Анализ полученных результатов с использованием просвечивающей электронной микроскопии показал [8], что основными микроструктурными элементами диспергирования поверхностного слоя являются: 1) зоны с высокой плотностью дислокаций, со временем нагружения приобретающие форму тонких жгутов и ориентирующиеся вдоль направления скольжения; 2) полосы скольжения и многочисленные тонкие двойники по их границам, являющиеся источниками зарождения мелких трещин; 3) многочисленные микропоры внутри деформированной решетки и по границам зерен, их коагуляция приводит к формированию очагов транскристаллитного и интеркристаллитного разрушения (рисунок 2.6, *а*). Длительное фрикционное нагружение приводит к прогрессирующему разрыхлению поверхностного слоя никеля (рисунок 2.6, *б*), связанному с возрастанием числа очагов разрушения [10]. Неравновесные вакансии на узлах решетки никеля в условиях пластической дисторсии формируют механизмом коалесценции микропористость, которая является прекурсором пластических сдвигов [15]–[17] мезо и макромасштабов, определяющих лепестково-послойный механизм разрушения [12], [18] и лавинообразное селективное разрушение поверхности [8] в локальный момент времени.

а)

б)

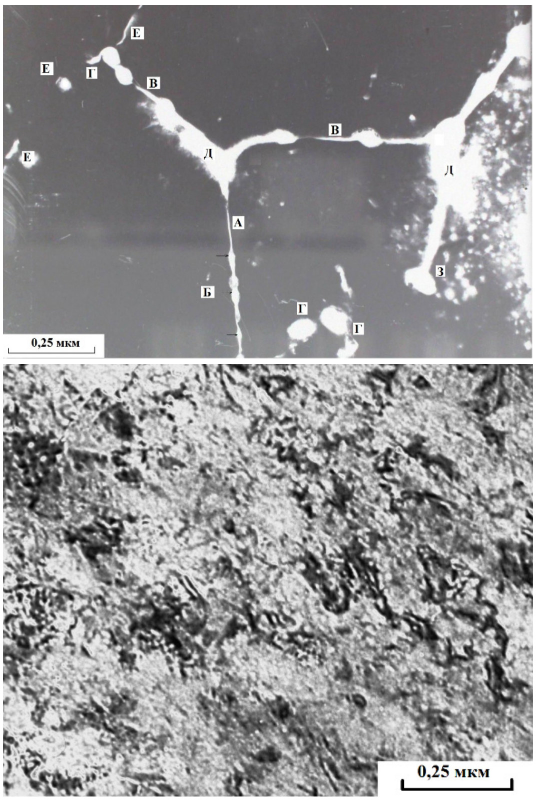


Рисунок 2.6 – Формирование пор и разрушение по границам зёрен и через зерно (*а*); диспергирование и разрыхление поверхностного слоя (t = 150 кс) (*б*)

В сильно деформированной кристаллической решётке развивается высокая пористость, достигающая ≈ 25% от общего объёма материала и высокая концентрация микротрещин и других нарушений сплошности материала [5].

Необходимо отметить, что надо проводить дальнейшие системные исследования по установлению основных инвариантных закономерностей.

Заключение

Установлено, что кинетика формирования структуры и эволюции поверхности раздела металлов при их трибонагружении протекает в соответствии со следующими положениями неравновесной термодинамики:

– каждому устойчивому состоянию поверхности раздела металлов будет соответствовать своя структура с определённым значением свободной энергии и, соответственно, с видами её перераспределения между элементами границ и внутри структурного образования;

– система стремится занять положение или сформировать такую структуру поверхности раздела, которой соответствует минимальный термодинамический потенциал Гиббса;

– если действие нагрузочно-скоростных параметров или внешнего воздействия превышает некоторую критическую величину поступившей в систему энергии, то она переходит в новое структурное состояние, характеризующееся более низким значением свободной энергии;

– интенсивность внешнего воздействия определяет длительность цикла изменения прочностных характеристик, величину накопления энергии деформации и степень фрагментации кристаллической решётки металлов, и соответственно локальный градиент ориентации границ структурных элементов, где их геометрический размер, количество, плотность, и взаимодействие определяют доминирующую роль того или иного масштабного уровня пластической деформации в тот или иной момент времени кинетики структурообразования, и механизм его разрушения в соответствии с минимумом потенциальной энергии взаимодействия сформировавшейся структуры.

Анализ кинетики процессов деформации и разрушения масштабных уровней: нано, субмикро, микро, мезо и макро с использованием граничных условий, прилаживаемых к нелинейному волновому уравнению, показывает, что:

– в области равновесной деформации при отсутствии градиента потока структурных дефектов (рисунок 2.1, область А): поток плотности дислокаций является величиной постоянной, направленной вглубь от поверхности; изменение локального градиента ориентации структурных элементов есть величина постоянная, которая убывает в соответствии с обратно пропорциональной зависимостью с увеличением расстояния от поверхности;

– в области равновесной деформации при наличии градиента потока структурных дефектов: скорость движения плотности дислокаций (рисунок 2.1, область Б) вглубь от поверхности является величиной постоянной равной ≈ 1 $(м·с)^{-1}$; поток градиента плотности дислокаций через единицу площади в единицу времени является величиной постоянной ≈ 1 ($м^{-4}$);

– в неравновесной деформации (рисунок 2.1, область III): градиент потока плотности дислокаций изменяет своё направление; градиент потока плотности дислокаций имеет осциллирующий характер во времени; увеличение интенсивности градиента восходящих и нисходящих потоков плотности дислокаций обуславливает увеличение нижнего предела изменения интенсивности изнашивания как минимум в ≈ 7 раз, а верхнего предела изменения интенсивности изнашивания при лавинообразном селективном механизме разрушения поверхностного слоя на три порядка; градиент потока плотности дислокаций (J_2) при снижении величины напряжений превышает градиент потока плотности дислокаций (J_1) при увеличении величины напряжений в ≈ 1,7 раза.

Таким образом, количество накопления дефектов, их размер и взаимодействие определяют процесс саморегуляции в области неравновесной деформации. Накопление дефектов поверхностным слоем и связанное с этим увеличение скрытой энергии деформации понижает уровень энергии активации процессов релаксации на столько, что эти процессы при дальнейшем деформировании играют роль своеобразного регулятора как количества дефектов, так и способа их взаимодействия и распределения. Реализуется принцип наименьшего действия, где селективный механизм разрушения пористого и аморфного слоя определяет удаление очагов несплошности материала (микротрещин, пор, двойников, дефектов упаковок и т. д.), что определяет сохранение целостности и сплошности материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moser*, *B.* Cyclic strain hardening of nanocryslline nickel / B. Moser, T. Hanlon, K.S. Kumar // Scri. Mater. – 2006. – Vol. 54, № 6. – P. 1151–1155.

2. *Поверхностные слои и внутренние границы раздела в гетерогенных материалах* / В.Е. Панин [и др.]. – Новосибирск: СО РАН, 2006. – 520 с.

3. *Multiscaling of Lattice Curvature on Friction Surfaces of Metallic Materials as a Basic of Their Wear Mechanism* / V.E. Panin, V.G. Pinchuk, S.V. Korotkevich, S.V. Panin // Physical Mesomechanics. – Vol. 20, № 1. – 2017. – P. 69–77.

4. *Панин*, *В.Е.* Физическая мезомеханика деформируемого твёрдого тела как многоуровневой системы. I. Физические основы многоуровневого подхода / В.Е. Панин, В.Е. Егорушкин, А.В. Панин // Физическая мезомеханика. – 2006. – Т. 9, № 3. – С. 9–22.

5. *Пинчук*, *В.Г.* Кинетика упрочнения и разрушения поверхности металлов при трении / В.Г. Пинчук, С.В. Короткевич // LAP Lambert Academic Publishing. – Saarbrǔcken: LAP, 2014. – 180 с.

6. *Короткевич*, *С.В.* *Диагностика опор качения и скольжения по* состоянию поверхности раздела сопряжённых тел физическими методами / С.В. Короткевич, В.Г. Пинчук, В.В. Кравченко // LAP Lambert Academic Publishing. – Saarbrǔcken: LAP, 2016. – 266 с.

7. *Pinchuk*, *V.* Physical patterns of dislocation structure kinetics in friction loaded surface layers / V.G. Pinchuk, S.V. Korotkevich // Global Journal For Research Analysis. – 2015. – Vol. 4, № 5. – P. 255–257.

8. *Pinchuk*, *V.G.* Kinetics of Microstructure and Selective Mechanism of Fracture of Metal Surface Layer under Friction / V. G. Pinchuk, I. A. Buyanovskiy, S. V. Korotkevich // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Vol. 6, № 5. – P. 355–359.

9. *Pinchuk*, *V.G.* Microstructure evolution in friction-loaded layers of nickel / V.G. Pinchuk, S.V. Korotkevich // Indian Journal of Research. – 2015. – Vol. 4, № 2. – P. 8–10.

10. *Pinchuk*, *V.G.* Relationship of Microstructural Criteria of Fracture and Evolution of Metal Surface and Physicochemical Properties of Medium at Friction / V.G. Pinchuk, S.V. Korotkevich, E.A. Kovalev // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Vol. 8, № 4. – P. 539–545.

11. *Pinchuk*, *V.G.* Influence of the physical and chemical nature of quenching medium and friction regimes on the structure and kinetics of hardening and destruction of the surface layer of nickel / V.G. Pinchuk, S.V. Korotkevich, E.A. Kovalev // Inorganic Materials: Applied Research. – 2018. – Vol. 9, № 4. – P. 736–740.

12. *Структурно-масштабные уровни деформации поверхностного слоя никеля* / С.В. Короткевич, В.В. Свиридова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 17–22.

13. *Korotkevich*, *S.V.* Hamilton's principle for to search of invariants at creation, evolution and destruction of nanomaterials / S.V. Korotkevich // International Journal of Engineering Research and Science. – 2018. – Vol. 4, iss. 6. – P. 31–41.

14. *Панин*, *В.Е.* Физические основы мезомеханики среды со структурой / В.Е. Панин // Изв. Вузов. Физика – 1992. – Т. 35, № 4. – С. 5–18.

15. *Николис*, *Г.* Самоорганизация в неравновесных процессах / Г. Николис, Н. Пригожин. – М.: Мир, 1977. – 512 с.

16. *Intrater*, *I.* Grain boundary and intercristalline cracking / I. Intrater, E.S. Machlin // Acta Metall. – 1959. – Vol. 7, № 2. – P. 140–142.

17. *Neuman*, *P.* Coarse slip model of fatigue / P. Neuman // Acta metallurgical. – 1969. – Vol. 17, № 9. – P. 1219–1225.

18. *Holste*, *C.* Cyclic plasticity of nickel, from single crystals to submicrocrystalline polycrystals / C. Holste // Philosophical Magazine. – 2004. – Vol. 84, № 3–5. – P. 299–315.

19. *Suh*, *N.P.* An overview of the delaminatation theory of wear / N.P. Suh // Wear. – 1977. – Vol. 44, № 1. – P. 1–16.

Поступила в редакцию 15.11.2020.

Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020

ФИЗИКА

УДК 534.29

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ ЗВУКОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ И КАВИТАЦИОННОГО ШУМА В ПОЛЕ ФОКУСИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

А.В. Котухов, В.С. Гаврилюк, Н.А. Жарко, В.С. Минчук, Н.В. Дежкунов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, *Минск*

INVESTIGATION OF THE CORRELATION BETWEEN SOUND LUMINESCENCE AND CAVITATION NOISE IN THE FIELD OF A FOCUSING EMITTER

A.V. Kotukhov, V.S. Gavriluk, N.A. Zharko, V.S. Minchuk, N.V. Dezhkunov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, *Minsk*

Выполнено исследование связи спектральных характеристик кавитационного шума и интенсивности звуколюминесценции (ЗЛ) в поле фокусирующего излучателя. Установлено, что наибольшая степень корреляции с интенсивностью звуколюминесценции из исследовавшихся параметров характерна для широкополосной составляющей кавитационного шума, т. е. интенсивности полного выходного сигнала датчика за вычетом всех гармоник и субгармоник. Этот результат позволяет сделать вывод, что широкополосная составляющая кавитационного шума генерируется захлопывающимися кавитационными полостями и, следовательно, может использоваться в качестве индикатора уровня активности нестационарной кавитации.

Ключевые слова: *кавитация*, *звуколюминесценция*, *захлопывание пузырьков*, *спектр кавитационного шума.*

A study of the relationship between the spectral characteristics of cavitation noise and the intensity of sound luminescence (SL) in the field of a focusing emitter was carried out. It was found that the highest degree of correlation with the SL intensity of the parameters studied is characteristic of the broadband component of cavitation noise, i.e., the intensity of the total output signal of the sensor minus all harmonics and subharmonics. This result allows us to conclude that the wide-band component of cavitation noise is generated by collapsing cavities and, therefore, can be used as an indicator of the level of transient cavitation activity.

Keywords: *cavitation*, *sound luminescence*, *collapse of bubbles*, *cavitation noise spectrum.*

Введение

Акустическая кавитация, представляющая собой явление образования, пульсаций и захлопывания микропузырьков газа в жидкости под действием переменного давления [1], [2] используется в промышленности уже несколько десятилетий. Областью наиболее широкого применения является ультразвуковая очистка твердых поверхностей, например в машиностроении [3] в микроэлектронике [4], при обработке расплавов металлов [5].

Разрабатываются новые направления применения ультразвука в кавитационном режиме: при обработке суспензий наночастиц [6], в гальванотехнике [7], пищевой промышленности и медицине [8]. Наиболее интенсивное воздействие на процессы в жидкостях оказывают нестационарные кавитационные пузырьки. При их захлопывании генерируются интенсивные ударные волны, высокие температуры, микроструи жидкости и химически активные радикалы.

К настоящему времени предложено значительное количество методов оценки уровня активности кавитации, основанных на регистрации эффектов, сопровождающих кавитацию [9]. Это такие явления как кавитационная эрозия, (разрушение твердых тел под действием кавитации), генерирование свечения в видимой области спектра – звуколюминесценция (ЗЛ), кавитационный шум (КШ), ультразвуковой капиллярный эффект, различные звукохимические реакции [1], [2], [10]. Разработка приборов для исследования кавитации и измерения ее активности с использованием кавитационного шума или спектральных составляющих КШ является одним из наиболее перспективных направлений в данной области. Обусловлено это тем, что КШ легко преобразуется в электрический сигнал и может регистрироваться относительно простыми методами, в том числе и в оптически непрозрачных жидкостях, суспензиях, эмульсиях и биологических тканях.

Однако механизмы генерирования основных спектральных компонент КШ до сих пор достоверно не установлены. Например, в работе [1] теоретически обоснована гипотеза, в соответствии с которой непрерывная составляющая КШ возникает как результат суммирования ударных волн, генерируемых при захлопывании кавитационных полостей. Действительно, ударная волна в первом приближении может быть представлена дельта-функцией, а спектр дельта-функции, как известно [11], – непрерывный. Авторы [12] выдвинули альтернативную гипотезу, согласно которой причиной генерирования непрерывной составляющей КШ являются стохастические

© *Котухов А.В.*, *Гаврилюк В.С.*, *Жарко Н.А.*, *Минчук В.С.*, *Дежкунов Н.В.*, 2020

вариации плотности пузырьков в кавитационной области.

Многочисленными экспериментами и теоретическими расчетами [13]–[15] установлено, что звуколюминесценция возникает вследствие захлопывания кавитационных полостей и поэтому является надежным индикатором нестационарной кавитации.

Учитывая изложенное, поиск спектральных характеристик КШ, коррелирующих с интенсивностью ЗЛ, представляет значительный интерес с двух точек зрения: для уточнения представлений о механизме генерирования соответствующих спектральных составляющих КШ и для оценки возможности использования параметров, коррелирующих с интенсивностью ЗЛ, в качестве индикаторов активности нестационарной кавитации.

1 Установка и методика исследований

Подробное описание использовавшейся установки (рисунок 1.1 представлено в работах [16], [17]. Пьезокерамический излучатель установлен в нижней части рабочей емкости, которая выполнена в виде цилиндра из нержавеющей стали высотой 160 мм и диаметром 100 мм. Излучатель – фокусирующий, его резонансная частота f_0 = 720 кГц. Датчик акустического сигнала (гидрофон) вмонтирован через крышку ёмкости и установлен за фокальным пятном излучателя на расстоянии 25 мм от него. В боковой стенке емкости на уровне фокального пятна установлен фотоумножитель Phillips XP1110 со световодом, использовавшийся для регистрации ЗЛ.

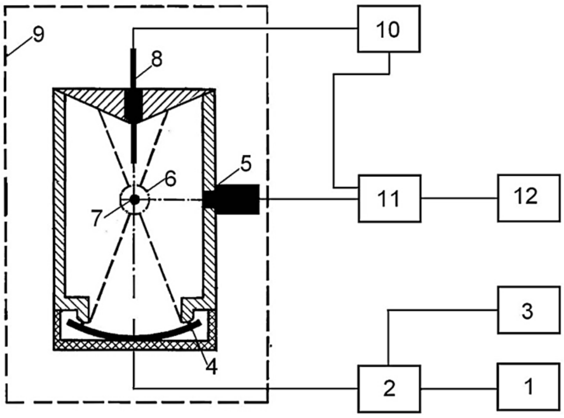


Рисунок 1.1 – Схема экспериментальной установки
1 – генератор переменного напряжения 720 кГц,
2 – смеситель,
3 – генератор импульсов,
4 – фокусирующий преобразователь (излучатель),
5 – фотоумножитель,
6 – кавитационная область,
7 – фокальное пятно,
8 – датчик,
9 – светонепроницаемый короб,
10 – предусилитель,
11 – осциллограф,
12 – анализатор спектра

Сигналы с фотоумножителя и датчика подаются на двухканальный осциллограф Hewlett Packard 54601A. Для исследования спектров кавитационного шума к осциллографу параллельно подключался анализатор спектра Hewlett Packard E4411B. Для питания излучателя используется генератор УЗГ-08-01 (БГУИР, Минск).

Методика состояла в следующем. Варьируя интенсивность ультразвука (путем изменения напряжения на излучателе), измеряли интенсивность ЗЛ и одновременно регистрировали спектры КШ. Сравнение зависимостей спектральных характеристик КШ с интенсивностью ЗЛ позволяет оценить степень корреляции исследуемых параметров с активностью кавитации.

2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 2.1 представлены спектры кавитационного шума, полученные при различных напряжениях U на излучателе: *а*) U = 25 В, *б*) 105 В, *в*) 125 В, *г*) 170 В. При проведении исследования, температура жидкости поддерживалась в пределах 21±2,5° C, длительность импульсов ультразвука τ = 3 мс, период следования T = 30 мс.

Данные спектры характерны для следующих основных состояний кавитационной области [16]: при интенсивности ультразвука ниже порога кавитации (2.1, *а*), порядка порога кавитации (2.1, *б*), развитая кавитационная область (2.1, *в*) и кавитационная область в состоянии насыщения кавитационными пузырьками (2.1, *г*). Основная частота f_0, т. е. частота ультразвукового поля, отмечена на рисунке 2.1 маркером. Штриховой линией показана непрерывная составляющая кавитационного шума (2.1, *в*).

В докавитационном режиме (2.1, *а*) спектр акустического сигнала включает только основную частоту f_0. С возникновением кавитации в спектре появляются гармоники nf_0, субгармоника f_0 / 2 и частоты (n + 1 / 2) f_0, где n – целое число. Одновременно регистрируется возникновение ЗЛ. С ростом интенсивности ультразвука растет интенсивность гармоник и других спектральных компонент КШ, появляется также непрерывная составляющая. При этом увеличивается также и интенсивность ЗЛ.

В таблице 2.1 представлен перечень параметров, по которым проводилось исследование их корреляции с активностью кавитации, оцениваемой по интенсивности звуколюминесценции.

На рисунке 2.2 приведены результаты сопоставления выходного сигнала фотоумножителя и параметров спектра КШ, наиболее близко коррелирующих с интенсивностью ЗЛ. Здесь спектральный акустический параметр (H) представлен в линейном масштабе, а выходной сигнал фотоумножителя (L) – в логарифмическом.

Из представленных графиков видно, что в диапазоне интенсивностей, соответствующих первой стадии развития кавитационной области

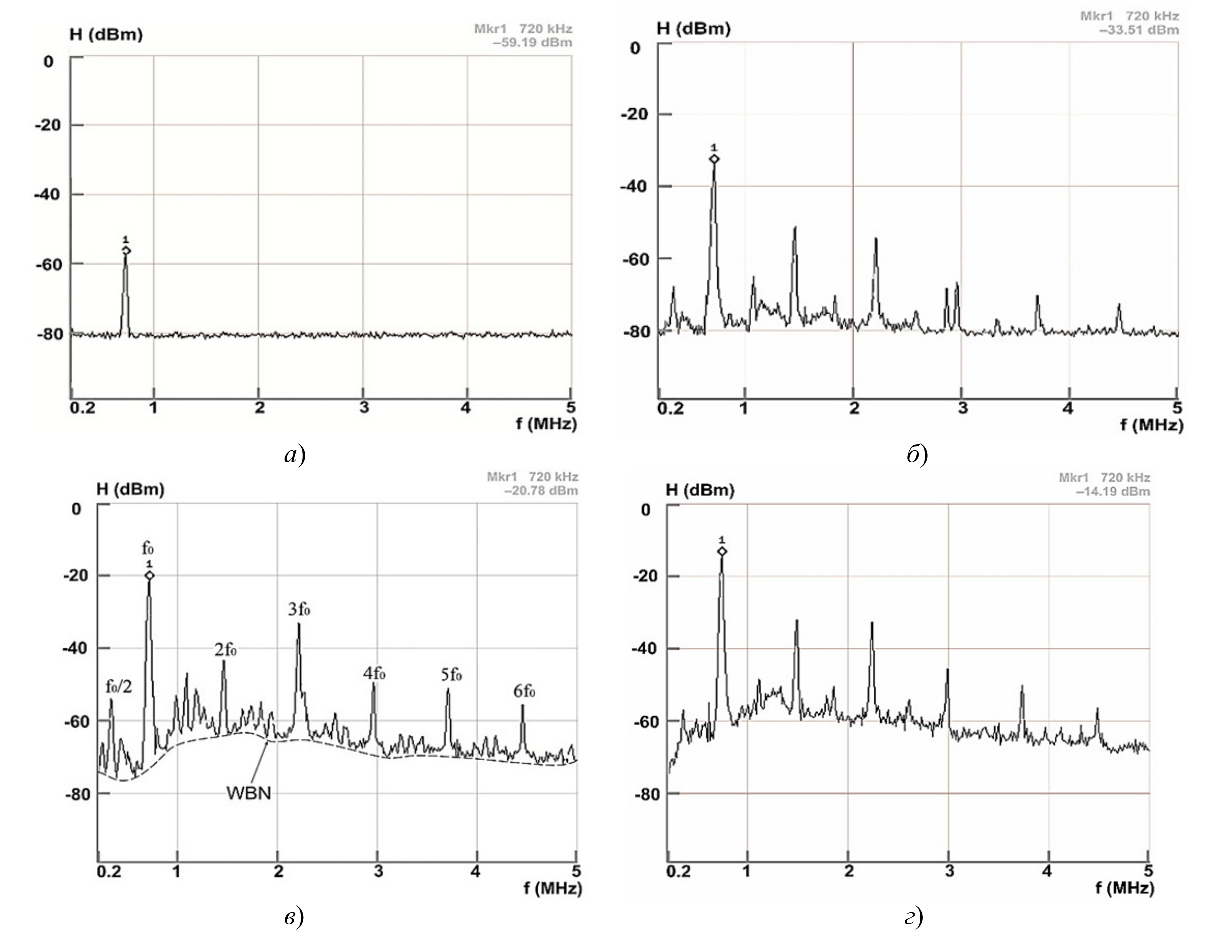


Рисунок 2.1 – Спектры кавитационного шума для разных стадий развития кавитационной области

(U < 150 В, рисунок 2.2, *а*) интенсивность звуколюминесценции коррелирует с интенсивностью субгармоники основного сигнала, т. е. сигнала на частоте f_0 / 2. При более высоких интенсивностях ультразвука зависимости $L(U)$ и $H(U)$ различаются кардинально, а именно: интенсивность ЗЛ растет с ростом интенсивности ультразвука, а H уменьшается. Примерно также зависит от U и параметр, полученный суммированием всех субгармоник (2.2, *б*). Отметим, что при интенсивности ультразвука порядка порога кавитации субгармоника коррелирует со звуколюминесценцией лучше остальных исследовавшихся параметров (2.2, *а*). Поэтому порог возникновения кавитации может определяться по появлению субгармоники в спектре КШ.

В работах [18], [19] предлагалось оценивать активность кавитации по интенсивности субгармоники в спектре КШ. Однако, как видно из представленных выше данных, этот метод может применяться только при относительно невысоких интенсивностях ультразвука, т. е. имеет существенные ограничения.

Параметры, представленные на рисунках 2.2, *в* и 2.2, *г* отклоняются от хода зависимости $L(U)$ при средних интенсивностях ультразвука.

Таблица 2.1 – Параметры спектра кавитационного шума

Параметр H	Алгоритм вычисления параметра H
Power-1	Сумма всех точек спектра без основного сигнала
Power-123	Сумма всех точек спектра без основного сигнала (гармоника f_0) и без гармоник 1.5, 2, 2.5, 3
Power-12345	Сумма всех точек спектра без основного сигнала (гармоника 1) и без гармоник 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5
Power-All	Сумма всех точек спектра без основного сигнала и без всех гармоник и субгармоник $(n + ½) f_0$
Pnoise 12	Сумма точек спектра между основным сигналом и 2-й гармоникой (учитывается 1.5-я гармоника)
Pnoise 12-1.5	Сумма точек спектра между основным сигналом и 2-й гармоникой (без 1.5-й гармоники)
Psignal	Интенсивность основного сигнала (сумма точек спектральной составлящей на частоте f_0)
Pharm0.5	Мощность 0.5-й гармоники (субгармоника, частота в 2 раза меньше, чем частота основного сигнала f_0)
Psumhalfharm	Мощность всех субгармоник $(n + ½) f_0$

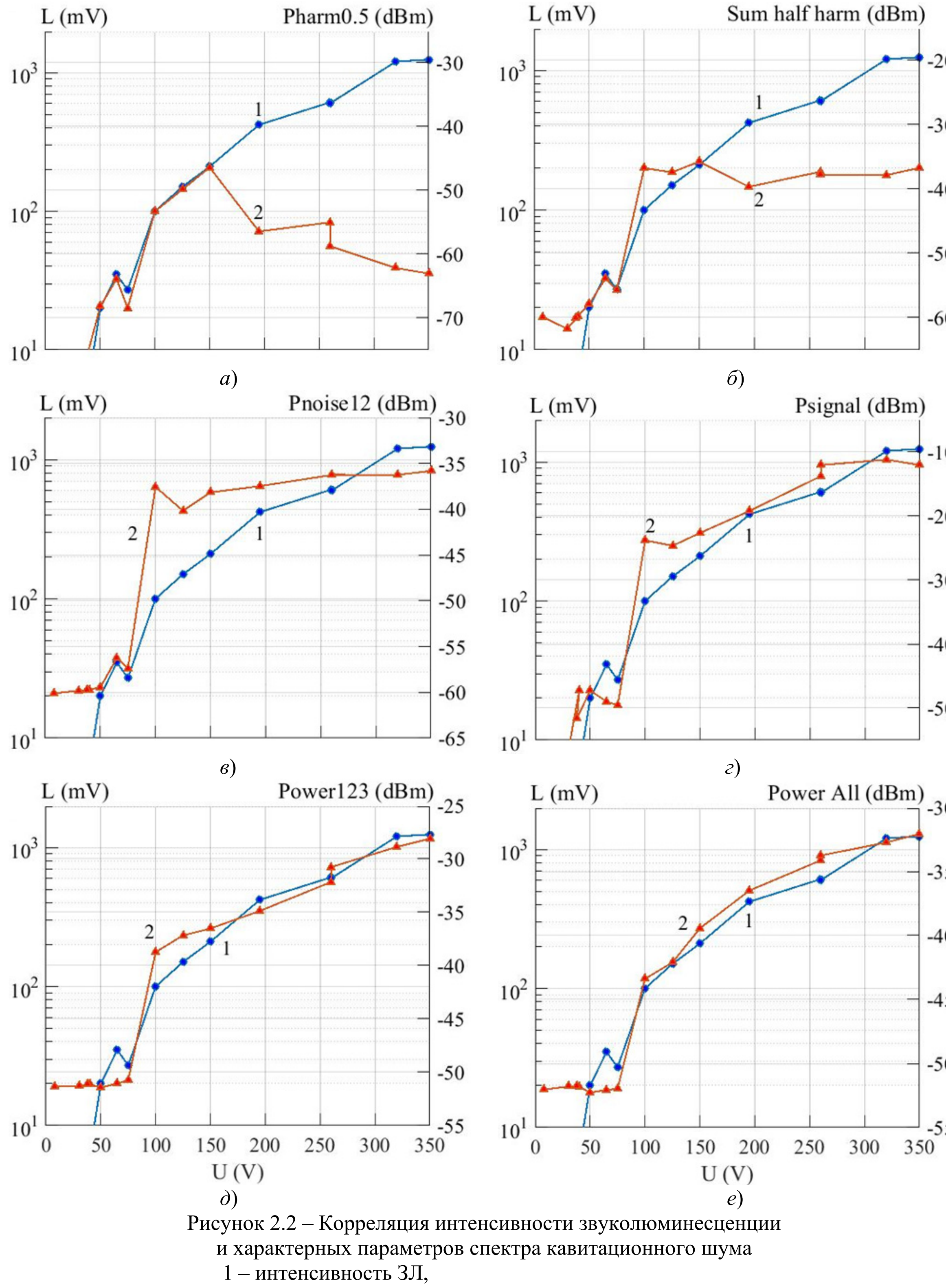


Рисунок 2.2 – Корреляция интенсивности звуколюминесценции
и характерных параметров спектра кавитационного шума
1 – интенсивность ЗЛ,
2 – исследуемый параметр кавитационного шума; параметры шума:
а) интенсивность первой субгармоники,
б) суммарная интенсивность всех субгармоник;
в) интенсивность КШ между первой и второй гармониками;
г) интенсивность основного сигнала;
д) интенсивность КШ без трех первых гармоник;
е) интенсивность КШ без всех гармоник и субгармоник

Наибольшая степень корреляции с интенсивностью звуколюминесценции из исследовавшихся параметров наблюдается для широкополосной составляющей кавитационного шума, т. е. интенсивности полного выходного сигнала датчика за вычетом всех гармоник и субгармоник (2.2, *е*). Незначительные расхождения имеют место только при низких интенсивностях ультразвука, порядка порога возникновения ЗЛ. Этот результат позволяет сделать вывод, что широкополосная составляющая кавитационного шума генерируется захлопывающимися кавитационными полостями.

Заключение

Исследовалась связь звуколюминесценции (ЗЛ) и ряда спектральных составляющих кавитационного шума (КШ). Показано, что наибольшая степень корреляции с интенсивностью звуколюминесценции характерна для широкополосной составляющей КШ, т. е. интенсивности полного выходного сигнала датчика за вычетом всех гармоник и субгармоник. Поскольку общепризнано, что звуколюминесценция возникает вследствие захлопывания пузырьков, данный результат позволяет сделать вывод, что широкополосная составляющая также генерируется захлопывающимися кавитационными полостями и, следовательно, может использоваться в качестве индикатора активности нестационарной кавитации.

В начальной стадии развития кавитационной области интенсивность ЗЛ коррелирует с интенсивностью субгармоники (СГ) основного сигнала f_0, т. е. сигнала на частоте f_0 / 2, а именно: пороги их возникновения совпадают. Поэтому порог возникновения кавитации может определяться по появлению субгармоники в спектре КШ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиротюк*, *М.Г.* Акустическая кавитация / М.Г. Сиротюк // М.: Наука, 2008. – 271 с.

2. *Leighton*, *T.G.* Acoustic Bubble / T.G. Leighton // Pergamon Press. – London, 1995. – 650 p.

3. *Келлер*, *О.К.* Ультразвуковая очистка / О.К. Келлер, Г.С. Кратыш, Г.Д. Лубяницкий. – Л.: Машиностроение, 1977. – 183 с.

4. *Cleaning and Damage Performance of Single Wafer Cleaning Tools using Physical Removal Forces* / A. Pacco, S. Halder, K. Kenis, T. Bearda, P. Mertens // ECS Transactions. – 2009. – Vol. 25 (5). – P. 311–317.

5. *Мощный ультразвук в металлургии и машиностроении* / В.О. Абрамов [и др.]; под общ. ред. О.В. Абрамова и В.М. Приходько. – Москва. – Русавиа. – 2006. – 687 с.

6. *Evolution of cavitation activity during the ultrasonic magnesium nanostructuring. International Journal of nanoscience* / N. Brezhneva, N.V. Dezhkunov, S.O. Mazheika, A. Nenashkina, E.V. Skorb. – Vol. 18. – № 3/4. – 2019. – P. 1940071–1940073.

7. *Recent developments in the sonoelectrochemical synthesis of nanomaterials* / M.H. Islam, M.T.Y. Paul, O.S. Burheim, B.G. Pollet // Ultrasonics Sonochemistry. – 2019. – Vol. 59. – P. 104711.

8. *Nanoparticle-assisted ultrasound*: *A special focus on sonodynamic therapy against cancer* / G. Canavese, A. Ancona, L. Racca, M. Canta, B. Dumontel, F. Barbaresco, T. Limongi, V. Cauda // Chemical Engineering Journal. – 2018. – Vol. 340. – P. 155–172.

9. *Скворцов*, *С.П.* Методы контроля параметров ультразвуковой кавитации / С.П. Скворцов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2015. – № 2. – С. 83–100.

10. *Dezhkunov*, *N.V.* The use of a capillary as a sensor of cavitation / N.V. Dezhkunov, T.G. Leighton // Nonlinear acoustics at the beginning of 21-t century; edited by O. Rudenko and O. Sapozhnikov. – Moscow. – 2003. – Vol. 2. – P. 1163–1166.

11. *Кудрявцев*, *Л.Д.* Краткий курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Физмалит. – 2005. – Т. 2. – С. 400–424.

12. *Numerical simulations of acoustic cavitation noise with the temporal fluctuation in the number of bubbles* / K. Yasui, T. Tuziuti, J. Lee, T. Kozuka, A. Towata, Y. Iida // Ultrason. Sonochem. – 2010. – Vol. 17. – P. 460–472.

13. *Sostaric*, *J.* Sodium Atom Emission from Aqueous Surfactant Solutions Exposed to Ultrasound / J. Sostaric, M. Ashokkumar, F. Grieser // Langmuir. – 2016. – Vol. 32. – P. 12387–12393.

14. *Гордейчук*, *Т.В.* Атомная эмиссия Na при сонолюминесценции водных растворов поверхностно-активных веществ различного типа / Т.В. Гордейчук, М.В. Казачек // Техническая акустика [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ejta.org. – Дата доступа: 04.11.2017.

15. *Brenner*, *M.P.* Single-bubble sonoluminescence / M.P. Brenner, S. Hilgenfeldt, D. Lohse // Rev. Mod. Phys. – 2002. – Vol. 74. – P. 425–484.

16. *Sonoluminescence and acoustic emission spectra at different stages of cavitation zone development* / N.V. Dezhkunov, A. Francescutto, L. Serpe, R. Canaparo, G. Cravotto // Ultrasonics Sonochemistry. – 2018. – Vol. 40. – P. 104–109.

17. *Эволюция кавитационной области в фокусированном ультразвуковом поле* / Н.В. Дежкунов, A. Francescutto, F. Calligaris, А.Л. Николаев // Письма в журнал технической физики. – 2014. – Т. 40, № 16. – С. 73–79.

18. *Evaluation of correlation between chemical dosimetry and subharmonic spectrum analysis to examine the acoustic cavitation* / H. Hasanzadeh, M. Mokhtari-Dizaji, S.Z. Bathaie, Z.M. Hassan // Ultrasonics Sonochemistry. – 2010. – Vol. 17. – P. 863–869.

19. *Krishna*, *D.* Subharmonic generation from ultrasonic contrast agents / D. Krishna, P.M. Shankar, V.L. Newhouse // Phys. Med. Biol. – 1990. – Vol. 44. – P. 681–694.

Поступила в редакцию 06.07.2020.

УДК 621.891+621.762:71

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗНАШИВАНИЯ УПРОЧНЕННОЙ ИОНАМИ АЗОТА АУСТЕНИТНОЙ СТАЛИ 12Х18Н10Т

В.А. Кукареко[1], В.В. Можаровский[2], А.В. Кушнеров[1], С.А. Марьин[2]

[1]*Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Минск*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

REGULARITIES OF WEAR OF AUSTENITIC STEEL AISI 321 STRENGTHENED BY NITROGEN IONS

V.A. Kukareko[1], V.V. Mozharovsky[2], A.V. Kushnerou[1], S.A. Marjin[2]

[1]*The Joint Institute of Mechanical Engineering of NAS of Belarus, Minsk*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Представлены результаты исследования структуры, микротвердости и данные триботехнических испытаний образцов стали 12Х18Н10Т, подвергнутой обработке ионами азота при различных температурах. Показано, что при ионном азотировании стали образуются упрочненные слои толщиной от 3 до 18 мкм, характеризующиеся повышенной твердостью (до 1400 HV 0,05) и содержащие азотистый аустенит γ_N, а также нитридные фазы γ'_N и CrN. Установлено, что в процессе трения образцов стали с упрочненным слоем, происходит переход от стадии постепенного медленного изнашивания азотированного слоя к его ускоренному износу при уменьшении толщины слоя до 3–5 мкм. Сделано заключение, что ускоренный износ тонких модифицированных слоев вызван пластической деформацией подложки и фазовым $\gamma \to \alpha$ превращением в ней, приводящими к растрескиванию поверхностного слоя.

Ключевые слова*: аустенитные стали, азотирование, микротвердость, фазовый состав, износостойкость, контактное взаимодействие.*

The results of the study of the structure, microhardness, and data from tribological tests of AISI 321 steel samples treated with nitrogen ions at various temperatures are presented. It is shown that the ion nitriding of steel forms hardened layers with a thickness of 3 to 18 microns, characterized by increased hardness (up to 1400 HV 0.05) and containing nitrogenous austenite γ_N, as well as nitride phases γ'_N and CrN. It is established that during the friction of steel samples with a hardened layer, the transition from the stage of gradual slow wear of the azo-tated layer to its accelerated wear occurs when the layer thickness decreases to 3 – 5 microns. It is concluded that accelerated wear of thin modified layers is caused by plastic deformation of the substrate and phase $\gamma \to \alpha$ transformation in it, which leads to cracking of the surface layer.

Keywords*: austenitic steels, nitriding, microhardness, phase composition, wear resistance, contact interaction.*

Введение

Контактное фрикционное взаимодействие, лежащее в основе таких явлений как трение и изнашивание, в значительной степени определяет работоспособность ответственных деталей и узлов современных машин. В связи с этим создание новых конструкционных материалов, обладающих высоким уровнем сопротивления разрушению при трении, является актуальной проблемой современного физического материаловедения. Одним из наиболее перспективных путей решения указанной проблемы является создание материалов с модифицированными поверхностными слоями, обладающими повышенными физико-механическими свойствами и стойкостью к разрушению в процессе фрикционного взаимодействия (износостойкостью) [1]–[3]. Поскольку процессы фрикционного взаимодействия материалов сопровождаются резким повышением температуры, интенсивным пластическим деформированием и структурно-фазовыми превращениями в тонких поверхностных слоях, то сведения о физических механизмах накопления дефектов строения и разрушения в процессе фрикционного контактного взаимодействия материалов с модифицированными поверхностными слоями имеют большое практическое значение.

Аустенитные нержавеющие стали с 18% Cr и 10% Ni, получившие весьма широкое распространение при изготовлении изделий в машиностроении, химической и пищевой промышленности и функционирующие в условиях агрессивных сред и повышенной влажности, характеризуются низким уровнем прочностных и триботехнических характеристик, что существенно ограничивает область их применения. В связи с этим задача повышения трибо-механических характеристик коррозионностойких аустенитных сталей весьма актуальна. Использование методов поверхностного легирования (например, ионного азотирования) аустенитных нержавеющих сталей может существенно увеличить их сопротивление изнашиванию. При этом весьма важной проблемой является установление механизма разрушения при трении упрочненных поверхностных слоев коррозионностойких сталей, имеющих

© *Кукареко В.А., Можаровский В.В., Кушнеров А.В., Марьин С.А.*, 2020

низкие значения прочностных характеристик подложки (основы). Задачей исследования является изучение особенностей разрушения при трении градиентных материалов с упрочненными слоями и пластичной основой.

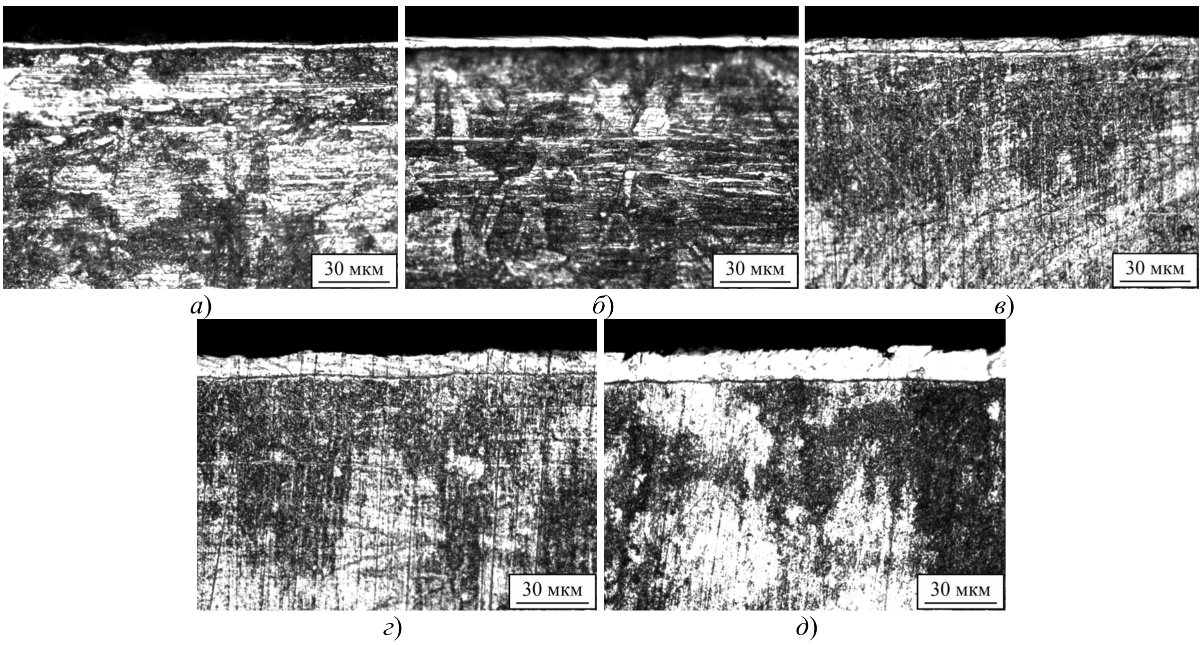
1 Методика эксперимента

Исследование проводилось на образцах (размерами 8×6×5 мм), вырезанных из прокатанного сплава 12Х18Н10Т. Ионно-лучевая обработка осуществлялась с помощью ионного источника с замкнутым дрейфом электронов [4]. Источник генерировал пучок ионов ленточного типа длиной 120 мм и шириной 25 мм. При обработке использовалась система механического сканирования облучаемых поверхностей. Имплантация проводилась при энергии ионов азота 3 кэВ, плотности ионного тока 2 мА·см$^{-2}$. Флюенс падающих ионов составлял $\approx 3{\cdot}10^{19}$ см$^{-2}$. Температура образцов в процессе обработки поддерживалась при 620, 670, 690, 720, 770 К. Микротвердость измерялась на приборе DuraScan 20 при нагрузке 50 грамм. Триботехнические испытания по схеме возвратно-поступательного перемещения проводили на автоматизированном трибометре АТВП, оснащенном устройством для измерения коэффициента трения. В качестве контртела использовалась пластина из закаленной стали У8 (800 HV 10). Испытания проводили в условиях трения без смазочного материала при номинальном давлении $p = 1{,}0$ МПа. Средняя скорость перемещения образца относительно контртела составляла $\approx 0{,}1$ м·сек$^{-1}$. Рентгеноструктурный анализ проводился на рентгеновском дифрактометре ДРОН-3.0 в монохроматизированном CoK_{α} излучении, при напряжении 30 кВ и анодном токе 10 мА. Съемки осуществлялись в режиме сканирования с временем набора импульсов рассеянного рентгеновского излучения на точку, равном 15 с. Для расшифровки фазового состава использовалась картотека PDF.

2 Результаты и их обсуждение. Структура стали

В исходном состоянии сталь 12Х18Н10Т имеет аустенитную структуру с периодом решетки $a = 0{,}3592$ нм. Твердость стали составляет 230 HV 10, а микротвердость 250 HV 0,05. Ионное азотирование нержавеющей стали при 620, 670, 690, 720 и 770 К приводит к образованию модифицированных слоев толщиной соответственно равной 3–4, 5–6, 9–11, 12–14, 15–18 мкм (рисунок 2.1, *а*, *б*, *в*, *г*, *д*). При этом микротвердость поверхностного слоя составляет 450, 900, 1100, 1400 и 1300 HV 0,05 соответственно.

Фазовый состав упрочненного слоя после ионной обработки при 620–720 К: азотистый аустенит (γ_N-фаза) и нитридная фаза на основе ГЦК решетки с гексагональными искажениями (γ'_N-фаза) (рисунок 2.2) [5]. При повышенных температурах имплантации (770 К) в слое регистрируются частицы CrN и азотистый мартенсит (α-фаза), а также нитридная фаза γ'_N. Нитрид хрома CrN структурного типа NaCl имеет ГЦК решетку ($a = 0{,}4140$ нм). Образование α-фазы с ОЦК кристаллической решеткой вызвано выделением большого количества мононитрида CrN и обеднением вследствие этого матричной γ-фазы хромом. Последнее приводит к понижению стабильности матричной ГЦК решетки и к образованию α-фазы при охлаждении стали с температур



а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рисунок 2.1 – Микроструктура модифицированной ионами азота стали 12Х18Н10Т:
а) обработка при 620 К; б) то же при 670 К; *в*) то же при 690 К; *г*) то же при 720 К; *д*) то же при 770 К

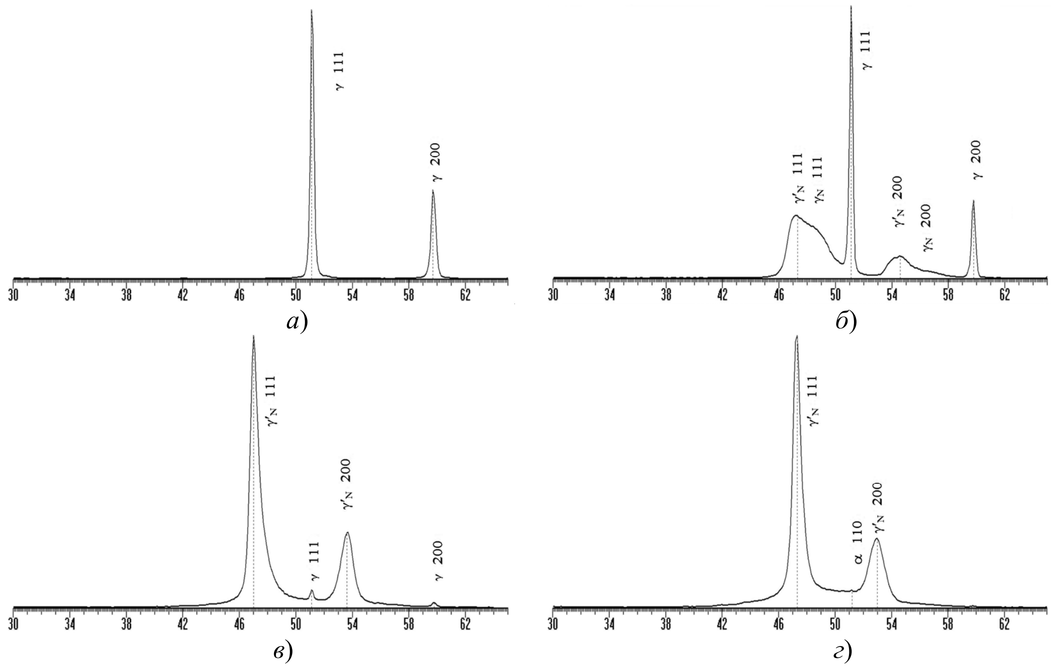


Рисунок 2.2 – Фрагменты рентгеновских дифрактограмм (CoK_{α}), полученных от поверхности образцов стали 12Х18Н10Т в исходном состоянии (*а*) и обработанных ионами азота при 620 К (*б*), 670 К (*в*), 720 К (*г*)

азотирования. Фазовое $\gamma \to \alpha$ превращение, протекает по механизму прерывистого распада в обедненных хромом участках модифицированного слоя [5], [6].

3 Триботехнические свойства

Зависимости линейного износа при трении без смазки стали 12Х18Н10Т от режима ее обработки приведены на рисунке 3.1. Можно видеть, что в исходном состоянии интенсивность изнашивания I_h стали при трении без смазки весьма велика ($I_h \approx 1 \cdot 10^{-5}$). Фрикционное взаимодействие приводит к адгезионному схватыванию и задиру с образованием на поверхности характерной бороздчатой структуры, содержащей участки вырывов (рисунок 3.2, *а*).

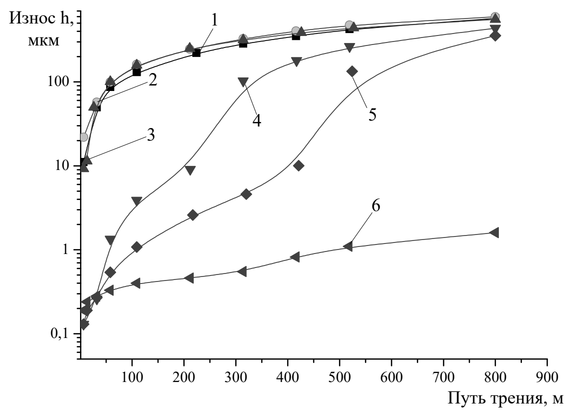
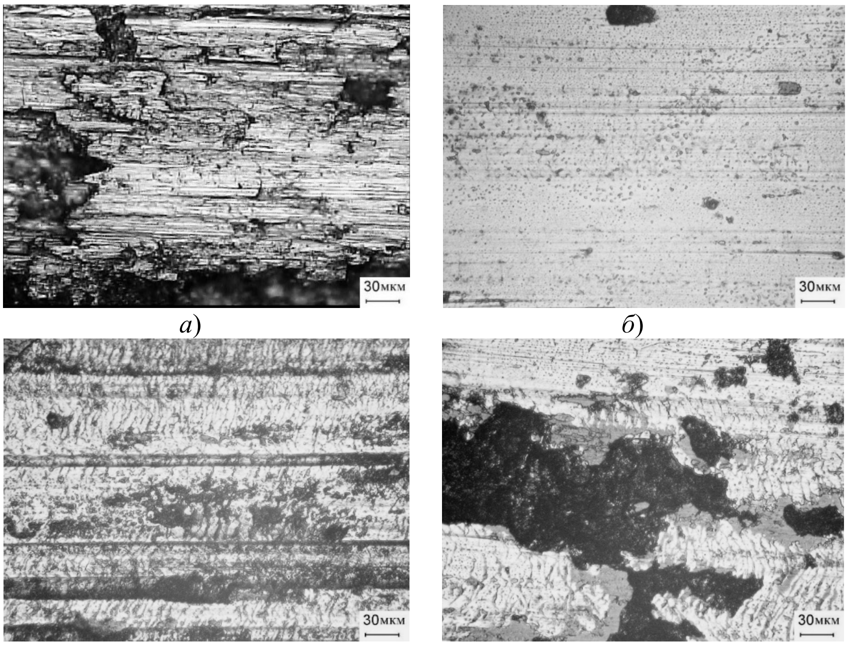


Рисунок 3.1 – Зависимости линейного износа от пути трения образцов стали 12Х18Н10Т, обработанной по различным режимам: 1 – исходное состояние; 2 – обработка ионами азота при 620 К; 3 – то при 670 К; 4 – то же при 690 К; 5 – то же при 720 К; 6 – то же при 770 К

Данные рентгеноструктурного анализа свидетельствуют о фазовом $\gamma \to \alpha$ превращении в зоне трения. Мартенситным превращением, по-видимому, обусловлено и существенное возрастание микротвердости поверхности трения (от 230 до 500 HV 0,05). Вместе с тем коэффициент трения в данном случае относительно невелик и составляет $f \cong 0{,}65$. Сочетание высокой интенсивности износа с низким коэффициентом трения свидетельствует о низком уровне энергии активации разрушения неупрочненной аустенитной стали.

Ионно-лучевая обработка азотом при 620–670 К, приводящая к формированию модифицированных градиентных слоев толщиной от 3 до 6 мкм, не обеспечивает существенного возрастания износостойкости поверхности стали в условиях фрикционного контактного взаимодействия без смазочного материала (рисунок 3.1). При испытаниях модифицированный слой удаляется с поверхности уже на первых метрах пути трения, и интенсивность изнашивания достигает уровня значений, присущих стали в исходном неупрочненном состоянии $I_h \approx 1 \cdot 10^{-5}$ (рисунок 3.3). При переходе к более высоким температурам ионной обработки сталей (690, 720 и 770 К), приводящим к существенному увеличению толщины модифицированных слоев, износостойкость слоя весьма существенно возрастает (рисунок 3.1). В частности, для имплантированной азотом при 690–720 К нержавеющей стали зависимость линейного износа от пути трения имеет характерный вид с выраженным периодом приработки (до 100 м) и стадией установившегося трения (100–400 м). Интенсивность изнашивания



а) *б*) *в*) *г*)

Рисунок 3.2 – Микроструктура поверхности трения стали 12Х18Н10Т в исходном (неупрочненном) состоянии (*а*) и обработанной ионами азота при 720 К, путь трения: *б*) 200 м; *в*) 400 м; *г*) 500 м

модифицированного слоя на стадии установившегося трения в ~ 50–100 раз ниже, чем у необработанной стали и составляет $I_h = 1–3\cdot10^{-7}$ (рисунок 3.3).

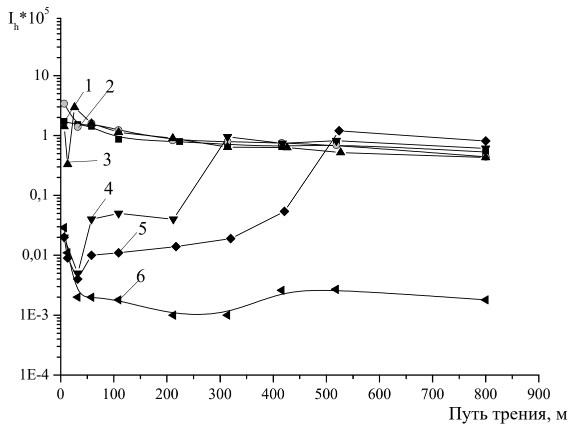


Рисунок 3.3 – Зависимости интенсивности линейного изнашивания I_q от пути трения образцов стали 12Х18Н10Т, обработанной по различным режимам: 1 – исходное состояние; 2 – обработка ионами азота при 620 К; 3 – то же при 670 К; 4 – то же при 690 К; 5 – то же при 720 К; 6 – то же при 770 К

На этих стадиях испытания поверхность трения модифицированного слоя выглаживается и приобретает характерный зеркальный блеск (рисунок 3.2). Кроме этого, при испытаниях регистрируется повышенный уровень значений коэффициента трения до $f = 0,8–0,9$, что указывает на увеличение энергии активации процесса разрушения для модифицированного при 690–720 К слоя. Отмеченные особенности процесса изнашивания свидетельствуют о высоких антифрикционных свойствах модифицированного слоя, прочность которого не позволяет ему продавливаться в пятнах контакта. Толщина изношенного слоя после пробега 100 м не превышала 1–3 мкм. Вместе с тем результаты рентгеноструктурных исследований поверхностей трения модифицированной ионами азота аустенитной стали типа Х18Н10Т показывают, что уже на этих стадиях испытаний на дифракционной картине появляются линии α-фазы [7]. Последнее указывает на пластическую деформацию подповерхностных неимплантированных слоев, приводящую к фазовому $\gamma \rightarrow \alpha$ превращению в них. Дальнейшее увеличение пробега $\geq$ 200 м для стали, модифицированной при 690 К и $\geq$ 400 метров для стали, обработанной при 720 К и более приводит к резкой интенсификации износа (рисунок 3.3). Толщина модифицированного слоя на этих стадиях испытаний уменьшается до 3–5 мкм. При этом на поверхности трения азотированной стали появляется сеть поперечных микротрещин, свидетельствующих о растрескивании азотированного слоя (рисунок 3.2, *в*). В участках с периодически расположенными поперечными микротрещинами (рисунок 3.2, *в*) под воздействием переменных сдвиговых напряжений при трении происходит углубление трещин с образованием зон глубинного выкрашивания и отслаиванием покрытия (рисунок 3.2, *г*). Затем на поверхности трения образуются характерные борозды изнашивания, свидетельствующих о развитии процессов адгезионного схватывания и задира, а интенсивность изнашивания модифицированного слоя возрастает и выходит на уровень значений, характерных для немодифицированной стали (рисунок 3.3). При этом микротвердость поверхности снижается до 500–600 HV 0,05, а на рентгеновских дифрактограммах от поверхностей трения стали на поздних стадиях испытаний регистрируются интенсивные дифракционные линии α-фазы [7]. Последнее свидетельствует о выходе на поверхность трения немодифицированных азотом подповерхностных слоев и образовании в них мартенсита деформации при фрикционном взаимодействии.

Таким образом, в процессе трения образцов стали с упрочненным слоем происходит переход от стадии постепенного медленного изнашивания азотированного слоя к его ускоренному (катастрофическому) износу при уменьшении толщины слоя до 3–5 мкм. Результаты триботехнических испытаний стали, обработанной ионами азота при 770 К и обладающей наибольшей глубиной азотированного слоя, показали, что сталь обладает наиболее высокой износостойкостью. При этом интенсивность изнашивания на пути трения 800 м составляет $I_h \cong 1\cdot 10^{-8}$, чистота поверхности трения близка к зеркальной, а микротвердость сохраняется на уровне исходных значений.

Для понимания причин ускоренного разрушения материалов с упрочненными слоями при трении необходимо рассмотреть особенности деформирования поверхностных слоев материалов с градиентной структурой. При большой толщине упрочненного слоя ($\geq$ 8–10 мкм) нагрузка на пластичную основу при трении незначительна и в ней не протекают акты пластической деформации, что обеспечивает высокую износостойкость градиентного материала. В процессе изнашивания градиентного материала по мере истирания упрочненного поверхностного слоя происходит перераспределение сдвиговых напряжений, действующих в неупрочненном подповерхностном слое. При этом вследствие несоответствия упругой деформации твердого поверхностного слоя и пластической деформации подложки в упрочненном слое появляются растягивающие напряжения, которые возрастают по мере уменьшения толщины упрочненного слоя. Дополнительным фактором, способствующим увеличению растягивающих напряжений, действующих в тонких упрочненных слоях, может выступать фазовое $\gamma \to \alpha$ превращение, протекающее в подповерхностном слое (основе) и сопровождающееся увеличением их удельного атомного объема. Формирование растягивающих напряжений способствует образованию микротрещин в поверхностном слое с последующим распространением микротрещин в глубокие подповерхностные слои и образованием частиц износа (рисунок 3.3). Протекание описанных выше явлений может иметь место также при трении градиентных материалов, полученных осаждением твердых покрытий на пластичную основу.

Следует отметить, что с позиции механики деформируемого твердого тела решение данной проблемы – создание материалов с упрочненными поверхностными слоями, представляет значительный интерес. С аналитическим и численным подходами к решению аналогичных задач можно ознакомится, например, в работах [8]–[11]. При этом следует отметить, что современные исследования показывают существенную зависимость напряженного состояния слоистых тел, в том числе и упругих покрытий с упругой подложкой (основанием), от физико-механических характеристик (значений модулей упругости, коэффициентов Пуассона, микротвердости и т. д.) как покрытий, так и подложки. Максимальные касательные напряжения, которые способствуют разрушению слоистой системы, в основном, концентрируются на границе раздела «покрытие – основание» или вблизи поверхности и существенно зависят от коэффициента трения, геометрической формы, а также упругих свойствах контртела, вступающего в контакт. Так, например, на рисунке 3.4 представлены результаты расчета по методу конечных элементов максимальных напряжений в слоистой среде при контакте цилиндрического индентора. Предполагается, что в зоне контакта давление задано и распределено, например, по параболическому закону: $p(x) = p_0\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$, $p_0 = \dfrac{3P}{4a}$, действие касательных усилий (при учете трения в зоне контакта), согласно закона Кулона: $q(x) = f\cdot p(x)$, где f – коэффициент трения.

Общая картина распределения напряжений представлена изолиниями максимальных напряжений. Максимальные суммарные напряжения достигаются в слое покрытия вблизи поверхности и достигают значения 0,6 *p*. Для этого примера принимаем, что для материала основания модуль упругости $E_2 = 1{,}10\cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}26$), толщина основания – 100 мкм. Материал покрытия имеет модуль упругости $E_1 = 4{,}80\cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}22$, коэффициент трения индентора по покрытию $f = 0{,}15$, толщина покрытия $h = 1$ мкм, $a = 0{,}5$ мкм. Характер распределения максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$ в покрытии сходен с распределением их в упругом основании, однако наибольшее значение $\tau_{\max}$ и глубина, на которой они действуют, зависит от отношений области контакта контртела упрочненного слоя, приложенного к упрочненному слою, и его толщины. Для относительно толстых покрытий максимум $\tau_{\max}$ напряжений может достигаться внутри покрытия или на границе раздела, а для

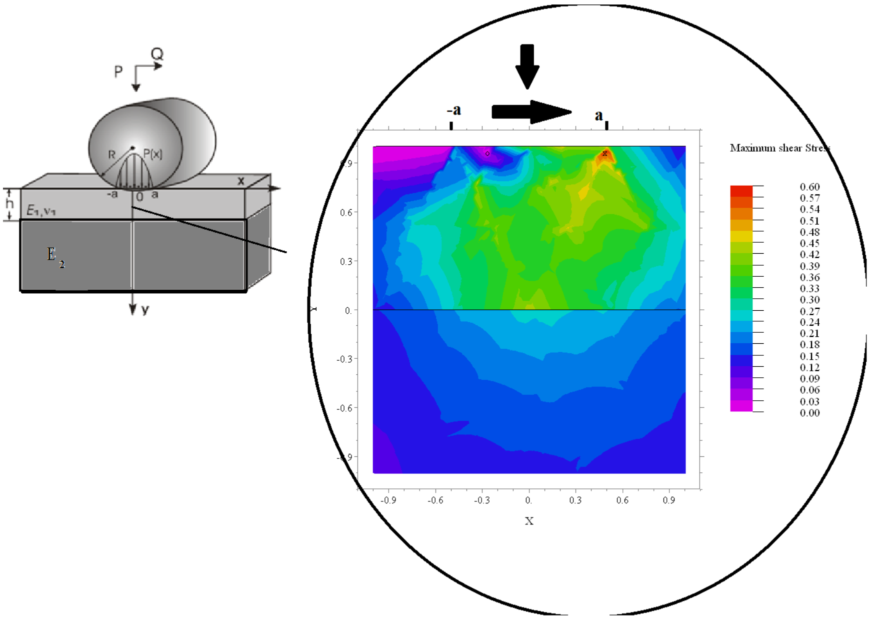


Рисунок 3.4 – Распределение полей максимальных напряжений τ_{max}

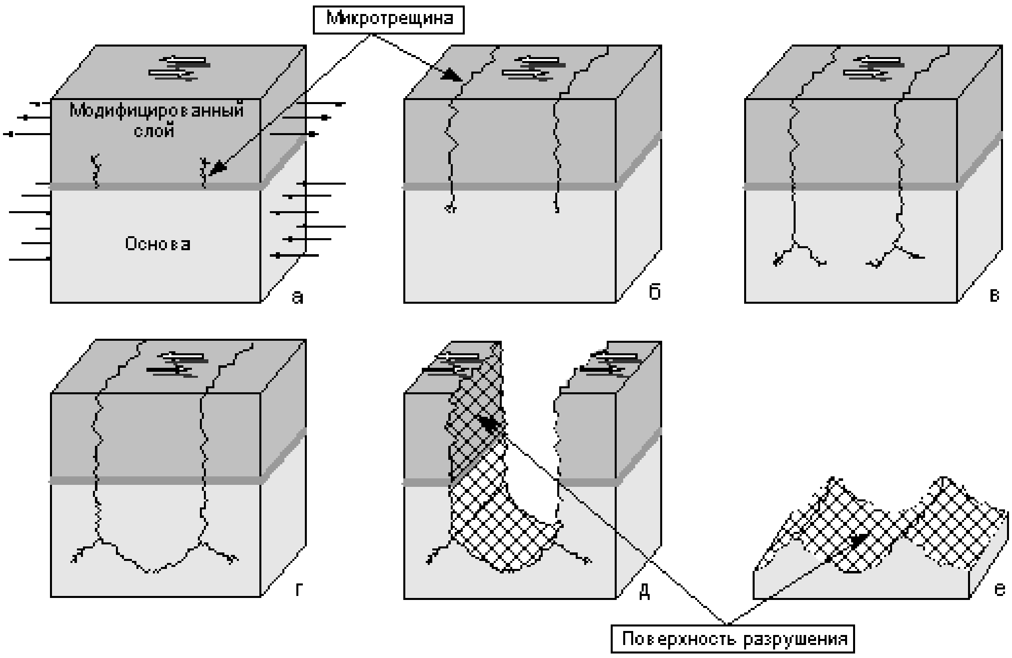


Рисунок 3.5 – Схема развития микротрещин при трении материалов с модифицированными твердыми слоями

более тонких – внутри основания. Исходя из выше указанных позиций следует, что возможное разрушение слоистой среды происходит по схеме, представленной на рисунке 3.5.

