ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№2 (43) 2020

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря* 2009 *г.
Выходит 4 раза в год

№ 2 (43) 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Князев М.А. Одно- и двухсолитонное решения уравнения Кортевега-де Фриза в различных системах координат 7

Козадаев К.В. Кинетика конденсации в процессе адиабатического расширения абляционных факелов серебра при атмосферном давлении 11

Короткевич С.В., Свиридова В.В. Структурно-масштабные уровни деформации поверхностного слоя никеля 17

Руденков А.С., Ярмоленко М.А. Формирование структурированных покрытий на основе углерода и полиакриламида, влияние термообработки на их фазовый состав и морфологию 23

Толкачёв А.И., Капшай В.Н., Шамына А.А. Отражение нормально падающей электромагнитной волны от периодической биизотропной структуры на подложке 28

Федосенко Н.Н., Емельянов В.А., **Кулеш Е.А.** Оптические свойства и морфология поляризационного покрытия на основе слоев SiO_2 и ZrO_2 39

Хорошко В.В., **Гременок В.Ф.**, **Цырельчук И.Н., Аксенов О.Д., Ли В.К.** Структурные, морфологические и оптические свойства тонких пленок CdS 43

МАТЕМАТИКА

Бородич Р.В., Кучеров Р.А. О максимальных абнормальных подгруппах близких к $\mathfrak{F}$-абнормальным 46

Васильев А.Ф. О произведениях обобщенно абнормальных сверхразрешимых подгрупп конечных групп 52

Васильева Т.И., Коранчук А.Г. Об одной операции на формациях конечных групп 58

Гальмак А.М. О косых элементах в полиадических группах специального вида 64

Казимиров Г.Н. О совпадении обобщённых модулей гладкости на некотором классе функций 69

Каморников С.Ф., Тютянов В.Н. Конечные простые группы, все максимальные подгруппы которых имеют нечетный индекс 71

Коновалова М.Н., Монахов В.С. Конечные группы с некоторыми субнормальными 2-максимальными подгруппами 75

Мироненко В.И., Мироненко В.В. Проблема центра-фокуса и отражающая функция 80

Рябченко Н.В., Волков Д.А., Старовойтов А.П. Критерий существования и единственности полиортогональных многочленов второго рода 85

ИНФОРМАТИКА

Липницкий С.Ф. Синтез запросов и поиск альтернатив в системе информационной поддержки принятия решений 91

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– технические (информатика, вычислительная техника и управление);
– физико-математические (физика, математика).

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *Г.Н. Петухова*, *Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 06.06.20. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,62. Уч.-изд. л. 10,13. Тираж 100 экз. Заказ № 254.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2020
© Проблемы физики, математики и техники, 2020
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2020

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

***Published since December*, 2009**
There are 4 times a year

№ 2 (43) 2020

CONTENTS

PHYSICS

Knyazev M.A. One- and two-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation in various coordinate systems 7

Kozadaev K.V. Kinetics of condensation during adiabatic expansion of an ablative silver jet at atmospheric pressure conditions 11

Korotkevich S.V., Sviridova V.V. Structural and scale levels of deformation of the surface layer of nickel 17

Rudenkov A.S., Yarmolenko M.A. Formation of structured coatings based on carbon and polyacrylamide, influence of thermal treatment on their phase composition and morphology 23

Talkachov A.I., Kapshai V.N., Shamyna A.A. Reflection of a normally incident electromagnetic wave from a periodic biisotropic structure on a substrate 28

Fedosenko N.N., Emelyanov V.A., Kulesh E.A. Optical properties and morphology of polarization coating based on the SiO_2 and ZrO_2 layers 39

Khoroshko V.V., Gremenok V.F., Tsyrelchuk I.N., Aksyonov O.B., Li V.K. Structure, morphology and optical characteristics of CdS thin films 43

MATHEMATICS

Borodich R.V., Kucherov R.A. On maximal abnormal subgroups close to $\mathfrak{F}$-abnormal 46

Vasil'ev A.F. On products of generalized abnormal supersoluble subgroups of finite groups 52

Vasilyeva T.I., Koranchuk A.G. On one operation on the formations of finite groups 58

Gal'mak A.M. On skew elements in polyadic groups of special form 64

Kazimirov G.N. On the coincidence of generalized smoothness modules on some class of functions 69

Kamornikov S.F., Tyutyanov V.N. Finite simple groups all the maximal subgroups of which have odd index 71

Konovalova M.N., Monakhov V.S. Finite groups with some subnormal 2-maximal subgroups . . . 75

Mironenko V.I., Mironenko V.V. The center-focus problem and reflecting function 80

Ryabchenko N.V., Volkov V.A., Starovoitov A.P. A criterion for the existence and uniqueness of polyorthogonal polynomials of the second type 85

INFORMATION SCIENCE

Lipnitsky S.F. Query synthesis and search of alternatives in the system of information support for decision making 91

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

– Technics (Informatics, Computer Science and Control);

– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

ФИЗИКА

УДК 530.182

ОДНО- И ДВУХСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-де ФРИЗА В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

М.А. Князев

Белорусский национальный технический университет, *Минск*

ONE- AND TWO-SOLITON SOLUTIONS OF THE KORTEWEG-de VRIES EQUATION IN VARIOUS COORDINATE SYSTEMS

M.A. Knyazev

Belarusian National Technical University, *Minsk*

Уравнение Кортевега-де Фриза рассмотрено в двух системах координат: неподвижной и движущейся относительно первой с некоторой скоростью. Приведены одно- и двухсолитонные решения обоих уравнений и проанализированы их свойства.

***Ключевые слова**: уравнение Кортевега-де Фриза*, *односолитонное решение*, *двухсолитонное решение*, *прямой метод Хироты.*

The Korteweg-de Vries equation is considered in the two systems of coordinates: in a rest system and in a system moving with some velocity. One- and two-soliton solutions for the both equations are presented and analyzed.

Keywords: *Korteweg-de Vries equation*, *one-soliton solution*, *two-soliton solution*, *Hirota direct method.*

Введение

Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) относится к числу наиболее изученных нелинейных уравнений в частных производных. Оно впервые было получено в теории мелкой воды для невязкой несжимаемой жидкости в однородном поле тяготения и позволяет учесть дисперсионные эффекты. В отличие от известного уравнения Буссинеска при выводе уравнения КдФ рассматриваются волны, распространяющиеся только вправо (в положительном направлении оси x). Уравнение КдФ относится к полностью интегрируемым нелинейным уравнениям, т. е. допускает построение решений, описывающих связанные состояния произвольного числа одиночных солитонов, и для него можно получить бесконечное число законов сохранения. Это уравнение применяется для описания широкого круга физических явлений при движении жидкостей, в том числе и многослойных, распространении ионных акустических волн в плазме, описании электрических цепей, распространении световых импульсов в оптоволоконных материалах и т. д. В настоящее время известны несколько типов решения этого уравнения: уединенные волны типа солитонов, связанные многосолитонные состояния, кноидальные волны и суперпозиции кноидальных волн. Существует обширная литература, посвященная уравнению КдФ (см. монографии [1]–[10]).

В настоящей работе рассмотрена задача в (1 + 1)-мерном случае. Первоначально уравнение КдФ было получено в виде [1]:

$$u_t + u_x + \frac{3\alpha}{2} u u_x + \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0, \qquad (0.1)$$

где $\alpha = a/h_0$; $\beta = h_0^2/l^2$; h_0 – некоторая постоянная глубина водоема (канала); l – характерная длина волны в направлении её распространения; a – характерная амплитуда волны в теории мелкой воды. Индекс у функции u обозначает частную производную по соответствующей независимой переменной: $u_t = \partial u/\partial t$ и т. п. Уравнение (0.1) записано в безразмерных переменных. Оно получено при условии $\eta_0/h_0 << 1$, где $\eta_0 = \alpha h_0$, откуда следует, что $\alpha << 1$. Это означает, что амплитуда волны мала по сравнению с глубиной канала. Поскольку в теории мелкой воды глубина канала, вообще говоря, невелика, то, можно сказать, что уравнение КдФ описывает невысокие волны в неглубоком водоеме. В тоже время учет дисперсионных эффектов и нелинейных слагаемых при выводе этого уравнения привел к тому, что задача стала существенно нелинейной, т. е. для её решения неприменима теория возмущений.

Уравнение КдФ можно записать и в другом виде. Перейдем от исходной неподвижной системы координат (x,t) к новой системе координат $(\hat{x},\hat{t})$, движущейся с некоторой характерной для теории мелкой воды скоростью. Новые координаты будут связаны с исходными соотношениями [11]:

© *Князев М.А.*, 2020

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{3}{2}}(x - t),$$

$$\hat{t} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha t. \qquad (0.2)$$

Видно, что в безразмерных координатах характерная скорость равна единице. Теперь уравнение (0.1) примет вид (при $\alpha = \beta$)

$$u_{\hat{t}} + 6uu_{\hat{x}} + u_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} = 0. \qquad (0.3)$$

Именно в таком виде уравнение КдФ рассматривается практически во всех работах. Несмотря на то, что уравнение КдФ, особенно в виде (0.3), исследовано весьма подробно, его существенно нелинейный характер позволяет найти новые особенности решения. В частности, в данной работе показано, что переход от одной системы координат к другой приводит к дополнительным условиям на параметры решения.

1 Односолитонное решение

Построим односолитонное решение уравнения (0.1) при помощи прямого метода Хироты [12]. Если ввести новую зависимую переменную

$$u = \sigma \frac{d^2}{dx^2}(\ln F), \qquad (1.1)$$

где $F = F(x,t)$ – неизвестная функция, σ – постоянная, которая будет определена ниже, то уравнение (0.1) можно записать в виде

$$6\frac{F_{xt}}{F} - 6\frac{F_x F_t}{F^2} + 6\frac{F_{xx}}{F} - 6\frac{F_x^2}{F^2} + \frac{9}{2}\alpha\sigma\frac{F_{xx}^2}{F^2} -$$
$$-9\alpha\sigma\frac{F_{xx}F_x^2}{F^3} + \frac{9}{2}\alpha\sigma\frac{F_x^4}{F^4} + \beta\frac{F_{xxxx}}{F} -$$
$$-4\beta\frac{F_{xxx}F_x}{F^2} - 3\beta\frac{F_{xx}^2}{F^2} + 12\beta\frac{F_x^2 F_{xx}}{F^3} - 6\beta\frac{F_x^4}{F^4} = 0. \qquad (1.2)$$

Метод Хироты наиболее эффективно работает в случае так называемых билинейных уравнений. Чтобы уравнение (1.2) стало билинейным, потребуем выполнения двух следующих условий:

$$(12\beta - 9\alpha\sigma)\frac{F_x^2 F_{xx}}{F^3} = 0,$$

$$\left(\frac{9}{2}\alpha\sigma - 6\beta\right)\frac{F_x^4}{F^4} = 0.$$

Это сделать можно, поскольку мы ищем частное решение уравнения (0.1). Теперь можно определить параметр σ:

$$\sigma = \frac{4\beta}{3\alpha}. \qquad (1.3)$$

В результате уравнение (1.2) примет вид

$$6F_{xt}F - 6F_xF_t + 6F_{xx}F - 6F_x^2 +$$
$$+3\beta F_{xx}^2 + \beta F_{xxxx}F - 4\beta F_{xxx}F_x = 0. \qquad (1.4)$$

Представим функцию F в виде формального ряда теории возмущений

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \ldots, \qquad (1.5)$$

где $f_i = f_i(x,t)$, $i = 1,2,3,\ldots$ – новые неизвестные функции, а ε, вообще говоря, не малый параметр. Если подставить соотношение (1.5) в уравнение (1.4) и приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, то в результате получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных. Последовательно решая данную систему, можно, в принципе, определить все функции f_i. Для наших целей понадобятся первые три уравнения этой системы:

$$6f_{1,xt} + 6f_{1,xx} + \beta f_{1,xxxx} = 0, \qquad (1.6)$$

$$6f_{2,xt} + 6f_{2,xx} + \beta f_{2,xxxx} =$$
$$= 6f_{1,x}f_{1,t} + 6f_{1,x}^2 - 3\beta f_{1,xx}^2 + 4\beta f_{1,x}f_{1,xxx}, \qquad (1.7)$$

$$6f_{3,xt} + 6f_{3,xx} + \beta f_{3,xxxx} =$$
$$= 6f_{1,x}f_{2,t} - 6f_1 f_{2,xt} + 6f_{1,t}f_{2,x} - 6f_1 f_{2,xx} +$$
$$+12f_{1,x}f_{2,x} - 6\beta f_{1,xx}f_{2,xx} - \beta f_1 f_{2,xxx} +$$
$$+4\beta f_{1,xxx}f_{2,x} + 4\beta f_{1,x}f_{2,xxx} = 0. \qquad (1.8)$$

Для односолитонного решения потребуются уравнения (1.6) и (1.7). Представим функцию f_1 в виде

$$f_1 = \exp\left(k_1 x - \omega_1 + \eta_1^{(0)}\right), \qquad (1.9)$$

где k_1, ω_1, $\eta_1^{(0)}$ – параметры решения. Параметр $\eta_1^{(0)}$ характеризует начальное положение солитона и без потери общности его можно положить равным нулю. Подставив соотношение (1.9) в уравнение (1.6), получим так называемое дисперсионное соотношение

$$\omega_1 = \frac{6k_1 + \beta k_1^3}{6}. \qquad (1.10)$$

Согласно методу Хироты для односолитонного решения правая часть уравнения (1.7) должна обращаться в нуль. Если подставить соотношение (1.9) в правую часть уравнения (1.7) и приравнять её нулю, то снова получим соотношение (1.10). Таким образом, один из параметров односолитонного решения оказывается произвольным. Обычно в качестве этого параметра выбирают k_1. Теперь односолитонное решение уравнения (0.1) можно записать в виде

$$u = \sigma\frac{d^2}{dx^2}\left[\ln(1 + f_1)\right] =$$
$$= \frac{\sigma k_1^2}{4}\operatorname{sech}^2\left(\frac{k_1 x - \omega_1 t + \eta_1^{(0)}}{2}\right). \qquad (1.11)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (1.11) является решением уравнения (0.1) при условии, что выполняются соотношения (1.3) и (1.10).

Построение односолитонного решения уравнения (0.3) при помощи прямого метода Хироты подробно описано в работе [14]. Это решение имеет вид

$$u = \frac{k_1^2}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{k_1\hat{x} - \omega_1\hat{t} + \eta_1^{(0)}}{2}\right). \qquad (1.12)$$

Можно сделать вывод, что для каждого из уравнений (0.1) и (0.3) существует однопараметрическое семейство решений в виде одиночных солитонов. Хотя оба решения описываются одинаковыми функциями, однако коэффициенты σ и параметры решений различны. В частности, для уравнения (0.3) дисперсионное соотношение имеет вид $\omega_1 = -k_1^3$. Если в решении (1.12) перейти от координат $(\hat{x},\hat{t})$ к координатам (x,t), то его можно записать в виде

$$u = \frac{k_1^2}{2}\operatorname{sech}^2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left[k_1 x - \right.\right.$$
$$\left.\left. -k_1 t - \frac{\alpha k_1}{4}\left(1 + \frac{\alpha k_1^2}{6}\right)t + \eta_1^{(0)}\right]\right\}. \qquad (1.13)$$

Из сравнения соотношений (1.11) и (1.13) следует, что эти решения сдвинуты друг относительно друга по фазе и этот сдвиг зависит от времени. Это следствие как нелинейного характера уравнений, так и того, что системы координат движутся друг относительно друга.

2 Двухсолитонное решение

Чтобы построить двухсолитонное решение уравнения (0.1), представим функции f_1 и f_2 в виде:

$$f_1 = \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2),$$
$$\eta_i = k_i x - \omega_i t + \eta_i^{(0)}, \qquad (2.1)$$
$$f_2 = \exp(\eta_1 + \eta_2 + A_{12}),$$
$$\exp(A_{12}) = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2. \qquad (2.2)$$

Подставив (2.1) в уравнение (1.6), получим дисперсионные соотношения вида

$$\omega_i = \frac{6k_i + \beta k_i^3}{6},\ i = 1,2. \qquad (2.3)$$

Приравнивание нулю правой части уравнения (1.7) дает такие же соотношения. Чтобы проверить свойство обрывания ряда (1.5) для двухсолитонного решения, подставим соотношения (2.1) и (2.2) в правую часть уравнения (1.8) и приравняем её нулю. В результате с учетом соотношений (2.3) получим следующее условие

$$k_1 + k_2 = 1. \qquad (2.4)$$

Уравнения (1.6) и (1.7) не накладывают ограничений на возможные значения параметров k_1 и k_2. Соотношение (2.4) такие ограничения вводит. Количество возможных комбинаций этих параметров по-прежнему остается бесконечным, но соотношения между ними уже не являются произвольными. Двухсолитонное решение уравнения (0.1) теперь можно представить в виде

$$u = \sigma\frac{d^2}{dx^2}(1 + f_1 + f_2), \qquad (2.5)$$

где используются соотношения (1.3), (2.1), (2.2) и (2.3).

Двухсолитонное решение уравнения (0.3), полученное при помощи метода Хироты, приведено в работе [4]. Оно также определяется соотношением (2.5), в котором функции f_1 и f_2 имеют вид (2.1) и (2.2), соответственно. Однако теперь $\sigma = 2$, а дисперсионные соотношения записываются в виде $\omega_i = -k_i^3$, $i = 1,2$. Для уравнения (0.3) не возникает условия вида (2.4). Если подставить выражения для f_1 и f_2 в правую часть уравнения (1.8) и потребовать равенства её нулю (что эквивалентно обрыванию ряда (1.5)), то тождество будет выполняться при любых k_1 и k_2. Бесконечная совокупность параметров k_1 и k_2 определяется только требованиями, следующими из соотношения (2.2).

Заключение

В работе рассмотрено уравнение КдФ в двух системах координат: лабораторной системе координат (x,t) (уравнение (0.1)) и системе координат $(\hat{x},\hat{t})$, движущейся относительно лабораторной системы с некоторой скоростью, характерной для теории мелкой воды (уравнение (0.3)). Приведены односолитонное и двухсолитонное решения обоих уравнений, полученные при помощи прямого метода Хироты. Показано, что оба типа решения имеют одинаковые функциональные зависимости, хотя дисперсионные соотношения и коэффициенты при независимых переменных различны. Характерной особенностью решений при переходе от одной системы координат к другой является появление зависящего от времени сдвига по фазе в движущейся системе координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем*, *Дж.* Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – Москва: Мир, 1977. – 624 с.

2. *Захаров*, *В.Е.* Теория солитонов: Метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – Москва: Наука, 1980. – 320 с.

3. *Лэм*, *Дж. Л.* Введение в теорию солитонов / Дж. Л. Лэм. – Москва: Мир, 1983. – 294 с.

4. *Абловиц*, *М.* Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – Москва: Мир, 1987. – 479 с.

5. *Додд*, *Р.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – Москва: Мир, 1988. – 694 с.

6. *Ньюэлл*, *А.* Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – Москва: Мир, 1989. – 326 с.

7. *Косевич*, *А.М.* Введение в нелинейную физическую механику / А.М. Косевич, А.С. Ковалев. – Киев: Наукова думка, 1989. – 304 с.

8. *Ablowitz*, *M.J.* Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering / M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson. – Cambridge University Press, 1991. – 516 p.

9. *Remoissenet*, *M.* Waves called solitons, concepts and experiments / M. Remoissenet. – Berlin and New York: Springer, 1996. – 260 p.

10. *Инфельд*, *Э.* Нелинейные волны, солитоны и хаос / Э. Инфельд, Дж. Роуландс. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 480 с.

11. *Karczewska*, *A.* Remarks on existence / nonexistence of analytic solutions to higher order KdV equations / A. Karszewska, P. Rozmej // Acta Physica Polonica A. – 2019. – Vol. 136. – P. 910–915.

12. *Hirota*, *R.* Direct methods in soliton theory / R. Hirota. – Solitons. Ed. by Bullough R.K. and Caudrey P.J. – Berlin: Springer, 1980. – 392 p.

Поступила в редакцию 26.03.2020.

ФИЗИКА

УДК 535.35

КИНЕТИКА КОНДЕНСАЦИИ В ПРОЦЕССЕ АДИАБАТИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ АБЛЯЦИОННЫХ ФАКЕЛОВ СЕРЕБРА ПРИ АТМОСФЕРНОМ ДАВЛЕНИИ

К.В. Козадаев

Белорусский государственный университет, *Минск*

KINETICS OF CONDENSATION DURING ADIABATIC EXPANSION OF AN ABLATIVE SILVER JET AT ATMOSPHERIC PRESSURE CONDITIONS

K.V. Kozadaev

Belarusian State University, *Minsk*

В статье проведена модификация модели Анисимова – Лукьянчука для описания процессов динамической конденсации Зельдовича – Райзера паро-плазменных образований, формирующихся при лазерной абляции мишени из серебра мощными наносекундными импульсами оптического излучения в условиях нормальной атмосферы. При этом начальные стадии развития абляционного факела серебра с высокой степенью точности соответствуют теории динамической конденсации Зельдовича – Райзера, а на стадии распада абляционного факела необходим учет дополнительного механизма каплеобразования – слипания «зародышей».

***Ключевые слова**: абляционный лазерный факел*, *адиабатическое расширение пара*, *динамическая конденсация*, *наночастицы серебра.*

The modification of the Anisimov – Lukyanchuk model to define the processes of dynamic condensation of Zel'dovich – Reiser for vapor-plasma jets formed during laser ablation of a silver target by intensive nanosecond pulses of optical radiation in a normal atmosphere is described. The initial stage of development of ablative silver jet with a high degree of accuracy corresponds to the theory of dynamic condensation of the Zeldovich – Raiser, and at the stage of disintegration of the ablation torch, it is necessary to take into account an additional mechanism of droplet formation – adhesion of the “nuclear”.

Keywords: *ablative laser jet*, *adiabatic vapor expansion*, *dynamic condensation*, *silver nanoparticles.*

Введение

Воздействие на металлические мишени лазерных импульсов длительностью единицы-десятки наносекунд при достаточно высокой их плотности мощности (10^8–10^{10} Вт/см^2) приводит к интересному физическому эффекту [1], когда длительность переднего фронта лазерного импульса становится сравнимой с характерным временем электрон-ионной релаксации энергии в атомной решетке металла. Другими словами, скорость ввода энергии возбуждения в систему (состоящую из двух подсистем – электронного газа и атомной решетки) сопоставима с быстротой теплообмена между этими подсистемами. При этом поглощенная свободными электронами энергия лазерного излучения просто не успевает проникнуть вглубь мишени (в данном случае классический механизм передачи энергии – электронная теплопроводность). Тогда в зоне действия лазерного излучения внутри мишени формируется переходный макрослой металла, обладающий большой избыточной тепловой энергией (по сути это – плотная металлическая плазма) [2]. Взрыв макрослоя приводит к выбросу перегретого материала мишени и формированию абляционного факела. Для теоретического описания таких процессов может быть использована «гидродинамическая» модель (или взрывная абляция). Основной практической сложностью при использовании этого приближения является моделирование коэффициента поглощения излучения плотной металлической плазмой, который определяет поглощение факелом энергии действующего лазерного импульса. Последовательная теория, моделирующая эти явления, в настоящее время не разработана [3]. Тем не менее, С.И. Анисимовым и Б.С. Лукьянчуком предложена достаточно целостная модель для описания процессов, протекающих в подобных факелах уже после завершения их формирования (т. е. после окончания их взаимодействия с падающим излучением).

Модель [3]–[6] базируется на использовании приближения адиабатического разлета осесимметричного либо сферически симметричного паро-плазменного облака с параболическими или прямоугольными начальными внутренними профилями температуры и плотности в вакуум с учетом процессов динамической конденсации согласно теории Зельдовича – Райзера [7]. Сравнение результатов моделирования для факелов Si, Ge и C (с начальными условиями, соответствующими лазерной абляции этих материалов интенсивными наносекундными импульсами) с экспериментальными данными [8] показало их хорошее согласие даже при отсутствии подгоночных параметров.

© *Козадаев К.В.*, 2020

В связи с этим значительный практический интерес представляет адаптация модели Анисимова – Лукьянчука для случая лазерной эрозии металлов наносекундными импульсами при атмосферном давлении. Присутствие сторонних газов существенно влияет на процессы эволюции и распада таких факелов, но, тем не менее, в итоге также происходят конденсация пароплазменного облака и формирование наноразмерной пылевой фазы материала мишени [9]. Настоящая работа посвящена разработке полуэмпирической модели для описания процессов динамической конденсации абляционных факелов серебра при атмосферном давлении на основе анализа полученных экспериментальных данных и адаптации модели Анисимова – Лукьянчука.

1 Динамическая конденсация Зельдовича – Райзера

В соответствии с теорией Зельдовича – Райзера адиабатическое расширение пара в вакуум неизбежно сопровождается протеканием в нем конденсационных процессов [7]. На фазовой диаграмме состояний пара первоначальное изменение его термодинамических параметров происходит вдоль адиабаты Пуассона $T_p(t)$ и в некоторый момент пар достигает точки насыщения, что соответствует пересечению адиабаты Пуассона с адиабатой насыщения пара, задаваемой уравнением Клаузиуса – Клайперона. Перейдя эту точку на фазовой диаграмме состояния, пар становится пересыщенным (переохлажденным), и в нем создаются условия для лавинообразного образования зародышей будущих капель.

Скорость формирования зародышей капель (центров будущей конденсации) экспоненциально зависит от степени пересыщения (переохлаждения) пара, которая определяется параметром переохлаждения $\theta = (T_{eq} - T) / T_{eq}$, где T – температура в заданной точке пара, T_{eq} – температура термодинамического равновесия для заданных объема и давления пара (т. е. температура вдоль бинодали пара – линии на фазовой диаграмме между его стабильными и метастабильными состояниями [7]).

При переохлаждении пара наблюдается резкий рост параметра переохлаждения θ, следствием чего является массовое самопроизвольное формирование центров конденсации, которое Я.Б. Зельдович и Ю.П. Райзер назвали «впрыскиванием» зародышей [7]. Появившиеся зародыши за счет агрегации молекул пара начинают расти в размерах, со временем формируя жидкие капли. При этом активный процесс каплеобразования вызывает в паре интенсивное выделение скрытой энергии конденсации, что разогревает пар и останавливает рост параметра переохлаждения θ, и в дальнейшем он монотонно снижается. При этом процесс образования зародышей, который крайне чувствителен к степени пересыщения, прекращается и в дальнейшем происходит только укрупнение сформировавшихся капель за счет агрегации молекул пара.

Продолжающееся расширение пара ведет к уменьшению его плотности, за счет чего наблюдается постепенное уменьшение количества актов «налипания» атомов пара на зародыши, а вскоре – и полное их прекращение. При этом степень конденсации пара x (отношение числа атомов пара в жидкой фазе к их общему количеству) стабилизируется, что соответствует т. н. «закалке» капель [7]. Здесь следует обратить внимание, что термин «закалка», введенный для наглядности описания процесса динамической конденсации Я.Б. Зельдовичем и Ю.П. Райзером, отнюдь не подразумевает перехода сконденсировавшихся объектов в твердую фазу вещества, скорее это констатация завершенности процесса роста размеров капель. И в дальнейшем эти капли продолжают разлетаться в вакууме лишь под действием закона сохранения механического импульса.

Таким образом, в отличие от «равновесного» статического сценария конденсации, когда на всех этапах пар находится в состоянии термодинамического равновесия, максимально достижимая степень конденсации в случае быстрого адиабатического расширения пара может быть существенно меньше 1 (на практике x = 0,1–0,3 [3]).

2 Моделирование кинетики конденсации в адиабатически расширяющемся абляционном факеле

Для рассмотрения процесса конденсации в настоящей работе (равно как и в работах [3]–[6]) предполагается, что жидкие капли, образовавшиеся в процессе адиабатического расширения пара, движутся совместно с ним (что справедливо для невысоких степеней конденсации пара, которые в реальности и наблюдаются). Это приближение позволяет рассматривать процесс конденсации независимо для каждой капли с определенной лагранжевой координатой $\xi = r / R(t)$, где r – расстояние до центра факела, $R(t)$ – радиус сферического облака (внутри факела $0 \le \xi \le 1$).

Согласно [3] температура пара, соответствующая точке его насыщения (момент пересечения адиабаты Пуассона с адиабатой насыщения пара), может быть оценена как $T_c = q\Phi(a)$, где q – удельная теплота испарения металла Q, выраженная в градусах Кельвина ($q = Q / R_g$), а $\Phi(a)$ – меньший корень трансцендентного уравнения:

$$\Phi^{-3} \exp(-\Phi^{-1}) = a = \frac{B}{V_0}\left(\frac{q^2}{T_s T_0}\right)^{3/2}, \qquad B = \frac{R_g T_s}{\mu p_s}, \tag{2.1}$$

где V_0 – начальный удельный объем абляционного факела ($V_0 = 1 / \rho_0$), для нашего случая [10],

T_s – нормировочная температура (T_s = 300 К [3]), μ – молярная масса металла (для серебра μ = 0,1 кг/моль [11]), p_s – предэкспоненциальный фактор (для конкретного металла может быть определен на основании аппроксимации данных [12], $p_s = 10^{10}$ Па). При подстановке требуемых значений в (2.1) и численного его решения находим для нашего случая T_c = 2901 К, что в центре факела соответствует моменту $t_c \approx 80$ нс после начала распространения абляционного факела.

Динамика температуры термодинамического равновесия $T_{eq}(t)$ (вдоль адиабаты насыщения – бинодали пара) в расширяющемся факеле может быть определена на основании решения трансцендентного функционального уравнения [3]:

$$V_0 \Psi^{\frac{3}{2}}(t) = \left(1 - x_{eq}(t)\right) B \left(\frac{T_{eq}(t)}{T_s}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{q}{T_{eq}(t)}\right), \quad (2.2)$$

$$x_{eq}(t) = \frac{2q}{2q - T_{eq}(t)} \left(\frac{T_c - T_{eq}(t)}{T_c} + 3\frac{T_{eq}(t)}{q} \ln\frac{T_{eq}(t)}{T_c}\right),$$

где $\Psi(t) = (R(t) / R_0)^2$ – безразмерная функция, характеризующая модель расширения факела [10], R_0 – начальный радиус факела, $x_{eq}(t)$ – временная зависимость степени конденсации для случая термодинамического равновесия пара.

Отклонение температуры в факеле от адиабаты Пуассона происходит в момент массового «впрыскивания зародышей» t_e, соответствующий максимальному переохлаждению пара. Этот момент, в свою очередь, может быть определен из решения трансцендентного уравнения [3]:

$$\frac{1}{T_{eq}(t)} \frac{dT_{eq}(t)}{dt} = -\frac{1}{\Psi(t)} \frac{d\Psi(t)}{dt} + \left(\frac{2q}{3T_p(t)} - 1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta_p(t)}\right)^3 \frac{dv_p(t)}{dt}, \quad (2.3)$$

$$\alpha = \frac{2\sigma m}{k_B q \rho_l} \left(\frac{4\pi\rho_l}{3m}\right)^{1/3},$$

где $T_p(t)$ – динамика температуры пара вдоль адиабаты Пуассона, σ – сила поверхностного натяжения жидкости (для серебра – 0,91 н / м), ρ_l – плотность жидкой фазы металла (9 г / см^3), k_B – постоянная Больцмана, m – атомная масса металла, θ_p – параметр переохлаждения, взятый вдоль адиабаты Пуассона ($\theta_p = (T_{eq} - T_p) / T_{eq}$). Для серебра α ≈ 0,4756.

При этом dv_p / dt – скорость нуклеации (образования «зародышей»), которая для центра факела (ξ = 0) при решении уравнения (2.3) может быть представлена в упрощенном виде (предполагается, что до момента «впрыскивания» степень конденсации x = 0) [10]:

$$\frac{dv_p(t)}{dt} \approx k_{0v} \Psi^{3/2}(t) \exp\left(-\frac{T_v}{T_p(t)\theta_p(t)^2}\right), \quad (2.4)$$

$$k_{0v} = 4\frac{\rho_0}{\rho_l}\sqrt{\frac{2\sigma}{\pi m}}, \quad T_v = \frac{16\pi\sigma^3 m^2}{k_B^3 q^2 \rho_l^2},$$

где для нашего случая $T_v \approx 1607$ К, $k_{0v} \approx 4{,}143\ 10^9$ с$^{-1}$.

Численное решение (2.3) в нашем случае позволяет для центра факела определить T_e = 1231 К, что соответствует моменту $t_e \approx 380$ нс после начала его расширения.

Как уже говорилось, при достижении температурой $T_p(t)$ значения T_e запускается процесс активного каплеобразования, сопровождающийся интенсивным выделением скрытой теплоты конденсации. Это приводит к отклонению температуры в факеле от адиабаты Пуассона и устремлению ее к адиабате насыщения. Для определения динамики температуры $T(t)$ в этом переходном периоде можно воспользоваться соотношением локального баланса энергии в двухфазной системе «пар-жидкость» в адиабатическом приближении, предложенном в [10]:

$$\left(1 + \beta(x)\right)\frac{dT(t)}{dt} + \left(1 - x(t)\right)\frac{T(t)}{\Psi(t)}\frac{d\Psi(t)}{dt} = \left(\frac{2}{3}q - \beta T(t)\right)\frac{dx(t)}{dt}, \quad (2.5)$$

$$T(0) = T_p(t)|_{t=t_e} = T_e,$$

где β = ($2c_2 / 3R_g$) – 1 (для серебра β ≈ 1,4).

Динамика степени конденсации в факеле $x(t)$ может быть приближенно оценена функцией $x_{eq}(t)$, рассчитанной для нужной пространственной точки факела, либо фиксированной лагранжевой координаты в соответствии с соотношением (2.2). Такой вид временной зависимости степени конденсации пара в факеле (рисунок 2.1) выбран из следующих соображений.

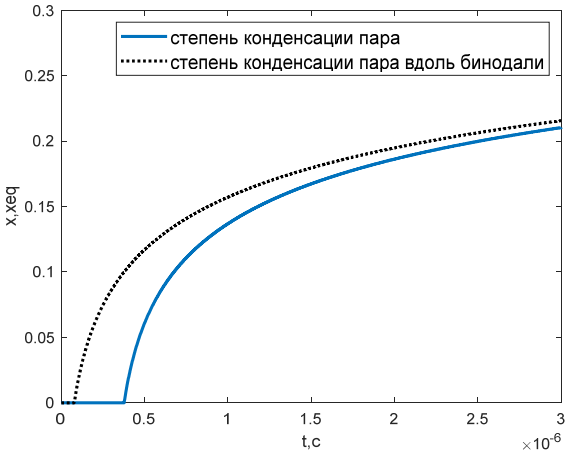


Рисунок 2.1 – Модель степени конденсации пара в центре абляционного факела

Очевидно, что до момента «впрыскивания» (наибольшего переохлаждения пара) значение рассматриваемой функции должно быть равно 0, поскольку условия для формирования зародышей еще не наступили. Далее происходит резкий рост зародышей будущих капель, который на данном этапе хорошо аппроксимируется оценкой $x_{eq}(t)$ [3]. Приближаясь к моменту «закалки», функция $x(t)$ должна асимптотически выходить

к насыщению, что и демонстрирует нам поведение функции $x_{eq}(t)$.

Зависимости $T(t)$ и $\theta(t)$ для центра факела ($r = 0 \rightarrow \xi = 0$), полученные при численном решении (2.2)–(2.5) приведены на рисунке 2.2, *а*, который хорошо иллюстрирует обсуждавшиеся тенденции в протекании конденсационных процессов согласно теории динамической конденсации.

Здесь можно проследить основные этапы динамики температуры в центре факела: через первые 80 нс независимого развития факела параметр температуры достигает значения, соответствующего насыщению пара. Далее, продолжая следовать адиабате Пуассона, приблизительно через 380 нс температура достигает локального минимума (на рисунке 2.2, *б* этой точке соответствует максимальное значение параметра переохлаждения: $\theta_{max} \approx 0{,}5$). После этого происходит отрыв функции $T(t)$ от адиабаты Пуассона, сопровождающийся ее некоторым ростом, что обусловлено выделением скрытой теплоты конденсации. И, наконец, через 1,6 мкс происходит приближение значений $T(t)$ к температуре термодинамического равновесия для заданных объема и давления пара (что вызывает некоторый спад параметра переохлаждения θ).

Согласно модели Анисимова – Лукьянчука кинетика конденсации факела определяется поведением функций $g(t)$ *и* $v(t)$ на интервале времени от момента «впрыскивания зародышей» до момента их «закалки», где $g(t)$ – размер кластера-капли в атомах, а $v(t)$ – количественная доля зародышей, соотнесенная с общим числом атомов пара. Соответственно, для скорости конденсации имеем [7]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t)\frac{dv(t)}{dt} + v(t)\frac{dg(t)}{dt}, \qquad x(t)\big|_{t=t_e} = 0. \tag{2.6}$$

Следуя Ю.П. Райзеру и Я.Б. Зельдовичу, скорость образования «жизнеспособных» зародышей (нуклеации) может быть оценена на основании решения дифференциального уравнения [7]:

$$\frac{dv(t)}{dt} = k_{ov}\left(1 - x(t)\right)\rho(t)\exp\left(-\frac{T_v}{T_p(t)\theta_p^2(t)}\right), \qquad v(t)\big|_{t=t_e} = 0, \tag{2.7}$$

где $\rho(t)$ – динамика плотности пара.

Аналогично скорость роста кластера – из решения дифференциального уравнения [7]:

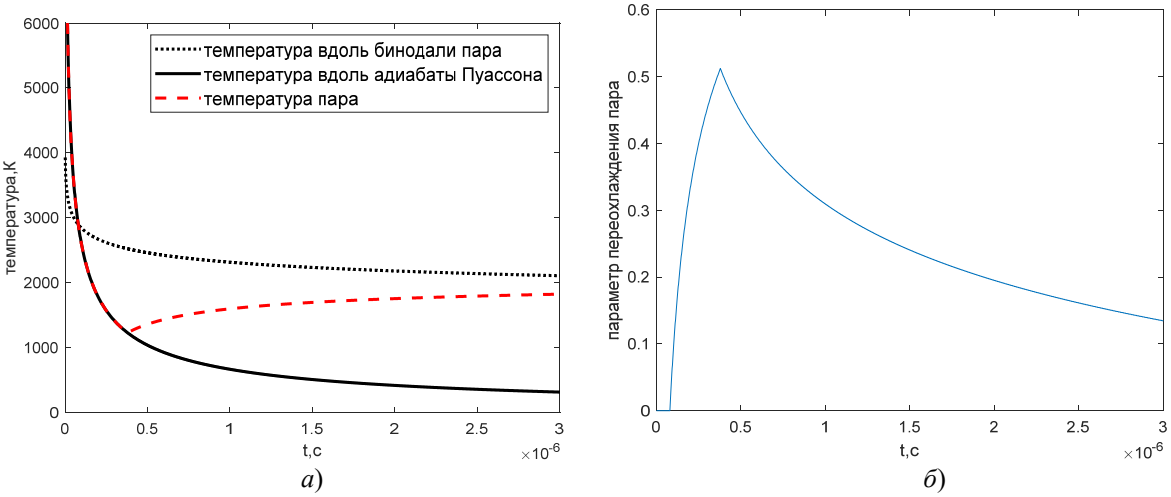
$$\frac{dg(t)}{dt} = k_g g^{\frac{2}{3}}(t)\sqrt{T(t)}\left(1 - x(t)\right)\rho(t)\times \left(1 - \exp\left(-\frac{q}{T(t)}\left(\theta(t) - \alpha g^{-\frac{1}{3}}(t)\right)\right)\right), \qquad k_g = \frac{\pi\rho}{m}\left(\frac{2m}{4\pi\rho_l}\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{8k_B}{\pi m}}, \qquad g(t)\big|_{t=t_e} = g_0. \tag{2.8}$$

Оценка размеров критических зародышей g_0 согласно [3], [13] составляет:

$$g_0 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{m}{\rho_l}\right)^2\left(\frac{2\sigma}{k_B q\theta_{\max}}\right)^3, \tag{2.9}$$

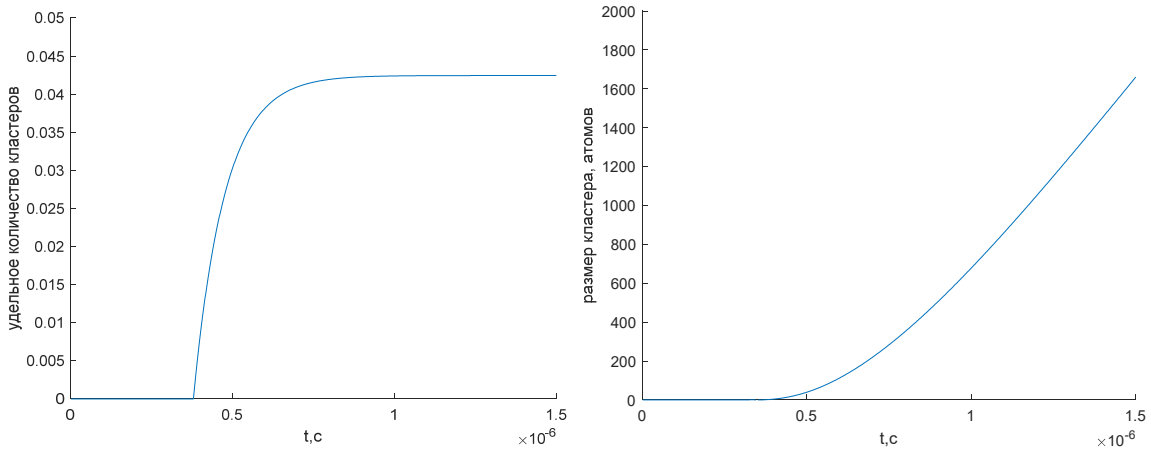
где $\theta_{\max}$ – максимальное значение параметра переохлаждения.

Таким образом, кинетика конденсации ЭЛФ согласно модели Анисимова – Лукьянчука полностью задается решением системы дифференциальных уравнений, состоящей из выражений (2.2)–(2.8) с соответствующими начальными условиями. Их численное решение применительно к рассматриваемому абляционному факелу серебра для центра факела позволяет получить характерные временные зависимости для $v(t)$ и $g(t)$, приведенные на рисунке 2.3.



а) *б*)

Рисунок 2.2 – Динамика температуры и параметра переохлаждения пара в центре абляционного факела



а) *б*)

Рисунок 2.3 – Динамика функций в центре абляционного факела: *а*) $v(t)$, *б*) $g(t)$

3 Завершающий этап конденсации – «слипание» зародышей

Как видно из рисунка 2.3, *а*, после «впрыскивания» поведение функции $v(t)$ стабилизируется, и рост степени конденсации $x(t)$ возможен преимущественно за счет укрупнения «зародышей», описываемого функцией $g(t)$.

Следует напомнить, что теория динамической конденсации изначально была разработана для описания развития адиабатических процессов в условиях вакуума. Поэтому после прохождения фазы «закалки» в абляционных факелах формируются капли, размером не превышающие единицы нанометров. В то же время экспериментальные данные [9], [14], полученные при исследовании процессов лазерной абляции серебра при атмосферном давлении, показывают, что после распада абляционных факелов осаждаются достаточно крупные частицы серебра со средними размерами 30–40 нм.

Очевидно, что в данном случае финальный этап конденсации должен существенно отличаться от рассматриваемого в модели Анисимова – Лукьянчука: на протяжении интервала времени от «впрыскивания зародышей» до их «закалки» при достаточно плавно растущем уровне степени конденсации факела (от 0 до 0,25) фактически происходит резкое (на 3 порядка) сокращение числа зародышей при таком же резком пропорциональном росте их размеров (рост линейных размеров на 1 порядок соответствует увеличению объема на тех же 3 порядка).

Понятно, что в данном случае уже невозможно описать рост зародышей только за счет положительного баланса прилипания-испарения атомов пара к зародышам – необходим учет слипания самих зародышей. Этот эффект имеет простое физическое объяснение – внешняя атмосфера в моменты времени близкие к закалке «тормозит» передний фронт факела, при этом внутренние зародыши неизбежно «наталкиваются» на замедляющиеся периферийные, и, т. к. капли в это время еще далеки от затвердевания, они охотно сливаются в более крупные объекты [1], [10].

Заключение

В статье проведена адаптация модели Анисимова – Лукьянчука для описания процессов динамической конденсации в абляционных факелах серебра в условиях нормального атмосферного давления. Несмотря на существенные отличия в реализации финальной стадии процесса каплеобразования в вакууме и в присутствии атмосферных газов, модель Анисимова – Лукьянчука, при условии соответствующей модификации, демонстрирует хорошее согласие с экспериментальными данными при описании начальных стадий эволюции абляционного факела, даже в отсутствии подгоночных параметров. Развитие подобных полуэмпирических моделей конденсационных процессов играет важную роль в разработке нового технологического направления: управляемого лазерноиндуцированного осаждения металлических наноструктур при атмосферном давлении [15], [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козадаев, К.В.* Физика лазерно-индуцированных плазменных потоков при действии наносекундных импульсов излучения на металлы при атмосферном давлении / К.В. Козадаев // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 3. – С. 682–693.

2. *Действие лазерного излучения большой мощности на металлы* / С.И. Анисимов [и др.]. – М.: Наука, 1970. – 272 с.

3. *Анисимов, С.И.* Избранные задачи теории лазерной абляции / С.И. Анисимов, Б.С. Лукьянчук // Успехи физ. наук. – 2002. – Т. 172, № 3. – С. 301–333.

4. *Luk'yanchuk*, *B.S.* Condensation of Vapor and Nanoclusters Formation within the Vapor Plume, Produced by ns-Laser Ablation of Si / B.S. Luk'yanchuk, W. Marine, S.I. Anisimov // Laser Phys. – 1998. – Vol. 8, № 1. – P. 291–302.

5. *Kuwata*, *M.* Nanoclusters formation within the vapor plume, produced by ns-laser ablation: Effect of the initial density and pressure distributions / M. Kuwata, B. Luk'yanchuk, T. Yabe // Proc. SPIE. – 2000. – Vol. 4065. – P. 441–451.