Таким образом, напряженное состояние, разрушение и износ модифицированного слоя при трении в значительной степени зависит от многих факторов, а именно, от геометрических и механических свойств как покрытия, так и основания. Кроме того, существенный вклад вносят трибологические свойства поверхности и механические (а также геометрические) параметры контртела, вступающего в контакт с модифицированным покрытием. Тонкое покрытие катастрофически изнашивается вследствие интенсивной пластической деформации материала основы, толстое – изнашивается постепенно до тех пор, пока его толщина обеспечивает сохранение несущей способности слоя за счет снижения действующих в подслое напряжений и температур. Увеличение прочностных свойств подложки будет уменьшать ее пластическую деформацию при трении и замедлять скорость накопления в ней дефектов и зарождения микротрещин.

Заключение

Исследованы структурно-фазовое состояние, дюрометрические и триботехнические свойства материалов с упрочненными ионами азота слоями и пластичной основой. Установлено, что в фазовом составе упрочненного слоя при 620–720 К регистрируется азотистый аустенит и нитридная фаза на основе ГЦК решетки с гексагональными искажениями (γ'_N). При повышенных температурах азотирования (770 К) в слое присутствуют частицы CrN, азотистый мартенсит, а также нитридная фаза γ'_N.

Показано, что наиболее высокая износостойкость регистрируется у образцов стали, подвергнутых ионному азотированию при 770 К, что обусловлено наибольшей толщиной формирующегося при этом упрочненного слоя. Установлено, что при трении стали по мере уменьшения толщины модифицированного азотом слоя до 3–5 мкм фиксируется его ускоренное изнашивание. Данное явление связано с тем, что в процессе фрикционного взаимодействия при истирании упрочненного слоя происходит перераспределение сдвиговых напряжений, действующих в неупрочненном подповерхностном слое (подложке) стали. При этом, вследствие несоответствия упругой деформации твердого поверхностного слоя и пластической деформации подложки, в упрочненном слое появляются растягивающие напряжения, возрастающие по мере уменьшения его толщины. Увеличению растягивающих напряжений в поверхностном слое также способствует фазовое $\gamma \to \alpha$ превращение в подложке при трении. Формирование растягивающих напряжений приводит к образованию микротрещин в тонком упрочненном поверхностном слое стали, которые распространяются в подповерхностные слои с образованием частиц износа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Инженерия поверхностей конструкционных материалов с использованием плазменных и пучковых технологий* / А.В. Белый, А.С. Калиниченко, О.Г. Девойно, В.А. Кукареко. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 457 с.

2. *Структура и механизмы деформирования и разрушения твердых покрытий в условиях фрикционного взаимодействия* / А.В. Колубаев, А.В. Белый, И.А. Буяновский, Е.А. Колубаев, В.А. Кукареко, О.В. Сизова, М.М. Хрущов // Известия ВУЗов. Физика. – 2019. – Т. 62, № 8. – С. 52–83.

3. *Musil*, *J.* Hard nanocomposite coatings: Thermal stability, oxidation resistance and toughness / J. Musil // Surface and Coatings Technology. – 2012. – Vol. 207. – P. 50–65.

4. *Белый*, *А.В.* Высокоинтенсивная низкоэнергетическая имплантация ионов азота / А.В. Белый // Физическая мезомеханика. – 2002. – Т. 5, № 1. – С. 95.

5. *Формирование и свойства наноструктурных поверхностных слоев в аустенитных сталях, подвергнутых ионно-лучевому азотированию* / А.В. Белый, В.А. Кукареко, И.И. Таран, С.К. Ших, С.Г. Сандомирский // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2006. – № 7. – С. 100–106.

6. *Белый*, *А.В.* Влияние режимов ионно-лучевого азотирования на структуру, микротвердость и магнитные свойства диффузионного слоя на аустенитной стали / А.В. Белый, В.А. Кукареко, С.Г. Сандомирский // Металловедение и термическая обработка металлов. – 2009. – № 3 (645). – С. 9–14.

7. *Механизм контактного разрушения при трении материалов с модифицированными ионами азота слоями* / П.А. Витязь, А.В. Белый, В.А. Кукареко, А.В. Колубаев, В.Е. Рубцов // Актуальные проблемы прочности. Труды XLIII Международной конференции. Витебск, Беларусь, 27 сентября – 1 октября 2004. – С. 281–291.

8. *Горячева*, *И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева // М.: Наука, 2001. – 478 с.

9. *Можаровский*, *В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский // Минск: Наука и техника, 1988. – 271 с.

10. *Торская*, *Е.В.* Моделирование фрикционного взаимодействия тел с покрытиями: автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. – М., 2014. – 44 с.

11. *Можаровский*, *В.В.* Математическое моделирование контактного взаимодействия цилиндрических тел из композиционных материалов / В.В. Можаровский, С.А. Марьин, Н.А. Марьина // Вычислительная математика и математические проблемы механики: матер. II Междунар. научн. конф., Львов, 31 августа – 4 сентября 2009 г. – Львов: Институт прикладных проблем математики и механики НАН Украины, 2009. – С. 288–290.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ, *задание* № Т20УКА – 012.

Поступила в редакцию 11.09.2020.

ФИЗИКА

УДК 535.42:534.8

ВЛИЯНИЕ ФРЕНЕЛЕВСКОГО ОТРАЖЕНИЯ СВЕТА НА ПРОЦЕСС СЧИТЫВАНИЯ ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ РЕШЕТОК

Г.В. Кулак, В.Н. Навныко, Т.В. Николаенко

Мозырский государственный педагогический университет имени И.П.Шамякина

INFLUENCE OF FRESNEL LIGHT REFLECTION ON THE PROCESS OF READING HOLOGRAPHIC PHASE GRATING

G.V. Kulak, V.N. Naunyka, T.V. Nikolaenko

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

На примере голографической среды «реоксан» теоретически исследованы энергетические коэффициенты отражения и пропускания дифрагированных волн нулевого и первого порядка при увеличении угла падения света (уменьшении периода фазовой решетки), падающего на слой, и фотоиндуцированного изменения показателя преломления среды. Показано, что при увеличении амплитуды возмущения показателя преломления среды, имеет место амплитудная модуляция прошедших и отраженных дифрагированных волн в условиях френелевского отражения от границ слоя. Установлено, что значительные периодические изменения коэффициента отражения дифрагированных волн нулевого прядка происходят при увеличении угла падения света.

Ключевые слова*: голографическая решетка*, *брэгговская дифракция света*, *коэффициенты отражения и пропускания*.

Using the reoxan holographic medium as an example, the energy reflection and transmission coefficients of diffracted zero and first order waves are theoretically investigated with an increase in the angle of incidence of light (decrease in the phase grating period) incident on the layer and photoinduced change in the refractive index of the medium. It is shown that with an increase in the amplitude of the perturbation of the refractive index of the medium, there is an amplitude modulation of the transmitted and reflected diffracted waves under conditions of Fresnel reflection from the layer boundaries. It has been established that significant periodic changes in the reflection coefficient of diffracted zero-order waves occur with an increase in the angle of incidence of light.

Keywords: *holographic lattice*, *Bragg diffraction of light*, *reflection and transmission coefficients*.

Введение

Процессы фотовозбуждения носителей электрического заряда и процессы захвата носителей на ловушки (мелкие и глубокие) являются принципиально важными в механизме записи информации в фоторефрактивных кристаллах (ФРК) [1]. Важнейшее требование для формирования объемного заряда под действием света – это наличие примесных центров в запрещенной зоне кристалла – доноров, которые обеспечивают появление электронов при освещении светом и центров захвата электронов – глубоких ловушек. В случае практически важных кристаллов $Bi_{12}SiO_{20}$, $Bi_{12}GeO_{20}$, $Bi_{12}TiO_{20}$ наиболее важным типом фотоактивных центров являются такие вакансии как Si (или Ge), комплексный ион BiO_7, наличие примесей хрома и др. [2]–[5]. В работе [6] предполагается, что в кристаллах типа $Bi_{12}SiO_{20}$ дырочный механизм записи голографической решетки (ГР) является доминирующим. В этой работе принято, что ионы висмута имеют валентность не только Bi^{3+}, но и Bi^{5+} за счет избытка кислорода. Ионы Bi^{5+} можно рассматривать как дырочный биполярон или совокупность двух дырок в синглетном состоянии (спины взаимно скомпенсированы). Запись изображения в примесной области поглощения связывается с возбуждением биполярона и его диссоциацией на две дырки, движением этих дырок во внешнем поле или за счет диффузии и рекомбинацией дырок с образованием нового биполярона. В работе [7] приведены компоненты тензора возмущений диэлектрической проницаемости кубического фоторефрактивного кристалла, выраженные через компоненты тензора электрооптических постоянных, фотоупругих постоянных, пьезоэлектрических постоянных, модулей упругости для различных перспективных срезов кристаллов. Показано (см. например [8]), что амплитуда поля пространственного заряда кубического фоторефрактивного кристалла выражается соотношением

$$E_{sc} = -im\frac{E_D}{1 + E_D / E_q}, \qquad (0.1)$$

где E_D – напряженность диффузионного электрического поля, E_q – напряженность электрического поля насыщения ловушек, m – контраст интерференционной картины. Высокое значение величины фотоиндуцированного изменения показателя преломления материала среды, регистрирующей голограмму ($\Delta n = 5\cdot10^{-3}$), отмечено в работах [9], [10]. Показано, что на реоксане возможна запись высокоэффективных пропускающих и отражательных фазовых голограмм при геометрической толщине слоя материала

© *Кулак Г.В.*, *Навныко В.Н.*, *Николаенко Т.В.*, 2020

0,15–3 мм. При этом, однако, не учитывалось френелевское отражение световых волн от границ среды [11], [12].

В настоящей работе теоретически исследованы особенности брэгговской дифракции световых волн на голографических фазовых решетках в оптически изотропных средах.

1 Теоретические результаты и обсуждение

Положим, что плоскопараллельный слой толщиной h с показателем преломления n_2 расположен между однородными прозрачными средами с показателями преломления n_1 и n_3. Начало системы координат XYZ расположено на верхней границе слоя, а ось Y перпендикулярна плоскости падения (рисунок 1.1).

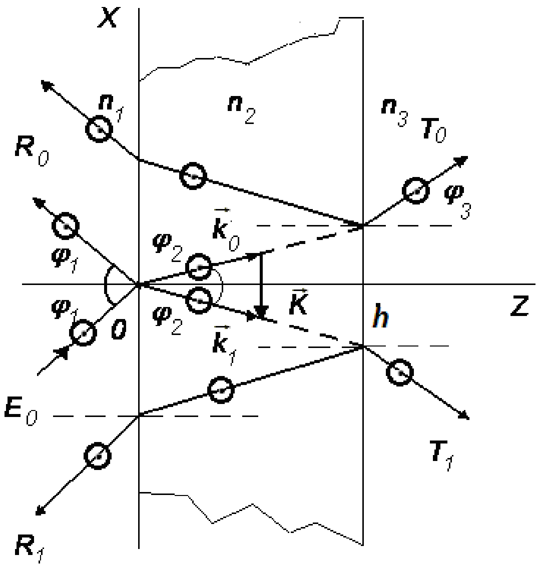


Рисунок 1.1 – Схема считывания ГР в оптически изотропном плоскопараллельном слое (XZ – плоскость дифракции, R_0, R_1 – коэффициенты отражения дифрагированных волн, T_0, T_1 – коэффициенты пропускания дифрагированных волн, φ_1 (φ_2) – угол падения (преломления) на границе z = 0, φ_3 – угол преломления на границе $z = h$).

При брэгговской дифракции света в слое на его толщину (h) накладывается условие: $(\lambda_0 h / 2n_2\Lambda^2) >> 1$ [1], где λ_0 – длина световой волны в вакууме, Λ – пространственный период ГР.

Решетка показателя преломления, создаваемая ГР вдоль оси X имеет вид:

$$n_2(x) = n_2 + (\Delta n_2 / 2n_2)e^{iKx},$$

где $K = 2\pi / \Lambda$ – волновое число ГР.

Предположим, что плоская световая волна с частотой ω и волновым вектором

$$\vec{k}_1 = \vec{e}_x k_{1x} + \vec{e}_z k_{1z}$$

($k_{1x} = kn_1 \sin\varphi_1$, $k_{1z} = kn_1 \cos\varphi_1$, $k = \omega / c$) имеет s (p) – поляризацию. Угол преломления

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\varphi_1}{n_2}\right)$$

близок к углу Брэгга $\varphi_2 \approx \varphi_Б \approx \dfrac{K}{2k_2}$, где $k_2 = kn_2$.

Решение волнового уравнения для дифрагированного поля электромагнитной волны в слое имеет вид [11]:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m(z)\exp\left[i\left(K_{mz}z - \omega_m t - \frac{\pi m}{2}\right)\right], \quad (1.1)$$

где $k_{mz} = k_{0z} + mK$, $\omega_m = \omega + m\Omega$.

При $k_{0z} \approx K/2$ из совокупности (1.1) дифрагированных волн выделяют две наиболее существенные с дифракционными порядками $m = 0$ и $m = -1$. Система уравнений связанных волн имеет вид:

$$\frac{d^2A_0}{dz^2} + k_{0z}^2 A_0 - i\eta k_2^2 A_{-1} = 0,$$
$$\frac{d^2A_{-1}}{dz^2} + k_{-1z}^2 A_0 + i\eta k_2^2 A_0 = 0, \quad (1.2)$$

где $k_{0z} = (k_2^2 - k_{0x}^2)^{1/2}$, $k_{-1z} = (k_2^2 - k_{-1x}^2)^{1/2}$, $k_{0x} = k_2 \sin\varphi_Б$, $k_{-1x} = k_2 \sin\varphi_Б$, $\eta = -\Delta n / n_2 \cos\varphi_2$.

С учетом результатов работ [11], [12], решение системы уравнений (1.2) в брэгговском режиме дифракции можно представить в виде: $A_0 = (U_2 + U_1)/2$, $A_{-1} = (U_2 - U_1)/2$. Величины $U_{1,2}$ находим из решения однородного уравнения:

$$\frac{d^2U_{1,2}}{dz^2} + k_2^2\left(\cos^2\varphi_2 \pm \frac{1}{2}\eta\right)U_{1,2} = 0. \quad (1.3)$$

Решение уравнений (1.3) имеет вид [11]:

$$U_{1,2} = C_1^{\pm} e^{ik_2^{\pm}(z)} + C_2^{\pm} e^{-ik_2^{\pm}(z)},$$

где

$$k_2^{\pm}(z) = k_2 z\left[\left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\right)\sin^2\varphi_1 \pm \left(\Delta n / 2n_2 \cos\varphi_2\right)\right];$$

$C_{1,2}^{\pm}$ – постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Сшивая напряженности электрического и магнитных полей в слое [16], [17], а также в областях $x < 0$ и $x > h$, находим коэффициенты отражения и пропускания (относительные интенсивности) дифрагированных волн на границе слоя. Коэффициенты отражения (R_{0s}) и пропускания (T_{0s}) s-поляризованных составляющих дифрагированных волн нулевого и первого (R_{1s}, T_{1s}) соответственно порядков определяются соотношениями:

$$R_{0s} = \left|\frac{\Delta_{0s}^r}{\Delta}\right|^2, \quad R_{1s} = \left|\frac{2\Delta_{1s}^r}{n_1\Delta}\right|^2,$$
$$T_{0s} = \frac{n_3\cos\varphi_3}{n_1\cos\varphi_1}\left|\frac{2\Delta_{0s}^t}{n_3\Delta}\right|^2, \quad T_{1s} = \frac{n_3\cos\varphi_3}{n_1\cos\varphi_1}\left|\frac{2\Delta_{1s}^t}{n_3\Delta}\right|^2, \quad (1.4)$$

где

$$\Delta = (-\alpha_{1+}^{-}\alpha_{3+}^{+}e_1^{-*} + \alpha_{1-}^{-}\alpha_{3-}^{+}e_1^{-})(\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+*} - \alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_1^{+}) +$$
$$+(\alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_1^{+} - \alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+*})(\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}\mathrm{e}_1^{-*} - \alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_1^{-}),$$
$$\Delta_0^r = (-\alpha_{1+}^{-}\alpha_{3+}^{-}e_1^{-*} + \alpha_{1-}^{-}\alpha_{3+}^{-}e_1^{-})(\alpha_{1-}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+*} - \alpha_{1+}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_1^{+}) +$$
$$+(-\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+*} + \alpha_{1-}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+})(\alpha_{1-}^{-}\alpha_{3+}^{-}e_1^{-*} - \alpha_{1+}^{-}\alpha_{3-}^{-}e_1^{-}),$$
$$\Delta_1^r = (b_1^- - b_1^+)(\alpha_{3-}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_1^{+}e_1^{-*} - \alpha_{3+}^{-}\alpha_{3-}^{+}e_1^{-}e_1^{+*}) +$$
$$+(b_1^- - b_1^+)\left[(\alpha_{3-}^{-})^2 e_1^{+}e_1^{-} - (\alpha_{3+}^{+})^2 e_1^{-*}e_1^{+*}\right], \qquad (1.5)$$
$$\Delta_{0,1}^t = \mp\alpha_{1+}^{+}e_1^{+*}\left[\alpha_{3+}^{+}b_1^- + n_2\alpha_{3+}^{-} + \alpha_{3-}^{-}(b_1^- - b_1^+)/2\right] \pm$$
$$\pm\alpha_{1-}^{+}e_1^{+}\left[\alpha_{3-}^{+}b_1^- + n_2\alpha_{3-}^{-} + \alpha_{3+}^{-}(b_1^- - b_1^+)/2\right] -$$
$$-\alpha_{1+}^{-}e_1^{-*}\left[\alpha_{3+}^{-}b_1^+ + n_2\alpha_{3+}^{-} + \alpha_{3-}^{+}(b_1^+ - b_1^-)/2\right] +$$
$$\alpha_{1-}^{-}e_1^{-}\left[\alpha_{3-}^{-}b_1^+ + n_2\alpha_{3-}^{+} + \alpha_{3+}^{+}(b_1^+ - b_1^-)/2\right].$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha_{1,3+}^{\pm} = (1 + n_{1,3}^{-1}b_1^{\pm}), \quad \alpha_{1,3-}^{\pm} = (1 - n_{1,3}^{-1}b_1^{\pm}),$$

$$b_1^{\pm} = \frac{k_{xs}^{b,a}}{k}, \quad e_1^{\pm} = \exp(ik_{xs}^{b,a}),$$

где $k_{xs}^{b,a} = k_2^{\pm}(h)$; знаком «*» обозначено комплексное сопряжение. При рассмотрении дифракции световых волн p-поляризации в выражениях (1.4), (1.5) следует выполнить замены: $s \to p$, $n_{1,2}\cos\varphi_{1,2} \to 1/n_{1,2}\cos\varphi_{1,2}$ для коэффициентов пропускания $\left(T_{0,1p}\right)$ и отражения $\left(R_{0,1p}\right)$. Из выражений (1.4), (1.5) следует, что выполняются следующие соотношения:

$$R_{0p,s} + R_{1p,s} + T_{0p,s} + T_{1p,s} = 1.$$

Для прозрачных слоёв в отсутствие френелевского отражения отличные от нуля относительные интенсивности дифрагированных волн определяются соотношениями

$$T_{0s,p} = \cos^2(\pi\,\Delta n_2 h / 2\lambda_0\cos\varphi_1),$$
$$T_{1s,p} = \sin^2(\pi\,\Delta n_2 h / 2\lambda_0\cos\varphi_1)$$

[1], [11]. При отсутствии фазовой решетки ($\Delta n = 0$) выражения (1.4), (1.5) приводят к формулам Эйри для коэффициентов отражения и пропускания плоскопараллельного слоя [13].

2 Численные расчеты

Численные расчеты проводились для плоскопараллельного слоя из реоксана в случае дифракции линейно поляризованного излучения He-Ne-лазера s-поляризации с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}6328$ мкм. Предполагалось, что слой материала ($n_2 = 1{,}49$) граничит с воздухом ($n_1 = n_3 = 1$).

Зависимости коэффициентов отражения ($R_{0,1}$) и пропускания ($T_{0,1}$) дифрагированной на ГР световой волны в плоскопараллельном слое из реоксана от фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn и угла падения света на слой φ_1 представлены на рисунке 2.1. Следует заметить, что для малых углов Брэгга можно положить, что угол падения света удовлетворяет соотношению

$$\varphi_1 \approx \lambda_0 / 2n_1\Lambda.$$

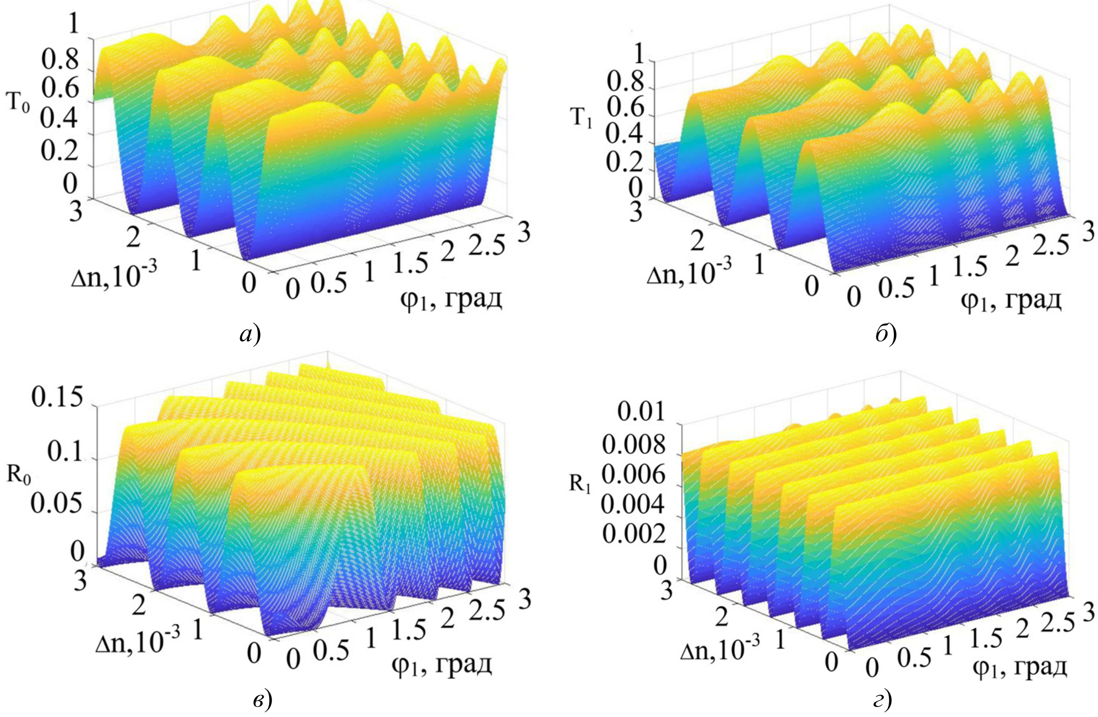


Рисунок 2.1 – Зависимости коэффициентов отражения ($R_{0s,1s}$) и пропускания ($T_{0s,1s}$) дифрагированной на ГР световой волны в плоскопараллельном слое от фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn и угла падения света на слой φ_1 (реоксан, $n_2 = 1{,}49$, $n_1 = n_3 = 1$, $\lambda_0 = 0{,}6328$ мкм, $h = 1{,}5$ мм)

Зависимость, представленная на рисунке 2.1, *а*, показывает, что с увеличением угла падания света φ_1 (уменьшением периода решетки Λ) имеют место незначительные осцилляции коэффициента пропускания нулевого дифракционного порядка T_{0s}. Увеличение фотоиндуцированного изменения показателя преломления Δn сопровождается возрастанием и последующим уменьшением коэффициента пропускания, вплоть до нулевого значения по принципу амплитудной модуляции света. Изменение коэффициента пропускания T_{1s} имеет противофазный характер, причем его амплитуда принимает максимальное значение $T_{1s} = 1$ (рисунок 2.1, *б*).

Коэффициент отражения дифрагированной волны нулевого порядка R_{0s} изменяется периодически как при изменении угла падения φ_1, так и при изменении показателя преломления Δn. Максимальное значение R_{0s} составляет 0,15 (рисунок 2.1, *в*). При увеличении показателя преломления Δn имеет место амплитудная модуляция коэффициента отражения дифрагированной волны первого порядка R_{1s} (рисунок 2.1, *г*). При этом, однако, величина коэффициента отражения ~0,01 в максимуме. В таком случае наблюдаются слабые изменения R_{1s} при увеличении угла падения света φ_1 (уменьшением периода решетки Λ) в максимумах коэффициента R_{1s}.

Аналогичные особенности поведения коэффициентов отражения и пропускания дифрагированных волн имеют место для *p*-поляризованного падающего света.

Заключение

Установленные особенности брэгговской дифракции света на голографических фазовых решетках в плоскопараллельном слое, граничащем с прозрачными средами, имеющими отличные от слоя показатели преломления для *s*- и *p*- поляризации падающего света показали возможность считывания голограмм на реоксане не только в прошедших дифракционных порядках, но и в отраженных. На примере голографической среды «реоксан», позволяющей получить значительные фотоиндуцированные изменения показателя преломления слоя $\sim 10^{-3}$, исследованы энергетические коэффициенты отражения и пропускания дифрагированных волн нулевого и первого порядка при увеличении угла падения света (уменьшения периода фазовой решетки), падающего на слой и фотоиндуцированного изменения показателя преломления среды. Показано, что при увеличении максимального возмущения показателя преломления среды, имеет место амплитудная модуляция прошедших и отраженных дифрагированных волн в условиях френелевского отражения от границ слоя. Установлено, что значительные периодические изменения коэффициента отражения дифрагированных волн нулевого прядка происходят при увеличении угла падения света (уменьшении периода фазовой решетки).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров*, *М.П.* Фоточувствительные электрооптические среды в голографии и оптической обработке информации. / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – Л.: Наука. – Ленингр. отделение, 1983. – 270 с.

2. *Hou*, *S.L.* Transport processes of photoinduced carriers in $Bi_{12}Si0_{20}$ / S.L. Hou, R.B. Lauer, R.E. Aldrich // J. Appl. Phys, 1973. – Vol. 44, № 6. – P. 2652–2658.

3. *Березкин*, *В.И.* Оптические свойства $Bi_{12}Si0_{20}$, легированного хромом / В.И. Березкин, М.В. Красинькова // Письма в ЖТФ. – 1983. – Т. 9, № 8. – С. 467–471.

4. *Гудаев*, *О.А.* Энергетический спектр и природа глубоких уровней в кристаллах германата висмута / О.А. Гудаев, В.А. Детиненко, В.К. Малиновский // ФТТ. – 1981. – Т. 23, № 1. – С. 195–201.

5. *Oberschmid*, *R.* Absorption centers of $Bi_{12}GeO_{20}$ and $Bi_{12}SiO_{20}$ crystals / R. Oberschmid // Phys. Stat. Sol. (a). – 1985. – Vol. 89, № 1. – P. 263–270.

6. *Красинькова*, *М.В.* О центрах примесной фотопроводимости и скрытого изображения в кристаллах $Bi_{12}SiO_{20}$ и его аналогах / М.В. Красинькова, Б.Я. Мойжес // ФТТ. – 1989. – Т. 31, № 9. – С. 81–86.

7. *Шандаров*, *С.М.* Изменение тензора диэлектрической проницаемости в кубических фоторефрактивных кристаллах под действием электрического поля голографической решетки / С.М. Шандаров, В.В. Шепелевич, Н.Д. Хатьков // Опт. и спектр. – 1989. – Т. 67, № 4. – С. 819–822.

8. *Holographic storage in electrooptic crystals* / N.V. Kuchtarev, V.B. Markov, S.G. Odulov, M.S. Soskin, V.L. Vinetskii // Ferroelectrics, 1979. – Vol. 22. – P. 949–962.

9. *Использование фенантренхинона для формирования фазовых трехмерных голограмм в среде реоксана* / Н.С. Шелехов, О.В. Бандюк, А.П. Попов, А.О. Ребезов // Сб. научных трудов. Оптическая голография с записью в трехмерных средах; под ред. Ю.Н.Денисюка. – Л. Наука. Ленингр. отделение, 1986. – С. 74–82.

10. *Длинноволновая граница спектральной чувствительности полимеров реоксана* / А.Н. Попов, А.Ф. Кавтрев, А.В. Вениаминов, Г.И. Лашков // Сб. научных трудов. Оптическая голография с записью в трехмерных средах; под ред. Ю.Н. Денисюка. – Л. Наука. Ленингр. отделение, 1986. – С. 82–91.

11. *Kong*, *J.A.* Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media / J.A. Kong // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – Vol. 67, № 6. – P. 825–829.

12. *Кулак*, *Г.В.* Дифракция света на ультразвуке в условиях френелевского отражения / Г.В. Кулак // Оптика и спектроскопия. – 1994. – Т. 76, № 6. – С. 1027–1029.

13. *Борн*, *М.* Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 721 с.

Поступила в редакцию 02.09.2020.

УДК 535.016

РЕЗОНАНСНОЕ ПЬЕЗОФОТОАКУСТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ПЛОТНОМ СЛОЕ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Г.С. Митюрич[1], **Е.В. Лебедева**[2], **А.Н. Сердюков**[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации*, *Гомель*

RESONANCE PIEZOPHOTOACOUSTIC TRANSFORMATION OF BESSEL LIGHT BEAMS IN DENSE LAYER OF CARBON NANOTUBES

G.S. Mityurich[1], **E.V. Lebedeva**[2], **A.N. Serdyukov**[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives*, *Gomel*

Исследовано явление возникновения фотоакустического сигнала в слое углеродных нанотрубок под действием облучения бесселевыми световыми пучками (БСП) для случая пьезоэлектрической регистрации. Установлено, что увеличение угла конусности БСП влияет на частоту появления резонансных пиков в зависимости от радиальной координаты ρ.

Ключевые слова: *фотоакустическое преобразование*, *пьезоэлектрическая детекция*, *плотный слой углеродных нанотрубок*, *бесселевы световые пучки*, *скорость диссипации энергии*, *амплитуда фотоакустического сигнала*, *функция Бесселя*, *уравнение теплопроводности.*

The phenomenon of the appearance of a photoacoustic signal in a layer of carbon nanotubes under the action of irradiation with Bessel light beams (BLB) is studied for the case of piezoelectric recording. It was found that an increase in the taper angle of BLB affects the frequency of occurrence of resonance peaks depending on the radial coordinate ρ.

Keywords: *photoacoustic transformation*, *piezoelectric detection*, *dense layer of carbon nanotubes*, *Bessel light beams*, *energy dissipation rate*, *amplitude of photoacoustic signal*, *Bessel function*, *heat equation.*

Introduction

Bessel light beams (BLB) are used and widely used in laser photoacoustic methods to diagnose the structure of various samples as a source of sound excitation [1]–[4]. In particular, the use of Bessel light beams in optical-acoustic microscopy makes it possible to effectively increase the focal depth of the resulting photoacoustic image in comparison with a conventional Gaussian light beam. The use of different types of BLB polarization modes is explained by the fact that BLBs have a number of unique properties, for example, non-diffraction of propagation in space.

Promising material in various fields of science and technology are carbon nanotubes (CNTs). One of the main advantages of these structures is the ability to control the properties of the created CNT layers [5] by changing the geometric dimensions and configuration of nanoobjects.

The classical theory of electrodynamics can not always be applied to the description of nanotubes. Consequently, it is required to search for new quasi-classical theoretical approaches and studies that would enable us to solve the problems of micro- and macroscopic electrodynamics [6], which underlie the theoretical basis of modern photoacoustic spectroscopy.

This paper is devoted to the construction of a model of photoacoustic conversion of BLB modes in a layer of chiral and achiral carbon nanotubes for the case of piezoelectric recording of the resultant signal.

1 Conductivity of chiral and achiral carbon nanotubes

The electronic structure of carbon nanotubes is described in the π-electron Hückel approximation [7] and in the general case within the framework of the tight-binding method using the nearest-neighbor approximation, is expressed by the well-known relation [8]:

$$\varepsilon(\vec{p}) = \pm\gamma_0\left(1+4\cos\left(\vec{p}\frac{\vec{a}_1+\vec{a}_2}{2\hbar}\right)\cos\left(\vec{p}\frac{\vec{a}_1-\vec{a}_2}{2\hbar}\right)+ +4\cos^2\left(\vec{p}\frac{\vec{a}_1-\vec{a}_2}{2\hbar}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

The modulus of the chirality vector of carbon nanotubes is determined by the ratio

$$\left|\vec{C}_h\right| = a\sqrt{n^2+nm+m^2}. \quad (1.2)$$

The projections of the momentum vector on the Ox and Oy axes of the Cartesian coordinate system for chiral carbon nanotubes are determined in accordance with the following equalities

$$\vec{p}\frac{\vec{a}_1+\vec{a}_2}{2\hbar} = \frac{1}{l}\left(\frac{3\pi q_1(n+m)}{2l}+\frac{\sqrt{3}a(n-m)}{4\hbar}p_y\right), \quad (1.3)$$

© *Mityurich G.S.*, *Lebedeva E.V.*, *Serdyukov A.N.*, 2020

$$\vec{p}\,\frac{\vec{a}_1-\vec{a}_2}{2\hbar}=\frac{1}{l}\left(\frac{\pi q_1(n-m)}{2l}+\frac{\sqrt{3}\,a(n+m)}{4\hbar}p_y\right), \quad (1.4)$$

where $l=\sqrt{n^2+nm+m^2}$, $q_1=1,2,\ldots,l.$

Taking into account (1.3) and (1.4) in expression (1.1), we carry out the transition to cylindrical coordinates ($p_x \to p_\varphi$, $p_y \to p_z$). After transformations, we obtain the following expression for describing the electronic structure of carbon nanotubes:

$$\varepsilon(\vec{p})=\pm\gamma_0\times$$
$$\times\left[1+4\cos\left(\frac{1}{l}\left(\frac{3\pi q(n+m)}{2l}+\frac{\sqrt{3}a(n-m)}{4\hbar}p_z\right)\right)\times\right.$$
$$\times\cos\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi q(n-m)}{2l}+\frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar}p_z\right)\right)+ \quad (1.5)$$
$$\left.+4\cos^2\frac{1}{l}\left(\frac{\pi q(n-m)}{2l}+\frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar}p_z\right)\right]^{1/2}.$$

We find the projection of the electron velocity vector onto the z axis as a partial derivative of function (5) with respect to the variable p_z

$$\upsilon(p_z)=\frac{\partial\varepsilon(\vec{p})}{\partial p_z}. \quad (1.6)$$

Taking into account relations (1.5) and (1.6), we obtain an expression for the projection of the velocity

$$\upsilon(p_z)=\frac{\pm\sqrt{3}\gamma_0 a\left[m\sin(\psi_1-\psi_2)-\right.\left.-n\sin(\psi_1+\psi_2)-(n+m)\sin 2\psi_2\right]}{\hbar l\left(1+4\cos\psi_1\cos\psi_2+4\cos^2\psi_2\right)}, \quad (1.7)$$

where

$$\psi_1(p_z)=\frac{1}{l}\left(\frac{3\pi q(n+m)}{2l}+\frac{\sqrt{3}\,a(n-m)}{4\hbar}p_z\right); \quad (1.8)$$

$$\psi_1(p_z)=\frac{1}{l}\left(\frac{\pi q(n-m)}{2l}+\frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar}p_z\right). \quad (1.9)$$

Next, we consider the Boltzmann equation describing the motion of π-electrons over the cylindrical surface of a single-walled nanotube in the semiclassical approximation [9]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+eE_z\frac{\partial f}{\partial p_z}+\nu_z\frac{\partial f}{\partial z}=J\left(F(\vec{p});f(\vec{p},z,t)\right), \quad (1.10)$$

where e is charge of electron; $\nu_z=\partial\varepsilon(\vec{p})/\partial p_z$ – speed of electron; $J(F,f)$ – integral of clash; $F(\vec{p})=1/\left[1+\exp\left(\varepsilon(\vec{p})/k_BT\right)\right]$ is the equilibrium Fermi distribution function; T – temperature; k_B – Boltzmann constant.

To calculate the integral of clash, we use the relaxation time approximation, according to which

$$J\left(F(\vec{p});f(\vec{p},z,t)\right)\cong\nu\left[F(\vec{p})-f(\vec{p},z,t)\right],$$

where $\nu=1/\tau$ is the frequency of relaxation; τ – mean free path of an electron.

The limitation imposed on the semiclassical model for describing the motion of an electron along the surface of a CNT from the side of high frequencies can be written as follows:

$$\omega<\omega_l, \quad (1.11)$$

where $\omega_l=2\nu_F/R_n$ corresponds to metal nanotubes, $\omega_l=2\nu_F/3R_{cn}$ – to semiconductor nanotubes; $v_F=a\gamma_0$ is the speed of π-electrons at the Fermi level; R_{cn} – radius of nanotube.

Further, the semiclassical model is used to calculate the axial current in a straight infinitely long nanotube, which arises under the action of the electric field of a traveling wave

$$E_z=\mathrm{Re}\left[E_z^0\exp\left(i(hz-\omega t)\right)\right],$$

where h is a constant of spread.

Let's find a small pertubation δf from equation (10) by an approximation linear in the field, taking into account that $E_z=F+\mathrm{Re}\left[\delta f\exp\left(i(hz-\omega t)\right)\right]$:

$$\delta f=-i\frac{\partial F}{\partial p_z}\frac{eE_z^0}{\omega-h\nu_z+i\nu}.$$

Then the surface axial current

$$j_z=\mathrm{Re}\left[j_z^0\exp\left(i(hz-\omega t)\right)\right]$$

density can be determined by integrating the following equality

$$j_z=\frac{2e}{(2\pi\hbar)^2}\iint\nu_z f d^2\vec{p}. \quad (1.12)$$

Expression (1.12) can be represented in a more compact form $j_z^0=\sigma_{zz}(h,\omega)E_z^0$, where σ_{zz} is a axial conductivity of a nanotube, which can be defined as follows:

$$\sigma_{zz}(h,\omega)=\frac{2e}{(2\pi\hbar)^2}\iint\frac{\partial F}{\partial p_z}\frac{\nu_z d^2\vec{p}}{\omega-h\nu_z+i\nu}. \quad (1.13)$$

Taking into account expressions (1.13) and (1.7), we calculate the axial electrical conductivity of chiral nanotubes:

$$\sigma_{zz}(\omega)=-\frac{ie^2}{\pi\hbar l}\frac{1}{(\omega+i\nu)}\sum_{s=1}^{m}\int_{-P_0}^{P_0}\upsilon_z^2(p_z,s)\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}dp_z, \quad (1.14)$$

where $P_0=\dfrac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}bl}$,

$$\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}=\frac{\exp(\varepsilon/k_BT)}{k_BT\left[1+\exp(\varepsilon/k_BT)\right]^2}.$$

By analogy with [6], the conductivity of chiral CNTs in cylindrical coordinates is determined by the relation, (electron velocity $v_e \ll c$, c – speed of light)

$$\sigma_{zz}(\omega)=-\frac{2P_0ie^2}{\pi\hbar l}\frac{1}{(\omega+i\nu)}\sum_{s=1}^{m}\upsilon_z^2(p_z,s)\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}, \quad (1.15)$$

For CNTs of the zigzag type, the expressions for the axial conductivity are expressed by the formula

$$|\sigma_{zz}(\omega)| =$$
$$= \frac{2w_{cn}e^2P_0}{\sqrt{3}\pi^2R_{cn}\sqrt{(\omega^2+\nu^2)}k_BT}\sum_{S=1}^{m}\frac{\exp(\varepsilon_0/k_BT)}{\left[1+\exp(\varepsilon_0/k_BT)\right]^2},$$
$$\varepsilon_0 = \varepsilon(P_0) =$$
$$= \gamma\sqrt{1+4\cos(aP_0)\cos\left(\frac{\pi S}{m}\right)+4\cos^2\left(\frac{\pi S}{m}\right)}.$$

Also obtained expression describing the axial conductivity in carbon nanotubes armchair type

$$|\sigma_{zz}(\omega)| =$$
$$= \frac{2w_{cn}e^2P_0}{\pi^2R_{cn}\sqrt{(\omega^2+\nu^2)}k_BT}\sum_{S=1}^{m}\frac{\exp(\varepsilon_0/k_BT)}{\left[1+\exp(\varepsilon_0/k_BT)\right]^2},$$
$$\varepsilon_0 = \varepsilon(P_0) =$$
$$= \gamma\sqrt{1+4\cos\left(\frac{a\hbar S}{R_0}\right)\cos\left(\frac{aP_0}{\sqrt{3}}\right)+4\cos^2\left(\frac{aP_0}{\sqrt{3}}\right)}.$$

The expression for the projection of the electron velocity vector on the z axis is obtained with allowance for the formula $\upsilon(p_z) = \partial\varepsilon(\mathrm{p})/\partial p_z$ [10] and the relationship for the energy distribution within the tight-binding approximation, which takes into account the interaction of only the nearest neighboring atoms in the hexagonal structure [11], [12].

2 Dissipation of energy of Bessel light beams in chiral and achiral carbon nanotubes

The effect of a Bessel light beam on the absorbing layer of chiral nanotubes leads to a periodic change in the temperature field, which can be described by the equation of thermal conductivity

$$\nabla^2T - \frac{1}{\beta_S}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2k_S}Q\left(1+e^{i\Omega t}\right), \qquad (2.1)$$

where $\beta_s = k_S/\rho_0\cdot C$ is effective coefficient of thermal diffusivity, k_S is coefficient of thermal conductivity, ρ_0 is density of a layer of carbon nanotubes, C is specific heat of a layer of CNTs, Ω is modulation frequency.

In equation (2.1) Q is volume density of thermal sources, which is determined by the expression

$$Q = \sigma_{cn}|E|^2, \qquad (2.2)$$

where $|\sigma_{cn}| = 2\pi\cdot|\sigma_{zz}|/\lambda$ is conductivity of the CNT layer. Substituting into (2.2) the relation describing the intensity of the wave, it is easy to obtain the energy dissipation rate

$$Q = 2\alpha_0I_0e^{-2\alpha_{eff}z} = 2\sigma_{cn}/(c\sqrt{\varepsilon'}\varepsilon_0)I_0e^{-2\alpha_{eff}z}. \quad (2.3)$$

In the formula (2.3) I_0 is Proceeding from the geometry of chiral and achiral carbon nanotubes, it is expedient to write equation (2.1) in a cylindrical coordinate system. The absorption coefficient in (2.2) is defined as follows

$$\alpha_0 = (\omega/c)\cdot\left(\varepsilon''/\sqrt{\varepsilon'}\right) = (\omega/c)\cdot(\varepsilon''/n).$$

Conductivity is related to the imaginary part of the dielectric constant by the formula $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\varepsilon'' = \sigma/\omega\varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\,f/m$).

Thus, in cylindrical coordinates, the energy dissipation rate of Bessel light beams (BLB) in the layer of absorbing carbon chiral nanotubes can be represented as follows

$$Q^{TE} = \frac{2|\sigma_{cn}|I_0}{c\sqrt{\varepsilon'}\varepsilon_0}\frac{c}{4\pi}k_0\varepsilon_\alpha\left(n_1^2+n_2^2\right)\times$$
$$\times\left[\frac{m^2}{(q\rho)^2}J_m^2(qr)+J_m'^2(qr)\right]\exp(-\alpha_{eff}z), \qquad (2.4)$$

where $\alpha = 2k_{zz}$.

3 Calculation of the resulting photoacoustic signal

Let us determine the amplitude of the photoacoustic signal arising in the layer of chiral CNTs upon irradiation by the TE mode of the BLB, based on the use of the piezoelectric method of recording the signal in accordance with the scheme shown in figure 3.1.

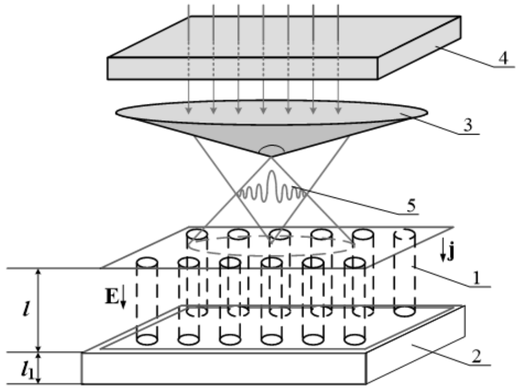


Figure 3.1. – The scheme of registration of a photoacoustic signal: 1 – the layer of chiral or achiral CNTs; 2 – piezoelectric detector; 3 – axicon; 4 – modulator; 5 – Bessel light beam

The simultaneous solution of the heat equation (2.1) and the equations for thermoelastic deformations in the sample and piezoelectric transducer l_1 allows us to find an expression for the photoacoustic signal. Assuming the boundaries of the "sample-piezoelectric detector" system to be free ($\sigma(l = 0) = 0$, $\sigma(l_1 = 0) = 0$) and also using the technique described in [13], we will find the expression for the no-load voltage V^{TE} on a piezo transducer

$$V^{TE} = \frac{e}{\varepsilon^S}\left(U_P\big|_{z=l_1} - U_P\big|_{z=0}\right) = \frac{e}{\varepsilon^S}Z\,R^{TE}. \quad (3.1)$$

In relation (1.5), the factor Z

$$Z = \frac{\sin^2(k_1\Delta l/2)}{m_0\sin k_1\Delta l\cos kl + \cos k_1\Delta l\sin kl} \qquad (3.2)$$

describes the purely acoustic properties of the "carbon nanotube-piezoelectric detector" system, and the factor R^{TE}

$$R^{TE} =$$
$$= \frac{\overline{E}^{TE}B_0k}{(\lambda_l+2\mu_l)k_S\sigma_S^2\alpha_{ef}}\left[\frac{1+\mu_1+\mu_2^2+\mu_3^2}{(1+\mu_1)(1+\mu_2^2)(1+\mu_3^2)}\right] \qquad (3.3)$$

determines the dissipative, dielectric, thermophysical, and thermoelastic properties of the sample under study, as well as the polarization and energy parameters of the BLB.

In the expressions (2.4), (3.1), (3.2) he following notation is introduced: $U(z)$, $U_p(z)$ are elastic displacements in the CNT layer and piezoelectric transducer; υ_{cn}, υ_p are values of velocities of elastic longitudinal waves, B_0 is the bulk modulus, $c^T = \lambda_l + 2/3\,\mu_l$, λ_l, μ_l are the Lame coefficients, a_0 is coefficient of volumetric thermal expansion, σ – values of elastic stresses, $\sigma_S = (1-i)a_S$, $a_S = (\Omega / 2\beta_{cn})^{1/2}$ is effective coefficient of thermal diffusion of the sample, β_{cn} is effective coefficient of sample thermal diffusivity, $\mu_1 = \alpha_{eff}/\sigma_S$, $\mu_2 = k/\sigma_S$, $\mu_3 = k/\alpha_{eff}$, $k_1 = \Omega/\upsilon_p$ is wave number of an elastic wave in a piezoelectric transducer, $k = \Omega/\upsilon_{cn}$ is wave number of a sound wave in a sample, $m_0 = (k_1 c^D)/(k c^T)$, $c^D = c^E(1 + e^2/\varepsilon^S c^E)$, c^E is coefficient of rigidity of a piezoelectric, e – piezoelectric module, ε^S – dielectric constant of a piezoelectric crystal,

$$\overline{E}^{TE} = \eta a_t \alpha_{ef} E^{TE},\quad E^{TE} = A^{TE} / \left(\alpha_{ef}^2 - \sigma_S^2\right),$$

$$A^{TE} = \frac{2|\sigma_{cn}| I_0}{c\sqrt{\varepsilon'}\varepsilon_0}\frac{c}{4\pi}k_0\varepsilon_\alpha\left(n_1^2 + n_2^2\right)\times$$

$$\times\left[\frac{m^2}{(q\rho)^2}J_m^2(qr) + J_m'^2(qr)\right],$$

$J_m'(q\rho) = \partial J_m(q\rho)/\partial\rho$ is derivative of the Bessel function $J_m(q\,\rho)$ from the radial coordinate ρ. Analysis of expression (3.1) for the amplitude of the photoacoustic signal showed the presence of resonant peaks in the region of gigahertz frequencies (Figure 3.2).

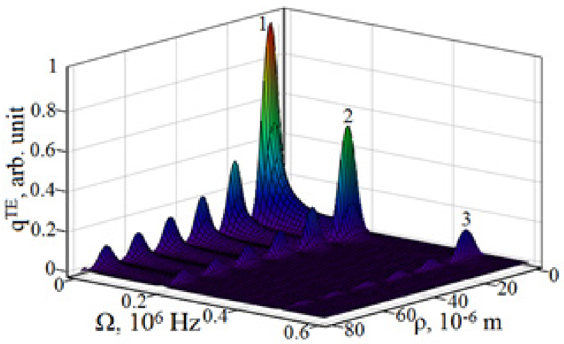


Figure 3.2 – Dependence of the amplitude of the PA signal on the radial coordinate and modulation frequency of the BLB ($m = 0$, $\alpha = 2°$)

We note that we have considered a particular case of the free boundaries of the "sample-piezotransducer" system. In this case, the potential difference recorded by the detector is determined by the formulas (3.1)–(3.3). When the boundary conditions change, the relationships for calculating the potential difference appearing in the detector will change. Under conditions where the boundaries of the "sample-piezoelectric detector" system are fixed ($U(0) = 0$, $U(l + l_1) = 0$) or alternately loaded ($\sigma(0) = 0$, $U(l + l_1) = 0$; $\sigma(l + l_1) = 0$ $U(0) = 0$), other expressions for the potential difference are obtained. However, even in these particular situations, the main regularities of the photoacoustic transformation of the TE-mode of the BLB in magnetically low-dimensional structures correspond to those revealed on the basis of the model of free boundaries.

Using expression (3.1) for the idling voltage, it is possible to determine the amplitudes of photoacoustic signals for the system "sample-piezoelectric transducer" with alternately loaded boundaries:

$$\begin{cases}\sigma(l) = \sigma_p(l),\\ U(l) = U_p(l),\\ \sigma(0) = 0,\\ U_p(l_1) = 0,\end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases}\sigma(l) = \sigma_p(l),\\ U(l) = U_p(l),\\ \sigma_p(l_1) = 0,\\ U(0) = 0.\end{cases} \tag{3.5}$$

The difference in the amplitude of the displacement of the boundaries of the system when the boundary conditions (3.4) is realized is determined by the following relation

$$U^{TE} = \frac{A_1'C_2' - A_2'C_1'}{A_1'B'_2 + A_2'B'_1}\left(e^{-2ik_1l_1}e^{ik_1l} - e^{-ik_1l}\right), \tag{3.6}$$

where

$$A_1' = 2k\,c^T \sin kl;\quad A_2' = 2\cos kl;$$

$$B_1' = ik_1c^D\left(e^{-2ik_1l_1}e^{ik_1l} + e^{-ik_1l}\right);$$

$$B_2' = \left(e^{-2ik_1l_1}e^{ik_1l} - e^{-ik_1l}\right);$$

$$C_1' = G_3'e^{ikl} - G_1';$$

$$C_2' = -\frac{iG_3'}{kc^T}e^{ikl} + G_2';$$

$$G_1' = E'B_0\alpha_t\left(\alpha_{eff}\left(\frac{\alpha_{eff}e^{-\alpha_{eff}l}}{\alpha_{eff}^2 + k^2} - \frac{\sigma_S e^{-\sigma_S l}}{\sigma_S^2 + k^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha_{eff}}{\sigma_S}e^{-\sigma_s l} - e^{-\alpha_{eff}l}\right)\right);$$

$$G_2' = E'\frac{B_0\alpha_t\alpha_{eff}}{c^T}\left(\frac{e^{-\alpha_{eff}l}}{\alpha_{eff}^2 + k^2} - \frac{e^{-\sigma_S l}}{\sigma_S^2 + k^2}\right);$$

$$G_3' = E'B_0\alpha_t\left(\alpha_{eff}\left(\frac{\alpha_{eff}}{\alpha_{eff}^2 + k^2} - \frac{\sigma_S}{\sigma_S^2 + k^2}\right) + \left(\frac{\alpha_{eff}}{\sigma_S} - 1\right)\right);$$

$$E' = Q^{TE}/\left(\alpha_{eff}^2 - \sigma_s^2\right);$$

$$c^D = c^E\left(1 + e^2/\varepsilon^S c^E\right).$$

It is also easy to obtain an expression for the potential difference, taking into account the boundary conditions (3.5)

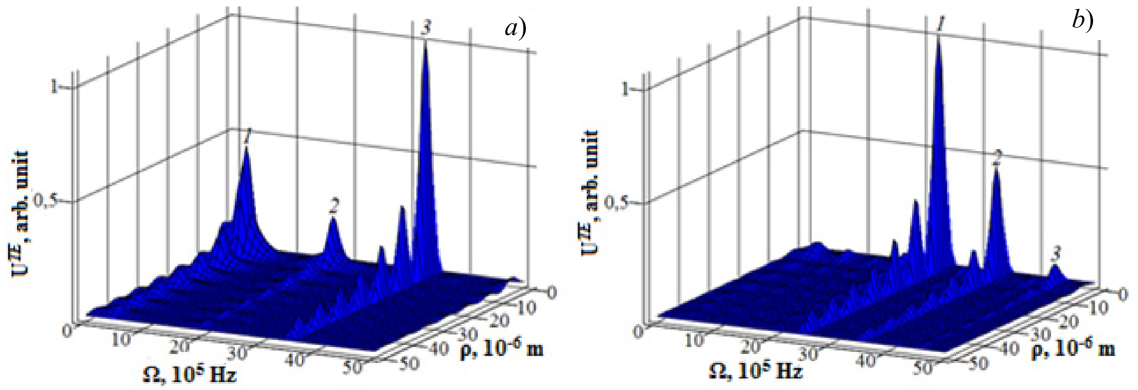


Figure 3.3 – Dependence of the amplitude of the photoacoustic signal U^{TE} on the radial coordinate when receiving the modulation frequency Ω: *a*) – the dependence under the boundary conditions (3.6); *b*) – dependence under the boundary conditions (3.7)

$$U^{TE} = \frac{A_1''C_2'' + A_2''C_1''}{A_1''B''_2 - A_2''B''_1} \times$$
$$\times \left(2e^{-2ik_1l_1} - e^{-2ik_1l_1}e^{ik_1l} - e^{-ik_1l}\right), \tag{3.7}$$

where

$$A_2'' = 2i\cos kl; \quad A_2'' = 2i\sin kl;$$
$$B_2'' = \left(e^{-2ik_1l_1}e^{ik_1l} + e^{-ik_1l}\right);$$
$$B_1'' = ik_1c^D\left(e^{-2ik_1l_1}e^{ik_1l} - e^{-ik_1l}\right);$$
$$C_1'' = ikc^TG_3''e^{ikl} + G_1'';$$
$$G_2'' = G_2', \quad C_2'' = -G_3''e^{ikl} + G_2''; \quad G_1'' = G_1';$$
$$G_3'' = E'B_0\alpha_t\alpha_{eff}\left(\frac{1}{\alpha_{eff}^2 + k^2} - \frac{1}{\sigma_S^2 + k^2}\right).$$

Analyzing expressions (3.6) and (3.7), we see that the amplitude of the photoacoustic signal is determined in a rather complicated manner and depends on many parameters of the "sample-piezoelectric converter" system. In addition, the magnitude of the resulting signal is significantly affected by the modulating action of Bessel light beams (Figure 3.3).

As a result of the graphical analysis of expressions (3.6), (3.7), a resonant increase in the amplitude was detected.

It should be noted that the amplitude and position of the resonant peaks depend on the type of the boundary conditions imposed on the “sample-piezoelectric converter” system. At the same time, the tendency is generally to decrease the amplitudes of the resonance coordinates, as well as to identify and eliminate inconsistencies.

It can also be seen from the figures that an increase in the cone angle of a BLB affects the frequency of the appearance of resonant peaks as a function of the radial coordinate ρ. Controlling the amplitude of the resulting signal resulting from the modulated absorption of the light beam can be realized by using the taper angle adjustment schemes of the BLBs acting on the basis of the electrooptic Pockels effect [14], [15].

Thus, the model of photoacoustic transformation in the layer of chiral and achiral carbon nanotubes irradiated by the TE-mode of a Bessel light beam is constructed.

REFERENCES

1. *Thermooptical Sound generation by Bessel light beams in nonlinear crystals* / G.S. Mityurich [et al.] // International Journal of Thermophysics. – 2011. – Vol. 32, № 4. – P. 844–851.

2. *Bessel-beam Grueneisen relaxation photoacoustic microscopy with extended depth of field* / J. Shi [et al.] // Journal of Biomedical Optics. – 2015. – Vol. 20 (11). – p. 116002-1–116002-6.

3. Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bes-sel beam plane illumination / T.A. Planchon [et al.] // Nature Methods. – 2011. – Vol. 8. – p. 417–423.

4. *Multicolor 4D fluorescence microscopy using ultrathin Bessel light sheets* / T. Zhao [et al] // Scientific Reports. – 2016. – Vol. 6. – P. 26159-1–26159-5.

5. *Trivedi*, *S.* Effect of vertically aligned carbon nanotube density on the water flux and salt rejection in desalination membranes / S. Trivedi, K.E. Alameh // SpringerPlus. – 2016. – Vol. 5 (1). – P. 1158-1–1158-13.

6. *Слепян*, *Г.Я.* Современные тенденции развития наноэлектро-магнетизма: аналит. обзор / НИУ «Ин-т ядерных проблем» БГУ; сост. Г.Я. Слепян, С.А. Максименко, П.П. Кужир. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 71 с.

7. *Stepanov*, *N.F.* Quantum mechanics and quantum chemistry / N.F. Stepanov. – M.: Mir, 2001. – 519 p.

8. *Mintmire*, *J.W.* Electronic and structural properties of carbon nanotubes / J.W. Mintmire, C.T. White // Carbon. – 1993. – Vol. 33, № 7. – P. 893–902.

9. *Maksimenko*, *S.A.* Electrodynamics of carbon nanotubes / S.A. Maksimenko, G.Ya. Slepyan // Radio engineering and electronics. – 2002. – Vol. 47. – P. 261.

10. *Митюрич*, *Г.С.* Фотодефлекционный сигнал, генерируемый бесселевым световым пучком в плотном слое углеродных нанотрубок / Г.С. Митюрич, Е.В. Черненок, А.Н. Сердюков. // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 20–27.

11. *Saito*, *R*. Physical properties of carbon nanotubes / R. Saito, M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus. – London: Imperial College Press, 1999. – 251 p.

12. *Mintmire*, *J.W*. Electronic and structural properties of carbon nano-tubes / J.W. Mintmire, C.T. White // Carbon. – 1995. – Vol. 33, iss. 7. – P. 893–902.

13. *Photoacoustic transformation of Bessel light beams in magnetoactive superlattices* / G.S. Mityurich, E.V. Chernenok, V.V. Sviridova, A.N. Serdyukov // Crystallography Reports. – 2015. – Vol. 60, № 2. – P. 273–279.

14. *Устройство управляемой термооптической генерации акустической волны*: пат. 10757u Респ. Беларусь, МПК (2006.01) G10K 11/00 / Г.С. Митюрич, Е.В. Черненок, А.Н. Сердюков; заявитель ГГУ им. Ф. Скорины. – № u 20150083; заявл. 09.09.2015; опубл. 30.09.2015 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2015. – № 4. – С. 146.

15. *Устройство управляемой лазерной генерации звука*: пат. 11032u Респ. Беларусь, МПК (2006.01) G10K 11/00 / Г.С. Митюрич, Е.В. Черненок, А.Н. Сердюков; заявитель ГГУ им. Ф. Скорины. – № u 20150378; заявл. 06.11.2015; опубл. 30.04.2016 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2016. – № 2. – С. 162–163.

Поступила в редакцию 20.10.2020.

УДК 539.12

ВЕКТОРНАЯ ЧАСТИЦА С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КВАДРУПОЛЬНЫМ МОМЕНТОМ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

Е.М. Овсиюк, А.Д. Коральков, Я.А. Войнова

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

VECTOR PARTICLE WITH ELECTRIC QUADRUPOLE MOMENT IN THE COULOMB FIELD, NONRELATIVISTIC THEORY

E.M. Ovsiyuk, A.D. Koral'kov, Ya.A. Voynova

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

В работе строятся решения уравнения для частицы со спином 1 и электрическим квадрупольным моментом в кулоновском поле. С учетом диагонализации оператора пространственного отражения получены системы из 4 и 6 радиальных уравнений. Обусловленные электрическим квадрупольным моментом слагаемые присутствуют в обеих системах. Система из 4 уравнений приводится к уравнению 2-го порядка, которое имеет две нерегулярные точки $r = 0, \infty$ рангов 3 и 4 регулярные точки. Построены его решения Фробениуса, исследована сходимость вовлеченных в решения 8-членных рядов. Условие трансцендентности таких решений дает физически интерпретируемую формулу для уровней энергии. Система из 6 уравнений оказывается сложной, в нерелятивистском приближении она сводится к двум связанным уравнениям 2-го порядка, откуда следует уравнение 4-го порядка. Построены решения Фробениуса этого уравнения. Выделены два типа решений, которые могли бы соответствовать связанным состояниям частицы.

***Ключевые слова**: векторная частица, квадрупольный момент, кулоновское поле, нерелятивистское приближение, решения Фробениуса, условие трансцендентности.*

The problem of vector particle with electric quadrupole moment in external Coulomb field is investigated. After separation of the variables, two systems of 4 and 6 equations respectively were derived. The terms due to the electric quadrupole moment are present in both systems. The system of 4 equations is reduced to a second order equation which contains two irregular points $r = 0, \infty$ of the rank 3 and 2, and four regular points. There are constructed its Frobenius type solutions, convergence of involved series is studied. The transcendence condition for such solutions gives a physically interpretable formula for the energy levels. The system of 6 equations turns out to be complicated, in the nonrelativistic approximation it is reduced to two coupled equations of the second order, whence the equation of the fourth order follows. Frobenius solutions of this equation are constructed. Two types of solutions are identified that could correspond to the bound states of a particle.

***Keywords**: vector particle, quadrupole moment, Coulomb field, nonrelativistic approximation, Frobenius solutions, transcendence condition.*

Введение

Известно, что в рамках теории релятивистских волновых уравнений можно предложить уравнения, которые описывают частицы с дополнительными электромагнитными характеристиками, также со спектрами спиновых или массовых состояний [1]–[3]. В частности, интенсивно исследовались уравнения для векторных частиц [4]–[19], обладающих помимо электрического заряда аномальным магнитным и электрическим квадрупольным моментами. Прежде такие уравнения решались в присутствии внешних однородных магнитного и электрического полей.

Уравнение для векторной частицы в случае внешнего кулоновского поля оказывается очень сложным: даже в случае обычной частицы без дополнительных электромагнитных моментов эта задача все еще не решена полностью. Однако в нерелятивистском пределе уравнение для обычной векторной частицы в кулоновском поле решается точно [20].

1 Исходное уравнение

В настоящей работе мы исследуем аналогичную нерелятивистскую задачу для частицы с квадрупольным моментом. Исходное уравнение имеет вид (предполагаем использование тетрадного формализма; см. обозначения в [3])

$$\left\{ i\beta^{c}\left[i\left(e^{\beta}_{(c)}\partial_{\beta} + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abc} \right) - e' A_{c} \right] + \right.$$
$$\left. + \lambda \frac{e}{M} F_{\alpha\beta} P j^{\alpha\beta} - M \right\} \Psi = 0; \qquad (1.1)$$

свободный параметр λ – безразмерный, P – проективный оператор, выделяющий из 10-компонентной функции тензорную составляющую. В декартовом базисе матрица P – это

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_6 \end{vmatrix}.$$

Ниже используются обозначения

$$M = \frac{mc}{\hbar}, \ e' = \frac{e}{c\hbar}, \ \Gamma = \lambda \frac{4\alpha}{M}, \ \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

© *Овсиюк Е.М., Коральков А.Д., Войнова Я.А.*, 2020

В сферической тетраде [21] уравнение (1.1) принимает вид

$$\left[\beta^0\left(i\partial_t+\frac{\alpha}{r}\right)+i\left(\beta^3\partial_r+\frac{1}{r}(\beta^1 j^{31}+\beta^2 j^{32})\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\Sigma_{\theta,\phi}+\frac{\Gamma}{r^2}Pj^{03}-M\right]\Phi=0,$$

где зависящий от угловых переменных оператор определен равенством

$$\Sigma_{\theta,\phi}=i\,\beta^1\partial_\theta+\beta^2\,\frac{i\partial_\phi+ij^{12}\cos\theta}{\sin\theta}.$$

В используемом базисе явный вид компонент оператора сохраняющегося полного момента следующий:

$$j_1=l_1+\frac{\cos\phi}{\sin\theta}ij^{12},\ \ j_2=l_2+\frac{\sin\phi}{\sin\theta}ij^{12},$$

$$j_3=l_3,\ \ j^{12}=\beta^1\beta^2-\beta^2\beta^1.$$

Ниже будем использовать волновую функцию и явные выражения для матриц Даффина – Кеммера в циклическом представлении [21], матрица ij^{12} имеет в этом базисе диагональную структуру:

$$ij^{12}=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&t_3&0&0\\0&0&t_3&0\\0&0&0&t_3\end{vmatrix},\ \ t_3=\begin{vmatrix}+1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}.$$

Вид проективного оператора P не меняется при переходе от декартового базиса к циклическому.

2 Разделение переменных в релятивистском уравнении

Система радиальных уравнений для обычной векторной частицы в кулоновском поле известна [21], чтобы получить обобщенную систему уравнений для векторной частицы с аномальным моментом, достаточно найти явный вид дополнительного слагаемого в уравнении:

$$\frac{\Gamma}{r^2}Pj^{03}=\frac{\Gamma}{r^2}P(\beta^0\beta^3-\beta^3\beta^0),$$

$$P\,j^{03}=\begin{vmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&+i\\0&0&0&0&+i&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\end{vmatrix}.$$

Структура 10-компонентной волновой функции векторной частицы с квантовыми числами ε, j, m задается соотношениями [21]

$$\Psi(x)=\{f_0(x),\vec f(x),\vec E(x),\vec H(x)\},$$

$$\Phi_0(x)=e^{-i\varepsilon t}f_0(r)D_0,$$

$$\vec\Phi(x)=e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix}f_1(r)D_{-1}\\f_2(r)D_0\\f_3(r)D_{+1}\end{vmatrix},\ \ \vec E(x)=e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix}E_1(r)D_{-1}\\E_2(r)D_0\\E_3(r)D_{+1}\end{vmatrix},$$

$$\vec H(x)=e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix}H_1(r)D_{-1}\\H_2(r)D_0\\H_3(r)D_{+1}\end{vmatrix},$$

где используются D-функции Вигнера [21]: $D_\sigma=D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0),\ \sigma=0,-1,+1.$ После необходимых вычислений находим систему уравнений

$$-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2-\frac{\nu}{r}(E_1+E_3)=mf_0,$$

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+i\frac{\nu}{r}H_2=mf_1,$$

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2-i\frac{\nu}{r}(H_1-H_3)=mf_2,$$

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_3-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_3-i\frac{\nu}{r}H_2=mf_3;$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_1+\frac{\nu}{r}f_0-i\frac{\Gamma}{r^2}H_1=mE_1,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_2-\frac{d}{dr}f_0=mE_2,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_3+\frac{\nu}{r}f_0+i\frac{\Gamma}{r^2}H_3=mE_3,$$

$$-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_1-i\frac{\nu}{r}f_2+i\frac{\Gamma}{r^2}E_1=mH_1,$$

$$i\frac{\nu}{r}(f_1-f_3)=mH_2,$$

$$i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_3+i\frac{\nu}{r}f_2-i\frac{\Gamma}{r^2}E_3=mH_3.$$

Сделаем замечания о размерностях, входящих в систему величин (и величин, которые будут использоваться дальше):

$$[\varepsilon]=\text{metre}^{-1},\ \ \varepsilon=\frac{\varepsilon'}{\hbar c};\ \ [m]=\text{metre}^{-1},$$

$$m=\frac{Mc}{\hbar},\ \ \alpha=\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137};$$

$$[\Gamma]=\text{metre},\ \ \gamma=m\Gamma,\ \ [\gamma]=1,$$

$$E=\frac{\varepsilon}{m}=\frac{\varepsilon'}{Mc^2},\ \ [E]=1,\ \ x=rx,\ \ [x]=1.$$

Одновременно с операторами $\vec j^{\,2}, j_3$ будем диагонализировать оператор пространственной инверсии $\widehat\Pi$. В представлении декартовой тетрады и декартова базиса матриц β^a этот оператор имеет вид

$$\widehat\Pi=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-I&0&0\\0&0&-I&0\\0&0&0&+I\end{vmatrix}\widehat P,\ \ \widehat P\Psi(\vec r)=\Psi(-\vec r).$$

После перехода к сферической тетраде, а затем к циклическому представлению матриц β^a получаем другое представление для этого оператора [21]:

$$\widehat{\Pi}_{spher} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_3 \end{vmatrix} \widehat{P}, \ \Pi_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнение на собственные значения $\widehat{\Pi}_{spher}\Psi = P\Psi$ имеет два решения:

$$P = (-1)^{j+1}, \ f_0 = 0, \ f_3 = -f_1, \ f_2 = 0,$$
$$E_3 = -E_1, \ E_2 = 0, \ H_3 = H_1;$$
$$P = (-1)^j, \ f_3 = +f_1, \ E_3 = +E_1, \ H_3 = -H_1, \ H_2 = 0.$$

Для состояний с $P = (-1)^{j+1}$ имеем 4 радиальных уравнения:

$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = mf_1,$$
$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 - i\frac{\Gamma}{r^2}H_1 = mE_1,$$
$$-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\Gamma}{r^2}E_1 = mH_1, \ 2i\frac{\nu}{r}f_1 = mH_2. \quad (2.1)$$

Для состояний с $P = (-1)^j$ имеем 6 радиальных уравнений:

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - 2\frac{\nu}{r}E_1 = mf_0,$$
$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 = mf_1,$$
$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 = mf_2,$$
$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 + \frac{\nu}{r}f_0 - i\frac{\Gamma}{r^2}H_1 = mE_1,$$
$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - \frac{d}{dr}f_0 = mE_2, \quad (2.2)$$
$$i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 - i\frac{\Gamma}{r^2}E_1 = -mH_1.$$

3 Состояния с четностью $P = (-1)^{j+1}$

В системе (2.1) исключим переменные H_1, H_2 из двух первых уравнений:

$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)mE_1 - \frac{2\nu^2}{r^2}f +$$
$$+i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\left[-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right]_1 = m^2 f_1,$$
$$\left[-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)m - \frac{\Gamma}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right]f_1 = \left(m^2 - \frac{\Gamma^2}{r^4}\right)E_1.$$

Далее исключим функцию E_1, в результате получим уравнение 2-го порядка для f_1:

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \left[-\frac{2rm}{mr^2 + \Gamma} - \frac{2rm}{mr^2 - \Gamma} + \frac{6}{r}\right]\frac{df_1}{dr} +$$
$$+\left[\frac{2\varepsilon\alpha}{r} + \frac{-2\nu^2 + \alpha^2 + 4}{r^2} + \frac{2i\Gamma\varepsilon}{mr^3} +\right.$$
$$+\frac{\Gamma(\Gamma m + i\alpha)}{mr^4} + \frac{2\nu^2\Gamma^2}{m^2 r^6} - m^2 + \varepsilon^2 +$$
$$\left.+\frac{2m(i\varepsilon r + i\alpha - 1)}{mr^2 + \Gamma} - \frac{2m(i\varepsilon r + i\alpha + 1)}{mr^2 - \Gamma}\right]f_1 = 0.$$

Перейдем к безразмерным переменным: $x = mr$, $E = \varepsilon / m, \gamma = m\Gamma$, при этом получаем более компактную форму для уравнения:

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \left[-\frac{2x}{x^2 + \gamma} - \frac{2x}{x^2 - \gamma} + \frac{6}{x}\right]\frac{df_1}{dx} +$$
$$+\left[E^2 - 1 + \frac{2E\alpha}{x} + \frac{-2\nu^2 + \alpha^2 + 4}{x^2} + \frac{2i\gamma E}{x^3} +\right.$$
$$+\frac{\gamma(\gamma + i\alpha)}{x^4} + \frac{2\nu^2\gamma^2}{x^6} +$$
$$\left.+\frac{2(iEx + i\alpha - 1)}{x^2 + \gamma} - \frac{2(iEx + i\alpha + 1)}{x^2 - \gamma}\right]f_1 = 0. \quad (3.1)$$

Здесь имеем особые точки

$$x = 0, \ \text{Rank} = 3, \ x = \infty, \ \text{Rank} = 2;$$
$$x = -\sqrt{\gamma}, \ +\sqrt{\gamma}, \ -i\sqrt{\gamma}, \ +i\sqrt{\gamma}, \ \text{Rank} = 1. \quad (3.2)$$

Из физических соображений [2], [3] должно выполняться неравенство $\gamma^2 < 0$. Уравнение удобно представить в символическом виде:

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \left[-\frac{2x}{x^2 + \gamma} - \frac{2x}{x^2 - \gamma} + \frac{6}{x}\right]\frac{df_1}{dx} +$$
$$+\left[E^2 - 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} +\right.$$
$$\left.+\frac{a_4}{x^4} + \frac{a_6}{x^6} + \frac{L}{x^2 + \gamma} + \frac{N}{x^2 - \gamma}\right]f_1 = 0.$$

Строим его решения Фробениуса около точки $x = 0$ в виде $f_1(x) = e^{Dx}x^A e^{B/x}e^{C/x^2}F(x)$, для функции $F(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 F}{dx^2} +$$
$$+\left[-\frac{2x}{x^2 + \gamma} - \frac{2x}{x^2 - \gamma} + \frac{2A + 6}{x} - \frac{2B}{x^2} - \frac{4C}{x^3} + 2D\right]\frac{dF}{dx} +$$
$$+\left[(E^2 + D^2 - 1) + \frac{2AD + 6D + a_1}{x} +\right.$$
$$+\frac{A^2 + 5A - 2BD + a_2}{x^2} + \frac{-2AB - 4B - 4CD + a_3}{x^3} +$$
$$+\frac{-4AC + B^2 - 6C + a_4}{x^4} + \frac{4BC}{x^5} + \frac{4C^2 + a_6}{x^6} +$$
$$+\frac{-2A\gamma - 2Bx - 4C - 2D\gamma x + L\gamma}{\gamma(x^2 + \gamma)} +$$
$$\left.+\frac{-2A\gamma + 2Bx + 4C - 2D\gamma x + N\gamma}{\gamma(x^2 - \gamma)}\right]F = 0.$$

При выборе параметров как указано ниже (ищем решения для связанных состояний)

$$D = -\sqrt{1-E^2} < 0, \; A = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{\gamma^2 + i\gamma\alpha}{\sqrt{2\nu^2(-\gamma^2)}},$$

$$B = 0, \; C = -\frac{1}{2}\sqrt{2\nu^2(-\gamma^2)} < 0$$

уравнение упрощается:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \left[-\frac{2x}{x^2+\gamma} - \frac{2x}{x^2-\gamma} + \frac{2A+6}{x} - \frac{2B}{x^2} - \frac{4C}{x^3} + 2D\right]\frac{dF}{dx} + \left[\frac{2AD+6D+a_1}{x} + \frac{A^2+5A-2BD+a_2}{x^2} + \frac{-2AB-4B-4CD+a_3}{x^3} + \frac{-2A\gamma-2Bx-4C-2D\gamma x+L\gamma}{\gamma\left(x^2+\gamma\right)} + \frac{-2A\gamma+2Bx+4C-2D\gamma x+N\gamma}{\gamma\left(x^2-\gamma\right)}\right]F = 0.$$

Его решения строятся в виде степенных рядов $F(x) = \sum_0^\infty c_k x^k$ с 8-членным рекуррентным соотношением для коэффициентов:

$$\underline{k = 6,7,8,...} \quad \left[2D(k-6) + \left(2AD + 2D + a_1\right)\right]d_{k-6} + \left[(k-5)(k-6) + \left(2+2A\right)(k-5) + \left(A^2 + A - 2BD + L + N + a_2\right)\right]d_{k-5} + \left[-2B(k-4) + \left(-2AB - 4CD + a_3\right)\right]d_{k-4} + \left[-4C(k-3) + \left(8C - L\gamma + N\gamma\right)\right]d_{k-3} + \left[-2D\gamma^2(k-2) + \gamma^2\left(-2AD - 6D - a_1\right)\right]d_{k-2} + \left[-\gamma^2(k-1)(k-2) - 2\gamma^2\left(3+A\right)(k-1) + \gamma^2\left(-A^2 - 5A + 2BD - a_2\right)\right]d_{k-1} + \left[2B\gamma^2 k + \gamma^2\left(2AB + 4B + 4CD - a_3\right)\right]d_k + 4C\gamma^2(k+1)d_{k+1} = 0,$$

кратко это соотношение можно представлять в виде

$$P_{k-6}c_{k-6} + P_{k-5}c_{k-5} + P_{k-4}c_{k-4} + P_{k-3}c_{k-3} + P_{k-2}c_{k-2} + P_{k-1}c_{k-1} + P_k c_k + P_{k+1}c_{k+1} = 0.$$

Сходимость рядов исследуется методом Пуанкаре – Перрона, это дает

$$R_{\text{conv}} = |\sqrt{\gamma}|, +\infty.$$

Для получения какого-нибудь правила квантования энергий исследуем условие трансцендентности решений (учитывая, что параметр γ – чисто мнимый, делаем замену $i\gamma \Rightarrow \gamma$), в результате получаем

$$P_{k-6} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha E = \sqrt{1-E^2}\left(n - 1/2 - \frac{\gamma\alpha - \gamma^2}{2\sqrt{\gamma^2 l(l+1)}}\right).$$

Отсюда, в зависимости от знака вещественного параметра квадрупольного момента γ, имеем два разных спектра

$$\gamma = \pm|\gamma|,$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{N^2}}}, \; N = n - 1/2 \pm \frac{\gamma - \alpha}{2\sqrt{j(j+1)}}.$$

4 Случай минимального $j = 0$

Отдельно должен быть рассмотрен случай $j = 0$:

$$\Phi_0(x) = e^{-i\varepsilon t} f_0(r), \; \vec{\Phi}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0 \\ f_2(r) \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0 \\ E_2(r) \\ 0 \end{vmatrix}, \; \vec{H}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0 \\ H_2(r) \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Радиальные уравнения имеют вид (квадрупольный момент себя никак не проявляет):

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 = mf_0, \; + i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 = mf_2,$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - \frac{d}{dr}f_0 = mE_2, \; H_2 = 0.$$

Если исключить f_0, f_2, то для E_2 получим уравнение

$$\frac{d^2E_2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dE_2}{dr} + \left(\varepsilon^2 - m^2 + \frac{2\varepsilon\alpha}{r} + \frac{\alpha^2 - 2}{r^2}\right)E_2 = 0,$$

которое дает известный спектр энергий

$$\varepsilon = \frac{m}{\sqrt{1+\alpha^2/N^2}}, \; N = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{9 - 4\alpha^2}\right) + n,$$

$$n = 0,1,2,...$$

5 Нерелятивистское приближение, состояния с четностью $P = (-1)^j$

Поскольку релятивистская система (2.2) из 6 радиальных уравнений очень сложная, перейдем в ней к нерелятивистскому пределу. Для этого исключим нединамические переменные f_0, H_1:

$$f_0 = -\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1\right],$$

$$H_1 = -\frac{1}{m}\left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 - i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right].$$

Оставшиеся 4 уравнения примут вид

$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 - \frac{i}{m}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)f_1 + i\frac{\nu}{r}f_2 - i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right] = mf_1,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}t\right)E_2+$$

$$+2i\frac{\nu}{r}\frac{1}{m}\left[i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_1+i\frac{\nu}{r}f_2-i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right]=mf_2,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_1-\frac{\nu}{r}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2+2\frac{\nu}{r}E_1\right]+$$

$$+i\frac{\Gamma}{r^2}\frac{1}{m}\left[i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)f_1+i\frac{\nu}{r}f_2-i\frac{\Gamma}{r^2}E_1\right]=mE_1,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)f_2+\frac{1}{m}\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2+2\frac{\nu}{r}E_1\right]=mE_2.$$

Введем большие и малые компоненты соотношениями

$$f_1=\Psi_1+\psi_1,\ iE_1=\Psi_1-\psi_1,$$

$$f_2=\Psi_2+\psi_2,\ iE_2=\Psi_2-\psi_2.$$

Тогда, комбинируя уравнения (одновременно выделяем энергию покоя заменой $\varepsilon=m+E$), получим два уравнения, в которые входят только большие компоненты

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+2mE+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{2\nu^2}{r^2}-\frac{2\Gamma}{r^3}-\frac{\Gamma^2}{r^4}\right)\Psi_1-$$

$$-\nu\left(\frac{2}{r^2}+\frac{\Gamma}{r^3}\right)\Psi_2=0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+2mE+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{2\nu^2+2}{r^2}\right)\Psi_2-$$

$$-2\nu\left(\frac{2}{r^2}+\frac{\Gamma}{r^3}\right)\Psi_1=0,$$

$$2\nu^2=j(j+1). \qquad (5.1)$$

Существуют еще два уравнения, которые позволяют вычислить малые компоненты по известным большим, их здесь не приводим. Из (5.1) методом исключения получаем уравнения 4-го порядка для $\Psi_1(r)$ и $\Psi_2(r)$. Структура сингулярностей у этих двух уравнений 4-го порядка одинаковая. Достаточно исследовать одно уравнение, например, для функции Ψ_1. Форму уравнения можно упростить, если перейти к безразмерным величинам $x=rm,\ \Gamma m=\gamma,\ \varepsilon=E/m,$ в результате имеем

$$\frac{d^4\Psi_1}{dx^4}+\left[\frac{10}{x}-\frac{4}{2x+\gamma}\right]\frac{d^3\Psi_1}{dx^3}+$$

$$+\left[4\varepsilon+\frac{-24+4\alpha\gamma}{\gamma x}+\frac{22-4\nu^2}{x^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\gamma}{x^3}-\frac{\gamma^2}{x^4}+\frac{48}{(2x+\gamma)\gamma}+\frac{8}{(2x+\gamma)^2}\right]\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+$$

$$+\left[\frac{64-16\nu^2+20\gamma^2\varepsilon-8\alpha\gamma}{\gamma^2 x}+\right.$$

$$\frac{-24+8\nu^2+16\alpha\gamma}{\gamma x^2}+\frac{8-12\nu^2}{x^3}+$$

$$\left.+\frac{-128-8\gamma^2\varepsilon+16\alpha\gamma+32\nu^2}{(2x+\gamma)\gamma^2}-\frac{32}{(2x+\gamma)^2\gamma}\right]\frac{d\Psi_1}{dx}+$$

$$+\left[4\varepsilon^2+\frac{128\nu^2+8\varepsilon\alpha\gamma^3+64\alpha\gamma-32\gamma^2\varepsilon}{x\gamma^3}+\right.$$

$$+\frac{-24\alpha\gamma-48\nu^2+20\gamma^2\varepsilon+4\alpha^2\gamma^2-8\varepsilon\nu^2\gamma^2}{\gamma^2x^2}+$$

$$+\frac{8\alpha\gamma-4\gamma^2\varepsilon+16\nu^2-8\alpha\nu^2\gamma}{\gamma x^3}+$$

$$+\frac{-8\nu^2-4\alpha\gamma-2\gamma^2\varepsilon+4\nu^4}{x^4}-\frac{2\gamma\left(-2+2\nu^2+\alpha\gamma\right)}{x^5}+$$

$$+\frac{2\gamma^2}{x^6}+\frac{-128\alpha\gamma+64\gamma^2\varepsilon-256\nu^2}{(2x+\gamma)\gamma^3}+$$

$$\left.+\frac{-32\alpha\gamma+16\gamma^2\varepsilon-64\nu^2}{(2x+\gamma)^2\gamma^2}\right]\Psi_1=0.$$

Удобно использовать его краткое представление

$$\frac{d^4}{dx^4}\Psi_1+\left(\frac{10}{x}-\frac{4}{2x+\gamma}\right)\frac{d^3}{dx^3}\Psi_1+$$

$$+\left(4\varepsilon+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{a_4}{x^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_5}{2x+\gamma}+\frac{a_6}{(2x+\gamma)^2}\right)\frac{d^2}{dx^2}\Psi_1+$$

$$+\left(\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\frac{b_3}{x^3}+\frac{b_4}{2x+\gamma}+\frac{b_5}{(2x+\gamma)^2}\right)\frac{d}{dx}\Psi_1+$$

$$+\left(4\varepsilon^2+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{x^3}+\frac{c_4}{x^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{c_5}{x^5}+\frac{c_6}{x^6}+\frac{c_7}{2x+\gamma}+\frac{c_8}{(2x+\gamma)^2}\right)\Psi_1=0. \qquad (5.2)$$

6 Решения Фробениуса уравнения 4-го порядка

Точка $x=0$ является нерегулярной особой точкой и имеет ранг 2. Поэтому решения уравнения (5.2) в окрестности точки $x=0$ ищем в виде

$$\Psi_1(x)=x^Ae^{Bx}e^{C/x}f(x).$$

Параметры A, B, C фиксируются, чтобы упростить вид уравнения для $f(x)$.

После необходимых вычислений устанавливаем существование четырех различных решений I, II, III, IV (используем отрицательные значения для B, поскольку строим решения, пригодные для описания связанных состояний):

$$\text{(I, II)}\ \ B=-\sqrt{-2\varepsilon},\ C_1=0,\ A_1=-1,\ A_2=+2,$$

$$\begin{cases}\Psi_1(x)=e^{Bx}\dfrac{1}{x}f_1(x),\\ \Psi_2(x)=e^{Bx}x^2f_2(x),\end{cases}$$

$$\text{(III)}\ \ B=-\sqrt{-2\varepsilon},\ C_2=+\gamma,\ A_3=-1,$$

$$\Psi_3(x) = e^{Bx} \frac{1}{x} e^{+\gamma/x} f_3(x),$$

$$\text{(IV)} \;\; B = -\sqrt{-2\varepsilon}, \;\; C_3 = -\gamma, \;\; A_4 = +1,$$

$$\Psi_4(x) = e^{Bx} x e^{-\gamma/x} f_4(x).$$

Для описания связанных состояний могут быть пригодны только два типа решений из четырех: те, которые стремятся к нулю в точке $x = 0$. Можно показать, что решения для функций $f_1(r), f_2(r)$ строятся в виде степенных рядов с 8-членными рекуррентными соотношениями. Решения для функций $f_3(r), f_4(r)$ также строятся в виде степенных рядов, но с 9-членными рекуррентными соотношениями. То есть, имеем 4 решения фробениусовского типа. Исследована сходимость этих степенных рядов методом Пуанкаре – Перрона. Возможные радиусы сходимости одинаковы: $R_{conv} = |\Gamma|/2, \; \infty$.

В окрестности регулярной особой точки $r = -\Gamma/2$ решения имеют вид

$$\Psi_1(r) = (2r + \Gamma)^s, \;\; s = 0, -1, -3, -4.$$

Только решения с индексом $s = 0$ ведут себя в точке $r = -\Gamma/2$ регулярно.

Использование в качестве правила квантования уровней энергии условия трансцендентности решений здесь приводит к достаточно тривиальному результату

$$\varepsilon = -\frac{\alpha^2}{n^2};$$

он едва ли корректно описывает реальный спектр энергии в этих состояниях, поэтому детали этого анализа не приводим.

7 Нерелятивистское описание состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$

В радиальной системе уравнений (2.1) исключим нединамические переменные H_1, H_2:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} - m^2\right] f_1 +$$

$$+\left[i(\varepsilon + \frac{\alpha}{r})m - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{\Gamma}{r^2}\right] E_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\Gamma^2}{r^4} - m^2\right) E_1 + \tag{7.1}$$

$$+\left[-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)m - \frac{\Gamma}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right] f_1 = 0.$$

Затем вводим большие и малые компоненты: $f_1 = \Psi + \psi, \; iE_1 = \Psi - \psi,$ тогда система (7.1) примет вид (одновременно выделим энергию покоя формальной заменой $\varepsilon \Rightarrow m + E_{n-r}$, где E_{n-r} – нерелятивистская энергия):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} - m^2\right)(\Psi + \psi) +$$

$$+\left[\left(m + E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right)m + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{i\Gamma}{r^2}\right](\Psi - \psi) = 0,$$

$$\left(\frac{\Gamma^2}{r^4} - m^2\right)(\Psi - \psi) +$$

$$+\left[\left(m + E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right)m - \frac{i\Gamma}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right](\Psi + \psi) = 0.$$

Переписываем эти уравнения по-другому, выделим слагаемые, пропорциональные m^2:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)(\Psi + \psi) - m^2(\Psi + \psi) +$$

$$+\left[m\left(E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\frac{i\Gamma}{r^2}\right](\Psi - \psi) +$$

$$+m^2(\Psi - \psi) = 0,$$

$$\frac{\Gamma^2}{r^4}(\Psi - \psi) - m^2(\Psi - \psi) +$$

$$+\left[m\left(E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{i\Gamma}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\right](\Psi + \psi) +$$

$$+m^2(\Psi + \psi) = 0.$$

Замечаем, что если сложить эти два уравнения, то все пропорциональные m^2 члены взаимно сокращаются, и в получаемом после этого уравнении имеем право пренебречь малой компонентной ψ в сравнении с большой Ψ. Так приходим к уравнению только для большой компоненты

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} +\right.$$

$$\left.+2m\left(E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{2i\Gamma}{r^3} + \frac{\Gamma^2}{r^4}\right]\Psi = 0.$$

Осталось сделать замену $i\Gamma \Rightarrow \Gamma$, в результате получаем

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} +\right.$$

$$\left.+2m\left(E_{n-r} + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{2\Gamma}{r^3} - \frac{\Gamma^2}{r^4}\right]\Psi = 0.$$

Это уравнение с двумя особыми точками в $r = 0, \infty$, обе ранга 2; т. е. оно принадлежит к классу дважды вырожденных функций Гойна. Это уравнение имеет существенно более простую структуру сингулярных точек, чем его релятивистский аналог (см. (3.1)–(3.2)).

Построим решения Фробениуса в окрестности нуля, для этого используем подстановку

$$R(r) = e^{Cr} r^A e^{\frac{B}{r}} f(r),$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{2 + 2A}{r} - \frac{2B}{r^2} + 2C\right)\frac{df}{dr} +$$

$$+\left(\frac{2AC + 2C + 2m\alpha}{r} + \frac{A^2 + A - 2BC - j^2 - j}{r^2} +\right.$$

$$+\frac{-2AB-2\Gamma}{r^3}+\frac{B^2-\Gamma^2}{r^4}+C^2+2mE_{n-r}\Bigg)f=0.$$

При ограничениях на параметры (для C выбираем отрицательное значение)

$$C=-\sqrt{-2mE_{n-r}}<0;\ B_1=\Gamma,\ A_1=-1;$$
$$B_2=-\Gamma,\ A_2=+1$$

уравнение упрощается. Связанным состояниям должны соответствовать отрицательные значения для параметра B. Следовательно, в зависимости от знака величины Γ, имеем две разные возможности выбрать решения, пригодные для описания связанных состояний (требуем, чтобы около нуля множитель $e^{\frac{B}{r}}$ стремился к нулю):

$$\Gamma>0,\ A=+1,\ B=-\Gamma,\ C=-\sqrt{-2mE_{n-r}};$$
$$\Gamma<0,\ A=-1,\ B=+\Gamma,\ C=-\sqrt{-2mE_{n-r}}.$$

Уравнение для $f(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\left(2C+\frac{2+2A}{r}-\frac{2B}{r^2}\right)\frac{df}{dr}+$$
$$+\left(\frac{2AC+2C+2m\alpha}{r}+\frac{A^2+A-2BC-j^2-j}{r^2}\right)f=0,$$

или кратко

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\left(a+\frac{a_1}{r}+\frac{a_2}{r^2}\right)\frac{df}{dr}+\left(\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}\right)f=0.$$

Решения строим в виде степенных рядов $f=\sum_{k=0}^{\infty}c_kr^k$. После простых вычислений находим 3-членные рекуррентные формулы:

$$k=0,\ b_2c_0+a_2c_1=0,$$
$$k=1,\ b_1c_0+(a_1+b_2)c_1+2a_2c_2=0,$$
$$k=2,\ (a+b_1)c_1+(2+2a_1+b_2)c_2+3a_2c_3=0,$$

т. е. имеем общую рекуррентную формулу

$$k\ge1,\ [a(k-1)+b_1]c_{k-1}+$$
$$+[k(k-1)+a_1k+b_2]c_k+a_2(k+1)c_{k+1}=0,$$

или кратко

$$P_{k-1}c_{k-1}+P_kc_k+P_{k+1}c_{k+1}=0,$$

где $\quad P_{k-1}=2C(k-1)+2AC+2C+2m\alpha,$

$$P_k=k(k-1)+(2+2A)k+A^2+A-2BC-j^2-j,$$
$$P_{k+1}=-2B(k+1).$$

В соответствии с методом Пуанкаре – Перрона делим соотношение на k^2 и устремляем $k\to\infty$:

$$\frac{1}{k^2}\left[a(k-1)+b_1\right]+\frac{1}{k^2}\left[k(k-1)+a_1k+b_2\right]\frac{c_k}{c_{k-1}}+$$
$$+\frac{1}{k^2}a_2(k+1)\frac{c_{k+1}}{c_k}\frac{c_k}{c_{k-1}}=0,$$

в результате получаем алгебраическое уравнение, определяющее возможный радиус сходимости:

$$r=0\ \Rightarrow\ R_{conv}=\frac{1}{|r|}=\infty.$$

Рассмотрим условие, выделяющее из всех решений трансцендентные функции Гойна

$$P_{n-1}=0\quad\Rightarrow\quad C=-\frac{m\alpha}{[(k-1)+A+2\,]},$$

где

$$\Gamma>0,\ A=+1,\ B=-\Gamma,\ C=-\sqrt{-2mE_{n-r}},$$
$$\Gamma<0,\ A=-1,\ B=+\Gamma,\ C=-\sqrt{-2mE_{n-r}}.$$

Отсюда, в зависимости от знака величины Γ, получаем разные решения:

$$\Gamma>0,\ R(r)=e^{-\sqrt{-2mE}r}re^{\frac{-\Gamma}{r}}f(r),\ E_{n-r}=-\frac{m\alpha^2}{2(k+2)^2},$$

$$\Gamma<0,\ (r)=e^{-\sqrt{-2mE}r}r^{-1}e^{\frac{\pm\Gamma}{r}}f(r),\ E_{n-r}=-\frac{m\alpha^2}{2k^2}.$$

Сопоставим эти формулы с релятивистскими, полученными также из условия трансцендентности:

$$E=\frac{m}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{N^2}}},\ N=n-1/2\pm\frac{\gamma-\alpha}{2\sqrt{j(j+1)}},\ \gamma=\pm|\gamma|.$$

Обращаем внимание на то, что с ростом j вклад зависящего от j члена быстро падает. Если отбросить этот вклад полностью, то с учетом равенства

$$\frac{m}{\sqrt{1+\alpha^2/N^2}}\approx m-\frac{1}{2}\frac{m\alpha^2}{N^2}$$

можно (игнорируя некоторое расхождение) полагать, что релятивистская и нерелятивистская формулы, полученные из двух разных условий трансцендентности и для разных решений, частично коррелируют друг с другом.

Заключение

В работе строятся решения квантово-механического уравнения для частицы со спином 1 и электрическим квадрупольным моментом в присутствии внешнего кулоновского поля. Выведена система уравнений для 10 радиальных функций. С учетом требования диагонализации оператора пространственного отражения система уравнений разбивается на независимые подсистемы из 4 и 6 уравнений соответственно для четностей $P=(-1)^{j+1}$ и $P=(-1)^j$. Дополнительные слагаемые, обусловленные электрическим квадрупольным моментом, присутствуют в обеих подсистемах.

Релятивистская радиальная система из 4 уравнений приводится к уравнению 2-го порядка для основной функции. Оно имеет две нерегулярные точки ранга 3 и 2, кроме того есть 4 регулярные точки с простыми индексами. Для этого уравнения построены решения Фробениуса, найдены 8-членные рекуррентные соотношения для коэффициентов степенных рядов, исследована сходимость рядов. Условие трансцендентности решений дает формулу для уровней энергии, которая представляется разумной с физической точки зрения.

Релятивистская система из 6 уравнений оказывается очень сложной, для упрощения задачи в ней выполнено нерелятивистское приближение. При этом радиальная система сводится к двум связанным дифференциальным уравнениям 2-го порядка для двух функций. Отсюда методом исключения получено уравнение 4-го порядка. Построены 4 независимые решения Фробениуса этого уравнения, исследована сходимость вовлеченных в них 8- и 9-членных степенных рядов. Среди решений выделены те, которые могли бы соответствовать связанным состояниям частицы в кулоновском поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плетюхов*, *В.А*. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В.А. Плетюхов, В.М. Редьков, В.И. Стражев. – Минск: Беларуская навука, 2015. – 328 с.

2. *Elementary particles with internal structure in external fields*. Vol I. General Theory / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.

3. *Elementary particles with internal structure in external fields*. Vol II. Physical Problems / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p.

4. *Corben*, *H.C*. The electromagnetic properties of mesotrons / H.C Corben, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1940. – Vol. 58. – P. 953.

5. *Symonds*, *N*. Vector meson in a homogeneous magnetic field / N. Symonds // Phil. Mag. – 1949. – Vol. 40. – P. 636–644.

6. *Aronson*, *A*. Spin-1 electrodynamics with an electric quadrupole moment / A. Aronson // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 186. – P. 1434–1441.

7. *Tsai*, *W*. Motion of spin-1 particles in homogeneous magnetic field, multispinor formalism / W. Tsai // Phys. Rev. D. – 1971. – Vol. 4. – P. 3652–3657.

8. *Kyriakopoulos*, *E*. Tensor approach to spin-one mesons. III. Magnetic Dipole Moment and Electric Quadrupole Moment / E. Kyriakopoulos // Phys. Rev. D. – 1972. – Vol. 6. – P. 2207.

9. *Shamaly*, *A*. Unified theories for massive spin 1 fields / A. Shamaly, A.Z. Capri // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51, № 14. – P. 1467–1470.

10. *Власов*, *П.А*. Электромагнитные моменты частиц со спином 1 и эквивалентность некоторого класса волновых уравнений // УФЖ. – 1977. – Т. 22. – С. 951.

11. *Савченко*, *О.Я*. Векторный мезон в электромагнитном поле / О.Я. Савченко // ТМФ. – 1993. – Т. 95. – С. 51–57.

12. *Савченко*, *О.Я*. Решение уравнения Кеммера и уравнения Брейта в циркулярно поляризованной волне / О.Я. Савченко // ТМФ. – 1994. – Т. 101. – С. 200–210.

13. *Савченко*, *О.Я*. Векторный мезон в циркулярно поляризованной волне и постоянном магнитном поле // ТМФ. – 1995. – Т. 104. – С. 271–280.

14. *Квантовая механика частицы со спином* 1 *и аномальным магнитным моментом в магнитном поле* / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, О.В. Веко, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 83–90.

15. *Spin* 1 *particle with anomalous magnetic moment in the external uniform electric field* / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter 4 in the book «Quaternions: Theory and Applications». – Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 47–84.

16. *Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field* / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter 3 in the book «Quaternions: Theory and Applications». – Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 11–46.

17. *Spin* 1 *particle with anomalous magnetic moment in an external uniform magnetic field* / V. Kisel, Ya.A. Voynova, E.M. Ovsiyuk, V. Balan, V.M. Red'kov // NPCS. – 2017. – Vol. 20, № 1. – P. 21–39.

18. *Spin* 1 *particle with anomalous magnetic mment in an external uniform electric field* / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2018. – Vol. 21, № 1. – P. 1–20.

19. *Квантовая механика частицы со спином* 1 *и квадрупольным моментом во внешнем однородном магнитном поле* / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 18–27.

20. *On describing bound states for a spin* 1 *particle in the external Coulomb field* / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Balkan Society of Geometers Proceedings. – 2018. – Vol. 25. – P. 59–78.

21. *Редьков*, *В.М*. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Беларуская навука, 2011. – 339 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, *проект* № Ф20РА-007.

Поступила в редакцию 12.07.2020.

УДК 678.026.345:620.193:546.26:620.3

ВЛИЯНИЕ ИОННО-ПЛАЗМЕННОГО АЗОТИРОВАНИЯ НА СТРУКТУРУ ОСАЖДЕННЫХ ИЗ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ЦЕЛЛЮЛОЗЫ И УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

А.С. Руденков, М.А. Ярмоленко, А.Н. Купо

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

INFLUENCE OF ION-PLASMA NITROGEN ON THE STRUCTURE OF COMPOSITE COATINGS BASED ON CELLULOSE AND CARBON NANOTUBES

A.S. Rudenkov, M.A. Yarmolenko, A.N. Kupo

F. Scorina Gomel State University

Рассмотрены особенности структуры покрытий, формируемых методом электронно-лучевого диспергирования механической смеси на основе целлюлозы и многослойных углеродных нанотрубок (МУНТ). Установлено влияние низкоэнергетического ионно-плазменного азотирования и содержания нанотрубок в исходной мишени на морфологические особенности композиционных покрытий на основе целлюлозы. Средствами спектроскопии комбинационного рассеяния показано, что ионно-плазменная обработка приводит к частичному восстановлению структуры МУНТ, релаксации дефектов внутренних и внешних стенок, изменению степени кристалличности системы в целом.

Ключевые слова: *углеродные нанотрубки*, *целлюлоза*, *морфология*, *спектры*.

The features of the structure of coatings formed by the method of electron-beam dispersion of a mechanical mixture based on cellulose and multilayer carbon nanotubes (MWCNTs) are considered. The effect of low-energy ion-plasma nitriding and the content of nanotubes in the initial target on the morphological features of cellulose-based composite coatings have been established. It has been shown by means of Raman spectroscopy that ion-plasma treatment can lead to partial restoration of the structure of MWCNTs, relaxation of defects in the inner and outer walls, and a change in the degree of crystallinity of the system as a whole.

Keywords: *polyacrylamide*, *carbon coatings*, *morphology*, *phase composition.*

Введение

Композиционные покрытия на основе углерода, армированные углеродными наноструктурами, характеризуются высокими эксплуатационными свойствами [1]–[3]. В настоящее время они рассматриваются как наиболее перспективные материалы для работы в условиях ударных динамических воздействий [2], [3]. Использование методов ионно-плазменных технологий значительно расширяет возможности по регулированию фазового состава, структуры, распределению ингредиентов по толщине слоя, что определяет их высокую перспективность при решении различных технических задач. Армирование покрытий наноструктурами позволит увеличить модуль упругости (снизить хрупкость), повысить износостойкость, адгезионную прочность и расширить температурный диапазон применения [2]. При этом повышение физико-химических, механических свойств таких материалов в значительной степени зависит от условий и режимов осаждения, степени активационной обработки ингредиентов, как на стадии формирования, так и нанесенного покрытия. В связи с этим практический интерес представляет изучение возможности эффективного использования различных физических методов модифицирования таких композиционных материалов, в частности, применения ионно-плазменной обработки, которая активно применяется для модифицирования поверхности многослойных нанотрубок (МУНТ) [4]–[8]. В [4] показано, что модифицирование поверхности МУНТ пучком ионов аргона с энергией до 5 кэВ приводит к изменению кристаллической структуры углерода, аморфизации стенок МУНТ, изменению соотношения атомов углерода с различной гибридизацией, окислению МУНТ, на что указывает наличие кислородсодержащих групп различного состава. В [5] приведены сведения, указывающие на то, что ненасыщенные углерод-кислородные группы, расположенные на поверхности МУНТ, могут выступать в качестве активных центров ковалентного взаимодействия с металлами и их оксидами.

Целью работы является определение влияния ионно-плазменного азотирования на морфологию, структуру и фазовый состав композиционных покрытий, формируемых методом электронно-лучевого диспергирования механической смеси на основе целлюлозы и МУНТ.

1 Методика эксперимента

Покрытия на основе целлюлозы и МУНТ осаждались на кремниевую подложку при помощи

© *Руденков А.С.*, *Ярмоленко М.А.*, *Купо А.Н.*, 2020

электронно-лучевого испарения. Плотность потока электронов равнялась 10 ÷ 30 А/см^2, энергия которых не превышала 1,5 кэВ. Осаждение покрытий осуществлялось при давлении остаточных газов порядка $5 \cdot 10^{-3}$ Па. Мишень, диспергируемая потоком электронов, представляла собой смесь целлюлозы и МУНТ с весовым соотношением компонент 100:1 и 200:1. Размеры МУНТ – диаметр 40–60 нм, длина менее 2 мкм. Ионно-плазменная обработка осуществлялась при помощи ионного источника «АИДА» (рабочий газ – азот, $P = 10^{-2}$ Па, ток – 2 А, ускоряющее напряжение – 450 В, ток соленоида – 0,8 А, энергия ионов не более 0,3 кэВ). Обработка осуществлялась в течение 5 и 10 минут.

Для изучения структуры и свойств покрытий, содержащих МУНТ, были использованы следующие методы: растровая электронная микроскопия (РЭМ); атомно-силовая микроскопия (АСМ); спектроскопия комбинационного рассеяния или КР спектроскопия.

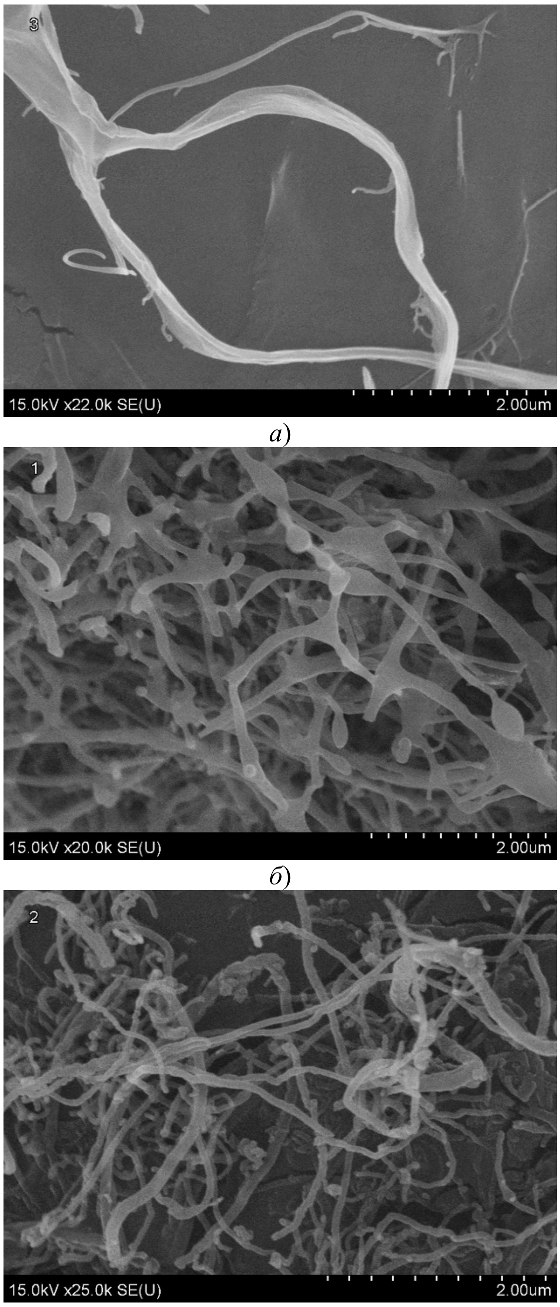
Исследования структуры покрытий осуществлялось при помощи растрового электронного микроскопа (РЭМ) Zeiss Libra 200FE, оснащенного высокоэффективным автоэмиссионным эмиттером и энергетическим ОМЕГА-фильтром для выполнения прецизионных измерений с высоким разрешением кристаллической решетки и химического состава наноразмерных объектов. Основные характеристики микроскопа: ускоряющее напряжение – 200 кВ, 80 кВ, 120 кВ, увеличение 8х – 1 000 000х.

Изучение морфологии покрытий проводилось методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) в режимах измерения топографии и фазового контраста с помощью прибора Solver Pro производства NT-MDT (Москва, Россия) в полуконтактном режиме, позволяющем с высокой достоверностью исследовать морфологические и относительные механические характеристики поверхностей различных покрытий. Анализ данных осуществлялся специализированной программой Gwyddion.

Определение изменений фазового состава углеродных покрытий, содержащих планарные наноструктурные функциональные слои, осуществлялось посредством анализа спектров комбинационного рассеяния, полученных на спектрометре Senterra с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм, мощностью 0,2–10 мВт.

2 Результаты и их обсуждение

Средствами РЭМ установлено, что покрытия, осажденные методом электронно-лучевого диспергирования целлюлозы, содержат помимо сплошного слоя микро-, и наноразмерные волокна (рисунок 2.1, *а*). Их образование наиболее вероятно происходит в зоне диспергирования и затем они переносятся на поверхность подложки под действием сил электрического поля.



а)

б)

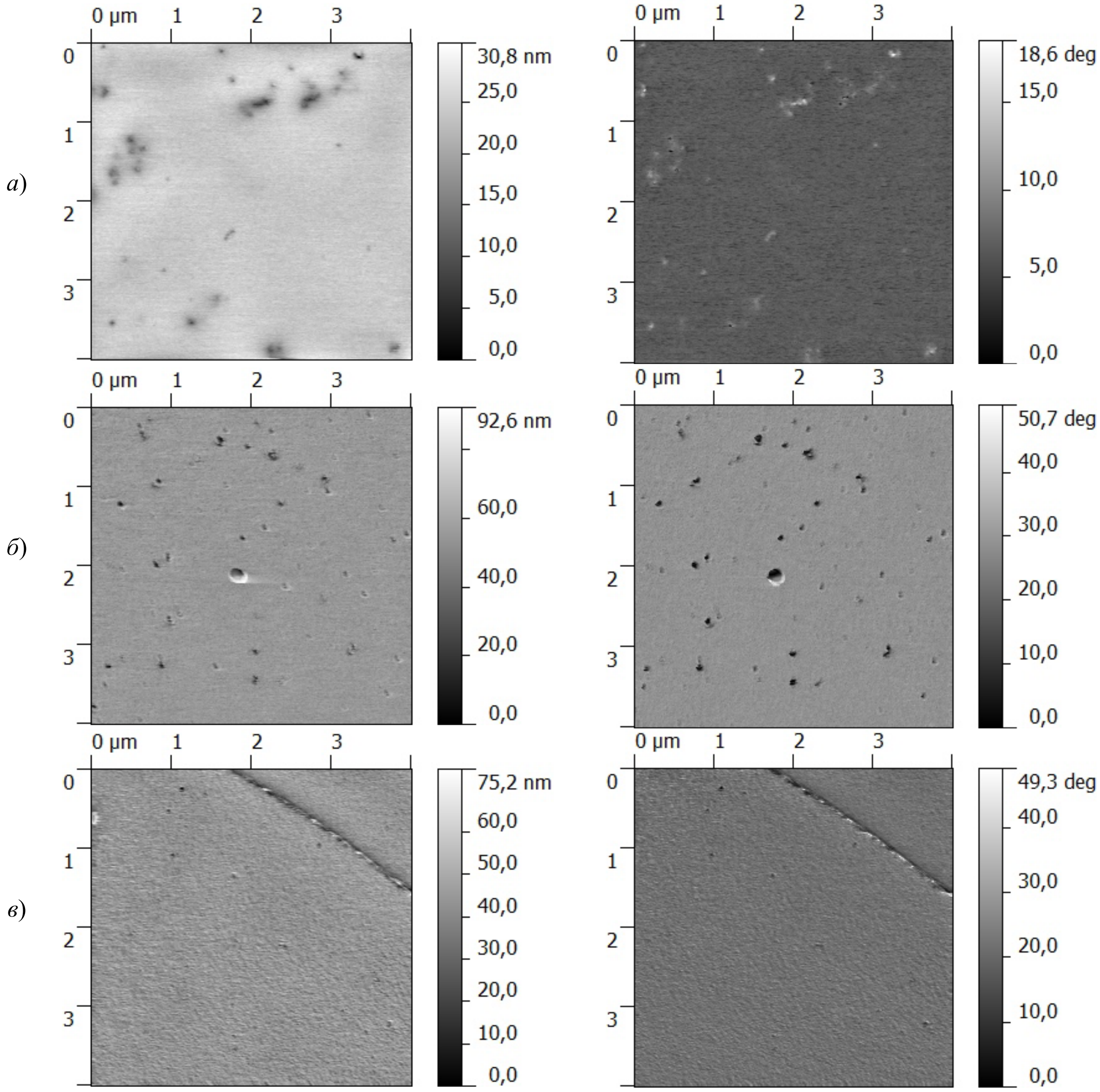
в)

Рисунок 2.1 – РЭМ изображения покрытий на основе целлюлозы (*а*), целлюлозы и МУНТ (100:1) (*б*), целлюлозы и МУНТ (200:1) (*в*)

При диспергировании смеси целлюлозы и МУНТ, сформированное покрытие представляет собой аморфную матрицу, армированную МУНТ и волокнами целлюлозы. При этом нанотрубки, в зависимости от размеров волокон целлюлозы, могут переплетаться с ними. Также необходимо отметить, что аморфные области целлюлозы могут выступать в качестве связующего элемента между нанотрубками, а также между нанотрубками и волокнами целлюлозы (рисунок 2.1, *б*, *в*).

Морфология покрытий до и после ионной обработки (рисунки 2.2 и 2.3) изучалась средствами атомно-силовой микроскопии в полуконтактом режиме (поле сканирования 4×4 мкм).

Углеродные нанотрубки и волокна целлюлозы имеют малые размеры, неупорядоченно расположены в объеме и на поверхности покрытия, поэтому средствами АСМ детектировать их в аморфной матрице достаточно сложно.



топография фазовый контраст

Рисунок 2.2 – АСМ изображения размером 4×4 мкм покрытий ионно-плазменного азотирования (5 минут): *а*) целлюлоза, *б*) целлюлоза + МУНТ(100:1); *в*) целлюлоза + МУНТ(200:1)

Таблица 2.1 – Статистическая обработка результатов АСМ

Покрытие	Длительность ионно-плазменной обработки, мин	Средняя высота, нм	*Ra*, нм	*Rms*, нм
Целлюлоза	–	2,9	0,4	0,6
	5	23,0	1,0	1,6
	10	61,3	3,2	5,0
Целлюлоза+МУНТ (100:1)	–	7,7	1,6	2,0
	5	53,6	2,9	4,3
	10	37,9	2,1	2,9
Целлюлоза+МУНТ (200:1)	–	15,3	2,0	3,2
	5	43,3	3,4	4,5
	10	19,5	2,4	3,1

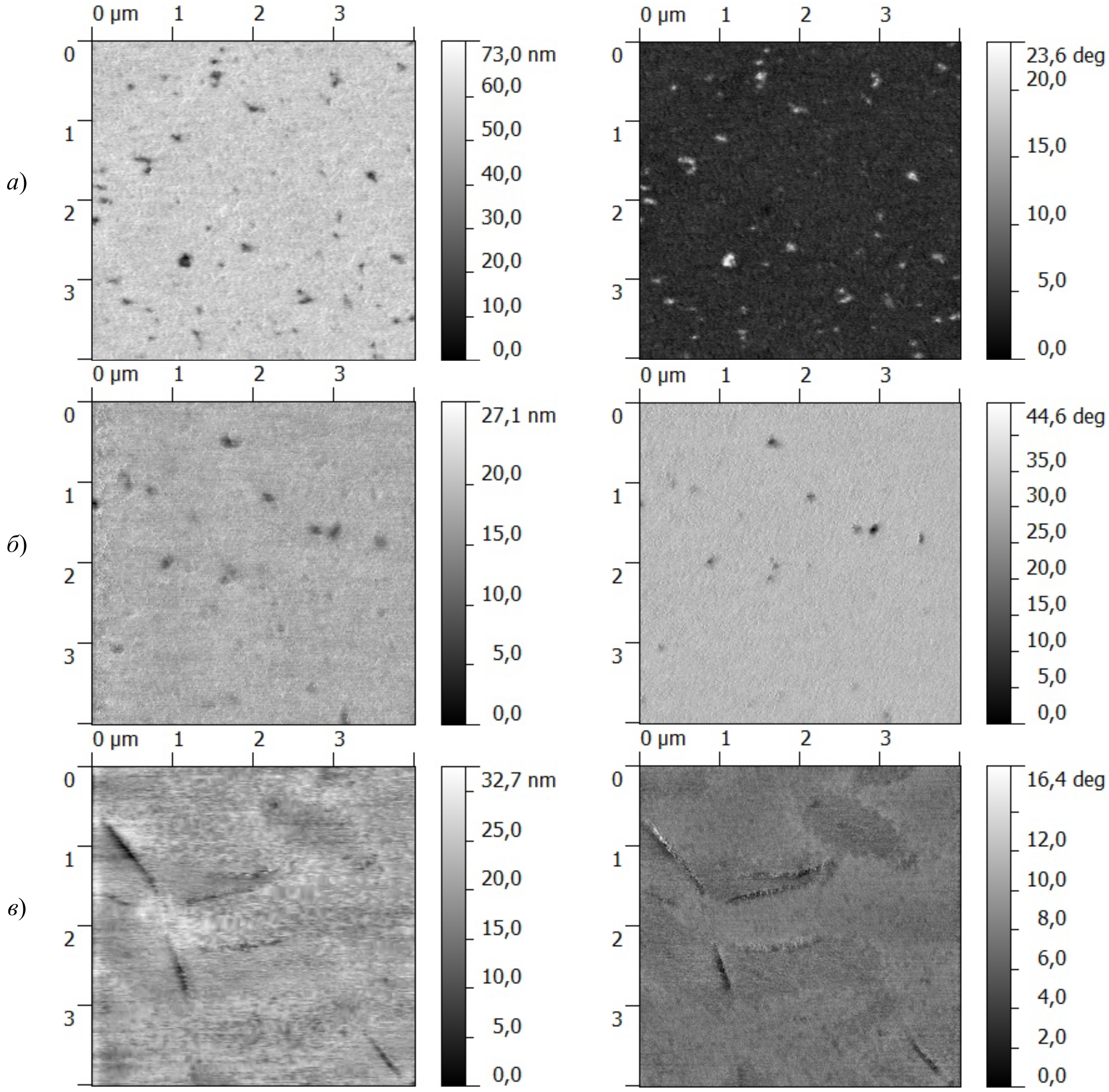


Рисунок 2.3 – АСМ изображения размером 4×4 мкм покрытий после ионно-плазменного азотирования (10 минут): *а*) целлюлоза, *б*) целлюлоза + МУНТ(100:1); *в*) целлюлоза + МУНТ(200:1)

Вместе с тем можно отметить, что увеличение длительности ионно-плазменной обработки покрытий заметно изменяет топографию поверхностного слоя, приводит к увеличению их субшероховатости (рисунок 2.4) и средней высоты отдельных структурных образований (таблица 2.1). При этом если субшероховатость однокомпонентного покрытия целлюлозы изменяется линейно с ростом длительности обработки, то изменение размера морфологических образований композиционного слоя является немонотонным.

Монотонный рост шероховатости однокомпонентных покрытий на основе целлюлозы может быть обусловлен процессами термодеструкции и различной скоростью травления кристаллической и аморфной фазы.

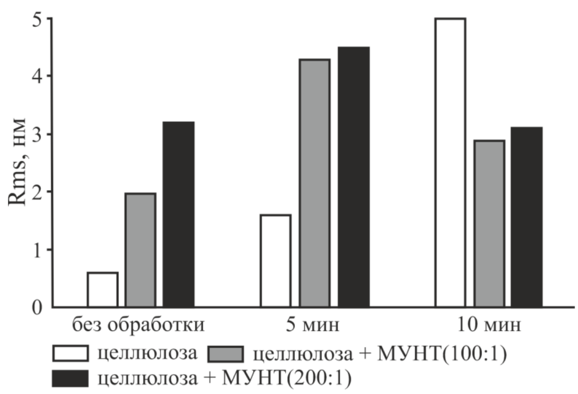


Рисунок 2.4 – Влияние длительности ионно-плазменного азотирования на морфологию покрытий на основе целлюлозы, целлюлозы и МУНТ

Таблица 2.2 – Анализ КР спектров покрытий на основе целлюлозы и МУНТ

Покрытие	Длительность ионно-плазменной обработки, мин	D-пик		G-пик		I_D / I_G
		Положение, см$^{-1}$	Ширина, см$^{-1}$	Положение, см$^{-1}$	Ширина, см$^{-1}$	
Целлюлоза	-	1390	222	1588	120	0,51
	5	1432	184	1645	267	0,49
	10	1440	179	1649	286	0,43
Целлюлоза +МУНТ (100:1)	-	1396	208	1590	124	0,49
	5	1479	220	1660	252	0,66
	10	1446	216	1656	274	0,57
Целлюлоза +МУНТ (200:1)	-	1366	113	1580	109	0,66
	5	1433	152	1652	176	0,71
	10	1443	236	1693	304	0,61

Субшероховатость композиционных покрытий на основе целлюлозы и МУНТ после ионно-плазменного азотирования в общем случае возрастает. Однако, субшероховатость при обработке в течении 10 минут ниже, чем при обработке в течении 5 минут. Данный факт может быть обусловлен более существенным нагревом покрытия вследствие большей длительности ионной бомбардировки. Такой нагрев, согласно [7], [8], может приводить к частичному восстановлению структуры МУНТ, релаксации дефектов внутренних и внешних стенок, изменению степени кристалличности системы в целом, что подтверждается результатами спектроскопии комбинационного рассеяния (таблица 2.2).

Известно, что G-пик (1575 см$^{-1}$) соответствует колебаниям E_{2g} графитовой решетки кристаллической фазы, а значение D-пик (1355 см$^{-1}$) обусловлено A_{1g} модой, соответствующей радиальным колебаниям шестиатомных колец [9], [10]. Появление D-пика при анализе КР спектров углеродных наноструктур вызвано наличием дефектов и ярко выраженных границ нанокристаллических кластеров [11].

В случае покрытий на основе углерода соотношение интенсивностей D- и G-пиков обратно пропорционально размерам кластеров нанокристаллического углерода [12]. В случае анализа спектров наноструктур (нанотрубок, нановолокон) изменение соотношения D- и G-пиков обусловлено высоким содержанием дефектов и большим числом межфазных границ [11]. Поэтому в случае наноструктурирорванных объектов значение отношения интенсивностей I_G и I_D обычно используется для определения степени дефектности структур [13].

В связи с вышеизложенным, уменьшение отношения I_D / I_G (рисунок 2.5) после ионно-плазменной обработки в случае однокомпонентного покрытия на основе целлюлозы вызвано увеличением размеров кластеров нанокристаллического углерода, что подтверждается данными атомно-силовой микроскопии. Смещение D-пика в сторону больших волновых чисел вызвано возрастанием степени разупорядоченности структуры, что подтверждается увеличением ширины G-пика, свидетельствующим об увеличении степени разупорядоченности sp^2-кластеров.

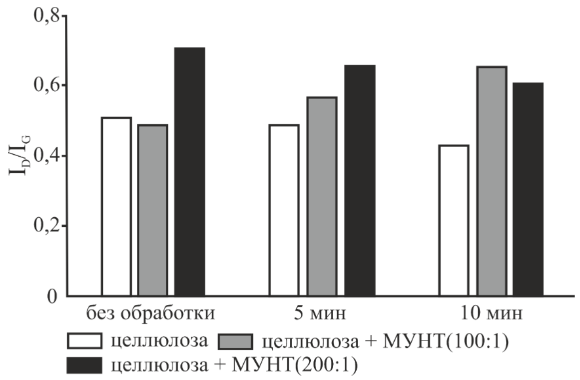


Рисунок 2.5 – Влияние ионно-плазменного азотирования на соотношение интенсивностей D- и G- пиков КР спектров покрытий на основе целлюлозы и МУНТ

Изменение соотношения I_D / I_G после ионно-плазменного азотирования в случае покрытий армированных углеродными нанотрубками не может являться следствием изменения лишь геометрических размеров кластеров нанокристаллического углерода. Такое изменение обусловлено, в первую очередь, нарушением дальнего порядка и наличием неупорядоченных областей (рост ширины G-пика). Помимо этого, ионно-плазменная обработка приводит к вытравлению аморфных областей и фазовым переходам $sp^2 \rightarrow sp^3$ углеродной матрицы и изменению структуры стенок нанотрубок.

Увеличение длительности обработки приводит к более существенному нагреву армированного покрытия и к релаксации дефектов внутренних и внешних стенок, что определяет нелинейное изменение соотношения I_D / I_G.

Выводы

Показано, что ионно-плазменное азотирование композиционных покрытий на основе целлюлозы и МУНТ в общем случае приводит к увеличению субшероховатости. С ростом длительности обработки субшероховатость однокомпонентного покрытия целлюлозы изменяется линейно, изменение же размера морфологических образований композиционного слоя является немонотонным, что может быть связано с изменением теплового режима обработки.

Установлено, что изменение соотношения I_D / I_G КР спектров армированных углеродными нанотрубками покрытий в результате ионно-плазменного азотирования обусловлено, в первую очередь, нарушением дальнего порядка и наличием неупорядоченных областей (рост ширины G-пика). Помимо этого, ионно-плазменное азотирование приводит к вытравлению аморфных областей и фазовым переходам $sp^2 \rightarrow sp^3$ углеродной матрицы и изменению структуры стенок нанотрубок. Увеличение длительности обработки приводит к более существенному нагреву армированного покрытия, что вызывает релаксацию дефектов внутренних и внешних стенок МУНТ и подтверждается нелинейной зависимостью отношения I_D / I_G от времени обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харрис*, *П.* Углеродные нанотрубы и родственные структуры: Новые материалы XXI века / П. Харрис. – М.: Техносфера, 2003. – 336 с.

2. *Колокольцев*, *С.Н.* Углеродные материалы: свойства, технологии, применения / С.Н. Колокольцев. – Долгопрудный: Интеллект, 2012. – 296 с.

3. *Витязь*, *П.А.* Наноматериаловедение: учеб. пособие для студентов вузов / П.А. Витязь, Н.А. Свидунович, Д.В. Куис. – Минск: Вышэйшая школа, 2015. – 511 с.