6. *Modeling of nanosecond-laser ablation*: *Calculations based on a nonstationary averaging technique* (*spatial moments*) / N.D. Arnold [et al.] // Proc. SPIE. – 1998. – Vol. 3343. – P. 484–504.

7. *Зельдович*, *Я.Б.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1966. – 686 с.

8. *Condensation of vapor and nanoclusters formation within the vapor plume*, *produced by ns-laser ablation of* Si, Ge *and* C / B.S. Luk'yanchuk [et al.] // Proc. SPIE. – 1999. – Vol. 3618. – P. 434–452.

9. *Формирование конденсированной фазы металлов под действием интенсивных наносекундных лазерных импульсов при атмосферном давлении* / В.К. Гончаров, К.В. Козадаев, В.В. Макаров, Д.В. Щегрикович // Инженерно-физический журнал. – 2013. – Т. 86, № 4. – С. 754–759.

10. *Козадаев*, *К.В.* Конденсация абляционных факелов при действии интенсивных наносекундных импульсов лазерного излучения на металлы при атмосферном давлении / К.В. Козадаев // Квантовая электроника. – 2016. – Т. 46, № 1. – С. 16–22.

11. *Таблицы физических величин*: *справочник* / В.Г. Аверин [и др.]; под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.

12. *American Institute of Physics Handbook* / B.H. Billings [et al.]; ed. D.E. Gray. – New York: McGrowHill, 1972. – 2364 p.

13. *Itina*, *T.E.* Nanoparticles formation by laser ablation in air and by spark discharges at atmospheric pressure / T.E. Itina, A. Voloshko // Appl. Phys. B. – 2013. – Vol. 113. – P. 473–478.

14. *Динамика параметров эрозионного факела, образованного при воздействии субмикросекундного лазерного излучения на цинковую мишень* / В.К. Гончаров, К.В. Козадаев, М.В. Пузырев, В.М. Стецик // Инженерно-физический журнал. – 2009. – Т. 82, № 4. – С. 638–642.

15. *Goncharov*, *V.K.* Laser synthesis of optical media with silver nanoparticles by nanosecond pulses at air / V.K. Goncharov, K.V. Kozadaev, D.V. Shchehrykovich // Optical memory & Neural Networks (Informatics Optics). – 2011. – Vol. 20, № 4. – P. 255–259.

16. *Гончаров*, *В.К.* Лазерный синтез и исследование спектрально-морфологических характеристик водных коллоидов благородных металлов (Ag, Au, Pt) / В.К. Гончаров, К.В. Козадаев, Д.В. Щегрикович // Инженерно-физический журнал. – 2012. – Т. 85, № 4. – С. 725–730.

Поступила в редакцию 06.04.2020.

ФИЗИКА

УДК 538.9

СТРУКТУРНО-МАСШТАБНЫЕ УРОВНИ ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НИКЕЛЯ

С.В. Короткевич[1], **В.В. Свиридова**[2]

[1]*РУП «Гомельэнерго»*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

STRUCTURAL AND SCALE LEVELS OF DEFORMATION OF THE SURFACE LAYER OF NICKEL

S.V. Korotkevich[1], **V.V. Sviridova**[2]

[1]*RUE* "*Gomelenergo*"
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Исследованы механизмы разрушения поверхностного слоя никеля при трибонагружении в смазочной среде ЦИАТИМ-201. Выявлены структурно-масштабные уровни деформации поверхностного слоя никеля. Показана эволюция структурно-масштабных уровней деформации поверхностного слоя никеля, приводящая к его фазовой нестабильности. Установлена начальная и доминирующая роль наноструктурного масштабного уровня деформации. Определены механизмы формирования дефектных структур различного масштаба.

***Ключевые слова**: дислокации, механизмы пластической деформации, поля напряжений, поры, полосы скольжения, микро и магистральные трещины.*

The mechanisms of destruction of the surface layer of nickel during tribo-loading in a lubricating medium TsIATIM-201 are investigated. The structural-scale levels of deformation of the surface nickel layer were revealed. The evolution of structural-scale levels of deformation of the surface layer of nickel, leading to its phase instability, is shown. The dominant role and the initial role of the nanostructured scale level of deformation are established. The mechanisms of formation of defect structures of various scales are determined.

Keywords: *dislocations, mechanisms of plastic deformation, stress fields, pores, slip bands, micro and main cracks.*

Введение

В работе описана эволюция структурно-масштабных уровней деформации поверхностного слоя никеля с точки зрения мезомеханики и неравновесной термодинамики [1]. В соответствии с физической мезомеханикой пластическое течение в нагруженном твёрдом теле является многоуровневым процессом и связано с потерей сдвиговой устойчивости на нано-, микро-, мезо- и макромасштабных уровнях [2]. Особое внимание в работе уделено исследованию поверхности металлов в силу асимметрии притяжения её атомов, что определяет её уязвимость и обуславливает накопление дефектов и источников разрушения при внешних воздействиях. Ввиду особых физико-химических характеристик и свойств (повышенная плотность дислокаций, более высокие значения внутренних напряжений и локальной кривизны кристаллической решётки, модуля упругости и микротвёрдости, высокая каталитическая активность и т. д.) поверхность в мезомеханике выделяют в особый мезоскопический уровень деформации [3]. Необходимо было исследовать отдельно каждый уровень пластической деформации: нано-, микро-, мезо- и макроуровень. Определить механизмы и особенности формирования, эволюции и разрушения для каждого уровня пластической деформации. Особое внимание уделено наноуровню деформации на поверхности никеля в силу её особых аномальных свойств и возможности формирования в особых условиях облегчённого выхода дислокаций под действием сил изображения, и их расщеплении в присутствии поверхностно, и химически активных веществ, содержащихся в пластичных смазочных материалах [4].

Многоцикловая, знакопеременная и малоамплитудная нагрузка при трибонагружении определяет формирование многочисленных микротрещин вдоль полос скольжения, пор, двойников, дефектов упаковок. Высокие внутренние напряжения, плотность дислокаций и локальная кривизна кристаллической решётки определяют её рыхлость, аморфность и каталитичекую активность, магнитные свойства и др. аномальные физико-химические свойства. С использованием математического аппарата мезомеханики осуществлена количественная оценка величин напряжений между аморфным поверхностным слоем и упругой подложкой поликристаллического никеля [1]. В мировой литературе крайне ограничены данные о таких высоко диспергированных материалах и их физико-химических свойствах. Общепринятой является точка зрения, что формирование нанообъектов происходит при высокоэнергетическом воздействии или интенсивной

© *Короткевич С.В., Свиридова В.В.*, 2020

пластической деформации и/или равноканальном угловом прессовании в направлении сверху вниз, когда в результате внешнего воздействия при контактных давлениях в ГПа имеет место фрагментация материала от макро-, мезо-, микро- до наномасштаба [5]. Данные о формировании наноструктур при контактных давлениях ≈ 0,1÷0,2 кПа в присутствии поверхностно-активных веществ в условиях неравновесной деформации крайне ограничены.

Целью настоящей работы является изучение механизмов пластической деформации на различных структурно-масштабных уровнях в условиях фазовой нестабильности поверхностного слоя никеля при трибонагружении.

1 Методика эксперимента

Исследовался поликристаллический никель чистотой 99,99%. Образцы в виде тонких дисков полировались электролитически и отжигались в вакууме 0,133 мПа при 973 К. Испытание на трение пары Ni – Mo проводилось на машине типа АЕ-5 с точной установкой площади контактирования при удельной нагрузке 84 кПа и линейной скорости 0,4 м/с. Электронно-микроскопические исследования никеля осуществлялись на микроскопе ЭВМ-100АК и Hitachi-H800 методом тонких фольг на «просвет». Разрешение Hitachi-800 составляет 0,2 нм. После испытания на трение фольги подвергались одностороннему электролитическому утонению с противоположной стороны от поверхности трения, что позволило исследовать приповерхностный объем, примыкающий к поверхности трения. Применение в схеме установки струйного полирования высокочувствительного фотодиодного моста позволило получить прозрачные участки в слоях даже при наличии волнистого рельефа поверхности.

Методика препарирования образцов никеля для просвечивающей электронной микроскопии приведена в [4].

2 Результаты и обсуждения

На рисунке 2.1 можно выделить три характерные области формирования и эволюции структурных дефектов. Область I характеризуется формированием и эволюцией нанокристаллических структур (≈ 5÷50 нм) с высокоугловой разориентацией границ ячеек в условиях неравновесной деформации, когда в предварительно отожжённом никеле практически отсутствуют дефекты. Плотность дислокаций составляет $\approx 10^{12}$ м$^{-2}$.

Наноуровень деформации является начальным ($t = 0,9$ кс) уровнем деформации, определяющим иерархию развития следующего микроуровня и т. д. по мере увеличения времени трибонагружения и соответственно масштаба формирования структурных элементов – дефектов в многоуровневой системе пластического течения никеля, что подчёркивает его особую ведущую роль.

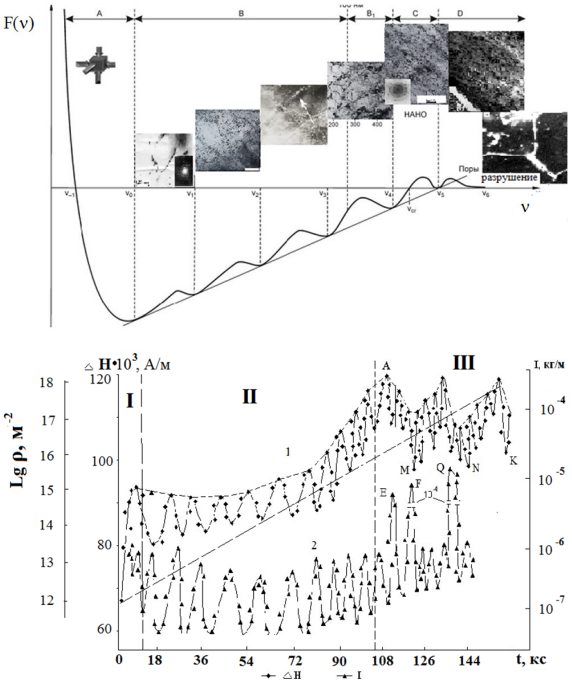


Рисунок 2.1 – Зависимость кинетики структурных изменений поверхностного слоя никеля при трении от потенциала Гиббса, уширения линии ферромагнитного резонанса (ΔH) и интенсивности изнашивания (I)

Формирование наноструктур происходит в тонком поверхностном слое при облегчённом выходе дислокаций на поверхность. Существенное влияние кинетики поверхностных процессов связано с адсорбционным облегчением пластической деформации и снижением прочности поверхностного слоя, согласно эффекта П.А. Ребиндера. Действие органических ПАВ, в этом случае, обусловлено облегчением выхода дислокаций на поверхность ввиду понижения поверхностного натяжения [6]. Дислокации расщепляются и образуют в полях упругих напряжений замкнутые ячейки. Микродифракция подтверждает формирование нанообъектов (рисунок 2.2) с большой (до десяти градусов) разориентировкой в смежных областях. Эта мелкоячеистая наноструктура состоит из дислокационных кластеров, квазиравномерно распределённых по объёму поверхностного слоя (рисунок 2.2). Большеугловые границы являются эффективными источниками зернограничных дислокаций. Высокоугловая разориентация границ субзерен обуславливает их барьерную роль при движении дислокаций, способствуя образованию плоских скоплений и формированию из них микротрещин при заторможенном скольжении и сдвиге (рисунок 2.2, стрелки).

Наблюдаемые нанокристаллические и субмикрокристаллические фрагменты микроструктуры обуславливают высокую степень упрочнения и

обеспечивают определённую пластичность материала поверхностного слоя за счёт высокой продолжительности межзёренных границ. Зоны высокой плотности дефектов содержат скопления дислокационных петель и диполей с плотностью $\approx 10^{16}$ м$^{-2}$. В полях действия тангенциальных и нормальных напряжений кооперативное движение атомов способно образовывать вихревые структуры на поверхности металлов подобно бинарным структурам, что отражается на формировании дислокационных петель на поверхности никеля при трибонагружении [7].

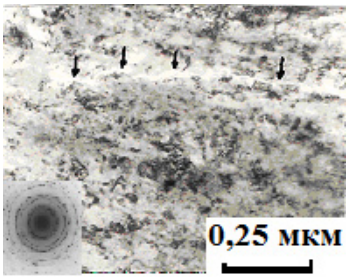


Рисунок 2.2 – Микроструктура субмикро- и нанокристаллических размеров. Микродифракция наноструктур, формирующихся при t = 0,9 кс

Изменение прочностных свойств поверхностного слоя носит осциллирующий характер (рисунок 2.1) и сопровождается, как его микроструктурными изменениями, так и локальным во времени и пространстве лепестково-послойным механизмом его разрушения. Разработана феноменологическая модель лепестково-послойного разрушения поверхностного слоя никеля (таблица 2.1) [4], [7].

Таким образом, разработана феноменологическая модель лепестково-послойного разрушения поверхностного слоя никеля при трибонагружении. Изучена синергетика лепестково-послойного разрушения поверхностного слоя металла во взаимосвязи с самоорганизацией поверхности и сохранением её долговечности, где отделение лепестка изнашивания посредством совершения максимальной работы разрушения является необходимым условием снижения энергии деформации и более замедленного распространения разрушения в более глубокие слои материала.

Область II на рисунке 2.1 характеризуется равновесной деформацией при каждом цикле изменения прочностных свойств поверхностного слоя никеля при трибонагружении. Для данной области деформации имеет место эволюция нанокристаллических структур в пластинчатые,

Таблица 2.1 – Феноменологическая модель лепестково-послойного разрушения поверхностного слоя никеля при трибонагружении

Нано		Микро	
Механизм деформации	Механизм разрушения	Механизм деформации	Механизм разрушения
Высокодисперсная наноструктурированная фаза с блоками ~5÷50 нм; $\rho = 10^{16}$ м$^{-2}$.	Квазивязкий	Фрагментированный поверхностный слой до $\rho = 10^{16}$ м$^{-2}$.	Формирование микротрещин (характерный размер 10 нм по диаметру и 100 нм по длине) около скоплений деформационных дефектов в полосах скольжения и т. д.
Межузельные бифуркационные структурные состояния.	Квазивязкий	Дислокационные кластеры с размером ~ 0,1 мкм.	Объединение неравновесных вакансий в субмикропористость в поверхностных слоях.
Пластическая дисторсия. Неравновесные вакансии. Коалесценция неравновесных вакансий.	Квазивязкий	Полосовые (пластинчатые) структуры в полосах скольжения. Рост зерен (микро-рекристаллизация) от 10 нм до 200 нм.	Объединение субмикропор в микропоры. Поверхностные сдвиги и области расслоения. Разрушение сколом по границам субструктуры.
Нанопоры	Квазивязкий	Объединение вакансий в микропоры. Поверхностные сдвиги и надрывы.	Локализованное во времени отслаивание тончайшего диспергированного слоя толщиной ≈ 70 нм. Лепестково-послойный механизм.
Нанонесплошности	Квазивязкий	Микропоры по границам полосовой субструктуры.	Период одной ВЧ осцилляции упрочнения и разрушения поверхностного слоя никеля составил ≈ 18 кс
Нанодиполи	Квазивязкий	Градиентная структура по глубине до 100 нм.	Интенсивность изнашивания изменяется на порядок с 10^{-7} до 10^{-6} кг/м

ламенарные структуры, образование полос скольжения, микротрещин, что приводит к формированию микро и начало образования мезоуровня масштабной деформации (рисунок 2.3). По границам полос скольжения наблюдается зарождение микропор (рисунок 2.3, позиция А) и микротрещин (рисунок 2.3, вставка) [7].

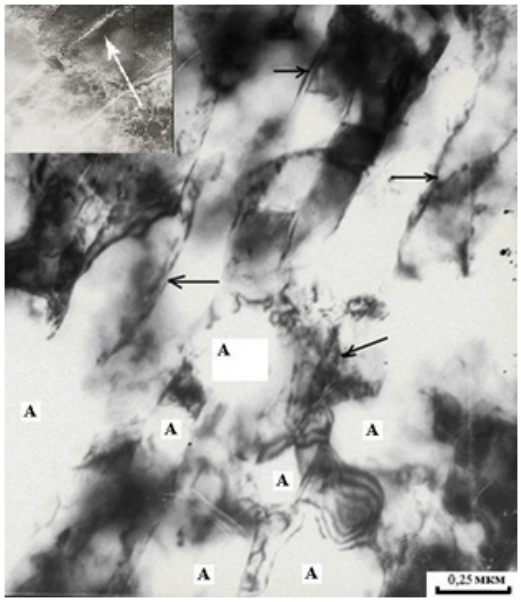


Рисунок 2.3 – Формирование полос скольжения при t = 4 кс

При трибонагружении металлов пластическая деформация локализована в тонких поверхностных слоях. В силу этой особенности фрикционного нагружения, а так же барьерной роли поверхности для выхода дислокаций, накопление скрытой энергии деформации этими слоями будет протекать в условиях интенсивного деформирования. Это обстоятельство определяет формирование широких полос скольжения с обилием плоских скоплений дислокаций и повышенной их плотностью ($\rho = 10^{16}$ м$^{-2}$), что обуславливает сложно-напряженное состояние подповерхностного объема, предопределяющее в нем трещинообразование и последующее разрушение [7]. В силу многоцикловой и знакопеременной деформации при трибонагружении, а так же барьерной роли оксидных плёнок на поверхности для выхода дислокаций, накопление скрытой энергии деформации этими слоями будет протекать в условиях интенсивного деформирования. Это обстоятельство определяет формирование широких полос скольжения с обилием плоских скоплений дислокаций, что обуславливает сложно-напряженное состояние подповерхностного объема металла, характеризующееся наличием чередующихся областей сжатия и растяжения локализацией упругих напряжений вдоль границ клина под углом ≈ 56÷63^{o} к плоскости скольжения. Увеличение числа заторможенных плоскостей скольжения определяет увеличение числа областей сжатия и растяжения, что приводит к появлению ротационных структур (рисунок 2.4, стрелки указывают направление вращения, где знак минус – область сжатия, а знак плюс – область растяжения) [4].

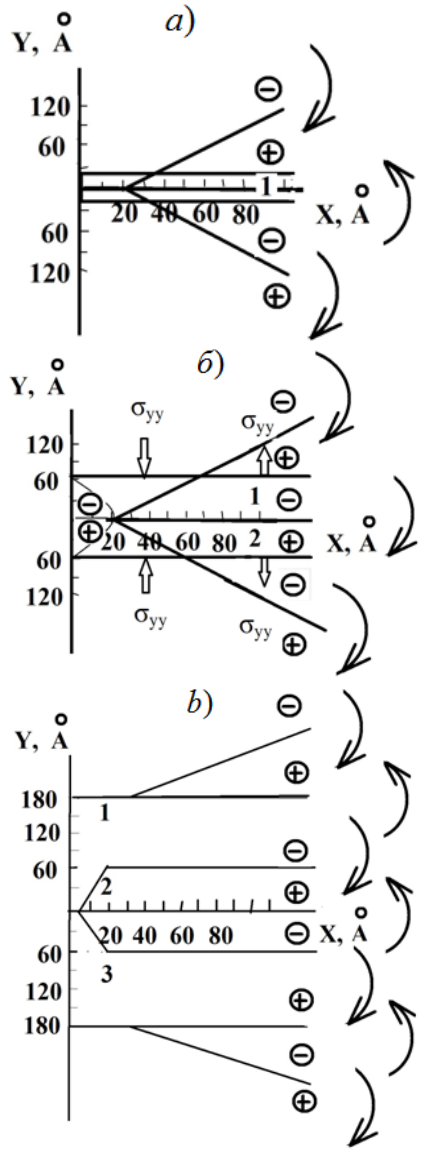


Рисунок 2.4 – Распределение знаков нормальных напряжений в головной части полосы скольжения:
а) n = 1 (одна полоса скольжения);
б) 2 (две полосы скольжения);
в) n = 3 (три полосы скольжения)

Появление последних обуславливает локальную кривизну кристаллической решётки вдоль указанных выше границ с высоким градиентом напряжений, что обуславливает формирование высокоразвитого рельефа и гофрирование поверхностного слоя никеля (рисунок 2.5). Основным условием совместимости деформации на масштабно-структурных уровнях: нано-, микро-, мезо- и макро- является выполнение закона сохранения момента импульса [2]:

$$\sum_{i=1}^{N} RotJ_i = 0, \qquad (2.1)$$

где J_i – потоки дефектов на i-м структурно-масштабном уровне. В этих условиях в материале компенсируются все моментные напряжения, и кристаллическая решетка сохраняет свою трансляционную инвариантность. Пока выполняется соотношение (2.1), материал является пластичным, так как выполняется условие для зернограничного скольжения. Совершенно другая схема нагружения создается в поверхностных слоях материала в условиях трения. Моментные напряжения в зонах фрикционных контактов на поверхностях трения создают кривизну их кристаллической решетки [1]. В ее междоузлиях возникают новые минимумы многочастичных потенциалов межатомного взаимодействия и создается возможность развития структурной турбулентности механизмом пластической дисторсии [8]. В структуре поверхностного слоя развиваются динамические ротации с большой концентрацией атермических вакансий на узлах кристаллической решетки, где прошла пластическая дисторсия. Коалесценция атермических вакансий обусловливает развитие микропористости на границах динамических ротаций, образование микротрещин и формирование частиц износа.

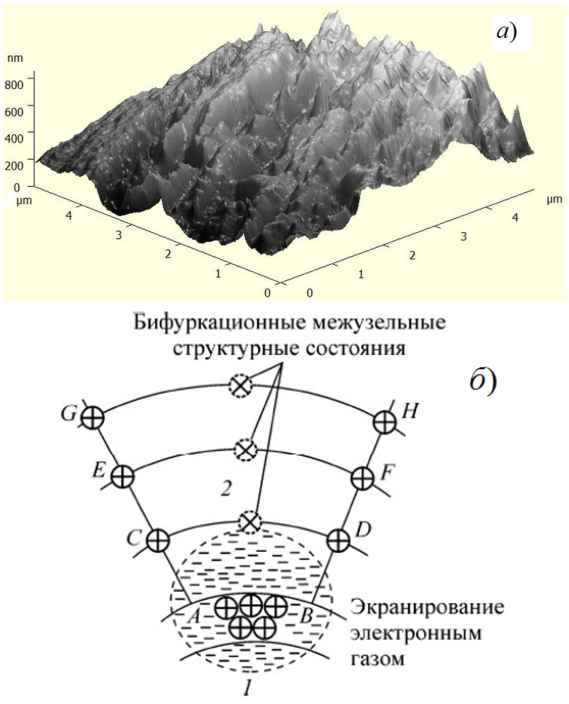


Рисунок 2.5 – Трёхмерное изображение АСМ-изображения поверхности никеля с центрами повышенной плотности дислокаций в виде точек белого цвета (*а*), генерация бифуркационных межузельных структурных состояний в зоне локальной кривизны кристаллической решётки, где АВ – кластеры положительных ионов на границе зёрен 1 и 2 (*б*)

Область III на рисунке 1 характеризуется неравновесной деформацией. Данная область наименее изучена. Можно предположить, что высокая плотность дислокаций в локальных зонах ($\approx 10^{18}$ м$^{-2}$), в виде ярко выраженных точек белого цвета, будет определять динамическую рекристаллизацию с формированием структур с высоким модулем упругости. Смещения атомов в парах при развитии сдвиговой деформации будет сопровождаться пластической дисторсией в зоне межузельных бифуркационных минимумов многочастичного потенциала, что вызывает завихренность пластического течения [8].

Осуществлена количественная оценка толщины разрушаемого поверхностного слоя и зависимости распределения напряжений на интерфейсе поверхностный слой – подложка, обладающая упругими свойствами.

Характер сопряжения поверхностного слоя, обладающего аморфными свойствами, с основным объёмом никеля существенно зависит от соотношения их модулей упругости и толщины поверхностного слоя. В одномерном приближении для направленной вдоль оси X плоской границы раздела распределение на интерфейсе нормальных (σ) и касательных напряжений (τ) описывается уравнениями [9]:

$$\sigma = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \sin \frac{x + l_x}{t\sqrt{2}}, \quad \tau = \frac{\sigma_s}{\sqrt{6}} \cos \frac{x + l_x}{t\sqrt{2}},$$

где σ_s – предел текучести приграничного слоя; t – толщина приграничного слоя, испытывающего пластическую деформацию; параметр l_x – определяется выражением [9]:

$$l_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)t.$$

Анализ АСМ-изображения (рисунок 2.5) поверхностного слоя никеля показывает, что $l_x \approx 700$ нм, $n = 5$. Тогда толщина приграничного поверхностного слоя $t \approx 70$ нм и она совпадает с величиной скин-слоя, оцениваемого методом ФМР. Оценка толщины приграничного слоя никеля составила $\approx 10^{-7}$ м, что хорошо согласуется с результатами оценки толщины поверхностного слоя, приведенными в работе [9].

Заключение

В результате анализа изображений методом просвечивающей электронной микроскопии и электронографии (микродифракция) установлено формирование при трибонагружении тонкой структуры в виде нанокристаллических (НК) блоков размером ≈ 5–50 нм с высокоугловой разориентацией ≈ 5–10° и высокой плотностью дислокаций 10^{16} м$^{-2}$. НК блоки формируются в условиях ($t = 0{,}9$ кс, контактное давление ≈ 84 кПа) неравновесной деформации и нелинейной динамике структурообразования предварительно отожженных образцов никеля, когда скорость увеличения напряжений превышает скорость их

релаксации. Образовавшиеся при трибонагружении дислокации облегчённо выходят на поверхность в присутствии поверхностно-активных веществ и расщепляются с формированием дислокационных петель и дислокационных диполей. Эти нанокристаллические фрагменты структуры обуславливают повышение прочностных свойств поверхностного слоя никеля. С увеличением времени трибонагружения и при действии поверхностно-активных веществ НК состояния трансформируются в ячеистую субмикро- и микроструктуру, а затем в текстуру в виде тонких жгутов, ориентированных вдоль направления скольжения. Вдоль тонких жгутов начинают формироваться микротрещины. Предложена в виде таблицы феноменологическая модель лепестково-послойного разрушения поверхностного слоя никеля при трибонагружении. Изучена синергетика лепестково-послойного разрушения поверхностного слоя металла.

С увеличением времени трибонагружения жгуты эволюционируют в полосы скольжения в условиях равновесной деформации при каждом цикле изменения прочностных свойств поверхностного слоя никеля. Имеет место эволюция нанокристаллических структур в пластинчатые, ламенарные структуры, образование полос скольжения, микротрещин, что приводит к формированию микро- и начало образования мезоуровня масштабной деформации при лепестково-послойном механизме разрушения поверхности.

Эволюция макроуровня деформации сопровождается корпоративным и согласованным движением элементов дефектной структуры, нано-, микро- и мезомасштабных уровней деформации при сдвиге с одновременным поворотом зёрен поликристаллического никеля, что определяет развитие пористости, многоуровневого рельефа, гофрирование и объединение микротрещин в макротрещины. Интенсивность внешнего воздействия определяет длительность цикла изменения прочностных характеристик, величину накопления энергии деформации и степень фрагментации кристаллической решётки ферромагнитных металлов и, соответственно, локальную кривизну границ структурных элементов. Количество, плотность и взаимодействие структурных элементов (нано- и субмикро- полос скольжения, пор и т. д.) определяют доминирующую роль того или иного масштабного уровня пластической деформации в тот или иной момент времени кинетики структурообразования и механизм его разрушения в соответствии с минимумом потенциальной энергии взаимодействия сформировавшейся структуры. Таким образом, в работе показана эволюция структурно-масштабных уровней деформации, начиная от нано- и заканчивая макроуровнем деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Структурные уровни пластической деформации и разрушения* / В.Е. Панин [и др.]. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 255 с.

2. *Панин*, *В.Е.* Физическая мезомеханика деформируемого твёрдого тела как многоуровневой системы. I. Физические основы многоуровневого подхода / В.Е. Панин, В.Е. Егорушкин, А.В. Панин // Физическая мезомеханика. – 2006. – Т. 9, № 3. – С. 9–22.

3. *Панин*, *В.Е.* Физическая мезомеханика разрушения и износа на поверхностях трения твёрдых тел / В.Е. Панин, П.А. Витязь // Физическая мезомеханика. – 2002. – Т. 5, № 1. – С. 5–13.

4. *Пинчук*, *В.Г.* Микроструктура и разрушение металлов при трении / В.Г. Пинчук, С.В. Короткевич, В.В. Свиридова. – Гомель: УО ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. – 150 с.

5. *Тишин*, *А.М.* Наноразмерный магнетизм / А.М. Тишин, Ю.И. Спичкин. – М: МГУ, 2012. – 184 с.

6. *Щукин*, *Е.Д.* Влияние активной среды на механическую устойчивость и поврежденность поверхности твердого тела / Е.Д. Щукин // Вестник Московского университета. – Сер. 2. Химия. – 2012. – Т. 53. – № 1. – С. 50 – 72.

7. *Пинчук*, *В.Г.* Кинетика упрочнения и разрушения поверхности металлов при трении / В.Г. Пинчук, С.В. Короткевич // LAP Lambert Academic Publishing. – Saarbrücken: LAP, 2014. – 180 с.

8. *Мультискейлинг локальной кривизны кристаллической решетки на поверхностях трения металлических материалов как основа механизма их изнашивания* / В.Е. Панин, В.Г. Пинчук, С.В. Короткевич, С.В. Панин // Физическая мезомеханика. – 2017. – Т. 20, № 1. – С. 72–81.

9. *Поверхностные слои и внутренние границы раздела в гетерогенных материалах* / В.Е. Панин [и др.]. – Новосибирск: СО РАН, 2006. – 520 с.

Поступила в редакцию 24.04.2020.

ФИЗИКА

УДК 544.556.1:546.26:620.3

ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ УГЛЕРОДА И ПОЛИАКРИЛАМИДА, ВЛИЯНИЕ ТЕРМООБРАБОТКИ НА ИХ ФАЗОВЫЙ СОСТАВ И МОРФОЛОГИЮ

А.С. Руденков, М.А. Ярмоленко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FORMATION OF STRUCTURED COATINGS BASED ON CARBON AND POLYACRYLAMIDE, INFLUENCE OF THERMAL TREATMENT ON THEIR PHASE COMPOSITION AND MORPHOLOGY

A.S. Rudenkov, M.A. Yarmolenko

F. Scorina Gomel State University

Рассмотрены морфологические особенности двухслойных покрытий на основе полиакриламида и углерода, сформированных в едином технологическом цикле электронно-лучевым и катодно-импульсным методами соответсвенно. Установлено влияние термообработки на воздухе на морфологию, фазовый состав и структурные превращения в таких двухслойных системах. Показано, что термообработка слоя полиакриламида на воздухе (300º С, 60 минут) приводит к полному исчезновению нитрильных групп, что может являться следствием процессов циклизации.

***Ключевые слова**: полиакриламид, углеродные покрытия, морфология, фазовый состав.*

The morphological features of two-layer coatings based on polyacrylamide and carbon, formed in a single technological cycle by electron beam and cathode-pulse methods, respectively, are considered. The effect of heat treatment in air on the morphology, phase composition, and structural transformations in such two-layer systems is established. It was shown that heat treatment of a polyacrylamide layer in air (300º C, 60 minutes) leads to the complete disappearance of nitrile groups, which may be a consequence of cyclization.

Keywords: *polyacrylamide, carbon coatings, morphology, phase composition.*

Введение

Наноразмерные углеродные покрытия являются метастабильной формой аморфного (a-C) или гидрогенизированного аморфного углерода (a-C:H). Такие покрытия можно представить как трехмерную сетку ковалентно связанных атомов углерода с различным типом гибридизации, расположенных случайным образом [1]. Структура и фазовый состав углеродных покрытий (содержание водорода, гибридизация, доля C – H, C – C связей) зависят от выбора методов и технологических параметров формирования и определяют их механические, тепло- и электрофизические свойства [1], [2].

Основными недостатками углеродных покрытий являются высокий уровень внутренних напряжений и низкая термостойкость (< 350° C) [3]. Высокий уровень внутренних напряжений ограничивает толщину покрытий (не более 1 мкм), препятствует нанесению их на полимерные подложки, механические характеристики (модуль Юнга, коэффициент Пуассона и др.) которых заметно отличаются от аналогичных характеристик углеродных слоев. Это ограничивает область практического использования углеродных покрытий, в частности в области модифицирования изделий медицинского назначения на основе высокомолекулярных соединений.

Внутренние напряжения можно снизить легированием или формированием многослойных структур, состоящих из чередующихся мягких и твердых слоев [4]. В качестве углеродного слоя перспективно использование гидрогенизированных углеродных покрытий, характеризующихся более низкой температурой диффузии водорода и способностью к трансформации в нанокристаллический графит при отжиге на воздухе при температуре 300° C [5]. В качестве подслоя, обеспечивающего взаимодействие подложки с углеродным слоем, впервые предложено использовать покрытие на основе полиакриламида (ПАА). Органическое покрытие осаждали в результате воздействия потока низкоэнергетических электронов на порошок полиакриламида. Предварительные исследования показали схожесть молекулярной структуры осаждаемого слоя с молекулярной структурой полиакрилонитрила (ПАН). Это позволило предположить возможность возникновения циклических углеродных структур при термообработке нанесенного покрытия [6]. Возникновение циклических углеродных структур способно приводить к повышению адгезионного взаимодействия между углеродным и органическим слоями, а также между органическим слоем и эластичной подложкой. Следует отметить, что структурирование

© *Руденков А.С., Ярмоленко М.А.*, 2020

органического покрытия при термообработке может сопровождаться растрескиванием верхнего углеродного слоя. Известно, что вследствие специфических механизмов деформации наноструктурные материалы обладают одновременно высокими прочностью и пластичностью и, благодаря этому, могут соединять края зарождающихся трещин, тем самым повышая прочность системы [7]. При этом в настоящее время отсутствует информация о методах формирования, морфологических особенностях и свойствах гибридных систем, представляющих собой чередующиеся полимерные и наноструктурированные углеродные слои, что связано со сложностью интеграции различных методик синтеза в едином технологическом цикле.

Целью работы является определение влияния подслоя на основе полиакриламида, формируемого методом электронно-лучевого диспергирования, на морфологию и фазовый состав углеродных покрытий, осаждаемых из плазмы импульсного катодно-дугового разряда.

1 Методика эксперимента

Полимерные слои осаждали из газовой фазы, генерируемой методом электронно-лучевого диспергирования полиакриламида потоком электронов с энергией 800–1600 эВ и плотностью 0,01–0,03 А/см^2 при давлении остаточных газов в вакуумной камере $\approx 4 \cdot 10^{-3}$ Па. Затем в едином технологическом цикле наносились углеродные слои (УП) при напряжении разряда 250–300 В в течение 2500 импульсов с частотой следования 5 Гц.

Для проведения анализа процессов фазовых трансформаций отдельные углеродные и полимерные слои, а также бислойные системы на их основе (ПАА / УП), подвергались термообработке на воздухе при температуре 300° С в течение 1 часа.

Морфологические особенности осаждаемых слоев были изучены средствами атомно-силовой микроскопии (АСМ) при помощи прибора Solver Pro (NT-MDT, Россия). По способу фиксации силового взаимодействия зонда и образца исследования проводились по полуконтактной методике. Поле сканирования – 4×4 мкм.

Анализ фазового состава углеродных покрытий и слоев на основе ПАА осуществлялся средствами спектроскопии комбинационного рассеяния с помощью спектрометра Senterra с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм, мощностью 5 мВт.

Молекулярная структура ПАА определялась методом ИК-спектроскопии.

Ширина запрещенной зоны рассчитывалась на основании данных УФ-ВИД спектроскопии по методу Таунца [8].

2 Результаты и их обсуждение

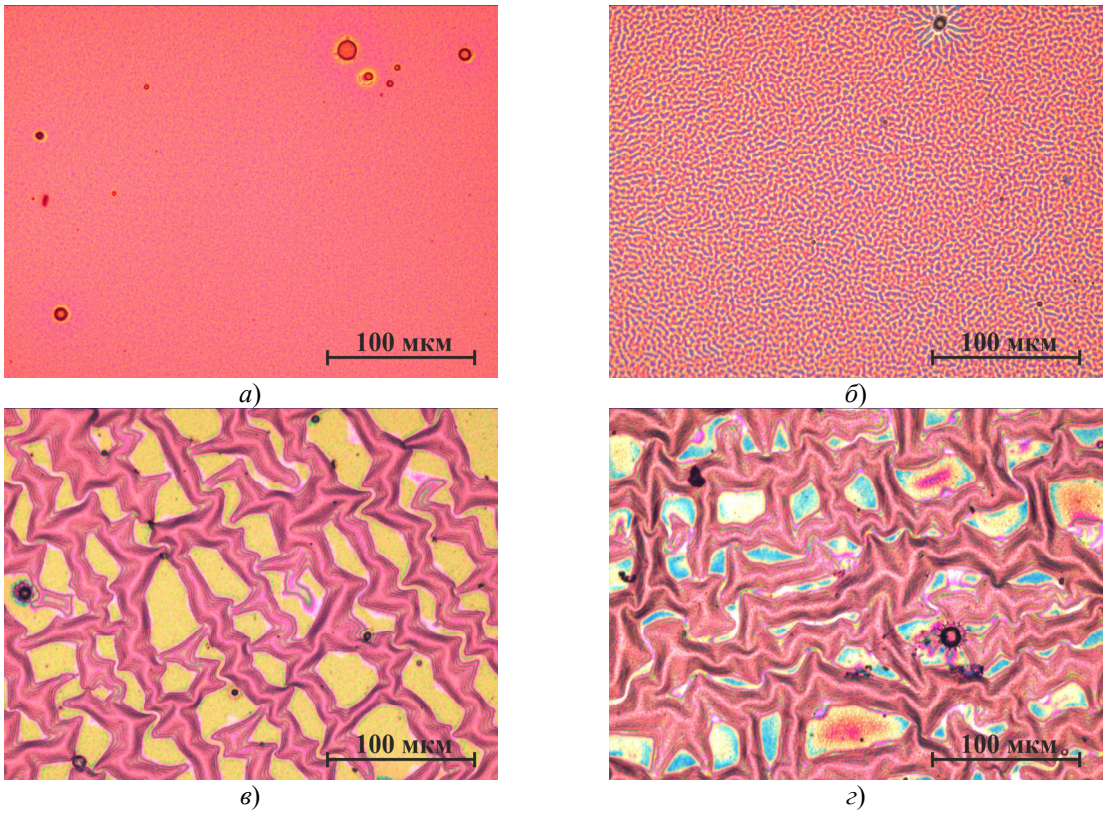
На рисунке 2.1 представлены изображения поверхности покрытий, полученные при помощи оптического микроскопа с 400-кратным увеличением (поле 340×250 мкм). Термообработка покрытий ПАА приводит к структурированию их поверхности (рисунок 1, б), что вызвано, по всей видимости, процессами циклизации с участием нитрильных групп. Установлено, что для углеродных слоев, нанесенных на ПАА, также характерно образование системы связанных между собой поверхностных локальных образований (рисунок 2.1, *в*, *г*), в том числе и для образцов не подвергнутых термообработке. Такие морфологические изменения могут быть вызваны существенным различием механических и теплофизических свойств слоев, образующих рассматриваемую систему: более мягкий слой ПАА деформируется при нагреве на стадии нанесения углеродного слоя и под действием возникающих в нем внутренних напряжений. Структурированные области имеют микрометровый размер.

Результаты АСМ показывают (рисунок 2.2), что данные морфологические особенности сохраняются и на более низкоразмерном уровне (таблица 2.1). Большая субшероховатость бислойных систем ПАА / УП обусловлена морфологическими особенностями промежуточного слоя ПАА. Основными изменениями морфологии, вызванными термообработкой, как углеродных слоев так и систем ПАА / УП, являются увеличение числа отдельных структурных образований (далее зерен) и уменьшение их размера (таблица 2.1), что объясняется следствием фазовой трансформации $sp^3 \rightarrow sp^2$. Увеличение размера зерен ПАА при термообработке объясняется слиянием кластеров графита, образующихся в результате карбонизации полимера.

Общей тенденцией для всех рассматриваемых образцов является возрастание средней высоты в результате термообработки на воздухе при температуре 300^o С, что обусловлено окислительными процессами и последующей частичной деструкцией покрытия.

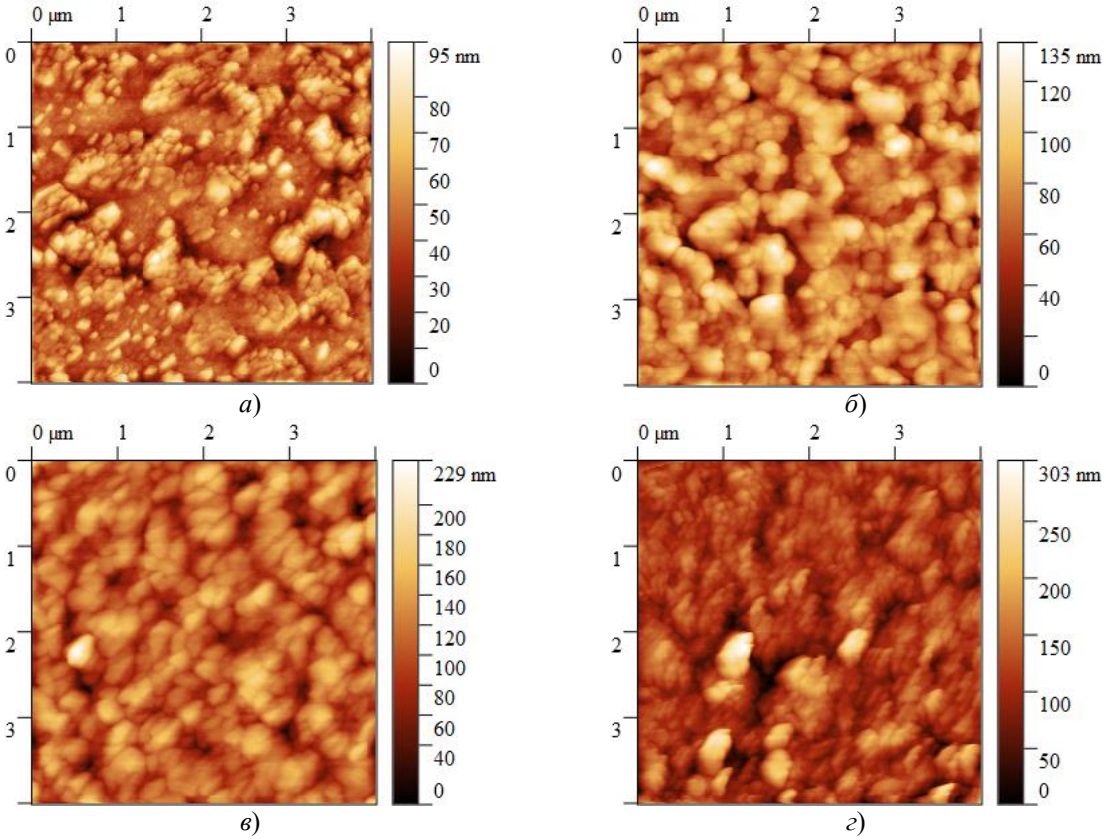
Таблица 2.1 – Статистическая обработка результатов АСМ

Покрытие	Средняя высота, нм	Ra, нм	Rms, нм	Плотность зерен, шт.	Средний диаметр зерен, нм
ПАА	46,6 / 78,5	10,2 / 14,3	12,8 / 18,5	241 / 102	100 / 172
УП	5,3 / 6,7	0,3 / 0,3	0,7 / 0,9	22 / 34	56 / 53
ПАА / УП	108,5 / 117,0	20,9 / 26,0	26,2 / 35,4	42 / 121	309 / 159
*до / после термообработки					



а) *б*) *в*) *г*)

Рисунок 1 – Оптическая микроскопия поверхности:
а) – ПАА, *б*) – ПАА после термообработки, *в*) – ПАА / УП, *г*) – ПАА / УП после термообработки



а) *б*) *в*) *г*)

Рисунок 2.2 – Атомно-силовая микроскопия:
а) – ПАА; *б*) – ПАА после термообработки; *в*) – ПАА / УП; *г*) – ПАА / УП после термообработки

Карбонизация покрытия на основе ПАА в результате термообработки косвенно подтверждается данными УФ-ВИД спектроскопии. Показано, что ширина запрещенной зоны для покрытия на основе ПАА составляет 3,3 эВ (рисунок 2.3).

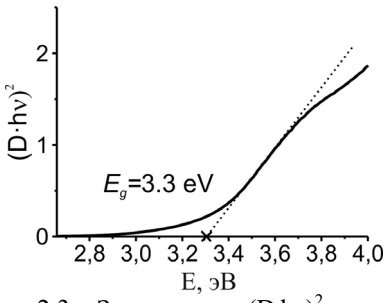


Рисунок 2.3 – Зависимость $(D \cdot h\nu)^2$ от энергии кванта падающего излучения

В то же время после термообработки ширину запрещенной зоны покрытий ПАА определить не удалось, что может объясняться увеличением содержания sp^2-кластеров и улучшением проводящих свойств покрытия.

Анализ ИК-спектров порошка ПАА показывает, что полосы поглощения с максимумами при 1660 и 1560 $см^{-1}$ в ИК-спектре (ПАА) соответствуют карбонильному поглощению амидных групп [8] (полосы «амид I» и «амид II») (рисунок 2.4). Поглощение в области волновых чисел 3600–3000 $см^{-1}$ может быть обусловлено валентными колебаниями OH- и NH-групп. В ИК-спектре ПАА поглощение в области волновых чисел 3000–2800 $см^{-1}$ является следствием валентных колебаний C–H связей [8]. При этом наибольшие значения оптических плотностей характерны для полос поглощения, располагающихся в области 1200–800 $см^{-1}$ ИК-спектра. В отмеченной области проявляются колебания простых и сложных эфирных связей (C – O – C) [9]. Наличие эфирных связей в молекулярной структуре полимера указывает на его сшитую структуру. Такая структура обуславливает высокие гелеобразующие свойства полимера.

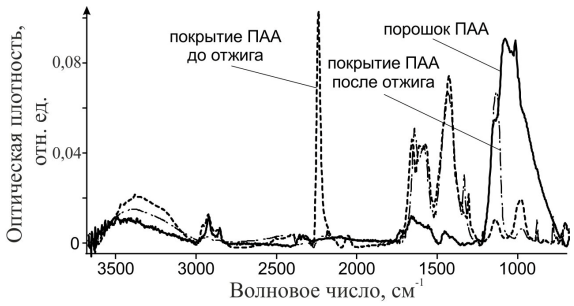


Рисунок 2.4 – ИК-спектр ПАА и покрытий на его основе

В ИК-спектре покрытия, в отличие от ИК-спектра исходного полимера ПАА, присутствует полоса поглощения при 2236 $см^{-1}$, обусловленная валентными колебаниями нитрильных групп (C ≡ N) [8]. Значение оптической плотности отмеченной полосы поглощения является максимальным в ИК-спектре покрытия на основе ПАА. ИК-спектр покрытия характеризуется присутствием интенсивного поглощения при 1430 $см^{-1}$. В ИК-спектре исходного полимера полоса поглощения при 1430 $см^{-1}$ присутствует, но является слабовыраженной. Принимая во внимание наличие в ИК-спектре покрытия поглощения в области 1600–1500 $см^{-1}$, полосу при 1430 $см^{-1}$ можно связать с присутствием в структуре покрытия ионизированных карбоксильных групп [9]. В ИК-спектре покрытия полосы поглощения эфирных групп не являются наиболее выраженными. Их значения оптических плотностей могут заметно уступать значениям оптической плотности большинства полос поглощения, образующих ИК-спектр покрытия. Таким образом, воздействие потока низкоэнергетических электронов на ПАА инициирует ряд химически сложных превращений. В частности, происходит разрушение амидной группы с возникновением нитрильной. Появляются карбоксильные группы, что является следствием отщепления от молекулы ПАА аминогруппы. Частичному разрушению подвергаются и эфирные связи.

Термообработка покрытия на воздухе (300º С, 60 минут) приводит к полному исчезновению нитрильных групп. Подобное изменение может являться следствием процессов циклизации. В этом случае должны образовываться C = N связи. В ИК-спектре валентные колебания C = N связей проявляются в области поглощения амидных и карбоксильных групп (1660–1590 $см^{-1}$). Это существенно затрудняет их идентификацию. Термообработка дополнительно сопровождается окислением покрытия. На это указывает рост значения оптической плотности полосы при 1130 $см^{-1}$ [8].

Из-за малой информативности ИК-спектров углеродных покрытий анализ фазового состава углеродных слоев и бислойных покрытий ПАА / УП до и после термообработки осуществлялся средствами спектроскопии комбинационного рассеяния (КР) (таблица 2.2). КР-спектры углеродных покрытий содержат характерный пик в интервале 1000–1800 $см^{-1}$ [10]. Общепринятым является разложение такого пика на два (D-пик между 1300–1500 $см^{-1}$ и G-пик около 1580 $см^{-1}$) посредством функции Гаусса, что позволяет провести детальный анализ фазового состава углеродных покрытий [11].

Анализ КР спектров, с одной стороны, подтверждает данные атомно-силовой микроскопии: рост соотношения I_D / I_G свидетельствует об уменьшении размеров sp^2-кластеров, а уменьшение ширины G-пика – об увеличении степени их упорядоченности [11]. С другой стороны,

Таблица 2.2 – Анализ результатов КР спектроскопии

Образец	D-пик		G-пик		I_D / I_G
	Положение, $см^{-1}$	Ширина, $см^{-1}$	Положение, $см^{-1}$	Ширина, $см^{-1}$	
УП	1444 / 1379	189 / 161	1573 / 1565	211 / 180	0,25 / 0,31
ПАА / УП	1413 / 1404	165 / 186	1546 / 1576	149 / 100	0,51 / 0,64

согласно результатам АСМ размер sp^2-кластеров однослойных углеродных покрытий меньше, чем у системы ПАА / УП, а соотношение I_D / I_G ниже. Такое противоречие объясняется деформацией углеродных слоев, расположенных на ПАА, поскольку, согласно [12], рост I_D / I_G может указывать на наличие дефектов и напряженно-деформированных состояний.

Выводы

Воздействие потока низкоэнергетических электронов на полиакриаламид инициирует ряд химически сложных превращений. В частности, происходит разрушение амидной группы с возникновением нитрильной. Показано, что термообработка слоя полиакриламида на воздухе (300º С, 60 минут) приводит к полному исчезновению нитрильных групп, что может являться следствием процессов циклизации. Нанесение подслоя полиакриламида является эффективным технологическим приемом формирования микроструктурированных углеродных покрытий с развитой морфологией. Структурирование углеродных покрытий вызвано существенным различием механических свойств слоев, образующих рассматриваемую систему: более мягкий слой полиакриамида деформируется вследствие нагрева на стадии осаждения углеродного покрытия и под действием возникающих в нем внутренних напряжений. Наличие напряженно-деформированных областей подтверждается результатами КР-спектроскопии. Показано, что термообработка системы ПАА / УП приводит к уменьшению размеров sp^2-кластеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Donnet*, *C.* Tribology of Diamond-like Carbon Films: Fundamentals and Applications / C. Donnet, A. Erdemir. – Springer Science & Business Media, 2007. – 680 p.

2. *Mechanical properties and thermomechanical stability of diamond-like carbon films synthesized by pulsed vacuum arc plasma deposition* / Y.X. Leng [et al.] // Suraface and Coatings Technology. – 2003. – Vol. 173. – P. 67–73.

3. *Donnet*, *C.* Recent progress on the tribology of doped diamond-like and carbon alloy coatings: a review / C. Donnet // Surface and Coatings Technology. – 1998. – Vol. 100–101. – P. 180–186.

4. *Effect of vacuum arc deposition parameters on the properties of amorphous carbon thin films* / S. Anders [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 1994. – Vol. 68–69. – P. 388–393.

5. *The thermal stability of diamond-like carbon* / D.R. Tallant [et al.] // Daimond and Related Materials. – 1995. – Vol. 4. – P. 191 – 199.

6. *Effect of amorphous carbon on the tensile behavior of polyacrylonitrile* (*PAN*)*-based carbon fibers* / F. Yang [et al.] // J. Mater. Sci. – 2019. – Vol. 54. – P. 8800–8813.

7. *Витязь*, *П.А.* Наноматериаловедение: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям / П.А. Витязь, Н.А. Свидунович, Д.В. Куис. – Минск: Вышэйшая школа, 2015. – 511 с.

8. *Chemical composition, morphology and optical properties of zincsulfide coatings deposited by low-energy electron beam evaporation* / A.V. Rogachev [et al.] // Applied Surface Science. – 2014. – Vol. 303. – P. 23–29.

9. *Беллами*, *Л.* Инфракрасные спектры сложных молекул / Л. Беллами. – М.: Мир, 1963. – 592 с.

10. *Shirakawa*, *H.* Infrared Spectra of Poly (acetylene) / H. Shirakawa, S. Ikeda // Polymer Journal. – 1971. – Vol. 2, № 2. – P. 231–244.

11. *Long-term stability of hydrogenated DLC coatings*: *Effects of aging on the structural*, *chemical and mechanical properties* / M. Cloutier [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2014. – Vol. 48. – P. 65–72.

12. *Ferrari*, *A.C.* Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon / A.C. Ferrari, J. Robertson // Physical Review B. – 2000. – Vol. 61. – P. 4095–4107.

13. *Haque*, *A.* Synthesis of diamond nanostructures from carbon nanotube and formation of diamond-CNT hybrid structures / A. Haque // Carbon. – 2019. – Vol. 150. – P. 388–395.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках задания 2.64 *«Физико-химические основы осаждения и механические свойства углеродных покрытий*, *содержащих планарные наноструктурные функциональные слои».*

Поступила в редакцию 16.03.2020.

ФИЗИКА

УДК 537.874.2

ОТРАЖЕНИЕ НОРМАЛЬНО ПАДАЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ БИИЗОТРОПНОЙ СТРУКТУРЫ НА ПОДЛОЖКЕ

А.И. Толкачёв, В.Н. Капшай, А.А. Шамына

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

REFLECTION OF A NORMALLY INCIDENT ELECTROMAGNETIC WAVE FROM A PERIODIC BIISOTROPIC STRUCTURE ON A SUBSTRATE

A.I. Talkachov, V.N. Kapshai, A.A. Shamyna

F. Scorina Gomel State University

Решены задачи об отражении нормально падающей плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волны от биизотропного слоя на отражающей подложке и об отражении от биизотропной планарной периодической структуры, находящейся на подложке. Проведен численный и графический анализ зависимостей коэффициентов отражения от толщин слоев. Выявлено, что полученные зависимости имеют периодический характер, данные периоды найдены аналитически. Определены сочетания параметров задачи, при которых коэффициенты отражения для электромагнитных волн левой и правой поляризаций совпадают.

***Ключевые слова**: биизотропная среда, биизотропный слой, подложка, планарная периодическая структура, коэффициент отражения, матричный метод, рекуррентный метод, метод эквивалентных коэффициентов.*

Problems of reflection of a plane circularly polarized electromagnetic wave incident normally on a biisotropic layer on a reflecting substrate and reflection from a planar periodic biisotropic structure on a substrate are solved. Numerical and graphical analysis of dependences of the reflection coefficients on the thicknesses of layers is performed. The obtained dependences have been found to be periodic; these periods are found analytically. Combinations of parameters of the problem are determined at which reflection coefficients for electromagnetic waves of left and right polarizations coincide.

***Keywords**: biisotropic medium, biisotropic layer, substrate, planar periodic structure, reflection coefficient, matrix method, recurrence method, equivalent coefficient method.*

Введение

Уже более 30 лет активно развивается область, посвящённая исследованию взаимодействия электромагнитного излучения с искусственно создаваемыми средами, которые теперь называют метаматериалами [1], [2]. В основном это киральные среды. В качестве их обобщения рассматривают биизотропные среды и, затем, как наиболее общий случай, – бианизотропные среды [3], [4]. В настоящее время существуют численные методы, позволяющие моделировать происходящие в таких средах процессы взаимодействия с электромагнитным излучением [5], [6]. Однако до сих пор наиболее ценными являются аналитические методы и результаты, поскольку они позволяют производить дальнейший анализ по различным направлениям: нахождение коэффициентов прохождения и отражения [7]–[14], мод волноводов [3], [5], моделирование процессов рассеяния [15]–[17], фотонных кристаллов [18] и т.д. Для последней цели рассматривают периодические структуры на основе биизотропных материалов [9]–[13]. Для таких сред материальные уравнения имеют вид [3]

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + (\chi + i\alpha)\vec{H},\ \vec{B} = (\chi - i\alpha)\vec{E} + \mu\vec{H},$$

где величины $\vec{D}$ и $\vec{B}$ – векторы электрической и магнитной индукции, величины $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – векторы электрической и магнитной напряженности, ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, χ и α – параметры невзаимности и киральности соответственно.

В данной работе рассмотрено решение двух взаимосвязанных задач электродинамики: задачи об отражении электромагнитной волны от биизотропного слоя на отражающей подложке и задачи об отражении от биизотропной периодической структуры, расположенной на подложке.

1 Задача об отражении от биизотропного слоя на отражающей подложке

1.1 Постановка задачи. Направим ось *Oz* вверх (рисунок 1.1).

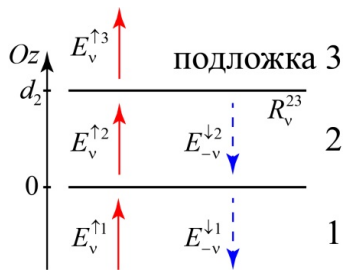


Рисунок 1.1 – Схема отражения электромагнитной волны от биизотропного слоя 2 на отражающей подложке 3

© *Толкачёв А.И., Капшай В.Н., Шамына А.А.*, 2020

Пусть область $z \le 0$ заполнена биизотропной средой 1 с параметрами ε_1, μ_1, χ_1, α_1, в области $0 < z \le d$ находится биизотропный слой 2 толщины d_2 с параметрами ε_2, μ_2, χ_2, α_2, а выше него находится подложка 3 с коэффициентом отражения R_ν^{23}.

Распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси Oz в среде номер p ($p = 1, 2$) электромагнитные волны можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_\nu^{\uparrow p} &= \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_\nu^{\uparrow p} \exp\left(ik_\nu^p z - i\omega t\right), \\ \vec{E}_{-\nu}^{\downarrow p} &= \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_{-\nu}^{\downarrow p} \exp\left(-ik_{-\nu}^p z - i\omega t\right), \\ \vec{H}_\nu^{\uparrow p} &= -b_\nu^p \vec{E}_\nu^{\uparrow p}, \ \vec{H}_{-\nu}^{\downarrow p} = -b_{-\nu}^p \vec{E}_{-\nu}^{\downarrow p}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} k_\sigma^p &= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{\varepsilon_p\mu_p - \chi_p{}^2} + \sigma\alpha_p\right), \\ b_\sigma^p &= \left(\chi_p + i\sigma\sqrt{\varepsilon_p\mu_p - \chi_p{}^2}\right)/\mu_p. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В данных выражениях символы ↑,↓ показывают направления волновых векторов (↑ – вдоль оси Oz, ↓ – против оси Oz), индекс ν – поляризация исходной волны (+1 – правая циркулярная, –1 – левая циркулярная), векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ – базисные векторы, направленные вдоль осей Ox, Oy (они лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости падения), k_σ^p – волновые числа ($\sigma = \pm\nu$), а b_σ^p – величины, обратные волновому сопротивлению среды, λ – длина волны падающего излучения в вакууме. Падающей на структуру и отраженной от нее волнам соответствует значение $p = 1$. Прошедшая волна имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_\nu^{\uparrow 3} &= \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_\nu^{\uparrow 3} \exp\left(ik_\nu^3\left(z - d_2\right) - i\omega t\right), \\ \vec{H}_\nu^{\uparrow 3} &= -b_\nu^3 \vec{E}_\nu^{\uparrow 3}. \end{aligned}$$

При записи выражений (1.1) использовано граничное свойство биизотропных структур, доказанное в работе [19], которое гласит, что волны, сонаправленные падающей, имеют поляризацию, совпадающую с поляризацией падающей волны (т. е. ν; на всех рисунках они обозначены красным), а противонаправленные падающей – противоположную (–ν; обозначены синим).

Под коэффициентом отражения будем понимать отношение амплитуд напряженностей отраженной и падающей волн в среде 1:

$$R_\nu = \frac{E_{-\nu}^{\downarrow 1}}{E_\nu^{\uparrow 1}}. \quad (1.3)$$

В общем случае это комплексная величина, содержащая информацию о разности фаз между падающей и отражённой волнами.

1.2 Решение методом многократных отражений. Рассмотрим распространение волны с учетом многократных отражений от границы раздела 12 и подложки. Данный метод применяется для расчета электромагнитных полей в структурах с небольшим количеством слоев [8], [18] и позволяет наглядно представить процесс распространения волн при падении на структуру. На рисунке 1.2 и в последующих уравнениях индексы 0, 1, 2, … слева у напряженности электрического поля указывают количество отражений волны от подложки. Запишем амплитуды напряженности отраженных от структуры волн (рисунок 1.2):

$$\begin{aligned} {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} &= E_\nu^{\uparrow 1}\rho_\nu^{12}, \\ {}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1} &= E_\nu^{\uparrow 1}\tau_\nu^{12}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\tau_{-\nu}^{21}, \\ {}_2E_{-\nu}^{\downarrow 1} &= E_\nu^{\uparrow 1}\tau_\nu^{12}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\left(\rho_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\right)\tau_{-\nu}^{21}, \\ {}_3E_{-\nu}^{\downarrow 1} &= E_\nu^{\uparrow 1}\tau_\nu^{12}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\left(\rho_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2 R_\nu^{23}\eta_{-\nu}^2\right)^2\tau_{-\nu}^{21}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь множитель $\eta_\sigma^2 = \exp\left(ik_\sigma^2 d_2\right)$ связан с изменением фазы волны при прохождении слоя 2 толщины d_2; τ_σ^{12}, τ_σ^{21}, ρ_σ^{12}, ρ_σ^{21} – коэффициенты прохождения и отражения на границе раздела 12 соответственно [19], которые имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_\sigma^{12} &= \frac{b_\sigma^1 - b_{-\sigma}^1}{b_\sigma^2 - b_{-\sigma}^1}, \ \tau_\sigma^{21} = \frac{b_\sigma^2 - b_{-\sigma}^2}{b_\sigma^1 - b_{-\sigma}^2}, \\ \rho_\sigma^{12} &= \frac{b_\sigma^1 - b_\sigma^2}{b_\sigma^2 - b_{-\sigma}^1}, \ \rho_\sigma^{21} = \frac{b_\sigma^2 - b_\sigma^1}{b_\sigma^1 - b_{-\sigma}^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

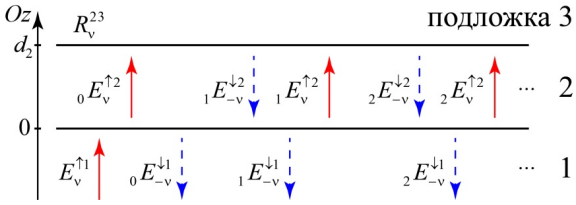


Рисунок 1.2 – Схема отражения волны от биизотропного слоя 2 на отражающей подложке 3 в методе многократных отражений

Вводя обозначение $q = R_\nu^{23}\rho_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2$, можно получить выражение для отраженной волны $E_{-\nu}^{\downarrow 1}$ путем непосредственного сложения амплитуд многократно отраженных волн (1.4) с учетом набега фаз:

$$\begin{aligned} E_{-\nu}^{\downarrow 1} &= {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} + {}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1} + {}_2E_{-\nu}^{\downarrow 1} + \dots = \\ &= {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} + {}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1}\left(1 + q + q^2 + \dots\right) = {}_0E_{-\nu}^{\downarrow 1} + \frac{{}_1E_{-\nu}^{\downarrow 1}}{(1-q)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Коэффициент отражения (1.3) от данной структуры получается равным

$$R_\nu = \frac{E_{-\nu}^{\downarrow 1}}{E_\nu^{\uparrow 1}} = \rho_\nu^{12} + \frac{R_\nu^{23}\tau_\nu^{12}\tau_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2}{1 - R_\nu^{23}\rho_{-\nu}^{21}\eta_\nu^2\eta_{-\nu}^2}. \quad (1.7)$$

С учетом следующего соотношения для коэффициентов прохождения и отражения на границе 12 [8]:

$$\left(\rho_\nu^{12}\rho_{-\nu}^{21} - \tau_\nu^{12}\tau_{-\nu}^{21}\right)\frac{\rho_\nu^{21}}{\rho_\nu^{12}} = 1, \quad (1.8)$$

коэффициент отражения от структуры (1.7) принимает окончательный вид:

$$R_{\nu} = \rho_{\nu}^{12} \frac{1}{1 - R_{\nu}^{23} \rho_{-\nu}^{21} \eta_{\nu}^{2} \eta_{-\nu}^{2}} \left(1 - R_{\nu}^{23} \eta_{\nu}^{2} \eta_{-\nu}^{2} \frac{1}{\rho_{\nu}^{21}} \right). \quad (1.9)$$

Рассмотрим второй независимый метод получения выражения (1.9).

1.3 Решение матричным методом. Матричный метод состоит в записи граничных условий для тангенциальных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в виде матричных уравнений при $z = 0$ и $z = d_2$ [9]. Составим такие системы уравнений для амплитуд, существующих в структуре волн (рисунок 1.1):

$$z = 0: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -b_{\nu}^{1} & -b_{-\nu}^{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 1} \\ E_{-\nu}^{\downarrow 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -b_{\nu}^{2} & -b_{-\nu}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 2} \\ E_{-\nu}^{\downarrow 2} \end{bmatrix},$$

$z = d$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -b_{\nu}^{2} & -b_{-\nu}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\left(ik_{\nu}^{2} d_2 \right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-ik_{-\nu}^{2} d_2 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 2} \\ E_{-\nu}^{\downarrow 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -b_{\nu}^{3} & -b_{-\nu}^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 3} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Соотношения (1.10) принимают более компактный вид, если ввести следующие матрицы:

$$\mathbf{E}_p = \begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow p} \\ E_{-\nu}^{\downarrow p} \end{bmatrix}, \ \mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -b_{\nu}^{p} & -b_{-\nu}^{p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_p = \begin{bmatrix} \eta_{\nu}^{p} & 0 \\ 0 & \left(\eta_{-\nu}^{p} \right)^{*} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

С учётом того, что $E_{-\nu}^{\downarrow 3} = 0$, выражения (1.10) можно записать в виде

$$z = 0: \ \mathbf{M}_1 \mathbf{E}_1 = \mathbf{M}_2 \mathbf{E}_2, \quad z = d: \ \mathbf{M}_2 \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{E}_2 = \mathbf{M}_3 \mathbf{E}_3. \quad (1.12)$$

Здесь матрицы $\mathbf{\Phi}_p$ позволяют учесть набег фаз при прохождении биизотропного слоя. А коэффициент отражения от подложки R_{ν}^{23} определяется выражением

$$R_{\nu}^{23} = \frac{E_{-\nu}^{\downarrow 2} \left(\eta_{-\nu}^{2} \right)^{*}}{E_{\nu}^{\uparrow 2} \eta_{\nu}^{2}}. \quad (1.13)$$

Если про подложку известен только коэффициент отражения, но не её величины b_{σ}^{3}, k_{σ}^{3}, то это соотношение можно использовать вместо второй формулы в (1.12). Из выражений (1.12) и (1.13) можно определить связь между амплитудами падающей, отраженной волн и амплитудой волны в среде 2:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2 \mathbf{E}_2 = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ R_{\nu}^{23} \eta_{\nu}^{2} \eta_{-\nu}^{2} \end{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 2}. \quad (1.14)$$

Это же выражение в полной форме:

$$\begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 1} \\ E_{-\nu}^{\downarrow 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(b_{-\nu}^{1} - b_{\nu}^{2} \right) + \left(b_{-\nu}^{1} - b_{-\nu}^{2} \right) R_{\nu}^{23} \eta_{\nu}^{2} \eta_{-\nu}^{2} \\ \left(b_{\nu}^{2} - b_{\nu}^{1} \right) + \left(b_{-\nu}^{2} - b_{\nu}^{1} \right) R_{\nu}^{23} \eta_{\nu}^{2} \eta_{-\nu}^{2} \end{bmatrix} \frac{E_{\nu}^{\uparrow 2}}{b_{-\nu}^{1} - b_{\nu}^{1}}. \quad (1.15)$$

Далее определим коэффициент отражения от данной структуры (1.3):

$$R_{\nu} = \frac{E_{-\nu}^{\downarrow 1}}{E_{\nu}^{\uparrow 1}} = \frac{\left(b_{\nu}^{2} - b_{\nu}^{1} \right) + \left(b_{-\nu}^{2} - b_{\nu}^{1} \right) R_{\nu}^{23} \eta_{\nu}^{2} \eta_{-\nu}^{2}}{\left(b_{-\nu}^{1} - b_{\nu}^{2} \right) + \left(b_{-\nu}^{1} - b_{-\nu}^{2} \right) R_{\nu}^{23} \eta_{\nu}^{2} \eta_{-\nu}^{2}}. \quad (1.16)$$

Полученное выражение, по существу, полностью совпадает с выражением (1.9) для коэффициента отражения от данной структуры, рассчитанным методом многократных отражений. В этом можно убедиться, используя соотношения (1.5).

2 Задача об отражении от периодической структуры на отражающей подложке

2.1 Постановка задачи. Рассмотрим периодическую систему, состоящую из $2N$ ($N \geq 2$ и целое) планарных биизотропных слоев, находящуюся на отражающей подложке (рисунок 2.1, *а*). В области $z \leq 0$ находится биизотропная среда 0 с параметрами ε_0, μ_0, χ_0, α_0; в области

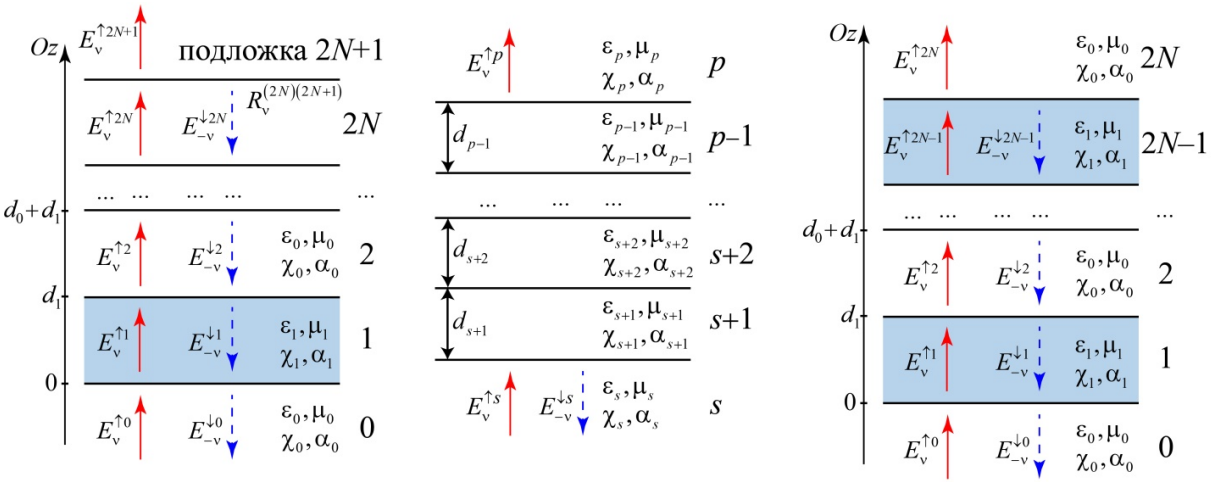
$$\sum_{s=1}^{p-1} d_s < z \leq \sum_{s=1}^{p} d_s,$$

где d_s – толщина слоя s ($1 \leq s \leq 2N$), находится слой p, заполненный средой p ($p \leq 2N$). Для четного номера слоя p параметры среды равны ε_0, μ_0, χ_0, α_0 (как у среды 0), а толщина этого слоя равна d_0. Для нечетного p параметры среды равны ε_1, μ_1, χ_1, α_1, а толщина – d_1. Над этой структурой в области $z > \sum_{s=1}^{2N} d_s$ находится среда номер $2N + 1$, являющаяся подложкой с коэффициентом отражения $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}$.

Здесь и в дальнейшем первый и второй верхний индекс у коэффициентов прохождения и отражения характеризуют состав структуры, для которой записан соответствующий коэффициент. Так, например, $R_{\nu}^{s\,p}$ – это коэффициент отражения от биизотропной структуры, которая состоит только из слоёв с номерами $s + 1$, $s + 2$, … , $p - 1$, где $s < p$, и ограничена снизу и сверху полубесконечными средами s и p соответственно. При этом падающая волна распространяется из среды s в среду p (рисунок 2.1, *б*). Аналогично, $T_{\nu}^{s\,p}$ – коэффициент прохождения через такую же структуру, он задается выражением

$$T_{\nu}^{s\,p} = \frac{E_{\nu}^{\uparrow p}}{E_{\nu}^{\uparrow s}}. \quad (2.1)$$

Коэффициент отражения $R_{\nu}^{s\,p}$ можно рассчитать подобно формуле (1.3):



а) *б*) *в*)

Рисунок 2.1 – *а*) схема отражения волны от периодической структуры из $2N$ биизотропных слоев на отражающей подложке $2N+1$;
б) схема прохождения и отражения волны при падении на произвольную структуру между полубесконечными средами s и p;
в) схема отражения волны от периодической структуры.

$$R_{\nu}^{sp} = \frac{E_{-\nu}^{\downarrow s}}{E_{\nu}^{\uparrow s}}, \qquad (2.2)$$

Рассмотрим нормальное падение плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волны на структуру, изображённую на рисунке 2.1, *а*. Векторы электрического и магнитного полей в каждом из изображенных на рисунке 2.1, *а* слоев можно записать в виде

$$\vec{E}_{\nu}^{\uparrow p} = \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_{\nu}^{\uparrow p} \exp\left(ik_{\nu}^{p}\left(z - \sum_{s=1}^{p-1} d_s \right) - i\omega t \right),$$

$$\vec{H}_{\nu}^{\uparrow p} = -b_{\nu}^{p}\vec{E}_{\nu}^{\uparrow p},$$

$$\vec{E}_{-\nu}^{\downarrow p} = \left(\vec{i} + i\nu\vec{j}\right) E_{-\nu}^{\downarrow p} \exp\left(-ik_{-\nu}^{p}\left(z - \sum_{s=1}^{p-1} d_s \right) - i\omega t \right),$$

$$\vec{H}_{-\nu}^{\downarrow p} = -b_{-\nu}^{p}\vec{E}_{-\nu}^{\downarrow p}. \qquad (2.3)$$

В данных выражениях $0 \le p \le 2N$. В отличие от формул (1.1), здесь вводится начальная фаза, и она различна для слоев с $p \ge 2$.

2.2 Решение рекуррентным методом. В работе [10] рекуррентным методом был получен коэффициент отражения $R_{\nu}^{0(2N)}$ от подобной структуры, но при отсутствии подложки, когда слой номер $2N$ являлся полубесконечным (рисунок 2.1, *в*). При известном коэффициенте прохождения для такой структуры $T_{\nu}^{0(2N)}$ можно воспользоваться методом эквивалентных коэффициентов для нахождения коэффициента отражения от структуры, изображенной на рисунке 2.1, *а*. Этот метод заключается в замене промежуточных слоев $1 \ldots 2N-1$ на эквивалентную границу раздела сред с коэффициентами прохождения и отражения между слоями 0 и $2N$, равными $T_{\sigma}^{0(2N)}$ и $R_{\sigma}^{0(2N)}$, причем выражения для этих коэффициентов одинаковы для обоих возможных направлений распространения волн ($0 \to 2N$ и $2N \to 0$), так как структура $1 \ldots 2N-1$ симметрична:

$$T_{\sigma}^{0(2N)} = T_{\sigma}^{(2N)0},\ R_{\sigma}^{0(2N)} = R_{\sigma}^{(2N)0}. \qquad (2.4)$$

Изображение эквивалентной структуры представлено на рисунке 2.2. В результате такой замены получаем структуру, состоящую из трех частей: полубесконечной среды 0, слоя $2N$ толщины d_0 и подложки $2N+1$.

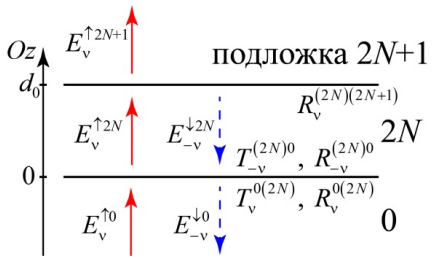


Рисунок 2.2 – Схема отражения волны от биизотропного слоя $2N$ на отражающей подложке $2N+1$ с эквивалентными коэффициентами прохождения и отражения на границе 0 ($2N$)

Коэффициент отражения для такой структуры может быть получен на основе формулы (1.7) с соответствующей заменой коэффициентов прохождения и отражения и параметров слоев:

$$R_{\nu}^{0(2N+1)} = R_{\nu}^{0(2N)} + \frac{R_{\nu}^{(2N)(2N+1)} T_{\nu}^{0(2N)} T_{-\nu}^{(2N)0} \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0}}{1 - R_{\nu}^{(2N)(2N+1)} R_{-\nu}^{(2N)0} \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0}}. \qquad (2.5)$$

Учитывая соотношения (2.4), приходим к следующему результату:

$$R_{\nu}^{0(2N+1)} = R_{\nu}^{0(2N)} + \frac{R_{\nu}^{(2N)(2N+1)} T_{\nu}^{0(2N)} T_{-\nu}^{0(2N)} \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0}}{1 - R_{\nu}^{(2N)(2N+1)} R_{-\nu}^{0(2N)} \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0}}. \quad (2.6)$$

Далее рассмотрим случай отражения электромагнитной волны от структуры, не содержащей подложку.

2.2.1 Периодическая структура без подложки. Таким образом, текущая задача состоит в вычислении коэффициента прохождения для структуры слоев 0 … 2*N*. Воспользуемся рекуррентным подходом, описанным в работе [10]. Он заключается в нахождении зависимости $T_{\sigma}^{0(2N)}$ и $R_{\sigma}^{0(2N)}$ от коэффициентов прохождения и отражения для «сокращенных» структур: $T_{\sigma}^{2(2N)}$ и $R_{\sigma}^{2(2N)}$, $T_{\sigma}^{4(2N)}$ и $R_{\sigma}^{4(2N)}$, … . Найдем такие связи с помощью формулы (1.9):

$$R_{\nu}^{0(2N)} = \rho_{\nu}^{01} \frac{1 - \eta_{\nu}^{1} \eta_{-\nu}^{1} \dfrac{R_{\nu}^{1(2N)}}{\rho_{\nu}^{10}}}{1 - R_{\nu}^{1(2N)} \rho_{-\nu}^{10} \eta_{\nu}^{1} \eta_{-\nu}^{1}},$$
$$R_{\nu}^{1(2N)} = \rho_{\nu}^{10} \frac{1 - \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0} \dfrac{R_{\nu}^{2(2N)}}{\rho_{\nu}^{01}}}{1 - R_{\nu}^{2(2N)} \rho_{-\nu}^{01} \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0}}, \quad (2.7)$$

где $\eta_{\sigma}^{p} = \exp\left(ik_{\sigma}^{p} d_{p}\right)$. Аналогично получим выражения для коэффициентов прохождения:

$$T_{\nu}^{0(2N)} = \tau_{\nu}^{01} \frac{\eta_{\nu}^{1} T_{\nu}^{1(2N)}}{1 - R_{\nu}^{1(2N)} \rho_{-\nu}^{10} \eta_{\nu}^{1} \eta_{-\nu}^{1}},$$
$$T_{\nu}^{1(2N)} = \tau_{\nu}^{10} \frac{\eta_{\nu}^{0} T_{\nu}^{2(2N)}}{1 - R_{\nu}^{2(2N)} \rho_{-\nu}^{01} \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0}}. \quad (2.8)$$

Отметим, что коэффициенты отражения $R_{\nu}^{s(2N)}$ выражаются через коэффициенты отражения $R_{\nu}^{p(2N)}$ для структуры с меньшим количеством слоев ($p > s$), а коэффициенты прохождения $T_{\nu}^{s(2N)}$ зависят одновременно от $T_{\nu}^{p(2N)}$ и $R_{\nu}^{p(2N)}$.

Осуществляя непосредственные подстановки вторых выражений в первые в формулах (2.7) и (2.8), получим

$$R_{\nu}^{0(2N)} = \frac{A + BR_{\nu}^{2(2N)}}{C + DR_{\nu}^{2(2N)}}, \; T_{\nu}^{0(2N)} = \frac{F T_{\nu}^{2(2N)}}{C + DR_{\nu}^{2(2N)}}, \quad (2.9)$$

где

$$A = \rho_{\nu}^{01} \rho_{\nu}^{01} \left(1 - \eta_{\nu}^{1} \eta_{-\nu}^{1}\right),$$
$$B = \rho_{\nu}^{01} \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0} \left(\eta_{\nu}^{1} \eta_{-\nu}^{1} - \rho_{\nu}^{01} \rho_{-\nu}^{01}\right),$$
$$C = \rho_{\nu}^{01} \left(1 - \rho_{\nu}^{10} \rho_{-\nu}^{10} \eta_{\nu}^{1} \eta_{-\nu}^{1}\right), \quad (2.10)$$
$$D = \eta_{\nu}^{0} \eta_{-\nu}^{0} \left(\rho_{\nu}^{10} \rho_{-\nu}^{10} \eta_{\nu}^{1} \eta_{-\nu}^{1} - \rho_{\nu}^{01} \rho_{-\nu}^{01}\right),$$
$$F = \tau_{\nu}^{01} \eta_{\nu}^{1} \tau_{\nu}^{10} \eta_{\nu}^{0} \rho_{\nu}^{01}.$$

Связь коэффициентов $T_{\sigma}^{2(2N)}$ и $R_{\sigma}^{2(2N)}$ с $T_{\sigma}^{4(2N)}$ и $R_{\sigma}^{4(2N)}$ определяется выражениями, аналогичными (2.9):

$$R_{\nu}^{2(2N)} = \frac{A + BR_{\nu}^{4(2N)}}{C + DR_{\nu}^{4(2N)}}, \; T_{\nu}^{2(2N)} = \frac{F T_{\nu}^{4(2N)}}{C + DR_{\nu}^{4(2N)}}. \quad (2.11)$$

Затем, подставляя (2.11) обратно в (2.9) получаем связь $T_{\sigma}^{0(2N)}$ и $R_{\sigma}^{0(2N)}$ с $T_{\sigma}^{4(2N)}$ и $R_{\sigma}^{4(2N)}$. Проводя такого рода рекурсию, получим связь $T_{\sigma}^{0(2N)}$ и $R_{\sigma}^{0(2N)}$ с $T_{\sigma}^{(2p)(2N)}$ и $R_{\sigma}^{(2p)(2N)}$ ($0 < p < 2N$):

$$R_{\nu}^{0(2N)} = \frac{A_{p-1} + B_{p-1} R_{\nu}^{(2p-2)(2N)}}{C_{p-1} + D_{p-1} R_{\nu}^{(2p-2)(2N)}} =$$
$$= \frac{\left(CA_{p-1} + AB_{p-1}\right) + \left(BB_{p-1} + DA_{p-1}\right) R_{\nu}^{(2p)(2N)}}{\left(CC_{p-1} + AD_{p-1}\right) + \left(DC_{p-1} + BD_{p-1}\right) R_{\nu}^{(2p)(2N)}} =$$
$$= \frac{A_p + B_p R_{\nu}^{(2p)(2N)}}{C_p + D_p R_{\nu}^{(2p)(2N)}},$$
$$T_{\nu}^{0(2N)} = \frac{F_{p-1} T_{\nu}^{(2p-2)(2N)}}{C_{p-1} + D_{p-1} R_{\nu}^{(2p-2)(2N)}} = \quad (2.12)$$
$$= \frac{\left(FF_{p-1}\right) T_{\nu}^{(2p)(2N)}}{\left(CC_{p-1} + AD_{p-1}\right) + \left(DC_{p-1} + BD_{p-1}\right) R_{\nu}^{(2p)(2N)}} =$$
$$= \frac{F_p T_{\nu}^{(2p)(2N)}}{C_p + D_p R_{\nu}^{(2p)(2N)}}.$$

Далее запишем рекуррентные соотношения для коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D*, *F*:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= CA_n + AB_n, & A_0 &= 0, \\ B_{n+1} &= BB_n + DA_n, & B_0 &= 1, \\ C_{n+1} &= CC_n + AD_n, & C_0 &= 1, \\ D_{n+1} &= DC_n + BD_n, & D_0 &= 0, \\ F_{n+1} &= FF_n, & F_0 &= 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Явный вид выражений для этих коэффициентов может быть найден методом производящей функции. Это уже было сделано в работе [10] для A_n:

$$A_n = \frac{-A\left(\left(z_+\right)^n - \left(z_-\right)^n\right)}{\left(AD - BC\right)\left(z_+ - z_-\right)\left(z_+ z_-\right)^n}, \quad (2.14)$$

где введены новые величины $z_{\pm}$:

$$z_{\pm} = \frac{-\left(B + C\right) \pm \sqrt{\left(B + C\right)^2 + 4\left(AD - BC\right)}}{2\left(AD - BC\right)}. \quad (2.15)$$

Здесь при вычислении квадратного корня по формуле Муавра можно получить две пары значений z_+, z_-, которые можно получить друг из друга перестановкой $z_+ \leftrightarrow z_-$. Поскольку в окончательных выражениях для коэффициентов прохождения и отражения такая замена не меняет вид формул, то в качестве значения квадратного корня в формуле (2.15) может быть выбран произвольный вариант, соответствующий формуле Муавра. Используя первое уравнение (2.13), найдем B_n:

$$B_n = \frac{\left(C - 1/z_-\right)\left(z_+\right)^n - \left(C - 1/z_+\right)\left(z_-\right)^n}{\left(AD - BC\right)\left(z_+ - z_-\right)\left(z_+ z_-\right)^n}. \quad (2.16)$$

Чтобы найти C_n и D_n достаточно сделать в выражениях (2.14) и (2.16) замены $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$:

$$C_n = \frac{\left(B-1/z_-\right)\left(z_+\right)^n - \left(B-1/z_+\right)\left(z_-\right)^n}{\left(AD-BC\right)\left(z_+ - z_-\right)\left(z_+ z_-\right)^n},$$
$$D_n = \frac{-D\left(\left(z_+\right)^n - \left(z_-\right)^n\right)}{\left(AD-BC\right)\left(z_+ - z_-\right)\left(z_+ z_-\right)^n}. \quad (2.17)$$

Коэффициенты F_n имеют вид

$$F_n = \left(F\right)^n. \quad (2.18)$$

Теперь, когда известны выражения (2.14), (2.16)–(2.18) для всех коэффициентов рекуррентной последовательности, определим коэффициенты отражения и прохождения для структуры, изображенной на рисунке 2.1, *в*, положив в формулах (2.12) $p = N - 1$:

$$R_{\nu}^{0(2N)} = \frac{A_{N-1} + B_{N-1} R_{\nu}^{(2N-2)(2N)}}{C_{N-1} + D_{N-1} R_{\nu}^{(2N-2)(2N)}}, \quad (2.19)$$

$$T_{\nu}^{0(2N)} = \frac{F_{N-1} T_{\nu}^{(2N-2)(2N)}}{C_{N-1} + D_{N-1} R_{\nu}^{(2N-2)(2N)}}. \quad (2.20)$$

Здесь величины $T_{\nu}^{(2N-2)(2N)}$ и $R_{\nu}^{(2N-2)(2N)}$ – коэффициенты прохождения и отражения для биизотропного слоя $2N-1$, находящегося в биизотропной среде 0. Выражения для них в случае непоглощающих сред были найдены в работе [8]:

$$T_{\nu}^{(2N-2)(2N)} = \frac{\tau_{\nu}^{01}\eta_{\nu}^{1}\tau_{\nu}^{10}}{1-\rho_{\nu}^{10}\rho_{-\nu}^{10}\eta_{\nu}^{1}\eta_{-\nu}^{1}} = \frac{F}{\eta_{\nu}^{0} C},$$
$$R_{\nu}^{(2N-2)(2N)} = \frac{\rho_{\nu}^{01}\left(1-\eta_{\nu}^{1}\eta_{-\nu}^{1}\right)}{1-\rho_{\nu}^{10}\rho_{-\nu}^{10}\eta_{\nu}^{1}\eta_{-\nu}^{1}} = \frac{A}{C}. \quad (2.21)$$

Используя формулы (2.19)–(2.21), получаем окончательный вид выражений для коэффициентов $R_{\nu}^{0(2N)}$ и $T_{\nu}^{0(2N)}$:

$$R_{\nu}^{0(2N)} = \frac{A_N}{C_N}, \quad (2.22)$$

$$T_{\nu}^{0(2N)} = \frac{F_N}{\eta_{\nu}^{0} C_N}. \quad (2.23)$$

Также запишем формулы для $R_{\nu}^{0(2N)}$ и $T_{\nu}^{0(2N)}$ в явной форме, используя выражения (2.14)–(2.18):

$$R_{\nu}^{0(2N)} = \frac{-A\left(\left(z_+\right)^N - \left(z_-\right)^N\right)}{\left(B-1/z_-\right)\left(z_+\right)^N - \left(B-1/z_+\right)\left(z_-\right)^N},$$
$$T_{\nu}^{0(2N)} = \frac{\left(F\right)^N \left(AD-BC\right)\left(z_+ - z_-\right)\left(z_+ z_-\right)^N}{\eta_{\nu}^{0}\left(\left(B-1/z_-\right)\left(z_+\right)^N - \left(B-1/z_+\right)\left(z_-\right)^N\right)}. \quad (2.24)$$

Таким образом, формулы (2.24) определяют коэффициенты отражения и прохождения при распространении нормально падающей плоской электромагнитной волны через планарную структуру из N биизотропных слоев с параметрами ε_1, μ_1, χ_1, α_1 и толщиной d_1, расположенных на расстоянии d_0 друг от друга в биизотропной среде с параметрами ε_0, μ_0, χ_0, α_0.

2.2.2 Периодическая структура с подложкой. Когда все величины, указанные на рисунке 2.2, найдены, можно определить коэффициент отражения от периодической структуры, находящейся на отражающей подложке $2N+1$. Для этого воспользуемся формулой (2.6), куда будем подставлять коэффициенты прохождения $T_{\sigma}^{0(2N)}$ и отражения $R_{\sigma}^{0(2N)}$ (2.24):

$$R_{\nu}^{0(2N+1)} = R_{\nu}^{0(2N)} + \frac{R_{\nu}^{(2N)(2N+1)} T_{\nu}^{0(2N)} T_{-\nu}^{0(2N)} \eta_{\nu}^{0}\eta_{-\nu}^{0}}{1 - R_{\nu}^{(2N)(2N+1)} R_{-\nu}^{0(2N)} \eta_{\nu}^{0}\eta_{-\nu}^{0}}. \quad (2.25)$$

Это же выражение для коэффициента отражения $R_{\nu}^{0(2N+1)}$ можно получить альтернативным способом, а именно, используя рекуррентный подход, описанный в предыдущем подразделе. Отличительной особенностью является получение связей между коэффициентами отражения для структуры, представленной на рисунке 2.1, *а*, т.е. структура содержит $2N$ слоёв и подложку. Рассматривая подложку как отдельный слой номер $2N+1$ с известным коэффициентом отражения и используя формулы (2.12), можно показать, что коэффициент отражения от периодической структуры на подложке имеет вид

$$R_{\nu}^{0(2N+1)} = \frac{A_N + B_N R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}}{C_N + D_N R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}} =$$
$$= \frac{-A\left(\left(z_+\right)^N - \left(z_-\right)^N\right) + \left(\left(C-1/z_-\right)\left(z_+\right)^N - \left(C-1/z_+\right)\left(z_-\right)^N\right) R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}}{\left(\left(B-1/z_-\right)\left(z_+\right)^N - \left(B-1/z_+\right)\left(z_-\right)^N\right) - D\left(\left(z_+\right)^N - \left(z_-\right)^N\right) R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}}. \quad (2.26)$$

Подставляя выражения (2.24) в формулу (2.25), а также используя явный вид для коэффициентов A, B, C, D, F, можно показать, что коэффициент отражения $R_{\nu}^{0(2N+1)}$ принимает вид, совпадающий с представлением (2.26). Это подтверждает правомерность использованного альтернативного подхода. Далее рассмотрим решение данной задачи более универсальным методом.