4. *Модифицирование углеродных нанотрубок ионным пучком аргона* / К.Е. Ивлев, С.Н. Несов, П.М. Корусенко, С.Н. Поровознюк, В.В. Болотов // Динамика систем, механизмов и машин. – 2018. – Т. 6. – С. 186–190.

5. *Несов*, *С.Н.* Применение ионно-лучевой обработки для предварительной активации поверхности многостенных углеродных нанотрубок при формировании композитов с оксидом олова методом химического газофазного осаждения / С.Н. Несов // Омский научный вестник. – 2018. – № 3. – С. 102–104.

6. *The decoration of multi-walled carbon nanotubes with nickel oxide nanoparticles using chemical method* / S. Sahebian, S.M. Zebarjad, J. Vahdati Khaki, A. Lazzeri // International Nano Letters. – 2016. – Vol. 6. – P. 183–190.

7. *Ионная функционализация углеродной матрицы при получении композитов на основе многостенных углеродных нанотрубок и оксидов металлов* / К.Е. Ивлев [и др.] // Динамика систем, механизмов и машин. – 2019. – Т. 7, № 1. – С. 195–201.

8. *Модифицирование структуры многостенных углеродных нанотрубок с использованием непрерывного и импульсного ионных пучков* / П.М. Корусенко [и др.] // Физика твердого тела. – 2018. – Т. 60. – P. 2437–2444.

9. *Density*, sp^3 *fraction*, *and cross-sectional structure of amorphous carbon films determined by x-ray reflectivity and electron energy-loss spectroscopy* / A.C. Ferrari [et al.] // Physical Review B. – 2000. – Vol. 62. – P. 11089–11103.

10. *Hybrid carbon*-TiO_2 *spheres*: *investigation of structure*, *morphology and spectroscopic studies* / E. Kusiak-Nejman [et al.] // Applied Surface Science. – 2018. – Vol. 469. – P. 684–690.

11. *Комбинационное рассеяние света в нанопористом углероде*, *получаемом из карбида кремния и титана* / А.М. Данишевский [и др.] // Физика твердого тела. – 2001. – Т. 43. – С. 132–149.

12. *Tuinstra*, *F.* Raman spectrum of graphite / F. Tuinstra, J.L. Koenig // Journal of Chemical Physics. – 1970. – Vol. 53. – P. 1126–1130.

13. *Formation of carbon nanotubes catalyzed by rare earth oxides* / J.I. Song [et al.] // New Carbon Materials. – 2013. – Vol. 28. – P. 191–198.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках договора №T20M-002 «*Структура и свойства углеродных покрытий*, *армированных углеродными нанотрубками*».

Поступила в редакцию 23.10.2020.

Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020

ФИЗИКА

УДК 530.1; 536.7; 544.2

О НЕСТАНДАРТНОЙ ФОРМЕ ПРИВЕДЕННОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ИСИКАВЫ – ЧАНГА – ЛУ

Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE NON-STANDART FORM OF THE REDUCED ISHIKAWA – CHUNG – LU EQUATIONS OF STATE

G.Yu. Tyumenkov

F. Scorina Gomel State University

В рамках термодинамического подхода к исследованию макросистем рассмотрено двухпараметрическое полуэмпирическое уравнение состояния Исикавы – Чанга – Лу. На основе использования метода Кардано для приведенной формы уравнения состояния $\tilde{P}=\tilde{P}(\tilde{V},\tilde{T})$ найден явный вид его представления вида $\tilde{V}=\tilde{V}(\tilde{P},\tilde{T})$.

Ключевые слова: *уравнение состояния Исикавы – Чанга – Лу*, *кубичность по объёму*, *метод Кардано*, *приведенные переменные*, *представление вида* $\tilde{V}=\tilde{V}(\tilde{P},\tilde{T})$.

In the framework of the thermodynamic approach to the study of macrosystems the two-parameter semi-empiric Ishikawa – Chung – Lu equation of state is considered. Using the Cardano method for the reduced form of equation of state $\tilde{P}=\tilde{P}(\tilde{V},\tilde{T})$ the explicit form of its representations of the form $\tilde{V}=\tilde{V}(\tilde{P},\tilde{T})$ is found.

Keywords: *Ishikawa – Chung – Lu equation of state*, *cubicity by volume*, *Cardano method*, *reduced variables*, *representation of the form* $\tilde{V}=\tilde{V}(\tilde{P},\tilde{T})$.

Введение

Задача дальнейшего изучения физических свойств реальных газов, жидкостей, вырожденных газов, метастабильных состояний и т. д. на основе использования полуэмпирических уравнений состояния всегда будет актуальна, так как идёт процесс непрерывного совершенствования такого рода уравнений, например, [1], [2]. Эти уравнения, как правило, имеют вид $P = P(T, V)$ [3] и содержат параметры a и b, связанные с силами парного межмолекулярного взаимодействия и в последнее время считающиеся зависящими от температуры. Для уравнения состояния вид $V = V(T, P)$ является нестандартным и часто привести уравнение к такому виду просто нельзя. Но можно выделить одну из зависимостей от объёма V, которая допускает преобразование уравнения к нестандартной форме – это кубическая зависимость. В данной работе будет рассмотрено уравнение состояния с таким типом зависимости, а именно, уравнение Исикавы – Чанга – Лу [4], [5], и получена его нестандартная приведенная форма $\tilde{V}=\tilde{V}(\tilde{P},\tilde{T})$.

1 Уравнение состояния Исикавы – Чанга – Лу и его приведенная форма

Молярное уравнение состояния Исикавы – Чанга – Лу имеет в вид

$$P=\frac{RT(2V+b(T))}{V(2V-b(T))}-\frac{a(T)}{\sqrt{T}V(V+b(T))} \quad (1.1)$$

со структурными параметрами

$$a(T)=\Omega_a\alpha(\tilde{T})\frac{R^2T_k^{5/2}}{P_k},\quad b(T)=\Omega_b\beta(\tilde{T})\frac{RT_k}{P_k},$$

$$\alpha(1)=\beta(1)=1, \quad (1.2)$$

где T_k, P_k – температура и давление критического состояния, $\tilde{T}=T/T_k$ – безразмерная приведенная температура.

Параметры критического состояния получены в работе [6]:

$$V_{кр}=\chi b,\ \ T_{кр}=\sigma^2\left(\frac{a}{bR}\right)^{\frac{2}{3}},\ \ P_{кр}=\varphi\left(\frac{a^2R}{b^5}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.3)$$

В (1.2) и (1.3) введены численные коэффициенты

$$\chi=2{,}89812008,\quad \sigma=\frac{2\chi-1}{2\chi+2}=0{,}61519913,$$

$$\varphi=\frac{3}{(\chi+1)^2(2\chi-1)}=0{,}04116327,$$

$$\Omega_a=\frac{8(\chi+1)^3}{3(6\chi+1)^2}=0{,}46712311,$$

$$\Omega_b=\frac{2}{6\chi+1}=0{,}10876233.$$

Введя общепринятым способом безразмерные приведенные переменные

$$\tilde{P}=\frac{P}{P_{кр}},\quad \tilde{T}=\frac{T}{T_{кр}},\quad \tilde{V}=\frac{V}{V_{кр}},$$

© *Тюменков Г.Ю.*, 2020

получаем приведенное уравнение Исикавы – Чанга – Лу [6]:

$$\tilde{P}=\frac{\tilde{T}(2\chi\tilde{V}+\beta(\tilde{T}))}{\Omega_b\chi\tilde{V}(2\chi\tilde{V}-\beta(\tilde{T}))}-\frac{\Omega_a\alpha(\tilde{T})}{\Omega_b^2\sqrt{\tilde{T}}\chi\tilde{V}(\chi\tilde{V}+\beta(\tilde{T}))}. \quad (1.4)$$

Встроенные функции в (1.4) также были рассчитаны в [6] и их оптимальный вид следующий:

$$\alpha(\tilde{T})=0,94162+0,48023\tilde{T}-\frac{0,42185}{\tilde{T}},$$

$$\beta(\tilde{T})=0,83056+0,21595\tilde{T}-0,04651\tilde{T}^2.$$

2 Преобразование уравнение состояния Исикавы – Чанга – Лу к нестандартному виду

Для того чтобы выделить искомую зависимость, сначала запишем уравнение (1.4) в виде кубического

$$-2\tilde{P}\sqrt{\tilde{T}}\chi^3\Omega_b^2\tilde{V}^3+\sqrt{\tilde{T}}\chi^2\Omega_b\left(2\tilde{T}-\tilde{P}\beta(\tilde{T})\Omega_b\right)\tilde{V}^2+$$
$$+\chi\left(-2\alpha(\tilde{T})\Omega_a+\sqrt{\tilde{T}}\beta(\tilde{T})\Omega_b\left(3\tilde{T}+\tilde{P}\beta(\tilde{T})\Omega_b\right)\right)\tilde{V}+ \quad (2.1)$$
$$+\beta(\tilde{T})\left(\alpha(\tilde{T})\Omega_a+\tilde{T}^{3/2}\beta(\tilde{T})\Omega_b\right)=0.$$

Решаем его методом Кардано [7], сравнивая с кубическим уравнением общего вида

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad (2.2)$$

которое при помощи замены переменной

$$x=y-\frac{b}{3a}$$

приводится к форме

$$y^3+py+q=0 \quad (2.3)$$

с коэффициентами

$$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2},\quad q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}.$$

Для получения корней уравнения (2.3) нужно определить величину Q, задаваемую выражением:

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Если все коэффициенты кубического уравнения вещественны, то и Q будет вещественным, и по его знаку мы можем определить тип корней:

$Q>0$ – один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня;

$Q=0$ – один однократный вещественный корень и один двукратный (в случае, когда $p=q=0$, то один трёхкратный вещественный корень);

$Q<0$ – три вещественных корня. Сами же корни кубического уравнения рассчитываются по формулам:

$$y_1=\gamma+\beta,\quad y_{2,3}=-\frac{\gamma+\beta}{2}\pm i\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{3},$$

где $\gamma=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}$, $\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}$.

Для уравнения (2.1) коэффициенты уравнения (2.3) равны:

$$a=-2\tilde{P}\sqrt{\tilde{T}}\chi^3\Omega_b^2,$$
$$b=\sqrt{\tilde{T}}\chi^2\Omega_b\left(2\tilde{T}-\tilde{P}\beta(\tilde{T})\Omega_b\right),$$
$$c=\chi\left(-2\alpha(\tilde{T})\Omega_a+\sqrt{\tilde{T}}\beta(\tilde{T})\Omega_b\left(3\tilde{T}+\tilde{P}\beta(\tilde{T})\Omega_b\right)\right),$$
$$d=\beta(\tilde{T})\left(\alpha(\tilde{T})\Omega_a+\tilde{T}^{3/2}\beta(\tilde{T})\Omega_b\right).$$

График поверхности величины Q крайне важен для нахождения решения.

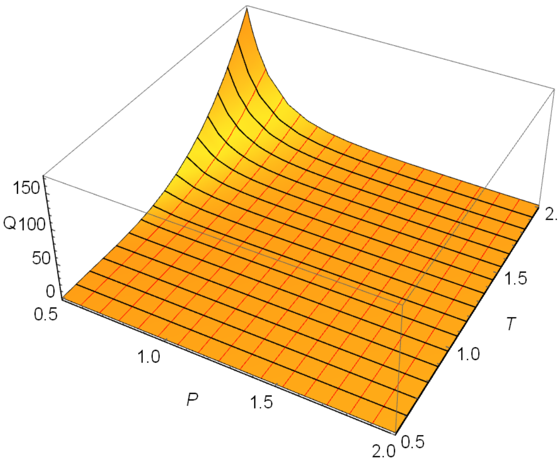


Рисунок 2.1 – Поверхность величины Q для уравнения состояния Исикавы – Чанга – Лу

Из графика видно, что Q принимает положительные значения, поэтому с данными коэффициентами уравнение (2.1) имеет один вещественный и два сопряжённых комплексных корня. Но объем макросистемы положителен по определению, следовательно, физически корректным является лишь вещественное решение

$$\tilde{V}=y_1=(X_1-X_2)^{1/3}+(X_1+X_2)^{1/3}, \quad (2.4)$$

где

$$X_1=\frac{2\cdot10^{-4}U_1U_2}{\tilde{P}\tilde{T}^{3/2}}+\frac{1,9\cdot10^{-8}(395,37\tilde{T}+\tilde{P}U_1)^3}{\tilde{P}^3}+$$
$$+\frac{1,33U_3}{\tilde{P}^2\sqrt{\tilde{T}}}\left(-0,88+\frac{0,39}{\tilde{T}}-0,45\tilde{T}+\right. \quad (2.5)$$
$$\left.+2,6\cdot10^{-5}\sqrt{\tilde{T}}U_1\left(-593,06\tilde{T}+\tilde{P}U_1\right)\right),$$

$$X_2=\left(\frac{1}{\tilde{P}^6\tilde{T}^3}\left(-\frac{1}{\tilde{T}^{3/2}}1,3\cdot10^{-13}U_4+\right.\right.$$
$$+0,01\left(0,002\tilde{P}^2U_1U_2+\right.$$
$$+1,97\cdot10^{-7}\tilde{T}^{3/2}(395,37\tilde{T}+\tilde{P}U_1)^3+ \quad (2.6)$$
$$+1,49\tilde{P}U_3\left(3,62-8,09\tilde{T}-4,13\tilde{T}^2+\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.+0,0002\tilde{T}^{3/2}U_1(-593,06\tilde{T}+\tilde{P}U_1)\right)\right)^2\right)\right)^{1/2}.$$

Функции U_1, U_2, U_3 и U_4 в свою очередь имеют вид:

$$U_1 = -17{,}86 - 4{,}64\tilde{T} + \tilde{T}^2, \tag{2.7}$$

$$U_2 = \left(38{,}96 - 86{,}95\tilde{T} - 44{,}35\tilde{T}^2 - \right. \\ \left. -17{,}86\tilde{T}^{5/2} - 4{,}64\tilde{T}^{7/2} + \tilde{T}^{9/2}\right), \tag{2.8}$$

$$U_3 = 2\tilde{T} + \tilde{P}\left(-0{,}09 - 0{,}02\tilde{T} + 0{,}01\tilde{T}^2\right), \tag{2.9}$$

$$U_4 = \left(22331{,}21\tilde{T}^{7/2} + \tilde{P}^2\tilde{T}^{3/2}(318{,}90 + 165{,}88\tilde{T} - \right. \\ \left. -14{,}16\tilde{T}^2 - 9{,}29\tilde{T}^3 + \tilde{T}^4\right) + \\ +\tilde{P}\left(13201{,}49 - 29467{,}31\tilde{T} - 15029{,}45\tilde{T}^2 + \right. \\ \left. +7060{,}41\tilde{T}^{5/2} + 1835{,}74\tilde{T}^{7/2} - 395{,}37\tilde{T}^{9/2}\right)\Big)^3. \tag{2.10}$$

Заключение

Таким образом, представление приведенного уравнения Исикавы – Чанга – Лу в форме $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$ имеет вид (2.4)–(2.10). Несмотря на крайнюю громоздкость, это уравнение состояния допускает использование численного и аналитического анализа. Оно может быть полезным при решении ряда задач описания реального газа в рамках термодинамики и физической химии. Ранее аналогичная задача была решена также для кубических по объему уравнений состояния Бертло и Редлиха – Квонга [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Equations of state from individual one-dimentional Bose gases* / F. Salces-Carcoba, C.J. Billington, A. Putra, Y. Yue, S. Sugawa, I.B. Spielman // New Journal of Physics. – 2018. – Vol. 20. – P. 113032–113044.

2. *Tian*, *J.* New equations of state for the hard polyhedron fluids / J. Tian, H. Jiang, A. Mulero // Phys. Chem. Chem. Phys. – 2019. – Vol. 24. – P. 13109–13115.

3. *Румер*, *Ю.Б.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б.Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 2000. – 608 с.

4. *Ishikawa*, T. A Cubic Perturbed, Hard Sphere Equation of State for Thermodynamic Properties and Vapor-Liquid Equilibrium Calculations / T. Ishikawa, W.K. Chung, B.C.Y. Lu // AIChE Journal. – 1980. – Vol. 26. – P. 372–378.

5. *Ishikawa*, T. Simple and generalized Equation of State for Vapor-Liquid Equilibrium Calculations / T. Ishikawa, W.K. Chung, B.C.Y. Lu // Advances in Cryogenic Engineering. – 1980. – Vol. 25. – P. 671–681.

6. *Дей*, *Е.А.* Свойства неидеального газа в модели Исикавы – Чанга – Лу / Е.А. Дей, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 11–16.

7. *Гусак*, А.А. Справочник по высшей математике в двух томах / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск: Тетрасистемс, 1999. – 640 с.

8. *Невмержицкая*, *А.С.* О приведенных полуэмпирических уравнениях состояния вида $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$ / А.С. Невмержицкая, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 28–30.

Поступила в редакцию 02.11.2020.

Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020

ФИЗИКА

УДК 661.862; 537.411

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТЖИГА НА СТРУКТУРУ ТОНКИХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПЛЕНОК $BiFeO_3$, ЛЕГИРОВАННЫХ САМАРИЕМ

С.А. Хахомов[1], **А.В. Семченко**[1], **В.В. Сидский**[1], **О.И. Тюленкова**[1], **А.Н. Морозовская**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Институт физики НАН Украины, Киев*

INFLUENCE OF HEAT TREATMENT TEMPERATURE ON THE STRUCTURE OF THIN SOL-GEL SAMARIUM-DOPED $BiFeO_3$ FILMS

S.A. Khakhomov[1], **A.V. Semchenko**[1], **V.V. Sydsky**[1], **O.I. Tyulenkova**[1], **A.N. Morozovska**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Institute of Physics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv*

Установлено влияние температуры обработки на структурные свойства золь-гель пленок $BiFeO_3$, легированных самарием. Определены оптимальные составы пленок $BiFeO_3$:Sm и режимы их термической обработки. Исследовано влияние легирования самарием (Sm) на кристаллическую структуру и топографию поверхности тонких пленок $BiFeO_3$ (BFO) и $BiFeO_3$:Sm (BFO:Sm). Результаты рентгеновской дифракции (XRD) для пленок BFO и BFO:Sm, прокаленных при 600° C, выявили однофазное состояние пленок BFO (Sm:BFO) с ромбоэдрической кристаллической решеткой (пространственная группа R3c). Присутствие самария было подтверждено с помощью EDS (энергодисперсионная рентгеновская спектроскопия). Малое искажение кристаллической решетки объясняется меньшим ионным радиусом иона самария, замещающего ион висмута.

Ключевые слова: *золь-гель метод*, *топография*, *кристаллическая структура*, *рентгеновская дифракция*, *плёнки*, *феррит висмута.*

The effect of the treatment temperature on the structural properties of sol-gel films of samarium-doped BiFeO3 was established. Optimal compositions of $BiFeO_3$:Sm films and their heat treatment modes have been determined. The effect of samarium (Sm) doping on the crystal structure and topography of the surface of thin films $BiFeO_3$ (BFO) and $BiFeO_3$:Sm (BFO:Sm) was investigated. X-ray diffraction (XRD) results for BFO and BFO: Sm films calcined at 600° C revealed the single-phase state of BFO films (Sm:BFO) with the rhombohedral crystal lattice (space group R3c). The presence of samarium was confirmed by EDS. The small distortion of the crystal lattice is explained by the smaller ionic radius of the samarium ion replacing the europium ion.

Keywords: *sol-gel method*, *topography*, *crystal structure*, *X-ray diffraction*, *films*, *bismuth ferrite*.

Введение

Мультиферроики – это материалы, которые одновременно обладают двумя такими параметрами как сегнетоэлектричество и ферромагнетизм. Магнитоэлектрическая связь относится к линейному магнитоэлектрическому эффекту (наведению намагниченности электрическим полем или поляризации магнитным полем) [1]. Среди всех известных мультиферроиков только $BiFeO_3$ обладает спонтанной поляризацией и магнитным упорядочением при комнатной температуре. Высокая температура перехода (от 640 до 1100 К) делают это соединение одним из самых популярных объектов современного материаловедения [2]. Феррит висмута $BiFeO_3$ (BFO) можно синтезировать как в виде объёмных образцов, так и в виде плёнок на различных подложках. При получении BFO в виде тонкой пленки с использованием таких методов нанесения, как молекулярно-лучевая эпитаксия [3] и вакуумное распыление [4], было установлено, что ширина оптической запрещенной зоны очень близка к теоретическому значению. Низкотемпературный золь-гель метод получения пленок BFO [5], характеризующийся также невысокой стоимостью готовых изделий, также позволяет получать чистую фазу с широким диапазоном значений ширины запрещенной зоны. Исследования фотовольтаических свойств BFO дают основания полагать, что его можно будет широко применять в оптоэлектронных приборах. Однако необходимо решить проблему снижения токов утечки, которая часто обнаруживается при исследовании сегнетоэлектрических свойств феррита висмута [5]. Поэтому необходимо легирование BFO редкоземельными элементами, в частности, в данной работе в качестве легирующей добавки выбран ион самария.

Целью проводимых исследований являлось получение BFO (BFO:Sm) с использованием золь-гель технологии и исследование влияния легирования самарием (Sm) на кристаллическую структуру, топографию поверхности тонких пленок $BiFeO_3$ (BFO).

1 Методика эксперимента

При синтезе пленок $BiFeO_3$ в качестве исходных соединений использовали нитраты железа

© *Хахомов С.А., Семченко А.В., Сидский В.В., Тюленкова О.И., Морозовская А.Н.*, 2020

и висмута (при получении легированных пленок $BiFeO_3$ дополнительно использовали нитрат самария), азотную и лимонную кислоту, 2-метоксиэтаноламин. В качестве стабилизатора к раствору при постоянном перемешивании добавляли несколько капель моноэтаноламина для регулирования его вязкости [7]. Приготовление золя проводилось при комнатной температуре. Очистку золя от случайных технологических примесей и частиц проводили в два этапа:

1 – центрифугирование золя при 500 об/мин в течение 20 минут;

2 – фильтрование золя через плотную фильтровальную бумагу.

После фильтрования проводился контроль чистоты золя путём лёгкого встряхивания и просматривания укупоренного флакона с раствором в прямом и отражённом свете. В случае обнаружения взвешенных частиц золь фильтруют повторно.

Плёнки BFO получены методом центрифугирования с использованием плёнкообразующего раствора (золя). В качестве подложек использовали монокристаллический кремний с платиновым подслоем, которые очищали с использованием ультразвуковой установки. После каждого осаждения образцы обжигались при 250° С в течение 5 мин, а затем после пяти таких циклов образцы отжигались при 500°, 550°, 600° С соответственно в течение 1 ч.

Исследования рентгеновской дифракции (XRD) для пленок BFO (BFO:Sm) проводили на дифрактометре PANalytical X'Pert MPD Pro в режиме отражения (геометрия Брегга-Брентано) с использованием излучения Cu-Kα, угол сканирования 20°. Идентификация дифракционных пиков была выполнена с использованием программного обеспечения JCPDS базы данных Search-Match с дополнительным анализом состава вещества с помощью EDS (энергодисперсионная рентгеновская спектроскопия) и исследованием топографии поверхности методом растровой микроскопии (растровый электронный микроскоп S-4800 (Hitachi, Япония)).

2 Результаты и их обсуждение

На рисунках 2.1–2.2 приведены рентгенограммы пленок феррита висмута (BFO) и феррита висмута, легированного самарием (BFO:Sm). Из рентгенограмм пленок BFO следует, что соединение кристаллизуется в ромбоэдрическую структуру (R3c) с пиками дублета при 31,75° и 32,06°. Также присутствуют интенсивные пики 40°, 42,8°, 64,01°, 80,08°, 83,7°, соответствующие подслою платины подложки. Факт включения ионов Sm в кристаллическую структуру решетки BFO можно доказать слиянием двух дифракционных пиков при 31,75° и 32,06°, которые соответствуют плоскости решетки (104) и (110), в результате чего в спектре появляется дифракционный пик 32,0. Этот сдвиг пика происходит из-за структурного искажения, причиной чего является легирование ионом Sm с меньшим ионным радиусом (0,96 Å), который замещает ион с большим атомным радиусом (Bi, $r = 1,03$ Å). Замещение висмута на редкоземельный эион не повлияло на кристаллическую ориентацию пленок BFO, хотя пики сместились в сторону большего угла. Это говорит о том, что добавление редкоземельных элементов может либо устранить кислородные вакансии, либо избежать колебаний состава степени окисления Fe [8].

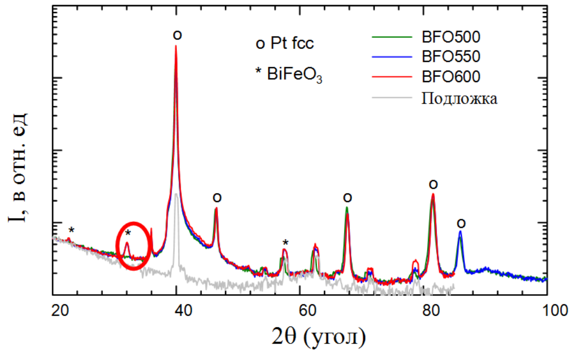


Рисунок 2.1 – Рентгенограмма пленок $BiFeO_3$ после термообработки при температуре 500°, 550°, 600° С

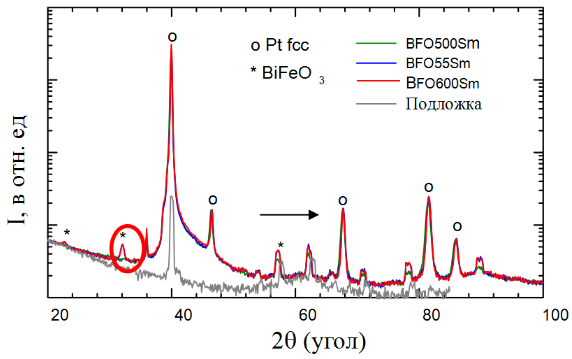


Рисунок 2.2 – Рентгенограмма пленок $Sm:BiFeO_3$ после термообработки при температуре 500°, 550°, 600° С

Также из рисунков 2.1 и 2.2 хорошо видно влияние температуры отжига на формирования фазы $BiFeO_3$. Увеличение температуры обработки $BiFeO_3$ приводит к появлению дифракционных пиков при 31,75° и 32,06° и возрастанию их интенсивности. Установлено, что оптимальной температурой формирования фазы $BiFeO_3$ является 600° С в течение 60 минут. В таблицах 2.1, 2.2 проведен химический состав (ат. %) плёнки $BiFeO_3$ и $BiFeO_3$:Sm после термообработки при температуре 600° С, определённый методом EDS. Топография поверхности плёнок $BiFeO_3$ и $BiFeO_3$:Sm после термообработки при температуре 600° С приведена на рисунках 2.3, 2.4.

Таблица 2.1 – Химический состав (ат. %) плёнки $BiFeO_3$ после термообработки при температуре 600° С, определённый методом EDS

O	Si	Bi	Ti	Fe	Pt
14,6	43,1	0,8	2,1	1,1	38,3

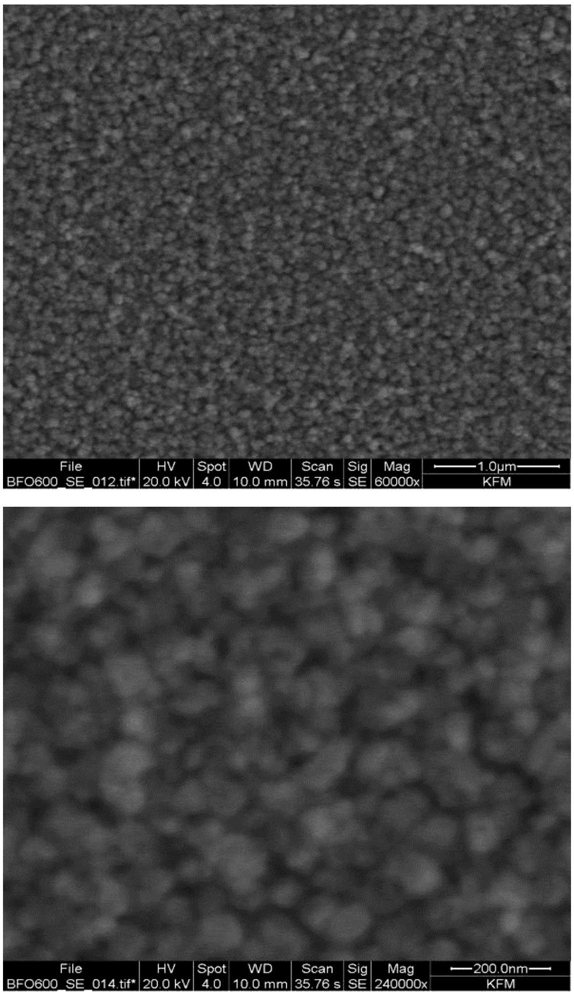


Рисунок 2.3 – Топография поверхности плёнки $BiFeO_3$ после термообработки при температуре 600° С, полученная методом растровой микроскопии

Таблица 2.2 – Химический состав (ат. %) плёнки $Sm:BiFeO_3$ после термообработки при температуре 600° С, определённый методом EDS

O	Si	Bi	Ti	Sm	Fe	Pt
17,1	41,4	0,7	2,1	0,2	1,0	37,5

Анализ химического состава (таблицы 2.1, 2.2) (ат. %) $BiFeO_3$:Sm подтверждает присутствие примеси самария. Наблюдаемый процент включения примеси самария (0,2 ат. %) в атомном соотношении в BFO согласуется с фактической концентрацией Sm^{3+}, введенной в золь. Характер рентгенограммы, данные элементного состава и растровой электронной микроскопии указывают на то, что приготовленные пленки BFO и Sm:BFO имеют однофазную структуру во всем объеме образца, размер зерна составляет около 100 нм (рисунки 2.2, 2.3).

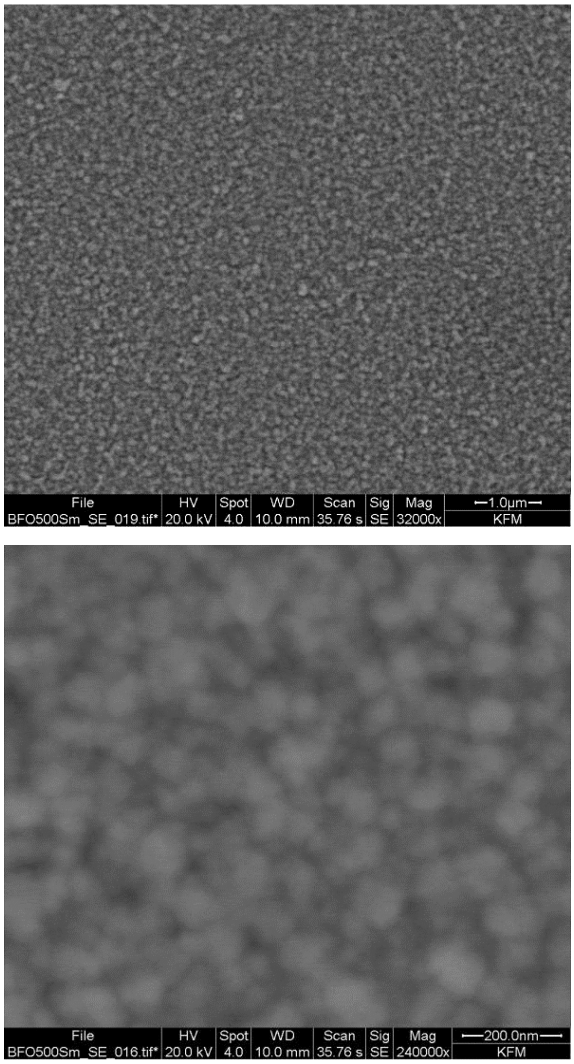


Рисунок 2.4 – Топография поверхности плёнки $Sm:BiFeO_3$ после термообработки при температуре 600° С, полученная методом растровой микроскопии

Заключение

Установлено влияние температуры обработки на структурные свойства золь-гель пленок $BiFeO_3$, легированных самарием. Определены оптимальные составы пленок $BiFeO_3$:Sm и режимы их термической обработки. Исследовано влияние легирования самарием (Sm) на кристаллическую структуру и топографию поверхности тонких пленок $BiFeO_3$ (BFO) и $BiFeO_3$:Sm (BFO:Sm). Результаты рентгеновской дифракции (XRD) для пленок BFO и BFO:Sm, прокаленных при 600° С, выявили однофазное состояние пленок BFO (Sm:BFO) с ромбоэдрической кристаллической решеткой (пространственная группа R3c). Присутствие самария было подтверждено с помощью EDS (энергодисперсионная рентгеновская спектроскопия). Малое искажение кристаллической решетки объясняется меньшим ионным радиусом иона самария, замещающего ион висмута.

Наблюдаемый процент включения примеси самария (0,2 ат. %) в атомном соотношении в BFO согласуется с фактической концентрацией Sm^{3+}, введенной в золь. Характер рентгенограммы, данные элементного состава и растровой электронной микроскопии указывают на то, что приготовленные пленки BFO и Sm:BFO имеют однофазную структуру во всем объеме образца, размер зерна составляет около 100 нм.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Advances in the growth andcharacterization of magnetic, ferroelectric, and multiferroic oxidethin films* / L.W. Martin [et al.] // Mater. Sci. Eng. – 2010. – R68. – P. 89–133.

2. *Catalan*, *G.* Physics and applications of bismuth ferrite / G. Catalan, J.F. Scott //Adv. Mater. – 2009. – Vol. 21 – P. 2463–2485.

3. *Optical band gap of* $BiFeO_3$ *grown by molecular-beam epitaxy* / J.F. Ihlefeld [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2008. – Vol. 92. – P. 142908.

4. *Characterization ofelectronic structure and defect states of thin epitaxial* $BiFeO_3$ *films by UV-visible absorption and cathodoluminescence spec-troscopies* / A.J. Hauser [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2008. – Vol. 92. – P. 222901.

5. *Dillip*, *K.M.* Energy levels and photoluminescenceproperties of nickel-doped bismuth ferrite / K.M. Dillip, Q. Xiaoding // J. Alloy. Comp. – 2010. – № 504. – P. 27–31.

6. *Yang*, *C.H.* Doping $BiFeO_3$: approaches and enhanced functionality / C.H. Yang, K.M. Dillip, Q. Xiaoding // Phys. Chem. Chem. Phys. – 2012. – Vol. 14. – P. 15953–15962.

7. *Влияния дополнительного отжига в вакууме на структуру*, *электрические и оптические свойства* ZnO:Al *пленок*, *синтезированных золь-гель методом* / В.В. Сидский, А.В. Семченко, В.Е. Гайшун, Д.Л. Коваленко, А.С. Ханна // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 44–46.

8. *Effect of samarium doping on the structural*, *optical and magnetic properties of sol-gel processed* $BiFeO_3$ *thin films* / C. Anthonyraj [et al.] // Journal of Materials Science: Materials in Electronics. – 2015. – Vol. 26, № 1. – P. 49–58.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта программы Евросоюза HORIZON 2020 (*проект* № 778070 *TransFerr*) *и проекта БРФФИ* №Т20Р-359.

Поступила в редакцию 18.10.2020.

УДК 535.34; 621.376

РЕЗОНАНСНАЯ МОДЕЛЬ САМОПУЛЬСАЦИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРОВ

В.А. Юревич

Могилёвский государственный университет продовольствия

RESONANCE MODEL OF LASING SELF-PULSATION

V.A. Yurevich

Mogilev State University of Food Technologies

Представлены результаты качественного анализа полуклассической модели генерации излучения в твердотельных лазерах и – на её основе – численного моделирования режима регулярных пульсаций, возникающего в условиях нелинейного смещения и уширения резонансной линии усиления из-за влияния ближних полей диполей и поглощения в квазирезонансных переходах на диэлектрическую восприимчивость среды активного элемента. Моделирование проведено для параметров полупроводниковых квантоворазмерных структур.

Ключевые слова: *самоподдерживающиеся пульсации излучения*, *нелинейное усиление*, *квазикристалл квантовых точек*, *диполь-дипольное взаимодействие*.

The results of a qualitative analysis of a semiclassical model of radiation generation in solid-state lasers and, based on it, a numerical simulation of the regime of regular pulsations arising under conditions of nonlinear drift and broadening of the resonance gain line due to the influence of near fields of dipoles and absorption in quasi-resonant transitions on the dielectric susceptibility of an active medium are presented. Modeling was carried out for the parameters of semiconductor quantum-dimensional structures.

Keywords: *lasing self-sustaining pulsations*, *nonlinear amplification*, *quasicrystal of quantum dots*, *dipole-dipole interaction*.

Введение

Для стабильного получения серий контрастных световых импульсов субпико- и пикосекундной длительности требуется применять высокотехнологичные лазерные системы. Особые перспективы в миниатюризации таких лазеров, применяемых в устройствах передачи информации, связаны с возможностью использования квантоворазмерных полупроводниковых структур в качестве материалов для активных элементов или модуляторов в схеме обратной связи. Известно, что в ряде твердотельных лазеров, включая полупроводниковые, при возбуждении релаксационных колебаний материального отклика усиливающего элемента генерируется регулярная последовательность достаточно коротких импульсов [1]. Эти колебания возникают из-за различия времён релаксации в каналах накачки, спонтанного и вынужденного излучения [2]. Конечность «срабатывания» поперечной релаксации в расчётной оценке нелинейной релаксационной динамики излучения учитывается реже. Такого рода релаксацию именуют ещё фазовой. Её характерным параметром T_2 определяется время фазового рассогласования дипольного ансамбля, представляющего активную среду из-за взаимодействия с ионами матрицы. Полуширина резонансной спектральной линии усиления обратна значению T_2.

Известно, что в последнее время в качестве искусственных активных сред интенсивно разрабатываются и используются так называемые суперкристаллы с внутренней структурой, формируемой упорядоченным ансамблем квантовых точек (мета-атомов, то есть образований, превышающих обычный размер атома, например, экситонов) с дискретными свойствами энергетического спектра [3], [4]. Характерность суперкристаллов выражена тем, что в подавляющем большинстве их материалы – полупроводники [5], и в их структуре может быть достигнута относительно высокая плотность активных центров в виде квантовых точек, что делает их в высшей степени перспективными к применению в качестве элементов низкоразмерных устройств фотоники.

В условиях высокой концентрации дипольных центров проявляется влияние ближних полей диполей и поглощения в квазирезонансных переходах на диэлектрическую восприимчивость и, соответственно, на динамику резонансного отклика среды. Положение центра спектральной линии ω_0 и отстройка частоты поля оказываются связанными с уровнем возбуждения ансамбля активных диполей (с разностью населённостей резонансного перехода или инверсией) и, тем самым, нелинейно зависят от интенсивности вынужденного излучения. Нелинейные фазовые эффекты обусловливают нарушение фазовой корреляции в дипольном ансамбле и наряду с релаксационными процессами, ослабляющими фазовую корреляцию активных диполей, приводят к уширению линии. Нелинейное уширение, естественно, обладает особой динамикой, которой присуща обратимость процесса в ходе резонансных

© *Юревич В.А.*, 2020

колебаний инверсии. При определённых условиях её существование способно привести к автомодуляционному эффекту, который заключается в возникновении самоподдерживающих регулярных осцилляций интенсивности, развивающихся без применения внешних модулирующих накачку или уровень обратной связи устройств.

В связи с этим возникает необходимость расчётного изучения роли автоколебательных процессов, стимулированных резонансной нелинейностью активного слоя лазера. В работе, положенной в основу настоящей статьи, представлена и проанализирована для параметров квантоворазмерных полупроводниковых структур оригинальная резонансная модель генерации, учитывающая присущие этим материалам нелинейные фазовые эффекты. Их действие выступает в качестве дестабилизирующего фактора, способного вызвать осцилляции материального отклика и возникновение регулярных режимов излучения в субнано- и пикосекундном диапазоне.

1 Основные уравнения

Для анализа динамики плосковолнового поля в оптических структурах пониженной размерности приемлемо предложенное, например, в [6], приближение особо тонкого слоя резонансных атомов с присущим ему допущением продольно-однородного поля. Связь полей и поляризованности представлена в форме алгебраических соотношений, вытекающих из электродинамических условий для уравнений Максвелла. Выражения для условий дополнительно к нерезонансным френелевым составляющим содержат компоненты, учитывающие резонансную поляризацию в среде слоя. Их именуют сверхизлучательными [7] и этими составляющими выражена связь действующего поля и резонансного отклика среды. Динамикой именно этих компонентов принято характеризовать эволюцию поля в таких объектах как квазикристаллы из квантовых точек [8], [9]. Использование подобного приближения даёт возможность анализировать развитие процесса энергообмена поля и квазикристалла в рамках модели с меньшим числом степеней свободы за счёт применимости более простых выражений для связи поля и поляризованности. С другой стороны, ансамбли квантовых точек, организованные периодически, т. е. в квазикристаллы, характеризуются ещё двумя степенями свободы – геометрией решётки и взаимодействием квантовых точек. Влияние обоих факторов неустойчивости на нелинейную динамику излучения в данной модели относительно просто анализировать, используя обобщённую двухуровневую схему взаимодействия поля и среды и представление эффективного поля (действующего на активные центры) с учётом локальной поправки Лоренца. Динамика действующего поля и поля выходного излучения определяется нестационарными резонансными вариациями нелинейного отклика среды активного слоя. Резонансный материальный отклик описывается комплексной амплитудой вероятности поляризованности ρ и переменным усилением n, пропорциональным инверсии. Изменение во времени резонансных составляющих материального отклика анализируется в рамках формализма оптических квантовых уравнений Блоха для ансамбля двухуровневых дипольных частиц со средней величиной электрического момента μ. Рассчитываемая далее модификация системы уравнений формулируется аналогично схеме, предложенной в [10]. То есть в соответствии с обобщением двухуровневой схемы [11] в представлении резонансной поляризации и локальной поправки с её включением используется выражение для макроскопической поляризованности P с учётом влияния квазирезонансных переходов на поляризуемость:

$$P(t) = N[i\mu\rho - 2\pi\,\Delta\alpha\varepsilon_0(1-\mathrm{n})E(t)], \qquad (1.1)$$

где E – амплитуда напряжённости эффективного светового поля, n – разность населённостей уровней резонансного перехода, N – плотность активных центров (в единице объёма), $\Delta\alpha$ – разность поляризуемостей активных центров в основном и возбуждённом состояниях (дефект поляризуемости).

В записываемой ниже кинетической системе с учётом представления (1.1) квазистационарные амплитуды напряжённостей световых полей E_{R} и E_i (выходного и начального) масштабируются как безразмерные переменные (например, $\mathrm{e_R} = \mu T_2 E_{\mathrm{R}} / \hbar$, соответственно также нормировано время – $\tau = t / T_2$):

$$\begin{aligned}
&\frac{dR}{d\tau} = n\mathrm{e}_i + (n-1)R - (n-\kappa)\,(\gamma - \beta n)S,\\
&\frac{dS}{d\tau} = (n-\kappa)\,[\beta n\mathrm{e}_i + (\gamma-\beta n)R] + (n-1)S,\\
&\frac{dn}{d\tau} = \frac{\alpha - n}{\tau_{12}} - \kappa^2\left\{[R + \beta(n-\kappa)S]\,\mathrm{e}_i + R^2 + S^2\right\},\\
&\mathrm{e_R}(\tau) = \kappa\left\{R + i[S + \beta(n-\kappa)\mathrm{e}_i]\right\},\\
&R^2 + S^2 \le 1,\ -\kappa \le n \le \kappa.
\end{aligned} \qquad (1.2)$$

Здесь $R = \mathrm{Re}\rho$, $S = \mathrm{Im}\rho$ и $n = \kappa\,\mathrm{n}$ – переменные вероятностей резонансной поляризованности и усиления, e_i – нормированное инициирующее поле, возникающее из спонтанных флуктуаций поля в среде активного слоя на частоте генерации, $\kappa = \mu^2 N l \omega_0 T_2 / \varepsilon_0 \hbar c$ – показатель усиления инверсного слоя, максимальный при данном уровне накачки, $\tau_{12} = T_1/T_2$ – отношение времён продольной (T_1) и фазовой релаксации перехода. Нормирующий коэффициент γ в обусловленных учётом локальной поправки составляющих в уравнениях для поляризованности из системы (1.2) пропорционален отношению длины волны λ поля излучения и толщины активного слоя l.

Фактор квазирезонансной поляризации, вызывающей автомодуляционное уширение поля, в представлении (1.1) зависит от резонансной вариации усиления ($\kappa - n$) и учитывается в уравнениях (1.2) компонентами с коэффициентом $\beta = 2\pi\Delta\alpha\varepsilon_0\hbar / \mu^2 T_2$, иногда называемым параметром резонансной нелинейной рефракции (в усиливающих средах на основе полупроводников – фактором Хенри [12]). Поле выходного излучения e_R определяется сверхизлучательным компонентом в электродинамических условиях.

Система (1.2) в приближении однородного поля характеризует энергообмен входного поля и квантовой системы образующих усиливающий слой дипольных частиц с учётом конечности времени фазовой релаксации резонансной поляризованности. Учитывается влияние накачки, стимулирующей инверсию и определяющей её обратимость при неизбежном насыщении в процессе вынужденного излучения. Особо характерно рассмотрение в схеме (1.2) присущего квазикристаллам из квантовых точек диполь-дипольного взаимодействия. Фазовый компонент в уравнении для поляризованности в этом представлении пропорционален резонансной вариации инверсии с нормирующим коэффициентом γ. Зависящая по этой причине от интенсивности поля излучения нелинейная отстройка резонанса как периодическое нарушение резонансного условия усиления неизбежно становится фактором амплитудно-фазовой связи в схеме генерации в среде инверсного слоя и способна обусловить автомодуляционный сценарий в динамике вынужденного излучения.

2 Свойства равновесных состояний модели

Модель (1.2) с продольно-однородным резонансным полем, амплитуда которого E определяется алгебраическим соотношением связи с поляризованностью, имеет безусловно приближённый характер. Она, однако, даёт возможность выяснить роль динамики процессов наведения поляризации в общем балансе энергообмена поля в среде и накачки в ходе генерации на основе схемы с тремя степенями свободы. Благодаря этому относительно просто можно применять методы качественного анализа устойчивости стационарных состояний к определению возможности достижения практически интересных режимов излучения. Например, применение приближённой схемы баланса (1.2) в аспекте нашей работы позволило определить расчётные условия автоколебаний и моделировать режим самоподдерживающихся пульсаций при постоянной накачке.

Нетривиальные стационарные решения для R_s, S_s и n_s, вытекающие из соотношений для сингулярных пределов (1.2) при постоянном уровне инициирующего поля $e_i(\tau) = e_0$, характеризуют равновесные состояния модели и определяются следующими выражениями:

$$\begin{gathered} R_S = -\,[n_S - 1 + \beta(\gamma - \beta n_S)(n_S - \kappa)^2]\, n_S e_0 / F, \\ S_S = (n_S - \kappa)[\gamma - \beta n_S - \beta(n_S - 1)]\, n_S e_0 / F, \\ \alpha = n_S + \kappa^2 \tau_{12}[1 + \beta^2 (n_S - \kappa)^2]\, n_S e_0^2 / F, \\ F(n_S) = (n_S - 1)^2 + (n_S - \kappa)^2 (\gamma - \beta n_S)^2. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Формулировка условий их динамической устойчивости или неустойчивости означает оценку возможности осцилляторного поведения излучаемого поля в той физической ситуации, когда уровень накачки, определяемый фактором α, является постоянным, а частота поля первоначально совпадает с центральной частотой резонанса усиления.

На основе линеаризации системы (1.2) в окрестности решений (2.1) формулируется характеристическое уравнение относительно величины χ – коэффициента в показателе элементарных экспонент вида exp ($\chi t / T_2$). Этими экспонентами можно представить решения (1.2) в окрестности (2.1) с относительно малой амплитудой. Значения χ могут быть комплексными, и этот случай с точки зрения проводимого поиска наиболее интересен, поскольку отвечает тому поведению кривых в фазовом пространстве системы (1.2), которое соответствует её осцилляторным решениям. Характеристическое уравнение может быть сведено к такому выражению:

$$\begin{gathered} \chi^3 + [X - 2(n_S - 1)]\,\chi^2 + \{F - 2(n_S - 1)X - \\ -\kappa^2 n_S (n_S - \kappa)[M - (\gamma - \beta n_S)B] e_0^2 / F\}\,\chi \; + \; XY^2 + \\ +\kappa^2 n_S (n_S - 1)(n_S - \kappa)[M - (\gamma - \beta n_S)B] e_0^2 / F - \\ -\kappa^2 n_S [(\gamma - \beta n_S)M + (n_S - \kappa)^2 B] e_0^2 / F = 0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered} X = \frac{1}{\tau_{12}} - \beta\kappa^2 (n_S - \kappa) n_S \frac{\beta(n_S - 1) - \gamma + \beta n_S}{F} e_0^2, \\ Y = (n_S - \kappa)(\gamma - \beta n_S), \\ M = 1 - 2n_S\,(n_S - 1 + \beta Y)/F, \\ B = \beta + 2n_S\,[\gamma - \beta n_S - \beta(n_S - 1)]/F. \end{gathered}$$

Особыми с точки зрения корреляции динамического поведения модели (1.2) и возможной реальной временнóй развёртки выходного излучения представляются её неустойчивые решения, которые отвечают определённому диапазону значений её коэффициентов. В этой области характеристическое уравнение (2.2), формулируемое на основе линеаризованного аналога (1.2), может иметь один действительный и два комплексных корня (χ_1 и $\chi_{2,3}$):

$$\begin{gathered} \chi_1 = \frac{X - 2(n_S - 1) + V_+ + V_-}{3}, \\ V_\pm = \sqrt[3]{-G \pm \sqrt{D}}, \\ \chi_{2,3} = \frac{1}{3}\left[X - 2(n_S - 1) - \frac{V_+ + V_-}{2} \pm i\sqrt{3}\,\frac{V_+ - V_-}{2} \right], \end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$D = G^2 + \left\{3C - [X - 2\ (n_S - 1)]^2\right\}^3,$$

$$G = [X - 2(n_S - 1)]^3 - \ 9\ [X - 2(n_S - 1)]C/2 +$$
$$+27\left\{Y^2[X - 2(n_S - 1)] -\right.$$
$$\left. - \kappa^2 n_S Y[(\gamma - \beta n_S)M + (n_S - \kappa)^2 B]e_0^2/F\right\}/2,$$

$$C = Y^2 - \kappa^2 n_S (n_S - \kappa)[M - (\gamma - \beta n_S)B]e_0^2/F.$$

Незатухающие со временем на протяжении действия постоянной накачки периодические изменения переменных отклика $R(\tau)$, $S(\tau)$ и, соответственно, нормированной мощности выходного излучения $u(t) = \tau_{12}|e_R(t)|^2$, возможны при таких сочетаниях значений коэффициентов (1.2), при которых действительная часть корней $\chi_{2,3}$ (2.2) положительна. Точки, соответствующие равновесным состояниям (2.1), в фазовом пространстве системы (1.2) тогда принимают тип неустойчивого фокуса. Решения (1.2), «стартующие» из окрестности таких точек и изображаемые фазовыми кривыми системы (1.2), представлены «развёртывающимися» циклическими траекториями, которые покидают окрестность особых точек (2.1). В то же время из-за неизбежного насыщения инверсной заселённости (усиления n) вынужденным излучением амплитуда мощности генерации должна стабилизироваться. Кривые локализуются в замкнутом пространстве, их проекции на координатные плоскости в трёхмерном фазовом пространстве с течением времени образуют предельные циклы. На временно́й шкале эта динамика переменных (1.2) будет соответствовать их автоколебаниям, возникающим самопроизвольно (при постоянном уровне стимулирующих факторов – накачки и амплитуды напряжённости начального поля e_i) – только для определённых сочетаний значений материальных параметров активного слоя и параметра накачки α. Условия существования комплексных корней уравнения (2.2) при положительных значениях их действительной части, следуя выражениям (2.3), формулируются такими соотношениями:

$$D > 0, \quad X - 2(n_S - 1) > (V_+ + V_-)/2. \qquad (2.4)$$

Выражения (2.3) для корней уравнения (2.2) определяются элементарно, и запись уравнения именно в форме (2.2) с коэффициентами, зависящими от значения n_S, представляется особо удобной. Зависимость корней (2.3) от коэффициентов системы (1.2) тогда можно рассчитать параметрически, полагая n_S линейно нарастающим в пределах области изменения аргументом. Используя соотношения (2.1), таким образом можно рассчитать величины корней (2.3) как функцию параметра скорости накачки α, а также по соотношениям (2.4) определить область параметров модели, при которых система (1.2) имеет автоколебательные решения. Величина α, определяющая уровень возбуждения в лазерной схеме, является параметром, который в реальных условиях может меняться при очередном включении устройства.

Представленные далее расчёты и моделирование проведены для набора коэффициентов (2.1), который основан на значениях параметров, характерных, если судить, например, по данным работ [13], [14], для ряда полупроводниковых структур с квантоворазмерными эффектами в спектральной области экситонного резонанса. Мощность излучения примерно соответствует уровню интенсивности поля, насыщающего инверсию в этих материалах, то есть 1 … $5 \cdot 10^5$ Вт/см^2 на длинах волн 1.25 … $1.30 \cdot 10^{-6}$м.

На рисунке 2.1 приведены параметрически рассчитанные кривые, которыми для разных значений ненасыщенного усиления κ характеризуется изменение величины корней (2.3) по мере нарастания относительного уровня возбуждения α / κ. Следует отметить, что значения α выше определённого уровня (известного как второй порог генерации) равновесные значения (2.1) оказываются неустойчивыми – кривые зависимости $\mathrm{Re}\chi(\alpha)$ пересекают горизонтальную ось (рисунок 2.1, *а*). Тип точек равновесия (2.1) сменяется с устойчивого на неустойчивый фокус. Фазовые траектории «уходят» из окрестности таких точек и приближаются к предельному циклу. Осцилляторные решения (1.2) тогда описывают нелинейные самоподдерживающиеся пульсации. Судя по зависимостям рисунка 2.1, *б*, частота релаксационной структуры должна нарастать с увеличением фактора α.

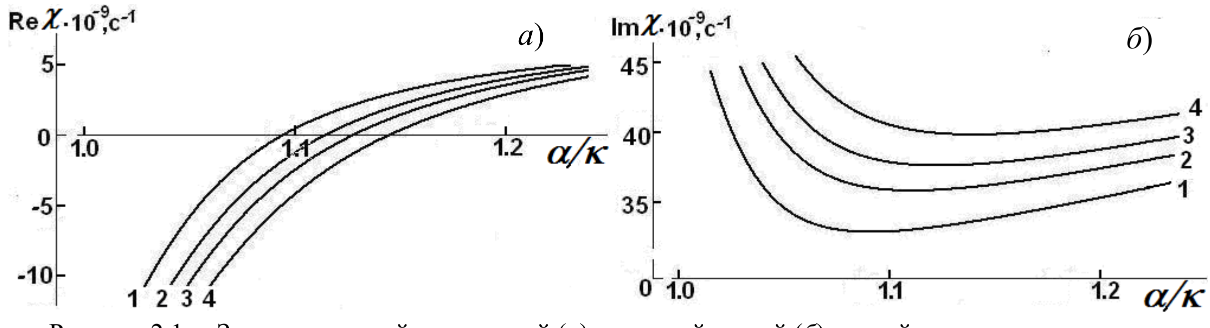


Рисунок 2.1. – Зависимости действительной (*а*) и мнимой частей (*б*) корней характеристического уравнения от параметра накачки: κ = 1.0 (кривые 1), 1.1 (2), 1.2 (3), 1.25 (4); $e_i = 2.5 \cdot 10^{-4}$, $\gamma = 1.58$, $\beta = 0.1$, $T_1 = 1 \cdot 10^{-9}$ с, $T_2 = 1 \cdot 10^{-12}$ с

3 Расчёт временнóй развёртки излучения

Данные качественного анализа указывают область параметров и начальных условий для переменных, в которой можно искать решения (1.2), описывающие самоподдерживающиеся пульсации интенсивности светового поля. Поэтому далее в рамках численного расчёта (1.2) было целесообразно проанализировать динамику безразмерной интенсивности $u(t)$.

Численное интегрирование системы (1.2) проводилось методом Рунге – Кутты для начальных условий, очевидно соответствующих инвертированному состоянию среды слоя: для усиления – $n(\tau = 0) = n_0 < \kappa$. Для вероятности поляризованности – $\rho(\tau = 0) = 0$ (предполагалось, что поляризующее влияние вынужденного излучения первоначально отсутствует).

Вывод о возможности автомодуляционной структуры решений подтверждается иллюстрируемыми на рисунке 3.1 результатами расчётного моделирования. Расчёт проводился на наносекундной шкале времени; длительность импульсов, образующих регулярную релаксационную структуру, в основном, находится в пикосекундном диапазоне.

Типичное решение для автомодуляционного процесса представлено развёрткой $u(t)$, продемонстрированной на рисунке 3.1, *а*. После нескольких переходных выбросов «несущие» высокочастотные осцилляции интенсивности регуляризуются. В последующее время развития процесса вынужденного излучения до прекращения действия и накачки амплитуда осцилляций стремится к постоянному уровню примерно так, как это далее ещё иллюстрировано на рисунках 3.1, *е* – *з*. Отметим далее, что в отсутствие фазовых процессов «раскачки» стационарного состояния не происходит. Соответствующие этому решения (2.1) регулярную структуру в излучении не описывают – развёртка на рисунке 3.1, *б*, рассчитана на основе (1.2) для тех же начальных условий, что и 3.1, *а*, но в пренебрежении нелинейным смещением резонанса. То есть развитие автомодуляционного процесса следует ожидать именно в условиях действенности резонансной фазовой нелинейности отклика квазикристалла в качестве усиливающего элемента.

Было интересным в расчётах проследить появление и изменение субнано- и пикосекундной структуры по мере нарастания фактора возбуждения именно в окрестности его уровня, отвечающего второму порогу генерации. На рисунках 3.1, *в* – *з* изображены развёртки для серии значений α, величины которых примерно соответствуют зависимости $\mathrm{Re}\chi(\alpha)$, описываемой кривой 3 на рисунке 2.1, *а*.

По мере увеличения фактора накачки α решения, которыми на рисунках 3.1, *в*, *г* выражен процесс перехода к стационарному режиму, сменяются решениями в виде развивающейся серии периодических импульсов на рисунках 3.1, *д* – *з*. Импульсы представляют собой «несущие» нелинейные осцилляции, модулирующие постоянную во времени огибающую. Различия в характере фазовых кривых (рисунки 3.1, *в*', *г*') по отношению к вариантам фазового портрета решений на рисунках 3.1, *д*' – *з*' свидетельствуют именно о возможности нестационарного регулярного сценария в излучении. В первом случае особая точка – устойчивый фокус в трёхмерном фазовом пространстве, во втором фокус неустойчив, и фазовые кривые, развёртываясь с обязательным переходным этапом, устремляются к предельному циклу,

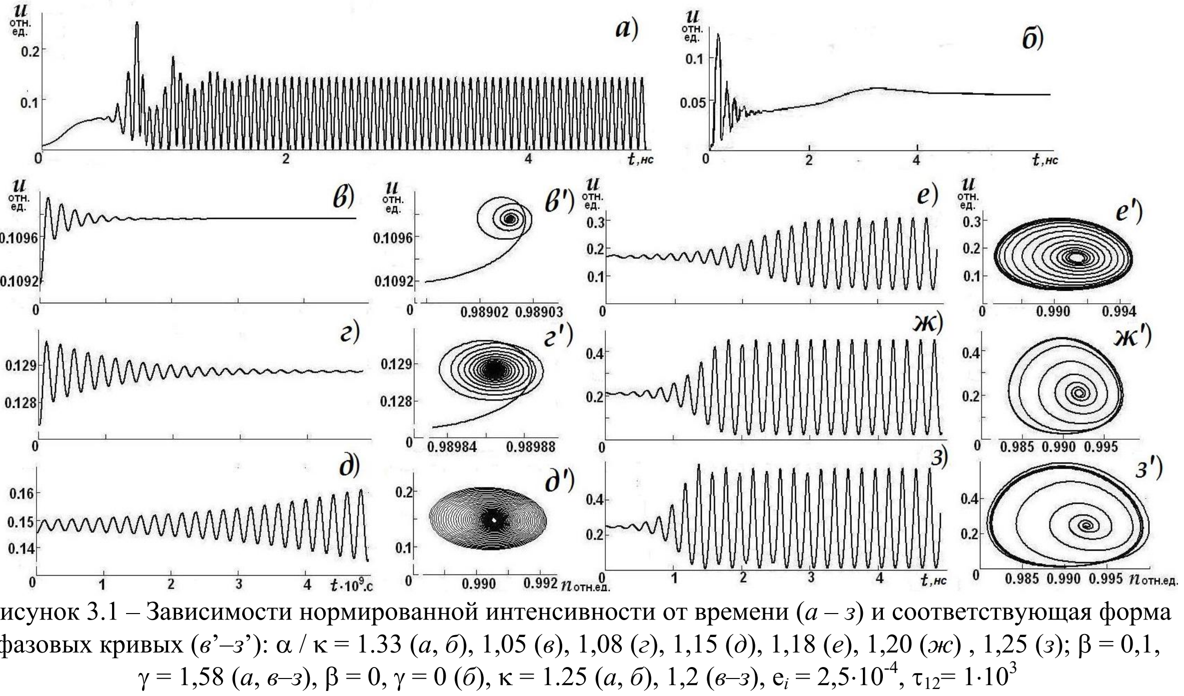


Рисунок 3.1 – Зависимости нормированной интенсивности от времени (*а* – *з*) и соответствующая форма фазовых кривых (*в*'–*з*'): α / κ = 1.33 (*а*, *б*), 1,05 (*в*), 1,08 (*г*), 1,15 (*д*), 1,18 (*е*), 1,20 (*ж*) , 1,25 (*з*); β = 0,1, γ = 1,58 (*а*, *в*–*з*), β = 0, γ = 0 (*б*), κ = 1.25 (*а*, *б*), 1,2 (*в*–*з*), $e_i = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$, $\tau_{12} = 1 \cdot 10^3$

также формируемому в трёхмерном пространстве. Продолжительность переходного режима, в основном, зависит от величины отношения времён релаксации τ_{12} и параметра ненасыщенного усиления к. Частота и контраст «несущих» нелинейных колебаний, в основном, зависят от уровня накачки и от параметра усиления к.

Заключение

На основе расчётов, таким образом, показано, что формирование серии регулярных контрастных импульсов с возможностью управления их параметрами может реализоваться в результате конкуренции процессов вынужденного излучения и наведения резонансной поляризации в условиях постоянной накачки. Условием подобной самомодуляции могут быть нелинейные вариации резонансной частоты, связанные с релаксационными колебаниями характеристик энергетического состояния среды.

Лазерное устройство с квазикристаллом, образованным квантовыми точками, из-за потери когерентности осцилляций поля и резонансного отклика среды, может переходить к неустойчивому равновесному состоянию – к некоторому особому квазистационарному (нелинейно модулированному) состоянию. Физически это соответствует достижению режима автоколебаний (регулярных пульсаций) и означает возможность излучения светового сигнала с постоянной огибающей интенсивности, причём характеристики несущей релаксационной структуры (контраст, скважность или частота следования пульсаций) управляются изменением накачки с постоянным уровнем за время действия излучающего устройства.

Следует также отметить, что на основе параметрического расчёта выражений (2.1) для связи равновесных состояний модели несложно анализировать зависимости $n_s\left(e_0^2\right)$ или $n_s(\alpha)$, которые при определённых сочетаниях коэффициентов (1.2) могут быть бистабильными. Существование бистабильной связи характеристик стационарных состояний модели также является признаком её внутренней неустойчивости. Результаты моделирования развёртки высвечиваемого светового поля для области бистабильности и гистерезиса, как ожидается, аналогично [8], [9] должны раскрыть более разнообразную динамику картины излучения. Изучение динамических следствий этого рода нестабильности представляется, однако, предметом отдельной задачи.