2.3 Решение матричным методом. Матричный метод является широко распространенным подходом для решения граничных задач электродинамики. Его применение для расчета коэффициентов периодических структур позволяет в явном виде представить структуру повторяющихся элементов. Используя введенные в (1.11) матрицы, запишем граничные условия для

векторов напряженностей электрического и магнитного полей в структуре, изображенной на рисунке 2.1, *а*:

$$
\begin{aligned}
&z=0: \qquad \mathbf{M}_0\mathbf{E}_0=\mathbf{M}_1\mathbf{E}_1,\\
&z=\sum_{s=1}^{1}d_s:\ \mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1\mathbf{E}_1=\mathbf{M}_0\mathbf{E}_2,\\
&\begin{cases} z=\sum_{s=1}^{2}d_s:\ \mathbf{M}_0\mathbf{\Phi}_0\mathbf{E}_2=\mathbf{M}_1\mathbf{E}_3,\\ z=\sum_{s=1}^{3}d_s:\ \mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1\mathbf{E}_3=\mathbf{M}_0\mathbf{E}_4, \end{cases} \qquad (2.27)\\
&\ldots\\
&\begin{cases} z=\sum_{s=1}^{2N-2}d_s:\ \mathbf{M}_0\mathbf{\Phi}_0\mathbf{E}_{2N-2}=\mathbf{M}_1\mathbf{E}_{2N-1},\\ z=\sum_{s=1}^{2N-1}d_s:\ \mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1\mathbf{E}_{2N-1}=\mathbf{M}_0\mathbf{E}_{2N}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Промежуточные пропущенные уравнения для граничных условий будут подобны двум парам уравнений, выделенным фигурной скобкой. Условие на границе слоя $2N$ и подложки имеет вид

$$R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=\frac{E_{-\nu}^{\downarrow 2N}\left(\eta_{-\nu}^{0}\right)^{*}}{E_{\nu}^{\uparrow 2N}\eta_{\nu}^{0}}. \qquad (2.28)$$

Непосредственной подстановкой уравнений (2.27) можно выразить матрицу амплитуд $\mathbf{E}_0$ через $\mathbf{E}_{2N}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_0=\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0\times\\
\times\left(\mathbf{\Phi}_0^{-1}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0\right)^{2N-2}\mathbf{E}_{2N}.
\end{aligned} \qquad (2.29)
$$

Представляя матрицы амплитуд в явном виде и используя соотношение (2.28) получим

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 0}\\ E_{-\nu}^{\downarrow 0}\end{bmatrix}=\mathbf{\Phi}_0\left(\mathbf{\Phi}_0^{-1}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0\right)^{2N-1}\times\\
\times\begin{bmatrix} 1\\ R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}\eta_{\nu}^{0}\eta_{-\nu}^{0}\end{bmatrix}E_{\nu}^{\uparrow 2N}.
\end{aligned} \qquad (2.30)
$$

Для удобства введем матрицу-столбец $\mathbf{\Lambda}$, тогда выражение (2.30) будет более компактным:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Phi}_0\left(\mathbf{\Phi}_0^{-1}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{\Phi}_1^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_0\right)^{2N-1}\times\\
\times\begin{bmatrix} 1\\ R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}\eta_{\nu}^{0}\eta_{-\nu}^{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix} E_{\nu}^{\uparrow 0}\\ E_{-\nu}^{\downarrow 0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}E_{\nu}^{\uparrow 2N}.
\end{aligned} \qquad (2.31)
$$

Используя определение коэффициента отражения от структуры (2.2), а также формулы (2.31), получим

$$R_{\nu}^{0(2N+1)}=\frac{E_{-\nu}^{\downarrow 0}}{E_{\nu}^{\uparrow 0}}=\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}. \qquad (2.32)$$

Таким образом, получены три различных представления коэффициента отражения от периодической структуры на отражающей подложке, изображенной на рисунке 2.1, *а*. Это формулы (2.25), (2.26) и (2.32).

3 Численный анализ

Сначала проведем анализ выражений (1.9) и (1.16), – коэффициентов отражения для биизотропного слоя на отражающей подложке (рисунок 1.1). Как уже говорилось ранее, R_{ν} в общем случае – комплексная величина. Ее фаза имеет смысл разности фаз между падающей и отраженной волнами, а квадрат модуля – энергетический коэффициент отражения:

$$\mathrm{R}_{\nu}=\frac{\left|\vec{S}_{-\nu}^{\downarrow 1}\right|}{\left|\vec{S}_{\nu}^{\uparrow 1}\right|}=\frac{\left|E_{-\nu}^{\downarrow 1}\right|^2}{\left|E_{\nu}^{\uparrow 1}\right|^2}=\left|R_{\nu}\right|^2, \qquad (2.33)$$

где $\vec{S}_{-\nu}^{\downarrow 1}$ и $\vec{S}_{\nu}^{\uparrow 1}$ – векторы Умова – Пойнтинга, определяющие плотность потока переносимой энергии.

В частном случае полностью отражающей металлической подложки ($R_{\nu}^{23}=-1$) получаем $\mathrm{R}_{\nu}\equiv 1$ при сочетаниях остальных параметров задачи, соответствующих непоглощающим средам 1 и 2. На рисунке 3.1 приведены графики зависимости фазы коэффициента отражения от толщины слоя 2 при различных значениях параметра невзаимности χ_1. На графике видим, что указанная зависимость от d_2 имеет периодический характер, это связано с периодичностью следующего слагаемого:

$$
\begin{aligned}
\eta_{\nu}^2\eta_{-\nu}^2=\exp\left(id_2\left(k_{\nu}^2+k_{-\nu}^2\right)\right)=\\
=\cos\left(d_2\left(k_{\nu}^2+k_{-\nu}^2\right)\right)+i\sin\left(d_2\left(k_{\nu}^2+k_{-\nu}^2\right)\right).
\end{aligned} \qquad (2.34)
$$

Так как толщина слоя 2, обозначаемая d_2, в остальных слагаемых формул (1.9) и (1.16) не присутствует, то период зависимости $\mathrm{R}_{\nu}\left(d_2\right)$ совпадает с периодом выражения (2.34):

$$d_{2\,\mathrm{per}}=\frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon_2\mu_2-\chi_2^{\,2}}}. \qquad (2.35)$$

Отметим, что при выполнении равенства $\chi_1\mu_2=\chi_2\mu_1$ графики для $\arg R_{+}$ и $\arg R_{-}$ совпадают (рисунок 3.1, *б*). При $\chi_1\mu_2<\chi_2\mu_1$ (рисунок 3.1, *а*) график для $\arg R_{+}$ (красная линия) в большей части рассматриваемого диапазона лежит выше графика для $\arg R_{+}$ (синяя линия). При $\chi_1\mu_2>\chi_2\mu_1$ (рисунок 3.1, *а*) наблюдается противоположная картина. Однако, в точках

$$d_2=m\cdot d_{2\,\mathrm{per}},\ \ m=0,1,2,... \qquad (2.36)$$

коэффициенты отражения $R_{\pm}$ совпадают для любых сочетаний параметров ε_1, μ_1, α_1, χ_1, ε_2, μ_2, α_2, χ_2.

Далее проанализируем коэффициент отражения для периодической структуры, состоящей из $2N$ биизотропных слоев, находящейся на отражающей подложке (рисунок 2.1, *а*). Введём обозначение для энергетического коэффициента таким образом, чтобы количество повторяющихся пар слоев было определено верхним индексом:

$$\mathrm{R}_{\nu}^{N}=\frac{\left|\vec{S}_{-\nu}^{\downarrow 0}\right|}{\left|\vec{S}_{\nu}^{\uparrow 0}\right|}=\frac{\left|E_{-\nu}^{\downarrow 0}\right|^2}{\left|E_{\nu}^{\uparrow 0}\right|^2}=\left|R_{\nu}^{0(2N+1)}\right|^2. \qquad (2.37)$$

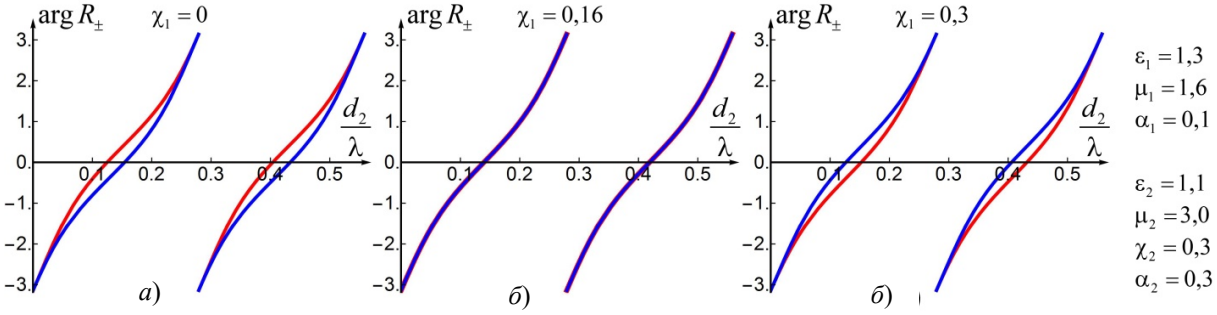


Рисунок 3.1 – Зависимость аргумента коэффициента отражения для биизотропного слоя, находящегося на полностью отражающей подложке, от отношения d_2 / λ при *а*) $\chi_1 = 0$; *б*) $\chi_1 = 0{,}16$; *в*) $\chi_1 = 0{,}3$. Красному цвету соответствует $\nu = +1$, синему – $\nu = -1$

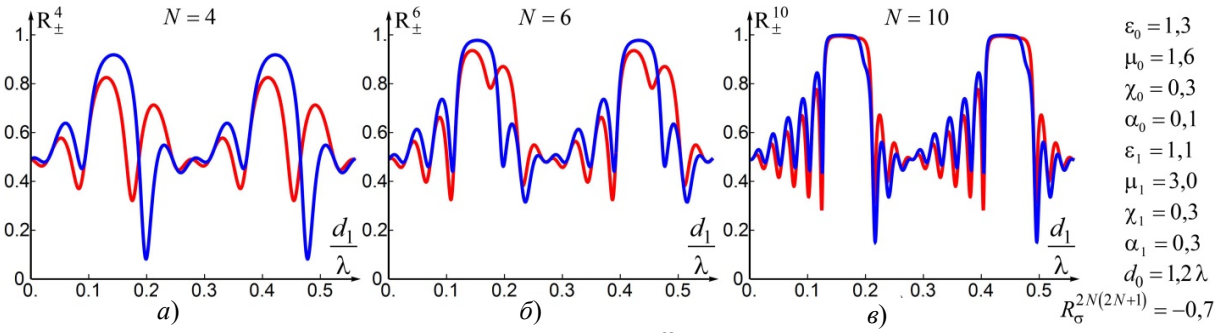


Рисунок 3.2 – Зависимость коэффициента отражения R_ν^N для периодической структуры от отношения d_1 / λ при различном количестве слоев: *а*) $N = 4$; *б*) $N = 6$; *в*) $N = 10$

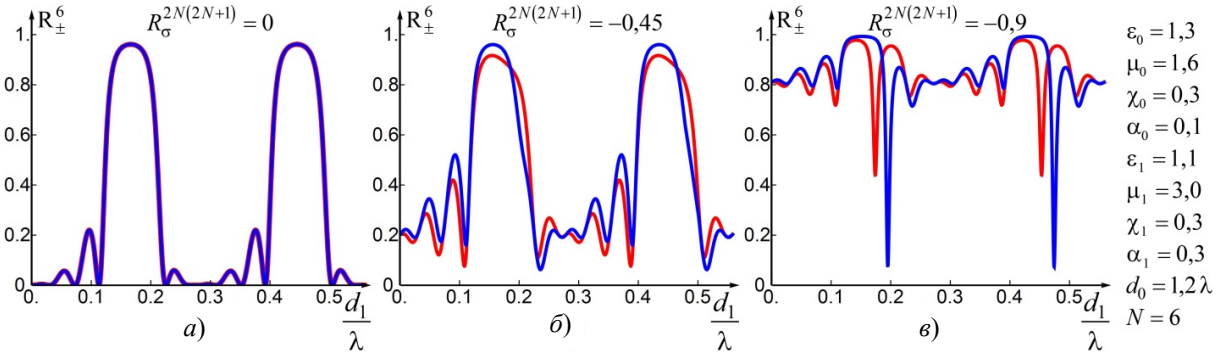


Рисунок 3.3 – Зависимость коэффициента отражения R_ν^N от отношения d_1 / λ для различных коэффициентов отражения подложки: *а*) $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = 0$; *б*) $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = -0{,}45$; *в*) $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = -0{,}9$

Рассмотрим частично отражающую подложку с $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = -0{,}7$ и построим графики зависимости энергетического коэффициента отражения от толщины нечетных слоев d_1 для различных значений N (рисунок 3.2). Данные графики также являются периодическими. На рисунке 3.2 и всех дальнейших рисунках приведены только два первых периода зависимостей. Период может быть найден по аналогии с отражением от одного биизотропного слоя:

$$d_{1\,\mathrm{per}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \chi_1^{\,2}}}. \qquad (2.38)$$

За один период для каждой из поляризаций (левой и правой) на графиках наблюдается по N минимумов и максимумов. Увеличение количества слоев N изменяет положение и форму участков вблизи глобальных экстремумов.

Графики зависимости энергетического коэффициента отражения от толщины d_1 для различных коэффициентов отражения подложки приведены на рисунке 3.3. На рисунке 3.3, *а* нулевому значению $R_\nu^{(2N)(2N+1)}$ соответствует подложка из биизотропной среды 0, в данном случае графики для обеих поляризаций совпадают. При приближении коэффициента отражения $R_\nu^{(2N)(2N+1)}$ к минус единице, энергетический коэффициент отражения от периодической структуры приближается к единице (рисунки 3.3, *б*, 3.3, *в*). При $R_\nu^{(2N)(2N+1)} = -1$ (металлическая

подложка) графики $\mathrm{R}_{\nu}^{N}(d_1)$ вырождаются в горизонтальные прямые $\mathrm{R}_{\nu}^{N}=1$. В общем случае, когда $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}\neq 0,\ \pm 1$, графики $\mathrm{R}_{\nu}^{N}(d_1)$ для различных поляризаций отличаются и они несимметричны. Однако, как и в задаче с одним биизотропным слоем, в точках $d_1 = m\cdot d_{1\,\mathrm{per}}$ графики для различных поляризаций пересекаются.

На рисунке 3.4 представлены графики зависимости коэффициента отражения $R_{\nu}^{0(2N+1)}$ от d_1 на комплексной плоскости. Они представляют собой набор несимметричных витков, проходящих через точку $R_{\nu}^{0(2N+1)}=R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}$ (это также справедливо для комплексных значений $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}$). При $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=-1$ они вырождаются в окружности единичного радиуса с центрами в начале координат. В случае $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$ графики для энергетических коэффициентов отражения (рисунок 3.3, *а*) при различных поляризациях совпадают, однако амплитудные коэффициенты отражения при этом различаются: это видно из различия графиков для левой и правой поляризации на рисунке 3.4, *а*.

Построим аналогичные графики, но исследуем зависимость коэффициента отражения от толщины четных слоев d_0 (рисунок 3.5). В данном случае приведено значительно меньшее количество графиков, поскольку все закономерности, отмеченные выше для графиков $\mathrm{R}_{\nu}^{N}(d_1)$ и $R_{\nu}^{0(2N+1)}(d_1)$, верны и для зависимостей коэффициентов прохождения от d_0, но период зависимостей теперь равен

$$d_{0\,\mathrm{per}}=\frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0-\chi_0^{\,2}}}. \qquad (2.39)$$

Сравнивая графики на рисунках 3.2, *а* и 3.5, *а*, 3.3, *а* и 3.5, *б*, 3.4, *а* и 3.5, *в*, можем видеть, что они отличаются. Это говорит о различном влиянии толщин четных и нечетных слоев. Все эти графики имеют области, соответствующие практически полному отражению, между которыми находятся области, для которых характерно частичное отражение (для $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$ также наблюдаются области с практически полным пропусканием падающего излучения).

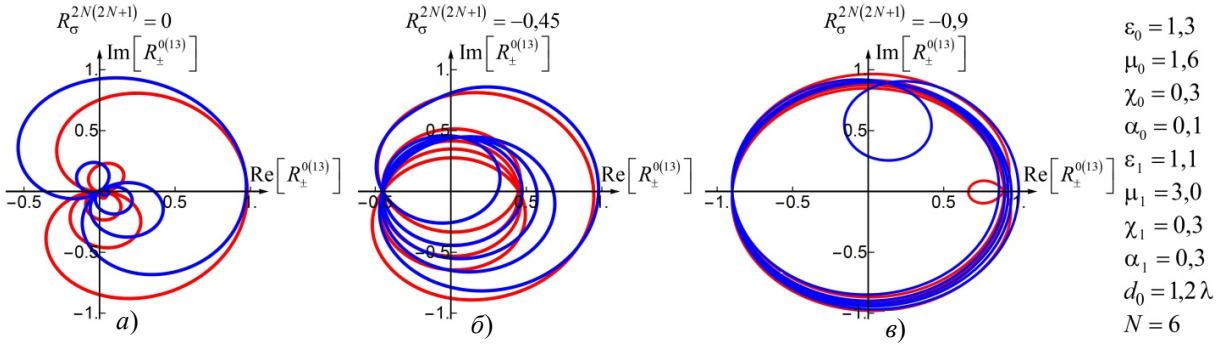


Рисунок 3.4 – График зависимости коэффициента отражения $R_{\nu}^{0(2N+1)}$ от d_1 на комплексной плоскости для различных коэффициентов отражения подложки:
а) $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$; *б*) $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=-0{,}45$; *в*) $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=-0{,}9$

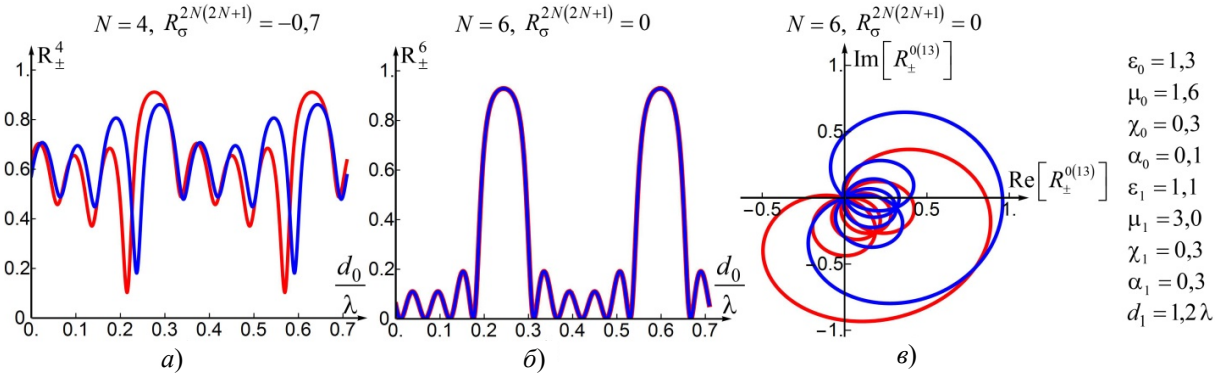


Рисунок 3.5 – Зависимость коэффициента отражения R_{ν}^{N} от отношения d_0/λ для следующих параметров: *а*) $N=4$, $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=-0{,}7$; *б*) $N=6$, $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$; *в*) График зависимости $R_{\nu}^{0(2N+1)}$ от d_0 на комплексной плоскости для $N=6$, $R_{\nu}^{(2N)(2N+1)}=0$

Еще раз подчеркнем, что различие коэффициентов отражения (модуля и фазы) для левой и правой поляризации свидетельствует о том, что при падении эллиптически поляризованной волны (в случае изотропной среды $0 - \chi_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$) эллипс поляризации отраженной волны будет повернут, а также будет иметь другую эллиптичность, т. е. на основе рассмотренных в работе структур можно проектировать устройства, работающие как преобразователи поляризации.

Заключение

В данной работе решена задача об отражении электромагнитной волны от одного биизотропного слоя на частично отражающей подложке, а также найдены выражения для коэффициента отражения от такой структуры (1.9) и (1.16). В частном случае полностью отражающей металлической подложки 3 (рисунок 1.1) проведен численный анализ. Обнаружено, что зависимость фазы R_v от толщины слоя 2 имеет периодический характер, причём период зависимости определяется выражением (2.35). При выполнении равенства $\chi_1\mu_2 = \chi_2\mu_1$ графики для $\arg R_+$ и $\arg R_-$ совпадают. Также найдены значения толщины d_2 (формула (2.36)), при которых коэффициенты отражения $R_\pm$ совпадают для любых сочетаний параметров сред в структуре ε_1, μ_1, α_1, χ_1, ε_2, μ_2, α_2, χ_2.

На основе этой задачи построено решение задачи об отражении от биизотропной периодической структуры, расположенной на подложке, имеющей известный коэффициент отражения. Коэффициент отражения от описанной периодической структуры определяется формулами (2.25), (2.26) и (2.32). Численный анализ показал, что зависимости коэффициента отражения от толщин нечетных и четных слоев также являются периодическими с рядом минимумов и максимумов, локализованных в пределах диапазона значений толщины слоя, соответствующего одному периоду. В случае коэффициента отражения подложки, модуль которого отличен от нуля и единицы, коэффициенты отражения от периодической структуры при левой и правой поляризации падающей волны различны как по модулю, так и по фазе, что позволяет использовать такую структуру для преобразования поляризации падающей волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веселаго*, *В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ / В.Г. Веселаго // Успехи физических наук. – 1967. – Т. 92, № 7. – С. 517–526.

2. *Shelby*, *R.A*. Experimental verifications of a negative index of refraction / R.A. Shelby, D.R. Smith, S. Schultz // Science. – 2001. – Vol. 292. – P. 77–79.

3. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media* / I.V. Lindell [et al.]. – Boston and London: Artech House, 1994. – 500 p.

4. *Bolioli*, *S.* Advances in Complex Electromagnetic Materials / S. Bolioli. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997. – P. 33–51.

5. *FDTD Modeling of Transient Microwave Signals in Dispersive and Lossy Bi-Isotropic Media* / A. Grande [et al.] // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2004. – Vol. 52, № 3. – P. 773–784.

6. *A time-domain modeling for EM wave propagation in bi-isotropic media based on the TLM method* / A.C. Cabeceira [et al.] // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2006. – Vol. 54, № 6. – P. 2780–2789.

7. *Tretyakov*, *S.A*. Electromagnetic Waves in Layered General Biisotropic Structures / S.A. Tretyakov, M.I. Oksanen // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 1992. – Vol. 6, № 10. – P. 1393–1411.

8. *Капшай*, *В.Н*. Прохождение плоских электромагнитных волн через биизотропный слой в биизотропной среде / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, А.Н. Годлевская // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 80–87.

9. *Капшай*, *В.Н*. Прохождение плоских электромагнитных волн через многослойную биизотропную структуру / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 10–14.

10. *Капшай*, *В.Н*. Plane electromagnetic wave reflection of a periodic planar biisotropic structure / В.Н. Капшай, А.А. Шамына. // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 189–195.

11. *Капшай*, *В.Н*. Multiple reflections method in the problem of inclined electromagnetic wave incidence on the layered planar biisotropic medium / В.Н. Капшай, А.А. Шамына // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2015. – № 3 (90). – С. 146–152.

12. *Homogenization of Bi-isotropic Multilayered Metamaterial Structures* / O. Ouchetto [et al.] // IEEE Transactions on Nanotechnology. – 2017. – Vol. 16, № 6. – P. 946–953.

13. *Investigation of effective media applicability for ultrathin multilayer structures* / J. Sukharn [et al.] // Nanoscale. – 2019. – Vol. 11. – P. 12582–12588.

14. *Razzaz*, *F*. Evanescent and propagating electromagnetic waves in Bi-isotropic layers / F. Razzaz, M.A.S. Alkanhal // Waves in Random and Complex Media. – 2019. – Mode of access: https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1632501. – Date of access: 10.04.2020.

15. *Капшай*, *В.Н*. Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Проблемы

физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 7–21.

16. *Капшай*, *В.Н*. Резонансная структура сечений рассеяния и экстинкции в проблеме Ми для биизотропного шара / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 28–32.

17. *Scattering Analysis of Planar Electric and Magnetic Dipoles in Multilayered Chiral Structures* / N.R. Rabelo [et al.] // Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications. – 2012. – Vol. 11, № 1. – P. 214–229.

18. *Prudêncio*, *F.R*. Asymmetric Band Diagrams in Photonic Crystals with a Spontaneous Nonreciprocal Response / F.R. Prudêncio, S.A. Matos, C.R. Paiva // Physical Review A. – 2015. – Vol. 91, № 6.

19. *Капшай*, *В.Н*. Отражение и преломление плоской электромагнитной волны на границе раздела биизотропных сред / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 129–133.

Поступила в редакцию 05.05.2020.

ФИЗИКА

УДК 538.9:535.8

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МОРФОЛОГИЯ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ПОКРЫТИЯ НА ОСНОВЕ СЛОЕВ SiO_2 И ZrO_2

Н.Н. Федосенко[1], **В.А. Емельянов**[2], **Е.А. Кулеш**[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*ОАО «Интеграл»*, *Минск*

OPTICAL PROPERTIES AND MORPHOLOGY OF POLARIZATION COATING BASED ON THE SiO_2 AND ZrO_2 LAYERS

N.N. Fedosenko[1], **V.A. Emelyanov**[2], **E.A. Kulesh**[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*JSC «Integral»*, *Minsk*

Разработана конструкция 7-слойного поляризационного покрытия на основе слоев SiO_2 и ZrO_2, осажденного методом электронно-лучевого испарения на подложки различного типа. Определение влияния природы подложки на степень поляризации покрытия показало, что максимальная степень поляризации 0,75 прошедшего излучения достигнута при угле падения 75° при напылении покрытия на подложку из полиэтилентерефталата. Установлено, что для поляризационного покрытия характерны низкие значения шероховатости 5,41 нм.

***Ключевые слова**: поляризатор*, *тугоплавкие оксиды*, *многослойное покрытие*, *электронно-лучевое испарение*, *морфология*, *степень поляризации*.

The 7-layer polarization coating design based on SiO_2 and ZrO_2 layers deposited by electron beam evaporation onto substrates of various types has been developed. Determination of the effect of the nature of the substrate on the degree of polarization of the coating showed that the maximum degree of polarization of 0,75 transmitted radiation was achieved at an angle of incidence of 75° when spraying the coating on a substrate of polyethylene terephthalate. It was found that the polarization coating is characterized by low roughness values of 5,41 nm.

Keywords: *polarizer*, *refractory oxides*, *multilayer coating*, *electron beam evaporation*, *morphology*, *degree of polarization.*

Введение

Одним из направлений оптимизации лазерных устройств является создание компактных оптических схем и миниатюризация оптической системы [1]. Для получения линейно-поляризованного излучения эффективно использование пластинчатых интерференционных поляризаторов, представляющих собой многослойное четвертьволновое покрытие, состоящее из чередующихся тонких диэлектрических слоев с высоким и низким показателями преломления, осажденных на пластину из стекла, кварца, кремния или полимеров. Требования, предъявляемые к поляризационным покрытиям, кроме высокой пропускающей и отражающей способностей, включают также наличие низкой шероховатости поверхности для ограничения внутренних потерь за счет рассеяния излучения, высокую химическую и температурную стойкость.

Преимущество многослойного поляризационного покрытия заключается в возможности осуществления разделения и преобразования *s*- и *p*-поляризаций в одном устройстве. Принцип работы тонкопленочного поляризатора обусловлен его способностью пропускать одну из компонент естественного света, параллельную оси поляризатора, и задерживать другую, ортогональную компоненту, при этом степень поляризации зависит от угла падения излучения к поверхности покрытия. Использование в качестве угла падения угла Брюстера способствует повышению эффективности работы поляризатора [2].

В качестве интерференционных слоев в тонкопленочном поляризаторе находят применение оксиды тугоплавких металлов. Поляризационные покрытия на основе тугоплавких оксидов формируются различными методами [3], однако можно выделить вакуумный электронно-лучевой синтез, который обеспечивает высокую однородность слоев на большой площади осаждения. В настоящее время повышенный интерес представляют покрытия на полимерных подложках, благодаря чему возможно достигнуть уменьшения размеров, веса и стоимости оптических устройств.

Целью данной работы являлась разработка и оптимизация конструкции поляризационного покрытия на основе тугоплавких оксидов с минимальным количеством слоев и максимальной степенью поляризации, осажденного с помощью технологии вакуумно-плазменного электронно-лучевого испарения на подложки различной природы, а также исследование их морфологии и оптических свойств.

© *Федосенко Н.Н., Емельянов В.А., Кулеш Е.А.*, 2020

1 Методика и объекты исследования

Формирование многослойных покрытий типа $(ZrO_2 / SiO_2)_3 / ZrO_2$ на основе двуокисей циркония и кремния осуществлялось с помощью установки вакуумного напыления ВУ-1А, оборудованной источником электронно-лучевого испарения УЭЛИ-I и системой контроля оптических характеристик модели Iris 0211 (ООО «ЭссентОптикс», Республика Беларусь). Осаждение покрытий осуществлялось при максимальном ускоряющем напряжении 12 кВ и током эмиссии от 10 до 200 мА при остаточном давлении в камере $6 \cdot 10^{-3}$ Па, длина волны контроля слоев составляла 568 нм. Разработанная конструкция поляризационного покрытия (таблица 1.1) представляет собой последовательно осажденные на подложку чередующиеся тонкие слои тугоплавких окислов ZrO_2 и SiO_2 с количеством слоев $N = 7$, где заключительным слоем выступает ZrO_2.

Таблица 1.1 – Конструкция покрытия $(ZrO_2 / SiO_2)_3 / ZrO_2$

Номер слоя	Материал	Физическая толщина, нм	Показатель преломления слоя
1	ZrO_2	71,3	2,04
2	SiO_2	95,6	1,46
3	ZrO_2	71,3	2,04
4	SiO_2	95,6	2,38
5	ZrO_2	71,3	1,46
6	SiO_2	95,6	2,38
7	ZrO_2	71,3	1,46

В качестве подложек использовали оптическое стекло марки К8, кварцевую пластину толщиной 1 мм, полиэтилентерефталат (ПЭТФ), полиметилметакрилат (ПММА), полированную пластину толщиной 0,5 мм из монокристалла кремния марки КДБ с ориентацией кристаллической структуры 100.

Оптические свойства покрытий, такие как коэффициент пропускания T и коэффициент отражения R, были определены с помощью спектрофотометра Cary-50 (Varian) в диапазоне длин волн от 400 до 1000 нм.

Исследование оптических свойств проводили на спектрофотометре Photon RT (Essent Optics, Беларусь), имеющим спектральный диапазон длин волн от 200 до 4000 нм. Спектры пропускания снимались в диапазоне длин волн от 350 до 950 нм при углах падения излучения от 0 до 75°, а спектр отражения – от 8 до 75 ° в режиме *PS*-поляризации. Степень поляризации рассчитывали по формуле:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{max} и I_{min} – максимальная и минимальная компоненты интенсивности света, соответствующие двум взаимно перпендикулярным компонентам вектора E.

Исследование морфологии покрытий осуществляли методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) в полуконтактном режиме с использованием сканирующего зондового микроскопа Solver P47 PRO (NT-MDT, Россия). Статистические данные поверхности и анализ зёрен осуществлялся с помощью модульной программы анализа данных СЗМ Gwyddion.

2 Результаты и их обсуждение

Спектры пропускания многослойного покрытия ZrO_2 / SiO_2 на прозрачных подложках из оптического стекла К8, кварца, ПЭТФ и ПММА, а также спектр отражения покрытия на кремниевой подложке, приведены на рисунке 2.1 и 2.2 соответственно.

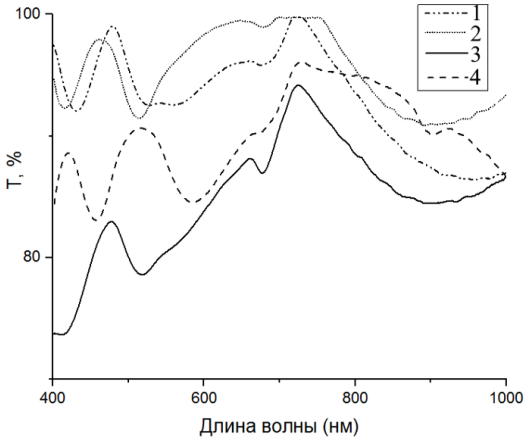


Рисунок 2.1 – Спектры пропускания покрытий ZrO_2 / SiO_2 на прозрачных подложках: 1 – на стеклянной подложке, 2 – на кварцевой подложке, 3 – на подложке из ПЭТФ, 4 – на подложке из ПММА

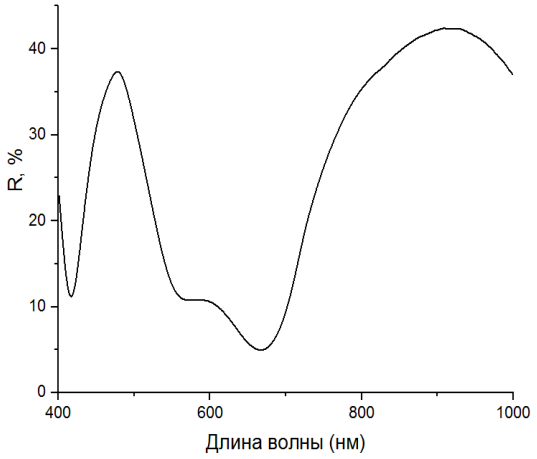


Рисунок 2.2 – Спектр отражения покрытия ZrO_2 / SiO_2 на кремниевой подложке

Как видно из рисунка 2.1, многослойные покрытия на всех типах прозрачных подложек характеризуются высокими коэффициентами пропускания от 80 до 99% в видимой области спектра. Можно отметить два интерференционных

пика с максимумами пропускания на длинах волн около 500 нм и 740 нм, при этом на длине волны 740 нм коэффициент пропускания покрытий на подложках из стекла и кварца достигает 99%, а для покрытий на подложках из ПЭТФ и ПММА – около 93% и 95% соответственно.

Как видно из рисунка 2.2, коэффициент отражения многослойного покрытия на кремниевой подложке колеблется в диапазоне от 5 до 45%, при этом наблюдаются интерференционные пики с максимальными коэффициентами отражения 37% и 42% на длинах волн 500 нм и 900 нм соответственно.

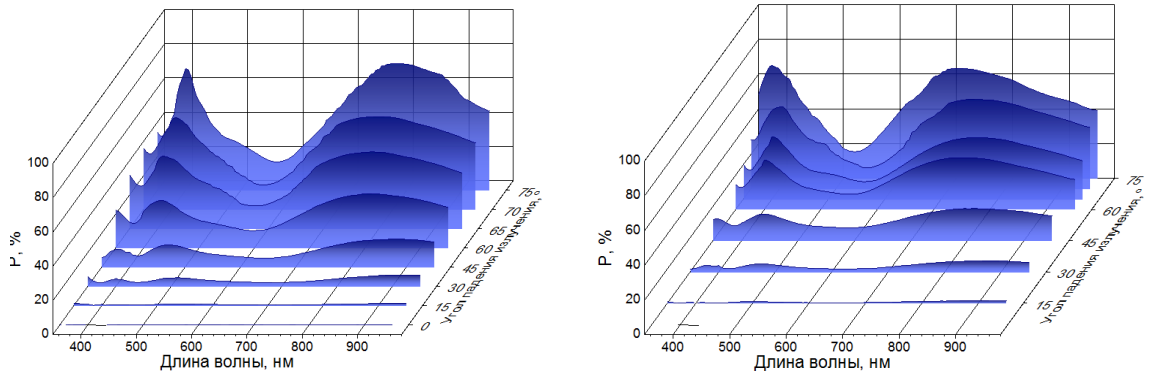
Графики спектральной зависимости степени поляризации 7-слойного покрытия на основе двуокисей циркония и кремния для различных углов падения к поверхности излучения и прошедшего через покрытие излучения приведены на рисунках 2.3–2.5.Как видно из графиков поляризации прошедшего излучения (рисунки 2.3, 2.4) для 7-слойного покрытия ZrO_2 / SiO_2 наблюдается отсутствие поляризованного излучения при углах падения от 0 до 45°, рост поляризации с двумя пиками максимума начинается при 75° (таблица 2.1):

1 – со значениями степени поляризации от 0,65 до 0,70, приходящихся на длины волн от 375 до 420 нм;

2 – со значениями степени поляризации от 0,52 до 0,65, приходящихся на длины волн от 700 до 800 нм.

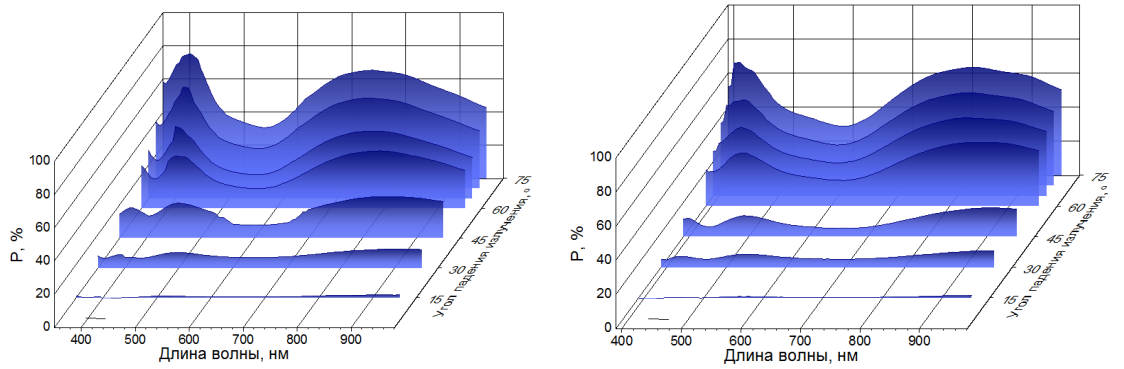
Согласно данным таблицы 2.1, покрытие на подложке из ПЭТФ характеризуется максимальными значениями степени поляризации прошедшего излучения в сравнении с покрытиями на других подложках, а именно: 0,75 на длине волны 400 нм и 0,65 на 739 нм.

На основании данных графика зависимости степени поляризации отраженного излучения покрытия на кремниевой подложке (рисунок 2.5) можно отметить три пика максимума поляризации 0,50, 0,72 и 0,85 на длинах волн 400 нм, 532 нм и 780 нм соответственно.



а) *б*)

Рисунок 2.3 – Степень поляризации прошедшего через покрытие ZrO_2 / SiO_2 излучения для разных углов падения к поверхности: *а*) на стеклянной подложке, *б*) на кварцевой подложке



а) *б*)

Рисунок 2.4 – Степень поляризации прошедшего через покрытие ZrO_2 / SiO_2 излучения для разных углов падения к поверхности: *а*) на подложке из ПЭТФ, *б*) на подложке из ПММА

Таблица 2.1 – Максимальные значения степени поляризации 7-слойного ZrO_2 / SiO_2 покрытия при угле 75° прошедшего и отраженного излучения

	ZrO_2 / SiO_2 на стекле		ZrO_2 / SiO_2 на кварце		ZrO_2 / SiO_2 на ПЭТФ		ZrO_2 / SiO_2 на ПММА		ZrO_2 / SiO_2 на кремнии		
λ, нм	400	780	375	704	400	739	400	780	400	532	780
R, %	70	53	65	53	75	65	66	52	50	72	85

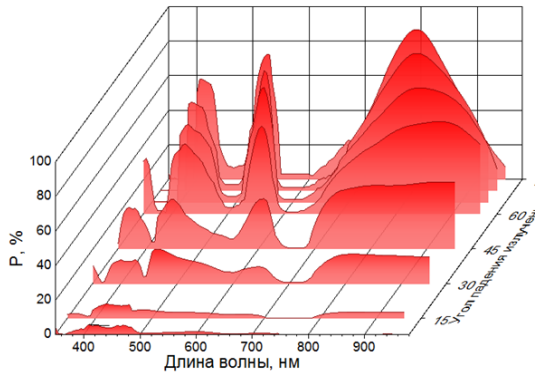


Рисунок 2.5 – Степень поляризации отраженного излучения для разных углов падения к поверхности покрытия ZrO_2 / SiO_2 на кремниевой подложке

При сравнении данного 7-слойного поляризационного покрытия с 14-слойным покрытием, формируемым по аналогичной методике и работающего на длинах волн 532 нм и 633 нм [4], можно отметить, что на указанных длинах волн степень поляризации 7-слойного покрытия составляет порядка 0,2–0,5, что меньше в 2 раза степени поляризации 14-слойного покрытия.

Таким образом, в среднем можно выделить такие рабочие значения длин волн, как 400 нм и 700–780 нм, на которых 7-слойное покрытие ZrO_2 / SiO_2 характеризуется максимальной степенью поляризации.

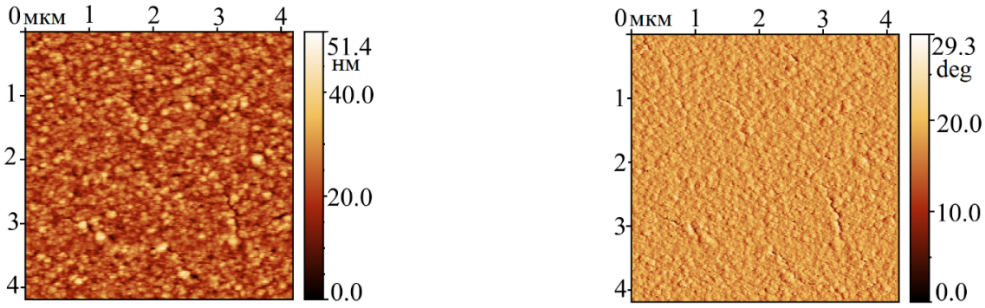
На рисунке 2.6 приведены данные атомно-силовой микроскопии для многослойного поляризационного покрытия. Статистические данные топологии поверхности покрытия приведены в таблице 2.2. На основе статистического анализа АСМ-изображений видно (таблица 2.2), что поверхность многослойного покрытия, имеющего последний закрывающий слой ZrO_2, имеет равномерную структуру, состоящую из зерен средним диаметром 50,03 нм и средней высотой 22,41 нм, а субшероховатость поверхности не превышает 5,5 нм, что не оказывает существенного влияния на спектральные свойства покрытий. Субшероховатость поверхности 7-слойного покрытия сопоставима с шероховатостью однослойного покрытия ZrO_2 и в 2 раза превышает шероховатость 14-слойного покрытия ZrO_2/SiO_2 [4], что объясняется довольно развитой поверхностью и выраженной структурой зерен верхнего закрывающего слоя оксида циркония.

Таблица 2.2 – Статистические данные топологии поверхности многослойного покрытия ZrO_2 / SiO_2

Среднее значение неровностей по высоте, нм	22,69
Субшероховатость покрытия Ra, нм	5,41
Фрактальная размерность покрытия	2,79
Средний диаметр зерна, нм	50,03
Средняя высота зерна, нм	22,41

Заключение

Поляризационное 7-слойное покрытие ZrO_2 / SiO_2 характеризуется высокой пропускной и отражающей способностью в видимом диапазоне длин волн, а также высокой степенью поляризации на длинах волн 400 и 780 нм. Шероховатость поверхности многослойного покрытия не оказывает существенного влияния на оптические характеристики. Таким образом, покрытие разработанной конструкции может найти эффективное применение в качестве поляризаторов и отражающих элементов в лазерных и оптических системах.



а) *б*)

Рисунок 2.6 – Данные атомно-силовой микроскопии для 7-слойного покрытия на основе двуокисей циркония и кремния: *а*) топография, *б*) фазовый контраст

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hill*, *M.T.* Advances in small lasers / M.T. Hill, M.C. Gather // Nature Photonics. – 2014. – Vol. 8. – P. 908–918.

2. *Macleod*, *A.* Optical Thin Films / A. Macleod // Handbook of Thin Film Deposition. – 2014. – P. 379–416.

3. *Крылова*, *Т.Н.* Интерференционные покрытия / Т.Н. Крылова. – Л.: Машиностроение. – 1973. – 224 с.

4. *Оптические свойства и морфология тонкоплёночного поляризатора для двух рабочих длин волн на основе тугоплавких оксидов* / Н.Н. Федосенко [и др.] // Оптика неоднородных структур – 2019: материалы Международной конференции, 28–29 мая 2019 г., МГУ им. А.А. Кулешова. – Могилев, 2019. – С. 91–97.

Поступила в редакцию 14.03.2020.

ФИЗИКА

УДК 621.383.51

СТРУКТУРНЫЕ, МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК CdS

В.В. Хорошко[1], **В.Ф. Гременок**[2], **И.Н. Цырельчук**[1], **О.Д. Аксенов**[1], **В.К. Ли**[1]

[1]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*, *Минск*
[2]*Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению*, *Минск*

STRUCTURE, MORPHOLOGY AND OPTICAL CHARACTERISTICS OF CdS THIN FILMS

V.V. Khoroshko[1], **V.F. Gremenok**[2], **I.N. Tsyrelchuk**[1], **O.B. Aksyonov**[1], **V.K. Li**[1]

[1]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics*, *Minsk*
[2]*Scientific and Practical Center for Materials of National Academy of Sciences of Belarus*, *Minsk*

Представлены результаты формирования тонких пленок CdS методом химического осаждения с использованием различных методов размешивания водного раствора и положения подложки. Проведены исследования структурных, морфологических и оптических свойств тонких пленок CdS. Рентгенограммы показали характерные для CdS пики (111), (220) и (311). Значения ширины запрещенной зоны находились в пределах 2,39–2,48 эВ, что соответствует литературным данным. Использование методов позволяет формировать тонкие пленки высокого качества со стабильными характеристиками и управляемой толщиной.

***Ключевые слова**: тонкие пленки*, *CdS*, *физические свойства.*

The results of the formation CdS thin films by chemical deposition using various thechnics of stirring an aqueous solution and the position of the substrate are presented. The structural, morphological, and optical properties CdS thin films were studied. X-ray diffraction patterns showed the peaks (111), (220), and (311) of CdS. The values of the band gap are in the range 2,39–2,48 eV, which corresponds to the published data. The use of methods allows the formation of thin films.

Keywords: *thin films*, *CdS*, *physical properties.*

Введение

Возобновляемые источники энергии на протяжении нескольких десятилетий прочно заняли своё место в мировом энергобалансе. Среди различных вариантов получения энергии широкое распространение получило прямое преобразование солнечного излучения полупроводниковыми фоточувствительными структурами (солнечными элементами, модулями, батареями). На сегодняшний день наиболее распространенным материалом для изготовления полупроводниковых солнечных элементов остается кремний, однако традиционные отработанные технологии получения слоев кремния не позволяют выполнять эти слои достаточно тонкими, а также сопровождаются большим процентом отходов чистого моно- или поликристаллического кремния [1]. Развитие тонкопленочной технологии позволило создавать фотопреобразователи с высокими значениями КПД и толщиной до десятка микрон.

Сульфид кадмия (CdS) является полупроводниковым материалом, используемым в качестве «оконного слоя» в тонкопленочных солнечных элементах. В фотоэлементах излучение проходит через CdS слой и поглощается в полупроводнике p-типа вблизи p-n перехода. Излучение, поглощаемое CdS, снижает КПД фотоэлемента, особенно в части спектра соответствующего синему цвету. Чтобы избежать потерь, толщину CdS слоя стремятся сделать минимальной, поэтому критически важными для данного типа тонких пленок являются морфология и оптические характеристики. Для формирования поликристаллических тонких пленок CdS могут быть применены различные методы: распыление, электроосаждение, химическое осаждение и др. Среди различных методов наибольшее распространение получило химическое осаждение CdS. Метод химического осаждения основан на контролируемом равномерном осаждении материалов на подложку с использованием очень дешевых экспериментальных установок и химических реагентов, что позволяет формировать оптимальные по своим характеристикам для применения в фотоэлектрических преобразователях. В статье представлены результаты исследования характеристик тонких пленок для применения в качестве оконного слоя.

1 Экспериментальная часть

Тонкие пленки были сформированы на стеклах (75×25 мм^2) из химической ванночки, содержащей хлорид кадмия, аммоний хлорид, гидроксид аммония и тиомочевину. Температура для всех экспериментов составляла 75±2 °C. Последовательность образования CdS в результате

© *ХорошкоВ.В.*, *Гременок В.Ф.*, *Цырельчук И.Н.*, *Аксенов О.Д.*, *Ли В.К.*, 2020

химического осаждения хорошо изучена и может быть описана следующим образом [2]:

$$[Cd(NH_3)_4]^{2+} + CS(NH_2)_2 + 2OH^- \rightarrow CdS\downarrow + \\ + 4NH_3\uparrow + CH_2N_2 + 2H_2O.$$

Все растворы были подготовлены в деионизованной воде. Непосредственно перед осаждением тонких пленок для обеспечения хорошей адгезии подложки были очищены с помощью безщелочного моющего средства, ультразвуковой очистки и последующей сушки в атмосфере азота. На всем протяжении добавления компонент водный раствор размешивали непрерывно. Раствор содержал 0,02 М хлорида кадмия и 0,05 М хлорида аммония на 100 мл дистиллированной воды. Затем для поддержания РН на уровне 9 было добавлено 50 мл гидрата аммиака. Образование CdS начиналось после добавления тиомочевины 0,05 М, при этом температура раствора уже была доведена до 75 °С. В процессе формирования пленок использовалась магнитная мешалка. Для получаемых образцов варьировались параметры эксперимента: время осаждения (20, 30, 40, 50 мин) и использование / не использование вибраций подложки (с частотой 60 Гц).

После получения образцов были исследованы структурные, морфологические, оптические и электрические свойства тонких пленок. По измеренным спектрам пропускания рассчитывали коэффициенты поглощения, а ширину запрещенной зоны рассчитывали аппроксимацией прямолинейного участка $(\alpha h\nu)^2$ на ось $h\nu$. Кристаллическую структуру определяли при помощи рентгенофазового анализа. Морфологию поверхности определяли с использованием атомно-силовой микроскопии

2 Результаты и их обсуждение

Для первого режима осаждения (с использованием вибраций подложки) были выполнены 4 серии образцов пленок с различным временем осаждения. В таблице 2.1 показаны результаты расчета ширины запрещенной зоны и измеренной толщины пленок.

Таблица 2.1 – Параметры пленок CdS для первого режима

№ п/п	Ширина запрещенной зоны, эВ	Толщина пленки, нм	Шероховатость, Ra, нм	Время осаждения, мин
1	2,46	158	28	20
2	2,48	233	50	30
3	2,42	258	42	40
4	2,41	252	36	50

Для второго режима (без вибраций подложки) были также синтезированы 4 серии образцов пленок. Результаты измерений приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Параметры пленок CdS для второго режима

№ п/п	Ширина запрещенной зоны, эВ	Толщина пленки, нм	Шероховатость, Ra, нм	Время осаждения, мин
1	2,45	181	56	20
2	2,44	214	48	30
3	2,39	252	60	40
4	2,42	269	52	50

При проведении РФА (JCPDS № 89–0019) каких-либо дополнительных пиков, кроме (111) на 26,81°; (220) на 44,27°; (311) на 52,34°; (420) на 72,71°, соответствующих соединению CdS, выявлено не было. Шероховатость поверхности для всех пленок находилась в пределах 28–60 нм, какой-либо взаимосвязи между условиями эксперимента и параметрами шероховатости не было обнаружено. Морфология поверхности у всех образцов удовлетворяла требованиями, предъявляемым к буферному слою фотоэлементов (плотноупакованные зерна с размерами 80–100 нм). Что касается значения ширины запрещенной зоны, то в обоих случаях, с увеличением времени осаждения (и увеличением толщины пленок), наблюдается её незначительное уменьшение. При этом такие изменения не коррелируют с параметрами шероховатости и размерами

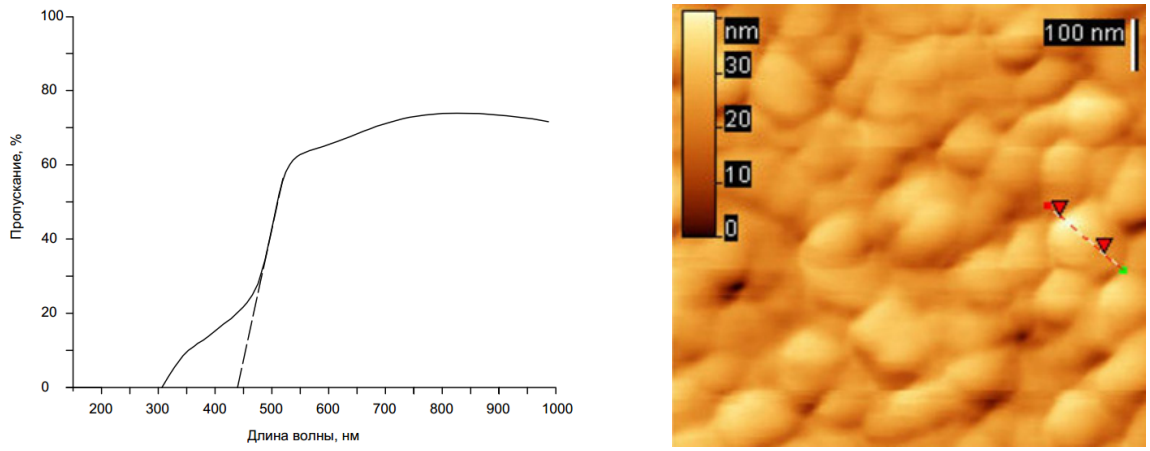


Рисунок 2.1 – Типичный спектр пропускания и АСМ тонких пленок CdS

зерна пленках. Ширина запрещенной зоны тонких пленок находилась в пределах 2,39–2,48 эВ. Типичная морфология поверхности и спектр образцов показаны на рисунке 2.1. Результаты хорошо согласуются с литературными данными [3]–[5.]

Скорость осаждения тонких пленок для первого режима на протяжении первых 30 минут была постоянной и составляла ~ 7,5–8 нм/мин с последующим замедлением до 2,5 нм/мин. Для второго режима скорость осаждения в течении первых 20 минут составляла около 9 нм/мин с последующим уменьшением до 2–3 нм/мин.

Заключение

Методом химического осаждения сформированы тонкие пленки CdS с варьированием условий эксперимента (время осаждения и положение подложки). Определена кристаллическая структура тонких пленок (пики (111), (220) и (311)). Шероховатость поверхности для всех пленок находилась в пределах 28–60 нм. Ширина запрещенной зоны тонких пленок находилась в пределах 2,39–2,48 эВ. Установлена скорость осаждения тонких пленок для обоих методов: для первого режима на протяжении первых 30 минут была постоянной и составляла ~ 7,5–8 нм/мин с последующим замедлением до 2,5 нм/мин; для второго режима скорость осаждения в течении первых 20 минут составляла около 9 нм/мин с последующим уменьшением до 2–3 нм/мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jordan*, *D*. Photovoltaic Degradation Rates – An Analytical Review / D. Jordan, S. Kurtz // Progress in Photovoltaics: Research and Applications. – 2013. – Vol. 21, № 1. – P. 12–29. – DOI: 10.1002/pip.1182.

2. *Growth and physical properties of CdS thin films prepared by chemical bath deposition* / H. Moualkia, S. Hariech, M.S. Aida, N. Attaf, E.L.Laifa // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2009. – Vol. 42, № 13. – P. 135404. – DOI: 10.1088/0022-3727/42/13/135404.

3. *Al-Hussam*, *A.M.A*. Synthesis, structure, and optical properties of CdS thin films nanoparticles prepared by chemical bath technique / A.M.A. Al-Hussam, S.A.-J. Jassim // Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences. – 2012. – Vol. 11, № 1. – P. 27–31. – DOI: 10.1016/j.jaubas.2011.10.001

4. *Dongre*, *J.K*. Structural, optical and photoelectrochemical characterization of CdS nanowire synthesized by chemical bath deposition and wet chemical etching / J.K. Dongre, V. Nogriya, M. Ramrakhiani // Applied Surface Science. – 2009. – Vol. 255, № 12. – P. 6115–6120. – DOI: 10.1016/j.apsusc.2009.01.064

5. *Rajpal*, *S*. Structural and Optical Properties of CdS Thin Film Grown by Chemical Bath Deposition / S. Rajpal, V. Bandyopadhyay // Journal of Nano- and Electronic Physics. – 2013. – Vol. 5, № 3. – P. 03021-1–03021-3.

Поступила в редакцию 30.12.2019.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О МАКСИМАЛЬНЫХ АБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ БЛИЗКИХ К $\mathfrak{F}$-АБНОРМАЛЬНЫМ

Р.В. Бородич, Р.А. Кучеров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON MAXIMAL ABNORMAL SUBGROUPS CLOSE TO $\mathfrak{F}$-ABNORMAL

R.V. Borodich, R.A. Kucherov

F. Scorina Gomel State University

Исследуются пересечения максимальных подгрупп близких к $\mathfrak{F}$-абнормальным, индексы которых не делятся на некоторые простые числа.

Ключевые слова: *конечная группа*, *абнормальная подгруппа*, $\mathfrak{F}$*-корадикал*.

The intersections of maximal subgroups close to $\mathfrak{F}$-abnormal, whose indices are not divisible by some prime numbers are investigated.

Keywords: *finite group*, *abnormal subgroup*, $\mathfrak{F}$*-residual*.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Одним из основополагающих направлений в исследовании конечных групп связано с исследованием свойств пересечений заданных максимальных подгрупп и влиянием этих свойств на строение группы. Главенствующую роль здесь занимает подгруппа Фраттини, введенная в работе [1]. Теорема Фраттини получила развитие в работах В. Гашюца [2], В. Дескинса [3] и других авторов (см. монографии [4] и [5]).

Введённое в работах Р. Картера, Т. Хоукса [6] и Л.А. Шеметкова [7] понятие $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы позволило систематизировать накопившийся богатый фактический материал о максимальных подгруппах и получить целый ряд новых результатов.

Данная работа посвящена развитию указанных направлений в группах с операторами, основываясь на методах использования подгрупповых функторов в группах с операторами [8].

1 Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $< H, H^x >$; *абнормальной*, если $x \in < H, H^x >$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют нормально наследственным (S_n-замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то

$$G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\phi}) \cap f(Ker\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют *локальной*, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной ($\mathfrak{F}$-абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

© *Бородич Р.В.*, *Кучеров Р.А.*, 2020

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ – автоморфное отображение группы G в себя. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно, так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Обозначим через

$\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп;

$\Delta_{\pi}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп, индексы которых не делятся на простые числа из π;

$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G;

$D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, индексы которых делятся на простые числа из π;

$\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, индекс каждой из которых не делится на простые числа из π;

$\delta_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ – пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, содержащих $O_{\pi}(G)$ и не содержащих $G^{\mathfrak{F}}$;

$\overline{\delta}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ – пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, содержащих $O_{\pi}(G)$, не содержащих $G^{\mathfrak{F}}$ и не принадлежащих $\mathfrak{F}$;

$\varphi_{\Delta_{\pi}}(G, A)$ – пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, содержащих $O_{\pi}(G)$.

В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [9].

2 Вспомогательные результаты

***Лемма* 2.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда если N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то*

$$\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не принадлежащая $\mathfrak{F}$ и не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал группы G. Тогда

$$\overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \cap(M/N)_{G/N}, \qquad (2.1)$$

где M/N пробегает множество всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп из G/N, не принадлежащих $\mathfrak{F}$ и не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G/N.

Продолжим равенство (2.1):

$$\cap(M/N)_{G/N} = (\cap M_G)/N = \overline{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/N. \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (2.2) вытекает справедливость утверждения. □

***Теорема* 2.2** [10, с. 114]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Delta_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π}. Тогда*

$$\Delta_{\pi}(G, A)/O_{\pi}(G) = \Delta(G/O_{\pi}(G), A).$$

***Теорема* 2.3** [11, с. 29]. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – ступенчатая формация. Тогда*

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)/\Delta(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/\Delta(G, A)).$$

***Теорема* 2.4.** [12, с. 41]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если в группе G подгруппа $\Delta_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π}, то*

$$D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)/O_{\pi}(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G/O_{\pi}(G), A).$$

В теоремах 2.2 и 2.4 используется тот факт, что подгруппа $\Delta_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π}. Следующий подход позволяет развить данные теоремы, отбросив указанное выше требование. В основе этого подхода лежат свойства подгрупп $\delta_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, $\overline{\delta}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, $\varphi_{\Delta_{\pi}}(G, A)$.

***Лемма* 2.5.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – формация, N – нормальная A-допустимая подгруппа группы G. Тогда*

справедливы следующие утверждения:

если $N \subseteq \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$, то

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G/N, A) = \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)/N;$$

если $N \subseteq \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$, то

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/N, A) = \delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)/N;$$

если $N \subseteq \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ и $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)/N \neq G/N$, то $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/N, A) = \overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)/N$.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

***Лемма* 2.6.** *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда*

1) $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) \supseteq \Delta_\pi(G, A)$,

2) $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ – π-замкнутая подгруппа,

3) $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)/O_\pi(G) = \Delta(G/O_\pi(G))$,

4) если $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π, то $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) = \Delta_\pi(G, A)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) \supseteq \Delta_\pi(G, A).$$

Покажем, что подгруппа $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ π-замкнута. Пусть $O_\pi(G)$ – неединичная подгруппа, N – минимальная нормальная подгруппа группы G, $N \subseteq O_\pi(G)$. По лемме 23.5 имеем:

$$\varphi_\pi(G/N, A) = \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)/N.$$

Для G/N утверждение леммы верно по индукции.

Следовательно, группа $\varphi_{\Delta_\pi}(G/N, A)$ π-замкнута. Так как N – π-группа, то из π-замкнутости $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)/N$ следует, что $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ – π-замкнутая подгруппа.

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. По определению подгруппы $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ имеем в этом случае $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A) = \Delta(G, A)$, причём $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ обладает единичной π-холловской подгруппой. Очевидно, $\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$ – π-замкнутая подгруппа, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G, A)/O_\pi(G) = \Delta(G/O_\pi(G)).$$

Пусть M – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G и $O_\pi(G) \subseteq M$. Так как $O_\pi(G)$ – характеристическая подгруппа, то, очевидно, $M/O_\pi(G)$ – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы $G/O_\pi(G)$. Следовательно,

$$\Delta_\pi(G/O_\pi(G), A) \subseteq \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)/O_\pi(G) = \varphi_\pi(G/O_\pi(G), A).$$

С другой стороны, так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$, то по определению

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G), A) = \Delta_\pi(G/O_\pi(G), A),$$

что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π. По ранее доказанному

$$\Delta_\pi(G, A)/O_\pi(G) = \Delta_\pi(G/O_\pi(G), A) = \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)/O_\pi(G).$$

Следовательно, $\Delta_\pi(G, A) = \varphi_{\Delta_\pi}(G, A)$. □

***Теорема* 2.7** [11, с. 29]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $D^{\mathfrak{F}}_\Delta(G, A) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \subseteq \Delta(G, A)$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$.*

3 Основной результат

***Теорема* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) \neq G$. Если в группе G подгруппа $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π, то*

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)/O_\pi(G) = D^{\mathfrak{F}}_\Delta(G/O_\pi(G), A).$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$K = \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta_\pi(G, A).$$

Пусть $K \not\subseteq \Delta_\pi(G, A)$. Тогда в G найдётся такая абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M, индекс которой не делится на простое число из π, что $G = KM$. Понятно, что M не содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то

$$K \subseteq \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) \subseteq M,$$

что невозможно. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$. Отсюда

$$G/K = MK/K \simeq M/M \cap K \in \mathfrak{F},$$

а это значит, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)$. Это противоречит существованию в группе G абнормальной максимальной A-допустимой подгруппы, не содержащей $G^{\mathfrak{F}}$ индекс которой не делится на простые числа из π. Итак,

$$K \subseteq \Delta_\pi(G, A).$$

Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\Delta_\pi(G, A)/O_\pi = \Delta(G/O_\pi(G), A),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G/O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G), A)/O_\pi(G/O_\pi(G)) = D^{\mathfrak{F}}_\Delta(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G)), A).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G)) = 1$ и

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G), A) = \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)/O_\pi(G),$$

то

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A).$$

Пусть теперь $O_\pi(G)=1$. Тогда

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta_\pi(G,A) = \Delta(G,A).$$

Пусть K/N – главный фактор группы G, причём,

$$\Delta(G,A) \subseteq N \subseteq K \subseteq \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A).$$

Так как

$$K\cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta(G,A),$$

то $N = N(K\cap G^{\mathfrak{F}}) = K\cap NG^{\mathfrak{F}}$.

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}} \simeq K/K\cap NG^{\mathfrak{F}} =$$
$$= K/N(K\cap G^{\mathfrak{F}}) = K/N.$$

Так как $G/NG^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{F}$, то главный фактор $KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Следовательно, главный фактор K/N также является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Таким образом, $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A)$ – $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Delta(G,A)$. Поэтому

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A) \subseteq Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G/\Delta(G,A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 2.3

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A) \supseteq D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)/\Delta(G,A) =$$
$$= Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G/\Delta(G,A)).$$

Значит,

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A) = Z^{\mathfrak{F}}_{\infty}(G/\Delta(G,A)).$$

Следовательно,

$$D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/\Delta(G,A) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)/\Delta(G,A),$$

то есть $D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)$. □

***Следствие* 3.1.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\neq G$. Если подгруппа $\Delta_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π, то*

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}.$$

Так как в любой группе G подгруппа $\Delta_p(G,A)$ обладает свойством C_p, то при $\pi=\{p\}$ получаем следующий результат.

***Следствие* 3.1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\neq G$. Тогда*

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_p}(G,A)/O_p(G) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_p(G),A).$$

***Следствие* 3.1.3.** *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\neq G$. Если $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_p}(G,A)/O_p(G)\in\mathfrak{F}$.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда*

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A).$$

Доказательство. Пусть M – абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа группы G, $O_\pi(G)\subseteq M$ и M не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы G. Так как $(G/O_\pi(G))^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}O_\pi(G)/O_\pi(G)$, то $M/O_\pi(G)$ – абнормальная максимальная A-допустимая в $G/O_\pi(G)$ подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал группы $G/O_\pi(G)$. Таким образом,

$$D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A) \subseteq \delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A) =$$
$$= \delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G).$$

Обратно, если подгруппа $M/O_\pi(G)$ абнормальная максимальная A-допустимая в $G/O_\pi(G)$ и не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал группы $G/O_\pi(G)$, то подгруппа M абнормальная максимальная A-допустимая в G подгруппа, содержащая $O_\pi(G)$ и не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно,

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A) =$$
$$= \delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G) \subseteq D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A).$$

Отсюда имеем

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A),$$

что и требовалось доказать. □

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда, если $\Delta_\pi(G,A)$ обладает свойством C_π, то*

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A).$$

Доказательство. По теоремме 2.2 и теореме 3.2 имеем:

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A) =$$
$$= D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G).$$

Следовательно, $\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)$.

***Следствие* 3.2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Тогда,*

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_p}(G,A)\cap\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_q}(G,A) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)$$

для любых $p\neq q$.

Справедливость утверждения следует из справедливости теоремы Силова для $\Delta_p(G,A)$ и $\Delta_q(G,A)$ и следствия 4.2.1.

***Теорема* 3.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация, группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\neq G$. *Тогда*

$$\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A).$$

Доказательство. Покажем, что

$$K=\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\cap G^{\mathfrak{F}}\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A).$$

Пусть $K\not\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$. Тогда в G найдётся абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа M, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M\notin\mathfrak{F}$, то

$$K\subseteq\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\subseteq M,$$

что невозможно. Следовательно, $M\in\mathfrak{F}$. Отсюда

$$G/K=MK/K\simeq M/M\cap K\in\mathfrak{F}.$$

А это значит, что $G^{\mathfrak{F}}\subseteq K\subseteq\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)$. Это противоречит существованию в группе G абнормальной максимальной A-допустимой подгруппы, не содержащей $G^{\mathfrak{F}}$ и определению $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)$. Следовательно, $K\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$.

Пусть $O_\pi(G)\neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi=\Delta(G/O_\pi(G),A),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G/O_\pi(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A)/O_\pi(G/O_\pi(G))=$$
$$=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G)/O_\pi(G/O_\pi(G)),A).$$

Так как $O_\pi(G/O_\pi(G))=1$, то

$$\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G/O_\pi(G),A).$$

Из леммы 3.5

$$\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A).$$

Пусть теперь $O_\pi(G)=1$. По определению подгруппы $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)$ имеем $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)=\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)$, а определению подгруппы $\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$ –

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)=\Delta_\pi(G,A)=\Delta(G,A).$$

Тогда из теоремы 4.1 получаем $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)=$ $=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)$. Следовательно, $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G,A)$, что и требовалось доказать. □

***Следствие* 3.3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственная локальная формация, группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, $\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)\neq G$. *Тогда*

$$\overline{\delta}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}.$$

***Теорема* 3.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственная локальная формация, группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, π *– некоторое множество простых чисел. Тогда* $\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)=AB$, *где*

1) $A/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}$;
2) $B\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$;
3) $\pi(B)\cap\pi(\mathfrak{F})\subseteq\pi$.

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $G/O_\pi(G)$.

Из теоремы 3.2

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A),$$

по лемме 2.6

$$\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=\Delta(G/O_\pi(G),A).$$

Применяя к группе $D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A)$ теорему 2.7, получаем

$$D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G/O_\pi(G)),A)=(A/O_\pi(G))(B/O_\pi(G)),$$

где

$$A/O_\pi(G)\in\mathfrak{F},B/O_\pi(G)\subseteq$$
$$\subseteq\Delta(G/O_\pi(G),A),\pi(B/O_\pi(G))\cap\pi(\mathfrak{F})=\varnothing.$$

Следовательно, $\pi(B)\cap\pi(\mathfrak{F})\subseteq\pi$. Так как

$$\Delta(G/O_\pi(G),A)=\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G),$$

то $B\subseteq\varphi_{\Delta_\pi}(G,A)$.

Ввиду теоремы 2.7 имеем, что

$$A\cap B=O_\pi(G),A/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}.$$

Так как

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)=D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G),A),$$

то $\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)=AB$, что и требовалось доказать. □

***Следствие* 4.4.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственная локальная формация, группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, π *– некоторое множество простых чисел. Тогда*

$$\delta^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G,A)/O_\pi(G)\in\mathfrak{F}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini*, *G*. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. *Gaschütz*, *W*. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.

3. *Deskins*, *W.E*. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // III. J. Math. – 1961. – Vol. 5. – № 2. – P. 306–313.

4. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

5. *Селькин*, *М.В*. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука. 1997. – 144 с.

6. *Carter*, R. The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

7. *Шеметков*, *Л.А*. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.

8. *Бородич*, *Р.В*. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р.В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.

9. *Бородич*, *Р.В*. Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

10. *Бородич*, *Р.В*. Об абнормальных подгруппах конечных групп с заданной группой операторов / Р.В. Бородич // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта імя П.М. Машэрава. – 2003. – № 2. – С. 111–115.

11. *Бородич*, *Р.В*. О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 26–30.

12. *Бородич*, *Р.В*. О пересечении абнормальных *A*-допустимых подгрупп с ограничениями на индексы, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (39). – С. 39–43.

Поступила в редакцию 04.03.2020.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОБОБЩЕННО АБНОРМАЛЬНЫХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON PRODUCTS OF GENERALIZED ABNORMAL SUPERSOLUBLE SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

A.F. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University

Введено и изучено понятие X-абнормальной подгруппы конечных групп. Установлено несколько признаков сверхразрешимости конечных групп в терминах произведений X-абнормальных подгрупп. В частности, доказана сверхразрешимость группы $G = AB = CD$, где A и B – субнормальные сверхразрешимые, а C и D – X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы G.

Ключевые слова: *конечная группа*, *сверхразрешимая группа*, *абнормальная подгруппа*, *X-абнормальная подгруппа*.

The concept of an X-abnormal subgroup of finite groups is introduced and studied. Several attributes of the supersolubility of finite groups in terms of products of X-abnormal subgroups are established. In particular, the supersolubility of the group $G = AB = CD$ is proved, where A and B are subnormal, and C and D are X-abnormal supersoluble subgroups in G.

Keywords: *finite group*, *supersoluble subgroup*, *abnormal subgroup*, *X-abnormal subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются стандартные определения и обозначения [1], [2].

Хорошо известно, что произведение двух сверхразрешимых (нормальных) подгрупп группы G не обязательно сверхразрешимо. В 1957 году Бэр [3] доказал, что, если группа $G = AB$, где A и B – нормальные сверхразрешимые подгруппы G и коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима. Этот результат послужил отправной точкой для появления многочисленных исследований (см. например, [4]–[13]), посвященных нахождению признаков и критериев сверхразрешимости групп в терминах произведений нормальных и обобщенно нормальных сверхразрешимых подгрупп.

Полярным к понятию нормальности является понятие абнормальности для подгрупп. Напомним [1], что подгруппа H группы G называется абнормальной в G, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. Обозначается $H \ abn \ G$.

Имеется целый ряд обобщений абнормальности для подгрупп. Хорошо известны и применяются понятия самонормализуемой, субабнормальной, слабо абнормальной, контранормальной и др. подгрупп.

Во многих случаях возникает факторизация группы абнормальными подгруппами. Например, симметрическая группа S_4 представима в произведение своих абнормальных подгрупп: силовской 2-подгруппы и подгруппы, изоморфной S_3. В работах [14], [15] в классе разрешимых групп исследовались классы групп $\mathfrak{X}$, замкнутые относительно взятия произведений абнормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. В частности, было получено описание всех разрешимых наследственных насыщенных формаций и разрешимых формаций Фитинга с данным выше свойством. Отметим, что класс всех сверхразрешмых групп, являясь наследственной насыщенной формацией, не попадает в список формаций, полученных в работе [14]. На это также указывает и приведенный выше пример. Поэтому возникает естественная задача: исследовать, при каких условиях произведение ненормальных (абнормальных) сверхразрешимых подгрупп сверхразрешимо? Рассмотрению ряда случаев этой общей задачи и посвящена настоящая работа.

1 Предварительные сведения

***Лемма* 1.1.** *Пусть H и R – подгруппы группы G, $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $H \ abn \ R$, то $HN / N \ abn \ RN / N$;*

2) *если $N \subseteq H$ и $H / N \ abn \ G / N$, то $H \ abn \ G$.*

Доказательство. Установим справедливость 1). Пусть $H \ abn \ R$. Для любого $xN \in RN / N$ найдутся $w \in R$ и $n \in N$ такие, что $x = wn$. Тогда

$$xN = wN \in \langle H, H^w \rangle N / N =$$

$$= \langle HN / N, H^w N / N \rangle = \langle HN / N, (HN / N)^{xN} \rangle.$$

© *Васильев А.Ф.*, 2020

Таким образом, HN/N *abn* RN/N. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Для любого $x \in G$ ввиду абнормальности H/N в G/N получаем, что $xN \in \langle H/N, (H/N)^{xN} \rangle = \langle H, H^x \rangle / N$. Отсюда следует, что найдутся элементы $h \in \langle H, H^x \rangle$ и $n \in N$ такие, что $x = hn$. Тогда

$$x \in \langle H, H^x \rangle N = \langle H, H^x \rangle. \qquad \square$$

Пусть p – простое число. Напомним [16, с. 6], что группа G называется строго p-замкнутой, если силовская p-подгруппа G_p группы G нормальна в G и G/G_p является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Нам потребуется следующая известная теорема Бэра [16, теорема 1.12].

***Теорема* 1.2.** *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда*

(*a*) *G является дисперсивной по Оре, и*

(*b*) $N_G(G_p)/C_G(G_p)$ *является строго p-замкнутой для любой силовской p-подгруппы* G_p *группы G и любого* $p \in \pi(G)$.

Отметим следующие свойства класса всех сверхразрешимых групп (см., например, [1, гл. 1, § 4.9], [16, гл. 1]).

***Теорема* 1.3.** *Класс всех сверхразрешимых групп образует наследственную насыщенную формацию, которая имеет локальный экран f такой, что* $f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$ *для любого простого p, где* $\mathfrak{A}(p-1)$ *– формация всех абелевых групп экспоненты, делящей* $p-1$.

2 Обобщенно абнормальные подгруппы конечных групп

В настоящем разделе рассмотрим некоторые обобщения понятия абнормальной подгруппы.

В работе [17] Роуз ввел следующее обобщение абнормальной подгруппы.

***Определение* 2.1.** Подгруппа H группы G называется контранормальной в G, если $H^G = G$. Будем использовать обозначение H *cn* G.

Свойства контранормальных подгрупп собраны в следующей лемме.

***Лемма* 2.2.** *Пусть H и R – подгруппы группы G,* $N \trianglelefteq G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* H *cn* R, *то* HN/N *cn* RN/N, *в частности, если* H *cn* G, *то* HN/N *cn* G/N;

2) *если* $N \subseteq H$ *и* H/N *cn* G/N, *то* H *cn* G;

3) *если* H *cn* R, R *cn* G, *то* H *cn* G;

4) *если* H *abn* G, *то* H *cn* G.

Доказательство. Установим справедливость 1). Пусть H *cn* R. Тогда $H^R N/N = RN/N \supseteq (HN/N)^{RN/N}$. Обозначим $(HN/N)^{RN/N} = K/N$. Пусть $x \in R$. Тогда $xN \in RN/N$ и $(HN/N)^{xN} \subseteq K/N$. Поэтому $H^x \subseteq H^x N \subseteq K$ для любого $x \in R$. Отсюда следует, что $H^R \subseteq K$ и $H^R N/N \subseteq K/N$. Итак,

$$H^R N/N = RN/N = (HN/N)^{RN/N},$$

т. е. HN/N *cn* RN/N.

Если рассмотреть $R = G$, то

$$HN/N \text{ } cn \text{ } G/N$$

и утверждение 1) доказано.

Установим справедливость 2). Пусть $N \subseteq H$ и H/N *cn* G/N. Тогда

$$G/N = (H/N)^{G/N} = \langle (H/N)^{xN} \mid \text{для любого } xN \in G/N \rangle.$$

Так как $(H/N)^{xN} = H^x/N \subseteq H^G/N$, получаем $(H/N)^{G/N} \subseteq H^G/N \subseteq G/N = (H/N)^{G/N}$. Таким образом, $(H/N)^{G/N} = H^G/N = G/N$ и $H^G = G$. Это означает, что H *cn* G. Утверждение 2) доказано.

Установим справедливость 3). Пусть H *cn* R *cn* G. Из $H^R = R$ для любого $g \in G$ следует, что $R^g = \langle H^x \mid$ для всех $x \in R \rangle^g = \langle H^{xg} \mid$ для всех $x \in R \rangle$. Тогда $G = R^G = \langle R^g \mid$ для всех $g \in G \rangle = \langle H^{xg} \mid$ для всех $x \in R$ и всех $g \in G \rangle = H^G$. Утверждение 3) доказано.

Утверждение 4) следует из того, что всякая подгруппа, содержащая абнормальную подгруппу, самонормализуема. $\square$

Заметим, что обратное утверждение к 4) леммы 2.2 неверно, на что указывает пример подгруппы $H = \langle (1,2) \rangle$ в симметрической группе S_4.

Рассмотрим еще одно обобщение абнормальности и контранормальности, основанное на одной идее обобщения нормальности, предложенной А. Манном в [18]. Функторное развитие результатов [18] можно найти в работах [19], [20].

***Определение* 2.3.** Подгруппу H группы G будем называть X-абнормальной в G, если для любого эпиморфизма σ группы G либо $H^\sigma = G^\sigma$, либо H^σ содержится в собственной абнормальной подгруппе R^σ группы G^σ.

***Лемма* 2.4.** *Пусть H – подгруппа группы G и* $N \trianglelefteq G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H X-абнормальна в G, то* HN/N *X-абнормальна в* G/N;

2) *если* $N \subseteq H$ *и* H/N *X-абнормальна в* G/N, *то H X-абнормальна в G.*

Доказательство следует из работы [19].

***Лемма* 2.5.** *Пусть H – подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H контранормальна и субнормальна в G одновременно, то $H = G$;*

2) *если G – разрешимая группа и H X-абнормальна и субнормальна в G одновременно, то $H = G$.*

Доказательство. Установим справедливость 1). Пусть $H \; cn \; G$. Если $H \neq G$, то в G найдется нормальная подгруппа $K \neq G$, содержащая H. Тогда для любого $x \in G$ подгруппа $H^x \subseteq K^x = K$. Поэтому $H^G \subseteq K$. Получили противоречие с $H^G = G$. Значит, $H = G$. Утверждение 1) доказано.

Установим справедливость 2). Оставаясь в предположениях 2) леммы, допустим, что $H \neq G$. Так как H субнормальна в G, то найдется нормальная максимальная подгруппа группы G такая, что $H \subseteq M$. Тогда HM/M является X-абнормальной и субнормальной в G/M одновременно. Так как G/M – группа простого порядка и не содержит собственных абнормальных подгрупп, то получаем противоречие. □

***Лемма* 2.6.** Если $G = AB$, где A и B – X-абнормальные нильпотентные подгруппы группы G, то G нильпотентна.

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка к утверждению леммы. Тогда $G = H_1H_2$, где H_i – X-абнормальная нильпотентная подгруппа группы G, $i = 1,2$, но G ненильпотентна. По теореме Виландта – Кегеля G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Для факторгруппы G/N все условия леммы выполняются. Поэтому G/N нильпотентна для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Так как класс всех нильпотентных групп образует насыщенную формацию, заключаем, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе G и $\Phi(G) = 1$. При этом $N = C_G(N) = F(G)$ является p-группой, p – некоторое простое число. В G имеется максимальная подгруппа M, для которой $G = [N]M$, при этом $M \cong G/N$ нильпотентна.

Рассмотрим подгруппу H_iN, где $i = 1,2$. Если $H_iN = G$, где $i = 1,2$, то H_i – максимальная подгруппа группы G. Так как все дополнения к N являются максимальными подгруппами в G и сопряжены в ней, то по теореме Ope следует, что этот случай невозможен. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $H_1N \neq G$. Тогда H_1N/N является собственной подгруппой нильпотентной группы G/N. Но тогда H_1N/N является одновременно субнормальной и X-абнормальной подгруппой в G/N. По лемме 2.5 получаем, что $H_1N/N = G/N$. Это противоречит с $H_1N \neq G$. □

Связь контранормальных и X-абнормальных подгрупп устанавливает

***Лемма* 2.7.** *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *В любой группе всякая контранормальная подгруппа является X-абнормальной.*

(2) *Пусть G – разрешимая группа. Тогда и только тогда подгруппа H является контранормальной в G, когда подгруппа H является X-абнормальной в G.*

Доказательство. Установим справедливость (1). Пусть подгруппа H является контранормальной подгруппой в группе G. Если G – простая группа, то при $H \neq G$ в G найдется максимальная подгруппа W, содержащая H. Так как W абнормальна в G, получаем X-абнормальность H в G.

Допустим, что G непроста. Рассмотрим любой эпиморфизм σ группы G такой, что $H^\sigma \neq G^\sigma$. Тогда в G найдется нормальная подгруппа $N = \mathrm{Ker}\,\sigma$, для которой HN/N отлична от G/N. Тогда $HN/N \leq M/N < G/N$, где M/N – максимальная в G/N подгруппа. Из $H^G = G$ и максимальности M в G следует, что $M \; abn \; G$. Ввиду леммы 1.1 $M/N \; abn \; G/N$. Итак, H^σ содержится в $M^\sigma \; abn \; G^\sigma$. Утверждение (1) доказано.

Установим справедливость (2). Если $H \; cn \; G$, то по (1) H X-абнормальна в G.

Обратно. Пусть подгруппа H является X-абнормальной в G. Предположим, что $H^G \neq G$. Так как G разрешима, через H^G можно провести композиционный ряд

$$H^G = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_{n-1} = W \lhd H_n = G,$$

где H_i/H_{i-1} – циклическая группа простого порядка, $i = 1,\ldots,n$. Из 1) леммы 2.4 заключаем, что $1 \cong HW/W$ X-абнормальна в G/W, поэтому содержится в собственной абнормальной подгруппе из G/W. Но G/W является циклической группой простого порядка, поэтому не имеет собственных абнормальных подгрупп. Получили противоречие. Значит, $H^G = G$ и H является контранормальной в G. □

Заметим, что в общем случае X-абнормальность подгруппы не обязательно совпадает с контранормальностью. Например, в простой неабелевой группе единичная подгруппа является X-абнормальной, но не является контранормальной.

3 Основные результаты

Хорошо известно, что если подгруппы A и B имеют взаимно простые индексы в группе G, то $G = AB$. В 1960 году Виландт [21] доказал, что

группа G разрешима, если она имеет три разрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты. В работе [22] Дерк установил сверхразрешимость группы G, имеющей четыре сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты. Фрисен [23] показал сверхразрешимость группы G с двумя нормальными сверхразрешимыми подгруппами, имеющими взаимно простые индексы в G. В этом направлении получена следующая.

***Теорема* 3.1.** *Группа G сверхразрешима, если она имеет три X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты.*

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда G имеет три X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы H_1, H_2, H_3 с попарно взаимно простыми индексами. При этом сама группа G сверхразрешимой не является. Ясно, что $H_i \neq G,\ i = 1,2,3$.

По теореме Виландта группа G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Заметим, что при любом эпиморфизме σ группы G подгруппы H_i^{σ} являются X-абнормальными сверхразрешимыми подгруппами и имеют попарно взаимно простые индексы. Для факторгруппы G/N все условия теоремы выполняются. Поэтому G/N сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Так как по теореме 1.3 класс всех сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе G и $\Phi(G) = 1$. Из разрешимости G следует, что N – p-группа для некоторого простого числа p, причем $N = C_G(N) = F(G)$. Заметим, что найдется максимальная в G подгруппа R такая, что $G = [N]R$. Ввиду $R \cong G/N$ подгруппа R сверхразрешима.

Индекс любой подгруппы, не содержащей N, делится на p. Поэтому N содержится по крайней мере в двух подгруппах системы подгрупп H_1, H_2, H_3. Будем считать, что $N \subseteq H_i,\ i = 1,2$. Из $N = C_G(N)$ и $N \subseteq H_i$ следует, что $O_{p'}(H_i) = 1$, а значит, $F(H_i)$ является p-группой для любого $i = 1,2$. По теореме 1.2 H_i дисперсивна по Ope. Таким образом, p является наибольшим простым делителем порядка $|H_i|,\ i = 1,2$, а значит, и группы G. Так как N – силовская p-подгруппа в H_i и N нормальна в $H_i,\ i = 1,2$, то из $G = H_1H_2$ вытекает, что N – силовская p-под-группа группы G. Следовательно, R – p'-группа.

Согласно тождеству Дедекинда

$$H_i = H_i \cap [N]R = [N](H_i \cap R)$$

для любого $i = 1,2$. Из [1, лемма 4.5] следует, что $H_i / F(H_i) = H_i / N \simeq H_i \cap R$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Далее заметим, что $H_1 \cap R, H_2 \cap R$ имеют взаимно простые индексы в R, значит,

$$R = (H_1 \cap R)(H_2 \cap R).$$

Из 1) леммы 2.4 следует, что $H_i \cap R$ является X-абнормальной в R подгруппой, $i = 1,2$. Так как $H_i \cap R$ абелева, а значит, нильпотентна, то по лемме 2.6 вытекает нильпотентность подгруппы R. Но тогда $H_iN/N,\ i = 1,2,$ является субнормальной и X-абнормальной подгруппой в G/N одновременно. По лемме 2.5 $H_i \cap R = R,$ значит, $H_i = G,\ i = 1,2$. Получили противоречие. □

***Следствие* 3.1.1.** *Группа G сверхразрешима, если она имеет три контранормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть группа $G = AB$ есть произведение своих X-абнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если G метанильпотентна, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка к утверждению леммы. Тогда $G = H_1H_2$, где H_i – X-абнормальная сверхразрешимая подгруппа группы G, $i = 1,2$, но G несверхразрешима. Так как по условию G метанильпотентна, то G разрешима.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Для факторгруппы G/N все условия леммы выполняются. Поэтому G/N сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Используя теорему 1.3, легко показать, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа в группе G и $\Phi(G) = 1$. В этом случае $G = [N]M$, где N – p-группа (p – некоторое простое число), $N = C_G(N) = F(G)$, а M – некоторая сверхразрешимая максимальная подгруппа группы G.

Рассмотрим подгруппу H_iN, где $i = 1,2$. Если $H_iN = G$, где $i = 1,2$, то H_i – максимальная подгруппа группы G. Так как все дополнения к N являются максимальными подгруппами в G и сопряжены в ней, то по теореме Ope следует, что этот случай невозможен. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $H_1N \neq G$. Тогда H_1N/N является собственной подгруппой нильпотентной группы G/N. Отсюда заключаем, что H_1N/N и субнормальна и X-абнормальна в G/N. По лемме 2.5 $H_1N/N = G/N$. Получили противоречие. □

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть группа $G = AB$ есть произведение своих контранормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если G метанильпотентна, то группа G сверхразрешима.*

Напомним [8], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$*-субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

***Теорема* 3.3.** *Пусть группа $G = AB$ – произведение сверхразрешимых $\mathbb{P}$-субнормальных в G подгрупп A и B. Если A и B X-абнормальны в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. По (*a*) теоремы 1.2 A и B дисперсивны по Оре. По [9, теореме 4.4] группа G дисперсивна по Оре, поэтому является разрешимой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как для G/N все условия теоремы выполняются, G/N – сверхразрешимая группа. По теореме 1.3 класс всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией. Поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G)$, N – p-группа для некоторого простого числа p. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$. Из дисперсивности по Оре группы G следует, что p – наибольший простой делитель $|G|$. Так как $M \cong G/N$ сверхразрешима и $O_p(M) = 1$ по [1, лемма 3.9], получаем, что N – силовская p-подгруппа группы G.

Подгруппа $AN = AN \cap NM = N(AN \cap M)$. Заметим, что $O_{p'}(AN) = 1$ и $F_p(AN) = N$. Ввиду $AN \in \mathfrak{U}$ из леммы 4.5 из [1] и теоремы 1.3 следует, что

$$AN / F_p(AN) \cong AN \cap M \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1).$$

Аналогично получаем, что

$$BN \cap M \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1).$$

Заметим, что $M = (AN \cap M)(BN \cap M)$ является произведением X-абнормальных в M подгрупп $AN \cap M$ и $BN \cap M$. Из лемм 2.5 и 2.6 следует, что $M \in \mathfrak{A}(p-1)$. Так как $G/N \in \mathfrak{U}$ и

$$M \cong G / F_p(G) \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$$

заключаем, что $G \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие. □

***Следствие* 3.3.1.** *Пусть группа $G = AB$ – произведение сверхразрешимых $\mathbb{P}$-субнормальных в G подгрупп A и B. Если A и B контранормальны в G, то G сверхразрешима.*

***Теорема* 3.4.** *Если группа $G = AB = CD$, где A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы, а C и D – X-абнормальные сверхразрешимые подгруппы группы G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда $G = H_1H_2 = H_3H_4$, где H_i – субнормальная сверхразрешимая для $i = 1, 2$ и X-абнормальная сверхразрешимая подгруппа для $i = 3, 4$ группы G. При этом сама группа G сверхразрешимой не является. По [12, лемма 2.1] G дисперсивна по Оре и $G/F(G)$ нильпотентна. Значит, G разрешима.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда для факторгруппы G/N все условия теоремы выполняются. Поэтому G/N сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Из теоремы 1.3 и выбора G заключаем, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $\Phi(G) = 1$, причем $N = C_G(N) = F(G)$. Кроме того $G = [N]R$, где R – некоторая максимальная подгруппа группы G. Заметим, что N – силовская p-подгруппа для наибольшего простого делителя p порядка группы G.