В диапазоне ИК частот до сих пор отмечается определённый недостаток электрооптических материалов, позволяющих применять традиционные методы модуляции уровня обратной связи и сокращения длительности лазерных импульсов. Поэтому в настоящее время исследование лазерной генерации интенсивно развивается применительно к технологиям формирования регулярной релаксационной последовательности коротких и сверхкоротких импульсов с управляемыми временными параметрами именно в этой спектральной области. Результаты приведенных в статье расчётов динамики излучения с учётом фазовой автомодуляции светового поля будут полезными для разработки методов получения серий коротких световых импульсов с относительно невысокой средней интенсивностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *New role for nonlinear dynamics and chaos in integrated semiconductor laser technology* / M. Yousefi [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 98, № 4. – P. 044101-1–044101-4.

2. *Ханин*, *Я.И.* Основы динамики лазеров / Я.И. Ханин. – М.: Наука, 1999. – 368 с.

3. *Quantum-dot supercrystals for future nanophotonics* / A.S. Baimuratov [et al.] // Scientific Reports 3. – 2013. – № 1727. – P. 1–9.

4. *Long-range orientation and atomic attachment of nanocrystals in* 2D *honeycomb superlattices* / M.P. Boneschanscher [et al.] // Science. – 2014. – Vol. 344, № 6190. – P. 1377–1380.

5. *Low-Dimensional Semiconductor Superlattices Formed by Geometric Control over Nanocrystal Attachment* / W.H. Evers [et al.] // Nano Lett. – 2013. – Vol. 13, № 6. – P. 2317–2323.

6. *Юдсон*, *В.И.* Нелинейная резонансная оптика тонких плёнок: метод обратной задачи / В.И. Юдсон, В.И. Рупасов // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 93. – С. 494–501.

7. *Reflection and transmission of ultrashort light pulses through a thin resonant medium: Local-field effects* / M. Benedict [et al.] // Phys. Rev. A. – 1991. – Vol. 43, № 7.– P. 3845–3853.

8. *Malikov*, *R.F.* Nonlinear optical response of a 2D quantum dot supercrystal / R.F. Malikov, V.A. Malyshev, I.V. Ryzhov // EPJ Web of Conferences. – 2017. – Vol. 161. – P. 02014–02016.

9. *Nonlinear optical dynamics of a* 2D *semiconductor quantum dot super-crystal*: *Emerging multistability, self-oscillations and* chaos / V.A. Malyshev [et al.] // Journal of Physics: Conf. Series. – 2019. – Vol. 1220. – P. 012006–012019.

10. *Юревич*, *В.А.* Импульсы сверхизлучения в тонком слое плотной резонансной среды / В.А. Юревич // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 31–35.

11. *Апанасевич, П.А.* Основы теории взаимодействия света с веществом / П.А. Апанасевич. – Мн.: Навука і тэхніка, 1977. – 496 с.

12. *Garmire*, *E.* Resonant optical nonlinearities in semiconductors / E. Garmire // IEEE Journ. Sel. Top. Quant. Electron. – 2000. – Vol. 6, № 6. – P. 1094−1110.

13. *Rabi oscillations in a semiconductor quantum dot*: *Influence of local fields* / G.Ya. Slepyan [et al.] // Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 70, № 4. – P. 045320-1–045320-5.

14. *Quantum dots* (*QDs*) *for photonic applications* / P. Prabhakaran [et al.] // Optical Materials Express. – 2012. – Vol. 2. – P. 578–586.

Поступила в редакцию 25.06.2020.

УДК 621.793-036:678

ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ СИНТЕЗ, СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ И ЛЕГИРОВАННЫХ МАГНИЕМ ПОКРЫТИЙ ОКСИДА ЦИНКА

М.А. Ярмоленко[1], А.С. Руденков[1], А.В. Рогачёв[1], Е. Русу[2], А.В. Семченко[1], В.В. Сидский[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Институт электронной инженерии и нанотехнологий имени Д.В. Гицу*

ELECTRON BEAM SYNTHESIS, STRUCTURE AND PROPERTIES OF SINGLE-COMPONENT AND MAGNESIUM DOPED ZINC OXIDE COATINGS

M.A. Yarmolenko[1], A.S. Rudenkov[1], A.V. Rogachev[1], E. Rusu[2], A.V. Semchenko[1], V.V. Sidsky[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Gitsu Institute of Electronic Engineering and Nanotechnologies*

Установлены особенности электронно-лучевого осаждения, структуры и свойств покрытий ZnO и $Zn_xMg_{1-x}O$ с использованием в качестве мишени механических смесей порошков ацетата цинка, металлического цинка, магния. Показано, что применение лазерного излучения, ассистирующего процесс электронно-лучевого испарения ацетата цинка, и последующая термообработка позволяют осаждать высокодисперсные тонкие покрытия на основе ZnO со стабильными значениями ширины запрещенной зоны. При этом использование ассистирующего излучения с длиной волны 266 нм за счет протекания фотохимического разложения соли инициирует образование менее дисперсных оксидных фаз. Введение в состав покрытий магния заметно не изменяет их молекулярную структуру и приводит к незначительному возрастанию ширины запрещенной зоны. На основании полученных данных сделан вывод о преимущественно независимом формировании оксидных фаз при изученных условиях синтеза, незначительном содержании в составе покрытия твердых растворов.

Ключевые слова*: оксид цинка, магний, морфология, фазовый состав, структура, электронно-лучевое диспергирование.*

Specific features of electron-beam deposition, structure and properties of ZnO and $Zn_xMg_{1-x}O$ coatings with the use of mechanical mixtures of powders of zinc acetate, metallic zinc, and magnesium as a target are established. It is shown that the use of laser radiation, which assists the electron-beam evaporation of zinc acetate, and the subsequent heat treatment make it possible to deposit highly dispersed thin coatings based on ZnO with stable values of the band gap. In this case, the use of assisting radiation with wavelength 266 nm due to the photochemical decomposition of the salt initiates the formation of less dispersed oxide phases. The introduction of magnesium into the composition of coatings does not noticeably change their molecular structure and leads to an insignificant increase in the band gap. Based on the data obtained, it was concluded that the formation of oxide phases was predominantly independent under the studied synthesis conditions and that the content of solid solutions in the coating composition was insignificant.

Keywords: *zinc oxide*, *magnesium*, *morphology*, *phase composition*, *structure*, *electron beam dispersion.*

Введение

Разработка новых фотоактивных материалов для создания светотехнических устройств преобразования УФ и рентгеновского излучения в видимое, методов их формирования является актуальной задачей. К числу таких наиболее перспективных материалов относят оксид цинка, характеризующийся широкой запрещенной зоной, высокой термической стабильностью, радиационной и химической стойкостью, чувствительностью к УФ излучению. При синтезе функциональных элементов на основе оксида цинка важными являются обеспечение стабильной проводимости *p*-типа и реализация возможности регулируемого изменения ширины запрещенной зоны.

Изменение ширины запрещенной зоны может быть достигнуто в результате частичного замещения атомов цинка атомами металлов той же группы Периодической системы элементов. Для увеличения ширины запрещенной зоны в пленках ZnO используются введенные в их состав более легкие (Mg), а для уменьшения – более тяжелые (Ca, Cd) элементы второй группы [1]–[4].

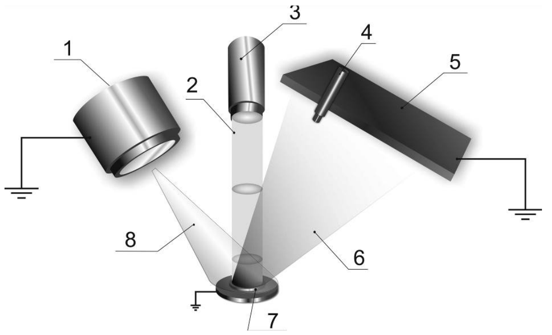
Разработаны многочисленные способы формирования тонкопленочных $Zn_xMg_{1-x}O$ структур: импульсное лазерное нанесение на нагретую до высокой температуры (> 400° C) подложку [5], различные схемы магнетронного нанесения [6], растворные методы [7], золь-гель методы [8], CVD и молекулярно-лучевой эпитаксии [9]–[11] и др. При использовании данных методов реализуются различные условия и режимы формирования слоев, что в конечном счете сказывается на их структуре и свойствах.

© *Ярмоленко М.А., Руденков А.С., Рогачёв А.В., Руссу Е., Семченко А.В., Сидский В.В.*, 2020

Основной целью настоящей работы является изучение особенностей электронно-лучевого осаждения, структуры и свойств покрытий ZnO и $Zn_xMg_{1-x}O$ с использованием в качестве мишени механических смесей порошков ацетата цинка (АЦ), металлического цинка, магния.

1 Методика эксперимента

Нанесение покрытий на основе ZnO производилось путем воздействия на мишень потока электронов с энергией 800–1600 эВ и плотностью 0,01–0,03 А/см^2. Эффективную толщину покрытий определяли с помощью кварцевого измерителя толщины (КИТ). Процесс нанесения покрытий производился при начальном давлении остаточных газов в вакуумной камере $\approx 4\cdot10^{-3}$ Па. В качестве материала мишени были использованы порошки нитрата и ацетата цинка, металлического цинка, магния, а также механические смеси на их основе в различном массовом соотношении. В ряде случаев осаждали двухслойные покрытия путем испарения однокомпонентных мишеней. При изготовлении композиционных мишеней порошки тщательно смешивались с использованием вибромельницы.



1 – электронно-лучевой источник;
2 – лазерный луч;
3 – наносекундный лазер;
4 – кварцевый измеритель толщины;
5 – подложкодержатель;
6 – летучие продукты диспергирования;
7 – мишень;
8 – электронный луч

Рисунок 1.1 – Схема формирования покрытия из активной газовой фазы

Образование слоя ZnO осуществлялось в результате термообработки наносимого слоя на основе ацетата цинка. Процесс термического разложения нитрата цинка сопровождался формированием оксидного слоя. В работе предложено для активации процесса разложения соли использовать ассистирующее лазерное наносекундное воздействие. Схема нанесения покрытий в условиях ассистирующего воздействия лазерного излучения представлена на рисунке 1.1.

В качестве источника лазерного излучения был выбран лазер L-2137U+HG-5. Используемая длина волны лазерного излучения $\lambda = 266$ нм. Выбор длины волны осуществлялся с целью инициирования дополнительной фотодеструкции продуктов электронно-лучевого диспергирования солей цинка. Длительность импульса накачки в режиме модулированной добротности составляла 6 нс. При использовании лазерного ассистирующего воздействия диаметр мишени соответствовал пятну лазерного излучения. Необходимо отметить, что энергии лазерного ассистирующего излучения недостаточно для реализации процесса лазерного диспергирования соли металла в вакууме. Максимальная энергия лазерного импульса в системе генератор-усилитель в режиме модулированной добротности составляла 120 мДж ($\lambda = 266$ нм). Частота следования импульсов – 10 Гц.

В качестве материала мишени использовали порошки нитрата цинка (zinc nitrate hexahydrate, reagent grade, 98%, Aldrich), ацетата цинка ($Zn(CH_3COO)_2\times2H_2O$; ГОСТ 5823-78), магния (Aldrich). Композиционные мишени готовили смешением порошков исходных компонентов в различном массовом соотношении с помощью вибромельницы.

Термообработка сформированных покрытий проводилась в печи без использования защитной атмосферы. Температура отжига – 100 или 200° С, время отжига – 30 минут.

В качестве подложек при проведении спектроскопических измерений в видимой области использовали кварцевые пластины, при проведении ИК спектроскопических исследований – пластины NaCl и пленки металлизированного лавсана, при проведении микроскопических исследований – пластины монокристалла кремния.

ИК-спектроскопические исследования проводили с помощью ИК-Фурье спектрофотометра Vertex-70 (Bruker, Германия) с использованием стандартных приставок многократного нарушенного полного внутреннего отражения (МНПВО), на пропускание.

Значение ширины запрещенной зоны покрытий определяли на основании анализа электронных спектров поглощения, получаемых с помощью спектрофотометра Cary-50 (Varian, США), согласно модели Таунца [10], [11].

Рентгеноструктурный анализ нанесенных покрытий проводили на рентгеновском дифрактометре D8 Advance (Bruker, Германия) с использованием источника излучения Cu K_α ($\lambda =$ = 1,54056 Å), 40 кВ, 40 мА.

Рентгеновский фотоэлектронный спектроскопический анализ (РФЭС) проводили на спектрометре PHI Quantera II Scanning XPS Microprobe с использованием источника AlK_α монохроматического рентгеновского излучения ($h\nu = 1486{,}7$ эВ) мощностью 150 Вт (ULVAC-PHI, США).

Исследование морфологии покрытия осуществлялось с помощью сканирующего зондового микроскопа Solver P47 PRO, в котором реализована схема сканирования образцом. В качестве зондов использовались кремниевые кантилеверы серии NSG11S с типичной силовой константой 5,5 Н/м и резонансной частотой 220 кГц.

2 Результаты и их обсуждение

На первом этапе исследований основное внимание было уделено определению кинетических особенностей нанесения, молекулярной структуры покрытий, сформированных из активной газовой фазы в процессе электронно-лучевого диспергирования порошка уксуснокислого цинка в условиях лазерного ассистирующего воздействия и без лазерной обработки мишени. На рисунке 2.1 представлены кинетические зависимости процесса нанесения покрытий путем электронно-лучевого диспергирования ацетата цинка в условиях наносекундного лазерного ассистирования и без него.

Установлено, что заметное осаждение покрытия фиксировалось только после образования под действием потока электронов в мишени расплава соли и наибольшее значение скорости нанесения покрытия (55,4 Гц/с) фиксируется при отсутствии на мишень дополнительного лазерного воздействия. При этом значительно снижается и длительность индукционного периода, в течение которого отсутствует образование летучих продуктов. Наименьшее значение скорости роста и наибольшее давление продуктов диспергирования регистрировались при осаждении покрытия на основе ацетата цинка в условиях УФ ассистирующего воздействия, хотя значение плотности мощности такого излучения ($7{,}1\cdot10^{11}$ Вт/м^2) значительно ниже плотности мощности оптического излучения ($2{,}1\cdot10^{12}$ Вт/м^2).

Кинетические зависимости роста покрытия и давления в камеры позволяют предположить, что действие УФ лазерного ассистирования, в основном, обусловлено фотохимическим инициированием процесса отщепления воды и преимущественным образованием летучих продуктов в результате испарения оксоацетата цинка, так как энергии потока низкоэнергетических электронов недостаточно для испарения оксида цинка.

Известно, что ацетат цинка разлагается в несколько стадий. На первой стадии происходит отщепление молекул воды:

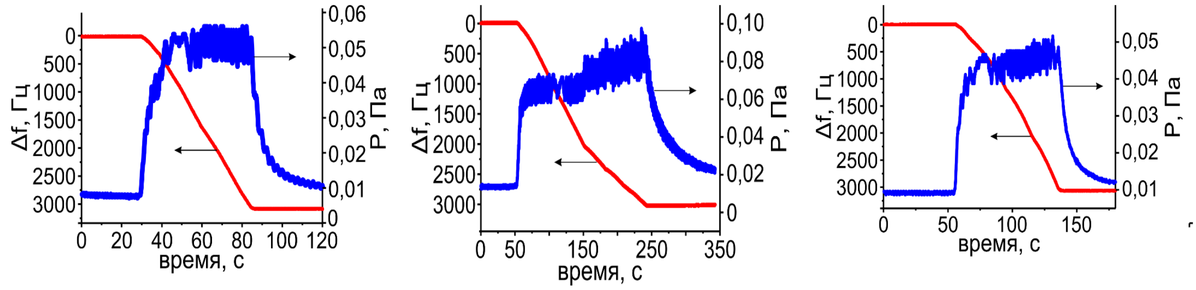
$$Zn(CH_3COO)_2{\cdot}2H_2O \rightarrow Zn(CH_3COO)_2 +$$
$$+\ 2H_2O\ (\sim 130^o\ C).$$

В дальнейшем происходит образование оксоацетата цинка:

$$4Zn(CH_3COO)_2 \rightarrow Zn_4O(CH_3COO)_6 +$$
$$+\ (CH_3)_2CO + CO_2.$$

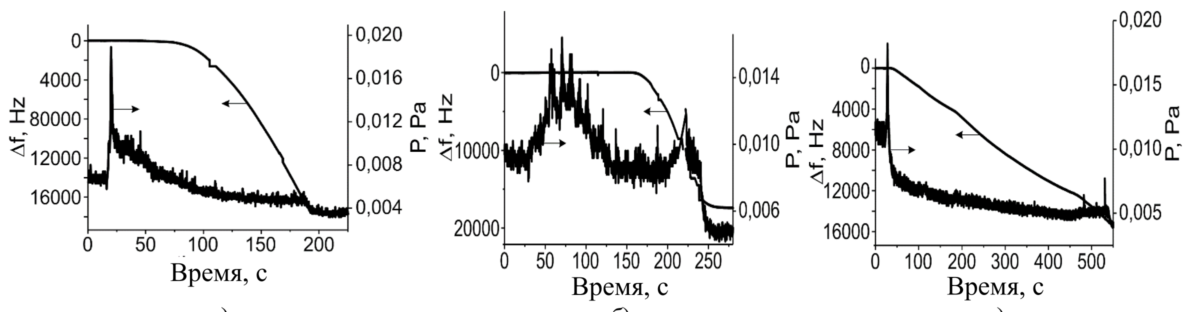
Оксид цинка является результатом последующего термического разложения оксоацетата цинка.

При электронно-лучевом диспергировании уксуснокислого цинка в условиях импульсного лазерного ассистирования наблюдалось периодическое, синхронное с изменениями лазерного воздействия возрастание давления летучих продуктов на 20–25%. При этом при отсутствии электронно-лучевого воздействия на мишень



а) *б*) *в*)

Рисунок 2.1 – Кинетические зависимости толщины покрытия, давления в камере при диспергировании ацетата цинка без лазерного ассистирования (*а*) и при ассистировании излучением с λ = 266 нм (*б*), λ = 532 нм (*в*)



а) *б*) *в*)

Рисунок 2.2 – Кинетические зависимости толщины покрытия, давления в камере при электронно-лучевом испарении мишени из смеси порошков Zn + Mg с мольным соотношением 2:1 (*а*), 1:1 (*б*), 1:2 (*в*) поток ультрафиолетового излучения не способен вызвать образование летучих продуктов. Полученные данные о влиянии длины излучения на скорость роста покрытий подтверждают преимущественно фотохимическое влияние лазерного излучения на процессы, протекающие в зоне диспергирования ацетат цинка.

Кинетические зависимости процесса формирования покрытий с использованием механических смесей порошков цинка и магния представлены на рисунке 2.2. С увеличением молярной доли магния в мишени фиксируется снижение скорости нанесения покрытия (100, 77 и 29 Гц/с при мольном соотношении Zn и Mg в мишени 2:1, 1:1, 1:2 соответственно). Следует отметить, что процесс нанесения покрытия характеризуется достаточно большим индукционным периодом, в течение которого наблюдается значительное повышение давление летучих неконденсирующихся продуктов, по-видимому, адсорбированных низкомолекулярных газов вследствие нагрева смеси порошков.

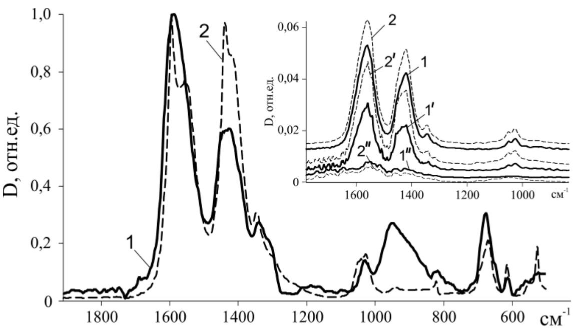


Рисунок 2.3 – ИК-спектры покрытий на основе ацетата цинка, полученные при отсутствии лазерного ассистирования (1), в условиях лазерного ассистирования (2) (′ – отжиг при 100° C; ″ – отжиг при 200° C)

Анализ представленных на рисунке 2.3 ИК-спектров покрытий, сформированных при электронно-лучевом диспергировании ацетата цинка, указывает на присутствие в их составе карбоксилатов ($\nu_{as}(COO^-) \approx 1560$ см$^{-1}$, $\nu_s(COO^-) \approx$ ≈ 1420 см$^{-1}$, $\delta(OCO) \approx (1050–1026)$ см$^{-1}$, 665 см$^{-1}$ [12], [13]). Полосы являются составными, образованными двумя перекрывающимися областями поглощения. Известно, что образование водородной связи с ионизованной карбоксильной группой приводит к смещению поглощения в область более низких значений волновых чисел [12]. Наличие близко расположенных полос может быть связано с частичным разрушением молекул соли при нанесении. Однако в ИК-спектре покрытия отсутствует поглощение при 1700 см$^{-1}$ – валентные колебания карбонильных групп, появление которых могло бы указывать на присутствие неионизированных карбоксильных групп. Ионизация карбоксильных групп является причиной высокой сорбционной активности покрытия в отношении атмосферной влаги. На присутствие молекул воды в тонком слое указывает широкая полоса поглощения в области валентных колебаний OH-групп (3600–3000 см$^{-1}$). Отсутствие в ИК спектре характеристических полос поглощения оксидов при частоте валентных колебаний связи Me – O при 490 и 558 см$^{-1}$ можно объяснить высокой дисперсностью образовавшихся фаз. Характерный резкий запах уксусной кислоты в вакуумной камере после нанесения может служить косвенным подтверждением процесса частичного разложения соли под действием потока электронов и лазерного излучения. При этом образующийся под действием энергетического воздействия на уксуснокислый цинк оксид цинка способен в дальнейшем, взаимодействуя с уксусной кислотой, переходить в соль.

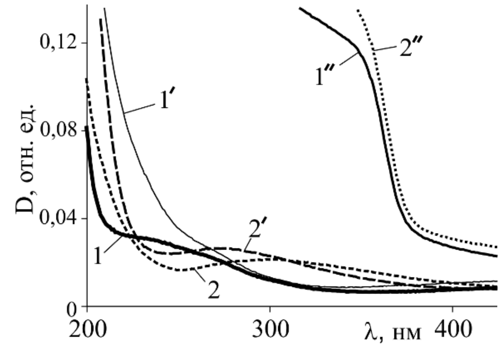


Рисунок 2.4 – Электронные спектры покрытий на основе ацетата цинка, полученные при отсутствии лазерного ассистирования (1), в условиях лазерного ассистирования (2) (′ – отжиг при 100° C; ″ – отжиг при 200° C)

Анализ электронных спектров покрытий на основе ацетата цинка, представленных на рисунке 2.4, показывает, что слои, сформированные в условиях лазерного ассистирования, характеризуются наличием максимума поглощения вблизи 310 нм, смещающегося в область коротких длин волн в процессе отжига (100° C) и нехарактерного для покрытий, осажденных в отсутствие лазерного излучения.

Отжиг слоев в течение 30 минут при температуре 200° C сопровождается существенным уменьшение значений оптических плотностей рассматриваемых полос, что указывает на процессы разложения соли при термообработке.

Установленные особенности влияния лазерного УФ наносекундного излучения на процесс разложения ацетата подтверждаются данными микроскопических исследований (рисунки 2.5, 2.6).

Для покрытий, сформированных в условиях лазерного ассистирующего воздействия, характерно наличие крупных поверхностных образований, нетипичных для покрытий, нанесенных без лазерного ассистирующего влияния. Подобные структуры формируют слои с перепадом высот не превышающим 10 нм. Покрытие,

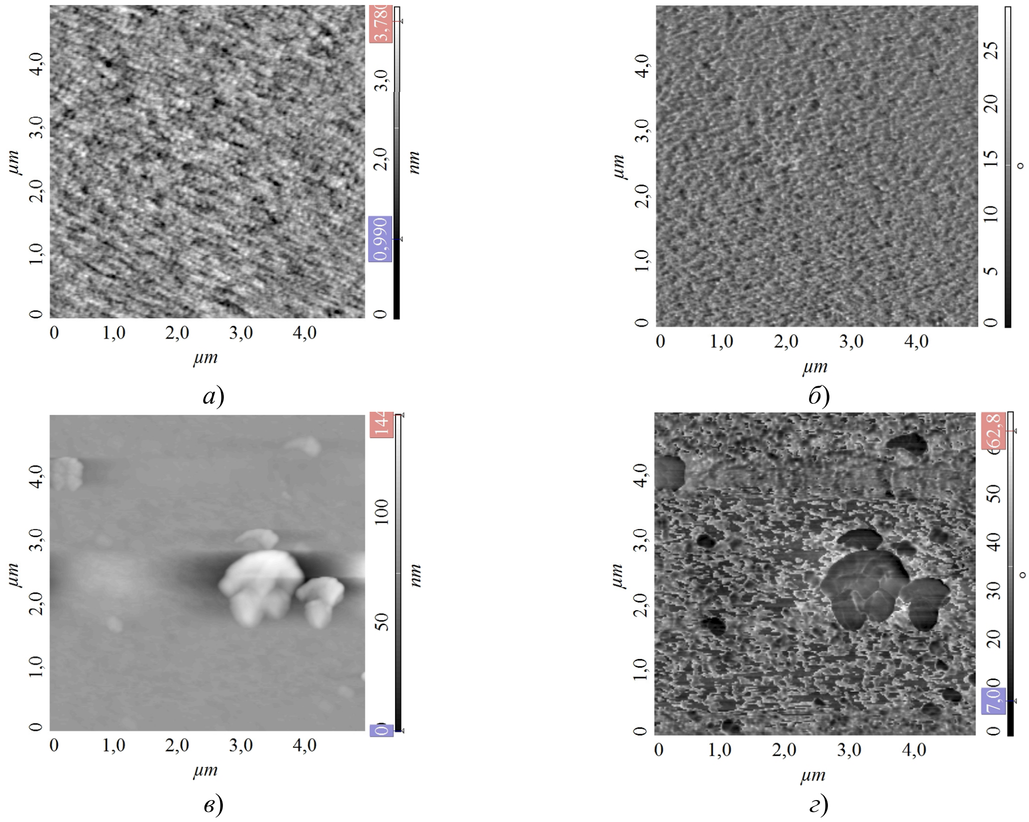


Рисунок 2.5 – АСМ-изображения покрытий в режиме топографии (*а*, *в*) и фазового контраста (*б*, *г*) на основе ацетата цинка, полученные при отсутствии лазерного ассистирования (*а*, *б*) и при лазерном ассистировании (*в*, *г*)

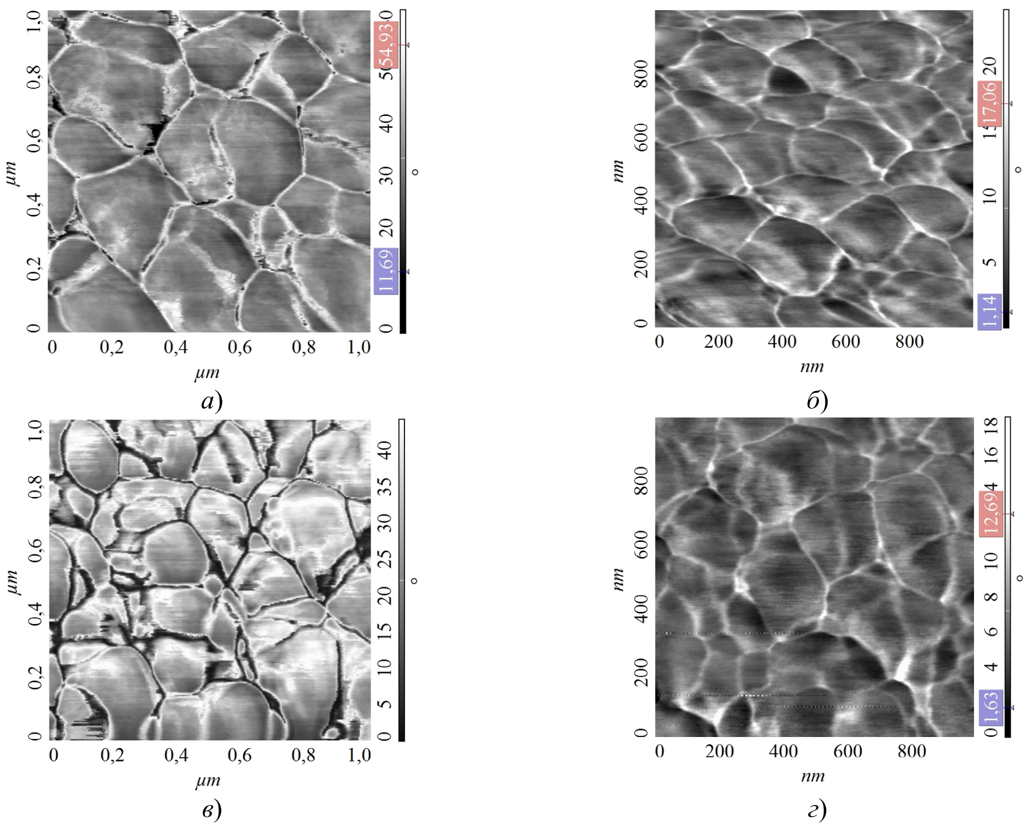


Рисунок 2.6 – АСМ-изображения фазового контраста покрытий на основе ацетата цинка, полученные при отсутствии лазерного ассистирования (*а*, *б*) и при лазерном ассистировании (*в*, *г*) после отжига при температуре 100° С (*а*, *в*), 200° С (*б*, *г*)

Таблица 2.1 – Параметры морфологии покрытий ацетата цинка

Параметры	Покрытие на основе ацетата цинка			
	без лазерного ассистирования		в условиях лазерного ассистирования	
	без отжига	отжиг при 200° С	без отжига	отжиг при 200° С
Высота выступов (нм)	2,5	42	8	24
Шероховатость Ra (нм)	0,4	5,9	1,6	5,4

Таблица 2.2 – Значения ширины запрещенной зоны покрытий на основе ацетата цинка(АЦ)

Покрытие	АЦ	АЦ+ Mg (4:1)	АЦ+ Mg (2:1)	Слои АЦ и Mg	Zn+Mg (1:1)
Режим термообработки	300º С, 60 мин	300º С, 60 мин	300º С, 60 мин	300º С, 60 мин	400º С, 120 мин
Eg, эВ	3,07	3,07	3,14	3,13	3,20

электронно-лучевого воздействия на мишень более шероховатых слоев и при использовании излучения с длиной волны 532 нм Ra покрытий более чем в 20 раз превышает значение, характерное для покрытий, полученных без ассистирования и в 12 раз – полученных при ассистировании излучением с длиной волны 266 нм.

Отжиг нанесенных слоев при температуре 100° С существенно меняет их морфологию, приводит к образованию «зернистой» структуры (рисунок 2.6). В сравнении с покрытием, сформированным без лазерной обработки мишени, для слоя, осажденного в условиях лазерного ассистирующего воздействия, характерно наличие большого количества мелких зерен наряду с крупными. При этом крупные зернистые образования представляют собой агломерацию более мелких. Указанное различие в размере структурных образований, формирующих покрытия, частично сохраняется и после отжига при 200° С. Если предположить, что лазерная обработка инициирует разложение соли с образованием частиц оксида цинка, при отжиге способных выполнять функцию готовых центров структурообразования и роста частиц оксида, то фиксируемые изменения в морфологии слоев закономерны.

Следствием протекания процессов разложения органической соли и формирование тонкого слоя оксида цинка является изменение значений ширины запрещенной зоны для покрытий при различных режимах их термообработки (таблица 2.2).

Введение малых количеств магния не оказывает заметное влияние на значение ширины *Eg*. Это может быть связано с особенностями электронно-лучевого диспергирования ацетата цинка и металлического магния. Нанесение магниевых слоев возможно только при использовании значительно более высоких значений ускоряющего напряжения и накального тока, чем при нанесении покрытий на основе ацетата цинка. Увеличение параметров электронно-лучевого испарения приводит к возрастанию доли ацетата цинка в генерируемом потоке. С возрастанием содержания магния в исходной мишени увеличивается его содержание и в осаждаемом покрытии. Это приводит к росту значения *Eg*. Отмеченные различия в скорости диспергирования соли цинка и металлического магния препятствуют нанесению покрытий с равномерным распределением ингредиентов по толщине слоя и, соответственно, с прогнозируемым значением ширины запрещенной зоны. С учетом данных особенностей синтеза покрытий, а также изменений молекулярной структуры и морфологии при введении в состав покрытий на основе оксида цинка магния можно заключить, что формирование высокодисперсных оксидных фаз цинка и магния протекает преимущественно независимо и образование твердых растворов на их основе при данных условиях синтеза затруднено.

В этой связи более перспективным является формирование двухслойной системы на основе ацетата цинка и магния. Следует отметить, что цвет осажденного двухслойного покрытия был серым. После отжига покрытия цвет изменился и стал молочно-белым, а значение *Eg* стало равным 3,13 эВ. Таким образом, в процессе термообработки покрытия ацетат цинка – магний металл легко окисляется и происходит формирование однородного слоя.

Таким образом, значение температуры отжига и его продолжительности, являются определяющими параметрами, влияющими на значение ширины запрещенной зоны осаждаемых покрытий.

Выводы

Определены особенности формирования покрытий ZnO и $Zn_xMg_{1-x}O$ электронно-лучевым испарением ацетата цинка и его смеси с магнием в условиях лазерного ассистирования и без него. Показано, что использование лазерного излучения, ассистирующего процесс электронно-лучевого испарения ацетата цинка, и последующая термообработка позволяют осаждать высокодисперсные тонкие покрытия на основе ZnO со стабильными значениями ширины запрещенной зоны. Кинетические зависимости роста покрытия и давления летучих продуктов свидетельствуют о многостадийности процесса испарения и фотохимическом инициировании процесса при УФ лазерном ассистировании.

Установлено, что последующая термообработка осажденных слоев приводит к образованию высокодисперсных оксидных фаз, для покрытий, сформированных в условиях лазерного ассистирующего воздействия, особенно УФ, характерно наличие более крупных поверхностных образований. Введение в состав покрытий магния заметно не изменяет их структуру и приводит к незначительному возрастанию ширины запрещенной зоны.

С учетом данных особенностей синтеза покрытий, а также изменений молекулярной структуры и морфологии при введении в состав покрытий на основе оксида цинка магния можно заключить, что формирование высокодисперсных оксидных фаз цинка и магния протекает преимущественно независимо и образование твердых растворов на их основе при данных условиях синтеза затруднено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mg-*doped* ZnO *nanostructures for efficient Organic Light Emitting Diode* / P. Manzhi [et al.] // Vacuum. – 2019. – Vol. 166. – P. 370–376.

2. *Effect of Cd Doping on the Structural, Optical and Electrical Properties of* ZnO *Thin Films Deposited by Spray Pyrolysis Technique* / S. Khan, H. Khatun, M. Kundu, Md. Shahjahan // IOSR Journal of Applied Physics. – 2019. – Vol. 11. – P. 50–57.

3. *Solar Light Photodetectors Based on Nanocrystalline Zinc Oxide Cadmium Doped/p-Si Heterojunctions* / B.A.H. Ameen, A. Yildiz, W.A. Farooq, F. Yakuphanoglu // Silicon. – 2019. – Vol. 11. – P. 563–571.

4. *The investigation of hydrogen evolution using Ca doped ZnO catalysts under visible light illumination* / A. Irshad [et al.] // Materials Science in Semiconductor Processing. – 2020. – Vol. 105. – P. 104748.

5. *Mostafa, A.M.* Laser-assisted for preparation ZnO/CdO thin film prepared by pulsed laser deposition for catalytic degradation / A.M. Mostafa, A.A. Menazea // Radiation Physics and Chemistry. – 2020. – Vol. 176. – P. 109020.

6. *Electrical and magnetic properties of* (Al, Co) *co-doped* ZnO *films deposited by RF magnetron sputtering* / H. Sun [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2019. – Vol. 359. – P. 390–395.

7. *Investigating Zinc Ketoiminates as a New Class of Precursors for Solution Deposition of* ZnO *Thin Films* / A. Sadlo [et al.] // Journal of Nanoscience and Nanotechnology. – 2019. – Vol. 19. – P. 867–876.

8. *Structural, optical and photocatalysis properties of sol-gel deposited* Al-*doped* ZnO *thin films* / M.R. Islam, M. Rahman, S.F.U. Farhad, J. Podder // Surfaces and Interfaces. – 2019. – Vol. 16. – P. 120–126.

9. *Epitaxial* ZnO *Layer Growth on* Si (111) *Substrates with an Intermediate* AlN *Nucleation Layer by Methane-Based Chemical Vapor Deposition* / R. Müller [et al.] // Crystal Growth & Design. – 2020. – Vol. 20. – P. 6170–6185.

10. *Паршина, Л.С.* Импульсное лазерное напыление эпитаксиальных пленок ZnO *n*- и *p*-типа при легировании элементами III и V группы: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.27.03 / Институт проблем лазерных информационых технологий. – Шатура, 2011. – 19 с.

11. *Characterization of zinc oxide nanoparticles synthesized by polymer assisted deposition method* / R.C. Pawar, J.S. Shaikh, P.S. Shewale, P.S. Patil // Journal of Alloys and Compounds. – 2011. – Vol. 509. – P. 1716–1721.

12. *Беллами, А.* Инфракрасные спектры сложных молекул / А. Беллами. – М.: Мир, 1963. – 592 с.

13. *Харитонов, Ю.Я.* Аналитическая химия (аналитика). Общие теоретические основы. Качественный анализ: учеб. пособие / Ю.Я. Харитонов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 615 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ в рамках договора №Т19МЛДГ-008 «*Разработка и исследование фотоактивных материалов для коротковолновой области спектра на основе многокомпонентных оксидных твердых растворов*» *и при поддержке АН Молдовы в рамках проекта* 19.80013.50.07.02A/BL.

Поступила в редакцию 03.11.2020.

Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 517.929

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

М.С. Белокурский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF THE ALMOST PERIODIC ABEL EQUATION WITH LINEAR REFLECTING FUNCTION

M.S. Belokursky

F. Scorina Gomel State University

Получены достаточные условия существования почти периодических решений почти периодических уравнений Абеля и Риккати.

Ключевые слова: *уравнение Абеля*, *линейная отражающая функция*, *почти периодическое решение*, *уравнение Риккати*.

The sufficient conditions under which almost periodic Abel and Riccati equations have almost periodic solutions were obtained.

Keywords: *Abel equation*, *linear reflecting function*, *almost periodic solution*, *Riccati equation*.

Введение

Отражающая функция [1, с. 62] определяется через общее решение дифференциального уравнения. Несмотря на то, что решить подавляющее большинство дифференциальных уравнений невозможно, разработаны методы, позволяющие находить отражающую функцию даже у неинтегрируемых в квадратурах уравнений. Метод отражающей функции является мощным инструментом, с помощью которого можно проводить качественное исследование дифференциальных уравнений. В частности, отражающая функция позволяет судить о наличии и устойчивости периодических решений периодических систем, решать проблему центра-фокуса.

Различные дифференциальные системы могут иметь одну и ту же отражающую функцию, и при этом их решения обладают рядом одинаковых свойств (периодичность, устойчивость и др.) Поэтому можно говорить об эквивалентности в смысле совпадения отражающих функций. Таким образом, можно исследовать не исходное уравнение, а эквивалентное ему и более удобное для изучения. В связи с этим возникает актуальная задача построения классов эквивалентности [1, с. 74] дифференциальных уравнений для конкретных отражающих функций. Особый интерес представляют те случаи, когда можно найти условия эквивалентности почти периодических дифференциальных уравнений периодическим, а также выяснить наличие почти периодических решений у таких уравнений [2]–[4].

В данной работе рассматриваются вопросы построения класса эквивалентности уравнений Абеля и, как следствие, уравнений Риккати, соответствующего линейной отражающей функции. Также рассматриваются случаи наличия почти периодических решений у почти периодических уравнений Абеля и Риккати.

1 Структура решения дифференциального уравнения с линейной отражающей функцией

Как известно [5, с. 43] линейная отражающая функция скалярного дифференциального уравнения первого порядка $\dot{x} = X(t,x)$ имеет вид

$$F(t,x) = \alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x, \qquad (1.1)$$

где $\alpha(t), \beta(t)$ – нечетные непрерывно дифференцируемые функции. Тогда все уравнения с отражающей функцией (1.1) задаются формулой

$$\begin{gathered}\dot{x} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\alpha}(t)e^{-\beta(t)} + \alpha(t)\dot{\beta}(t)e^{-\beta(t)} + 2\dot{\beta}(t)x\right) + \\ + e^{-2\beta(t)}R(t,x) - R(-t, \alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x),\end{gathered} \qquad (1.2)$$

где $R(t,x)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Для любого решения $x(t)$ дифференциального уравнения (1.2) справедливо тождество

$$F(t,x(t)) \overset{t}{\equiv} x(-t). \qquad (1.3)$$

***Лемма* 1.1.** *Если функция* (1.1) *является отражающей функцией дифференциального уравнения* (1.2), *то всякое его решение имеет вид*

$$x(t) = e^{-\beta(t)}\left(f(t) - \frac{1}{2}\alpha(t)\right), \qquad (1.4)$$

где $f(t)$ *– четная и для всякого решения* $x(t)$ *своя функция*, *удовлетворяющая уравнению*

$$\begin{gathered}\dot{f} = e^{-\beta(t)}R\left(t, e^{-\beta(t)}\left(f - \frac{1}{2}\alpha(t)\right)\right) - \\ - e^{\beta(t)}R\left(-t, e^{\beta(t)}\left(f + \frac{1}{2}\alpha(t)\right)\right).\end{gathered} \qquad (1.5)$$

© *Белокурский М.С.*, 2020

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Тождество (1.3) для отражающей функции (1.1) имеет вид $\alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x(t) \equiv x(-t)$.

Преобразуем полученное равенство:

$$e^{\beta(t)}x(t) + \frac{1}{2}\alpha(t) \equiv e^{\beta(-t)}x(-t) + \frac{1}{2}\alpha(-t).$$

Отсюда $e^{\beta(t)}x(t) + \frac{1}{2}\alpha(t) = f(t)$, где $f(t)$ – некоторая четная функция, причем у различных уравнений (1.2) это будут различные функции $f(t)$. Выражая $x(t)$, имеем решение вида (1.4).

Построим уравнение, из которого можно найти функцию $f(t)$. Для этого подставим (1.4) в (1.2):

$$-\dot{\beta}e^{-\beta}\left(f - \frac{1}{2}\alpha\right) + e^{-\beta}\left(\dot{f} - \frac{1}{2}\dot{\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\dot{\alpha}e^{-\beta} + \alpha\dot{\beta}e^{-\beta} + 2\dot{\beta}e^{-\beta}\left(f - \frac{1}{2}\alpha\right)\right) +$$

$$+e^{-2\beta}R\left(t, e^{-\beta}\left(f - \frac{1}{2}\alpha\right)\right) - R\left(-t, e^{\beta}\left(f + \frac{1}{2}\alpha\right)\right).$$

После упрощений имеем уравнение (1.5). □

Отметим что, если найдено общее решение уравнения (1.5), то решение (1.4) будет общим решением уравнения (1.2).

2 Уравнения Абеля и Риккати с линейной отражающей функцией

Рассмотрим уравнение Абеля

$$\dot{x} = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x + D(t). \qquad (2.1)$$

В [7] был указан один из случаев, когда уравнение Абеля имеет линейную отражающую функцию. Построим класс эквивалентности всех уравнений вида (2.1) соответствующий отражающей функции (1.1). Для этого будем опираться на основное соотношение

$$F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) \equiv 0, \quad F(0,x) \equiv x. \quad (2.2)$$

Из [1, с. 63] известно, что функция $F(t,x)$ будет отражающей функцией уравнения первого порядка с правой частью $X(t,x)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному тождеству (2.2).

Теорема 2.1. *Функция* (1.1) *является отражающей функцией уравнения Абеля* (2.1) *тогда и только тогда*, *когда это уравнение имеет вид*

$$\dot{x} = a(t)e^{2\beta(t)}x^3 + e^{\beta(t)}\left(b(t) + \frac{3}{2}\alpha(t)a(t)\right)x^2 +$$

$$+\left(c(t) + \alpha(t)b(t) - \dot{\beta}(t)\right)x + \qquad (2.3)$$

$$+e^{-\beta(t)}\left(d(t) + \frac{1}{2}\alpha(t)c(t) - \frac{1}{4}\alpha^3(t)a(t) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}\right),$$

где $a(t), b(t), c(t), d(t)$ *– произвольные непрерывные нечетные функции.*

Доказательство. Составим основное соотношение (2.2) для отражающей функции (1.1) уравнения Абеля (2.1):

$$\dot{\alpha}(t)e^{\beta(t)} + \alpha(t)\dot{\beta}(t)e^{\beta(t)} + 2\dot{\beta}(t)e^{2\beta(t)}x +$$

$$+e^{2\beta(t)}\left(A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x + D(t)\right) +$$

$$+A(-t)\left(\alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x\right)^3 +$$

$$+B(-t)\left(\alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x\right)^2 +$$

$$+C(-t)\left(\alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x\right) + D(-t) = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены по степеням x, получим

$$\left(A(t)e^{2\beta(t)} + A(-t)e^{6\beta(t)}\right)x^3 +$$

$$+\left(B(t)e^{2\beta(t)} + 3A(-t)\alpha(t)e^{5\beta(t)} + B(-t)e^{4\beta(t)}\right)x^2 +$$

$$+\left(2\dot{\beta}(t)e^{2\beta(t)} + C(t)e^{2\beta(t)} + 3A(-t)\alpha^2(t)e^{4\beta(t)} +\right.$$

$$\left.+2B(-t)\alpha(t)e^{3\beta(t)} + C(-t)e^{2\beta(t)}\right)x +$$

$$+\dot{\alpha}(t)e^{\beta(t)} + \alpha(t)\dot{\beta}(t)e^{\beta(t)} + D(t)e^{2\beta(t)} +$$

$$+A(-t)\alpha^3(t)e^{3\beta(t)} + B(-t)\alpha^2(t)e^{2\beta(t)} +$$

$$+C(-t)\alpha(t)e^{\beta(t)} + D(-t) = 0.$$

В силу линейной независимости степеней x получаем систему уравнений:

$$A(t)e^{2\beta(t)} + A(-t)e^{6\beta(t)} = 0,$$

$$B(t)e^{2\beta(t)} + 3A(-t)\alpha(t)e^{5\beta(t)} + B(-t)e^{4\beta(t)} = 0,$$

$$2\dot{\beta}(t)e^{2\beta(t)} + C(t)e^{2\beta(t)} + 3A(-t)\alpha^2(t)e^{4\beta(t)} +$$

$$+2B(-t)\alpha(t)e^{3\beta(t)} + C(-t)e^{2\beta(t)}, \qquad (2.4)$$

$$\dot{\alpha}(t)e^{\beta(t)} + \alpha(t)\dot{\beta}(t)e^{\beta(t)} + D(t)e^{2\beta(t)} +$$

$$+A(-t)\alpha^3(t)e^{3\beta(t)} + B(-t)\alpha^2(t)e^{2\beta(t)} +$$

$$+C(-t)\alpha(t)e^{\beta(t)} + D(-t) = 0.$$

Умножив первое уравнение системы (2.4) на $e^{-4\beta(t)}$, перепишем его в виде

$$A(-t)e^{2\beta(t)} = -A(t)e^{-2\beta(t)}.$$

Следовательно, $A(t)e^{-2\beta(t)} = a(t)$, где $a(t)$ – произвольная нечетная функция. Итак, $A(t) = a(t)e^{2\beta(t)}$.

Подставляем найденный коэффициент $A(t)$ во второе уравнение системы (2.4). Умножаем полученное после этого уравнение на $e^{-3\beta(t)}$ и преобразовываем к виду

$$B(-t)e^{\beta(t)} - \frac{3}{2}\alpha(t)a(t) = -\left(B(t)e^{-\beta(t)} - \frac{3}{2}\alpha(t)a(t)\right).$$

Отсюда $B(t)e^{-\beta(t)} - \frac{3}{2}\alpha(t)a(t) = b(t)$, где $b(t)$ – произвольная нечетная функция. Следовательно,

$$B(t) = e^{\beta(t)}\left(b(t) + \frac{3}{2}\alpha(t)a(t)\right).$$

Далее, подставляя найденные коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ в третье уравнение системы (2.4) и применяя аналогичные рассуждения, находим коэффициент $C(t) = c(t) + \alpha(t)b(t) - \dot{\beta}(t)$, где $c(t)$ – произвольная нечетная функция. И, наконец, из последнего уравнения системы (2.4) получаем коэффициент

$$D(t) = e^{-\beta(t)}\left(d(t) + \frac{1}{2}\alpha(t)c(t) - \frac{1}{4}\alpha^3(t)a(t) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}(t)\right).$$

Подставляя все найденные выше коэффициенты в уравнение (2.1), получаем уравнение (2.3). Ввиду необходимости и достаточности основного соотношения (2.2) для отражающей функции уравнения (2.1) теорема доказана.

***Следствие* 2.1.** *Функция* (1.1) *является отражающей функцией уравнения Риккати*

$$\dot{x} = B(t)x^2 + C(t)x + D(t)$$

тогда и только тогда, когда это уравнение имеет вид

$$\dot{x} = b(t)e^{\beta(t)}x^2 + \left(c(t) + \alpha(t)b(t) - \dot{\beta}(t)\right)x + \\ + e^{-\beta(t)}\left(d(t) + \frac{1}{2}\alpha(t)c(t) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}\right), \quad (2.5)$$

где $b(t), c(t), d(t)$ *– произвольные непрерывные нечетные функции.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 2.1, если положить функцию $a(t) \equiv 0$.

3 Почти периодические решения почти периодических уравнений Абеля и Риккати

Как следует из леммы 1.1 решения уравнения (2.3) задаются формулой (1.4) с некоторой неизвестной четной функцией $f(t)$. Построим для уравнения (2.3) соответствующее уравнение для функции $f(t)$.

***Лемма* 3.1.** *Для того чтобы функция* (1.4) *была решением уравнения* (2.3) *необходимо, чтобы функция* $f(t)$ *была решением уравнения*

$$\dot{f} = a(t)f^3 + b(t)f^2 + \left(c(t) + \frac{3}{4}\alpha^2(t)a(t)\right)f + \\ + d(t) - \frac{1}{4}\alpha^2(t)b(t). \quad (3.1)$$

Доказательство леммы состоит в непосредственной подстановке функции (1.4) в уравнение (2.3).

Если в уравнении (3.1) положить $a(t) \equiv 0$, то оказывается справедливым

***Следствие* 3.1.** *Для того чтобы функция* (1.4) *была решением уравнения* (2.5) *необходимо, чтобы функция* $f(t)$ *была решением уравнения*

$$\dot{f} = b(t)f^2 + c(t)f + d(t) - \frac{1}{4}\alpha^2(t)b(t). \quad (3.2)$$

***Теорема* 3.1.** *Пусть функции* $a(t), b(t), c(t), d(t), \alpha(t)$ *являются* 2ω*-периодическими, а функция* $\beta(t)$ *– почти периодическая или* 2Ω*-периодическая с иррациональным отношением* ω/Ω. *Если* $f(t)$ *является продолжимым на отрезок* $[-\omega;\omega]$ *решением уравнения* (3.1), *то функция* (1.4) *будет почти периодическим или квазипериодическим решением уравнения* (2.3).

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда правая часть уравнения (3.1) является 2ω-периодической и нечетной по t. Согласно [1, с. 65] все продолжимые на отрезок $[-\omega;\omega]$ решения уравнения (3.1) будут 2ω-периодическими и, значит, $f(t)$ тоже 2ω-периодическая функция.

Учитывая почти периодичность функции $\beta(t)$ или ее периодичность с несоизмеримым периодом по отношению к периоду коэффициентов уравнения (3.1), убеждаемся в том, что (1.4) является почти периодическим или квазипериодическим решением уравнения (2.3). □

***Теорема* 3.2.** *Пусть функции* $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $\alpha(t)$ *являются* 2ω*-периодическими, а функция* $\beta(t)$ *– почти периодическая или* 2Ω*-периодическая с иррациональным отношением* ω/Ω. *Если* $f(t)$ *является продолжимым на отрезок* $[-\omega;\omega]$ *решением уравнения* (3.2), *то функция* (1.4) *будет почти периодическим или квазипериодическим решением уравнения* (2.5).

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 3.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: монография / В.И. Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.
2. *Деменчук, А.К.* Об одном классе почти периодических решений обыкновенных дифференциальных систем / А.К. Деменчук // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 6. – С. 28–30.
3. *Белокурский, М.С.* Периодическая отражающая функция нелинейной квазипериодической дифференциальной системы с двухчастотным базисом / М.С. Белокурский, А.К. Деменчук // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 10. – С. 1356–1360.
4. *Белокурский, М.С.* Периодические отражающие функции линейных дифференциальных систем с несоизмеримыми периодами однородной и неоднородной частей / М.С. Белокурский // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 12–17.
5. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: Университетское, 1986. – 76 с.
6. *Мироненко, В.И.* Классы систем с совпадающими отражающими функциями / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20, № 12. – С. 2173–2176.
7. *Бельский, В.А.* О построении уравнений Абеля, эквивалентных уравнению вида $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$ / В.А. Бельский, В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 55–61.

Поступила в редакцию 06.11.2020.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ЦЕНТРАЛИЗАТОРЕ σ-НИЛЬПОТЕНТНОГО КОРАДИКАЛА σ-СУБНОРМАЛЬНОЙ ПОДГРУППЫ

И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

ON THE CENTRALIZER OF THE σ-NILPOTENT RESIDUAL OF THE σ-SUBNORMAL SUBGROUP

I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, σ является некоторым разбиением множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Группа G называется: σ*-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого i; σ*-нильпотентной*, если каждый главный фактор H/K в G является σ-центральным в G, т. е. $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))$ является σ-примарным. Символ $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ обозначает σ*-нильпотентный корадикал* группы G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп N в G таких, что G/N является σ-нильпотентной группой; $Z_\sigma(G)$ – это σ*-нильпотентный гиперцентр* в G, т. е. произведение всех нормальных подгрупп N в G таких, что либо $N = 1$, либо $N \neq 1$ и каждый главный фактор G ниже N является σ-центральным в G. Подгруппа A в G называется σ*-субнормальной* в G, если имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$, такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной для всех $i = 1,\ldots,n$. В данной статье мы докажем, что если S является σ-субнормальной подгруппой в G и $Z_\sigma(E) = 1$ для каждой подгруппы E в G такой, что $S \leq E$, тогда $C_G(S^{\mathfrak{N}_\sigma}) \leq S^{\mathfrak{N}_\sigma}$.

***Ключевые слова**: конечная группа*, σ*-нильпотентная группа*, σ*-субнормальная подгруппа*, σ*-нильпотентный корадикал конечной группы*, σ*-нильпотентный гиперцентр.*

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, that is, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all $i \neq j$. The group G is said to be: σ*-primary* if G is a σ_i-group for some i; σ*-nilpotent* if every chief factor H/K of G is σ-central in G, that is, $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))$ is σ-primary. The symbol $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ denotes the σ*-nilpotent residual* of G, that is, the the intersection of all normal subgroups N of G such that G/N is σ-nilpotent; $Z_\sigma(G)$ is the σ*-nilpotent hypercentre* of G, that is, the product of all normal subgroups N of G such that either $N = 1$ of $N \neq 1$ and every chief factor of G below N is σ-central in G. A subgroup A of G is said to be σ*-subnormal* in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ is σ-primary for all $i = 1,\ldots,n$. In this paper, we prove that if S be a σ-subnormal subgroup of G and $Z_\sigma(E) = 1$ for every subgroup E of G such that $S \leq E$, then $C_G(S^{\mathfrak{N}_\sigma}) \leq S^{\mathfrak{N}_\sigma}$.

***Keywords**: finite group*, σ*-nilpotent group*, σ*-subnormal subgroup*, σ*-nilpotent residual of a finite group*, σ*-nilpotent hypercentre.*

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Если n – целое число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

В дальнейшем σ является некоторым разбиением множества $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

По аналогии с обозначением $\pi(n)$, мы пишем $\sigma(n)$ для обозначения множества

$$\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\};\ \sigma(G) = \sigma(|G|).$$

Группа G называется [1], [2]: σ*-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого i; σ*-nilpotent*, если каждый главный фактор H/K группы G является σ-центральным в G, т. е. $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; σ*-разрешимой*, если каждый главный фактор группы G является σ-примарным.

© *Дергачева И.М.*, *Шабалина И.П.*, *Задорожнюк Е.А.*, 2020

Если $K \le H$ являются нормальными подгруппами в G и $C \le C_G(H/K)$, то можно задать полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C)$, полагая $(hK)^{gC} = g^{-1}hgK$ для всех $hK \in H/K$ и $gC \in G/C$. Следуя [3], мы говорим, что главный фактор H/K в G является $\mathfrak{F}$-*центральным* в G, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. В частности говорят, что H/K является σ-*центральным* в G, если $(H/K) \rtimes (G/C)$ является σ-примарной группой.

Символ $Z_\sigma(G)$ обозначает произведение всех нормальных подгрупп N группы G таких, что либо $N = 1$, либо $N \ne 1$ и каждый главный фактор группы G ниже N является σ-центральным в G.

Подгруппа A группы G называется σ-*субнормальной* в G (Скиба [1], [14]), если в G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_n = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной группой для всех $i = 1, \ldots, n$.

Попутно отметим, что подгруппа A субнормальна в G тогда и только тогда, когда она является σ^1-субнормальной в G, где $\sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ (здесь используются обозначения работ [2], [5], [6]).

σ-субнормальные подгруппы оказались весьма полезными при анализе многих вопросов теории групп (см., в частности, недавние статьи [1], [2], [4]–[8]). В данной статье докажем следующий результат, обобщающий известный результат Шенкмана о субнормальных подгруппах.

Теорема. *Пусть S – σ-субнормальная подгруппа в G. Если $Z_\sigma(E) = 1$ для каждой подгруппы E группы G такой, что $S \le E$, то*

$$C_G(S^{\mathfrak{N}_\sigma}) \le S^{\mathfrak{N}_\sigma}.$$

В этой теореме символ $S^{\mathfrak{N}_\sigma}$ обозначает σ-нильпотентный корадикал группы S, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп N группы S таких, что секция S/N является σ-нильпотентной.

Заметим, что если S является подгруппой в G такой, что $C_G(S) = 1$, то $Z_\infty(E) = 1$ для каждой подгруппы E в G, содержащая S. Следовательно, в случае, когда $\sigma = \sigma^1$, из нашей теоремы мы получаем следующий известный результат Шенкмана.

Следствие (Шенкман [9, теорема 9.21]). *Предположим, что S – субнормальная подгруппа в G. Если $Z(G) = 1$, то $C_G(S^{\mathfrak{N}}) \le S^{\mathfrak{N}}$.*

В этом следствии $S^{\mathfrak{N}}$ обозначает нильпотентный корадикал группы S, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп N группы S таких, что секция S/N нильпотентна.

1 Некоторые предварительные результаты

Мы используем $\mathfrak{N}_\sigma$ для обозначения класса всех σ-нильпотентных групп.

Лемма 1.1 [1, лемма 2.5]. *Класс $\mathfrak{N}_\sigma$ замкнут относительно взятия прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Более того, если E является нормальной подгруппой в G и $E/E \cap \Phi(G)$ является σ-нильпотентной группой, тогда E является σ-нильпотентной.*

Лемма 1.2. (1) *Если N – нормальная подгруппа в G, тогда $(G/N)^{\mathfrak{N}_\sigma} = G^{\mathfrak{N}_\sigma}N/N$.*

(2) *Если E является подгруппой в G, тогда $E^{\mathfrak{N}_\sigma} \le G^{\mathfrak{N}_\sigma}$.*

Доказательство. (1) Это утверждение следует из леммы 1.1 и леммы 1 книги [10].

(2) Так как $\mathfrak{N}_\sigma$ является наследственной формацией по лемме 1.1, то следует из изоморфизма $EG^{\mathfrak{N}_\sigma}/G^{\mathfrak{N}_\sigma} \simeq E/(E \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})$. □

Пусть $D = M \rtimes A$ и $R = N \rtimes B$. Тогда пары (M, A) и (R, B) называются *эквивалентными*, если существуют изоморфизмы $f: M \to N$ и $g: A \to B$ такие, что $f(a^{-1}ma) = g(a^{-1})f(m)g(a)$ для всех $m \in M$ и $a \in A$.

Следующая лемма известна (см., например, лемму 3.27 в [3]), и она может быть доказана путем прямой проверки.

Лемма 1.3. *Пусть $D = M \rtimes A$ и $R = N \rtimes B$. Если пары (M, A) и (R, B) эквивалентны, тогда $D \simeq R$.*

Лемма 1.4. *Пусть N, M и $K < H \le G$ – нормальные подгруппы в G, где H/K является главным фактором в G.*

(1) *Если $N \le K$, то*

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \simeq ((H/N)/(K/N)) \rtimes$$
$$\rtimes ((G/N)/C_{G/N}((H/H)/(K/N)).$$

(2) *Если T/L является главным фактором группы G и H/K и T/L G-изоморфны, тогда $C_G(H/K) = C_G(T/L)$ и*

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \simeq (T/L) \rtimes (G/C_G(T/L)).$$

(3) $(MN/N) \rtimes (G/C_G(MN/N)) \simeq$

$$\simeq (M/M \cap N) \rtimes (G/C_G(M/M) \cap N)).$$

Доказательство. (1) Ввиду G-изоморфизмов $H/K \simeq (H/N)/(K/N)$ и $G/C_G(H/K) \simeq$ $\simeq (G/N)/(C_G(H/K)/N)$, пары

$$(H/K, G/C_G(H/K)) \text{ и}$$
$$((H/N)/(K/N), (G/N)/C_{G/N}((H/N)/(K/N)))$$

эквивалентны. Следовательно, утверждение (1) является следствием леммы 1.3.

(2) Прямая проверка показывает, что $C = C_{G/N}(H/K) = C_G(T/L)$ и что пары

$$(H/K, G/C) \text{ и } (T/L, G/C)$$

эквивалентны. Следовательно, утверждение (2) также является следствием леммы 1.3.

(3) Это следует из *G*-изоморфизма $MN / N \simeq \simeq M / M \cap N$ и утверждения (2). □

***Лемма* 1.5** [1, лемма 2.6]. (1) *Если L и E являются подгруппами в G и L является σ -субнормальной в G, то* $L \cap E$ *является σ -субнормальной в E*;

(2) *Если подгруппы L и E являются σ -нильпотентными и σ -субнормальными в G, тогда подгруппа* $\langle L, E\rangle$ *является σ -субнормальной в G и эта подгруппа σ -нильпотентна.*

***Лемма* 1.6.** *Пусть N – нормальная подгруппа в G.*

(1) *Если* G / N *является σ -нильпотентной группой и U является минимальным дополнением к N в G, тогда U также является σ -нильпотентной.*

(2) *Если U является подгруппой в G такой, что U является σ -нильпотентна и* $NU = G$, *тогда* $Z := U \cap C_G(N)$ *– нормальная подгруппа в G такая, что* $Z \le Z_\sigma(G)$.

Доказательство. (1) Это следует из леммы 1.1 и того факта, что $U \cap N \le \Phi(U)$ ввиду минимальности *U*.