Если $H_3N = G = H_4N$, то H_i – максимальная подгруппа группы G для $i = 3, 4$. Все дополнения к N являются максимальными подгруппами в G и сопряжены в ней. Тогда $H_3 = H_4^g$ для некоторого $g \in G$ и $G = H_3H_4$, что невозможно по теореме Оре. Значит, найдется $i \in \{3, 4\}$, для которого $H_iN \neq G$. Допустим, что $H_3N \neq G$. Тогда в нильпотентной группе G/N подгруппа H_3N/N является собственной. Отсюда заключаем, что H_3N/N является субнормальной и X-абнормальной подгруппой в G/N одновременно. Из леммы 2.5 следует, что $H_3N/N = G/N$. Получили противоречие. При $H_4N \neq G$ аналогично приходим к противоречию. □

***Следствие* 3.4.1.** *Если группа $G = AB = CD$, где A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы, а C и D – контранормальные сверхразрешимые подгруппы группы G, то G сверхразрешима.*

Заключение

В работе найдены условия сверхразрешимости конечных групп, представимых произведением своих обобщенно абнормальных подгрупп.

Следующий пример показывает существенность условий доказанных теорем.

Пример. Пусть S – симметрическая группа степени 3. Согласно [2, B, 10.7] существует точный неприводимый модуль U над полем из 7 элементов. Нетрудно видеть, что $|U| = 7^2$. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]S$.

Ясно, что группа G не является сверхразрешимой. Подгруппы $H_1 = UG_2$, $H_2 = UG_3$ и $H_3 = S$ (G_p – силовская p-подгруппа группы G, $p \in \{2,3\}$) являются по теореме 1.2 сверхразрешимыми подгруппами группы G. Отметим, что H_i, $i = 1,2,3$, имеют попарно взаимно простые индексы в группе G. Нетрудно видеть, что H_1 и H_3 – абнормальные подгруппы группы G, а $H_2 \trianglelefteq G$. Следовательно, требование наличия трех X-абнормальных подгрупп в теореме 3.1 является существенным.

Отметим, что в теореме 3.2 условие метанильпотентности группы G нельзя отбросить. Это следует из приведенного во введении примера симметрической группы S_4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

3. *Baer*, *R.* Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

4. *Asaad*, *M.* On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53, № 4. – P. 318–326.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 11 (426). – С. 10–14.

6. *Alejandre*, *M.* On some permutable products of supersoluble groups / M. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M. Pedraza-Aguilera // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.

7. *Guo*, *W.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.

8. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

9. *Васильев*, *А.Ф.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

10. *Мурашко*, *В.И.* О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2012. – № 70 (4). – С. 24–27.

11. *Васильев*, *А.Ф.* О пермутируемых подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, В.А. Васильев, Т.И. Васильева // Сиб. мат. журн. – 2014. – Т. 55, № 2. – С. 285–295.

12. *Монахов*, *В.С.* Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – С. 40–46.

13. *Монахов*, *В.С.* О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Сиб. мат. журн. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.

14. *Васильев*, *А.Ф.* Об абнормально факторизуемых конечных разрешимых группах / А.Ф. Васильев // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 9. – С. 1163–1171.

15. *Vasil'ev*, *A.F.* On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups / A.F. Vasil'ev // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – Vol. 85, № 1. – P. 305–311.

16. *Between Nilpotent and Solvable* / H.G. Bray [at al.]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.

17. *Rose*, *J.S.* Nilpotent Subgroups of Finite Soluble Groups / J.S. Rose // Math. Z. – 1968. – Vol. 106. – P. 97–112.

18. *Mann*, *A.* On subgroups of finite soluble groups. III / A. Mann // Israel J. Math. – 1973. – Т. 16, № 4. – P. 446–451.

19. *Васильев*, *А.Ф.* Нормализаторные подгрупповые функторы конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2006. – № 1. – С. 92–96.

20. *Васильева*, *Т.И.* О построении π-классов Шунка конечных π-разрешимых групп / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 38–41.

21. *Wielandt*, *H.* Über Normalstruktur von mehrfach factorisierbaren Gruppen / H. Wielandt // Austral. Math. Soc. – 1960. – Vol. 1. – P. 143–146.

22. *Doerk*, *K.* Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

23. *Frisen*, D.R. Products of normal supersolvable subgroups / D.R. Frisen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 46–48.

Поступила в редакцию 11.05.2020.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ ОДНОЙ ОПЕРАЦИИ НА ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева[1], **А.Г. Коранчук**[2]

[1]*Белорусский государственный университет транспорта*, *Гомель*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

ON ONE OPERATION ON THE FORMATIONS OF FINITE GROUPS

T.I. Vasilyeva[1], **A.G. Koranchuk**[2]

[1]*Belarusian State University of Transport*, *Gomel*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Пусть π – множество простых чисел. В статье вводится операция w_π^* на формациях конечных групп. Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$ есть класс всех групп G таких, что $\pi(G)\subseteq\pi(\mathfrak{F})$ и каждая силовская q-подгруппа из G сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G для $q\in\pi\cap\pi(G)$. Получены свойства w_π^*, в частности, $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}=\mathrm{w}_\pi^*(\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F})$ для наследственной формации $\mathfrak{F}$. Найдены наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$, для которых $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$ совпадает с $\mathfrak{F}$.

Ключевые слова: *конечная группа*, *силовская подгруппа*, *нормализатор силовской подгруппы*, *наследственная формация*, $\mathfrak{F}$ *-субнормальная подгруппа*, *сильно* K-$\mathfrak{F}$ *-субнормальная подгруппа*.

Let π be a set of primes. In this article, the operation w_π^* on the formations of finite groups is introduced. If $\mathfrak{F}$ is a non-empty formation, then $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$ is the class of all groups G such that $\pi(G)\subseteq\pi(\mathfrak{F})$ and every Sylow q-subgroup of G is strongly K-$\mathfrak{F}$-subnormal in G for $q\in\pi\cap\pi(G)$. The properties of w_π^* are obtained, in particular, $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}=\mathrm{w}_\pi^*(\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F})$ for hereditary formations $\mathfrak{F}$. Hereditary saturated formations $\mathfrak{F}$ for which $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$ coincides with $\mathfrak{F}$ have been found.

Keywords: *finite group*, *Sylow subgroup*, *normalizer of Sylow subgroup*, *hereditary formation*, $\mathfrak{F}$ *-subnormal subgroup*, *strongly* K-$\mathfrak{F}$ *-subnormal subgroup*.

Introduction

We consider only finite groups. Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty formation. Let H be a subgroup of a group G, and assume that

$$H=H_0\le H_1\le\cdots\le H_{n-1}\le H_n=G \qquad (0.1)$$

is a chain of subgroups of G. Then H is called:

$\mathfrak{F}$-subnormal in G [1], [2], if either $H=G$, or there exists a maximal chain (0.1) such that $H_i^{\mathfrak{F}}\le H_{i-1}$ for $i=1,\dots,n$;

K-$\mathfrak{F}$-subnormal in G [3], [4], if there is a chain of subgroups (0.1) such either $H_{i-1}\trianglelefteq H_i$, or $H_i^{\mathfrak{F}}\le H_{i-1}$ for $i=1,...,n$;

strongly K-$\mathfrak{F}$-subnormal in G [5], if $N_G(H)$ is a $\mathfrak{F}$-subnormal subgroup in G.

Denote by $sub_{\mathfrak{F}}(G)$ the set of all $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups of a group G, by $sub_{\mathrm{K}-\mathfrak{F}}(G)$ the set of all K-$\mathfrak{F}$-subnormal subgroups of G, by $sub_{s\mathrm{K}-\mathfrak{F}}(G)$ the set of all strongly K-$\mathfrak{F}$-subnormal subgroups of G.

It is clear that $sub_{s\mathrm{K}-\mathfrak{F}}(G)\subseteq sub_{\mathrm{K}-\mathfrak{F}}(G)$. The example from [5] shows that the converse is not true.

***Definition* 0.1.** For a non-empty formation $\mathfrak{F}$ and a set of primes π we define the following class of groups: $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}=(G\mid\pi(G)\subseteq\pi(\mathfrak{F})$ and $\{\mathrm{Syl}_q(G)\}\subseteq sub_{s\mathrm{K}-\mathfrak{F}}(G)$ for every $q\in\pi\cap\pi(G))$.

When $\pi=\mathbb{P}$ is the set of all primes, we denote $\mathrm{w}_{\mathbb{P}}^*\mathfrak{F}=\mathrm{w}^*\mathfrak{F}$.

The purpose of this article is to investigate the properties of $\mathrm{w}_\pi^*\mathfrak{F}$, in particular, their relation to the properties of $\mathfrak{F}$.

1 Preliminaries

We use standard notation and definitions. The appropriate information on groups theory and formations theory can be found in monographs [4] and [6]. We recall some concepts significant in the paper.

By $\mathbb{P}$ we denote the set of all primes. If $\pi\subseteq\mathbb{P}$, then $\pi'=\mathbb{P}\backslash\pi$. Let G be a group and p be a prime. Given a subgroup M of G we write $M\le G$; if $M\ne G$, then $M<G$ and if M is a maximal in G, then $M<\cdot G$. By symbol $|G|$ we denote the order of G; $\pi(G)$ is the set of all prime

© *Васильева Т.И.*, *Коранчук А.Г.*, 2020

divisors of $|G|$; $\mathrm{Syl}_p(G)$ is the set of all Sylow p-subgroups of G; $\mathrm{Syl}(G)$ is the set of all Sylow subgroups of G; $S(G)$ is the set of all subgroups of G; Z_p is the cyclic group of order p; 1 is the identity subgroup (group).

A maximal chain of subgroups of a group G is the chain (0.1) such that $H_{i-1} <\cdot H_i$ for $i = 1,\ldots,n$.

In the next lemma, the some familiar properties of Sylow subgroups are collected.

***Lemma* 1.1.** *Let G be a group, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, and N, $K \trianglelefteq G$. Then*

(*a*) $P \cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$ *and* $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$; *moreover,* $N_G(PN/N) = N_G(P)N/N$,

(*b*) $H/N = PN/N$ *for some* $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ *whenever* $H/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$,

(*c*) $P \cap NK = (P \cap N)(P \cap K)$ *and*

$$PN \cap PK = P(N \cap K),$$

(*d*) $G = \langle P_1,\ldots,P_r\rangle$ *for* $\pi(G) = \{p_1,\ldots,p_r\}$ *and* $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 1,\ldots,r$.

***Lemma* 1.2** [6, lemma A.1.2]. *Let U, V and W be subgroups of a group G. Then*

$$U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W)$$

if and only if $UV \cap UW = U(V \cap W)$.

A class of groups $\mathfrak{F}$ is called a formation, if

1) $\mathfrak{F}$ is a homomorph, i. e., from $G \in \mathfrak{F}$ and $N \trianglelefteq G$ it follows that $G/N \in \mathfrak{F}$ and

2) from $N_i \trianglelefteq G$ and $G/N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1,2)$ it follows that $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

In the sequel, $\mathfrak{F}$ will denote a non-empty formation. By $\pi(\mathfrak{F})$ we denote the set of all prime divisors of orders of groups belonging to $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}_\pi$ is the class of all π-groups belonging to $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{F}_\pi$ for $\pi = \{p\}$.

A formation $\mathfrak{F}$ is called hereditary if, together with each group, $\mathfrak{F}$ contains all its subgroups. A formation $\mathfrak{F}$ is called saturated, if from $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ it follows that $G \in \mathfrak{F}$. By symbol $G^{\mathfrak{F}}$ we denote the $\mathfrak{F}$-residual of G; i. e., the least normal subgroup of G for which $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

A minimal non-$\mathfrak{F}$-group is a group G such that $G \notin \mathfrak{F}$, and any proper subgroup of G belongs to $\mathfrak{F}$.

We will use the following notation:

$\mathfrak{E}$ is the class of all groups,

$\mathfrak{N}$ is the class of all nilpotent groups,

$\mathfrak{N}^2$ is the class of all metanilpotent groups,

$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^3$ is the class of all soluble groups whose nilpotent length is ≤ 3,

$\mathfrak{NA}$ is the class of all groups G with the nilpotent commutator subgroup G'.

We give some known properties of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups.

***Lemma* 1.3.** *Let $\mathfrak{F}$ be a formation, H and M are subgroups of a group G, and $N \trianglelefteq G$.*

(1) *If* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ *then* $HN/N \in sub_{\mathfrak{F}}(G/N)$.

(2) *If* $N \leq H$ *and* $H/N \in sub_{\mathfrak{F}}(G/N)$ *then* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$.

(3) *If* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ *then* $HN \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$.

(4) *If* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(M)$ *and* $M \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ *then* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$.

(5) *If all composition factors of G belong to $\mathfrak{F}$ and* $H \trianglelefteq\trianglelefteq G$ *then* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$.

(6) *Let p be a prime and let G be a p-group. If* $Z_p \in \mathfrak{F}$ *then* $S(G) \subseteq sub_{\mathfrak{F}}(G)$.

***Lemma* 1.4.** *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary formation, $H \leq G$ and $M \leq G$.*

(1) *If* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ *then* $H \cap M \in sub_{\mathfrak{F}}(M)$.

(2) *If* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ *and* $M \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ *then* $H \cap M \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$.

(3) *If* $G^{\mathfrak{F}} \leq H$ *then* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$.

(4) *If* $H \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ *then* $H^x \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ *for all* $x \in G$.

Recall that a subgroup H of a group G is called: pronormal in G if, for each $g \in G$, the subgroups H and H^g are conjugate in their join $\langle H, H^g\rangle$; abnormal in G if $g \in \langle H, H^g\rangle$ for all $g \in G$.

***Lemma* 1.5** [6, Lemma I.6.20]. *Let H be an abnormal subgroup of a group G. Then*

(*a*) *H is pronormal in G,*

(*b*) $H = N_G(H)$, *and*

(*c*) *if* $H \leq L \leq G$, *then H is abnormal in L and L is abnormal in G.*

***Lemma* 1.6** [6, Lemma I.6.21]. *Let H be a subgroup of a group G.*

(*a*) *If H is pronormal in G, then* $N_G(H)$ *is abnormal in G;*

(*b*) *H is abnormal in G if and only if H is pronormal in G and* $H = N_G(H)$.

2 Main Results

The class of groups $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ is defined as follows:

$$\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$$

and

$$\{\mathrm{Syl}_q(G)\} \subseteq sub_{s\mathrm{K}-\mathfrak{F}}(G)$$

for every $q \in \pi \cap \pi(G))$, i. e.

$$\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$$

and $\{N_G(Q)\} \subseteq sub_{\mathfrak{F}}(G)$ for every $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ and $q \in \pi \cap \pi(G)$).

***Example* 2.1.** Let $M = S_4$ be a symmetric group of degree 4. From [6, theorem B. 10.9] it follows that there exists an irreducible and faithful M-module U over the field F_3 of 3 elements. Let $G = [U]M$ be a semidirect product U and M, and note that the nilpotent length of G is 4 and $\pi(G) = \{2,3\}$. Since M is a minimal non-$\mathfrak{N}^2$-subgroup, we deduced that G is minimal non-$\mathfrak{N}^3$-group. It is easy to see that $\{N_G(P)\} \subseteq sub_{\mathfrak{F}}(G)$ for all $P \in \mathrm{Syl}(G)$. This means that G belongs to $\mathrm{w}^*(\mathfrak{N}^3)$.

This example shows that $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}$ in the general case.

***Proposition* 2.2.** *Let G be a group, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. If $L \trianglelefteq G$ and $K \trianglelefteq G$, then*

$$N_G(P) \cap LK = (N_G(P) \cap L)(N_G(P) \cap K)$$

and

$$N_G(P)L \cap N_G(P)K = N_G(P)(L \cap K).$$

Proof. We proceed by induction on $|G|$. Let L and K be normal subgroups of G and $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. If $L \cap K \neq 1$, then there exists a minimal normal subgroup N of G, contained in $L \cap K$. By induction

$$N_{G/N}(PN/N) \cap L/N \cdot K/N =$$
$$= (N_{G/N}(PN/N) \cap L/N)(N_{G/N}(PN/N) \cap K/N).$$

By Lemma 1.1 (1)

$$N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N.$$

By the Dedekind identity, we have

$$N_G(P)N/N \cap LK/N = (N_G(P) \cap LK)N/N$$

and

$$N_G(P)N/N \cap L/N = (N_G(P) \cap L)N/N,$$
$$N_G(P)N/N \cap K/N = (N_G(P) \cap K)N/N.$$

Then

$$N_G(P) \cap LK = N_G(P) \cap (N_G(P)N \cap LK) =$$
$$= N_G(P) \cap (N_G(P) \cap L)N \cdot (N_G(P) \cap K)N =$$
$$= (N_G(P) \cap L)(N_G(P) \cap K)(N_G(P) \cap N) =$$
$$= (N_G(P) \cap L)(N_G(P) \cap K).$$

Let $L \cap K = 1$. Let $T = N_G(P)L \cap N_G(P)K$. Since $PL \trianglelefteq N_G(P)L$ and $PK \trianglelefteq N_G(P)K$ we have $PL \cap PK \trianglelefteq T$. From $L \cap K = 1$ and lemma 1.1 (3) it follows that $PL \cap PK = P(L \cap K) = P$. Therefore, $P \trianglelefteq T$ and $T = N_G(P)$. Then

$$N_G(P)(L \cap K) = N_G(P) = N_G(P)L \cap N_G(P)K.$$

By lemma 1.2

$$N_G(P) \cap LK = (N_G(P) \cap L)(N_G(P) \cap K). \quad \square$$

***Proposition* 2.3.** *Let $\mathfrak{F}$ be a formation. Then*

(1) $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ *for* $\pi \subseteq \pi_1 \subseteq \mathbb{P}$,

(2) $\mathfrak{N}_{\pi \cap \pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F} = \mathrm{w}^*_{\pi \cap \pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$,

(3) $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ *is a homomorph*,

(4) $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ *for every formation* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Proof. (1): Let $G \in \mathrm{w}^*_{\pi_1}\mathfrak{F}$, and assume that Q is any Sylow q-subgroup of G with $q \in \pi \cap \pi(G)$. Since $q \in \pi_1 \cap \pi(G)$, we have $N_G(Q) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. Hence $\mathrm{w}^*_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$. From $\pi_1 \subseteq \mathbb{P}$ we conclude that $\mathrm{w}^*\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*_{\pi_1}\mathfrak{F}$.

(2): Let $G \in \mathfrak{N}_{\pi \cap \pi(\mathfrak{F})}$. Then

$$\pi(G) \subseteq (\pi \cap \pi(\mathfrak{F})) \subseteq \pi(\mathfrak{F}).$$

Since $N_G(P) = G$ for every $P \in \mathrm{Syl}(G)$, it follows that $G \in \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{N}_{\pi \cap \pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$.

From (1) it follows that $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^*_{\pi \cap \pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$. Let $G \in \mathrm{w}^*_{\pi \cap \pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$. Since $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, we have

$$\pi \cap \pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(G) = \pi \cap \pi(G).$$

Consequently, if $q \in \pi \cap \pi(G)$, then

$$\{N_G(P)\} \subseteq sub_{\mathfrak{F}}(G)$$

for all $P \in \mathrm{Syl}_q(G)$. So $G \in \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ and

$$\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F} = \mathrm{w}^*_{\pi \cap \pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}.$$

(3): To prove that $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ is a homomorph, let $G \in \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$ and $p \in \pi \cap \pi(G/N)$. Consider $H/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$. By lemma 1.1 (2) $H/N = PN/N$ for some Sylow p-subgroup P of G. From $G \in \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ it follows that $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. Then by lemma 1.1 (1) and lemma 1.3 (1)

$$N_{G/N}(H/N) = N_G(P)N/N \in sub_{\mathfrak{F}}(G/N).$$

From here and $\pi(G/N) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ we have that $G/N \in \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$. So $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$ is a homomorph.

(4): Let $G \in \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}_1$. Then $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_1) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. From $q \in \pi \cap \pi(G)$ it follows that every $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ is strongly K-$\mathfrak{F}_1$-subnormal in G. Suppose that $N_G(Q) \neq G$. Then a maximal chain of subgroups $N_G(Q) = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ exists and $H_i^{\mathfrak{F}_1} \leq H_{i-1}$ for $i = 1,\ldots,n$. From $H_i/H_i^{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$ we have $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_i^{\mathfrak{F}_1} \leq H_{i-1}$. Hence $N_G(Q) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. For $N_G(Q) = G$ it is obviously that $N_G(Q) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. So $\mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$. $\square$

***Lemma* 2.4.** *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary formation and let $\mathfrak{X} = \mathrm{w}^*_\pi\mathfrak{F}$. If G is a group, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ for $p \in \pi \cap \pi(G)$ and $G^{\mathfrak{X}} \leq N_G(P)$, then*

$$N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(G).$$

Proof. Since P is pronormal in G it follows by Lemma 1.6 $N_G(P)$ is abnormal in G. Therefore

we have $G^{\mathfrak{X}} \neq N_G(P)$. From $G^{\mathfrak{X}} \leq N_G(P)$ and $G/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ it follows, that

$$N_G(P)/G^{\mathfrak{X}} = N_{G/G^{\mathfrak{X}}}(PG^{\mathfrak{X}}/G^{\mathfrak{X}}) \in sub_{\mathfrak{F}}(G/G^{\mathfrak{X}}).$$

By Lemma 1.3 (2) $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. □

***Lemma* 2.5.** *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary formation, and let $\mathfrak{X} = \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$. Let G be a group, and assume that $M \in sub_{\mathfrak{X}}(G)$, $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{X}}(M)$ for some $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ and $p \in \pi \cap \pi(G)$. If $N_G(P) < \cdot M < \cdot G$, then $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Proof. Since $P \in \mathrm{Syl}_p(M)$, $p \in \pi \cap \pi(M)$ and $M^{\mathfrak{X}} \leq N_M(P) = N_G(P)$ we have by Lemma 2.4 $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(M)$. From $M \in sub_{\mathfrak{X}}(G)$ and $M < \cdot G$ it follows $G^{\mathfrak{X}} \leq M$.

If $G^{\mathfrak{X}} \leq N_G(P)$, then by Lemma 2.4

$$N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(G).$$

Suppose that $G^{\mathfrak{X}} \not\leq N_G(P)$. The subgroup $N_G(P)$ is maximal in M. Therefore $M = N_G(P)G^{\mathfrak{X}}$. From $G/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ we have

$$M/G^{\mathfrak{X}} = N_G(P)G^{\mathfrak{X}}/G^{\mathfrak{X}} =$$
$$= N_{G/G^{\mathfrak{X}}}(PG^{\mathfrak{X}}/G^{\mathfrak{X}}) \in sub_{\mathfrak{F}}(G/G^{\mathfrak{X}}).$$

By Lemma 1.3 (2) $M \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. Since $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(M)$, we have $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. □

***Definition* 2.6.** *A class of groups $\mathfrak{F}$ is called S_H-closed, if from $G \in \mathfrak{F}$ it follows that every Hall subgroup belongs to $\mathfrak{F}$.*

***Theorem* 2.7.** If $\mathfrak{F}$ is a hereditary formation, then $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^{*}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F} = \mathrm{w}_{\pi}^{*}(\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F})$ and $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ is an S_H-closed formation.

Proof. If a group $G \in \mathfrak{F}$, then $G^{\mathfrak{F}} = 1 \leq N_G(P)$ for every $P \in \mathrm{Syl}(G)$. By Lemma 1.4 (3) it follows that $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ and $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}^{*}\mathfrak{F}$. From Proposition 2.3 (1) we have $\mathrm{w}^{*}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$.

We will show that $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ is a formation. By Proposition 2.3 (3) $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ is a homomorph.

Let us prove that $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ is closed under subdirect products. Suppose that is false, and let G be a counterexample with $|G|$ as small as possible. Then there exists a subgroup $N_i \trianglelefteq G$ such that $G/N_i \in \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$, $i = 1,2$, but $G/N_1 \cap N_2 \notin \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$. We note that from $\pi(G/N_i) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, $i = 1,2$, it follows that $\pi(G/N_1 \cap N_2) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. By the choice of G we can assume that $N_1 \cap N_2 = 1$. Let $p \in \pi \cap \pi(G)$ and $R \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Since RN_i/N_i is a Sylow p-subgroup of G/N_i and $G/N_i \in \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$, we have

$$N_{G/N_i}(RN_i/N_i) \in sub_{\mathfrak{F}}(G/N_i), \quad i = 1,2.$$

By Lemmas 1.1 (1) and 1.3 (2) $N_G(R)N_i \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$, $i = 1,2$. From Lemma 1.4 (2) it follows

$$N_G(R)N_1 \cap N_G(R)N_2 \in sub_{\mathfrak{F}}(G).$$

From Proposition 1.3 we conclude that

$$N_G(R)N_1 \cap N_G(R)N_2 =$$
$$= N_G(R)(N_1 \cap N_2) = N_G(R) \in sub_{\mathfrak{F}}(G).$$

We have the contradiction to the choice of G. So $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ is closed under subdirect products.

To prove S_H-closure of $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$, let $G \in \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$, and let H be a Hall subgroup of G. Then $\pi(H) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Let $q \in \pi \cap \pi(H)$, and let S be a Sylow q-subgroup of H. Since $S \in \mathrm{Syl}_q(G)$, it follows that $N_G(S) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. By Lemma 1.4 (1)

$$N_H(S) = N_G(S) \cap H \in sub_{\mathfrak{F}}(H).$$

Therefore $H \in \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ and $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ is S_H-closed.

Now we will show that $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F} = \mathrm{w}_{\pi}^{*}(\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F})$. Denote $\mathfrak{X} = \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$. Let $G \in \mathfrak{X}$. Then $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. By what was proved above, we have that $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Therefore $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{X})$. Let $q \in \pi \cap \pi(G)$ and $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. From $G \in \mathfrak{X}$ it follows that $N_G(Q) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. Assume that $N_G(Q) \neq G$. Then there is a maximal chain of subgroups

$$N_G(Q) = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$$

such that $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ for $i = 1,\ldots,n$. We have proved above that $\mathfrak{X}$ is a formation. Therefore from $H_i/H_i^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ it follows that $H_i^{\mathfrak{X}} \leq H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$. This means that $N_G(Q) \in sub_{\mathfrak{X}}(G)$. If $N_G(Q) = G$, then $N_G(Q) \in sub_{\mathfrak{X}}(G)$. So $G \in \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{X}$ is proved.

Suppose that $\mathfrak{X} \neq \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{X}$. Let G be a group of minimal order in $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}$. Then $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{X}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Since $G \notin \mathfrak{X}$, there exists $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ such that $p \in \pi \cap \pi(G)$ and $N_G(P)$ is not $\mathfrak{F}$-subnormal in G. We note that $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{X}}(G)$. Then $N_G(P) \neq G$ and there exists a maximal chain of subgroups $N_G(P) = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} < H_n = G$ such that $H_i^{\mathfrak{X}} \leq H_{i-1}$ for $i = 1,\ldots,n$. Since $N_G(P) = N_{H_i}(P)$, $N_{H_i}(P)H_i^{\mathfrak{X}} \leq H_{i-1}$ and $H_i/H_i^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, we have

$$N_{H_i}(P)H_i^{\mathfrak{X}}/H_i^{\mathfrak{X}} =$$
$$= N_{H_i/H_i^{\mathfrak{X}}}(PH_i^{\mathfrak{X}}/H_i^{\mathfrak{X}}) \in sub_{\mathfrak{F}}(H_i/H_i^{\mathfrak{X}}).$$

By Lemma 1.3 (2) $N_{H_i}(P)H_i^{\mathfrak{X}} \in sub_{\mathfrak{F}}(H_i)$ for $i = 1,\ldots,n$. Therefore $H_n^{\mathfrak{X}} = G^{\mathfrak{X}} \not\subseteq N_G(P)$. From the

maximality of $N_G(P)$ in H_1 it follows that $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(H_1)$. So $n \neq 1$. Suppose that $n = 2$. Then by Lemma 2.5 $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(H_2) = sub_{\mathfrak{F}}(G)$. This is the contradiction with the choice of G. So, we can assume that $n \geq 3$ and $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(H_{n-1})$. Since $N_G(P)H_n^{\mathfrak{X}} \leq H_{n-1}$, by Lemma 1.4 (1) we have $N_G(P) = N_G(P) \cap N_G(P)H_n^{\mathfrak{X}} \in sub_{\mathfrak{F}}(N_G(P)H_n^{\mathfrak{X}})$.

From $N_G(P)H_n^{\mathfrak{X}} \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$ it follows that $N_G(P) \in sub_{\mathfrak{F}}(G)$. This contradicts the choice of G. So $\mathfrak{X} = \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{X}$. □

By $l_p(G)$ we denote the p-length of the p-soluble group G; an arithmetic length of the soluble group G is $al(G) = \mathrm{Max} l_p(G)$, where p runs through all primes $p \in \pi(G)$; $\mathfrak{L}_a(n)$ is the class of all soluble groups G with $al(G) < n$; $\mathfrak{L}_a(1)$ is the class of all soluble groups G with $al(G) \leq 1$.

From $\mathfrak{L}_a(1) = \cap \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ for all $p \in \mathbb{P}$ it follows that $\mathfrak{L}_a(1)$ is a hereditary saturated Fitting formation.

***Lemma* 2.8** [8, Lemma 4.1]. *Let G be a soluble group, and let $\Phi(G) = 1$. Then G is a minimal non-$\mathfrak{L}_a(1)$-group if and only if the following statements hold*:

(1) $|G| = p^{\alpha}q^{\beta}$, $l_p(G) = 1$, $l_q(G) = 2$, $l(G) = 3$,

(2) *G has precisely three conjugate classes of maximal subgroups, whose representatives have the following structure*: $G_p \leftthreetimes G_q^*$ *is the Schmidt group*, $F(G) \leftthreetimes G_p$ *and* $G_q \leftthreetimes \Phi(G_p)$, *where*

$$G_q = F(G) \leftthreetimes G_q^*.$$

***Lemma* 2.9.** *Let G be a biprimary group and let $G \in \mathfrak{L}_a(1)$. Then G is metanilpotent.*

***Lemma* 2.10.** *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary formation, and let G be a solvable group. If $G \in \mathfrak{L}_a(1)$, $G \neq N_G(P)$ and $N_G(P) \in \mathfrak{F}$ for all $P \in \mathrm{Syl}(G)$, then $G \in \mathfrak{F}$.*

***Theorem* 2.11.** *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary saturated formation, and let $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}_a(1)$. A group $G \in \mathfrak{F}$ if and only if $G \in \mathrm{w}^{*}\mathfrak{F}$.*

A subgroup H of a group G is called $\mathbb{P}$-subnormal in G [9], [10] if either $H = G$ or there exists a chain (0.1) such that $|H_i : H_{i-1}|$ is a prime for any $i = 1, \ldots, n$.

***Corollary* 2.12** [7]. *If the normalizers of all Sylow subgroup of a group G are $\mathbb{P}$-subnormal subgroups in G, then G is supersolvable.*

***Corollary* 2.13** [5]. *A group $G \in \mathfrak{N}^2$ if and only if $G \in \mathrm{w}^{*}(\mathfrak{N}^2)$.*

***Corollary* 2.14** [5]. *A group $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ if and only if $G \in \mathrm{w}^{*}(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$.*

***Corollary* 2.15.** *A group $G \in \mathfrak{L}_a(1)$ if and only if $G \in \mathrm{w}^{*}(\mathfrak{L}_a(1))$.*

Conclusions

The properties of the operation w_{π}^{*} on the formations of groups are found. In particular, if $\mathfrak{F}$ is a hereditary formations, then $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F} = \mathrm{w}_{\pi}^{*}(\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F})$ is the formation, and every Hall subgroup of a group G belongs to $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ whenever $G \in \mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$. Hereditary saturated formations $\mathfrak{F}$ for which $\mathrm{w}_{\pi}^{*}\mathfrak{F}$ coincides with $\mathfrak{F}$ have been found.

Example. We show that

$$\mathfrak{A} \subset \mathrm{w}^{*}\mathfrak{A} = \mathfrak{N} = \mathrm{w}^{*}\mathfrak{N}.$$

Since the class $\mathfrak{A}$ of all abelian groups is a hereditary formation, then by Theorem 2.8 $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{w}^{*}\mathfrak{A}$.

Let $G \in \mathrm{w}^{*}\mathfrak{A}$ and $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. If $N_G(P) \neq G$, then there is a maximal chain of subgroups

$$N_G(P) = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$$

such that $H_{i'} \leq H_{i-1}$ for $i = 1, \ldots, n$. Then $H_{n-1}/G' \trianglelefteq G/G'$. But $N_G(P)$ is abnormal in G. We have obtained a contradiction with $N_G(P) \leq H_{n-1} \trianglelefteq G$. Therefore $N_G(P) = G$ and $G \in \mathfrak{N}$. Hence $\mathrm{w}^{*}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}$. Since be Proposition 2.3 $\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{w}^{*}\mathfrak{A}$, it follows $\mathrm{w}^{*}\mathfrak{A} = \mathfrak{N}$. So $\mathfrak{A} \subset \mathrm{w}^{*}\mathfrak{A}$.

By Theorem 2.7 $\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{w}^{*}\mathfrak{N}$. Suppose that $G \in \mathrm{w}^{*}\mathfrak{N}$. If $N_G(Q) \neq G$ for some $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, then G has a maximal subgroup M such that $N_G(Q) \leq M$ and $G^{\mathfrak{N}} \leq M$. Since $M/G^{\mathfrak{N}}$ is a maximal subgroup in $G/G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$, it follows that $M/G^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq G/G^{\mathfrak{N}}$. Therefore $N_G(Q) \leq M \trianglelefteq G$. Since $N_G(Q)$ is abnormal in G, this is impossible. So $N_G(Q) = G$ for all $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ and $G \in \mathfrak{N}$. Hence $\mathrm{w}^{*}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$.

REFERENCES

1. *Hawkes*, T. On formation subgroups of a finite soluble group / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 44. – P. 243–250.

2. *Shemetkov*, *L.A*. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, 1987. – 272 p (In Russian).

3. *Kegel*, *O.H*. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.

4. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer-Verlag, 2006. – 385 p.

5. Vasil'ev, A.F. Finite groups with strongly K-$\mathfrak{F}$-subnormal Sylow subgroups / A.F. Vasil'ev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 4 (37). – P. 66–71 (In Russian).

6. *Doerk*, *K*. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. *Kniahina*, *V.N*. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Internat. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

8. *Semenchuk*, *V.N*. Minimal non $\mathfrak{F}$-subgroups / V.N. Semenchuk // Algebra and Logik. – 1979. – Vol. 18, № 3. – P. 348–382.

9. *Vasil'ev*, *A.F*. On finite groups similar to supersoluble groups / A.F. Vasil'ev, T.I. Vasil'eva, V.N. Tyutyanov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2010. – № 2 (3). – P. 21–27 (In Russian).

10. *Vasil'ev*, *A.F*. On the finite groups of supersoluble type / A.F. Vasil'ev, T.I. Vasil'eva, V.N. Tyutyanov // Siberian Math. J. – 2010. – Vol. 51, № 6. – 2010. – P. 1004–1012.

Поступила в редакцию 13.04.2020.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

О КОСЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия

ON SKEW ELEMENTS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies

В статье изучаются косые элементы в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, порядка, делящего $l-1$, и n-арной операции η. В частности, доказана теорема, позволяющая для каждого элемента l-арной группы специального вида указать его косой элемент, выразив его через обратные последовательности элементов n-арной группы на декартовой степени которой построена указанная l-арная группа.

Ключевые слова*: полиадическая операция, n-арная группа, косой элемент, обратная последовательность.*

The article goes on with a study of skew elements in polyadic groups of special form, that is in polyadic groups with l-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$, that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power of A^k n-ary group $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ which order divides $l-1$ and n-ary operation η. In particular a theorem has been proved that allows us to determine a skew element for each element of l-ary group of a special form, the skew element being formulated by means of a inverse sequences of n-ary group on Cartesian power of which the given l-ary group is constructed.

Keywords: *polyadic operation, n-ary group, skew element, inverse sequence.*

Введение

Полиадическая операция специального вида $\eta_{s,\sigma,k}$ арности l, где

$$s \geq 1,\ n \geq 2,\ l = s(n-1)+1,\ k \geq 2,\ \sigma \in \mathbf{S}_k,$$

определяется на k-ой декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ следующим образом [1]:

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) =$$
$$= \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) = (y_1, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) =$$
$$= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}),\ j = 1, \ldots, k.$$

На k-ой декартовой степени A^k произвольного n-арного группоида $< A, \eta >$ l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ была определена в [2].

Следующая теорема, доказанная в [1], утверждает, что в случае тождественности подстановки σ^{l-1} l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является n-арной группой. Её называют полиадической группой специального вида.

***Теорема* 0.1** [1]. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– l-арная группа*.

Частными случаями полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, изучению которой посвящена книга [3]. и две полиадические операции Э. Поста [4], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, а вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Если η – бинарная операция ($n = 2$), то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s+1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1,\sigma,k}$.

В данной статье изучаются косые элементы в полиадической группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, в определении которой σ – подстановка порядка делящего $l-1$. Приведены следствия из этой теоремы.

1 Предварительные сведения

Определения и основные свойства n-арной группы, нейтральной и обратной последовательностей можно найти в книгах [5]–[7]. Отметим только, что одноэлементную обратную последовательность b полиадической группы для последовательности α элементов этой же полиадической группы естественно называть обратным элементом для последовательности α.

Согласно В. Дёрнте [8], элемент b n-арной группы $< A, \eta >$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\ b\ \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a.$$

Если b косой элемент для элемента a, то употребляют обозначение $b = \overline{a}$. Таким образом, по определению

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\ \overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

© *Гальмак А.М.*, 2020

***Замечание* 1.1.** Можно показать, что:

1) *для того, чтобы элемент b n-арной группы $< A, \eta >$ являлся косым для $a \in A$, достаточно выполнения равенства из определения косого элемента только для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n$;*

2) *для любого элемента a n-арной группы $< A, \eta >$ его косой элемент $\overline{a}$ является обратным для последовательности $\underbrace{a \ldots a}_{n-2}$, а последовательности $\overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-2}$ и $\underbrace{a \ldots a}_{n-2}\ \overline{a}$ являются нейтральными;*

3) *если $n \geq 3$, то для любого элемента a n-арной группы $< A, \eta >$ и любого $i = 0, 1, \ldots, n-3$ последовательность*

$$\underbrace{a \ldots a}_{i}\ \overline{a}\ \underbrace{a \ \ldots \ a}_{n-i-3} \tag{1.1}$$

является обратной для a. В частности, обратными для a являются последовательности $\overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-3}$ и $\underbrace{a \ldots a}_{n-3}\ \overline{a}$.

В дальнейшем изложении будет существенно использоваться теорема из [9], позволяющая находить косые элементы в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Ниже приведена эквивалентная формулировка этой теоремы.

***Теорема* 1.1**. *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ элемент $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, где b_j – обратный элемент в $< A, \eta >$ для последовательности*

$$a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{l-2}(j)}, j = 1, \ldots, k \tag{1.2}$$

является косым для $\mathbf{a}$, то есть $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$.

2 Основные результаты

Новую информацию о косых элементах в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ можно получить, если порядок подстановки σ делит $l - 1$. Начнём с примера.

***Пример* 2.1.** Положим в определении l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$: $< A, \eta >$ – тернарная группа,

$$k = n = 3,\ s = 2,\ \sigma = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = (13) \in \mathbf{S}_3.$$

Так как $(13)^5 = (13)$, то по теореме 0.1 $< A^3, \eta_{2,(13),3} >$ – 5-арная группа.

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 5-арной группы $< A^3, \eta_{2,(13),3} >$ верно равенство

$$\eta_{2,(13),3}((\eta(\overline{a_3 a_1 a_3}), \eta(\overline{a_2 a_2 a_3}), \eta(\overline{a_1 a_3 a_1}))\mathbf{aaaa}) = \mathbf{a}.$$

Следовательно, в 5-арной группе $< A^3, \eta_{2,(13),3} >$ косой элемент $\overline{\mathbf{a}}$ для элемента $\mathbf{a}$ выражается через косые элементы тернарной группы $< A, \eta >$ следующим образом:

$$\overline{(a_1, a_2, a_3)} = (\eta(\overline{a_3 a_1 a_3}), \eta(\overline{a_2 a_2 a_3}), \eta(\overline{a_1 a_3 a_1})).$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

***Лемма* 2.1.** [6, предложение 1.2.20]. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ – последовательности, составленные из элементов n-арной группы $< A, \eta >$, и пусть $\beta_1, \ldots, \beta_r$ – последовательности, обратные соответственно данным. Тогда $\beta_r \ldots \beta_1$ – обратная последовательность для последовательности $\alpha_1 \ldots \alpha_r$.*

***Теорема* 2.1.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $l = td + 1$ для некоторого натурального t,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – любые обратные последовательности в $< A, \eta >$ для элемента a_j и последовательности α_j соответственно. Тогда элемент $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1}\ \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{t-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}a_j^{-1} \ldots \alpha_j^{-1}a_j^{-1}}_{t-1}\ \alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, то есть

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\alpha_1^{-1}\ \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{t-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\alpha_k^{-1}\ \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{t-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}a_1^{-1} \ldots \alpha_1^{-1}a_1^{-1}}_{t-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}a_k^{-1} \ldots \alpha_k^{-1}a_k^{-1}}_{t-1}\ \alpha_k^{-1})).$$

Доказательство. Так как подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ порядка d удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$ тогда и только тогда, когда d делит $l - 1$, то равенство $\sigma^l = \sigma$ равносильно равенству $l = td + 1$ для некоторого натурального t. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.1.

Ясно, что последовательность (1.2) из теоремы 1.1 может быть представлена либо в виде

$$a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{l-2}(j)} =$$

$$= \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}a_j}_{t-1}\ a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{d-1}(j)},$$

либо в виде

$$a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{l-2}(j)} =$$

$$= a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{d-1}(j)}\ \underbrace{a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} \ldots a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}}_{t-1}.$$

Если в последних двух равенствах положить

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{d-1}(j)},$$

то их можно переписать короче:

$$a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1}\ \alpha_j,$$

$$a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \alpha_j \underbrace{a_j \alpha_j \dots a_j \alpha_j}_{t-1}.$$

Поэтому ввиду леммы 2.1, обратный элемент в n-арной группе $< A, \eta >$ для последовательности $a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}$ может быть записан либо в виде

$$\eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{t-1}),$$

либо в виде

$$\eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}a_j^{-1} \dots \alpha_j^{-1}a_j^{-1}}_{t-1}\ \alpha_j^{-1}).$$

Осталось применить теорему 1.1. □

***Замечание* 2.1.** Теперь мы можем найти косые элементы в 5-арной группе $< A^3, \eta_{2,(13),3} >$ из примера 2.1, воспользовавшись теоремой 2.1. Так как $l = 5$, порядок d подстановки $\sigma = (13)$ равен 2, то из условия $l = td + 1$ следует $t = 2$. Соответственно

$$\alpha_1 = a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma^{d-1}(1)} = a_{\sigma(1)} = a_3,$$

$$\alpha_2 = a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma^{d-1}(2)} = a_{\sigma(2)} = a_2,$$

$$\alpha_3 = a_{\sigma(3)} \dots a_{\sigma^{d-1}(3)} = a_{\sigma(3)} = a_1,$$

$$\alpha_1^{-1} = a_3^{-1} = \overline{a_3},\ \alpha_2^{-1} = a_2^{-1} = \overline{a_2},$$

$$\alpha_3^{-1} = a_1^{-1} = \overline{a_1}.$$

Тогда по теореме 2.1

$$b_1 = \eta(\overline{a_3}a_1\overline{a_3}),\ b_2 = \eta(\overline{a_2}a_2\overline{a_3}),\ b_3 = \eta(\overline{a_1}a_3\overline{a_1}).$$

Следовательно,

$$\overline{(a_1, a_2, a_3)} = (\eta(\overline{a_3}a_1\overline{a_3}), \eta(\overline{a_2}a_2\overline{a_3}), \eta(\overline{a_1}a_3\overline{a_1})).$$

Если в теореме 2.1 $n \geq 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в n-арной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять любую из последовательностей вида (1.1). Например, если положить

$$a_j^{-1} = \overline{a_j}\ \underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3},$$

то формулировка теоремы 2.1 принимает следующий вид.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа $(n \geq 3)$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $l = td + 1$ для некоторого натурального t,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

α_j^{-1} – любая обратная последовательность в $< A, \eta >$ для последовательности α_j. Тогда элемент $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\overline{a_j}\underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}\alpha_j^{-1} \dots \overline{a_j}\underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}\alpha_j^{-1}}_{t-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\overline{a_j}\underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3} \dots \alpha_j^{-1}\overline{a_j}\underbrace{a_j \dots a_j}_{n-3}}_{t-1}\ \alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, то есть

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}\overline{a_1}\underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3}\alpha_1^{-1} \dots \overline{a_1}\underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3}\alpha_1^{-1}}_{t-1}),$$

$$\dots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}\overline{a_k}\underbrace{a_k \dots a_k}_{n-3}\alpha_k^{-1} \dots \overline{a_k}\underbrace{a_k \dots a_k}_{n-3}\alpha_k^{-1}}_{t-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}\overline{a_1}\underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3} \dots \alpha_1^{-1}\overline{a_1}\underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3}}_{t-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\dots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}\overline{a_k}\underbrace{a_k \dots a_k}_{n-3} \dots \alpha_k^{-1}\overline{a_k}\underbrace{a_k \dots a_k}_{n-3}}_{t-1}\ \alpha_k^{-1})).$$

Случай подстановки порядка делящего $n - 1$. Если порядок d подстановки σ делит $n - 1$, то есть $n = rd + 1$ для некоторого натурального r, то d делит $l - 1$, так как из $l = s(n - 1) + 1$ следует $l = td + 1$, где $t = sr$. Поэтому теоремы 2.1 и 2.2 позволяют сформулировать следующие две теоремы.

***Теорема* 2.3.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $n = rd + 1$ для некоторого натурального r,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – любые обратные последовательности в $< A, \eta >$ для элемента a_j и последовательности α_j соответственно. Тогда элемент $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \dots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{sr-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}a_j^{-1} \dots \alpha_j^{-1}a_j^{-1}}_{sr-1}\ \alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, то есть

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \dots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{sr-1}),$$

$$\dots$$

$$\eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \dots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{sr-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}a_1^{-1} \dots \alpha_1^{-1}a_1^{-1}}_{sr-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\dots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}a_k^{-1} \dots \alpha_k^{-1}a_k^{-1}}_{sr-1}\ \alpha_k^{-1})).$$

***Теорема* 2.4.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа $(n \geq 3)$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $n = rd + 1$ для некоторого натурального r,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

α_j^{-1} *– любая обратная последовательность в* $< A, \eta >$ *для последовательности* α_j. *Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\,\overline{a_j}\,\underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}\,\alpha_j^{-1} \ldots \overline{a_j}\,\underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}\,\alpha_j^{-1}}_{sr-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\overline{a_j}\,\underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3} \ldots \alpha_j^{-1}\overline{a_j}\,\underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}\,\alpha_j^{-1}}_{sr-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}\,\overline{a_1}\,\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}\,\alpha_1^{-1} \ldots \overline{a_1}\,\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}\,\alpha_1^{-1}}_{sr-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}\,\overline{a_k}\,\underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}\,\alpha_k^{-1} \ldots \overline{a_k}\,\underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}\,\alpha_k^{-1}}_{sr-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}\overline{a_1}\,\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \ldots \alpha_1^{-1}\overline{a_1}\,\underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}\,\alpha_1^{-1}}_{sr-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}\overline{a_k}\,\underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \ldots \alpha_k^{-1}\overline{a_k}\,\underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}\,\alpha_k^{-1}}_{sr-1})).$$

Тернарный случай. Если в теореме 2.2 положить $n = 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в тернарной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять его косой элемент $\overline{a_j}$. В результате получим

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} *– любая обратная последовательность в* $< A, \eta >$ *для последовательности* α_j. *Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\,\overline{a_j}\alpha_j^{-1} \ldots \overline{a_j}\alpha_j^{-1}}_{t-1}) = \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\overline{a_j} \ldots \alpha_j^{-1}\overline{a_j}}_{t-1}\ \alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}\,\overline{a_1}\alpha_1^{-1} \ldots \overline{a_1}\alpha_1^{-1}}_{t-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}\,\overline{a_k}\alpha_k^{-1} \ldots \overline{a_k}\alpha_k^{-1}}_{t-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\alpha_1^{-1}\overline{a_1} \ldots \alpha_1^{-1}\overline{a_1}}_{t-1}\ \alpha_1^{-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\alpha_k^{-1}\overline{a_k} \ldots \alpha_k^{-1}\overline{a_k}}_{t-1}\ \alpha_k^{-1})).$$

Если в следствии 2.1 положить $d = 2$, то $t = s$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)},\ \alpha_j^{-1} = a_{\sigma(j)}^{-1} = \overline{a_{\sigma(j)}},\ , j = 1, \ldots, k$$

и получим

***Следствие* 2.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* 2, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$. *Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma(j)}}\ \underbrace{\overline{a_j}\,\overline{a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j}\,\overline{a_{\sigma(j)}}}_{s-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma(j)}}\,\overline{a_j} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}\,\overline{a_j}}_{s-1}\ \overline{a_{\sigma(j)}}),$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_{\sigma(1)}}\ \underbrace{\overline{a_1}\,\overline{a_{\sigma(1)}} \ldots \overline{a_1}\,\overline{a_{\sigma(1)}}}_{s-1}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\overline{a_{\sigma(k)}}\ \underbrace{\overline{a_k}\,\overline{a_{\sigma(k)}} \ldots \overline{a_k}\,\overline{a_{\sigma(k)}}}_{s-1})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma(1)}}\,\overline{a_1} \ldots \overline{a_{\sigma(1)}}\,\overline{a_1}}_{s-1}\ \overline{a_{\sigma(1)}}),$$

$$\ldots$$

$$\eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma(k)}}\,\overline{a_k} \ldots \overline{a_{\sigma(k)}}\,\overline{a_k}}_{s-1}\ \overline{a_{\sigma(k)}})).$$

Ясно, что пример 2.1 является прямым следствием следствия 2.2, если в нём положить $s = 2$, $k = 3$, $\sigma = (13) \in \mathbf{S}_3$.

Следующая лемма является следствием соответствующей леммы из [10].

***Лемма* 2.2.** [10, лемма 2.3]. *Если* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* d *– чётное,* $d \geq 4$, $a_1, \ldots, a_{d-1}$ *– произвольные элементы из* A, *то*

$$\overline{\eta(a_1 \ldots a_{d-1})} = \eta(\overline{a_{d-1}}\ \ldots\ \overline{a_1}).$$

***Замечание* 2.2.** Если в следствии 2.1 d – чётное, то последовательность α_j из следствия 2.1 имеет нечётную длину $d - 1$. Это позволяет в качестве обратной последовательности α_j^{-1} в тернарной группе $< A, \eta >$ для последовательности

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots\ a_{\sigma^{d-1}(j)},$$

где $d \geq 4$, взять косой элемент

$$\alpha_j^{-1} = \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})},$$

который, ввиду леммы 2.2, принимает вид

$$\alpha_j^{-1} = \eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}).$$

Если же $d = 2$, то $\alpha_j^{-1} = \overline{a_{\sigma(j)}}$.

Поэтому из следствия 2.1, учитывая замечание 2.2, можно извлечь

***Следствие* 2.3.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *чётного порядка* d, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$, $2s = td$ *для некоторого натурального* t. *Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ \dots \ \overline{a_{\sigma(j)}}$$
$$\underbrace{\overline{a_j a_{\sigma^{d-1}(j)}} \dots \overline{a_{\sigma(j)}} \dots \overline{a_j a_{\sigma^{d-1}(j)}} \dots \overline{a_{\sigma(j)}}}_{t-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \dots \overline{a_{\sigma(j)} a_j} \dots \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \dots \overline{a_{\sigma(j)} a_j}}_{t-1}$$
$$\overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ \dots \ \overline{a_{\sigma(j)}}),$$

является косым для **a**, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ \dots \ \overline{a_{\sigma(1)}}$$
$$\underbrace{\overline{a_1 a_{\sigma^{d-1}(1)}} \dots \overline{a_{\sigma(1)}} \dots \overline{a_1 a_{\sigma^{d-1}(1)}} \dots \overline{a_{\sigma(1)}}}_{t-1}),$$
$$\dots$$
$$\eta(\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ \dots \ \overline{a_{\sigma(k)}}$$
$$\underbrace{\overline{a_k a_{\sigma^{d-1}(k)}} \dots \overline{a_{\sigma(k)}} \dots \overline{a_k a_{\sigma^{d-1}(k)}} \dots \overline{a_{\sigma(k)}}}_{t-1})) =$$
$$= (\eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \dots \overline{a_{\sigma(1)} a_1} \dots \overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \dots \overline{a_{\sigma(1)} a_1}}_{t-1}$$
$$\overline{a_{\sigma^{d-1}(1)}} \ \dots \ \overline{a_{\sigma(1)}}),$$
$$\dots$$
$$\eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \dots \overline{a_{\sigma(k)} a_k} \dots \overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \dots \overline{a_{\sigma(k)} a_k}}_{t-1}$$
$$\overline{a_{\sigma^{d-1}(k)}} \ \dots \ \overline{a_{\sigma(k)}})).$$

Бинарный случай. Если в теореме 2.1 положить $n = 2$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в группе A для её элемента a_j можно взять его обратный элемент a_j^{-1}, а обратная последовательность α_j^{-1} в группе A для её элемента $a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}$ совпадает с произведением соответствующих обратных элементов:

$$\alpha_j^{-1} = a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1}, \ j = 1, \dots, k.$$

В этом случае формулировка теоремы 2.1 принимает следующий вид.

***Теорема* 2.5.** *Пусть A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(s+1)$-арной группы $< A^k, [\ ]_{s+1,\,\sigma,\,k} >$, $s = td$ для некоторого натурального t. Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)$, *где*

$$b_j = a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1}$$
$$\underbrace{a_j^{-1} a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1} \dots a_j^{-1} a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1}}_{t-1} =$$
$$= \underbrace{a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1} a_j^{-1} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1} a_j^{-1}}_{t-1}$$
$$a_{\sigma^{d-1}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1},$$

является косым для **a**, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \dots a_{\sigma(1)}^{-1}$$
$$\underbrace{a_1^{-1} a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \dots a_{\sigma(1)}^{-1} \dots a_1^{-1} a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \dots a_{\sigma(1)}^{-1}}_{t-1},$$
$$\dots$$
$$a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \dots a_{\sigma(k)}^{-1}$$
$$\underbrace{a_k^{-1} a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \dots a_{\sigma(k)}^{-1} \dots a_k^{-1} a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \dots a_{\sigma(k)}^{-1}}_{t-1}) =$$
$$= (\underbrace{a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \dots a_{\sigma(1)}^{-1} a_1^{-1} \dots a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \dots a_{\sigma(1)}^{-1} a_1^{-1}}_{t-1}$$
$$a_{\sigma^{d-1}(1)}^{-1} \dots a_{\sigma(1)}^{-1},$$
$$\dots$$
$$\underbrace{a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \dots a_{\sigma(k)}^{-1} a_k^{-1} \dots a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \dots a_{\sigma(k)}^{-1} a_k^{-1}}_{t-1}$$
$$a_{\sigma^{d-1}(k)}^{-1} \dots a_{\sigma(k)}^{-1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

2. *Гальмак*, *А.М.* О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков / Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–39.

3. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

4. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

5. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

6. *Гальмак*, *А.М. n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

7. *Гальмак*, *А.М. n*-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

8. *Dörnte*, *W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

9. *Гальмак*, *А.М.* Косые элементы в полиадических группах специального вида / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко, М.В. Селькин // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 6 (117). – С. 186–188.

10. *Гальмак*, *А.М.* Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

Поступила в редакцию 29.01.2020.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.52

О СОВПАДЕНИИ ОБОБЩЁННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ НА НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Г.Н. Казимиров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE COINCIDENCE OF GENERALIZED SMOOTHNESS MODULES ON SOME CLASS OF FUNCTIONS

G.N. Kazimirov

F. Scorina Gomel State University

Доказывается совпадение обобщённых модулей гладкости k-го порядка, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига, с разными и одинаковыми сдвигами.

***Ключевые слова**: оператор обобщённого сдвига, обобщённый модуль гладкости.*

The coincidence of generalized modules of smoothness of order k, determined with the help of the generalized shift operator, with different and identical shifts is proved.

***Keywords**: generalized shift operator, generalized modulus of smoothness.*

Введение

Хорошо известны прямые и обратные теоремы теории приближений для 2π-периодических функций, в которых установлены связи между наилучшими приближениями и модулями гладкости этих функций. Такие же теоремы получены и для непериодических функций, однако в них, вместо обычного модуля гладкости, фигурирует обобщённый модуль гладкости, определяемый при помощи некоторого оператора обобщённого сдвига. Некоторые из таких операторов были предложены М.К. Потаповым [1]. Им же были доказаны прямые и обратные теоремы для модулей гладкости (модулей непрерывности) порядка $k = 1$. Для случая $k > 1$ эти теоремы получены Г.Н. Казимировым [2], [3]. Но в этих теоремах рассматриваются обобщённые модули гладкости, в которых обобщённые сдвиги берутся с разными шагами для каждой следующей обобщённой разности. Хотелось бы получить такие же теоремы и для обобщённых модулей, в которых каждая следующая разность берётся с одним и тем же шагом. В данной статье сделан первый шаг в этом направлении.

1 Используемые определения и леммы

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1,1]$ и

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max\limits_{-1\le x\le 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f, что

$$f(x)(1-x)^\alpha (1-x)^\beta \in L_p$$

и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left\| f(x)(1-x)^\alpha (1-x)^\beta \right\|_p$.

Рассмотрим один из операторов обобщённого сдвига, предложенных в [1]. Положим

$$T_t(f,x) = \frac{1}{2}\Big[f(x\cos t + \sqrt{1-x^2}\sin t) + f(x\cos t - \sqrt{1-x^2}\sin t) \Big]. \quad (1.1)$$

Введём также обозначения:

$$\Delta_t^1(f,x) = T_t(f,x) - f(x),$$

$$\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x) = \Delta^1_{t_k}\left(\Delta^{k-1}_{t_1,\dots,t_{k-1}}(f,x),x\right), \quad k = 2,3,\dots,$$

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t_i|\le\delta, i=1,\dots,k} \left\|\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x)\right\|_{p,\alpha,\beta},$$

$$\Delta_t^k(f,x) = \Delta_t^1(\Delta_t^{k-1}(f,x),x), \ k = 2,3,\dots,$$

$$\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t|\le\delta} \left\|\Delta_t^k(f,x)\right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

***Лемма* 1.1.** *Пусть числа* p,α,β *такие, что*

$$1 \le p \le \infty, \quad \alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$$

при $1 \le p < \infty$ *и* $\alpha = \beta = 0$ *при* $p = \infty$. *Тогда, если* $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, *то* $T_t(f,x) \in L_{p,\alpha,\beta}$ *и*

$$\|T_t(f,x)\|_{p,\alpha,\beta} \le C\|f\|_{p,\alpha,\beta},$$

где постоянная C *не зависит от* f *и* t.

Лемма 1.1 доказана в [1, с. 235–236].

2 Основной результат

***Теорема* 2.1.** *Пусть даны числа* p,α,β,k *такие, что* $1 \le p \le \infty$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2p}$ *при* $1 \le p < \infty$

© *Казимиров Г.Н.*, 2020

и $\alpha=\beta=0$ *при* $p=\infty$, $k=1,2,3,\ldots$. *Пусть также* $f\in L_{p,\alpha,\beta}$. *Если существует функция* g, *такая*, *что*

$$\sup_{|t|\le\pi}|g(t)|<+\infty \text{ и } T_t(f,x)=f(x)g(t)$$
$$\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in[-\pi,\pi], \qquad (2.1)$$

то

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}=\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}.$$

Доказательство. Заметим, что $T_{-t}(f,x)=T_t(f,x)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $t\in[0,\pi]$. В силу Леммы 1.1 числа $\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ и $\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}$ существуют. В силу условия

$$\Delta_t^1(f,x)=f(x)g(t)-f(x)=f(x)(g(t)-1),$$
$$\Delta_t^k(f,x)=f(x)(g(t)-1)^k,$$
$$\Delta_{t_1,\ldots,t_k}^k(f,x)=f(x)(g(t_1)-1)\cdot\ldots\cdot(g(t_k)-1).$$

Тогда

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}=\sup_{0\le t_i\le\delta,}|g(t_1)-1|\cdot\ldots\cdot|g(t_k)-1|\|f\|_{p,\alpha,\beta},$$
$$i=1,\ldots,k,$$
$$\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha,\beta}=\sup_{0\le t\le\delta}|g(t)-1|^k\,\|f\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Поскольку для $a\ge 0$

$$\sup_{a\le z\le b}z^k=\sup_{a\le z_i\le b}z_1\cdot\ldots\cdot z_k,\ i=1,\ldots,k,$$

то теорема доказана. □

***Пример* 2.1.** Пусть

$$f(x)=\cos(n\arccos x)=P_n(x)$$

полиномы Чебышёва. Тогда

$$T_t(P_n,x)=\frac{1}{2}\Big[P_n(x\cos t+\sqrt{1-x^2}\sin t)+$$
$$+P_n(x\cos t-\sqrt{1-x^2}\sin t)\Big].$$

Положим $x=\cos\theta$. Если $\theta\in[0,\pi]$, то $x\in[-1,1]$. Поэтому

$$T_t(P_n,\cos\theta)=\frac{1}{2}\big[P_n(\cos(\theta-t))+P_n(\cos(\theta+t)\big]=$$
$$T_t(P_n,\cos\theta)=\frac{1}{2}\big[\cos n(\arccos(\cos(\theta-t)))+$$
$$+\cos n(\arccos(\cos(\theta+t)))\big].$$

Если $\theta-t,\theta+t\in[0,\pi]$, то

$$T_t(P_n,\cos\theta)=\frac{1}{2}\big[\cos n(\theta-t)+\cos n(\theta+t)\big]=$$
$$T_t(P_n,\cos\theta)=\cos n\theta\cdot\cos nt=P_n(\cos\theta)\cdot\cos nt,$$

или $T_t(P_n,x)=P_n(x)\cdot g(t)$, где $g(t)=\cos nt$.

Если $\theta+t\in[\pi,2\pi]$, то $2\pi-(\theta+t)\in[0,\pi]$ и $\cos(\theta+t)=\cos(2\pi-(\theta+t))$.

Поэтому $\arccos(\cos(\theta+t))=2\pi-(\theta+t)$. Следовательно

$$\cos n(\arccos(\cos(\theta+t)))=$$
$$=\cos(2\pi n-n(\theta+t))=\cos n(\theta+t).$$

Если $\theta-t\in[-\pi,0]$, то

$$\cos(\theta-t)=\cos(-(t-\theta))=\cos(t-\theta),$$

где $t-\theta\in[0,\pi]$.

Таким образом,

$$\cos n(\arccos(\cos(\theta-t)))=$$
$$=\cos(n(t-\theta))=\cos n(\theta-t).$$

Итак,

$$T_t(P_n,x)=P_n(x)\cdot g(t)\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in[0,\pi]$$

и $\sup_{t\in[0,\pi]}|g(t)|=1<+\infty$.

***Пример* 2.2.** Положим $f(x)=\sin(n\arccos x)$. Так же, как и в примере 2.1, получаем

$$T_t(f,\cos\theta)=\frac{1}{2}\big[\sin n(\theta-t)+\sin n(\theta+t)\big]=$$
$$=\sin n\theta\cos nt,$$

или

$$T_t(f,x)=f(x)\cdot g(t)\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in[0,\pi].$$

Заключение

Таким образом, в статье доказано совпадение обобщённых модулей гладкости, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига вида (1.1), в которых обобщённые разности рассматриваются с разными и одинаковыми шагами для функций, удовлетворяющих условию (2.1). Примерами функций, удовлетворяющих условию (2.1), являются алгебраические многочлены Чебышёва и функции из примера 2.2, которые не являются многочленами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов*, *М.К.* Об условиях совпадения некоторых классов функций / М.К. Потапов // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. – 1981. – Вып. 6. – С. 223–238.

2. *Казимиров*, *Г.Н.* О теоремах Джексона для *k*-го обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, № 3054-В94.

3. *Казимиров*, *Г.Н.* Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 49–51.

Поступила в редакцию 29.04.2020.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ НЕЧЕТНЫЙ ИНДЕКС

С.Ф. Каморников[1], **В.Н. Тютянов**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Международный университет «МИТСО», Гомель*

FINITE SIMPLE GROUPS ALL THE MAXIMAL SUBGROUPS OF WHICH HAVE ODD INDEX

S.F. Kamornikov[1], **V.N. Tyutyanov**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel*

В работе изучаются конечные простые неабелевы группы, все максимальные подгруппы которых имеют нечетный индекс.

Ключевые слова*: конечная группа, максимальная подгруппа, нечетный индекс, простая неабелева группа.*

The finite simple non-abelian groups all the maximal subgroups of which have odd index are studied.

Keywords: *finite group, maximal subgroup, odd index, simple non-abelian group.*

Введение

Главная цель настоящей работы – доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть G – конечная простая неабелева группа, у которой любая максимальная подгруппа имеет нечетный индекс. Тогда $G \simeq A_7$.*

В работах М. Либека, Я. Сакcла [1] и В. Кантора [2] установлены списки максимальных подгрупп классических групп лиевского типа (линейные группы, симплектические группы, унитарные группы и ортогональные группы), которые могут иметь нечетный индекс в группе. Однако в этих работах не указано, какие из этих подгрупп в точности имеют нечетный индекс. Данный пробел был устранен Н.В. Масловой в серии ее работ. Отметим, прежде всего, ее статьи [3], [4]. Также Н.В. Масловой в [5] была получена полная классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем. При доказательстве теоремы мы опираемся на данные работы.

1 Определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [6], [7]. Если G – группа лиевского типа, то P_i – максимальная параболическая подгруппа группы G, полученная удалением i-ой вершины в соответствующей группе G диаграмме Дынкина.

Нам понадобятся некоторые результаты, которые мы приведем в виде лемм. Пусть $\mathbf{M}$ – множество всех последовательностей $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$, где $x_i \in \{0,1\}$ для всех i и число ненулевых компонент конечно. Введем на множестве $\mathbf{M}$ порядок $\geq$, считая $1 \geq 0$, а для $(u_0, u_1, ..., u_n, ...)$, $(v_0, v_1, ..., v_n, ...)$ из $\mathbf{M}$ полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i. Следуя [5, с. 183], через ψ будем обозначать функцию, которая ставит в соответствие каждому целому неотрицательному числу s последовательность $(s_0, s_1, ..., s_k, ...)$ из $\mathbf{M}$ такую, что $\overline{s_k s_{k-1} ... s_0}$ – запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$.

***Лемма* 1.1** [5, теорема]. *Пусть G – конечная группа, $Soc(G) \simeq A_n$, $n \geq 5$. Подгруппа H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$G \subseteq S_n$, H – подгруппа вида*

$$(S_m \times S_{n-m}) \cap G,$$

где $1 \leq m < n/2$ и $\psi(n) \geq \psi(m)$;

(2) *$G \subseteq S_n$, H – подгруппа вида*

$$(S_m wr S_t) \cap G,$$

где $n = mt$, $t > 1$ и $m = 2^\omega \geq 2$, за исключением случая, когда

$$H \simeq (S_2 wr S_4) \cap A_8 \simeq 2^3 : S_4 \subset \subset 2^3 : PSL_3(2) \subset A_8 \simeq G;$$

(3) *$G \simeq A_7$ и $H \simeq PSL_2(7)$;*

(4) *$G \subseteq Aut(A_6)$, G не содержится в S_6 и $H \in Syl_2(G)$;*

© *Каморников С.Ф., Тютянов В.Н.*, 2020

(5) $G \simeq A_8$ *и* $H \simeq 2^3 : PSL_3(2)$.

***Лемма* 1.2** [8, лемма 1.5]. *Пусть G – простая группа Шевалле и L – максимальная подгруппа в G. Если унипотентная подгруппа U содержится в L, то L – параболическая подгруппа группы G.*

***Лемма* 1.3** [9, лемма 3]. *Пусть G – простая группа Шевалле и*

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Тогда существует простой делитель порядка группы G, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G.

2 Доказательство теоремы

Рассмотрим все классы простых неабелевых групп.

1. *G – спорадическая группа*.

Как следует из [7], каждая простая спорадическая группа G содержит максимальную подгруппу H четного индекса (значение индекса подгруппы H в G приведено в таблице 2.1).

2. $G \simeq A_n$, где $n \geq 5$.

Подгруппа A_{n-1} является максимальной в A_n и $|A_n : A_{n-1}| = n$, поэтому по условию теоремы n – нечетное число. Из [7], следует, что при $n \leq 13$ только в группе A_7 все максимальные подгруппы имеют нечетный индекс. Поэтому далее будем считать, что $n > 13$.

Пусть сначала $n = mk$, где $m > 1$ и $k > 1$. Так как $n > 13$, то в соответствии с [10, с. 366], подгруппа H вида $(S_m wr S_k) \cap A_n$ будет максимальной в A_n. Поскольку m и k являются нечетными числами, то по лемме 1.1 подгруппа H имеет в A_n четный индекс.

Таблица 2.1 – Простые спорадические группы

	Группа G	Подгруппа H	Индекс $\lvert G : H \rvert$
1	M_{11}	$L_2(11)$	12
2	M_{12}	M_{11}	12
3	M_{22}	$L_3(4)$	22
4	M_{23}	A_8	506
5	M_{24}	M_{23}	24
6	J_1	$L_2(11)$	266
7	$J_2 = HJ$	$U_3(3)$	100
8	HS	M_{22}	100
9	J_3	$L_2(16) : 2$	6156
10	McL	$U_3(5)$	7128
11	He	$S_4(4) : 2$	2058
12	Ru	${}^2F_4(2)$	4060
13	Suz	$G_2(4)$	1782
14	$O'N$	$L_3(7) : 2$	122760
15	Co_3	$McL : 2$	276
16	Co_2	$U_6(2) : 2$	2300
17	Fi_{22}	$2.U_6(2)$	3510
18	HN	A_{12}	1140000
19	Ly	$G_2(5)$	8835156
20	Th	${}^3D_4(2) : 3$	143127000
21	Fi_{23}	$S_8(2)$	86316516
22	Co_1	Co_2	98280
23	J_4	$2^{11} : M_{24}$	8474719242
24	Fi'_{24}	Fi_{23}	306936
25	$B = F_{2+}$	47:23	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$
26	$M = F_1$	59:29	$2^{28} \cdot 3^7 \cdot 5^7 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 71$

Следовательно, $n = p$ – простое число. Рассмотрим подгруппу H вида $AGL_1(p) \cap A_n$. Так как $n > 13$, то из таблицы 1 работы [10, с. 367] следует, что подгруппа H максимальна в A_n при $n \neq 17$ и $n \neq 23$. При этом индекс подгруппы $AGL_1(p) \cap A_n$ в A_n является четным.

Если $n = 17$, то $H \simeq 17.8$ содержится в максимальной подгруппе вида $PSL_2(16).4$. Данная подгруппа имеет в A_{17} четный индекс. При $n = 23$ подгруппа $H \simeq 23:11$ содержится в максимальной подгруппе вида M_{23}, а эта подгруппа имеет в A_{23} четный индекс.

3. *G – простая группа лиевского типа.*

Пусть сначала группа G определена над полем характеристики 2. По условию все максимальные в G подгруппы содержат силовскую 2-подгруппу группы G. Из леммы 1.2 следует, что любая максимальная в G подгруппа является параболической. Если

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\},$$

то по лемме 1.3 найдется простой делитель r порядка группы G, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G. Следовательно, максимальная подгруппа, содержащая силовскую r-подгруппу группы G, не является параболической. Последнее невозможно. Таким образом,

$$G \in \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Группы из данного списка обладают максимальными подгруппами четного индекса в группе G.

Следовательно, группа G определена над полем нечетной характеристики. Пусть сначала G – классическая группа. Полное описание максимальных подгрупп, имеющих в классических группах нечетный индекс приведено в работе [4]. Из данной работы, в частности, следует, что в группе G всегда существует максимальная подгруппа четного индекса. Поэтому G является исключительной группой. Списки максимальных подгрупп исключительных групп разбросаны по многим статьям. Мы будем использовать работу [11]. Рассмотрим все случаи.

(1) $G \simeq G_2(q)$, где $q = p^n$ и p – нечетное простое число. Если $p = 3$, то максимальная подгруппа $(q^2 \times q^{1+2}) : GL_2(q)$ [11, с. 127] имеет в группе G индекс $(q^2 + q + 1)(q^3 + 1)$, являющийся четным числом. Если $p > 3$, то максимальная подгруппа $q^{1+4} : GL_2(q)$ имеет в G четный индекс $(q^2 + q + 1)(q^3 + 1)$.

(2) $G \simeq {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$, $n \geq 1$. Максимальная в G подгруппа $q^{1+1+1} : Z_{q-1}$ [11, с. 138] имеет в группе G четный индекс $q^3 + 1$.

(3) $G \simeq {}^3D_4(q)$. В этом случае подгруппа $q^{2+3+6} : SL_2(q).Z_{q^3-1}$ [11, с. 144] имеет в группе G четный индекс $q^3 + 1$.

(4) $G \simeq F_4(q)$. Максимальная в G подгруппа $q^{1+14} : Sp_2(q).Z_{q-1}$ [11, с. 161] имеет четный индекс, равный $(q^4 + 1)(q^{12} - 1)$.

(5) $G \simeq {}^2E_6(q)$. Группа G имеет максимальную параболическую подгруппу P, для которой

$$|G:P| =$$

$$= \frac{(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)}{2(q-1)(q^6+1)(q^5-1)(q^4+1)(q^3-1)(q^2+1)} =$$

$$= \frac{(q^6-1)(q^9+1)(q^2-1)(q^3+1)(q^5+1)(q+1)}{2(q^5-1)} =$$

$$= \frac{(q^6-1)(q^9+1)(q^3+1)(q^5+1)(q+1)^2}{2(q^4+q^3+q^2+q+1)}.$$

Отсюда и из нечетности числа $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ следует, что индекс подгруппы P в G является четным числом.

(6) $G \simeq E_6(q)$. Рассмотрим в G максимальную параболическую подгруппу $P = P_4$ (6, с. 76). Тогда из

$$|G:P| =$$

$$= \frac{(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)} =$$

$$= \frac{(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)}{(q-1)(q^3-1)(q^4-1)} =$$

$$= (q^4+1)(q^9+q^6+q^3+1) \times$$

$$\times (q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)$$

следует, что индекс подгруппы P в G является четным числом.

(7) $G \simeq E_7(q)$. Рассмотрим в G максимальную параболическую подгруппу $P = P_5$ (6, с. 76). Тогда имеем

$$|G:P| == \frac{(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} \times$$

$$\times \frac{(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)}{(q^5-1)(q^6-1)(q^7-1)} =$$

$$= \frac{(q^4+1)(q^5+1)(q^{12}-1)(q^7+1)(q^{18}-1)}{(q-1)(q^3-1)} =$$

$$= (q^4+1)(q^5+1)(q^7+1) \cdot \frac{q^{12}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{18}-1}{q^3-1}.$$

Отсюда следует, что индекс подгруппы P в G является четным числом.

(8) $G \simeq E_8(q)$. Рассмотрим в G максимальную параболическую подгруппу $P = P_6$ (6, с. 76). Тогда из

$$|G:P| = \frac{(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} \times$$

$$\times \frac{(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)}{(q^5-1)(q^6-1)(q^7-1)(q^8-1)} =$$

$$= \frac{(q^6+1)(q^7+1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)}{(q-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)} =$$

$$= (q^6+1)(q^7+1) \cdot \frac{q^{24}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{18}-1}{q^3-1} \cdot \frac{q^{20}-1}{q^4-1} \cdot \frac{q^{30}-1}{q^5-1}.$$

имеем, что индекс подгруппы P в G является четным числом.

Итак, только в простой группе A_7 все максимальные подгруппы имеют нечетный индекс. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liebeck*, *M.W.* The primitive permutation groups of odd degree / M.W. Liebeck, J. Saxl // J. London Math. Soc. – 1985. –Vol. 31, № 2. – P. 250–264.

2. *Kantor*, *W.M.* Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes / W.M. Kantor // J. Algebra. – 1987. – Vol. 106, № 1. – P. 15–45.

3. *Маслова*, *Н.В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах / Н.В. Маслова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2008. – Т. 14, № 4. – С. 100–118.

4. *Maslova*, *N.V.* Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups / N.V. Maslova // Siberian Electron. Math. Reports. – 2018. – Vol. 15. – P. 707–718.

5. *Маслова*, *Н.В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем / Н.В. Маслова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 182–184.

6. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

7. *Conway*, *J.H.* Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

8. *Seitz*, *G.M.* Flag-transitive subgroups of Chevalley groups / G.M. Seitz // Ann. Math. – 1973. – Vol. 97, № 1. – P. 27–56.

9. *Тютянов*, *В.Н.* Тройные факторизации в конечных группах / В.Н. Тютянов, Л.А. Шеметков // Доклады НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 52–55.

10. *Liebeck*, *M.W.* A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups / M.W. Liebeck, C.E. Prager, J. Saxl // J. Algebra. – 1987. – Vol. 111, № 2. – P. 365–383.

11. *Wilson*, *R.A.* The finite simple groups / R.A. Wilson. – Springer: Graduate texts in mathematics 251, 2009. – 298 p.

Исследования С.Ф. Каморникова выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*грант* ГР №20191056)

Поступила в редакцию 29.03.2020.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ СУБНОРМАЛЬНЫМИ 2-МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

М.Н. Коновалова[1], **В.С. Монахов**[2]

[1]*Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Брянск*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

FINITE GROUPS WITH SOME SUBNORMAL 2-MAXIMAL SUBGROUPS

M.N. Konovalova[1], **V.S. Monakhov**[2]

[1]*Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Bryansk*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Изучается конечная группа, у которой в каждой максимальной подгруппе существует субнормальная в группе подгруппа. В частности, доказывается, что коммутант такой группы нильпотентен.

Ключевые слова*: конечная группа, субнормальная подгруппа, 2-максимальная подгруппа.*

A finite group G such that in every maximal subgroup of G there is a subnormal in G subgroup is studied. In particular, we proved that the derived subgroup of G is nilpotent.

Keywords: *finite group, subnormal subgroup, 2-maximal subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Обозначения и используемые результаты соответствуют [1], [2]. Запись $M < G$ $(M \lessdot G)$ означает, что M – собственная (максимальная) подгруппа группы G.

Пусть H – подгруппа группы G. Если существует максимальная в группе G подгруппа M такая, что H является максимальной подгруппой в M, то H называется 2-максимальной подгруппой группы G.

Строение группы существенно зависит от свойств ее 2-максимальных подгрупп. Наиболее ранний результат был получен Хуппертом, установившим [3] сверхразрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нормальны. Группа с субнормальными 2-максимальными подгруппами либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми собственными подгруппами [4], [5]. Группы с формационными ограничениями на 2-максимальные подгруппы исследовались в [6]–[8].

В настоящей работе изучается группа, у которой в каждой ненормальной максимальной подгруппе существует субнормальная в группе подгруппа, являющаяся 2-максимальной подгруппой группы. В частности, доказывается, что коммутант такой группы нильпотентен.

1 Вспомогательные результаты

Пусть M – подгруппа группы G. Пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с подгруппой M, называется ядром подгруппы M и обозначается M_G. Подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $X \rtimes Y$ означает полупрямое произведение, в котором подгруппа X нормальна.

***Лемма* 1.1.** *Пусть M – максимальная подгруппа группы G и $K \le M$. Если подгруппа K субнормальна в G, то $K \le M_G$. В частности, если K – максимальная подгруппа в M и M ненормальна в G, то $K = M_G$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по индексу подгруппы K в группе G. Будем считать, что для всех субнормальных подгрупп, индекс которых меньше индекса подгруппы K, утверждение справедливо. Предположим, что существует элемент $m \in M$ такой, что $K \ne K^m$. Согласно [1, 2.43] подгруппа $H = \langle K, K^m \rangle$ субнормальна в G и $H \le M$. Так как K – собственная подгруппа в H, то $|G:H| < |G:K|$. Применяя индукцию к подгруппе H, получаем, что $H \le M_G$. Но $K \le H$, поэтому $K \le M_G$, что и требовалось доказать.

Теперь считаем, что $M \le N_G(K)$. Если $N_G(K) = G$, то $K \le M_G$. Пусть $N_G(K) \ne G$. Из того, что M – максимальная подгруппа группы G следует, что $M = N_G(K)$. Так как K – субнормальная подгруппа группы G и K ненормальна в G, то существует субнормальная подгруппа K_1 в G такая, что $K \lhd K_1$, $K \ne K_1 \ne G$. Ясно, что $K_1 \le M$ и $|G:K_1| < |G:K|$. По индукции $K_1 \le M_G$, поэтому $K \le M_G$. □

© *Коновалова М.Н., Монахов В.С.*, 2020

В [9] Гашюц изучил пересечение ненормальных максимальных подгрупп группы G, которое обозначил $\Delta(G)$. Из определений $\Phi(G)$ и $\Delta(G)$ следует, что $\Phi(G) \le \Delta(G)$.

***Лемма* 1.2** [9, с. 276]. *Пересечение* $\Delta(G)$ *всех ненормальных максимальных подгрупп ненильпотентной группы G нильпотентно и*

$$\Delta(G)/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G)).$$

***Лемма* 1.3.** (1) *Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда подгруппа Фраттини* $\Phi(G)$ *группы G совпадает с пересечением максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга* [10].

(2) *Пусть G – разрешимая ненильпотентная группа. Тогда подгруппа* $\Delta(G)$ *совпадает с пересечением максимальных ненормальных подгрупп группы G, не содержащих подгруппу Фиттинга* [11].

Сформулированные в лемме 1.3 результаты получили развитие в [12].

***Лемма* 1.4.** *Пусть U и V – нормальные подгруппы группы G. Если* $V \le U \cap \Delta(G)$ *и* U/V *нильпотентна, то U нильпотентна. В частности,* $F(G/\Delta(G)) = F(G)/\Delta(G)$.

Доказательство. Предположим, что U ненильпотентна. Тогда в U существует ненормальная силовская подгруппа P и $N_U(P)$ абнормальна в U [13, лемма 17.1]. Поскольку PV/V – силовская подгруппа в U/V и U/V нильпотентна, то PV/V нормальна в G/V. Поэтому PV нормальна в G и $G = N_G(P)V$ по лемме Фраттини. Пусть W – максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. Если W ненормальна в G, то

$$V \le \Delta(G) \le W,\ G = N_G(P)V \le W,$$

противоречие. Пусть W нормальна в G. Тогда

$$N_U(P) = N_G(P) \cap U \le W \cap U = U,$$

поскольку $W \cap U$ нормальна в U и каждая подгруппа, содержащая абнормальную в U подгруппу $N_U(P)$, совпадает [13, лемма 17.2] со своим нормализатором в подгруппе U. Поэтому опять $G = N_G(P)V \le WU = W$, противоречие. Следовательно, предположение неверно и подгруппа U нильпотентна.

Поскольку $\Delta(G)$ нормальна в G и нильпотентна, то $\Delta(G) \le F(G)$ и

$$F(G)/\Delta(G) \le F(G/\Delta(G)).$$

Полагая в доказанном

$$V = \Delta(G),\ F(G/\Delta(G)) = U/\Delta(G)$$

получаем, что подгруппа U нильпотентна, поэтому

$$U \le F(G),\ U/\Delta(G) \le F(G/\Delta(G)).$$

Следовательно, $F(G/\Delta(G)) = F(G)/\Delta(G)$. □

***Лемма* 1.5.** *Если G – разрешимая группа, то* $F(G/X) = F(G)/X$ *для любой нормальной в G подгруппы* $X \in \{Z(G), \Phi(G), \Delta(G)\}$.

Доказательство. Для $X = \Phi(G)$ и $X = Z(G)$ это следует из [1, 4.21]; при $X = \Delta(G)$ – из леммы 1.4. □

***Лемма* 1.6.** *Пусть* $H \ll M \ll G$ *и M ненормальна в G. Если H перестановочна с* M^x *для каждого* $x \in G$, *то* $H = M_G$.

Доказательство. Предположим, что H не содержится в M_G. Тогда существует $x \in G$ такой, что H не содержится в M^x. По условию $HM^x = M^xH$, поэтому $HM^x = G$. Так как $H \le M$, то $G = MM^x$, противоречие. Поэтому предположение неверно и $H \le M_G$. Поскольку $H \ll M$, то либо $M_G = M$, либо $H = M_G$. Если $M_G = M$, то M нормальна в G, что противоречит условию. Поэтому $H_G = M$.

2 Нильпотентность коммутанта группы с некоторыми субнормальными подгруппами

Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ – прямое произведение. Согласно [14, с. 53] подгруппа H группы G является *подпрямым произведением* групп G_i, если проекция H на каждый множитель G_i совпадает с G_i.

***Лемма* 2.1** [14, теорема 4.3.9], [1, 2.3]. *Пусть в группе G задано семейство нормальных подгрупп* K_i *и K – их пересечение. Тогда фактор-группа* G/K *изоморфна подпрямому произведению фактор-групп* G/K_i.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Свойства групп Шмидта и их приложения в теории групп и их классов изложены в [15]. Частным случаем групп Шмидта являются группы типа *A*. *Группой типа A* называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы примарны. Примером группы типа A служит естественное полупрямое произведение элементарной абелевой p-группы P порядка p^m и группы Q порядка q, где m – показатель числа p по модулю q. Из свойств групп Шмидта легко выводится описание групп типа A.

***Лемма* 2.2** [15]. (1) *Если S – группа типа A, то* $S = P \rtimes Q$, *подгруппа P является минимальной нормальной в S подгруппой, подгруппа Q имеет простой порядок и Q действует неприводимо на P.*

(2) *Если S – группа Шмидта, то* $S/\Phi(S)$ *– группа типа A. Обратно, если S – группа Шмидта,* $N \lhd S$ *и* S/N *– группа типа A, то* $N = \Phi(S)$.

***Теорема* 2.1.** *Пусть в группе G в каждой ненормальной максимальной подгруппе существует максимальная подгруппа, субнормальная в G. Тогда фактор-группа $G/\Delta(G)$ изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности, $G/F(G)$ – абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. Пусть $M \ll G$, подгруппа M ненормальна в G. По условию существует субнормальная в G подгруппа H такая, что $H \ll M$. По свойствам субнормальных подгрупп подгруппа $H = H \cap M$ субнормальна в M, поэтому H нормальна в M и

$$|M/H| = q \in \pi(M).$$

Так как H субнормальна в G, то существует цепочка подгрупп

$$H \lhd K \lhd \ldots \lhd G, H < K.$$

Если $M = K$, то M нормальна в G, противоречие. Значит, $M \neq K$ и $G = \langle M, K\rangle \leq N_G(H)$, т. е. подгруппа H нормальна в G.

Фактор-группа G/H содержит ненормальную максимальную подгруппу M/H простого порядка q, поэтому M/H – силовская q-подгруппа в G/H. Согласно [2, IV.7.4] фактор-группа G/H разрешима. Пусть P/H – минимальная нормальная в G/H. Тогда P/H – элементарная абелева p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G/H)$ и $G/H = P/H \rtimes M/H$. Ясно, что в G/H каждая собственная подгруппа примарная, поэтому G/H – группа типа A порядка $p^m q$, где $p^m = |P/H|$, m – показатель числа p по модулю $q = |Q|$, см. лемму 2.2.

Пусть теперь M_1, M_2, …, M_n – все ненормальные в G максимальные подгруппы и H_1, H_2, …, H_n – субнормальные в G подгруппы такие, что $H_i \ll M_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. По доказанному для каждого i подгруппа H_i нормальна в G и $G/H_i = P_i/H_i \rtimes M_i/H_i$ – группа типа A, в частности, $|M_i/H_i| = q_i \in \pi(G)$. Так как $\Delta(G) \leq M_i$ для каждого i и подгруппа M_i ненормальна в G, то $M_i \neq H_i\Delta(G)$ и $\Delta(G) \leq H_i$ для каждого i. Поэтому

$$\Delta(G) \leq \cap_{i=1}^n H_i \leq \cap_{i=1}^n M_i = \Delta(G),$$

$$\Delta(G) = \cap_{i=1}^n H_i.$$

Теперь фактор-группа

$$G/\cap_{i=1}^n H_i = G/\Delta(G)$$

по лемме 2.1 будет подпрямым произведением прямого произведения

$$G/H_1 \times G/H_2 \times \ldots \times G/H_n = \overline{G}.$$

Поскольку

$$F(\overline{G}) = P_1/H_1 \times P_2/H_2 \times \ldots \times P_n/H_n,$$

$$\overline{G}/F(\overline{G}) \cong M_1/H_1 \times M_2/H_2 \times \ldots \times M_n/H_n,$$

то $F(\overline{G}) \in \mathfrak{A}_1$, $\overline{G}/F(\overline{G}) \in \mathfrak{A}_1$ и $\overline{G} \in \mathfrak{A}_1^2$. Здесь $\mathfrak{A}_1$ – формация всех абелевых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. Так как $\mathfrak{A}_1^2$ – наследственная формация, то $G/\Delta(G) \in \mathfrak{A}_1^2$ и группа G содержит нормальную подгруппу U такую, что

$$\Delta(G) \leq U,\ U/\Delta(G) \in \mathfrak{A}_1,\ G/U \in \mathfrak{A}_1.$$

По лемме 1.4 $U \leq F(G)$, поэтому

$$G/F(G) \cong (G/U)/(F(G)/U) \in \mathfrak{A}_1$$

и фактор-группа $G/F(G)$ будет абелевой группой с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. □

3 Некоторые приложения теоремы 2.1

Подгруппа H группы G называется *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x\rangle$ для любого $x \in G$. Абнормальная подгруппа совпадает со своим нормализатором. Примерами абнормальных подгрупп служат нормализаторы силовских подгрупп [2, VI.11.16], подгруппы Картера [2, VI.12.2], Гащюца [1, с. 184] и др. Фаттахи [16] получил описание групп, у которых любая подгруппа субнормальна или абнормальна. Группы, в которых некоторые подгруппы абнормальны или формационно субнормальны, исследовались в работах многих авторов, см. литературу в [17], [18]. К этому направлению относится следующий результат, который непосредственно вытекает из теоремы 2.1.

***Следствие* 3.1.** *Пусть в разрешимой группе G в каждой ненормальной максимальной подгруппе любая максимальная подгруппа субнормальна в G или абнормальна. Тогда фактор-группа $G/\Delta(G)$ изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности, $G/F(G)$ – абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. Пусть M – ненормальная максимальная подгруппа разрешимой группы G и H – произвольная максимальная подгруппа в M. По условию H субнормальна в G или абнормальна. В каждой неединичной разрешимой группе существует нормальная максимальная подгруппа. Если K нормальна в M и максимальна, то K не абнормальна и по условию подгруппа K субнормальна в G. Следовательно, в каждой ненормальной максимальной подгруппе существует максимальная подгруппа, субнормальная в G. Поэтому группа G удовлетворяет требованиям теоремы 2.1 и фактор-группа $G/\Delta(G)$ изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности, $G/F(G)$ – абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. □

Учитывая лемму 1.6, получаем также

***Следствие* 3.2.** *Пусть в группе G в каждой ненормальной максимальной подгруппе существует максимальная подгруппа, перестановочная со всеми максимальными подгруппами группы G. Тогда $G/F(G)$ – абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.*

Васильев А.Ф. и Мурашко В.И. предложили [19] следующее понятие. Подгруппа H группы G называется $F(G)$*-субнормальной*, если H субнормальна в $HF(G)$. Группы с $F(G)$-субнормальными подгруппами исследовались в работах [19]–[21].