(2) Поскольку $G = NU$, *Z* является нормальной подгруппой в *G*. Более того, если H / K – произвольный главный фактор группы *U* ниже *Z*, то H / K является σ -центральным в *U* и H / K является главным фактором *G*, так как $N \le C_G(Z)$. Также мы имеем $N \le C_G(H / K)$ и поэтому

$$C_G(H / K) = N(C_G(H / K) \cap U) = NC_U(H / K),$$

что влечет

$$G / C_G(H / K) = NU / NC_U(H / K) \simeq$$
$$\simeq U / (U \cap NC_U(H / K)) =$$
$$= U / (C_U(H / K)(U \cap N) = U / (C_U(H / K).$$

Тогда пары

$$(H / K, U / C_U(H / K))\text{è}\,(H / K, G / C_G(H / K))$$

эквивалентны, поэтому H / K является σ -центральным в *G* по лемме 1.4. Следовательно, $Z \le Z_\sigma(G)$. □

***Теорема* 1.7.** *Для каждого разбиения σ множества* $\mathbb{P}$ *имеет место*

$$C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \le Z_\sigma(G)G^{\mathfrak{N}_\sigma}.$$

Доказательство. Пусть *U* – минимальное добавление к $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ в *G*. Из леммы 1.1 следует, что $T / C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \simeq U / (U \cap C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}))$ является σ -нильпотентной группой, поэтому

$$T^{\mathfrak{N}_\sigma} \le C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}).$$

С другой стороны, $T^{\mathfrak{N}_\sigma} \le G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ по лемме 1.2 (2). Следовательно, $T / (C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})$ является σ -нильпотентной группой и, следовательно, ввиду леммы 1.6 (1), для некоторой σ -нильпотентной подгруппы *H* группы *T* мы имеем

$$T = (C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})H,$$

следовательно,

$$C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) = (C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})(C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap H),$$

так как $C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \le T.$ Тогда

$$G = G^{\mathfrak{N}_\sigma}K \le G^{\mathfrak{N}_\sigma}T = G^{\mathfrak{N}_\sigma}(C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap G^{\mathfrak{N}_\sigma})H = G^{\mathfrak{N}_\sigma}H$$

и, таким образом, $G = G^{\mathfrak{N}_\sigma}H.$ Следовательно, $C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap H \le Z_\sigma(G)$ по лемме 1.6 (2), поэтому $C_G(G^{\mathfrak{N}_\sigma}) \le Z_\sigma(G)G^{\mathfrak{N}_\sigma}$. □

2 Доказательство основного результата

Предположим, что эта теорема не верна, и пусть *G* является контрпримером с минимальной $|G| + |S|$. Тогда $S < G$ по теореме 1.7. По гипотезе, есть цепочка подгрупп

$$S = S_0 \le S_1 \le \cdots \le S_n = G,$$

так что либо $S_{i-1} \trianglelefteq S_i$, либо $S_i / (S_{i-1})_{S_i}$ является σ -примарной для всех $i = 1, \ldots, n.$ Мы можем предполагать без ограничения общности, что $M := S_{n-1} < G,$ так как $S < G.$ Пусть $D = S^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и $C = C_G(D).$ Тогда $C \cap S \le Z_\sigma(S)D = D$ по теореме 1.7 и гипотезе.

(1) $C_E(D) \le D$ *для каждой собственной подгруппы E группы G, содержащей S.*

Гипотеза справедлива для (W, S) для каждой подгруппы *W* группы *G*, содержащей *S* по лемме 1.5 (1), поэтому мы имеем $C_E(D) \le D$ ввиду выбора группы *G*. Заметим, что $S \le N_G(C),$ так как $S \le N_G(D)$ и поэтому *SC* является подгруппой в *G* и, следовательно, $SC = G,$ поскольку в противном случае $C \le C_E(D) \le D.$

(2) $D \trianglelefteq G$ (Поскольку *D* является характеристикой в *S*, это непосредственно следует из утверждения (1)).

(3) $S = M$ *– максимальная подгруппа в G и* $G / D = (CD / D) \rtimes (M / D).$

Пусть $S \le V,$ где *V* – максимальная подгруппа в *G*. Тогда $C_V(D) \le D$ соглано пункту (1), поэтому $V = S(V \cap C) = SC_V(D) \le SD = S$ и, следовательно, $S = V = M$. Наконец заметим, что из $C \cap S \le D$ следует, что

$$G / D = (CD / D) \rtimes (M / D).$$

(4) *S является нормальным в G. Следовательно,* G / S *является циклической группой простого порядка.*

Предположим, что *S* не является нормальной в *G*. Тогда, по утверждению (3),

$$G / S_G = G / M_G$$

является σ_i-группой для некоторого i и поэтому $D \le G^{\mathfrak{N}_\sigma} \le S_G$, где D является нормальной в G по пункту (2). Ясно, что G/D является σ-разрешимой группой. Следовательно,

$$G/D = (CD/D) \rtimes (M/D),$$

где M/D – максимальная подгруппа G/D по пункту (3). Тогда CD/D является минимальной нормальной подгруппой в G/D. Следовательно, CD/D является σ-примарной группой поскольку G/D является σ-разрешимой. С другой стороны, M/D является σ-субнормальной σ-нильпотентной подгруппой в G/D. Следовательно G/D является σ-нильпотентной по лемме 1.5 (2). Но тогда $G^{\mathfrak{N}_\sigma} = D$ и поэтому $C \le D$ по теореме 1.7, противоречие. Поэтому S нормальна в G и поэтому G/S является циклической группой простого порядка по утверждению (3). Следовательно, мы имеем (4).

Заключительное противоречие. Из утверждений (1) и (4) следует, что

$$G/D = (CD/D) \rtimes (S/D) = (CD/D) \times (S/D)$$

и CD/D является циклической группой. Но тогда G/D является σ-нильпотентной группой и поэтому $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$, следовательно,

$$C \le Z_\sigma(G) G^{\mathfrak{N}_\sigma} = G^{\mathfrak{N}_\sigma} = D,$$

вопреки нашему предположению о паре (G, S). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – № 436. – P. 1–16.

2. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – № 495. – P. 114–129.

3. *Shemetkov*, *L.A.* Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow: Nauka, 1989.

4. *Скиба*, *А.Н.* О σ-свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

5. *Skiba*, *A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – № 550. – P. 69–85.

6. *Skiba*, *A.N.* On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – № 3. – P. 35–47.

7. *Beidleman*, *J.C.* On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – № 20. – P. 955–964.

8. *On σ-subnormality criteria in finite σ-soluble groups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4

9. *Schenkman*, *E.* On the tower theorem for finite groups / E. Schenkman // Pac. J. Math. – 1955. – № 5. – P. 995–998.

10. *Shemetkov*, *L.A.* Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, 1978.

Поступила в редакцию 31.10.2020.

Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020
МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О σ_i-ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ σ-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

Н.С. Косенок[1], **В.М. Селькин**[2]

[1]*Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации*, *Гомель*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

ON THE σ_i-LENGTH OF A FINITE σ-SOLUBLE GROUP

N.S. Kosenok[1], **V.M. Selkin**[2]

[1]*Belarusian Trade and Economic University of Consumer Cooperatives*, *Gomel*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ и G – конечная группа. G называется σ-разрешимой, если каждый главный фактор H/K G – это σ_i-группа для некоторого $i = i(H/K)$. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема. (i) Если G – π-отделимая группа, H – нильпотентная холлова π-подгруппа и E – π-дополнение группы G со свойством $EX = XE$ для некоторой подгруппы X в H такой, что $H' \le X \le \Phi(H)$, тогда $l_\pi(G) \le 1$.

(ii) Если G – σ-разрешимая группа и $\{H_1, \ldots, H_t\}$ – виландтов σ -базис группы G такой, что H_i перестановочна с $H_{j'}$ для всех i, j, тогда $l_{\sigma_i}(G) \le 1$ для всех i.

(iii) Если G – σ -разрешимая группа и $\{H_1, \ldots, H_t\}$ – виландтов σ-базис группы G такой, что H_i перестановочна с $\Phi(H_j)$ для всех i, j, тогда $l_{\sigma_i}(G) \le 1$ для всех i.

(iv) Если $l_\pi(G) \le 1$, то $QX = XQ$ для каждой характеристической подгруппы X группы H и любой силовской подгруппы Q в G такая, что $HQ = QH$.

(v) Если G – σ-разрешимая группа с $l_{\sigma_i}(G) \le 1$ для всех i и $\{H_1, \ldots, H_t\}$ является σ-базисом G, тогда каждая характеристическая подгруппа группы H_i перестановочна с каждой характеристической подгруппой группы H_j.

Ключевые слова: *конечная группа*, σ*-разрешимая группа*, π*-разделимая группа*, π*-длина холловой подгруппы*.

Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$ and G a finite group. G is said to be σ-soluble if every chief factor H/K of G is a σ_i-group for some $i = i(H/K)$. We prove the following

Theorem. (i) If G is π-separable, H is a nilpotent Hall π-subgroup and E a π-complement of G such that $EX = XE$ for some subgroup X of H such that $H' \le X \le \Phi(H)$, then $l_\pi(G) \le 1$.

(ii) If G is σ-soluble and $\{H_1, \ldots, H_t\}$ is a Wielandt σ-basis of G such that H_i permutes with $H_{j'}$ for all i, j, then $l_{\sigma_i}(G) \le 1$ for all i.

(iii) If G is σ-soluble and $\{H_1, \ldots, H_t\}$ is a Wielandt σ-basis of G such that of H_i permutes with $\Phi(H_j)$ for all i, j, then $l_{\sigma_i}(G) \le 1$ for all i.

(iv) If $l_\pi(G) \le 1$, then $QX = XQ$ each characteristic subgroup X of H and any Sylow subgroup Q of G such that $HQ = QH$.

(v) If G is σ-soluble with $l_{\sigma_i}(G) \le 1$ for all i and $\{H_1, \ldots, H_t\}$ is a σ-basis of G, then each characteristic subgroup of H_i permutes with each characteristic subgroup of H_j.

Keywords: *finite group*, σ*-soluble group*, π*-separable group*, π*-length*, *Hall subgroup*.

1 The concepts and results

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, $\mathbb{P}$ is the set of all primes, $\pi = \{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n; as usual, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the order of G.

In what follows, σ is some partition of $\mathbb{P}$, that is, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all $i \ne j$.

A group G is said to be σ-*soluble* [1]–[3] if every chief factor H/K of G is a σ_i-group for some $i = i(H/K)$. In particular, G is said to be

© *Kosenok N.S.*, *Selkin V.M.*, 2020

π*-separable* if every chief factor of G is either a π-group or a π'-group.

A set $\mathcal{H}$ of subgroups of G is said to be a *complete Hall* σ*-set* of G [1]–[3] if every member $\neq 1$ of $\mathcal{H}$ is a Hall σ_i-subgroup of G for some $\sigma_i \in \sigma$ and $\mathcal{H}$ contains exactly one Hall σ_i-subgroup of G for every $i \in I$ such that $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing$.

Note that if G is σ-soluble, then G has a σ-*basis* [1], that is, a complete Hall σ-set $\{H_1, \ldots, H_t\}$ such that $H_iH_j = H_jH_i$ for all i, j. Finally, recall that a *Wielandt* σ-basis of G is a σ-basis $\mathcal{H}$ of G such that every member of $\mathcal{H}$ is nilpotent.

Every π-separable group G has a series

$$1 = P_0(G) \leq M_0(G) < P_1(G) <$$
$$< M_1(G) < \cdots < P_t(G) \leq M_t(G) = G$$

such that

$$M_i(G)/P_i(G) = O_{\pi'}(G/P_i(G)) \quad (i = 0, 1, \ldots, t)$$

and $P_{i+1}(G)/M_i(G) = O_\pi(G/M_i(G)) \quad (i = 1, \ldots, t)$.

The number t is called the π*-length* of G and denoted by $l_\pi(G)$ [4, p. 249].

In this note we prove the following

Theorem. (i) *If G is* π*-separable*, *H is a nilpotent Hall* π*-subgroup and E a* π*-complement of G such that* $EX = XE$ *for some subgroup X of H such that* $H' \leq X \leq \Phi(H)$, *then* $l_\pi(G) \leq 1$.

(ii) *If G is* σ*-soluble and* $\{H_1, \ldots, H_t\}$ *is a Wielandt* σ*-basis of G such that* H_i *permutes with* $H_{j'}$ *for all i*, *j*, *then* $l_{\sigma_i}(G) \leq 1$ *for all i*.

(iii) *If G is* σ*-soluble and* $\{H_1, \ldots, H_t\}$ *is a Wielandt* σ*-basis of G such that of* H_i *permutes with* $\Phi(H_j)$ *for all i*, *j*, *then* $l_{\sigma_i}(G) \leq 1$ *for all i*.

(iv) *If* $l_\pi(G) \leq 1$, *then* $QX = XQ$ *each characteristic subgroup X of H and any Sylow subgroup Q of G such that* $HQ = QH$.

(v) *If G is* σ*-soluble with* $l_{\sigma_i}(G) \leq 1$ *for all i and* $\{H_1, \ldots, H_t\}$ *is a* σ*-basis of G*, *then each characteristic subgroup of* H_i *permutes with each characteristic subgroup of* H_j.

***Corollary* 1.1.** *Suppose that G is p-soluble*, *and let P be a Sylow p-subgroup and E a p-complement of G. If* $E\Phi(P) = \Phi(P)E$, *then* $l_p(G) \leq 1$.

***Corollary* 1.2.** *Suppose that G is p-soluble*, *and let P be a Sylow p-subgroup. Then* $l_p(G) \leq 1$ *if and only if* $QP' = P'Q$ *for each Sylow subgroup Q of G such that* $PQ = QP$.

***Corollary* 1.3.** *Let G be soluble*, *and let P be a Sylow p-subgroup. Then* $l_p(G) \leq 1$ *if and only if* $QP' = P'Q$ *for each Sylow subgroup Q of G such that* $PQ = QP$.

***Corollary* 1.4** (Huppert [5, VI, Satz 6.11]). *Suppose that G is soluble*, *and let* $P_1, \ldots, P_t$ *be a Sylow basis of G. Then the following hold*:

(i) If $P_i'P_j = P_jP_i'$ for all *i*, *j*, *then* $l_p(G) \leq 1$ for all *p*;

(ii) *If* $l_p(G) \leq 1$ *for all p*, *then every characteristic subgroup of* P_i *permutes with each characteristic subgroup of* P_j.

2 Proof of the result

Let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$ be non-empty formations. Then the *Gaschütz product* $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ of these formations is the class of all groups G such that $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. It is well-known that such an operation on the set of all non-empty formations is associative (W. Gaschütz). The symbol $\mathfrak{M}^t$ denotes the product of t copies of $\mathfrak{M}$.

We shall need the following well-known theorem of Gaschütz and Shemetkov [6, Corollary 7.13].

***Lemma* 2.1**. *The product of any two non-empty saturated formations is also a saturated formation*.

***Lemma* 2.2.** *The class* $\mathcal{F}$ *of all* π*-separable groups G with* $l_\pi(G) \leq t$ *is a saturated formation*.

Proof. It is not difficult to show that for any non-empty set $\omega \subseteq \mathbb{P}$ the class $\mathfrak{G}_\omega$ of all ω-groups is a saturated formation and that $\mathfrak{F} = (\mathfrak{G}_{\pi'} \circ \mathfrak{G}_\pi)^t \circ \mathfrak{G}_{\pi'}$. Hence $\mathfrak{F}$ is a saturated formation by Lemma 2.1. □

Proof of Theorem. (i) Suppose that this is false. Then $H \neq 1$.

(1) *For every minimal normal subgroup R of G we have* $l_\pi(G/R) \leq 1$.

Assume that this is false. Since G is π-separable, R is either a p' -group or a p-group. In the former case we have $H \simeq HR/R$, so

$$(HR/R)' = H'R/R$$

and $\Phi(H)R/R = \Phi(HR/R)$. Hence

$$(HR/R)' \leq XR/R \leq \Phi(HR/R),$$

where HR/R is a Hall π-subgroup of G/R. In the second case we have $R \leq H$, so

$$H'R/R = (H/R)' \leq$$
$$\leq XR/R \leq \Phi(H)R/R = \Phi(H/R).$$

Finally, ER/R is a π-complement of G/R and also we have

$$(ER/R)(XH/R) = EXH/R =$$
$$= XEH/R = (XR/R)(ER/R).$$

Therefore, the hypothesis holds for G/R and so we have (1) by the choice of G.

(2) *R is the unique minimal normal subgroup of G and* $R \nleq \Phi(G)$. *Hence* $C_G(R) \leq R \leq O_\pi(G) \leq H$.

The first assertion of (2) follows from Claim (1) and Lemma 2.2. Moreover, if R is a π'-group, then

$$l_\pi(G) = l_\pi(G/R) \leq 1.$$

Hence R is a π-group. Therefore, since $C_G(R)$ is normal in G, we have (2).

(3) *$R \cap X$ is normal in G.* Since

$$R \cap XE \leq O_{\pi}(XE)$$

by Claim (1), $R \cap XE = R \cap X$ is normal in XE. Hence $E \leq N_G(R \cap X)$. On the other hand, since $H' \leq X \leq H$ by hypothesis, X is normal in HP, so $R \cap X$ is normal in H. Therefore $R \cap X$ is normal in $G = HE$.

*Final contradiction fo*r (i). The minimality of R implies that either $R \cap X = 1$ or $R \cap X = R$. In the former case we have $X \leq C_G(R)$ since X is normal in H and so $X = 1$. But then H is abelian since by hypothesis we have $H' \leq X$. Therefore, since $C_G(R) \leq R \leq H$ by Claim (2), $R = H$ is normal in G. But then $l_{\pi}(G) \leq 1$, which contradicts the choice of G. Therefore we have $R \leq X \leq \Phi(H)$ and so $R \leq \Phi(G)$, contrary Claim (2). This final contradiction completes the proof of Part (i).

(ii) Since $\{H_1, \ldots, H_t\}$ is a Wielandt σ-basis of G, then H_i is nilpotent and

$$E = H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_t$$

is a σ_i-complement of G. Moreover,

$$E\Phi(H_i) = \Phi(H_i)E$$

since $\Phi(H_i)H_j = H_j\Phi(H_i)$ for all j by hypothesis. Therefore $l_{\sigma_i}(G) \leq 1$ for all i.

(iii) See the proof of (ii).

(iv) Suppose that this is false. Then $H \neq 1$ and Q is a q-group for some prime $q \notin \pi$. Suppose that $HQ < G$. Then $l_{\pi}(HQ) \leq 1$ by Lemma 2.2, so $QX = XQ$ by the choice of G. Hence $G = HQ$.

Suppose that $O_{\pi'}(G) \neq 1$ and let R be a minimal normal subgroup of G contained in $O_{\pi'}(G)$. Then $R \leq Q$ and $l_{\pi}(G/R) = l_{\pi}(G) \leq 1$. Therefore the choice of G implies that

$$QX/R = (Q/R)(XR/R) = (X/R)(Q/R) = XQ/R$$

and so $QX = XQ$, which contradicts the choice of G. Therefore $O_{\pi'}(G) = 1$ and hence H is normal in G since $l_{\pi}(G) \leq 1$ by hypothesis. But then X is normal in G since it is characteristic in H. Hence $QX = XQ$. This contradiction completes the proof of Part (ii).

(v) Lemma 2.2 implies that

$$l_{\pi}(H_iH_j) \leq l_{\pi}(G) \leq 1,$$

so in the case when $H_iH_j < G$, the choice of G implies that $V_iV_j = V_jV_i$. Therefore $H_iH_j = G$. Hence, by Part (iii), $V_iH_j = H_jV_i$ and $V_jH_i = H_iV_j$, so

$$V_iH_j \cap V_jH_i = V_i(H_j \cap V_jH_i) =$$
$$= V_i(H_j \cap H_i)V_j = V_iV_j = V_jV_i.$$

The theorem is proved.

REFERENCES

1. *Skiba*, *A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Application. – 2016. – Vol. 15, № 5. – P. 1650085. – DOI: 10.1142/S0219498816500857.

2. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – № 495. – P. 114–129.

3. *Skiba*, *A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – № 550. – P. 69–85.

4. *Robinson*, *D.J.S.* A Course in the Theory of Groups / D.J.S. Robinson. – Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.

5. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

6. *Shemetkov*, *L.A*. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow: Nauka, 1989.

7. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1992.

Поступила в редакцию 11.11.2020.

УДК 511.2

О ЧИСЛЕ ТОЧЕК НА ОДНОМ КЛАССЕ КРИВЫХ В КОЛЬЦЕ ВЫЧЕТОВ

В.И. Мурашко[1], **А.А. Печёнкин**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Московский Физико-технический институт*

ON THE NUMBER OF POINTS ON ONE CLASS OF CURVES IN A RING OF RESIDUES

V.I. Murashka[1], **A.A. Piachonkin**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Moscow Institute of Physics and Technology*

Найдено число точек на произвольной кривой вида $x^m \equiv y^k (mod\, n)$. Введено понятие m/k *-ичного вычета* (рационального степенного вычета). Найдено количество рациональных степенных вычетов по модулю произвольного натурального числа. В качестве следствия получен классический результат о количестве квадратичных вычетов по составному модулю.

Ключевые слова: *алгебраическая кривая*, *число точек на алгебраической кривой*, *степенной вычет*, *первообразный корень*, *индексы по модулю* 2^α.

The number of points on a curve $x^m \equiv y^k (mod\, n)$ is calculated. The concept of m/k *-power residue* (rational power residue) is introduced. Let *n* be a natural number. The number of rational power residues modulo *n* is calculated. As a corollary the classic result on the number of quadratic residues is obtained.

Keywords: algebraic curve, number of points on an algebraic curve, power residue, primitive root, indices modulo 2^α.

Введение

Во всей работе через *n*, *k* и *m* мы обозначаем некоторые натуральные числа. Напомним, что число *a* называется *m-ичным* (*степенным*) *вычетом* по модулю *n*, если разрешимо сравнение $x^m \equiv a\ (mod\, n)$. Первое систематическое изучение квадратичных вычетов было произведено К. Гауссом в его работе «Арифметичские исследования», 1801, [1]. В 1996 году W. Stangl в работе [2] вычислил количество *квадратичных вычетов* по модулю *n*. В работе [3] была получена формула для числа *кубических вычетов* по модулю произвольного натупального числа. Наконец, в 2010 году М.А. Королёв в работе [4] предложил формулу для количества *m-ичных вычетов* по модулю *n*.

Заметим, что задача о числе степенных вычетов совпадает с задачей о количестве различных решений сравнения $x^m - y \equiv 0\,(mod\, n)$. Таким образом, в упомянутых выше работах рассматривался частный случай задачи о количестве различных решений сравнения

$$f(x_1,...,x_k) \equiv 0\ (mod\, n),$$

где $f(x_1,...,x_k)$ – многочлен от *k* переменных с целыми коэффициентами. Другим ярким примером данной задачи является задача о количестве точек на эллиптической кривой, оценка числа которых по простому модулю была дана Х. Хассе в 1936 году. Отметим также, что в работе [5] изучалось количество точек на модулярных гиперболах.

Ввиду этого, для $I = \{i_1,...,i_t\} \subseteq \{1,...,k\}$ через $R_{f,I}(n)$ (соотв. $R^*_{f,I}(n)$) обозначим количество комбинаций вычетов $(y_1,...,y_t)\ (mod\, n)$, таких что сравнение $f(x_1,...,x_k) \equiv 0 (mod\, n)$ имеет решение при $x_{i_1} \equiv y_1,...,x_{i_t} \equiv y_t\,(mod\, n)$ (соотв. таких, что $(y_j, n) = 1\ \ \forall j \in \{1,...,t\}$). Если $I = \{1,...,k\}$, то положим $R_{f,I}(n) = R_f(n)$ и $R^*_{f,I}(n) = R^*_f(n)$.

В данной работе нас будет интересовать число обобщённых степенных вычетов в смысле следующего определения:

Определение. *Число a является m / k-ичным вычетом по модулю n, если разрешимо сравнение вида* $x^m \equiv a^k\,(mod\, n)$.

Другими словами, задача о количестве m/k вычетов есть задача о числе различных значений, которые может принимать вторая координата точек на кривой $x^m - y^k \equiv 0\,(mod\, n)$, то есть необходимо вычислить величину $R_{x^m - y^k,\{2\}}(n)$.

1 Мультипликативность основных функций

Напомним, что $(q_1,...,q_k)$ – НОД чисел $q_1,...,q_k$, $[q_1,...,q_k]$ – НОК чисел $q_1,...,q_k$.

© *Мурашко В.И., Печёнкин А.А.*, 2020

***Теорема* 1.1.** *Пусть* $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ *– каноническое разложение числа n. Тогда функции* $R_{f,I}(n)$ *и* $R^*_{f,I}(n)$ *являются мультипликативными функциями, то есть справедливы следующие равенства*

$$R_{f,I}(n) = \prod_{i=1}^{k} R_{f,I}(p_i^{\alpha_i}), \quad R^*_{f,I}(n) = \prod_{i=1}^{k} R^*_{f,I}(p_i^{\alpha_i}).$$

Доказательство. Сначала докажем, что $R_{f,I}(n)$ является мультипликативной функцией. Рассмотрим сравнение

$$f(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \,(mod\, n). \qquad (1.1)$$

Предположим, что $n = n_1 \cdot n_2$, $(n_1, n_2) = 1$. Тогда каждому решению сравнения (1.1) по модулю *n* ставятся в соответствие решения аналогичных сравнений по модулям n_1 и n_2 соответственно. При этом, если какие-то координаты двух решений по модулю *n* совпадают, то очевидно, что эти же координаты совпадают у полученных решений и по модулю n_1, и по модулю n_2. Поэтому имеем

$$R_{f,I}(n) \le R_{f,I}(n_1) \cdot R_{f,I}(n_2).$$

С другой стороны, пусть $y_1, \dots, y_k$ – решение аналогичного (1.1) сравнению по модулю n_1, а $z_1, \dots, z_k$ – по модулю n_2. Так как *f* – многочлен, то из бинома Ньютона следует, что значения *f* по модулю *m* сравнимы на наборах, сравнимых по модулю *m* аргументов. Согласно Китайской теореме об остатках, найдется единственное решение $x_1, \dots, x_k$ сравнения (1.1), такое что

$$\begin{cases} x_1 \equiv y_1 (mod\, n_1) \\ x_1 \equiv z_1 (mod\, n_2) \end{cases} \dots \begin{cases} x_k \equiv y_k (mod\, n_1) \\ x_k \equiv z_k (mod\, n_2). \end{cases}$$

Пусть у двух решений сравнения (1.1) Y_1 и Y_2 по модулю n_1 соответвующие координаты с индексами из *I* совпадают. Аналогично и для решений Z_1 и Z_2 по модулю n_2. Тогда из выше доказанного следует, что у соответсвующих решений X_1 и X_2 сравнения (1.1) по модулю *n* соответствующие координаты с индексами из *I* совпадают. Если же хотя бы одна из координат с индексами из *I* не совпадает у Y_1 и Y_2 или у Z_1 и Z_2, то координата с тем же индексом у X_1 и X_2 также не совпадает. Следовательно, имеем

$$R_{f,I}(n) \ge R_{f,I}(n_1) \cdot R_{f,I}(n_2).$$

Итак, $R_{f,I}(n) = R_{f,I}(n_1) \cdot R_{f,I}(n_2)$. Доказательство того факта, что $R^*_{f,I}(n)$ является мультипликативной функцией, проводится аналогично с учетом того факта, что $(x, n) = 1$ тогда и только тогда, когда $(x, n_1) = 1$ и $(x, n_2) = 1$. □

***Следствие* 1.1.** *Функции* $R_{f(x_1,\dots,x_k)}(n)$ *и* $R^*_{f(x_1,\dots,x_k)}(n)$ *являются мультипликативными.*

Доказательство. Следует из теоремы 1.1 при $I = \{1, \dots, k\}$. □

Через

$$s_{f(x)}(n) = R_{f(x)-y,\{2\}}(n)$$

будем обозначать число различных значений многочлена *f*(*x*) по модулю *n*. Аналогично через

$$s^*_{f(x)}(n) = R^*_{f(x)-y,\{2\}}(n)$$

будем обозначать число различных значений многочлена *f*(*x*) по модулю *n*, взаимно простых с *n*.

***Следствие* 1.2.** *Функции* $s_{f(x)}(n)$ *и* $s^*_{f(x)}(n)$ *являются мультипликативными.*

Доказательство. Следует из теоремы 1.1. □

2 Вычисление $R^*_{f,I}(p^\alpha)$

***Определение* 2.1** [6, гл. 6, с. 92–93]. *Первообразным корнем по модулю n называется число a, такое что порядок a равен* $\varphi(n)$. *Т. е.* $\forall b$: $(b, n) = 1 \;\; \exists \;\; i \in \mathbb{N}$: $a^i \equiv b \,(mod\, n)$.

Теорема о существовании первообразного корня [6, гл. 6, с. 105]. *Первообразные корни существуют только по модулю* $2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$, *где p – любое нечётное простое.*

***Лемма* 2.1.** *Верны следующие тождества*

$$R_{im-jk}(n) = n \cdot (m, k, n) \qquad (2.1)$$

$$R_{im-jk,\{2\}}(n) = \frac{n \cdot (m, k, n)}{(m, n)}. \qquad (2.2)$$

Доказательство. Имеем

$$im \equiv jk \,(mod\, n). \qquad (2.3)$$

Пусть $d = (m, k, n)$, $m = m_1 \cdot d$, $k = k_1 \cdot d$. Тогда имеем

$$im \equiv jk \,(mod\, n) \Leftrightarrow im_1 \equiv jk_1 \left(mod\, \frac{n}{d} \right). \qquad (2.4)$$

Пусть $m' = \left(m_1, \frac{n}{d} \right)$, $m_1 = m' m_2$. Тогда имеем

$$im_1 \equiv jk_1 \left(mod\, \frac{n}{d} \right) \Leftrightarrow im' m_2 \equiv jk \left(mod\, \frac{n}{d} \right).$$

Заметим, что левая часть последнего сравнения кратна m' и $\frac{n}{d}$ кратно m'. Так как по ранее предположенному $(k_1, m') = 1$ имеем, что $j = m' \cdot j_1$. Тогда имеем

$$im' m_2 \equiv jk \left(mod\, \frac{n}{d} \right) \Leftrightarrow im_2 \equiv j_1 k_1 \left(mod\, \frac{n}{dm'} \right). \qquad (2.5)$$

Аналогичную операцию проделываем с k_1. В итоге, имеем

$$\begin{aligned} & im_2 \equiv j_1 k_1 \left(mod\, \frac{n}{dm'} \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow i_1 m_2 \equiv j_1 k_2 \left(mod\, \frac{n}{dm'k'} \right). \end{aligned} \qquad (2.6)$$

где $k' = \left(k_1, \dfrac{n}{dm'}\right)$, $k_1 = k' \cdot k_2$. Напомним хорошо известный факт: сравнение вида $ax \equiv b\,(mod\,n)$ всегда имеет единственное решение при $(a,n)=1$. Из данного утверждения следует, что существует f – биекция из $\mathbb{Z}_q$ в $\mathbb{Z}_q$, $q = \dfrac{n}{dm'k'}$, такая что $tm_2 \equiv f(t)k_2\,(mod\,q)$. Значит, число решений сравнения (2.6) равно q.

Теперь заметим, что каждое значение i_1 в сравнении (2.6) однозначно задает значение i в сравнении (2.5), а каждому значению j_1 из сравнения (2.6) соответствует k' значений j_1 из сравнения (2.5). Следовательно, число решений сравнения (2.5) имеет вид $q \cdot k'$. Используя аналогичные соображения, получаем, что число решений сравнения (2.4) имеет вид $q \cdot k' \cdot m'$.

Далее, заметим, что каждому значению i_1 из сравнения (2.4) соответствует ровно d значений i из сравнения (2.3). Аналогично для j_1 и j. Следовательно, имеем

$$R_{im-jk}(n) = q \cdot k' \cdot m' \cdot d^2 = n \cdot d = n \cdot (m,k,n).$$

Если считать число возможных различных значений только для второй координаты, то по предыдущим рассуждениям имеем

$$R_{im-jk,\{2\}}(n) = q \cdot k' \cdot d = \frac{n}{m'} = \frac{n}{\left(\dfrac{m}{d}, \dfrac{n}{d}\right)} = \frac{n \cdot (m,k,n)}{(m,n)}. \square$$

***Теорема* 2.1.** *Пусть p – простое число и* $\alpha \ge 1$. *Тогда число решений сравнения* $x^m - y^k \equiv 0\,(mod\,p^\alpha)$, *взаимно простых с p, имеет следующий вид*

$$R^*_{x^m-y^k}(p^\alpha) = $$
$$= \begin{cases} \varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^\alpha)), & p \ne 2; \\ 2^{\alpha-1}\cdot(2\cdot m, 2\cdot k, 2^{\alpha-1}), & p = 2, m,k \,\vdots\, 2; \\ 2^{\alpha-1}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

Случай 1. $p \ne 2$. Согласно *теореме о существовании первообразного корня*, существует *первообразный корень* по модулю p^α. Обозначим его через β. Так как мы рассматриваем взаимно простые с p решения сравнения $x^m - y^k \equiv 0\,(mod\,p^\alpha)$, можем произвести замены $x = \beta^i$, $y = \beta^j$. Тогда имеем

$$x^m - y^k \equiv 0\,(mod\,p^\alpha) \Leftrightarrow \beta^{im} \equiv \beta^{jk}\,(mod\,p^\alpha).$$

Из свойств первообразного корня имеем

$$\beta^{im} \equiv \beta^{jk}\,(mod\,p^\alpha) \Leftrightarrow im \equiv jk\,(mod\,\varphi(p^\alpha)).$$

Согласно тождеству (2.1) из леммы 2.1, число решений последнего сравнения – $\varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^\alpha))$. Следовательно, имеем

$$R^*_{x^m-y^k}(p^\alpha) = \varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^\alpha)).$$

Случай 2. $p = 2$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда нетрудно видеть, что $\forall m,k \in \mathbb{N}$ имеем $R^*_{x^m-y^k}(2) = 1$.

Пусть $\alpha \ge 2$. Согласно [6, гл. 6, с. 102–104], любое нечётное число по модулю 2^α можно представить в виде $(-1)^q 5^\delta$, $q \in \mathbb{Z}_2$, $\delta \in \mathbb{Z}_{2^{\alpha-2}}$. Тогда наше сравнение сводится к виду

$$x^m - y^k \equiv 0\,(mod\,2^\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-1)^{mq_1}5^{m\delta_1} \equiv (-1)^{kq_2}5^{k\delta_2}\,(mod\,2^\alpha).$$

Из свойств индексов по модулю 2 имеем

$$(-1)^{mq_1}5^{m\delta_1} \equiv (-1)^{kq_2}5^{k\delta_2}\,(mod\,2^\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} mq_1 \equiv kq_2\,(mod\,2), & (2.7) \\ m\delta_1 \equiv k\delta_2\,(mod\,2^{\alpha-2}). & (2.8) \end{cases}$$

Далее возможны следующие случаи:

$$2 \mid m,k, \qquad (2.9)$$
$$2 \mid m, 2 \nmid k, \qquad (2.10)$$
$$2 \nmid m, 2 \mid k \qquad (2.11)$$
$$2 \nmid m,k. \qquad (2.12)$$

Рассмотрим случай (2.9). Очевидно, что в этом случае сравнение (2.7) имеет 4 решения. Для подсчета числа решений сравнения (2.8) воспользуемся тождеством (2.1) из леммы 2.1 и получим $2^{\alpha-2}\cdot(m,k,2^{\alpha-2})$ решений. Следовательно, число решений исходного сравнения в данном случае имеет вид

$$R^*_{x^m-y^k}(2^\alpha) = 4\cdot 2^{\alpha-2}\cdot(m,k,2^{\alpha-2}) = 2^\alpha\cdot(m,k,2^{\alpha-2}).$$

Теперь рассмотрим случаи (2.10), (2.11), (2.12). Очевидно, что в каждом из этих случаев сравнение (2.7) имеет ровно 2 решения. Для подсчета числа решений сравнения (2.8) снова воспользуемся тождеством (2.1) леммы 2.1 и получим $2^{\alpha-2}$ решений, так как $(m,k,2^{\alpha-2}) = 1$. Следовательно, число решений исходного сравнения в данном случае имеет вид $2\cdot 2^{\alpha-2} = 2^{\alpha-1}$. Объединяя все выше описанное, получаем формулу, которую и требовалось доказать. $\square$

***Теорема* 2.2.** *Пусть p – простое число и* $\alpha \ge 1$. *Тогда число таких y* $(mod\,p^\alpha)$, *таких что сравнение* $x^m - y^k \equiv 0\,(mod\,p^\alpha)$, *взаимно простых с p, разрешимо, имеет вид*

$$R^*_{x^m-y^k,\{2\}}(p^\alpha) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^\alpha))}{(m,\varphi(p^\alpha))}, & p \ne 2; \\ 1 & p = 2, \alpha = 1; \\ \dfrac{2^{\alpha-2}}{(m,2^{\alpha-2})}, & p = 2, \alpha \ge 2, 2 \mid m, 2 \nmid k; \\ \dfrac{2^{\alpha-1}\cdot(m,k,2^{\alpha-2})}{(m,2^{\alpha-2})}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.1 с использованием тождества (2.2) из леммы 2.1. □

***Замечание* 2.1.** *Согласно ранее введённому определению, в теореме 2.2 было посчитано число m/k-ичных вычетов по модулю p^{α}, взаимно простых с p.*

***Замечание* 2.2.** *Пусть* $q \in \mathbb{N}$. *Тогда, вообще говоря, количества m/k-ичных и qm/qk-ичных вычетов по модулю n, взаимно простых с n, могут не совпадать. Пример: p – нечётное простое,* $m = q = p, k = 1$. *Тогда*

$$R^{*}_{x^m - y^k,\{2\}}(p^2) = p - 1 \neq p(p-1) = R^{*}_{x^{qm} - y^{qk},\{2\}}(p^2).$$

***Следствие* 2.1.** *Пусть p – простое число. Число m-ичных вычетов по модулю p^{α}, взаимно простых с p имеет вид*

$$s^{*}_{x^m}(p^{\alpha}) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\varphi(p^{\alpha})}{(m, \varphi(p^{\alpha}))}, & p \neq 2; \\ 2^{\alpha-1}, & p = 2, 2 \nmid m; \\ 2^{\alpha-2-t}, & p = 2, \alpha > t+1, t \in \mathbb{N} : 2^t \mid m, 2^{t+1} \nmid m; \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что

$$s^{*}_{x^m}(p^{\alpha}) = R^{*}_{x^m - y,\{2\}}(p^{\alpha}).$$

Следовательно, выше приведенная формула является следствием из теоремы 2.2 при $n = 1$. □

3 Вычисление $R_{f,I}(p^{\alpha})$

***Теорема* 3.1.** *Пусть p – простое число и* $\alpha \geq 1$. *Тогда число решений сравнения* $x^m - y^k \equiv 0 \,(mod\, p^{\alpha})$ *имеет вид*

$$R_{x^m - y^k}(p^{\alpha}) = p^{2\alpha - \left[\frac{\alpha}{m}\right] - \left[\frac{\alpha}{k}\right]} +$$

$$+ \sum_{i \in A} R^{*}_{x^m - y^k}(p^{\alpha - i\cdot[m,k]}) \cdot p^{i\cdot[m,k]\left(2 - \frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right)},$$

$$A = \left[0, \frac{\alpha}{[m,k]}\right) \cap \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Возможны 2 случая:

1. $x^m \equiv y^k \equiv 0 \,(mod\, p^{\alpha})$. Очевидно, что в этом случае имеем $x = p^{\left[\frac{\alpha}{m}\right]} x_1$, $y = p^{\left[\frac{\alpha}{k}\right]} y_1$. Значит, переменные x и y могут принимать $p^{\alpha - \left[\frac{\alpha}{m}\right]}$ и $p^{\alpha - \left[\frac{\alpha}{k}\right]}$ различных значений соответственно. Следовательно, число решений в данном случае имеет вид $p^{\alpha - \left[\frac{\alpha}{m}\right]} \cdot p^{\alpha - \left[\frac{\alpha}{k}\right]} = p^{2\alpha - \left[\frac{\alpha}{m}\right] - \left[\frac{\alpha}{k}\right]}$.

2. $x^m \equiv y^k \not\equiv 0 \,(mod\, p^{\alpha})$. Заметим, что степень p, на которую делятся x^m и y^k, одна и та же. В частности, она делится и на m, и на k, то есть имеет вид $i \cdot [m,k], 0 \leq i < \dfrac{\alpha}{[m,k]}$. Зафиксируем i и посчитаем число решений:

Пусть $x = p^{i\cdot\frac{[m,k]}{m}} \cdot x_1$, $y = p^{i\cdot\frac{[m,k]}{k}} \cdot y_1$, $(x_1, p) = 1$, $(y_1, p) = 1$ Тогда имеем

$$x^m \equiv y^k \,(mod\, p^{\alpha}) \Leftrightarrow x_1^m \equiv y_1^k \,(mod\, p^{\alpha - i\cdot[m,k]}). \quad (3.1)$$

Заметим, что каждое решение x_1 сравнения (3.1) запишется в виде $x_1 + u \cdot p^{\alpha - i\cdot[m,k]}$, $u \in \mathbb{Z}$, а решение y_1 – в виде $y_1 + t \cdot p^{\alpha - i\cdot[m,k]}, t \in \mathbb{Z}$. Тогда решение исходного сравнения для x запишется в виде

$$x = p^{i\cdot\frac{[m,k]}{m}} \cdot x_1 + u \cdot p^{\alpha - i\cdot[m,k] + \frac{i\cdot[m,k]}{m}}.$$

Заметим, что $\alpha - i\cdot[m,k] + \dfrac{i\cdot[m,k]}{m} > \dfrac{i\cdot[m,k]}{m}$, то есть наибольшая степень p, на которую делится x, равна $\dfrac{i\cdot[m,k]}{m}$, как и по предположению.

Предположим, что какие-то два решения

$$a_1 = p^{i\cdot\frac{[m,k]}{m}} \cdot x_1 + u_1 \cdot p^{\alpha - i\cdot[m,k] + \frac{i\cdot[m,k]}{m}}$$

и $$a_2 = p^{i\cdot\frac{[m,k]}{m}} \cdot x_2 + u_2 \cdot p^{\alpha - i\cdot[m,k] + \frac{i\cdot[m,k]}{m}}$$

сравнимы по модулю p^{α}. Тогда, согласно свойствам сравнений,

$$x_1 - x_2 \equiv p^{\alpha - i\cdot[m,k]} \cdot (u_2 - u_1) (mod\, p^{\alpha - i\cdot\frac{[m,k]}{m}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \equiv x_2 (mod\, p^{\alpha - i\cdot[m,k]}).$$

Последнее сравнение означает, что два рассмотренные нами решения a_1 и a_2 соответствуют одному и тому же решению сравнения $x_1^m \equiv y_1^k (mod\, p^{\alpha - i\cdot[m,k]})$. При этом выражение $u \cdot p^{\alpha - i\cdot[m,k] + \frac{i\cdot[m,k]}{m}}$ пробегает ровно $p^{i\cdot[m,k] - i\cdot\frac{[m,k]}{m}}$ значений по модулю p^{α}. Аналогичные рассуждения проводим с y.

В качестве следствия из данного рассуждения можно вывести, что каждому решению сравнения (3.1) соответствует ровно

$$p^{i\cdot[m,k]\left(1 - \frac{1}{m}\right)} \cdot p^{i\cdot[m,k]\left(1 - \frac{1}{k}\right)} = p^{i\cdot[m,k]\left(2 - \frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right)}$$

решений исходного сравнения. Значит при заданном i число решений исходного сравнения равно $p^{i\cdot[m,k]\left(2 - \frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right)} \cdot R^{*}_{x^m - y^k}(p^{\alpha - i\cdot[m,k]})$.

Суммируя по всевозможным значениям i и добавляя первый случай, получаем

$$R_{x^m - y^k}(p^{\alpha}) = p^{2\alpha - \left[\frac{\alpha}{m}\right] - \left[\frac{\alpha}{k}\right]} +$$

$$+ \sum_{i \in A} R^{*}_{x^m - y^k}(p^{\alpha - i\cdot[m,k]}) \cdot p^{i\cdot[m,k]\left(2 - \frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right)},$$

$$A=\left[0,\frac{\alpha}{[m,k]}\right)\cap\mathbb{Z}.\qquad\square$$

***Следствие* 3.1.** *Пусть p – нечётное простое число и q – минимальное целое положительное число, такое что* $q\equiv\alpha(mod[m,k])$. *Тогда число решений сравнения* $x^m-y^k\equiv 0\,(mod\,p^\alpha)$ *имеет вид*

$$R_{x^m-y^k}(p^\alpha)=p^{2\alpha-\left[\frac{\alpha}{m}\right]-\left[\frac{\alpha}{k}\right]}+$$
$$+\frac{\varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^\alpha))\cdot\left(p^{(\alpha-q)\cdot\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}\right)}-1\right)}{p^{[m,k]\cdot\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}\right)}-1}+$$
$$+\varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^{\alpha-q}))\cdot p^{\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}\right)}\cdot\begin{cases}0, & q=0;\\ 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Доказательство. Исходя из формул теорем 2.1 и 3.1, имеем

$$R_{x^m-y^k}(p^\alpha)=p^{2\alpha-\left[\frac{\alpha}{m}\right]-\left[\frac{\alpha}{k}\right]}+$$
$$+\varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^\alpha))\cdot p^{0\cdot[m,k]\left(2-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}\right)}+\ldots$$
$$+\varphi(p^q)\cdot(m,k,\varphi(p^q))\cdot p^{\frac{q}{[m,k]}\cdot[m,k]\left(2-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}\right)}\cdot h,$$
$$h=\begin{cases}0, & q=0;\\ 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Из формулы для функции Эйлера имеем, что $\varphi(p^{\alpha-j})\cdot p^j=\varphi(p^\alpha)$, если $\alpha-j>0$. Также, очевидно следующее неравенство: $(m,k,\varphi(p^\beta))=$ $=(m,k,\varphi(p^{[m,k]}))$, $\beta\ge[m,k]$. Используя два данных факта, имеем

$$R_{x^m-y^k}(p^\alpha)=p^{2\alpha-\left[\frac{\alpha}{m}\right]-\left[\frac{\alpha}{k}\right]}+\varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^\alpha))\times$$
$$\times\left(1+p^{[m,k]\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}\right)}+\ldots+p^{(\alpha-q-[m,k])\cdot[m,k]\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}\right)}\right)+$$
$$+\varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^q))\cdot p^{(\alpha-q)\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{k}\right)}\cdot h.$$

Используя формулу для первых n членов геометрической прогрессии, получаем формулу, записанную в утверждении следствия. $\square$

***Теорема* 3.2.** *Пусть p – простое число и* $\alpha\ge 1$. *Тогда число таких y* $(mod\,p^\alpha)$, *таких что сравнение* $x^m-y^k\equiv 0\,(mod\,p^\alpha)$ *разрешимо, имеет вид*

$$R_{x^m-y^k,\{2\}}(p^\alpha)=p^{\alpha-\left[\frac{\alpha}{k}\right]}+$$
$$+\sum_{i\in A}R^*_{x^m-y^k,\{2\}}(p^{\alpha-i\cdot[m,k]})\cdot p^{i\cdot[m,k](1-\frac{1}{k})},$$
$$A=\left[0,\frac{\alpha}{[m,k]}\right)\cap\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3.1. $\square$

***Следствие* 3.2.** *Пусть p – нечётное простое число и q – минимальное целое положительное число, такое что* $q\equiv\alpha(mod\,[m,k])$. *Тогда число таких y* $(mod\,p^\alpha)$, *таких что сравнение* $x^m-y^k\equiv 0\,(mod\,p^\alpha)$ *разрешимо, имеет вид*

$$R_{x^m-y^k,\{2\}}(p^\alpha)=p^{\alpha-\left[\frac{\alpha}{k}\right]}+$$
$$+\frac{\varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^\alpha))}{(m,\varphi(p^\alpha))}\cdot\frac{p^{-\frac{\alpha-q}{n}}-1}{p^{-\frac{[m,k]}{k}}-1}+$$
$$+\frac{\varphi(p^\alpha)\cdot(m,k,\varphi(p^q))}{(m,\varphi(p^q))}\cdot p^{-\frac{\alpha-q}{k}}\cdot\begin{cases}0, & q=0;\\ 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 3.1. $\square$

***Замечание* 3.1.** *В теореме* 3.2 *нами было посчитано число m / k-ичных вычетов по модулю* p^α.

***Замечание* 3.1.** *Пусть* $q\in\mathbb{N}$. *Тогда, вообще говоря, количества m / k-ичных и qm / qk-ичных вычетов по модулю n могут не совпадать.*

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть p – простое и* $\alpha\ge 1$. *Тогда число m-ичных вычетов по модулю* p^α *имеет вид*

$$s_{x^m}(p^\alpha)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{\alpha}{m}\right]}s^*_{x^m}(p^{\alpha-i\cdot m})+\delta_m(\alpha),$$
$$\delta_m(\alpha)=\begin{cases}0, & \alpha\equiv 0\,(mod\,m);\\ 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что

$$s_{x^m}(p^\alpha)=R_{x^m-y,\{2\}}(p^\alpha).$$

Следовательно, выше приведенная формула является следствием из теоремы 3.2 при $n=1$. $\square$

***Следствие* 3.2.2.** *Пусть p – нечётное простое число и q – минимальное целое неотрицательное число, такое что* $q\equiv\alpha\,(mod\,m)$. *Тогда число m-ичных вычетов по модулю* p^α *имеет вид*

$$s_{x^m}(p^\alpha)=1+\frac{\varphi(p^\alpha)}{(m,\varphi(p^\alpha))}\cdot\frac{p^{-(\alpha-q)}-1}{p^{-m}-1}+$$
$$+\frac{\varphi(p^\alpha)}{(m,\varphi(p^q))}\cdot p^{-(\alpha-q)}\cdot\begin{cases}0, & q=0;\\ 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 3.2 при $n=1$.

***Лемма* 3.1.** *Пусть p – простое число. Тогда число решений сравнения* $x^m\equiv 1(mod\,p^\alpha)$ *имеет вид*

$$R_{x^m-1}(p^\alpha)=$$
$$=\begin{cases}(m,\varphi(p^\alpha)), & p\ne 2;\\ 2^{t+1}, & \alpha\ge 2, t>0: 2^t\mid m, 2^{t+1}\nmid m;\\ 1, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство. Расссмотрим случай нечётного p. Очевидно, что решениями являются только x, взаимно простые с p. Тогда, согласно теореме о существовании первообразного корня, существует первообразный корень β по модулю p^α и решение x можно представить в виде β^i. Тогда имеем

$$x^m \equiv 1 (mod\, p^\alpha) \Leftrightarrow \beta^{i\cdot m} \equiv \beta^{\varphi(p^\alpha)} (mod\, p^\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m\cdot i \equiv 0 (mod\, \varphi(p^\alpha)).$$

Хорошо известно, что последнее сравнение имеет ровно $(m, \varphi(p^\alpha))$ решений.

Теперь рассмотрим случай $p=2$. Если $\alpha=1$, то очевидно, что $\forall\ m\in\mathbb{N}\ \ R_{x^m-1}(2^1)=1$. Теперь рассмотрим случай $\alpha\geq 2$. Аналогично случаю нечётного p нетрудно заметить, что любое решение сравнения $x^m\equiv 1(mod\, 2^\alpha)$ является нечётным. Тогда, согласно свойствам индексов по модулю 2^α, x представим в виде $(-1)^\gamma\cdot 5^\delta$. Тогда имеем

$$x^m \equiv 1(mod\, 2^\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-1)^{m\cdot\gamma}\cdot 5^{m\cdot\delta} \equiv (-1)^0\cdot 5^0 (mod\, 2^\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\cdot\gamma \equiv 0 (mod\, 2), & (3.2)\\ m\cdot\delta \equiv 0 (mod\, 2^{\alpha-2}). & (3.3)\end{cases}$$

Если $2\nmid m$, то очевидно, что сравнения (3.2) и (3.3) имеют ровно по одному решению. Это означает, что в этом случае $R_{x^m-1}(2^\alpha)=1$.

Если же $2\mid m$, то очевидно, что сравнение (3.2) имеет 2 решения, а сравнение (3.3) имеет $(m, 2^{\alpha-2})$ решений. Следовательно, в этом случае имеем, что $R_{x^m-1}(2^\alpha)=2\cdot(m,2^{\alpha-2})=2^{t+1}$, где $t\in\mathbb{N}:\ 2^t\mid m$, но $2^{t+1}\nmid m$. □

***Следствие* 3.2.3** [4, Королев, лемма 2, с. 132]. *Пусть p – простое число*, $\alpha\geq 1$ *и* t – *максимальное целое число, такое что* $\alpha - t\cdot m\geq 1$. *Тогда число m-ичных вычетов по модулю* p^α *имеет вид*

$$s_{x^m}(p^\alpha)=\frac{\varphi(p^\alpha)}{R_{x^m-1}(p^\alpha)}+\ldots+\frac{\varphi(p^{\alpha-t\cdot m})}{R_{x^m-1}(p^{\alpha-t\cdot m})}+1.$$

Доказательство. Следует из следствий 3.2.1 и 2.1, а также леммы 3.1. □

***Следствие* 3.2.4** [2, Stangl]. *Пусть* $n=2^t p_1^{d_1}\ldots p_k^{d_k}$. *Тогда число квадратичных вычетов по модулю n имеет следующий вид*

$$s_{x^2}(n)=\left[\frac{2^{t-1}+5}{3}\right]\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{p_i^{d_i+1}+2p_i+2}{2(p_i+1)}\right].$$

Доказательство. Согласно следствию 1.2, функция $s_{x^2}(n)$ является мультипликативной. Поэтому достаточно рассмотреть $s_{x^2}(p^\alpha)$, где p – простое.

Пусть p – нечётное и α – чётное. Тогда, согласно следствию 3.2.2, имеем

$$s_{x^2}(p^\alpha)=1+\frac{p^\alpha-p^{\alpha-1}}{2}\cdot\frac{p^{-\alpha}-1}{p^{-2}-1}=$$
$$=\frac{2(1-p)(1+p)+(p^\alpha-p^{\alpha-1})(p^{-\alpha+2}-p^2)}{2(1-p^2)}=$$
$$=\frac{2(1-p)(1+p)+(1-p)(-p^{-1})(p^2-p^{\alpha+2})}{2(1-p^2)}=$$
$$=\frac{2+2p-p+p^{\alpha+1}}{2(p+1)}=\frac{p^{\alpha+1}+p+2}{2(p+1)}.$$

Теперь пусть p – нечётное и α – нечётное. Тогда из следствия 3.2.2 имеем

$$s_{x^2}(p^\alpha)=1+\frac{p^\alpha-p^{\alpha-1}}{2}\cdot\frac{p^{-\alpha+1}-1}{p^{-2}-1}+\frac{p^\alpha-p^{\alpha-1}}{2}\cdot p^{-\alpha+1}=$$
$$=\frac{2(1-p)(1+p)+(1-p)(-p^{-1})(p^3-p^{\alpha+2})}{2(1-p^2)}+$$
$$+\frac{p-1}{2}=\frac{2+2p+p^{\alpha+1}-p^2+p^2-1}{2(p+1)}=\frac{p^{\alpha+1}+2p+1}{2(p+1)}.$$

Пусть $p=2$, $2\nmid\alpha$. Тогда из следствий 3.2.1 и 2.1 имеем, что

$$s_{x^2}(2^\alpha)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} s^*_{x^2}(2^{\alpha-2\cdot i})=$$
$$=2^{\alpha-4}+2^{\alpha-5}+\ldots+2^3+2+1+1=$$
$$=\frac{2\cdot(4^{\frac{\alpha-3}{2}+1}-1)}{4-1}+1=\frac{2^{\alpha-1}+4}{3}$$

Теперь пусть $p=2$, $2\nmid\alpha$. Тогда из следствий 3.2.1 и 2.1, имеем, что

$$s_{x^2}(2^\alpha)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} s^*_{x^2}(2^{\alpha-2\cdot i})=$$
$$=2^{\alpha-3}+2^{\alpha-5}+\ldots+2^2+1+1+1=$$
$$=\frac{4^{\frac{\alpha-3}{2}+1}-1}{4-1}+2=\frac{2^{\alpha-1}+5}{3}.$$

Учитывая, что полученные дроби целые числа и то, что добавление к числителю этих дробей, положительного числа, меньшего знаменателя, не изменит целую часть этих дробей, получим формулу Стангла. □

***Следствие* 3.2.5** [3, Finch, Sebah, c. 12]. *Пусть p – простое число. Тогда число кубических вычетов по модулю* p^α *имеет вид*

$$s_{x^3}(p^\alpha)=\frac{3^{\alpha+1}+10}{13},\ \text{если}\ p=3\ \text{и}\ \alpha\equiv 0(mod\, 3);$$
$$s_{x^3}(p^\alpha)=\frac{3^{\alpha+1}+30}{13},\ \text{если}\ p=3\ \text{и}\ \alpha\equiv 1(mod\, 3);$$
$$s_{x^3}(p^\alpha)=\frac{3^{\alpha+1}+12}{13},\ \text{если}\ p=3\ \text{и}\ \alpha\equiv 2(mod\, 3);$$

$$s_{x^3}(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+2} + p + 1}{p^2 + p + 1}, \text{ если } p \equiv 1(mod\,3) \text{ и } \alpha \equiv 0(mod\,3);$$

$$s_{x^3}(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+2} + p^2 + p}{p^2 + p + 1}, \text{ если } p \equiv 1(mod\,3) \text{ и } \alpha \equiv 1(mod\,3);$$

$$s_{x^3}(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+2} + p^2 + 1}{p^2 + p + 1}, \text{ если } p \equiv 1(mod\,3) \text{ и } \alpha \equiv 2(mod\,3);$$

$$s_{x^3}(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+2} + 2p^2 + 3p + 3}{3(p^2 + p + 1)}, \text{ если } p \equiv 2(mod\,3) \text{ и } \alpha \equiv 0(mod\,3);$$

$$s_{x^3}(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+2} + 3p^2 + 3p + 2}{3(p^2 + p + 1)}, \text{ если } p \equiv 2(mod\,3) \text{ и } \alpha \equiv 1(mod\,3);$$

$$s_{x^3}(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+2} + 3p^2 + 2p + 3}{3(p^2 + p + 1)}, \text{ если } p \equiv 2(mod\,3) \text{ и } \alpha \equiv 2(mod\,3).$$

Доказательство. Аналогично следствию 3.2.4 рассматриваем все возможные случаи и считаем геометрические прогрессии. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаусс*, *К.Ф.* Труды по теории чисел / К.Ф. Гаусс; общая редакция академика И.М. Виноградова, комментарии члена-корр. АН СССР Б.Н. Делоне. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 297 с.
2. *Stangl*, *W.* Counting squares in $\mathbb{Z}_n$ / W. Stangl // Mathematics Magazine. – 1996. – Vol. 69, № 4. – P. 285–289.
3. *Finch*, *S.* Squares and cubes modulo *n* / S. Finch, P. Sebah. – Mode of access: arXiv.org e-Print archive: https://arxiv.org/abs/math/0604465v3 [math.NT]. – Date of access: 25.03.2016.
4. *Korolev*, *M.A.* On the average number of power residues modulo a composite number / M.A. Korolev // Izvestiya: Mathematics. – 2010. – Vol. 74 (6) – P. 1225–1255.
5. *Eichhorn*, *D.* Sums and differences of the coordinates of points on modular hyperbolas / D. Eichhorn, M. Khan, A. Stein // Combinatorial number theory. – 2009. – P. 17–38.
6. *Виноградов*, *И.М.* Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М.-Л., Гостехиздат, 1952. – 178 с.

Поступила в редакцию 21.06.2020.

Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О МИНИМАЛЬНЫХ σ-ЛОКАЛЬНЫХ НЕ $\mathfrak{H}$-ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, *Минск*

ON MINIMAL σ-LOCAL NON-$\mathfrak{H}$-FORMATIONS OF FINITE GROUPS

I.N. Safonova

Belarusian State University, *Minsk*

Изучаются критические σ-локальные формации конечных групп, где σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Получен критерий для критических σ-локальных формаций. Дано описание критических σ-локальных формаций для формаций всех Π-групп, всех σ-разрешимых Π-групп, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma,$ а также получено описание минимальных σ-локальных не σ-разрешимых формаций конечных групп.

Ключевые слова: *конечная группа*, *формационная σ-функция*, *σ-локальная формация*, *локальная формация*, *критическая σ-локальная формация*, *σ-разрешимая группа.*

The critical σ-local formations of finite groups are studied, where σ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$. A criterion is obtained for critical σ-local formations. A description of critical σ-local formations is given for formations of all Π-groups, all σ-soluble Π-groups, where $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma,$ and a description of minimal σ-local non-σ-soluble formations of finite groups is obtained.

Keywords: *finite group*, *formation σ-function*, *σ-local formation*, *local formation*, *critical σ-local formation*, *σ-soluble group.*

Введение

При изучении внутреннего структурного строения локальных формаций и их классификации важную роль играют минимальные локальные не $\mathfrak{H}$-формации [1] или $\mathfrak{H}_l$-критические формации [2], т. е. такие локальные формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H},$ все собственные локальные подформации которых содержатся в классе групп $\mathfrak{H}.$

Задача изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым [1]. Решение этой задачи для локальных формаций было получено А.Н. Скибой в цикле работ 1980–1993 гг. и завершилось построением теории критических локальных формаций, наиболее общим результатом которой стало описание минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа [3], т. е. формация имеющая такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны. Результаты теории минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций широко использовались в вопросах классификации локальных формаций, а также при изучении несократимых факторизаций ограниченных локальных формаций [4]–[5].

В дальнейшем критические формаций изучались для различных типов формаций конечных групп. В частности, в работах [6]–[20] разработана теория критических ω-локальных формаций. Ряд приложений теории минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций получен при изучении внутреннего строения ω-локальных формаций, имеющих заданную структуру подформаций, а также при изучении свойств полугруппы ω-локальных формаций, см., например, [21]–[23].

Разработка методов обобщенно локальных или σ-локальных формаций приводит к необходимости изучения и классификации критических σ-локальных формаций. При этом, следуя [1]–[2], *минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией* или *$\mathfrak{H}_\sigma$-критической формацией* мы называем σ-локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H},$ все собственные σ-локальные подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}.$

В данной работе получен критерий для минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций. Дано описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для таких σ-локальных классов конечных групп $\mathfrak{H},$ как формация всех Π-групп, формация всех σ-разрешимых Π-групп, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma.$ В частности, получено описание минимальных σ-локальных не σ-разрешимых формаций конечных групп.

Для классического случая, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ в качестве следствий полученных результатов приведено описание минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций, где $\mathfrak{H}$ – формация всех π-групп, формация всех разрешимых π-групп, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P},$ формация всех разрешимых групп.

© *Сафонова И.Н.*, 2020

1 Обозначения и определения

Основные определения, обозначения и общие свойства σ-локальных формаций представлены в работах [24]–[30]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Если n целое число, то $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа G называется [24]: σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого i; σ-нильпотентной, если каждый главный фактор H/K группы G является σ-центральный в G, то есть полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; σ-разрешимой, если $G=1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор G является σ-примарным. Класс всех σ-разрешимых групп обозначают через $\mathfrak{S}_\sigma$, а через $\mathfrak{N}_\sigma$ обозначают класс всех σ-нильпотентных групп.

Пусть $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Группу G называют Π-группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$. Через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают класс всех Π-групп, а через $\mathfrak{S}_\Pi$ обозначают класс всех σ-разрешимых Π-групп. В частности, если $\Pi = \{\sigma_i\}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i-групп, $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ_i'-групп, соответственно, $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$ – класс всех σ-разрешимых σ_i-групп, $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ-разрешимых σ_i'-групп.

Функция f вида $f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}$ называется формационной σ-функцией. Для всякой формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и}$$
$$G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Мы также используем символ $F_{\{\sigma_i\}}(G)$ вместо $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$. Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является σ-локальной, а f является σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$.

Если f является формационной σ-функцией, то символ $\mathrm{Supp}(f)$ обозначает носитель f, то есть, множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. Формационную σ-функцию f называют: внутренней, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i; полной, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $l_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, и называют σ-локальной формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$ для некоторой группы G, то $\mathfrak{F}$ называют однопорожденной σ-локальной формацией. Для всякого класса групп $\mathfrak{F}$ также полагают

$$\mathfrak{F}(\sigma_i) = (G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}).$$

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной не $\mathfrak{F}$-формацией или $\mathfrak{F}$-критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$. Следуя [1]–[2] σ-локальную формацию $\mathfrak{F}$ будем называеть *минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией* или *$\mathfrak{H}_\sigma$-критической формацией*, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные σ-локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

2 Вспомогательные результаты

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся следующие известные факты теории формаций.

Лемма 2.1 является частным случаем леммы 2.6 [28].

Лемма 2.1 [28]. *Пусть*

$$\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$$

– σ-локальная формация порожденная $\mathfrak{X}$ и $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$. Пусть m – формационная σ-функция, такая что $m(\sigma_i) = \mathrm{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $m(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда:

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$,

(2) *m является σ-локальным определением $\mathfrak{F}$,*

(3) *$m(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех i.*

Отметим, что σ-локальное определение m формации $\mathfrak{F}$ из леммы 2.1 называют наименьшим σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 2.2 [28]. *Пусть f и h – формационые σ-функции и пусть* $\Pi = \mathrm{Supp}(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Тогда:

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;

(2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. *Следовательно, $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией.*

(3) *Если каждая группа из $\mathfrak{F}$ является σ-разрешимой, то $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{S}_\Pi$.*

(4) *Если $\sigma_i \in \Pi$, то*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}.$$

(5) *$\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, где F – единственная формационная σ-функция, такая что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $F(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Более того, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ для всех i.*

Лемма 2.3 [4, с. 167.]. *Пусть A – монолитическая группа с монолитом P. Тогда если $P \not\subseteq \Phi(A)$, то $\mathrm{form}(A/P)$ – единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}(A)$.*

3 Основной результат

Следуя [31], на множестве всех формационных σ-функций определим частичный порядок "$\leq$" следующим образом: если f_1 и f_2 – формационные σ-функции, то $f_1 \leq f_2$, если $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

Прежде чем мы докажем теорему 3.1 установим справедливость следующих лемм.

***Лемма* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$, где f_j – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ и $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_2$. Значит, в силу леммы 2.1 и включения $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}_1)$ имеет место

$$f_1(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq$$
$$\subseteq \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\sigma_i).$$

Так как для любого $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F}_1)$ ввиду леммы 2.1 $f_1(\sigma_i) = \varnothing$, то $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$. Следовательно, $f_1 \leq f_2$.

Достаточность. Пусть имеет место $f_1 \leq f_2$. Тогда справедливо включение $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$ для всех i. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Применяя лемму 2.1 с учетом $f_1 \leq f_2$, получим

$$G / F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$$

для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Но тогда $G \in \mathfrak{F}_2$. Поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. □

***Лемма* 3.2.** *Если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и*

$$G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$$

для некоторого $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Поскольку

$$G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F},$$

то $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. Но тогда $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ по лемме 2.2 (1). Кроме того, $G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ влечет также, что $G^{f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}} \subseteq O_{\sigma_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$. Ввиду леммы 2.2 (4) получаем $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$. □

***Теорема* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – минимальное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form} G$, где G – такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим через G – группу минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Ясно, что $l_\sigma \mathrm{form} G \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку при этом все собственные σ-локальные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form} G$.

Пусть $\sigma_i \in \sigma(P)$. Предположим, что $f(\sigma_i) = (1)$. Тогда в силу леммы 2.1 имеем

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G)) = (1).$$

Поэтому $F_{\{\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = G$. Значит, $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Так как G – монолитическая группа и $\sigma_i \in \sigma(P)$, то $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, т. е. G является σ_i-группой. Поскольку при этом $G \notin \mathfrak{H}$, то $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ и $H(\sigma_i) = \varnothing$ ввиду леммы 2.2 (5). Но тогда $f(\sigma_i) = (1)$ – $(H(\sigma_i))$-критическая формация.

Пусть теперь $f(\sigma_i) \neq (1)$. По лемме 2.1 имеем

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{\sigma_i\}}(G)).$$

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная собственная подформация из $f(\sigma_i)$. Допустим, что $\mathfrak{X} \not\subseteq H(\sigma_i)$ и обозначим через K группу минимального порядка из $\mathfrak{X} \setminus H(\sigma_i)$. Тогда K – монолитическая группа с монолитом $K^{H(\sigma_i)}$. Поскольку $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i)$, то $O_{\sigma_i}(K) = 1$.

Пусть S – некоторая σ_i-группа, $M = S \wr K = T \rtimes K$ – регулярное сплетение групп S и K, где T – база сплетения M. Тогда $O_{\sigma_i'}(M) = 1$ и $F_{\{\sigma_i\}}(M) = O_{\sigma_i}(M) = T(O_{\sigma_i}(M) \cap K) = T$, так как $O_{\sigma_i}(K) = 1$. Поскольку $K \in \mathfrak{X} \subseteq f(\sigma_i)$, то $M = T \rtimes K \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$. Но в силу леммы 2.2 (4) имеет место включение $\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $l_\sigma \mathrm{form} M \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $l_\sigma \mathrm{form} M = \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 2.1 имеем

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(M / F_{\{\sigma_i\}}(M)) =$$
$$= \mathrm{form}(M / T) = \mathrm{form} K \subseteq \mathfrak{X} \subset f(\sigma_i).$$

Противоречие. Следовательно, $l_\sigma \mathrm{form} M \subset \mathfrak{F}$. Значит, $l_\sigma \mathrm{form} M \subseteq \mathfrak{H}$. Но тогда по лемме 2.1 (3) имеем $M / F_{\{\sigma_i\}}(M) \simeq K \in H(\sigma_i)$. Снова получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{X} \subseteq H(\sigma_i)$. Таким образом, всякая собственная подформация из $f(\sigma_i)$ содержится в $H(\sigma_i)$. Предположим, что $f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$.

Рассмотрим прежде случай, когда P является σ-примарной группой. Тогда поскольку $\sigma_i \in \sigma(P)$, то P – σ_i-группа. Значит, $O_{\sigma_i'}(G)=1$ и $O_{\sigma_i}(G)=F_{\{\sigma_i\}}(G)$. По лемме 2.1 имеем

$$G/O_{\sigma_i}(G)=G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\in f(\sigma_i).$$

Так как по предположению $f(\sigma_i)\subseteq H(\sigma_i)$, то $G/O_{\sigma_i}(G)\in H(\sigma_i)$. Но тогда $G\in\mathfrak{H}$ в силу леммы 3.2. Последнее противоречит выбору группы G.

Значит, P не является σ-примарной группой. Поскольку при этом P – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\sigma_i \in \sigma(P)$, то $O_{\sigma_i}(G)=1$ и $O_{\sigma_i'}(G)=1$. Значит, $F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$. Применяя теперь лемму 2.1 имеем

$$G\simeq G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\in f(\sigma_i)\subseteq H(\sigma_i)\subseteq\mathfrak{H}.$$

Полученное противоречие показывает, что $f(\sigma_i)\not\subseteq H(\sigma_i)$. Таким образом, $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической формацией.

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы. Понятно, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольная собственная σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$, l – минимальное σ-локальное определение $\mathfrak{L}$. Пусть $\sigma_i\in\sigma(G)\setminus\sigma(P)$. Тогда $P\subseteq F_{\{\sigma_i\}}(G)$ и $F_{\{\sigma_i\}}(G)/P=F_{\{\sigma_i\}}(G/P)$. Поскольку $P=G^{\mathfrak{H}}$, то

$$G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\simeq(G/P)/(F_{\{\sigma_i\}}(G)/P)=$$
$$=(G/P)/F_{\{\sigma_i\}}(G/P)\in H(\sigma_i).$$

Следовательно,

$$f(\sigma_i)\subseteq\mathfrak{G}_{\sigma_i}f(\sigma_i)=$$
$$=\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))\subseteq\mathfrak{G}_{\sigma_i}H(\sigma_i)=H(\sigma_i).$$

Также ввиду леммы 3.1 имеет место включение $l(\sigma_i)\subseteq f(\sigma_i)$. Следовательно, $l(\sigma_i)\subseteq H(\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i\in\sigma(P)$. Допустим, что $l(\sigma_i)=f(\sigma_i)$. Если при этом P – σ_i-группа, то $F_{\{\sigma_i\}}(G)=$ $=O_{\sigma_i}(G)$ и поскольку

$$G/O_{\sigma_i}(G)=G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\in f(\sigma_i)=l(\sigma_i)\subseteq\mathfrak{L},$$

то $G\in\mathfrak{L}$ по лемме 3.2. Но тогда имеет место включение $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}G\subseteq\mathfrak{L}\subset\mathfrak{F}$. Противоречие. Поэтому P не является σ-примарной группой. Так как P – единственная минимальная нормальная подгруппа G, то $F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$. Но тогда

$$G\simeq G/F_{\{\sigma_i\}}(G)\in f(\sigma_i)=l(\sigma_i)\subseteq\mathfrak{L}.$$

Снова получаем, что $G\in\mathfrak{L}$, что невозможно. Таким образом, $l(\sigma_i)\subset f(\sigma_i)$. Поскольку по условию формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической, то $l(\sigma_i)\subseteq H(\sigma_i)$. В силу леммы 2.1 (1) имеет место равенство $\sigma(G)=\sigma(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{H}$. Но тогда $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_\sigma$-критическая формация. □

В классическом случае, когда $\sigma=\sigma^1=$ $=\{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ получаем следующий известный результат.

***Следствие* 3.1** [4, с. 169.]. *Пусть $\mathfrak{H}=LF(H)$, $\mathfrak{F}=LF(f)$, где H – канонический локальный экран формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F}=l\mathrm{form}G$, где G – такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$ с монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $p\in\pi(P)$ формация $f(p)$ является $(H(p))$-критической.*

4 Минимальные σ-локальные не $\mathfrak{G}_\Pi$-формации

Напомним, что если $\varnothing\neq\Pi\subseteq\sigma$, то через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают формацию всех Π-групп. Ввиду замечания 2.4 [28] формация $\mathfrak{G}_\Pi$ является тотально σ-локальной.

***Теорема* 4.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{G}_\Pi$, где $\varnothing\neq\Pi\subseteq\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\sigma_i}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i\notin\Pi$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{G}_\Pi$-формация. Выберем в $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{G}_\Pi$ группу G минимального порядка. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{G}_\Pi}$. Поскольку $l_\sigma\mathrm{form}(G)\subseteq\mathfrak{F}$ и любая собственная σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{G}_\Pi$, то $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$. Покажем, что группа G удовлетворяет условию теоремы.

Пусть f – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{G}_\Pi$. Ввиду теоремы 3.1 для всех $\sigma_i\in\sigma(R)$ формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической. По лемме 2.1 имеем $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$ для всех $\sigma_i\in\sigma(G)$ и $f(\sigma_i)=\varnothing$ для всех $\sigma_i\notin\sigma(G)$. Ввиду замечания 2.4 [28] $H(\sigma_i)=\mathfrak{G}_\Pi$ для всех $\sigma_i\in\Pi$ и $H(\sigma_i)=\varnothing$ для всех $\sigma_i\in\Pi'$.

Допустим, что R – σ-примарная группа и пусть $\sigma_i\in\sigma(R)$. Тогда R – σ_i-группа. Рассмотрим прежде случай, когда $\sigma_i\not\subseteq\Pi$. Тогда поскольку R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $O_{\sigma_i'}(G)=1$.

Следовательно, $F_{\{\sigma_i\}}(G)=O_{\sigma_i}(G)$. Ввиду того, что $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i)=\varnothing$, то

$$f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))=(1).$$

Значит, $G/F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$ и $G=F_{\{\sigma_i\}}(G)=O_{\sigma_i}(G)$. Таким образом, G – σ_i-группа, $\sigma_i\notin\Pi$. Поскольку $G/R\in\mathfrak{G}_\Pi$, и при этом G – Π'-группа, то $G=R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G=R$ – простая σ_i-группа, где $\sigma_i\not\subseteq\Pi$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – наследственная формация, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\subseteq\mathfrak{G}_{\sigma_i}f(\sigma_i)$. Значит, в силу леммы 2.2 (4) имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\subseteq\mathfrak{G}_{\sigma_i}f(\sigma_i)\subseteq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поэтому $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}(G)=\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы.

Допустим теперь, что $\sigma_i\in\Pi$. Тогда $R\in\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $G/R\in\mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, $G^{\mathfrak{G}_\Pi}\subseteq R$ и $G\in\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_\Pi=\mathfrak{G}_\Pi$. Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь R не является σ-примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i'}(G)=1$ и $O_{\sigma_i}(G)=1$. Поэтому $F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$.

Допустим, что найдется $\sigma_i\in\sigma(R)\setminus\Pi$. Тогда поскольку

$$f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))=\mathrm{form}(G)$$

– минимальная не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i)=\varnothing$, мы имеем $\mathrm{form}(G)=(1)$. Последнее влечет $G\simeq 1\in\mathfrak{G}_\Pi$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R)\subseteq\Pi$. Но тогда $R\in\mathfrak{G}_\Pi$ и, кроме того, $G/R\in\mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, $G\in\mathfrak{G}_\Pi\mathfrak{G}_\Pi=\mathfrak{G}_\Pi$. Противоречие. Поэтому данный случай также невозможен.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\sigma_i}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где группа G удовлетворяет условию теоремы. Тогда поскольку $\sigma_i\notin\Pi$, то $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{G}_\Pi$. Поскольку в силу примера 1.2 (ii) [28] для формации всех единичных групп имеет место $(1)=LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)=\varnothing$ для всех i, а также ввиду примера 1.2 (iii) [28] для формации всех σ_i-групп имеет место $\mathfrak{G}_{\sigma_i}=LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $f(\sigma_j)=\varnothing$ для всех $j\neq i$, то формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ имеет единственную σ-локальную подформацию (1). Так как $(1)\subseteq\mathfrak{G}_\Pi$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{G}_\Pi$-формация. □

В частности, если $\Pi=\{\sigma_i\}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}==\mathfrak{S}_{\sigma_i}=\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и из теоремы 4.1 вытекает

***Следствие* 4.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\sigma_i\in\sigma$ и $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-формацией, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\sigma_j}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – простая σ_j-группа для некоторого $j\neq i$.*

В классическом случае, когда $\sigma=\sigma^1$ из теоремы 4.1 получаем

***Следствие* 4.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{G}_\pi$, где $\varnothing\neq\pi\subseteq\mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{G}_\pi$-формацией, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_p=l\mathrm{form}(G)$, где G – группа простого порядка p для некоторого $p\notin\pi$.*

5 Минимальные σ-локальные не $\mathfrak{S}_\Pi$-формации

Пусть $\varnothing\neq\Pi\subseteq\sigma$. Формация всех σ-разрешимых Π-групп обозначается через $\mathfrak{S}_\Pi$. Ввиду замечания 2.4 [28] $\mathfrak{S}_\Pi$ является тотально σ-локальной формацией.

***Теорема* 5.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{S}_\Pi$, где $\varnothing\neq\Pi\subseteq\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{S}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{S}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) *$G=R$ – простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i\notin\Pi$;*

(2) *$|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$, R – не σ-примарная Π-группа и G/R – σ-разрешимая Π-группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{S}_\Pi$-формация. Выберем в $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{S}_\Pi$ группу G минимального порядка. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{S}_\Pi}$. Поскольку $l_\sigma\mathrm{form}(G)\subseteq\mathfrak{F}$ и любая собственная σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{S}_\Pi$, то $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$. Покажем, что группа G удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть f – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{S}_\Pi$. Ввиду теоремы 3.1 для всех $\sigma_i\in\sigma(R)$ формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической. По лемме 2.1 имеем $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$ для всех $\sigma_i\in\sigma(G)$ и $f(\sigma_i)=\varnothing$ для всех $\sigma_i\notin\sigma(G)$. Ввиду замечания 2.4 [28] имеем $H(\sigma_i)=\mathfrak{S}_\Pi$ для всех $\sigma_i\in\Pi$ и $H(\sigma_i)=\varnothing$ для всех $\sigma_i\in\Pi'$.

Допустим, что R – σ-примарная группа и пусть $\sigma_i\in\sigma(R)$. Тогда R – σ_i-группа. Рассмотрим прежде случай, когда $\sigma_i\not\subseteq\Pi$. Тогда поскольку R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $O_{\sigma_i'}(G)=1$. Следовательно, $F_{\{\sigma_i\}}(G)=$ $=O_{\sigma_i}(G)$. Ввиду того, что $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i)=\varnothing$, то $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))=(1)$. Значит, $G=$ $=F_{\{\sigma_i\}}(G)=O_{\sigma_i}(G)$. Таким образом, G – σ_i-группа, $\sigma_i\notin\Pi$. Поскольку $G/R\in\mathfrak{S}_\Pi$, и при этом G – Π'-группа, то $G=R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G=R$ – простая σ_i-группа, где $\sigma_i\not\subseteq\Pi$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 1) теоремы.

Допустим теперь, что $\sigma_i\in\Pi$. Тогда $R\in\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $G/R\in\mathfrak{S}_\Pi$. Следовательно, $G^{\mathfrak{S}_\Pi}\subseteq R$ и $G\in\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{S}_\Pi=\mathfrak{S}_\Pi$. Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь R не является σ-примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i}(G)=$ $=O_{\sigma_i'}(G)=1$. Поэтому $G/F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$.

Допустим, что найдется $\sigma_i\in\sigma(R)\setminus\Pi$. Тогда поскольку $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))=$ $=\mathrm{form}(G)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i)=\varnothing$, мы имеем $\mathrm{form}(G)=(1)$. Последнее влечет $G=1\in\mathfrak{S}_\Pi$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R)\subseteq\Pi$.

Покажем также, что данный случай возможен, только если $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$. Действительно, так как R монолит группы G, то R – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Поэтому $|\pi(R)|\geq 3$. С другой стороны, поскольку R не является σ-примарной группой, то $|\sigma(R)|\geq 2$. Далее, если теперь $\sigma_i\in\sigma(R)$, то $\sigma_i\cap\pi(R)\neq\varnothing$. Следовательно, $\pi(R)\subseteq\cup_{\sigma_i\in\sigma(R)}\sigma_i$ и $|\cup_{\sigma_i\in\sigma(R)}\sigma_i|\geq 3$. Кроме того, поскольку R – Π-группа, то $\sigma(R)\subseteq\Pi$ и $\cup_{\sigma_i\in\sigma(R)}\sigma_i\subseteq\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i$. Поэтому, $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$.

Таким образом, если R не является σ-примарной группой, то $R=G^{\mathfrak{S}_\Pi}$ – Π-группа, при этом $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$. Следовательно, группа G удовлетворяет условию 2) теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$ и группа G удовлетворяет условию 1). Тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех σ_i-групп и (1) – единственная σ-локальная подформация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поскольку $\sigma_i\notin\Pi$ и $(1)\subseteq\mathfrak{S}_\Pi$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{S}_\Pi$-формация.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию 2). Тогда поскольку R единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$ имеет место $F_{\{\sigma_i\}}(G)=1$. В силу леммы 2.1 имеем $f(\sigma_i)=\mathrm{form}(G/F_{\{\sigma_i\}}(G))=$ $=\mathrm{form}(G)$ для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$. С другой стороны, так как $R=G^{\mathfrak{S}_\Pi}$ и по лемме 2.2 (2) $\mathfrak{S}_\Pi$ – насыщенная формация, то $R\not\subseteq\Phi(G)$. Поэтому в силу леммы 2.3 формация $\mathrm{form}(G)=f(\sigma_i)$ имеет единственную максимальную подформацию $\mathrm{form}(G/R)\subseteq\mathfrak{S}_\Pi$. Поскольку при этом $\mathfrak{S}_\Pi=H(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$, то в силу теоремы 3.1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{S}_\Pi$-формацией. □

В случае, когда $\sigma=\sigma^1$ получаем следующий результат.

***Следствие* 5.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп, где $\varnothing\neq\pi\subseteq\mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{S}_\pi$-формацией, когда $\mathfrak{F}=l\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{S}_\pi}$, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) $G=R$ *– группа простого порядка p для некоторого $p\notin\pi$*;

(2) $|\pi|\geq 3$, *P – неабелева π-группа и G/P – разрешимая π-группа.*

6 Минимальные σ-локальные не σ-разрешимые формации

Группа G называется σ-разрешимой, если каждый главный фактор группы G является σ-примарным. Класс всех σ-разрешимых групп $\mathfrak{S}_\sigma$ является тотально σ-локальной формацией. При этом $\mathfrak{S}_\sigma=LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)=\mathfrak{S}_\sigma$ для всех i.

Важным следствием теоремы 5.1 является следующая теорема, дающая описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{S}_\sigma$-формаций.

***Теорема* 6.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{S}_\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{S}_\sigma$-формацией, когда $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что P –*

не σ-примарная группа и группа G/P – σ-разрешима.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{S}_\sigma$-формация. Тогда применяя теорему 5.1 получим $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = R$ – простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$;

(2) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, R – не σ-примарная Π-группа и G/R – σ-разрешимая Π-группа.

Поскольку $\Pi = \sigma$, то $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$. Кроме того, понятно, что условие (1) не может иметь место, а в условии (2) требование $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ выполняется для любого разбиения σ.

Таким образом, $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что R – не σ-примарная группа и группа G/R – σ-разрешима. □

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$ мы получаем следующий известный результат.

***Следствие* 6.1** [5, с. 87]. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной неразрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с неабелевым монолитом P, что G/P – разрешимая группа.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзн. симпозиум по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.
2. *Скиба, А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
3. *Скиба*, *А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1993. – С. 258–268.
4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989.
5. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Бел. навука, 1997.
6. *Джарадин*, *Д.* Минимальные *p*-насыщенные ненильпотентные формации / Д. Джарадин // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 59–64.
7. *Сафонова*, *И.Н.* О минимальных ω-локальных несверхразрешимых формациях / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 12. – С. 123–130.
8. *Сафонова*, *И.Н.* О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях / И.Н. Сафонова // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 2. – С. 23–27.
9. *Сафонова*, *И.Н.* К теории $\mathfrak{H}_{l\omega}$-критических формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры. – 2001. – № 3 (17). – С. 124–133.
10. *Селькин*, *В.М.* Минимальные наследственные ω-локальные не $\mathfrak{H}$-формации / В.М. Селькин // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 3. – С. 460–469.
11. *Сафонова*, *И.Н.* К теории критических ω-насыщенных формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия С. – 2004. – № 11. – С. 9–14.
12. *Сафонова*, *И.Н.* К теории критических частично насыщенных формаций / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры-19. – 2004. – № 6 (27). – С. 82–87.
13. *Селькин*, *В.М.* Об одной проблеме теории ω-локальных формаций / В.М. Селькин // Известия Гомельского госуниверситета. – 2005. – № 5 (32). – С. 166–168.
14. *Сафонова*, *И.Н.* О критических частично насыщенных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 2. – С. 51–55.
15. *Сафонова*, *И.Н.* О минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{N}^n$-формациях / И.Н. Сафонова // Известия Гомельского госуниверситета. – 2006. – № 5 (38). – С. 68–72.
16. *Селькин*, *В.М.* О минимальных τ-замкнутых ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях / В.М. Селькин // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 81–85.
17. *Сафонова*, *И.Н.* О минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Вестник Гродненского гос. университета. Серия 2. Математика. – 2010. – № 2 (96). – С. 67–71.
18. *Селькин*, *В.М.* О минимальных τ-замкнутых ω-локальных не π-разложимых формациях / В.М. Селькин // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2010. – Т. 2, № 56-1. – С. 14–20.
19. *Sel'kin*, *V.M.* On minimal τ-closed ω-local non-$\mathfrak{H}$-formations / V.M. Sel'kin // Algebra Colloquium. – 2012. – Vol. 19, № 4.– С. 727–734.
20. *Сафонов*, *В.Г.* О минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2014. – № 6 (84). – С. 9–15.
21. *Сафонов*, *В.Г.* О приводимых ω-насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5. – С. 162–165.
22. *Селькин*, *В.М.* Об одном применении теории критических формаций / В.М. Селькин // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2012. – № 1 (67). – С. 18–21.

23. *Сафонов*, *В.Г.* О коммутативных полугруппах разрешимых тотально ω-насыщенных формаций / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 80–86.

24. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

25. *Skiba*, *A.N.* On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Probl. Phys. Math. Tech. – 2018. – № 34 (1). – P. 79–82.

26. *Chi*, *Z.* On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Probl. Phys. Math. Tech. – 2018. – № 34 (2). – P. 85–88.

27. *Chi*, *Z.* On Σ_t^σ-closed classes of finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Ukranian Math. J. – 2019. – Vol. 70 (2). – P. 1707–1716.

28. *Chi*, *Z.* On n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47 (3). – P. 957–968.

29. *Tsarev*, *A.* Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterr. J. Math. – 2020. – 17 (3):75.

30. *Safonova*, *I.N.* On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova, V.G. Safonov // Mathematics and Informatics. – 2020. – № 3. – P. 1–12.

31. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 10.11.2020.

УДК 004.94, 519.63

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ, ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА РАСПРОСТРАНЕНИЯ НИЗОВЫХ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ

Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук

Белорусский государственный университет, *Минск*

COMPUTER MODEL, EXAMPLES OF ANALYSIS OF THE SPREAD OF GROUND FOREST FIRES

D.V. Barovik, V.B. Taranchuk

Belarusian State University, *Minsk*

Рассмотрена задача компьютерного моделирования распространения низовых лесных пожаров в двумерной постановке. Приведена формулировка начально-краевой задачи в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Представлены результаты вычислительных экспериментов по изучению сценариев распространения зоны горения вблизи полян во фронте, тыле и флангах пожара. Выявлены и показаны качественные отличия эволюции температурного фронта на разных стадиях процесса горения при нескольких характерных размерах лесопожарных разрывов (полян), различных представительных значениях скорости ветра в пологе леса.

Ключевые слова: *низовой лесной пожар*, *математическая модель*, *динамика фронта пожара*, *размер неоднородного включения*, *скорость ветра*.

The problem of computer modeling of two-dimensional surface forest fire spread is considered. The initial-boundary value problem in the form of a system of partial differential equations is described. The results of numerical experiments investigating scenarios how fire zone spreads near fuelbreaks in different directions are provided. The qualitative differences in the evolution of the temperature front at different stages of the combustion process at several characteristic sizes of forest fire breaks (glades), different representative values of wind speed in the forest canopy are revealed and shown.

Keywords: *surface forest fire*, *wildland fire*, *wildfires*, *mathematical model*, *fire front dynamics*, *fuelbreak size*, *wind velocity.*

Введение

Лесные массивы, являющиеся одним из основных типов растительного покрова Земли, подвержены влиянию целого ряда различных природных и техногенных факторов. Наибольший экологический и экономический ущерб на состояние лесных экосистем оказывают пожары [1], [2]. Примером являются пожары в Австралии, начавшиеся в сентябре 2019 года. По подсчетам Всемирного фонда дикой природы [3] в них погибло более миллиарда животных. По мнению специалистов центра Moody's Analytics по состоянию на начало 2020 года экономический ущерб превысит 4.4 миллиарда долларов США [4].

На земном шаре существуют целые регионы, в которых лесные пожары происходят с регулярной периодичностью, и при этом не возрастает успешность в их предотвращении и тушении. Разработки математических моделей лесных пожаров начались с середины прошлого века в США и активно продолжаются во всем мире в настоящее время [5]. Прорыв в этих исследованиях позволит решать значительное число задач практического и научного характера. Обзор научных публикаций указывает как на определенные достижения так и на ряд нерешенных вопросов [6]–[9]: недостаточная обоснованность принимаемых в моделях уравнений и их коэффициентов для описаний кинетики физико-химических превращений и реакций [10], [11]; сложность выбора адекватных моделей турбулентности в газовой фазе [12]; незначительное число аналитических решений и масштабных натурных экспериментов, которые можно брать за эталон для верификации моделей. Наблюдается пробел между слишком упрощенными моделями, дающими прогнозы с большой погрешностью, и моделями с таким чрезмерным количеством параметров, что разработка быстродействующих численных методов для их решения становится самостоятельной проблемой [13].

Обзор научных статей и монографий позволяет условно разделить модели лесных пожаров по их математической «начинке» на следующие три группы [14], [15]: теоретические [16], статистические [17] и полуэмпирические [18], [19].

При создании ***статистических* (*эмпирических*) *моделей*** основой являются: сбор и систематизация статистических данных о наблюдавшихся в прошлом скоростях распространения лесных пожаров в зависимости от выбранных и запротоколированных основных параметров (скорость ветра, температура окружающей среды, вид лесных насаждений и др.); статистическая обработка полученных результатов, определение коэффициентов корреляции между выбранными переменным и скоростью распространения огня.

© *Баровик Д.В.*, *Таранчук В.Б.*, 2020

Прогноз в таких моделях дается с определенной вероятностью, полученные соотношения могут показать неудовлетворительные результаты в ситуациях, отличных от тех, в которых были собраны эмпирические данные [17].

Полуэмпирические модели строятся на основе предположений о виде формул, описывающих скорости распространения пожара. Например, модель Ротермела предполагает, что низовой пожар распространяется в виде вытянутого по направлению ветра эллипса. Для связи между входными параметрами (угол рельефа, сила ветра, количество горючей растительности, ее влажность и т. п.) и скоростью фронта пожара привлекаются общие физические законы сохранения массы и энергии. Эти законы упрощаются путем замены в выражениях целого ряда членов на коэффициенты, подбор которых для конкретных типов лесных насаждений и климатических условий производится путем обобщения экспериментальной информации. Практика показывает, что такие полуэмпирические модели более точны по сравнению со статистическими (эмпирическими) моделями. В то же время такие модели значительно проще в программной реализации по сравнению с теоретическими [18], [19].

Для построения ***теоретических (математических) моделей*** привлекаются фундаментальные законы тепломассопереноса, горения, газовой динамики, химических реакций и др. Записываются такие модели в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Применение численных методов на высокопроизводительных компьютерах является основным инструментом для их решения. Вознаграждением за сложность таких моделей является то, что именно теоретические модели позволяют отвечать на широкий круг вопросов. Они дают возможность не только качественно, но и количественно исследовать динамику всего спектра величин в зоне пожара, тестировать различные методы по предотвращению, возникновению всех видов пожаров (низовых, верховых, пятнистых), развитию и их тушению с учетом конкретных климатических и территориальных факторов.

Профессором Гришиным А.М. [20] была создана наиболее общая теоретическая модель распространения лесных и торфяных пожаров. Целый ряд исследователей ([9], [21], [22]), включая авторов данной работы, берут модель Гришина за основу и модифицируют ее [23] для целей практического использования [24], с учетом специфических условий территорий и климата.

Использованная в данной работе математическая модель для случая низовых лесных пожаров ранее применялась авторами только в одномерной постановке. В данной работе представлены итоги серии проведенных численных экспериментов в двумерной постановке с учетом неоднородностей и при различных скоростях ветра. Для того, чтобы не отсылать читателей к предыдущим публикациям, ниже приведены все основные формулы модели, пояснения и комментарии дополнений.

1 Математическая модель распространения лесных пожаров

Ниже приводится двумерная (осредненная по высоте полога леса) математическая модель распространения лесных пожаров, позволяющая рассчитывать распределения по пространству и эволюцию по времени следующих величин: T – измеряемая в Кельвинах температура лесного массива как сплошной многофазной реагирующей среды; φ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ – объемные доли компонент лесного горючего материала (ЛГМ), где через φ_1 обозначено сухое органическое вещество ЛГМ, φ_2 – содержащаяся в древесине (растительности) вода в связанной и свободной формах, φ_3 – коксик (древесный уголь), являющийся продуктом пиролиза ЛГМ в условиях недостатка кислорода, φ_4 – зола (негорючая минеральная часть ЛГМ); c_ν, $\nu = 1, 2, 3$ – массовые концентрации компонентов газовой фазы, где c_1 – кислород, c_2 – горючие газы, возникающие в процессе термического разложения, c_3 – смесь остальных негорючих газов (водяной пар, как результат сушки; углекислый газ, выделяющийся при догорании коксика и окислении горючих газов; инертные компоненты воздушной смеси и продуктов реакций пиролиза и горения).

Предложенное ниже математическое описание позволяет учитывать следующие физико-химические процессы: теплоподвод, обусловленный конвекцией, теплопроводностью и радиационным излучением; нагрев ЛГМ; испарение воды из них (сушка); разложение сухого органического вещества ЛГМ (целлюлозы) на компоненты (газы, уголь, золу) под воздействием высокой температуры (пиролиз); горение газообразных и догорание твердых продуктов пиролиза. Детали упрощения модели, ее верификация, преобразования и получение уравнений, соображения о границах применимости, аппроксимирующая конечно-разностная схема и особенности возможной интерактивности при проведении расчетов приведены в статьях [25], [26].

В формулируемой начально-краевой задаче определяемыми функциями модели являются T, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, c_1, c_2, c_3. Эти функции зависят как от времени, так и от пространственных координат, и связаны соотношениями (1.1)–(1.11):

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \Phi_{\varphi_1}(\varphi_1, T), \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = \Phi_{\varphi_2}(\varphi_2, T),$$
$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t} = \Phi_{\varphi_3}(\varphi_1, \varphi_3, c_1, c_2, T), \ \frac{\partial\varphi_4}{\partial t} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + (V, grad\, c_1) - \frac{1}{\rho_5} div(\rho_5 D_T grad\, c_1) = \tag{1.2}$$

$$= \Phi_{c_1}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, c_1, c_2, T),$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + (V, grad\, c_2) - \frac{1}{\rho_5} div(\rho_5 D_T grad\, c_2) = \tag{1.3}$$

$$= \Phi_{c_2}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, c_1, c_2, T),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho_5 c_{p5}(V, grad\, T) - div(\lambda_T grad\, T)}{\rho_5 c_{p_5} + \sum_{j=1}^{4} \rho_j \varphi_j c_{p_j}} = \tag{1.4}$$

$$= \Phi_T(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, c_1, c_2, T).$$

Функции (правые части) записанных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_{\varphi_1}(\varphi_1, T) = -\frac{R_1}{\rho_1},\ \Phi_{\varphi_2}(\varphi_2, T) = -\frac{R_2}{\rho_2},$$
$$\Phi_{\varphi_3}(\varphi_1, \varphi_3, c_1, c_2, T) = \frac{\alpha_c R_1}{\rho_3} - \frac{M_C}{M_1}\frac{R_3}{\rho_3}, \tag{1.5}$$

$$\Phi_{c_1}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, c_1, c_2, T) =$$
$$= \frac{1}{\rho_5}\left(R_{51} - c_1 Q - \frac{\alpha}{c_{p_5}\Delta h}(c_1 - c_{1\infty})\right), \tag{1.6}$$

$$\Phi_{c_2}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, c_1, c_2, T) =$$
$$= \frac{1}{\rho_5}\left(R_{52} - c_2 Q - \frac{\alpha}{c_{p_5}\Delta h}(c_2 - c_{2\infty})\right), \tag{1.7}$$

$$\Phi_T(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, c_1, c_2, T) =$$
$$= \frac{-q_2 R_2 + q_3 R_3 + q_5 R_5 - \frac{\alpha}{\Delta h}(T - T_\infty) - 4\kappa_R \sigma T^4}{\rho_5 c_{p_5} + \sum_{j=1}^{4} \rho_j \varphi_j c_{p_j}}, \tag{1.8}$$

$$\sum_{\nu=1}^{3} c_\nu = 1,\ \rho_5 = \frac{\rho_\infty T_\infty}{M_\infty T}\left(\sum_{\nu=1}^{3}\frac{c_\nu}{M_\nu}\right)^{-1},$$
$$Q = (1 - \alpha_c)R_1 + R_2 + \frac{M_C}{M_1}R_3, \tag{1.9}$$

$$R_1 = k_{01}\rho_1\varphi_1 \exp\left(-\frac{E_1}{RT}\right),$$

$$R_2 = k_{02}T^{-1/2}\rho_2\varphi_2 \exp\left(-\frac{E_2}{RT}\right), \tag{1.10}$$

$$R_3 = k_{03}s_\sigma\varphi_3\rho_5 c_1 \exp\left(-\frac{E_3}{RT}\right),$$

$$R_{51} = -R_3 - \frac{R_5 M_1}{2M_2},$$

$$R_{52} = (1 - \alpha_c)\nu_\Gamma R_1 - R_5, \tag{1.11}$$

$$R_5 = \rho_5 \min\left(c_2, \frac{M_2}{2M_1}c_2\right) k_{CO} \exp\left(-\frac{E_{CO}}{RT}\right).$$

Используются обозначения: t – время; рельефно-метеорологические характеристики задаются не возмущенной пожаром температурой T_∞ окружающей среды, направлением и скоростью ветра V, высотой моделируемого слоя ЛГМ Δh; ρ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ – истинная плотность φ_j-ой компоненты ЛГМ; ρ_5 – плотность смеси газов (газовой фазы); ρ_∞ – не возмущенная пожаром плотность воздуха; R – универсальная газовая постоянная; константы $c_{1\infty}$ и $c_{2\infty}$ – массовые концентрации кислорода и горючих газов в невозмущенной атмосфере; M_1, M_2, M_3, M_C и M_∞ – молекулярные массы кислорода, угарного газа, смеси негорючих газов, углерода (древесного угля) и не возмущенная пожаром молекулярная масса воздуха соответственно; c_{p_j}, $j = 1, 2, 3, 4$ – теплоемкости φ_j-ых компонент ЛГМ; c_{p_5} – теплоемкость газовой фазы ρ_5; Q – массовая скорость возникновения / исчезновения газовой фазы; λ_T и D_T – коэффициенты турбулентной теплопроводности и диффузии (для учета турбулентных процессов использован аналог теории Прандтля с постоянными числами Прандтля и Шмидта, обоснование и пределы применимости оговорены в [20, с. 247, с. 312]); через R с нижним числовым индексом обозначаются массовые реакции возникновения (исчезновения) различных элементов, где R_1 соответствует образованию кислорода в реакции пиролиза, R_2 – испарению воды φ_2 из ЛГМ (сушка φ_1), R_3 – исчезновению (горению) коксового остатка φ_3; s_σ – удельная поверхность коксика φ_3; R_{51}, R_{52} – массовые скорости образования кислорода c_1 и горючих газов c_2; α_c – коксовое число сухого ЛГМ, ν_Γ – доля газообразных горючих продуктов пиролиза ЛГМ; R_5 – массовая скорость горения (окисления) горючих газов; q_2, q_3 и q_5 – количества выделяемой / поглощаемой энергии (тепловые эффекты) в процессах испарения R_2, горения конденсированного горючего R_3 и газообразного горючего продукта пиролиза R_5 соответственно; α – коэффициент тепло и газообмена, между атмосферой и моделируемым слоем ЛГМ; κ_R – коэффициент радиационного излучения лесного массива; σ – постоянная Стефана-Больцмана; k_{01}, k_{02}, k_{03} и E_1, E_2, E_3 – предэкспоненты и энергии активации соответствующих физико-химических реакций R_1, R_2, R_3.

Существенной и неотъемлемой частью приведенной математической модели (1.1)–(1.11) является целый ряд коэффициентов и функций, характеризующих состав и пространственное распределение ЛГМ, а также скорости процессов сушки, пиролиза, горения и других. Выбор конкретных значений для оснастки модели производился на основе приведенных в литературных источниках справочным данным, а также результатам экспериментальных исследований [20], [27].

Способ задания корректных начальных и граничных условий подробно описан в публикациях [24], [28], [29].

2 Программный комплекс расчета динамики лесного пожара

Приведенная система дифференциальных уравнений решается численно, результаты

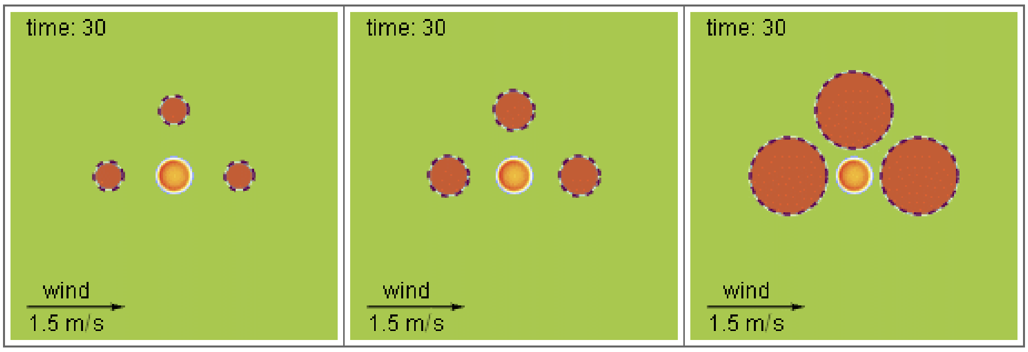


Рисунок 2.1 – Лесной пожар приближается к полянам круглой формы различных размеров: 2.25, 4.5 и 18 квадратных метров соответственно

рассчитываются, протоколируются и визуализируются с использованием средств системы Wolfram *Mathematica* [30]–[32]. Для аппроксимации применяются явные численные схемы с локально равномерной адаптируемой сеткой по пространству и переменным шагом по времени. Временные шаги выбираются из условий устойчивости численной схемы [28], [29] с учетом специфики и скоростей протекания физико-химических процессов на каждой конкретной итерации [33]. Создание базы данных и архивирование результатов расчетов каждого варианта позволяет осуществлять интеллектуальную обработку результатов и корректировать расчетную сетку локально с учетом поведения сеточных функций.

Рассмотрим модельную задачу распространения низового лесного пожара. Рассчитывается и анализируется динамика сопутствующих физико-химических процессов на площади в квадратной области 20 на 20 метров. Изучается процесс распространения пожара на участках, когда в центре области (в начале координат) «возникает» и начинает распространяться очаг горения. Для простоты описания считается, что направление ветра в пологе леса направлено по оси Ox (слева-направо на приведенных ниже графиках). При этом по направлению ветра, против ветра и перпендикулярно (на одном из флангов) имеются участки с отсутствием горючей растительности (поляны) [34], [35]. В примерах ниже рассматриваются варианты развития пожаров на площадях лесного массива одинаковой плотности ЛГМ с включениями, в которых лесной горючий материал отсутствует – круглые поляны различных размеров (схематически показаны на рисунке 2.1). Маленькие поляны имеют площадь 2.25 м^2, средние – 4.5 м^2 (в два раз больше) и крупные – 18 м^2, т. е. в четыре раза больше площади средней поляны. На приведенных ниже рисунках отображаются зоны лесного горючего материала. Зеленым оттенком показан незатронутый пожаром лес, коричневым – участки с отсутствием горючего материала (поляны или уже сгоревший лес). Также видами цветового градиента в иллюстрации синтезированы карты плотности распределения температуры – показывают положение и форму текущего фронта горения.

Отметим подобранные по результатам вычислительных экспериментов, обеспечивающие приведенные и обсуждаемые сценарии развития процессов значения коэффициентов и определяющих параметров модели: температура окружающей среды $T_\infty = 304$ К, высота слоя горючей растительности $\Delta h = 0.1$ м, его объемная плотность $\rho_0 = 5$ кг/м^3, влагосодержание $W = 10\%$, коксовое число $\alpha_c = 0.1$; характеристики турбулентных процессов в газовой фазе $D_\text{T} = 1.5$ м^2/с, $\lambda_T = 1000$ Дж/(м·с·К); коэффициенты энергомассообмена $\kappa_\text{R} = 1.5$ м$^{-1}$, $\alpha = 100$ Вт/(м^2·К). Значения для плотностей компонент ЛГМ, молекулярных масс, теплоемкостей, коэффициенты физико-химических реакций и ряд других величин приводились в работах [29], [34].

3 Результаты моделирования преодоления пожаром полян различных размеров

На рисунках 3.1–3.3 приведены результаты расчетов при равновесной скорости ветра на середине высоты пламени $V = 1.5$ м/с для трех разных размеров полян. Геометрия отличается только площадью полян, формы полян и положения их центров относительно очага горения идентичны для всех трех вариантов. Распределения визуализируются в одни и те же моменты времени.

Качественно наблюдается следующее поведение. Сначала линия контура пожара разрывается, встретившись с полянами. Пожар «огибает» поляны. По направлению «против ветра» распространение пожара прекращается. А «по ветру» и поперёк (перпендикулярно) направления ветра разорванные контуры пожара вновь смыкаются и пожар распространяется единым фронтом. Заметно различие в конфигурации фронта после преодоления полян разных размеров. Следует отметить результаты, показанные на графике time 195 на рисунке 3.3 – добавляются нетипичные для предыдущих моментов направления распространения пожара: перпендикулярно вверх и против ветра.

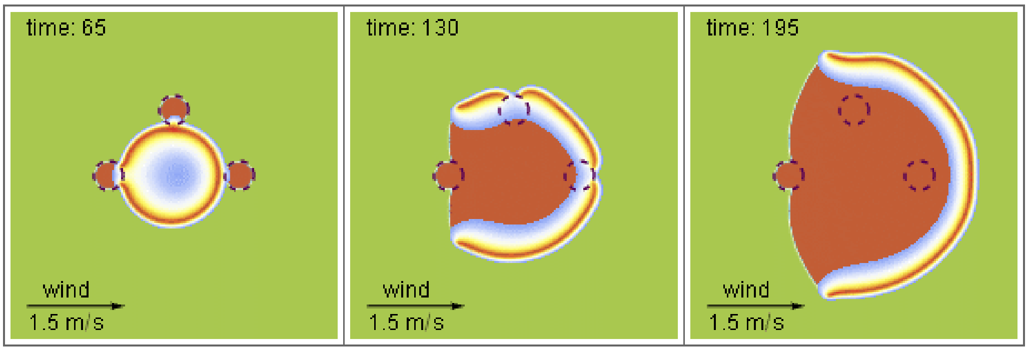


Рисунок 3.1 – Распространение пожара для случая трех полян по 2.25 кв. м

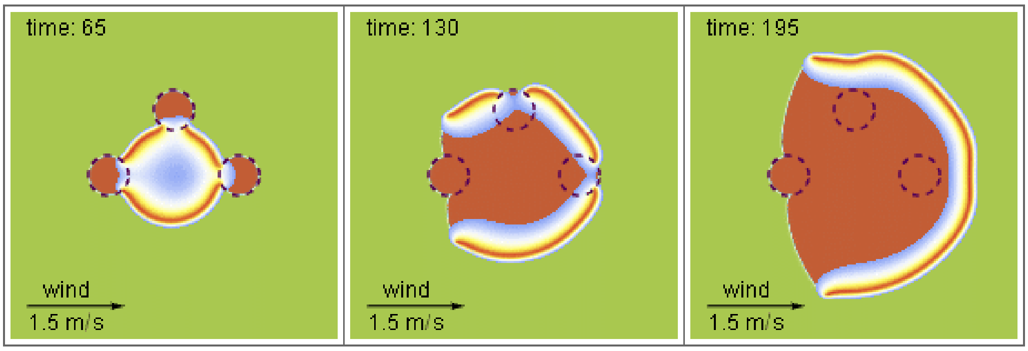


Рисунок 3.2 – Распространение пожара для случая трех полян по 4.5 кв. м

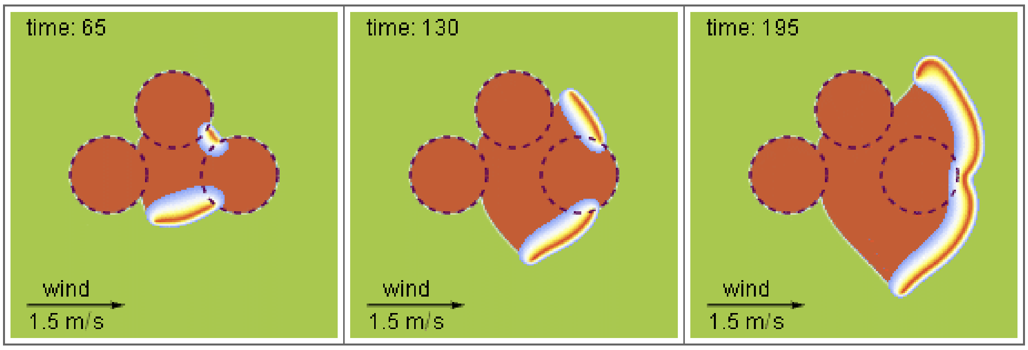


Рисунок 3.3 – Распространение пожара для случая трех полян по 18 кв. м

4 Учет влияния скорости ветра

Влияние на характер распространения лесного пожара величины скорости ветра ([36]) иллюстрируют рисунки 3.1, 4.1 и 4.2. В приведенных вычислительных экспериментах в части геометрии рассматриваются случаи круглых полян «малого» размера. Выше (см. рисунок 3.1) показан расчет для скорости ветра $V = 1.5$ м/с; на рисунках 4.1 и 4.2 приведены результаты двух дополнительных серий расчетов, отличающихся от варианта на рисунке 3.1 только тем, что скорости ветра V равны 1 и 2 м/с соответственно. Особый интерес вызывает рисунок 4.2. При низких скоростях ветра фронты пожара преодолевают поляны во всех направлениях, в том числе, и против ветра. Примечательно и то, что ширина полосы отжига в направлении ветра более узкая, чем на флангах, а в тылу эта ширина максимальна.

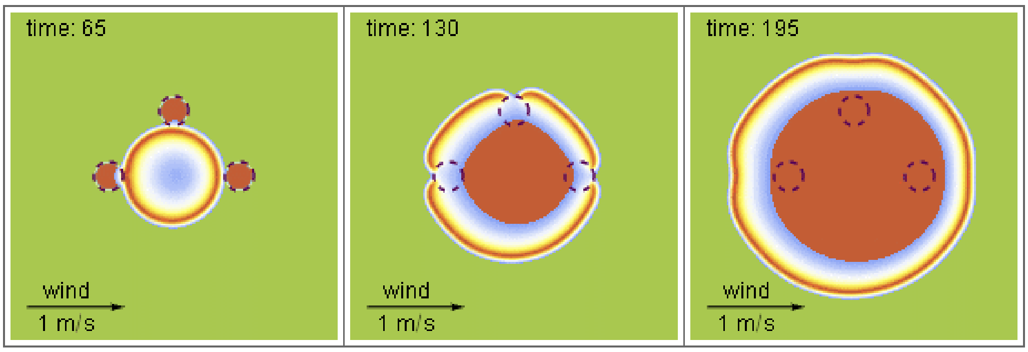


Рисунок 4.1 – Распространение пожара для случая полян в виде кругов при скорости ветра 1 м/с

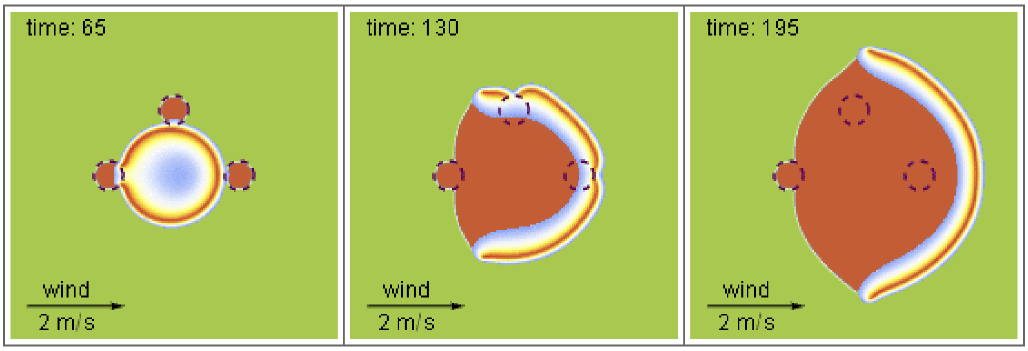


Рисунок 4.2 – Распространение пожара для случая полян в виде кругов при скорости ветра 2 м/с

Заключение

Приведенные выше результаты иллюстрируют динамику только двух (температура и объемная плотность лесных горючих материалов) характеристик процессов. По факту в модели вычисляются распределения шести величин, позволяющие оценить: появление и объем выделяемого водяного пара, выброс загрязняющих окружающую среду газов, образование угля и золы, расчет иных важных с практической точки зрения физико-химических процессов, влияющих на экологию [37].

Следует отметить, что из-за трудоемкости вычислений использование настоящей компьютерной модели в режиме реального времени невозможно. В то же время, так как все получаемые в вычислительных экспериментах результаты протоколируются в базу данных [26], автоматически соответствующими средствами комплекса осуществляется наполнение коллекций типовых сценариев процессов. Возможна интеллектуальная обработка данных [38], в т. ч. унификация, введение признаков и категорий, отнесение результатов серий расчетов пожаров к конкретным территориям и климатическим условиям. Соответствующие каталоги сценариев могут использоваться в комплексе с полуэмпирическими моделями [39], [40].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Экспертное исследование природных пожаров*: методическое пособие / И.Д. Чешко [и др.]. – СПб.: СПб университет ГПС МЧС России, 2019. – 252 с.

2. *Potential threat to human health during forest fires in the Belarusian exclusion zone* / A.A. Dvornik [et al.] // Aerosol Science and Technology. – 2018. – Vol. 52, iss. 8. – P. 923–932. – DOI: 10.1080/02786826.2018.1482408.

3. *Statement from WWF-Australia on Australia's bushfire emergency* [Electronic resource]. – wwf.org.ua, 2020. – Mode of access: www.wwf.org.au/news/news/2020/statement-from-wwf-australia-on-australia-s-bushfire-emergency. – Date of access: 20.04.2020.

4. *Economic impact of Australia's bushfires set to exceed* $4.4*bn cost of Black Saturday* [Electronic resource]. – theguardian.com, 2020. – Mode of access: www.theguardian.com/australia-news/2020/jan/08/economic-impact-of-australias-bushfires-set-to-exceed-44bn-cost-of-black-saturday. – Date of access: 20.04.2020.

5. *Волокитина, А.В.* Прогнозирование поведения пожаров растительности / А.В. Волокитина, Т.М. Софронова, М.А. Корец // Лесной журнал. – 2020. – № 1. – С. 9–25.

6. *Wildfires front dynamics: 3D structures and intensity at small and large scales* / N. Frangieh [et al.] // Combustion and Flame. – 2020. – Vol. 211. – P. 54–67. – DOI: 10.1016/j.combustflame.2019.09.017.

7. *Гладской, И.Б.* К моделированию распространения природных пожаров с использованием ГИС-технологий / И.Б. Гладской, А.В. Павлова, С.Е. Рубцов // Экологический вестник центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2019. – Т. 16, № 4. – С. 13–21. – DOI: 10.31429/vestnik-16-4-13-21.

8. *Experimental and Numerical Studies of Suppression of Forest Combustible Material Pyrolysis under Influence of Steam-Water Curtain* / D. Antonov [et al.] // MATEC Web of Conferences: Heat and mass transfer in the thermal control system of technical and technological energy equipment, HMTTSC 2018, EDP Sciences. – 2018. – P. 01003.

9. *Perminov, V.* Mathematical modeling of forest fires initiation, spread and impact on environment / V. Perminov, A. Goudov // International Journal of GEOMATE. – 2017. – Vol. 13, iss. 35. – P. 93–99. – DOI: 10.21660/2017.35.6704.

10. *Барановский, Н.В.* Физическое моделирование процессов зажигания еловой хвои углеродистой нагретой до высоких температур частицей / Н.В. Барановский, А.В. Захаревич // Вопросы лесной науки. – 2019. – Т. 2 (1). – С. 1–15. – DOI: 10.31509/2658-607x-2019-2-1-1-15.

11. *Ласута, Г.Ф.* Моделирование процессов возникновения и распространения лесного низового пожара с оценкой уровня тепловой нагрузки от фронта пламени / Г.Ф. Ласута, П.Н. Гоман // Вестник Университета гражданской защиты МЧС Беларуси. – 2019. – Т. 3, № 2. – С. 138–154. – DOI: 10.33408/2519-237X.2019.3-2.138.

12. *Сыродой, С.В.* Влияние кинетической модели описания процессов термического

разложения на результаты математического моделирования зажигания частиц древесной биомассы / С.В. Сыродой, Г.В. Кузнецов // Труды седьмой Российской национальной конференции по теплообмену. В 3 т. – М.: Издательский дом МЭИ. – 2018. – Т. 1. – С. 457–460.

13. *Баровик*, *Д.В.* Алгоритмические основы построения компьютерной модели прогноза распространения лесных пожаров / Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук // Вестник ПГУ. Серия С: Фундаментальные науки. – 2011. – № 12. – С. 51–56.

14. *Mathematical models and calculation systems for the study of wildland fire behaviour* / E. Pastor [et al.] // Progress in Energy and Combustion Science. – 2003. – Vol. 29. – P. 139–153. – DOI: 10.1016/S0360-1285(03)00017-0.

15. *Баровик*, *Д.В.* Состояние проблемы и результаты компьютерного прогнозирования распространения лесных пожаров / Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2011. – № 3. – С. 78–84.

16. *Кулешов*, *А.А.* Моделирование распространения лесных пожаров на основе модифицированной двумерной модели / А.А. Кулешов, Е.Е. Мышецкая, С.Е. Якуш // Математическое моделирование. – 2016. – Т. 28, № 12. – С. 20–32.

17. *Экспериментально-численное моделирование процесса горения и распространения огня в условиях лесного низового пожара* / П.Н. Гоман [и др.] // Технологии техносферной безопасности. – 2011. – № 3 (37). – 8 с.

18. *Баровик*, *Д.В.* О развитии методики Ротермела и реализации двумерной компьютерной модели прогноза распространения лесных пожаров / Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2011. – № 6 (66). – С. 5–11

19. *Баровик*, *Д.В.* Адаптация модели Ротермела для реализации в программном комплексе прогноза распространения лесных пожаров / Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук // Технологии техносферной безопасности. – 2011. – Вып. 6 (40). – 6 с.

20. *Гришин*, *А.М.* Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1992. – 408 с.

21. *Марзаева*, *В.И.* Математическое моделирование распространения верховых лесных пожаров при наличии противопожарных разрывов и заслонов / В.И. Марзаева // Журнал технической физики. – 2019. – Т. 89, вып. 8. – С. 1141–1149. – DOI: 10.21883/JTF.2019.08.47883.392-18.

22. *Кулешов*, *А.А.* Результаты расчетов распространения фронта лесных пожаров по двумерной трехфазной модели / А.А. Кулешов, Е.Е. Мышецкая // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2019. – № 115. – С. 1–9. – DOI: 10.20948/prepr-2019-115.

23. *Баровик*, *Д.В.* Об особенностях адаптации математических моделей вершинных верховых лесных пожаров / Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2010. – № 1. – С. 138–143.

24. *Barovik*, *D.* Mathematical modelling of running crown forest fires / D. Barovik, V. Taranchuk // Mathematical Modelling and Analysis. – 2010. – Vol. 15, № 2. – P. 161–174. – DOI: 10.3846/1392-6292.2010.15.161-174.

25. *Баровик*, *Д.В.* Численная реализация математической модели верховых лесных пожаров / Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2010. – № 2 (64). – С. 40–44.

26. *Баровик*, *Д.В.* Базы данных результатов численного моделирования (на примере задачи распространения лесных пожаров) / Д.В. Баровик // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2010. – № 2. – С. 170–174.

27. Heat transfer and phase transformations in the localization of forest fuel combustion / G.V. Kuznetsov [et al.] // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. – 2019. – Vol. 7, № 2. – P. 167–195. – DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019031564.

28. *Баровик*, *Д.В.* К обоснованию математических моделей низовых лесных пожаров / Д.В. Баровик, В.И. Корзюк, В.Б. Таранчук // Труды института математики. – 2013. – Т. 21, № 1. – С. 3–15.

29. *Баровик*, *Д.В.* О корректности одной математической модели низовых лесных пожаров / Д.В. Баровик, В.И. Корзюк, В.Б. Таранчук // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 4. – С. 5–9.

30. *Таранчук*, *В.Б.* О средствах Wolfram Mathematica для распараллеливания вычислений в компьютерных моделях лесных пожаров / В.Б. Таранчук, Д.В. Баровик // Веб-программирование и интернет-технологии WebConf 2015. Минск: Белорусский государственный университет. – 2015. – С. 108–109.

31. *Barovik*, *D.V.* Crown Forest Fire Mathematical Model Realization in Wolfram Mathematica / D.V. Barovik, V.B. Taranchuk // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. – 2011. – Vol. Mathematical Modeling in Physics, Civil Engineering, Economics and Finance. – P. 5–15.

32. *Barovik*, *D.V.* Results of Crown Forest Fires Mathematical Modelling / D.V. Barovik, V.B. Taranchuk // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. – 2011. – Vol. Mathematical Modeling in Physics, Civil Engineering, Economics and Finance. – P. 16–22.

33. *Implicit-Explicit Methods for a Convection-Diffusion-Reaction Model of the Propagation of Forest Fires* / R. Burger [et al.] // Mathematics. – 2020. – № 8 (6). – P. 1034. – DOI: 10.3390/math8061034.

34. *Баровик*, *Д.В.* Моделирование процессов распространения низовых лесных пожаров при наличии полян на пути огня / Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук // Математические методы в

технике и технологиях (ММТТ). – 2017. – Т. 12, Ч. 1. – С. 109–113.

35. *Taranchuk*, *V.* Numerical Modelling of Surface Forest Fire Spread in Nonuniform Woodland / V. Taranchuk, D. Barovik // Computer Algebra Systems in Teaching and Research (CASTR). – 2019. – Vol. VIII. – P. 159–168.

36. *Таранчук*, *В.Б.* Методы, средства, отдельные результаты компьютерного моделирования низовых лесных пожаров / В.Б. Таранчук, Д.В. Баровик // Информационные технологии и системы 2017 (ИТС 2017): материалы международной научной конференции. – Минск: БГУИР. – 2017. – С. 178–179.

37. *Таранчук*, *В.Б.* Компьютерное моделирование лесных пожаров / В.Б. Таранчук, Д.В. Баровик // Наука, инновации, инвестиции: сборник материалов 2-го Белорусско-Латвийского форума. – Минск: Белорусский национальный технический университет. – 2014. – С. 73–75.

38. *Таранчук*, *В.Б.* Средства и примеры интеллектуальной обработки данных для геологических моделей / В.Б. Таранчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 3 (40). – С. 117–122.

39. *Баровик*, *Д.В.* Структура и функционал модуля «оперативно-аналитический блок» программного комплекса регистрации и обработки сообщений о чрезвычайных ситуациях / Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук, Л.В. Школьников // Чрезвычайные ситуации: предупреждение и ликвидация. – 2013. – № 2 (34). – С. 84–94.

40. *Баровик*, *Д.В.* Методические и алгоритмические основы программного комплекса «Расчет и визуализация динамики лесного пожара» / Д.В. Баровик, В.И. Корзюк, В.Б. Таранчук // Чрезвычайные ситуации: предупреждение и ликвидация. – 2011. – № 2 (30). – С. 22–33.

Поступила в редакцию 02.06.2020.

УДК 004.057.4

ПОДХОДЫ К ИЗМЕНЕНИЮ МЕХАНИЗМОВ МАРШРУТИЗАЦИИ В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ

А.В. Воруев, В.Д. Левчук, С.М. Колаиб

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

APPROACHES TO CHANGE OF ROUTING MECHANISMS IN NETWORK STRUCTURES

A.V. Varuyeu, V.D. Liauchuk, S.M. Kolaib

F. Scorina Gomel State University

В 2019 году в качестве альтернативы действующей IP-системе предложен новый подход оптимизации сетевого трафика, предполагающий сегментирование глобальных сетевых структур с уникальной идентификацией сервисов и IP-заголовком переменной длины. В статье рассматриваются способы организации глобальной маршрутизации. Проводится анализ текущей ситуации по распределению IP-пространств.

Ключевые слова*: системы агрегированной адресации NewIP, IPv4, IPv6, туннелирование IPv4-IPv6, преобразование адресов NAT, сегментная маршрутизация.*

In 2019, a new approach to optimizing network traffic was proposed as an alternative to the current IP system. It involves the segmentation of global network structures with a unique identification of services and a variable-length IP header. Ways of organizing global routing are considered in the article. The analysis of the current situation on the distribution of IP-spaces is carried out.

Keywords: *aggregated addressing systems NewIP, IPv4, IPv6, IPv4-IPv6 tunneling, NAT, segment routing.*

Введение

Стек протокола TCP/IP на базе системы адресации IPv4 обеспечивает задачи по оптимизации продвижения сетевого трафика с 1972 года. При всех инвестициях, которые были вложены в модернизацию данного протокола, очевидно, что изменение структуры пользовательского и служебного трафика IP-сетей, увеличение его объема в последние годы и необходимость обеспечения кибербезопасности в локальных и глобальных сетевых структурах создали необходимость внедрения новой концепции маршрутизации сетевого трафика.

Действующая иерархическая модель перераспределения сетевого трафика ограничена производительностью ключевых узлов связи.

Маршрутизируемый протокол – это сетевой протокол, обеспечивающий продвижение трафика между независимыми сегментами сетевых структур [1]. Адрес сетевого уровня должен

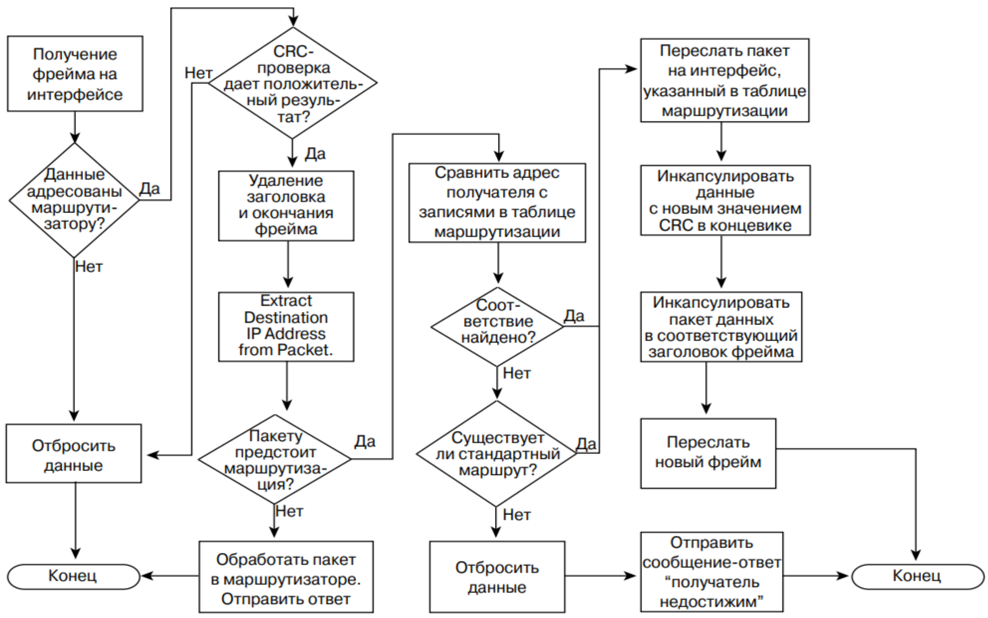


Рисунок 0.1 – Процесс трансформации данных в маршрутизаторе

© *Воруев А.В., Левчук В.Д., Колаиб С.М.*, 2020

предоставлять достаточное количество информации для доставки пакета от одного сетевого узла другому. Протокол предопределяет форматы полей внутри пакета. Подразумевается, что пакеты передаются от одной конечной системы другой без дополнительного преобразования (рисунок 0.1). Маршрутизируемый протокол использует таблицу маршрутизации для пересылки пакетов на всех промежуточных узлах ретрансляции. Участок передачи данных должен быть моногенным, то есть использовать единую версию протокола адресации.

Используемый в глобальных сетевых структурах, протокол IP не отвечает за установку соединений, не является надежным и позволяет реализовать только негарантированную доставку данных.

1 Иерархическая маршрутизация IP

Формальная структура продвижения трафика в IP-сетях основана на иерархии последовательного поиска сети назначения, в которой находится узел назначения трафика (рисунок 1.1).

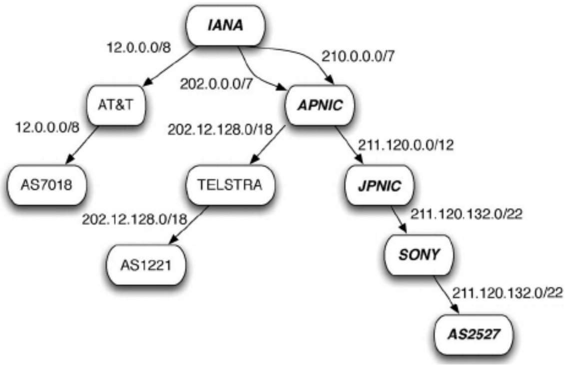


Рисунок 1.1 – Иерархическая соподчиненность автономных зон IPv4

Когда трафик находится в пределах смежных сетей (условно локальный тип трафика), его обслуживание обеспечивает одно устройство или группа ближайших устройств. Эта группа входит в автономную зону местного провайдера. Общая структура автономных зон, обеспечивающих IP-трафик Беларуси, включает 132 элемента (рисунок 1.2).

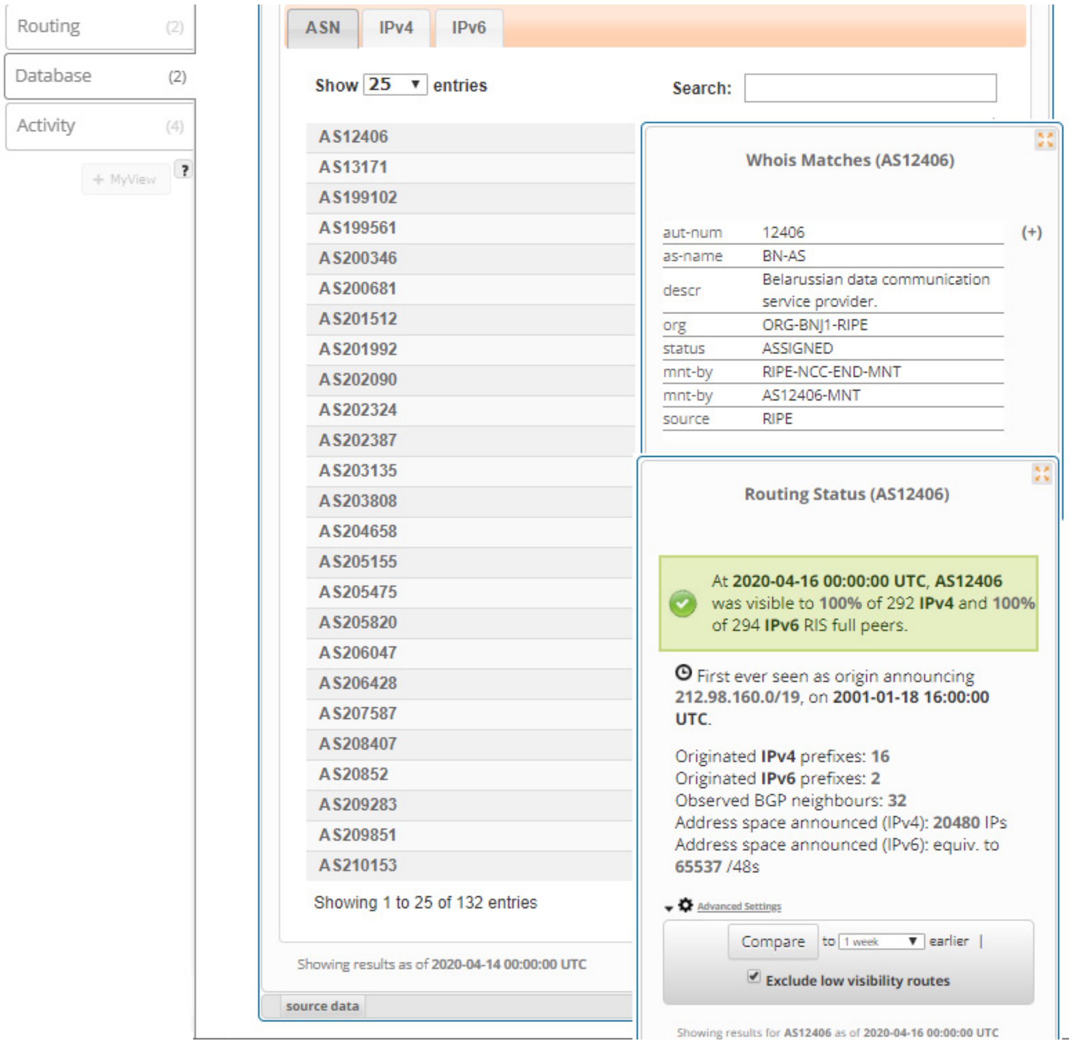


Рисунок 1.2 – Перечень ASN Database https://stat.ripe.net/BY

Участок автономной зоны передачи данных предполагает работу с IP-моногенным трафиком. Другими словами, прозрачность автономной зоны при прохождении IPv4 или IPv6 трафика обеспечивается на уровне операционных систем узлов трансляции и межузловыми связями.

Доступность узла назначения для трафика обоих типов должна поддерживаться локальной операционной системой, операционной системой узла «точки разграничения» на границе между сетью провайдера и сетью назначения, а также тарифным планом провайдера для этого абонента.

2 Трансляция адресов

Коммерческое применение IP-адресации столкнулось с критическими прогнозами по масштабированию адресного пространства одновременно с утверждением ее в качестве стандарта.

Предложенное решение, зафиксированное в RFC1918, заключалось в отсекании «тупиковых сетей» от общей иерархии маршрутов методом изоляции их адресных пространств. Роль посредников в продвижении IP-трафика между изолированными оконечными устройствами и остальной сетью играют трансляторы сетевых адресов (network address translator).

Изолированная сеть становится отдельным IP-слоем с собственной структурой иерархии маршрутов. При появлении трафика, который должен быть направлен в другую сеть, транслятор осуществляет преобразование адресного поля и становится источником вновь сформированного запроса для внешней сети (рисунок 2.1).

На рисунке 2.1 Inside – внутренняя тупиковая сеть с «частной» (private) адресацией; Outside – «публичные» (public) адреса, расположенные во внешней сети; Inside local IP address – IP-адрес, который был назначен узлу во внутренней сети, не входящий в диапазон глобальной маршрутизации; Inside global IP address – адрес, назначаемый пакету данных транслятором из глобально адресного пространства, предоставляемого провайдером [2].

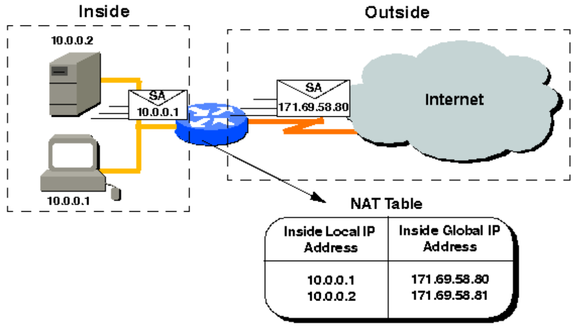


Рисунок 2.1 – Роль устройства трансляции адресов

Неизбежным недостатком реализации такого подхода стали временные издержки и изменение структуры информационной безопасности. В такой среде установить соответствие между источником IP-данных и получателем на стороне отправки данных достаточно сложно. Следствием стало сворачивание целого направления IP-сервисов.

Тем не менее, технология NAT останется промышленным стандартом до момента завершения использования системы адресации IPv4.

3 Интеграция IPv6

Параллельно с развитием технологии трансляции адресов реализовывался комплекс мер по переводу IP-сетей на систему адресации IPv6 с более широкой емкостью адресного поля. Увеличение размера IP-адреса с 32 до 128 бит не только решает проблему дефицита адресного пространства, но и позволяет добиться IP-моногенности на траектории всего маршрута между источником данных и пунктом назначения. Структура иерархии остается неизменной (рисунок 3.1). Дополнительная нагрузка на содержание таблиц маршрутизации и трансляцию трафика возлагается на провайдеров.

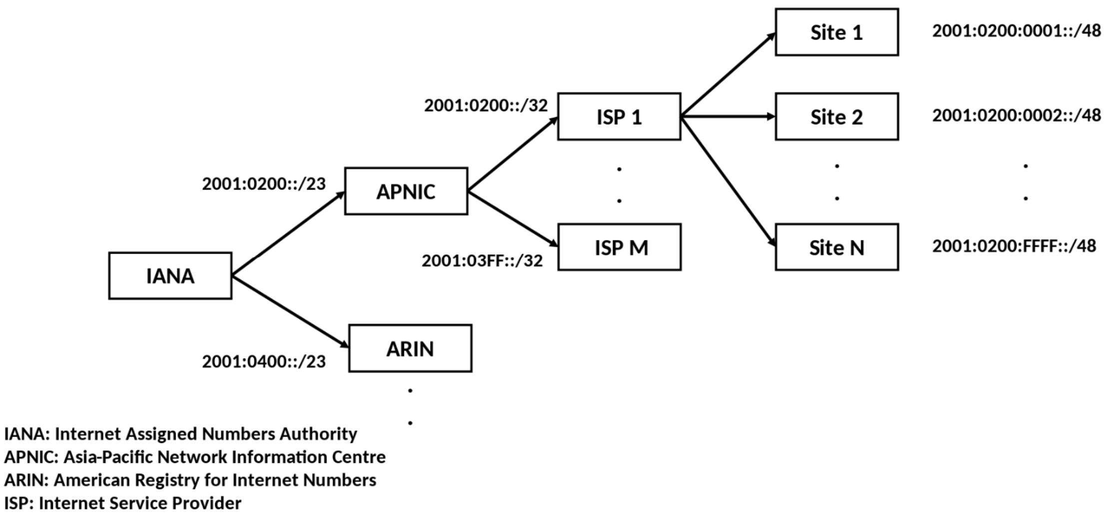


Рисунок 3.1 – Иерархическая соподчиненность IPv6

После реализации указа Президента РБ №350 от 21 сентября 2019 года по обязательной поддержке адресации IPv6 для провайдеров стеки протоколов IPv6 и IPv4 должны использоваться параллельно (этот режим называется dual stack), с постепенным увеличением доли трафика IPv6, по сравнению с IPv4 в общей доле IP трафика страны.

Агрегируемый глобальный IPv6-адрес Unicast является глобально уникальным и аналогичен IPv4-адресу Unicast Public. Используется префикс 2000::/3. Поэтому, как правило, адресное пространство IPv6, полученное в аренду, равно /48 (более $1{,}2 \cdot 10^{24}$ адресов узлов). Такой адресный пул может быть дополнительно разделен на 65536 подсетей (рисунок 3.2).

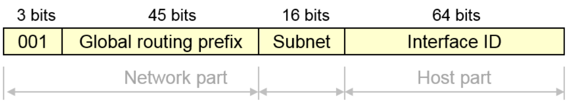


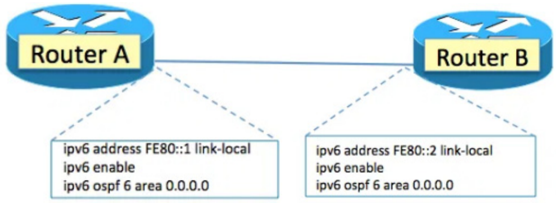
Рисунок 3.2 – Структура IPv6-адреса

Провайдеры Беларуси начали резервировать диапазоны IPv6 в 2004 году. На текущий момент для провайдеров Беларуси выделены следующие диапазоны IPv6 адресов 2001:67c:18a8::/48, 2001:67c:2268::/48, 2001:67c:57c::/48, 2001:7f8:5a::/48, 2001:7f8:8b::/48, 2a00:1760::/29, 2a00:6440::/32, 2a00:c820::/29, 2a01:6e40::/32, 2a02:2208::/29, 2a02:bf0::/32, 2a02:d240::/29, 2a02:e300::/29, 2a03:3000::/29, 2a03:5be0::/32, 2a03:9120::/32, 2a03:9b60::/32, 2a03:c740::/32, 2a04:2e80::/29, 2a04:9b40::/29, 2a04:cc40::/29, 2a06:1280::/29, 2a06:4800::/29, 2a07:200::/29, 2a0a:7d80::/29, 2a0a:eac0::/29, 2a0a:f240::/29, 2a0b:8680::/29, 2a0c:b1c0::/29, 2a0d:2d00::/32.

Размер объединенного адресного поля, охватываемого этими диапазонами, составляет более $1{,}1 \cdot 10^{31}$ адресов узлов, что более чем необходимо для коммерческой практики на ближайшие годы.

Довольно большой объем трафика переводится на использование адресов формата Link-Local с префиксом FE80::/10. Условное подобие в модели IPv4 можно найти при использовании Unicast Private адресов, хотя принципы назначения и использования адресов Link-Local уникальны для IPv6. Такой подход сказывается на различии в подходах к реализации программной части приложений для работы в локальных, глобальных и межузловых сетях. В качестве попутного положительного свойства данный подход помогает скрывать от возможных кибератак операционные системы ретранслирующих узлов, поскольку они не участвуют в общем поле адресации домена маршрутизации (рисунок 3.3).

Другими словами, окно возможностей у технологии достаточно широкое, наряду с поддержкой со стороны технического сообщества. При этом внедрение IPv6 в действующих сетях идет медленно. Технические проблемы внедрения IPv6 наглядно демонстрирует факт задержек и проволочек в ее практическом применении в течение 24 лет после утверждения стандарта.



fe80::1	ff02::5	OSPF	Hello Packet
fe80::2	ff02::5	OSPF	Hello Packet
fe80::1	ff02::5	OSPF	Hello Packet
fe80::1	fe80::2	OSPF	DB Description
fe80::2	fe80::1	OSPF	DB Description
fe80::1	fe80::2	OSPF	DB Description
fe80::2	fe80::1	OSPF	DB Description
fe80::1	fe80::2	OSPF	LS Request
fe80::1	fe80::2	OSPF	DB Description
fe80::2	fe80::1	OSPF	LS Update
fe80::2	fe80::1	OSPF	LS Request
fe80::1	fe80::2	OSPF	LS Update
fe80::1	ff02::6	OSPF	LS Update
fe80::2	ff02::5	OSPF	LS Update
fe80::1	fe80::2	OSPF	LS Acknowledge

Рисунок 3.3 – Локализация трафика между соседними устройствами на траектории маршрута в глобальной сети [3]

4 Обходы требования по IP-моногенности

Поскольку в глобальных сетевых структурах невозможно достигнуть синхронного единообразия в подходах в работе операционных систем узлов связи, то поддержка протоколов обновленной адресации будет внедряться в разное время и, возможно, неполнофукционально.

Например, в случае неудовлетворительных результатов текущей интеграции Dual Stack и / или полного перехода трафика провайдера в режим передачи данных IPv6 (что будет вероятной практикой для вновь создаваемых сетевых подключений) системный администратор сети для объединения сетевых сред IPv6 через сеть IPv4 сможет использовать решения IPv4-IPv6 туннелирования. Пример таких переходных зон поддержки протоколов представлен на рисунке 4.1 [4]. В используемом примере, используется разрыв непрерывного поля адресации IPv6 (IP-разрыв).

Для решения задач IPv4-IPv6 туннелирования необходимо наличие эффективной связи между сегментами сети с помощью средств второго IP-протокола. На участке Сегмента 3 достаточно объявить туннель IPv6 over IPv4. Для доставки IPv6 трафика задействуется канал IPv4. По условиям примера после прохождения тоннеля все клиенты IPv6 смогут реализовать полноценную двустороннюю связь.

Следует особо подчеркнуть, что при инкапсуляции туннелируемого трафика пакет-носитель IPv4 добавляет свои адресные данные поверх

Протокол IP	Сегмент 1	Сегмент 2	Сегмент 3	Сегмент 3			Сегмент 4	Сегмент 5
IPv4	+	+	+	+	+	+	-	-
IPv6	+	+	+	+	-	+	+	+

Рисунок 4.1 – Пример карты сети с разным уровнем поддержки IPv4/IPv6

Протокол	Сегмент 1	Сегмент 2	Сегмент 3	Сегмент 3			Сегмент 4	Сегмент 5
OSPFv2	+	+	+	+	+	+	-	-
OSPFv3	+	+	+	+	-	+	+	+

Рисунок 4.2 – Разрывы в работе версий протокола OSPF

<table>
<tr><th>Протокол</th><th>Сегмент 1</th><th>Сегмент 2</th><th>Сегмент 3</th><th colspan="3">Сегмент 3</th><th>Сегмент 4</th><th>Сегмент 5</th></tr>
<tr><td>OSPFv2</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>OSPFv3</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td colspan="3">+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
</table>

Рисунок 4.3 – Расширение зоны действия протокола OSPFv3

передаваемого пакета IPv6. Поскольку размер итогового сетевого пакета (после инкапсуляции) не должен превышать ограничение MTU в 1500 байт. Для этого необходимо на стороне отправителя уменьшить поле блока данных на размер внедряемых служебных данных, который на иллюстрируемом примере составляет 24 байта.

На рисунке 4.2 показаны участки, доступные для работы версий протокола OSPF до настройки туннелирования.

Как можно видеть из рисунка OSPFv2 работает только в зоне адресов IPv4, а OSPFv3 – в зоне адресов IPv6. После построения туннелей картина немного меняется (рисунок 4.3).

Поскольку для работы протоколов динамической маршрутизации необходим сбор служебных данных о топологии сети с целью поиска оптимального маршрута продвижения IP-пакетов, то параллельная работа двух версий протокола OSPF может увеличить нагрузку на каналы связи. Каждая из версий протокола OSPF рассылает сообщения канального уровня, описывающие маршрутизаторы и сети, которые вместе образуют базу данных состояния каналов (LSDB) на каждом маршрутизирующем устройстве.

Следует учесть, что данные для построения LSDB собираются на канальном уровне, а основная работа версий протоколов идет на сетевом уровне. Поэтому есть возможность оптимизировать служебный трафик.

В случае любой архитектуры тоннелей необходимо снижение размера параметра MTU IP-пакета, что повлияет на конечную скорость передачи трафика дополнительно.

Таким образом, сам принцип моногенности IP-трафика может выполняться не на всем участке сети от источника трафика до пункта назначения, а лишь на тех участках, где происходит первичный и последующие этапы туннелирования данных.

Учитывая, что механизм туннелирования снижает зависимость от параметра TTL как максимального количества шагов пересылки, данный тип решения фактически является необъявленным техническим стандартом в современных условиях.

5 Сегментная маршрутизация и модификация IP-адресации

На текущий момент большое число видов сеансов связи между приложениями предъявляют различные сетевые требования [5]. Например, приложения реального времени предпочитают сетевые траектории с малой задержкой и низким джиттером, а приложения с большими данными предпочитают туннели с высокой пропускной способностью и низкими показателями потери пакетов. Решение состоит в том, чтобы позволить сетевым процессам управлять развитием сети и определять архитектуру сети. В частности, приложение предъявляет требования (к задержке, пропускной способности и скорости потери пакетов). Контроллер собирает информацию, такую как топология сети, использование полосы пропускания и информацию о задержке, и вычисляет явный путь, который удовлетворяет требованиям обслуживания (рисунок 5.1).

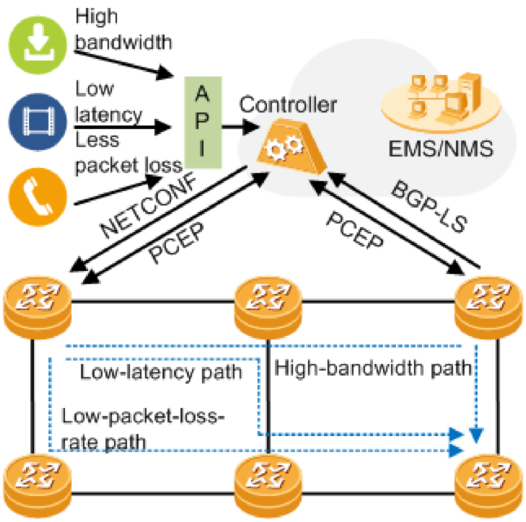


Рисунок 5.1 – Сервисно-управляемая сеть

Сегментная маршрутизация используется для простого определения явного пути. Узлы должны просто поддерживать информацию о сегментной маршрутизации, чтобы адаптироваться к требованиям сервиса в режиме реального времени.

Сегментная маршрутизация (Segment Routing, SR) – это протокол, предназначенный для пересылки пакетов данных в сети на основе исходных маршрутов. Маршрутизация сегмента MPLS – это маршрутизация сегмента на основе плоскости пересылки MPLS, которая также называется маршрутизацией сегмента. Маршрутизация сегментов разделяет сетевой путь на несколько сегментов и назначает идентификатор сегмента (SID) каждому сегменту и узлу пересылки сети. Сегменты и узлы расположены последовательно (список сегментов) для формирования пути пересылки.

Рост сегмента IoT-устройств, которые генерируют большой поток данных в направлении мобильного получателя (смартфон или другое автономное устройство пользователя) может потребовать многократное изменение маршрута доставки данных.

Частный случай, когда операционная система устройства автоматически переключается между поставщиком услуг связи, приведет к изменению IP-адреса абонента во время работы.

То есть IP-моногенность не выдерживается уже не по типу IP-адреса, а по его принадлежности провайдеру. Изменение геопозиции получателя в траектории доставки данных может привести к пересчету принадлежности к единой автономной зоне. Непрерывность сеанса связи в таких условиях не может быть обеспечена традиционными алгоритмами.

Критическая чувствительность к задержкам и разрывам в связи у современных приложений проиллюстрирована на рисунке 5.2.

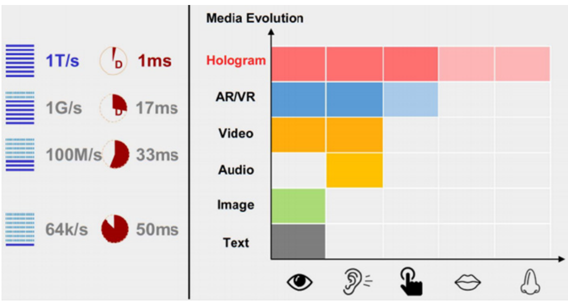


Рисунок 5.2 – Требования к полосе пропускания и задержкам контента разных типов

Протокол NewIP, предлагаемый специалистами компании Huawei, предоставляет более эффективные механизмы адресации и управления трафиком, а также решает проблему организации взаимодействия разнотипных сетей в условиях роста фрагментации глобальной сети [6].

Например, для IoT сетей желательно использование коротких адресов для экономии памяти и ресурсов, промышленные сети частично избавляются от IP-адресации для улучшения обмена данными, спутниковые сети не могут использовать фиксированную адресацию из-за постоянного перемещения узлов. Частично проблемы пытаются решить при помощи протокола 6LoWPAN (IPv6 over Low power Wireless Personal Area Networks), но без динамической адресации он малоэффективен.

В новой технологии предлагается использование IP-адреса переменной длины, способствующего организации обмена данными между различными типами сетей. Для абстрагирования сервисов от IP-адресов предусмотрена возможность отказа от указания адреса источника или адреса назначения. В частности, этот режим предлагается для экономии ресурсов при отправке данных с датчика, т. к. не предполагается изменение адресата.

Допускается определение разной семантики адресов (рисунок 5.3). Например, помимо классического формата IPv4/IPv6, можно использовать вместо адреса уникальные идентификаторы сервиса. Идентификаторы обеспечивают привязку на уровне обработчиков и сервисов, не привязываясь к местоположению серверов и устройств, а также их потенциально переменной адресацией сетевого уровня. Идентификаторы сервисов позволяют обойтись без DNS и маршрутизировать запрос к ближайшему обработчику, соответствующему указанному идентификатору. Например, датчики в умном доме могут отправлять статистику определённому сервису вообще без определения его адреса в классическом понимании.

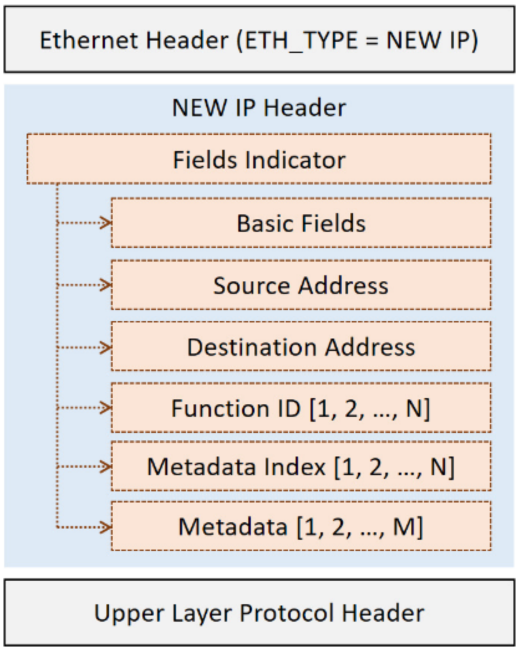


Рисунок 5.3 – Структура заголовка NewIP

В результате программный код оконечного устройства получит возможность гибко взаимодействовать напрямую (т. е. без устройств-посредников облачного и / или туманного типа вычислений), формируя направлено-адресуемый трафик сетевого уровня.

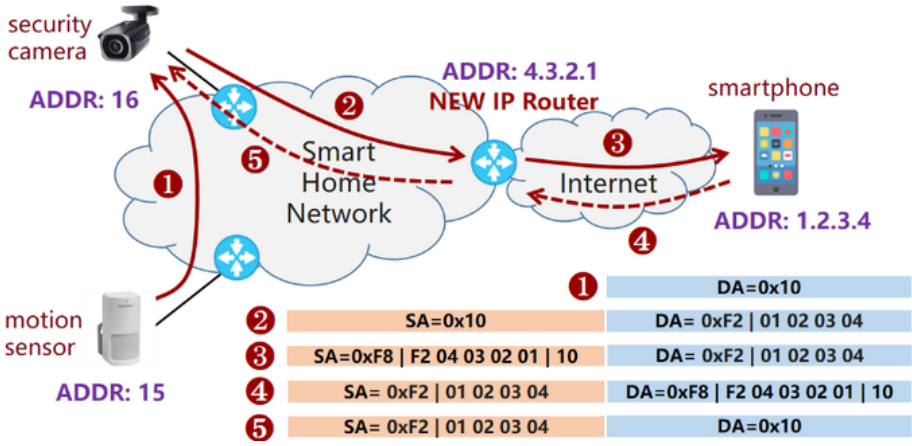


Рисунок 5.4 – Структура заголовка NewIP

На рисунке 5.4 в первом запросе от датчика движения отсутствует поле Source Address, поскольку устройство данного типа не предполагает обратного управления. Эти данные относятся к инициирующим событиям. На шаге 2 камера безопасности отправляет поток удаленному устройству Smartphone. Обеспечение ретрансляции трафика на данном шаге реализовано устройством NewIPRouter и внешней сетевой средой Internet. Таким образом, снижается нагрузка на устройство-источник при сохранении прямой уникальной идентификации адресата.

В шагах 3 и 4 можно увидеть функцию NewIP, аналогичную NAT по трансляции заголовка во внешний адрес, но с существенной оговоркой: удаленное устройство Smartphone имеет полную информацию об устройстве и уникальном идентификаторе сервиса, породившем информационный поток.

Заключение

Председатель IETF (Internet Engineering Task Force) Алисса Купер заявила, что развитие Интернета достигается с помощью модульных и слабо связанных строительных блоков, что является преимуществом Интернета.

Точка зрения Председателя IETF показывает, что сложившийся порядок технической анархии устраивает исполнительных лиц без учета мнения пользователей и разработчиков приложений.

Доклад Oxford Information Laboratory для стран-участников Северного Атлантического Альянса содержит предостережения о возможности внедрения разработчиками NewIP неких функций «нисходящего контроля над Интернет», что будет иметь последствия для безопасности и прав человека.

На собрании IETF в ноябре 2019 года представитель Huawei заявил, что NewIP представляет собой нисходящую общую архитектуру, дающую возможность тесно связать приложения с сетью, что и является первоначальным замыслом интернет-дизайна.

Разработка NewIP была предназначена только для удовлетворения технических требований быстрорастущего цифрового мира и не включала какой-либо механизм управления в структуру проекта. В то же время Huawei также отметила, что исследования и инновации в области новой информационной сети открыты для ученых и инженеров по всему миру, и они могут участвовать в этом и вносить в него свой вклад.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Программа сетевой академии Cisco CCNA 1 и 2*: вспомогат. Руководство; пер. с англ. – 3-е изд., испр. и доп. – М. и др.: Вильямс. – 2007. – 1156 с.

2. *Cisco IOS Network Address Translation* (NAT). – Режим доступа: http://staff.ustc.edu.cn/~james/cisco/nat/60.html. – Дата доступа: 13.04.2020.

3. *Understanding IPv6*: *Link-Local* “*Magic*”. – Режим доступа: https://www.networkingwithfish.com/understanding-ipv6-link-local-magic/. – Дата доступа: 13.04.2020.

4. *Инкапсуляция магистрального трафика центра обработки данных* / А.В. Воруев, О.М. Демиденко, В.Д. Левчук, П.Л. Чечет // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 88–93.

5. *New IP Technologies. Huawei Tech. Co., Ltd*. – Режим доступа: https://support.huawei.com/enterprise/en/doc/EDOC1000173015?section=j003. – Дата доступа: 13.04.2020.

6. *Huawei развивает протокол NEW IP, нацеленный на использование в сетях будущего*. – Режим доступа: https://www.opennet.ru/opennews/art.shtml?num=52648. – Дата доступа: 13.04.2020.

Поступила в редакцию 04.11.2020.

Проблемы физики, математики и техники, № 4 (45), 2020

ИНФОРМАТИКА

УДК 51-73; 531.3; 796.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНО-КООРДИНИРОВАННОГО ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СПОРТСМЕНА: ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ РЕШЕНИЯ

М.А. Киркор, А.Е. Покатилов, А.М. Гальмак, Ю.В. Воронович

Могилевский государственный университет продовольствия

MODELING OF COMPLEX-COORDINATED PURPOSEFUL MOVEMENT OF AN ATHLETE: PROBLEMS AND SOLUTIONS

M.A. Kirkor, A.E. Pokatilov, A.M. Gal'mak, Y.V. Voronovich

Mogilev State University of Food Technologies

Проанализированы современные методы биомеханического анализа сложно-координированных движений спортсмена, включающие натурный эксперимент и разработку механо-математических моделей целенаправленного движения. Показано, что одним из самых сложных и трудоемких этапов исследования является получение траекторных положений тела спортсмена при выполнении упражнения. Изучены особенности применения для этих целей технологии «захвата движения» на основе «компьютерного зрения». Показаны особенности разработки механо-математических моделей движения с учетом способа получения координат биомеханической системы (БМС). Предложен способ получения пространственных координат: с помощью видеосъемки камерами числом от 1 до 3 и более; с математическим моделированием движения в сферических и декартовых координатах.

***Ключевые слова**: биомеханический анализ, биомеханическая система, компьютерное зрение, кватернионы, локомоции, моделирование, пространственное движение, сферическая система координат.*

Modern methods of biomechanical analysis of complex coordinated movements of an athlete are analyzed, including a full-scale experiment and the development of mechanical and mathematical models of purposeful movement. It is shown that one of the most difficult and time-consuming stages of the study is to obtain the trajectory positions of the athlete's body when performing the exercise. The features of using “motion capture” technology based on “computer vision” for these purposes are studied. The features of the development of mechanical and mathematical models of motion are shown, taking into account the method of obtaining the coordinates of the biomechanical system (BMS). Another method for obtaining spatial coordinates is proposed: using video shooting with cameras from 1 to 3 or more, with mathematical modeling of motion in spherical and Cartesian coordinates.

***Keywords**: biomechanical analysis, biomechanical system, computer vision, quaternions, locomotion, modeling, spatial motion, spherical coordinate system.*

Введение

Любое исследовение локомоций в области биомеханики спорта начинается с проведения натурного эксперимента, то есть с определения координат биомеханической системы во время выполнения спортивного упражнения [1], [2]. При этом необходимо отметить, что движение человека исследуется не только в рамках биомеханики, оно также является предметом изучения в других областях человеческой деятельности, например, в индустрии развлечений, в робототехнике и пр. В индустрии развлечений, например, в кинематографе, в производстве компьютерных игр, при создании мультипликационных фильмов и т. д., получили широкое развитие технологии «захвата движения». Они основаны на различных видах съемки, в том числе и видеосъемки. Общим для этих областей и для биомеханики является то, что предмет исследований у них один и тот же – человек, движение его опорно-двигательного аппарата, в том числе его локомоции [3], [4]. Общими являются и методы исследования, которые при биомеханическом анализе спортивных упражнений должны учитывать специфику биомеханики и развиваться с учетом целей и задач данного научного направления.

Предварительно проведенные исследования показали перспективность использования такой технологии «захвата движения» как «компьютерное зрение» [5]. Данная технология относится к безмаркерным и обеспечивает получение координат человеческого тела за счет анализа видеоизображения с помощью специальных компьютерных программ в автоматическом режиме, что, во-первых, значительно снижает трудоемкость расшифровки данных видеосъемки, и, во-вторых, позволяет на порядки усложнить решаемые в биомеханике задачи, а также ставить новые, ранее недоступные при использовании общепринятых на сегодняшний день методов и методик.

Отметим также, что при исследовании пространственного движения с использованием любых методов возникают общие задачи, как, например, показанно на рисунках 0.1, *а*) – *г*). Здесь представлен прямой удар в среднюю часть

© *Киркор М.А., Покатилов А.Е., Гальмак А.М., Воронович Ю.В.*, 2020

а) *б*) *в*) *г*)

Рисунок 0.1 – Прямой удар рукой в среднюю часть туловища

а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рисунок 0.2 – Круговой удар ногой с разворота в область головы

туловища [6]. Анализ рисунков показывает, что, во-первых, движение такого сложного технического действия является пространственным, а, во-вторых, во время выполнения приема число опорных и контактых точек биомеханической системы (БМС) является переменным. Это принципиальный момент, так как с изменением числа и вида контактов спортсмена по рисункуам 0.1, *а*) – *г*) меняются и сами механо-математические модели, и методы биомеханического анализа.

Например, на рисунке 0.1, *а*) спортсмен имеет 2 точки опоры. При переходе к рисунку 0.1, *б*) в какой-то момент спортсмен имеет 1 опорную точку, а на рисунке 0.1, *г*) уже 3. В общем случае в опоре возникает до 6 неизвестных реакций, а значит для всей БМС всего 18, и система становится статически неопределимой.

Изменение числа опорных точек, а также пространственный характер движения БМС хорошо виден на рисунках 0.2, *а*) – *д*), на которых показан круговой удар ногой с разворота в область головы.

Биомеханический анализ показанных спортсменами упражнений требует специальных видов съемки, например, с помощью технологии «компьютерного зрения», разработки алгоритмов расчета БМС и соответствующих математических моделей движения.

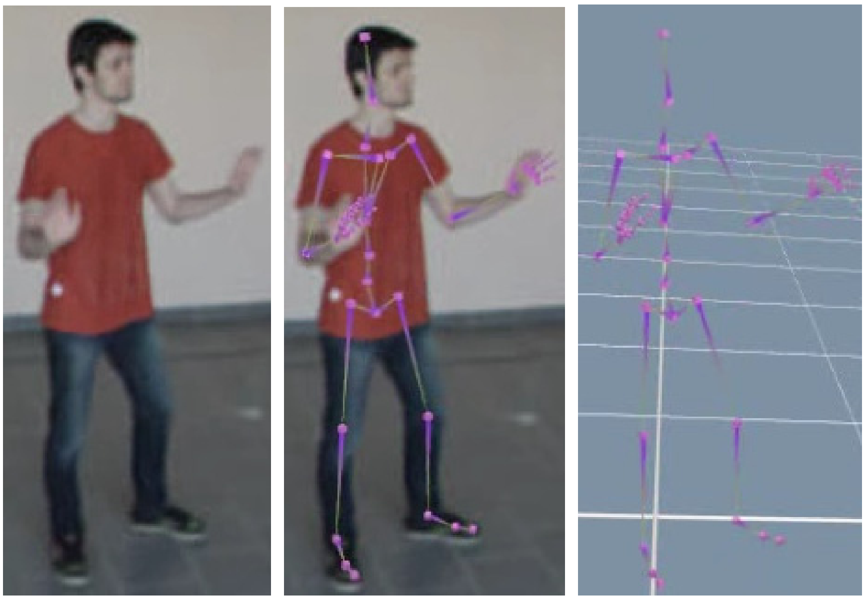
Также отметим, что исследование пространственных локомоций БМС возможно и с помощью обычной видеозаписи большим числом видеокамер с их синхронизацией во время съемок. В этом случае, кроме общих проблем пространственного движения сложных систем, каковой является опорно-двигательный аппарат человека, возникают проблемы разработки механо-математических моделей движения биомеханической системы и выбора системы координат, в которой будет описываться движение. Здесь инструментальные средства и методы создания математических моделей связаны между собой и взаимозависимы. При этом надо учитывать, что даже при съемке большим числом камер часто не учитывают пространственный характер движения звеньев БМС, а значит и значительное искажение их размеров.

1 Исследование пространственного движения биомеханических систем с использованием технологии «захвата движения»

В настоящее время в биомеханическом анализе для получения координат звеньев биомеханической системы используют различные технологии «захвата движения», в основном маркерные. Безмаркерные имеют преимущество перед первыми – они не требуют специальных помещений, одежды и оборудования, для их осуществления необходимы лишь специализированные компьютерные программы [3]. На рисунках 1.1, *а*) – *в*) представлен пример использования безмаркерной технологии «захвата движения» в виде «компьютерного зрения». На рисунке 1.1, *а*) показан кадр видеосъемки, записанной программой iPi Recorder, на рисунке 1.1, *б*) представлен тот же кадр движения человека, обработанный в автоматическом режиме программой iPi Mocap Studio. Результатом является получение координат звеньев БМС в графическом и текстовом виде в формате BVH. Дальнейшие расчеты выполняют с помощью кватернионов [7]. На рисунке 1.1, *в*) выделен скелет БМС, который представляет собой его кинематическую модель.

Модель, применяемая в «компьютерном зрении» максимально приближает уравнения движения к реальному пространственному движению БМС. При этом возникают определенные проблемы на кинематическом и динамическом уровнях. Рассмотрим этот момент подробнее.

На рисунках 1.2 показан удар ногой в корпус, а на рисунке 1.3 – прямой удар рукой в среднюю часть туловища. В момент удара по рисунку 1.2 в опорной и ударной ногах возникают по 6 реакций – 3 силы X_1, Y_1, Z_1, и 3 момента M_{X1}, M_{Y1}, M_{Z1} в опорной ноге; а также 3 силы X_2,



а) *б*) *в*)

Рисунок 1.1 – Пример использования технологии «компьютерного зрения»: *а*) видеокадр из программы iPi Recorder; *б*) расшифрованный видеокадр из программы iPi Mocap Studio; *в*) модель БМС

Рисунок 1.2 – Удар ногой в корпус

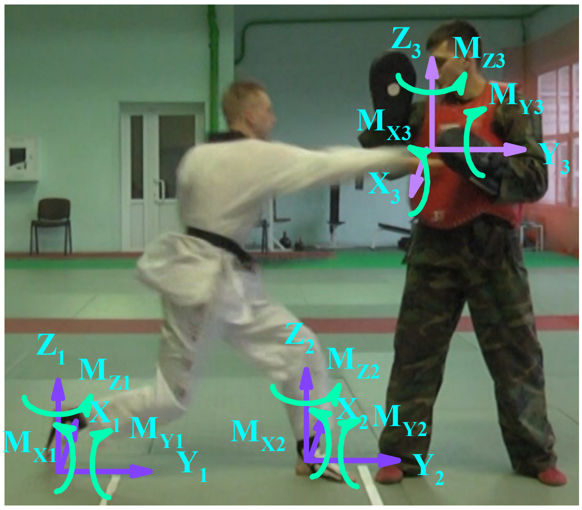


Рисунок 1.3 – Прямой удар рукой в среднюю часть туловища

Y_2, Z_2, и 3 момента M_{X2}, M_{Y2}, M_{Z2} в ноге ударной. Общее число неизвестных равняется 12. Анализ силовой схемы необходимо сочетать с анализом реальной техники удара. Последний позволяет считать равными нулю реакции M_{X1}, M_{Y1}, Z_2, M_{X2}, M_{Y2}, M_{Z2}. Таким образом, имеем 6 неизвестных реакций, и биомеханическая система является статически определимой.

На рисунке 1.3 в случае прямого удара рукой в конечной фазе имеем реакции X_1, Y_1, Z_1, M_{X1}, M_{Y1}, M_{Z1} в одной опорной ноге, и X_2, Y_2, Z_2, M_{X2}, M_{Y2}, M_{Z2} – во второй. Также в контакте при ударе в общем случае имеем неизвестные реакции X_3, Y_3, Z_3, M_{X3}, M_{Y3}, M_{Z3}. Всего 18 неизвестных реакций, и БМС является 12 раз статически неопределимой. Но анализ технического действия по рисунку 1.3 позволяет в ряде случаев минимизировать число неизвестных до 9. Принимаем равными нулю реакции M_{X1}, M_{Y1}, M_{X2}, M_{Y2}, M_{Z2}, Z_3, M_{X3}, M_{Y3}, M_{Z3}. Система становится 3 раза статически неопределимой.

Таким образом, можно констатировать, что пространственные расчетные схемы силового анализа являются чрезвычайно динамичными, переходя многократно из состояния статической определимости в состояние статической неопределимости и обратно. Это требует разработки методов расчета статической неопределимости системы, которая на самом деле статической не является. Методы механики расчета статически неопределимых систем исходят из нулевых перемещений опорных точек системы и в прямом виде для анализа биомеханических систем не подходят.

На рисунке 1.4 показана кинематическая модель БМС, с обозначением всех звеньев, а на рисунке 1.5 использование такой модели в исследовании пространственного движения. В данном случае на рисунке показан круговой удар ногой в момент контакта в области головы. Кинематическая модель БМС совмещена с изображением спортсмена.

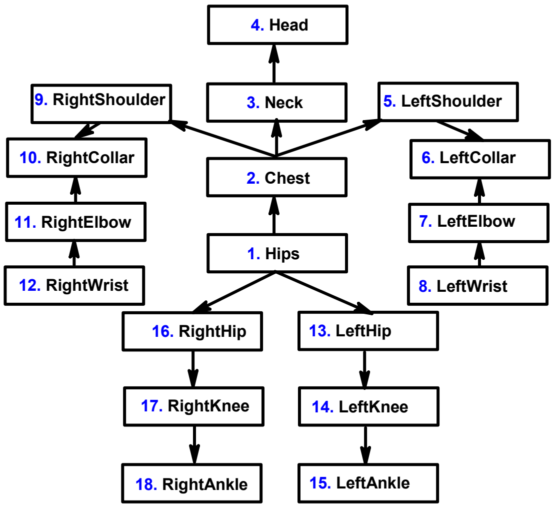


Рисунок 1.4 – Кинематическая модель БМС в «компьютерном зрении»

Рисунок 1.5 – Круговой удар ногой в момент контакта в области головы

По сути дела, на рисунках 1.4 и 1.5 модель БМС представляет собой графическое дерево, а с точки зрения математики является графом. Биомеханический анализ требует определенного порядка обхода узлов графа с учетом анатомии человека, техники спортивного упражнения и конкретной задачи анализа. Исследования показывают, что для этого необходимо математическую модель разбить на 7 структурных единиц (блоков). Для примера запишем уравнение для суставной реакции в виде функциональной связи по рисунку 1.4:

$$F_i = f_1 + f_2 + \sum_{j=3}^{N_г} f_j + \sum_{j=5}^{N_p^л} f_j + \sum_{j=9}^{N_p^{пр}} f_j + \sum_{j=13}^{N_н^л} f_j + \sum_{j=16}^{N_н^{пр}} f_j \quad (1.1)$$

где F_i – уравнение, описывающее биомеханическое состояние i-го звена; f_1 – уравнение, описывающее биомеханическое состояние 1-го звена (бедра); f_2 – уравнение, описывающее биомеханическое состояние 2-го звена (туловище); $\sum_{j=3}^{N_г} f_j$ – уравнение, описывающее биомеханическое состояние звеньев 3 и 4 (голова); $\sum_{j=5}^{N_p^л} f_j$ – уравнение, описывающее состояние звеньев 5–8 (левая рука); $\sum_{j=9}^{N_p^{пр}} f_j$ – уравнение, описывающее состояние звеньев 9–12 (правая рука); $\sum_{j=13}^{N_н^л} f_j$ – уравнение, описывающее состояние звеньев 13–15 (левая нога); $\sum_{j=16}^{N_н^{пр}} f_j$ – уравнение, описывающее состояние звеньев 16–18 (правая нога).

Структура рекуррентных уравнений в динамике по выражению (1.1) включает в себя 7 блоков, которые между собой не пересекаются, а являются продолжением друг друга, совместно составляя опорно-двигательный аппарат спортсмена. В случае расчета динамических характеристик конкретного звена или сустава, из выражения (1.1) исключаются функции, не влияющие на исследуемый элемент, например, при силовом анализе БМС, а число звеньев соответствующей структуры $N_г$ (голова), $N_p^л$ (левая рука), $N_p^{пр}$ (правая рука), $N_н^л$ (левая нога), $N_н^{пр}$ (правая нога) при необходимости уменьшается до номера изучаемого элемента.

При биомеханическом анализе динамической структуры упражнения, функциональная связь по выражению (1.1) может несколько изменяться в зависимости от вида динамических характеристик. Например, в математических моделях моментов управляющих сил мышечной системы число блоков может быть уменьшено, но принцип их сочетания остается прежним и диктуется задачей динамики, которая решается в конкретном исследовании.

Следующим важным моментом является выбор способа представления движения БМС, которое является сложным, то есть включающим переносное и относительное движения. Так в робототехнике движение роботов и манипуляторов делится на глобальное, региональное и локальное [8]–[10]. Данная классификация подходит и для задач биомеханики, так как локомоции в биомеханики и являются аналогом региональных

а) *б*) *в*) *г*)

Рисунок 1.6 – Видеозапись прямого удара рукой в среднюю часть туловища с использованием короткого подшага

движений в робототехнике – это движение конечностей.

Другой подход заключается в представлении движения БМС как сложного. Выбирается полюс, который связан с БМС и перемещается относительно неподвижной (абсолютной) системы координат. Движение же звеньев рассматривается в несколько этапов: как движение относительно проксимального (родительского) сустава; а движение родительских суставов как сумма движений относительно полюса.

На рисунках 1.6, *а*) – *г*) показано перемещение спортсмена в абсолютной системе координат OXYZ (рисунок 1.6, *а*). На рисунке 1.6, *б*) в качестве примера показан полюс П в области стопы, на рисунке 1.6, *в*) – в тазобедренной области.

Разные способы выбора полюса в одном упражнении показаны только в качестве иллюстрации, так как вариант выбора в каждом конкретном случае должен быть только один. Математические модели движения разрабатываются исходя из принятой системы координат и классификации движения.

2 Моделирование пространственного движения биомеханических систем в сферической системе координат

В теории и практике биомеханического анализа движения в спорте для исследования сложно-координированных упражнений видеосъемку выполняют как минимум несколькими видеокамерами. При этом возникает несколько проблем. Это, во-первых, выбор координатной системы, связанной с методикой видеосъемки , с помощью которой необходимо просто, быстро и понятно описать пространственное движение БМС математически. По этим критериям подходит сферическая система координат [11]. Во-вторых, необходимо разработать методику такой съемки, так как в натурном эксперименте возможны ситуации, когда определенные звенья исчезают из поля зрения видеокамер.

На рисунке 2.1 показана схема видеосъемки спортивного упражнения из тяжелой атлетики 3-я камерами, и там же дана система координат [12], [13].

На рисунке 2.2 представлена схема сочетаний зон видимости при съемке несколькими камерами. Здесь бедро спортсмена закрыто туловищем для камеры № 1, но попадает в зону видимости для видеокамеры № 3.

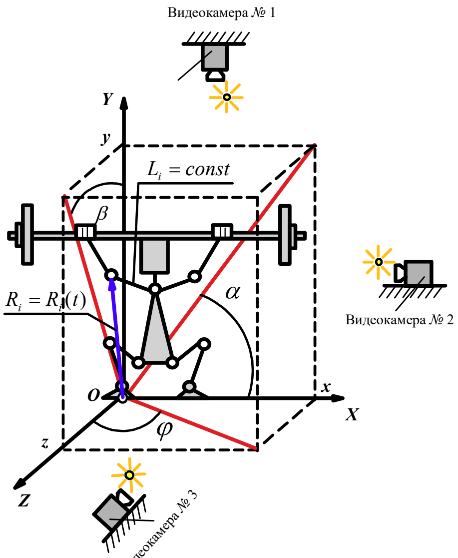


Рисунок 2.1 – Схема пространственной видеосъемки упражнения

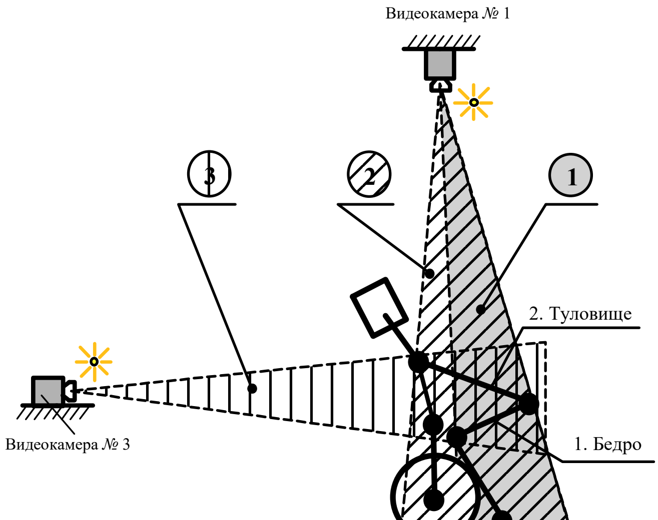
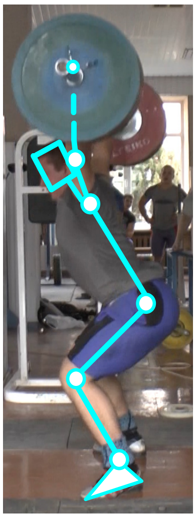
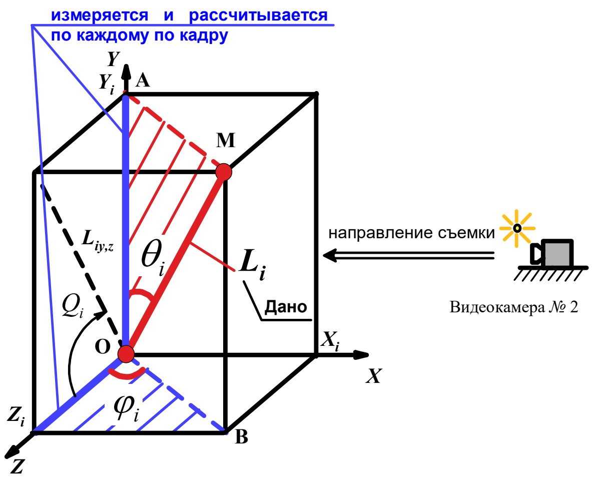


Рисунок 2.2 – Сочетание зон видимости звеньев с разных камер

а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рисунок 2.3 – Рывок. Вес штанги 140 кг





а) *б*)

Рисунок 2.4 – Положения звеньев БМС в пространстве в проекции на сагиттальную плоскость: *а*) кадр видеосъемки; *б*) пространственные координаты звена

На рисунках 2.3, *а*) – *д*) показано выполнение рывка штанги весом 140 кг [14]–[17]. Анализ рисунков 2.1–2.3 показывает, что наиболее информативна видеокамера № 2. На рисунке 2.4, *а*) показан кадр такой видеосъемки совмещенной с моделью БМС. А на рисунке 2.4, *б*) представлена схема координатных систем: декартовой прямоугольной и сферической при съемке камерой № 2.

Измерив на кадре проекции Y_i, Z_i каждого звена на продольную Y и сагиттальную Z оси и имея действительные размеры звена L_i, легко рассчитать фронтальную координату X_i, и углы сферической системы координат: наклона – θ, и азимута – φ. На основе рисунка 2.4 *б*) запишем уравнения для расчета координат и проекций

$$\theta_i = \arccos\frac{Y_i}{L_i}, \tag{2.1}$$

$$MA = OB = \sqrt{L_i^2 - Y_i^2}, \tag{2.2}$$

$$\varphi_i = \arccos\frac{Z_i}{OB} = \arccos\frac{Z_i}{\sqrt{L_i^2 - Y_i^2}}, \tag{2.3}$$

$$X_i = OB\sin\varphi_i = \sqrt{L_i^2 - Y_i^2}\sin\varphi_i. \tag{2.4}$$

Таким образом, выражения (2.1)–(2.4) позволяют получить пространственные декартовы и сферические координаты из результатов расшифровки кадров только одной (боковой) видеокамеры № 2.

При расчете необходимо действительные размеры звеньев перевести в масштаб кадра, или наоборот, проекции с кадра пересчитать в реальный масштаб размеров звеньев БМС.

Дополнительно найдем угол Q_i, так как именно он принимается за обобщенную координату при видеосъемке одной камерой № 2 в случае представления кинематической модели БМС как плоской в проекции на сагиттальную плоскость

$$Q_i = \operatorname{arctg}\frac{Y_i}{Z_i}. \qquad (2.5)$$

В формуле (2.5) нет необходимости учитывать масштаб проекций.

Отметим, что применительно к задачам биомеханического анализа БМС имеем следующую функциональную связь в уравнениях движения для сферических координат отдельного звена

$$L_i = const, \qquad (2.6)$$

$$\theta_i = \theta_i(t), \qquad (2.7)$$

$$\varphi_i = \varphi_i(t). \qquad (2.8)$$

Таким образом, в рамках исследуемой задачи целенаправленного движения БМС и принятой для этого кинематической модели опорно-двигательного аппарата спортсмена, обобщенными координатами звена относительно проксимального сустава являются угол наклонения θ и азимутальный угол φ.

В случае рассмотрения сферических координат в абсолютной (неподвижной) координатной системе имеем 3 обобщенные координаты для любой i-ой точки: R_i, θ_{R_i}, φ_{R_i}. Тогда по рисунку 2.4, *б*) имеем

$$R_i = R_i(t), \qquad (2.9)$$

$$\theta_{R_i} = \theta_{R_i}(t), \qquad (2.10)$$

$$\varphi_{R_i} = \varphi_{R_i}(t). \qquad (2.11)$$

Точкой i может быть сустав, центр масс i-го звена и пр.

На основе уравнений (2.1)–(2.11) разрабатываются механо-математические модели движения биомеханической системы, исходя из принятой классификации движения БМС в целом и отдельно по звеньям. Наиболее удобно движение БМС показывать как сложное: с движением полюса и отдельно вращением звеньев в проксимальных суставах.

Заключение

Сложно-координированные движения в биомеханике спорта включают в себя движения всех частей биомеханической системы, при этом наиболее общим и сложным случаем является пространственное движение человека. При этом получение траекторных положений спортсмена во время выполнения упражнения или иного технического действия является одним из важнейших и трудоемких этапов биомеханического анализа целенаправленного движения спортсмена. На современном этапе развития инструментальных средств исследования и методов моделирования движения перспективными являются две методики моделирования локомоций биомеханической системы: на основе технологии «захвата движения» с использованием «компьютерного зрения» и моделирование движения в сферической системе координат.

Проведенные нами исследования и апробация «компьютерного зрения» для биомеханического анализа пространственных локомоций человека позволили решить следующие задачи в биомеханическом анализе пространственного движения:

– увеличить число степеней свободы используемой кинематической модели биомеханической системы, приблизив ее движение к движению реального опорно-двигательного аппарата человека;

– автоматизировать процесс получения траекторных положений спортсмена в цифровом виде и на графическом уровне;

– разработать механико-математические модели целенаправленного движения на основе алгебры кватернионов, тем самым создавая основу для последующего биомеханического синтеза пространственного движения, так как кватернионы позволяют минимизировать трудоемкость вычислительного эксперимента, что составляет основную трудность в синтезе сложных систем;

– выявить проблемы и поставить задачи в области разработки математических моделей пространственного движения, например, в области разработки методов силового анализа статически неопределимых систем в движении.

Математическое моделирование целенаправленного движения биомеханической системы в сферической системе координат является еще одним способом исследования пространственного движения и позволяет решить следующие задачи:

– упростить видеосъемку спортивного упражнения, используя не только специальное оборудование, но и обычные видеокамеры;

– в ряде случаев получить пространственную картину движения с помощью одной камеры;

– значительно увеличить точность биомеханического анализа на кинематическом и динамическом уровнях при получении траекторных положений спорстмена по результатам видеосъемки одной камерой;

– при необходимости перевести данные биомеханического анализа в другие системы координат, например, в декартовую прямоугольную.

Описание движения в сферической системе координат не решает проблему автоматизации видеосъемок и расчетов координат – это отдельная задача, в отличие от технологии «захвата движения». Но он более доступен для получения линейных и угловых координат звеньев биомеханической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Загревский*, *В.И.* Биомеханика физических упражнений: учебное пособие. – Могилев: МГУ им. А.Л. Кулешова, 2003. – 140 с.

2. *Бегун*, *П.И.* Биомеханика: учеб. для вузов / П.И. Бегун, Ю.А. Шукейло. – СПб. : Политехника, 2000. – 463 с.

3. *Киркор*, *М.А.* Исследование пространственного движения в биомеханике спорта с помощью кватернионов / М.А. Киркор, А.Е. Покатилов, А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 92–97.

4. *Исследование пространственного движения в биомеханике спорта* / А.Е. Покатилов, М.А. Киркор, В.П. Пахадня, В.Н. Попов // Биомеханика двигательных действий и биомеханический контроль в спорте: материалы VII Всероссийской с международным участием научно-практической конференции, 21–22 ноября 2019 г., Москва. – Рос. гос. акад. физ. культуры, спорта и туризма, Моск. гос. акад. физ. Культуры; ред.-сост. А.Н. Фураев. – М.: Малаховка, 2019. – С. 102–107.

5. *Киркор*, *М.А.* Математические модели движения в биомеханике спорта / М.А. Киркор, А.Е. Покатилов, А.М. Гальмак // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля: материалы Междунар. науч. пр. конф., 25 октября 2019 г., Гомель. – УО «Белорусский государственный университет транспорта». – Гомель: БелГУТ, 2019. – С. 18–21.

6. *Воронович*, *Ю.В.* Профессионально-прикладная физическая подготовка. Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей 1-93 01 01 «Правовое обеспечение общественной безопасности», 1-93 01 03 «Правовое обеспечение оперативно-розыскной деятельности» / Ю.В. Воронович, Д.А. Ревин. – Могилев. – 76 с.

7. *Kulpers*, *J.B.* Quaternions and rotation sequences / J.B. Kulpers. – Princeton, New Jersey. – 1999. – 371 с.

8. *Лесков*, *А.Г.* Кинематика и динамика исполнительных механизмов манипуляционных роботов: учебное пособие / А.Г. Лесков, К.В. Бажинова, Е.В. Селиверстова. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 102 с.

9. *Корендясев*, *А.И.* Теоретические основы робототехники. В 2-х кн. / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес; отв. ред. С.М. Каплунов; Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. – М.: Наука, 2006. – Кн. 1. – 2006. – 383 с.

10. *Булгаков*, *А.Г.* Промышленные роботы. Кинематика, динамика, контроль и управление. / А.Г. Булгаков, В.А. Воробьев // Серия «Библиотека инженера». – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2007. – 448 с.

11. *Григорьев*, *А.Ю.* Сферическое движение твердого тела: учебн.-метод. пособие / А.Ю. Григорьев, Д.П. Малявко, Л.А. Фёдорова // СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 37 с.

12. *Гусак*, *А.А.* Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск: Навука і тэхніка, 1991. – 480 с.

13. *Воронович*, *Ю.В.* Биомеханика тяжелоатлетических упражнений: монография / Ю.В. Воронович, Д.А. Лавшук, В.И. Загревский; М-во внутр. дел Респ. Беларусь, УО «Могилевский институт Министерства внутренних дел Республики Беларусь». – Могилев: Могилевский институт МВД, 2014. – 196 с.

14. *Дубровский*, *В.И.* Биомеханика / В.И. Дубровский, В.Н. Федорова. – М.: ВЛАДОС-ПРЕСС, 2003. – 672 с.

15. *Киркор*, *М.А.* Математическое описание синтеза целенаправленного движения спортсмена / М.А. Киркор, А.Е. Покатилов, А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навук. – 2020. – № 1 (55). – С. 44–50.

16. *Воронович*, *Ю.В.* Сравнительный биомеханический анализ основных динамических характеристик техники рывка в тяжелой атлетике / Ю.В. Воронович, Д.А. Лавшук, В.И. Загревский // Мир спорта. – 2013. – № 1 (50). – С. 35–40.

17. *Воронович*, *Ю.В.* Вариация основных кинематических характеристик штанги в тяжелоатлетическом упражнении «рывок» в зависимости от массы спортивного снаряда / Ю.В. Воронович, Д.А. Лавшук // Мир спорта. – 2015. – № 2 (59). – С. 66–69.

Поступила в редакцию 17.09.2020.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

– соответствовать профилю журнала;

– являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

– содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'а и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

– сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

– сведения об авторах;

– экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

– договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу http://pfmt.gsu.by.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).