***Следствие* 3.3.** *Пусть G – разрешимая группа и каждая ее* 2*-максимальная подгруппа, содержащаяся в ненормальной максимальной подгруппе, $F(G)$-субнормальна. Тогда факторгруппа $G/\Delta(G)$ изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности, $G/F(G)$ – абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. По лемме 1.5 можно считать, что $\Phi(G)=\Delta(G)=1$, поэтому $F=F(G)$ – абелева подгруппа.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ – все ненормальные в G максимальные подгруппы, не содержащие F. Согласно лемме 1.3 $\bigcap_{i=1}^{n} M_i = \Delta(G) = 1$.

Предположим, что существует подгруппа $M_j = M$ такая, что $HF < G$ для всех $H \ll M$. Ясно, что

$$G = MF,\ M \cap F \lhd G,\ M \not\leq HF,$$
$$M > M \cap HF = H(M \cap F) \geq H,$$
$$H(M \cap F) = H,\ M \cap F \leq H.$$

Поскольку это верно для всех $H \ll M$, то

$$M \cap F \leq \Phi(M).$$

Согласно [1, 3.22 (4)] $M \cap F \leq \Phi(G) = 1$, поэтому

$$G = F \rtimes M,\ F \cdot \lhd G,\ M_G = 1.$$

Пусть K – максимальная в M подгруппа и K нормальна в M. По условию подгруппа K субнормальна в KF, поэтому K нормальна в G и $K = 1$. Значит, M – циклическая подгруппа простого порядка и G – группа типа A. Итак, в случае «существует подгруппа $M_j = M$ такая, что $HF < G$ для всех $H \ll M$» следствие доказано.

Осталось рассмотреть случай, когда в каждой подгруппе M_i существует подгруппа H_i такая, что $H_i \ll M_i$ и $FH_i = G$. По условию $H_i \lhd\lhd G$. Применяя теорему 2.1, получаем, что группа G изоморфна подпрямому произведению групп типа A. В частности, $G/F(G)$ – абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York – Springer, 1967. – 793 p.

3. *Huppert*, *B.* Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

4. *Луценко*, *Ю.В.* Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, № 5. – С. 730–740.

5. *Горбатова*, *Ю.В.* Конечные группы с субнормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами / Ю.В. Горбатова, М.Н. Коновалова // Вестник Омского университета. – 2019. – Т. 24, № 3. – С. 4–11.

6. *Monakhov*, V.S. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche Mat. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.

7. *Kovaleva*, *V.A.* Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 273–290.

8. *Монахов*, *В.С.* О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105, № 2. – С. 269–277.

9. Gaschütz, W. Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – S. 160–170.

10. *Монахов*, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

11. *Монахов*, *В.С.* Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (27). – С. 81.

12. *Васильев*, *А.Ф.* Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.В. Сыроквашин // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 62–64.

13. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.

14. *Каргаполов*, *М.И.* Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

15. *Монахов*, *В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса 2001. – Киев. – 2002, секция № 1. – С. 81–90.

16. *Fattahi*, *A.* Groups with only normal and abnormal subgroups / A. Fattahi // J. Algebra. – 1974. – Vol. 28, № 1. – P. 15–19.

17. *Монахов*, *В.С*. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами / В.С. Монахов // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.

18. *Skiba*, *A.N*. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

19. *Мурашко*, *В.И*. О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2012. – Т. 70, № 4. – С. 24–27.

20. *Монахов*, В.С. Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – С. 40–46.

21. *Васильев*, *А.Ф*. Формации и произведения $F(G)$-субнормальных подгрупп конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Матем. заметки. – 2020. – Т. 107, № 3. – Р. 376–390.

Поступила в редакцию 14.02.2020.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА-ФОКУСА И ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

В.И. Мироненко, В.В. Мироненко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE CENTER-FOCUS PROBLEM AND REFLECTING FUNCTION

V.I. Mironenko, V.V. Mironenko

F. Scorina Gomel State University

Дан один из способов применения отражающей функции для решения проблемы центра-фокуса.

Ключевые слова: *отражающая функция*, *дифференциальное уравнение*, *периодическое решение*, *проблема центра-фокуса.*

One way of application the reflecting function to the solution of the center-focus problem is given.

Keywords: *reflecting function*, *differential equation*, *periodic solution*, *centre-focus problem.*

Introduction

The center-focus problem is the oldest and important problem of the qualitative theory of differential equations. It originates from the works of H. Poincaré [1]. H. Poincaré put this problem and evaluated its significance. A.M. Liapunov [2, p. 136–252] suggested two methods for the solving this problem. The methods are connected with an infinite process of the calculating of so called Liapunov numbers $g_1, g_2, \ldots$. If one of the numbers $g_k \neq 0$ then the critical point under the consideration is focus. This point is center if and only if all $g_k = 0$ ($k \in N$).

The interest to the center-focus problem was intensified in the Soviet Union and China after publication the book [3, p. 77–86]. The new approach appeared for the solving this problem was given in [4]. The algebraic insolvability of the problem in general compels researchers to consider the problem for the systems with the polynomial right-hand side. The summary of such investigation in the Soviet Union was made in the book [5].

The general consideration of the problem and corresponding results was given by V.I. Arnold and Iu.S. Iljashenko in the work [6].

1 The center-focus problem

The center-focus problem arises when we consider autonomous two dimension systems. The isolated critical point (x_0, y_0) (the rest-point) of the system is called center iff the point has a neighborhood which entirely consists of closed trajectories.

In the polar coordinate two-dimension differential system goes to equation

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{rP(\varphi, r)}{Q(\varphi, r)}, \qquad (1.1)$$

with the rest point (equilibrium-point) $r = 0$.

This point $r = 0$ is a center iff all solutions $r = r(\varphi, \varphi_0, r_0)$ of the equation (1.1) with sufficiently small r_0 are 2π-periodic. Therefore the point $r = 0$ is center for (1.1) if and only if the reflecting function of the (1.1) $F(\varphi, r)$ [7] is 2π-periodic with respect to φ [8, p. 13] for sufficiently small r.

Thanks to that fact it is possible to look on the center-focus problem from the point of view of the reflecting function theory.

We put here some facts from the reflecting function theory which are necessary for the understanding this work and comprehension of further use the reflecting function for the problem. We set forth the facts here in accordance with [7], [8].

The reflecting function $F(t, x)$ for the system

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x),\ t \in R,\ x \in R^n, \qquad (1.2)$$

with the general solution $\varphi(t; t_0, x_0)$ in the Cauchy form can be defined by formula $F(t, x) = \varphi(-t; t, x)$. The domain of the function consists of graphs of the solutions $x = \varphi(t; 0, x_0)$ which exist on symmetric intervals $(-\alpha_x; \alpha_{x_0})$.

We will assume that $X(t, x)$ is continuously differentiable function and mark the following properties of the reflecting function.

1^0. For every extendible solution $x(t)$ of the system (1.2) which exist on $[-\alpha; \alpha]$ the identity $F(t, x(t)) \equiv x(-t),\ \forall t \in [-\alpha; \alpha],$ is hold.

So the reflecting function connects the future state $x(t)$ of the system with its past state $x(-t)$ and vice versa. This property must serve as a definition of the reflecting function (RF).

2^0. For all (t, x) from the domain of the reflecting function $F(t, x)$ the identities

© *Mironenko V.I.*, *Mironenko V.V.*, 2020

$$F(-t,F(t,x))\equiv F(0,x)\equiv x$$

are true.

3^0. Differentiable function $F(t,x)$ is the reflecting function of the system (1.2) if and only if the function is the solution of the Cauchy problem

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)=0,\ F(0,x)\equiv x. \quad (1.3)$$

We call this relation the main relation for the reflecting function.

4^0. If $X(t,x)$ continually differentiable and $X(t+2\omega)\equiv X(t,x),$ then Poincaré map $\varphi(\omega;-\omega,x)$ of the system (1.2) over $[-\omega,\omega]$ is given by formula $F(-\omega,x),$ where $F(t,x)$ is reflecting function of the system. In this case the solution $x=\varphi(t;-\omega,x_0)$ of the system (1.2) will be 2ω-periodic if and only if the solution is extendible on $[-\omega;\omega]$ and $F(-\omega,x_0)=x_0$.

5^0. The reflecting function $F(t,x)$ of the system (0.2) for which $X(-t,x)+X(t,x)\equiv 0$ is given by formula $F(t,x)\equiv x.$ If in addition $X(t,x)$ is 2ω-periodic with respect to t then every solution of the system (1.2) which is extendible on $[-\omega,\omega]$ is 2ω-periodic.

6^0. Every twice continuously differentiable function $F(t,x),\ F:D\to R^n$, where D contains the hyperplane $x=0$ and F has the property $F(-t,F(t,x))\equiv F(0,x)\equiv x$ is reflecting function of the system

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t}=:S(t,x) \quad (1.4)$$

and every system of the form

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}R(t,x)-R(-t,F), \quad (0.5)$$

where $R(t,x)$ is any continuously differentiable vector-function.

All such systems form the class of equivalent systems, which is characterized by reflecting function $F(t,x)$.

The system (0.4) is called simple system of the class. All autonomous systems are simple systems.

7^0. If system $\frac{dx}{dt}=X(t,x)$ is equivalent an autonomous system, then this autonomous system is

$$\frac{dx}{dt}=X(0,x).$$

Sometimes it is very convenient to use the following

***Statement* 1.1**. [9], [10, p. 171]. *Suppose that* $\Delta_i(t,x)$ $(i=\overline{1;m})$ *are solution of the system*

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}X(t,x)-\frac{\partial X}{\partial x}(t,x)\Delta=0\,.$$

Then all systems

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\Delta_i(t,x),$$

where $\alpha_i(t)$ *are scalar odd continuous functions, are equivalent* (*i. e. they have the same reflecting function which coincides with the reflecting function of the system* $\frac{dx}{dt}=X(t,x)$).

This statement and theorem from [11] are very important for the solvability of center-focus problem.

2 The main results

We consider the equation

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{A_1r+A_2r^2+...+A_nr^n}{1+B_2r+B_3r^2+...+B_kr^{k-1}}, \quad (2.1)$$

where $A_i=A_i(\varphi)$ and $B_i=B_i(\varphi)$ are continues 2π-periodic functions.

We assume that this equation obtained from the two dimensional differential autonomous system for which the center-focus problem is arising. Variables φ and r are coordinates of polar system. The point $(x,y)=(0,0)$ or $r=0$ is the equilibrium point for which the center-focus problem is arising. The function $r(\varphi)\equiv 0$ is the solution of (2.1). The solutions $r(\varphi;0,r_0)$ of the equation (1.1) for the sufficiently small r_0 are extendible on $[-\pi;\pi]$.due to the theorem of continuous dependence solutions on the initial conditions dates [3, p. 13].

Then in accordance with the property 4^0 the equation (2.1) will have center at $r=0$ if and only if for the reflecting function $F(\varphi,r)$ of the (2.1) the identity $F(\pi,r)\equiv r$ or if and only if the reflecting function will be 2π-periodic [8, p. 66].

Thus the center-focus problem for the equation (2.1) reduces itself to the question: "When equation (2.1) has 2π-periodic with respect to φ reflecting function or when equation (2.1) is equivalent to any different equation of the form (2.1) which has center at $r=0$ ".

***Theorem* 2.1.** *Suppose*

1. $U=U(\varphi,r)=m_1(\varphi)r+m_2(\varphi)r^2+...+m_k(\varphi)r^k$ *is a polynomial with respect to* r *with continuously differentiable and* 2π*-periodic coefficients* $m_1(\varphi)$ $(i=\overline{1;k})$ *and* $m_1(\varphi)\neq 0$ *for all* φ.

2. $R(\varphi,U)$ *is polynomial with respect to* U *with the continuous even* 2π*-periodic coefficients and* $R(\varphi;0)\neq 0\ \forall\varphi\in R$.

3. $S(\varphi,U)$ *is polynomial with respect to* U *with continues* 2π*-periodic odd coefficients and* $S(\varphi,0)\equiv 0$.

Then the reflecting function $F(\varphi,r)$ *of the equation*

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{S(\varphi,U)-U'_{\varphi}R(\varphi,U)}{U'_{r}(\varphi,r)R(\varphi,U)} \qquad (2.2)$$

is given by formula $U(-\varphi,F)=U(\varphi,r)$ *and point* $r=0$ *is a center for the equation* (2.2).

Proof. We shall find the complete derivative of $U(\varphi,r)$ along with the solutions of (2.2)

$$\frac{dU}{d\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial r}\frac{dr}{d\varphi}=$$

$$=U'_{\varphi}+\frac{S(\varphi,U)-U'_{\varphi}R(\varphi,U)}{R(\varphi,U)}=\frac{S(\varphi,U)}{R(\varphi,U)}.$$

So $\frac{dU}{d\varphi}=\frac{S(\varphi,U)}{R(\varphi,U)}$ is odd function with respect to U. Therefore for every solution $r(\varphi)$ of the equation (2.2) $U(\varphi,r(\varphi))$ is even 2π-periodic function [8, p. 13], [10, p. 65], that is

$$U(-\varphi,r(-\varphi))\equiv U(\varphi,r(\varphi))$$

or $U(-\varphi,F(\varphi,r(\varphi)))\overset{\varphi}{\equiv}U(\varphi,r(\varphi))$ for every solution $r(\varphi)$. It means $U(-\varphi,F(\varphi,r))\overset{\varphi,r}{\equiv}U(\varphi,r)$. In this identity $U(\varphi,0)\equiv 0$ and $\frac{\partial U}{\partial r}(\varphi,0)\equiv m_1(\varphi)\neq 0$. Therefore in accordance with the implicit function theorem [12, p. 488] the reflecting function $F(\varphi,r)$ exist differentiable and 2π-periodic with respect to φ.

The theorem is proved. So point $r=0$ is a center. □

Now it is important to know when the equation (2.1) can be written in the form (2.2). First we consider the case when $R(\varphi,r)\equiv 1$ in (2.2). In this case (2.2) has the form

$$\frac{dr}{d\varphi}=$$

$$=\frac{s(\varphi,U)-m'_1(\varphi)r-m'_2(\varphi)r^2-\ldots-m'_k(\varphi)r^k}{m_1(\varphi)+2m_2(\varphi)r+\ldots+km_k(\varphi)r^{k-1}}, \qquad (2.3)$$

It follows from this that to write the equation (2.1) in the form (2.3) we must multiply the numerator and the denominator of the right hand-side of the equation (2.1) on the function

$$m_1(\varphi)=\exp\left(-\int_0^{\varphi}A_1(\tau)d\tau\right).$$

In such a way the equation (2.1) gets the form

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{D_1(\varphi)r+D_2(\varphi)r^2+\ldots+D_n(\varphi)r^n}{m_1(\varphi)+2m_2(\varphi)r+\ldots+km_k(\varphi)r^{k-1}}, \qquad (2.4)$$

where

$$m_1(\varphi):=\exp\left(-\int_0^{\varphi}A_1(\tau)d\tau\right). \qquad (2.5)$$

Here $A_1(\varphi)$ is the function from the (2.1). In form (2.4) we can rewrite every equation (2.1) and

$$m_1(\varphi):=\exp\left(-\int_0^{\varphi}A_1(\tau)d\tau\right)\neq 0.$$

In edition we will assume that function

$$m_1(\varphi):=\exp\left(-\int_0^{\varphi}A_1(\tau)d\tau\right)$$

is 2π-periodic function. If it is not 2π-periodic then the Liapunov number

$$g_1:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_1(\tau)d\tau\neq 0$$

and the equilibrium $r=0$ is focus [5, p. 7] and the center-focus problem is solved.

***Theorem* 2.2.** *Suppose that for a differentiable function* $F(\varphi,r)$, $F(0,r)\equiv r$, *the following identities*

$$\sum_{i=1}^{k}m_i(-\varphi)F^i=\sum_{i=1}^{k}m_i(\varphi)r^i. \qquad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^{k}m'_i(-\varphi)F^i+\sum_{i=1}^{k}m'_i(\varphi)r^i+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}D_i(\varphi)r^i+\sum_{i=1}^{n}D_i(-\varphi)F^i\equiv 0. \qquad (2.7)$$

are correct. Then the reflecting function of the equation (2.4) *is given by formula* (2.6) *and the equilibrium* $r=0$ *for* (2.4) *is the center.*

Proof. From the identity (2.6) we find

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\sum_{i=1}^{k}im_i(\varphi)r^{i-1}}{\sum_{i=1}^{k}im_i(-\varphi)F^{i-1}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=\frac{\sum_{i=1}^{k}m'_i(\varphi)r^i+\sum_{i=1}^{k}m'_i(-\varphi)F^i}{\sum_{i=1}^{k}im_i(-\varphi)F^{i-1}}.$$

Then the main relation for the reflecting function (1.3) we can write as follows

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}m'_i(\varphi)r^i+\sum_{i=1}^{k}m'_i(-\varphi)F^i}{\sum_{i=1}^{k}im_i(-\varphi)F^{i-1}}+$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{k}im_i(\varphi)r^{i-1}}{\sum_{i=1}^{k}im_i(-\varphi)F^{i-1}}\times\frac{\sum_{r=1}^{n}D_i(\varphi)r_i}{\sum_{i=1}^{k}im_ir^{i-1}}+\frac{\sum_{i=1}^{n}D_i(-\varphi)F^i}{\sum_{i=1}^{k}im_i(-\varphi)F^{i-1}}\equiv 0.$$

This identity is really true due to (2.7).

So the reflecting function of (2.4) is given by (2.6) and all solutions of (2.4) are 2π-periodic. The theorem 2.2 is true. □

We consider now the equation (1.1). Let

$$m_1(\varphi)=\exp\left(-\int_0^{\varphi}A_1(\tau)d\tau\right)$$

and

$$U(\varphi,r)=m_1(\varphi)r+m_1(\varphi)\beta_2(\varphi)r^2+\ldots+$$
$$+m_1(\varphi)\beta_r(\varphi)r^k=:m_1r+m_2r^2+\ldots+m_kr^k.$$

We suppose that there exists function

$$v(\varphi,r):=m_1r+m_2r^2+\ldots+m_kr^k$$

and even 2π-periodic continuous functions $n_2(\varphi),n_3(\varphi),\ldots,n_l(\varphi)$ such that

$$U(\varphi,r)\equiv v+n_2(\varphi)v^2+n_3(\varphi)v^3+\ldots+n_l(\varphi)v^l.$$

In this case if reflecting function $F(\varphi,r)$ of the equation (2.1) is given by $U(-\varphi,F)=U(\varphi,r)$ then this $F(\varphi,r)$ is also determined by $v(-\varphi,F)\equiv v(\varphi,r).$ Therefore

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{v'_r(\varphi,r)}{v'_r(-\varphi,F)},\ \frac{\partial F}{\partial\varphi}=\frac{v'_\varphi(\varphi,r)+v'_\varphi(-\varphi,F)}{v'_r(-\varphi,F)}$$

and the main relation for the reflecting function we can write in the form

$$\frac{v'_\varphi(\varphi,r)+v'_\varphi(-\varphi,F)}{v'_r(-\varphi,F)}+$$
$$+\frac{v'_r(\varphi,r)}{v'_r(-\varphi,F)}\frac{A_1(\varphi)R+\ldots+A_n(\varphi)r^n}{1+\beta_2(\varphi)r+\ldots+\beta_k(\varphi)r^{k-1}}+\quad(1.8)$$
$$+\frac{A_1(-\varphi)F+A_2(-\varphi)F^2+\ldots+A_n(-\varphi)F^n}{1+\beta_2(-\varphi)F+\ldots+\beta_k(-\varphi)F^{k-1}}\equiv 0.$$

Thus we come to the

***Corollary* 2.1.** *If the relation* $v(-\varphi,F)=v(\varphi,r)$ *induces* (2.8), *then the reflecting function of the equation* (2.1) *is given by* $v(-\varphi,F)=v(\varphi,r).$

***Example* 2.1.** We consider the equation

$$\frac{dr}{d\varphi}=r^2\frac{(1-r\sin\varphi)^2\sin\varphi+[1-2r(1-r\sin\varphi)]\cos\varphi}{(1-2r\sin\varphi)[1-2r(1-r\sin\varphi)\cos\varphi}.$$

For this equation $A_1(\varphi)\equiv 0$ and therefore

$$m_1=\exp\left(-\int_0^\varphi A_1(\tau)d\tau\right)\equiv 1.$$

So this equation has already the form (2.3). Then the function

$$U(\varphi,r)=\int_0^r\frac{\partial U}{\partial r}dr=$$
$$=\int_0^r(1-2\tau\sin\varphi)[1-2\tau(1-\tau\sin\varphi)\cos\varphi]d\tau=$$
$$=\int_0^r[1-2\tau(\tau-\tau^2\sin\varphi)\cos\varphi](\tau-\tau^2\sin\varphi)'_r\,dr=$$
$$=(r-r^2\sin\varphi)^2\cos\varphi.$$

It means that

$$U(\varphi,r)=v-v^2\cos\varphi,$$

where $v=r-r^2\sin\varphi.$ So we expect that reflecting function of the equation will be given by relation $F+F^2\sin\varphi=r-r^2\sin\varphi.$ Therefore

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{1-2r\sin\varphi}{1+2F\sin\varphi},\ \frac{\partial F}{\partial\varphi}=\frac{-(r^2+F^2)\cos\varphi}{1+2F\sin\varphi}.$$

We can rewrite the equation in the form

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{v^2\sin\varphi}{1-2v\cos\varphi}+\frac{r^2\cos\varphi}{1-2r\sin\varphi}\times\frac{dr}{d\varphi}=$$
$$=r^2\left(\frac{(1-r\sin\varphi)^2(1-2r\sin\varphi)\sin\varphi}{(1-2v\cos\varphi)(1-2r\sin\varphi)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\varphi-2r(1-r\sin\varphi)\cos^2\varphi}{(1-2v\cos\varphi)(1-2r\sin\varphi)}\right).$$

We can write the main relation for the reflecting function F for which $v(-\varphi,F)\equiv v(\varphi,r)$ as follows

$$\frac{-(r^2+F^2)\cos\varphi}{1+2F\sin\varphi}+\frac{1-2r\sin\varphi}{1+2F\sin\varphi}\times$$
$$\times\left(\frac{v^2\sin\varphi}{1-2v\cos\varphi}+\frac{r^2\cos\varphi}{1-2r\sin\varphi}\right)+$$
$$+\frac{-v^2\sin\varphi}{1-2v\cos\varphi}+\frac{F^2\cos\varphi}{1+2F\sin\varphi}=0.$$

This relation is identity, as the reader can see. So the function $F=F(\varphi,r)$ is reflecting function of the equation under consideration and the point $r=0$ is center.

The equation from example 2.1. is equivalent to any equation of the form

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{r^2\cos\varphi+S(\varphi,v)}{1-2r\sin\varphi},$$

where $S(-\varphi,v)\equiv S(\varphi,v).$

The next theorem allow us to replace the consideration of one equation by another.

***Theorem* 2.3.** *Suppose the polynomial* $S(\varphi,r)$ *with respect to* r *and with differentiable coefficients satisfy the following identities*

$$\frac{\partial S}{\partial\varphi}Q-S\frac{\partial Q}{\partial\varphi}+\frac{\partial S}{\partial r}P-\frac{\partial P}{\partial r}S\equiv 0.$$

Then for every continuous and odd function $\alpha(\varphi)$ *the reflecting function of the equation* $\frac{dr}{d\varphi}=\frac{P(\varphi,r)}{Q(\varphi,r)}$ *coincides with the reflecting function of the equation*

$$\frac{dr}{d\varphi}\frac{P(\varphi,r)+\alpha(\varphi)S(\varphi,r)}{Q(\varphi,r)}.$$

For the proof it is sufficient to use the property 7^0 with $\Delta=\frac{S(\varphi,r)}{Q(\varphi,r)}.$

***Example* 2.2.** The equation

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{P_2(\varphi)r^2+P_3(\varphi)r^3}{1+(cq(\varphi)+c_0)r+q(\varphi)r^2},$$

where P_2,P_3,q are continuous 2π-periodic functions and c,c_0 – constants, is equivalent to the equation

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{P_2(\varphi)r^2+P_3(\varphi)r^3+\alpha(\varphi)[r^2+cq(\varphi)r^3]}{1+(cq(\varphi)+c_0)r+q(\varphi)r^2},$$

where $\alpha(\varphi)$ is odd continuous. So when $P_2(\varphi) = -\alpha(\varphi)$ or when $P_3(\varphi) = -c\alpha(\varphi)q(\varphi)$ the investigation of the first equation is very simple.

REFERENCES

1. Poincaré, H. Me'moire sur les courbes de'finite par une e'quation diffe'rentielle / H. Poincaré. – OGIZ, M.-L., 1947 (In Russian).

2. *Liapunov*, *A.M.* Sobranie Sochinenij. – T. 2 / A.M. Liapunov. – Publisher Academy of Sciences of the USSR, 1956.

3. *Nemytskij*, *V.V*. Qualitative Theory of Differential Equations / V.V. Nemytskij, V.V. Stepanov. – OGIZ, M.-L., 1947 (In Russian).

4. *Sibirski*, *K.S*. Algebraic Invariants of Differential Equations and Matrix's / K.S. Sibirski. – Kishinev: Stiintsa, 1976.

5. *Amelkin*, *V.V*. Nonlocal Oscillations in two Dimencial Systems / V.V. Amelkin, N.A. Lukashevich, A.P. Sadovskij. – Minsk: BSU, 1982.

6. *Arnold*, *V.I*. Ordinary Differential Equations / V.I. Arnold, Ju.S. Iljashenko // Contemporary Problems of Mathematics. Fundamental Directions. – T. 1. – M, 1985.

7. *Mironenko*, *V.I*. Reflecting Function and Classification of Periodic Differential Systems / V.I. Mironenko // Differents. Equation. – 1984. – T. XX, № 9. – P. 1635–1638.

8. *Mironenko*, *V.I*. Reflecting Function and Periodic Solutions of Differential Equations / V.I. Mironenko. – Minsk: Universitetskoe, 1986.

9. *Mironenko*, *V.V*. Disturbances of Differential Systems which do not Change Time- symmetries / V.I. Mironenko // Differents. Equations. – 2004. – T. 40, № 10. – P. 1325–1332.

10. *Mironenko*, *V.I*. Reflecting Function and Investigations Multidimensial Differential Systems / V.I. Mironenko. – Gomel: GSU of F. Skorina. – Gomel, 2004.

11. *Mironenko*, *V.I*. How to construct Equivalent Differential Systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Appl. Math. Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.

12. *Zorich*, *V.A*. Mathematical Analysis. Part. 1 / V.A. Zorich. – M: Nauka, 1981 (In Russian).

Поступила в редакцию 04.03.2020.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛИОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ВТОРОГО РОДА

Н.В. Рябченко, Д.А. Волков, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

A CRITERION FOR THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF POLYORTHOGONAL POLYNOMIALS OF THE SECOND TYPE

N.V. Ryabchenko, V.A. Volkov, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

В работе введены новые понятия: допустимый индекс, почти совершенная система функций. С помощью этих понятий для произвольной системы степенных рядов лорановского типа сформулирован и доказан критерий единственности ассоциированного с этой системой полиортогонального многочлена, найден явный вид этого многочлена, а также явный вид многочленов, стоящих в числителе и знаменателе соответствующих аппроксимаций Паде. Доказанные утверждения дополняют хорошо известные результаты в теории полиортогональных многочленов и аппроксимаций Паде.

***Ключевые слова**: аппроксимации Паде, полиортогональные многочлены, нормальный индекс, совершенная система, определители Ганкеля.*

New concepts are introduced in the work: an admissible index and an almost perfect system of functions. Using these concepts for an arbitrary system of power series of Laurent type a criterion for the uniqueness of an associated with this system of a polyorthogonal polynomial is formulated and proved. The explicit form of this polynomial is found, as well as the explicit form of polynomials standing in the numerator and denominator of the corresponding of Pade approximations. The propositions proved complement the well-known results the in theory of polyorthogonal polynomials and Pade approximations.

Keywords: *Padé approximations*, *polyorthogonal polynomials*, *normal index*, *perfect system*, *Hankel determinant.*

Введение

Многочлены, удовлетворяющие нестандартным условиям ортогональности, естественным образом возникают в качестве общего знаменателя аппроксимаций Паде для системы марковских функций [1, с. 158]. В этом контексте их принято называть *полиортогональными* многочленами (другое название – «multiple orthogonal polynomial»). Для полиортогональных многочленов соотношения ортогональности распределены между несколькими мерами $\mu_1,...,\mu_k$. Особый интерес представляют такие меры, для которых общую теорию ортогональных многочленов можно распространить на полиортогональные многочлены. Ряд важных и основополагающих результатов в этом направлении исследований получен в [2]–[7]. Например [6], если для каждого j мера μ_j абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и на контуре Δ_j представима в виде $\mu_j(z)=\omega_j(z)dz$, а весовая функция ω_j удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению Пирсона, то полиортогональный многочлен может быть представлен с помощью формулы Родрига.

Будем рассматривать близкую по постановке задачу. В классической теории ортогональных многочленов хорошо известно представление ортогонального многочлена Q_n в детерминантном виде:

$$Q_n(z)=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}, \qquad (0.1)$$

где $s_i=\int_\Delta x^i d\mu(x),\ i=0,1,...$ – последовательность степенных моментов меры μ, носитель которой совпадает с отрезком ортогональности Δ. Многочлен Q_n является n-ым ортогональным многочленом для марковской функции

$$f(z)=\int_\Delta \frac{d\mu(x)}{z-x}, z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta,$$

которая может быть представлена степенным рядом

$$f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{s_i}{z^{i+1}}.$$

Тождество (0.1) устанавливается (см., например, [8, с. 333]) в результате процесса ортогонализации Гильберта – Шмидта линейно независимой системы $1,x,...,x^n$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ.

© *Рябченко Н.В., Волков Д.А., Старовойтов А.П.*, 2020

В данной работе, в частности, доказывается, что аналогичное представление справедливо и для полиортогонального многочлена, если известны степенные моменты мер μ_j. Более того, мы рассматриваем понятие ортогональности в более широком смысле (см., например, [1, с. 60], [9]), когда ортогональный многочлен определяется для произвольной последовательности $\{s_i\}$, не связанной никакими ограничениями. В этой общей ситуации найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности полиортогонального многочлена, при выполнении которых он представляется в детерминантном виде аналогично равенству (0.1).

1 Полиортогональные многочлены. Определения и свойства

Множество k-мерных мультииндексов (индексов) $n=(n_1,...,n_k)$, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок индекса $n=(n_1,...,n_k)$ – это сумма $|n|:=n_1+...+n_k$.

Пусть $s=(s_0,s_1,...)$ – произвольная последовательность комплексных чисел. В комплексном линейном пространстве $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, состоящем из многочленов, определим линейный функционал $\mathfrak{S}_s$: если $T\in\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, $n\in\mathbb{Z}_+^1$ и

$$T(z)=t_0+t_1z+...+t_nz^n,$$

то полагаем

$$\mathfrak{S}_s(T(z)):=t_0s_0+t_1s_1+...+t_ns_n.$$

Рассмотрим теперь k произвольных последовательностей $s^j=(f_0^j,f_1^j,...)$ и соответствующий им набор (систему) $f=(f_1,...,f_k)$, вообще говоря, формальных степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f_i^j}{z^{i+1}},\ j=1,2,...,k. \qquad (1.1)$$

Обозначим через $\mathfrak{S}_{s^j}$ функционал, соответствующий последовательности s^j.

***Определение* 1.1.** *Пусть $n=(n_1,...,n_k)\in\mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Тождественно не равный нулю многочлен $Q=Q_{|n|}$, $\deg Q\leqslant|n|$ будем называть n-ым полиортогональным многочленом* (II-*го типа*) *для набора формальных степенных рядов* (1.1), *если*

$$\mathfrak{S}_{s^j}(Q(z)\cdot z^{\nu})=0,\quad \nu=0,1,...,n_j-1;\ j=1,2,...,k. \qquad (1.2)$$

Здесь предполагается, что $n_j\neq0$. Если $n_{j_0}=0$, то в (1.2) *индекс j пробегает значения $\{1,...,j_0-1,j_0+1,....,k\}$, т. е. последовательность s^{j_0} и ряд f_{j_0} в определении полиортогонального многочлена не участвуют. Для $n=(0,...,0)$ 0-ым полиортогональным многочленом по определению считаем $Q(z)\equiv1$.*

***Определение* 1.2.** *Многочленами второго рода для n-го полиортогонального многочлена Q назавём многочлены*

$$P_j(z)=\mathfrak{S}_{s^j}\left(\frac{Q(z)-Q(\lambda)}{z-\lambda}\right),\ j=1,2,...,k,$$

где $\mathfrak{S}_{s^j}$ действует на многочлен переменной λ.

***Определение* 1.3.** *Компоненты вектора*

$$\pi_n=\left(\frac{P_1}{Q},...,\frac{P_k}{Q}\right)$$

называют n-ми совместными диагональными аппроксимациями Паде для набора f, а пару (Q,P), где $P=(P_1,...,P_k)$, называют n-ой парой Паде.

В том случае, когда μ_j при каждом $j=1,...,k$ является положительной борелевской мерой на вещественной прямой с компактным бесконечным спектром, носителем которой являются отрезок Δ_j, а

$$f_j(z)=\int_{\Delta_j}\frac{d\mu_j(x)}{z-x},\ z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_j,\ j=1,2,...,k \qquad (1.3)$$

– соответствующий набор марковских функций, соотношения ортогональности (1.2) принимают привычный вид:

$$\int_{\Delta_j}Q(x)\cdot x^{\nu}d\mu_j(x)=0,$$

$$\nu=0,1,...,n_j-1;\ j=1,2,...,k.$$

При этом функция f_j представляется соответствующим рядом (1.1), где

$$f_i^j=\int_{\Delta_j}x^i d\mu_j(x),\ i=0,1,...$$

– последовательность степенных моментов меры μ_j, а многочлены второго рода для n-го полиортогонального многочлена Q представляются в виде [1, с. 158]

$$P_j(z)=\int_{\Delta_j}\frac{Q(z)-Q(x)}{z-x}d\mu_j(x),\ j=1,2,...,k.$$

Полиортогональный многочлен Q условиями (1.2) определяется не однозначно, а с точностью до мультипликативного множителя. Эта неединственность может быть и более существенной. Приведём соответствующий пример.

***Пример* 1.1.** Пусть $k=2$, $n=(1,1)$. Тогда для функций

$$f_1(z)=-f_2(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+...$$

многочлен Q_2 с точностью до множителя представим в виде:

$$Q_2(z)=(a+bz)-\frac{1}{4}(a+2b)z^2,$$

где a и b – любые действительные числа.

***Определение* 1.4.** *Будем говорить, что n-ый полиортогональный многочлен Q однозначно определяется условиями* (1.2), *если для любых двух таких многочленов Q', Q'' найдётся комплексное число λ, что $Q'' \equiv \lambda Q'$.*

Центральными в теории полиортогональных многочленов являются понятия нормального индекса и совершенной системы.

***Определение* 1.5.** *Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ называется нормальным для системы f, если для любого n-го полиортогонального многочлена Q имеем* $\deg Q = |n|$.

Хорошо известно [1, с. 54], что при $k=1$ индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ является нормальным тогда и только тогда, когда определитель Ганкеля H_n, элементами которого являются коэффициенты ряда f_1,

$$H_0 = 1, H_1 = f_0^1,$$

$$H_n = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{n-1}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \dots & f_{2n-2}^1 \end{vmatrix}, n > 1$$

отличен от нуля. Для $k>1$ критерий нормальности индекса нам неизвестен. Заметим также, что нулевой индекс $n=(0,...,0)$ является нормальным для любой системы f.

***Определение* 1.6.** *Система f называется совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются нормальными для f.*

Например, если носители Δ_j мер μ_j попарно не перекрываются (не имеют общих внутренних точек), то система $f=(f_1,...,f_k)$, состоящая из марковских функций (1.3), является совершенной [1, с. 159]. В цитируемых выше работах рассматриваются только совершенные системы. Поскольку нормальность индекса n является достаточным условием единственности n-го полиортогонального многочлена Q, то для совершенных систем такой многочлен существует и единственен (в смысле принятого определения) при любом $n \in \mathbb{Z}_+^k$. Следующий пример показывает, что нормальность индекса n не является необходимым условием единственности многочлена Q.

***Пример* 1.2**. Пусть $k=1,\ n=2,$ а

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{8}{z^4} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{16}{z^4} + ...$$

Тогда с точностью до числового множителя

$$Q_2(z) = z - 2,$$

т. е. многочлен Q_2 определяется однозначно, в то время, как индекс $n=2$ не является нормальным, поскольку $\deg Q_2 \neq 2$.

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и систему f, при которых n-ый полиортогональный многочлен определяется однозначно. Прежде чем это сделать, отметим, что для некоторых известных совершенных систем f полиортогональные многочлены хорошо изучены и нашли применение в различных областях алгебры, анализа, теоретической физики, в том числе, в рамках теории аппроксимаций Паде (см., например, [10]–[16]). В одномерном случае хорошо известно, что n-ый ортогональный многочлен Q является знаменателем n-ой подходящей дроби (в нашей терминологии – аппроксимации Паде π_n), так называемой чебышёвской непрерывной дроби ряда f_1. Точно также при $n \in \mathbb{Z}_+^k$ n-ый полиортогональный многочлен Q можно определить как общий знаменатель совместных аппроксимаций Паде для системы $f=(f_1,...,f_k)$ [1, с. 158–159]. Отметим, что случаи $k=1$ и $k>1$ существенно различны. При $k=1$ для любой пары Паде (Q,P) отношение P/Q определяет одну и ту же рациональную функцию. В многомерном случае вектор π_n определяется, вообще говоря, неоднозначно. Для заданных $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и f вектор π_n определен однозначно, если однозначно определен соответствующий n-ый полиортогональный многочлен Q_n. Например, если система f – совершенна.

2 Критерий единственности. Явный вид полиортогонального многочлена

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Для $n_j \neq 0$ определим матрицы порядка $n_j \times (|n|+1)$

$$F^j = \begin{pmatrix} f_0^j & f_1^j & \dots & f_{|n|}^j \\ f_1^j & f_2^j & \dots & f_{|n|+1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_j-1}^j & f_{n_j}^j & \dots & f_{|n|+n_j-1}^j \end{pmatrix}, j = 1,2,...,k;$$

а затем матрицу порядка $|n| \times (|n|+1)$

$$F_n = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^k \end{bmatrix}.$$

При $n_j = 0$ матрица F_n не содержит блок-матрицу F^j. Если к матрице F_n добавить в качестве последней строки строку

$$E(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & \dots & z^{|n|-1} & z^{|n|} \end{pmatrix},$$

то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы имеет вид

$$det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ 1 & z & \dots & z^{|n|} \end{vmatrix}. \qquad (2.1)$$

***Определение* 2.1.** *Индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *будем называть допустимым для f, если ранг матрицы* F_n *равен* $|\, n\,|$.

В примере 1.1 индекс $n = (1,1)$ не является нормальным и не является допустимым, а в примере 1.2 индекс $n = 2$ не является нормальным, но является допустимым для рассматриваемых в этих примерах систем функций.

***Определение* 2.2.** *Систему f будем называть почти совершенной, если все индексы* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *являются допустимыми для f.*

Сформулируем и докажем основную теорему.

***Теорема* 2.1.** *Для того, чтобы для ненулевого индекса* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *и системы f n-ый полиортогональный многочлен* $Q_{|n|}$ *определялся условиями* (1.2) *однозначно, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был допустимым для f, т. е.* $\operatorname{rang} F_n = |\, n\,|$.

Если $rang F_n = |\, n\,|$, *то при определённом выборе мультипликативного множителя полиортогональный многочлен* $Q_{|n|}$ *представляется в виде*

$$Q_{|n|}(z) = det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T. \qquad (2.2)$$

Доказательство. Пусть многочлен

$$Q_{|n|}(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{|n|} z^{|n|}.$$

удовлетворяет условиям (1.2). Тогда система уравнений для определения коэффициентов $b_0, \dots, b_{|n|}$ в матричной форме примет вид:

$$F_n \times b^T = \theta^T, \qquad (2.3)$$

где $b = (b_0, b_1, \dots, b_{|n|})$ – матрица-строка, а θ – матрица-строка порядка $1 \times (|\, n\,| + 1)$, все элементы которой равны нулю. Поскольку система (2.3) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то согласно теореме Кронекера – Капелли она имеет ненулевое решение, а множество всех её линейно независимых решений состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $rang F_n = |\, n\,|$. В этом случае все её ненулевые решения можно получить умножением фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Первая часть теоремы 2.1 доказана.

Пусть теперь $F_n = |\, n\,|$. Покажем, что в этом случае многочлен $Q_{|n|}$, определённый формулой (2.2), действительно является решением системы (2.3). Разлагая определитель в (2.1) по элементам последней строки, легко заметить, что $\deg Q_{|n|} \leqslant |\, n\,|$, и, по крайней мере, один из коэффициентов этого многочлена отличет от нуля, т. е. $Q_{|n|}$ тождественно не равен нулю. Остаётся доказать, что многочлен $Q_{|n|}$ удовлетворяет условиям (1.2). Для этого, предположив, что $n_j \neq 0$, применим функционал $\mathfrak{S}_{s^j}$ к последней строке определителя (2.2), которую предварительно умножим на z^{ν}. В результате получим

$$\mathfrak{S}_{s^j}(Q_{|n|}(z) \cdot z^{\nu}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^j & f_1^j & \dots & f_{|n|}^j \\ f_1^j & f_2^j & \dots & f_{|n|+1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_j-1}^j & f_{n_j}^j & \dots & f_{|n|+n_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{\nu}^j & f_{\nu+1}^j & \dots & f_{|n|+\nu}^j \end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

$$j = 1, 2, \dots, k.$$

При $\nu = 0, 1, \dots, n_j - 1$ определитель в (2.4) имеет две одинаковые строки. Поэтому он равен нулю. Таким образом условия (1.2) для многочлена $Q_{|n|}$ выполняются. □

3 Замечания и следствия

В первую очередь следует сказать, что если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ не является допустимым для *f*, то многочлен $Q_{|n|}$, определённый равенством (2.2), не являются *n*-м полиортогональным многочленом для *f*. Так для системы (f_1, f_2) из примера 1.1 многочлен $Q_2(z) = (a + bz) - (a + 2b)z^2 / 4$. Однако, если этот многочлен находить по формуле (2.2), то получим, что $Q_2(z) \equiv 0$.

Легко заметить, что компонента n_j мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ определяет число коэффициентов ряда f_j, которое учитывается при построении многочленов $Q_{|n|}$. Если, например, $n = (n_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то $|\, n\,| = n_1$. Отождествляя n_1 с *n* получим представление

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \dots & f_{2n-1}^1 \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix},$$

совпадающее с классической формулой (0.1).

Опираясь на теорему 2.1, с помощью тех же рассуждений, что и в одномерном случае, нетрудно получить критерий нормальности индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ при $k > 1$.

***Следствие* 3.1.** *Ненулевой индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *является нормальным для* f *тогда и только тогда, когда определитель*

$$H_n^k = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|-1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-2}^k \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как и раньше считаем, что при $n_j = 0$ *в определителе* H_n^k *отсутствует блок, состоящий из коэффициентов ряда* f_j, *при* $n = (0,...,0)$ $H_0^k = 1$, *а, например, при* $n = (1,0,...,0)$ $H_n^k = f_0^1$.

Следствие 3.1 позволяет сделать вывод о том, что любая совершенная система является почти совершенной системой. Обратное утверждение, очевидно, неверно.

***Следствие* 3.2.** *Полиортогональный многочлен* Q_n *определен однозначно для всех мультииндексов* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *тогда и только тогда, когда система* f *является почти совершенной.*

Будем искать явный вид многочленов второго родя для *n*-го полиортогонального многочлена (1.2). Для этого к матрице F_n добавить в качестве последней строки строку

$$(f_{n_j+i-1}^j f_{n_j+i+1}^j \dots f_{|n|+n_j+i-2}^j f_{|n|+n_j+i-1}^j).$$

Определитель полученной квадратной матрицы обозначим через $d_{n,i}^j$ Рассмотрим также функциональную матрицу-строку порядка $1 \times (|n|+1)$

$$E_j(z) = $$

$$= \left(0 \; f_0^j \; f_0^j z + f_1^j \; \dots \sum_{p=0}^{|n|-2} f_p^j z^{|n|-p-2} \sum_{p=0}^{|n|-1} f_p^j z^{|n|-p-1} \right).$$

***Следствие* 3.3.** *Если* $rang F_n = |n|$, *а n-ый полиортогональный многочлен* $Q_{|n|}$ *определяется формулой* (1.2), *то справедливы представления:*

$$P_j(z) = det \left[F^1 \quad F^2 \quad \dots \quad F^k \quad E_j(z) \right]^T, \quad (3.1)$$

$$Q_{|n|}(z) f_j(z) - P_j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{n_j+i}}. \quad (3.2)$$

Функцию $Q_{|n|}(z) f_j(z) - P_j(z)$ *называют j-ой остаточной функцией для пары* (Q, P).

Доказательство. По определению многочлен $P_j(z)$ определяется равенством

$$P_j(z) = \mathfrak{S}_{s^j} \left(\frac{Q(z) - Q(\lambda)}{z - \lambda} \right).$$

Определитель $(Q(z) - Q(\lambda))/(z - \lambda)$ отличается от определителя, стоящего в правой части равенства (2.2), только последней строкой: место строки $E(z)$ в нем стоит строка

$$\left(0 \quad 1 \quad z + \lambda \quad z^2 + z\lambda + \lambda^2 \quad \dots \quad \sum_{p=0}^{|n|-1} z^{|n|-p-1} \lambda^p \right).$$

Применяя функционал $\mathfrak{S}_{s^j}$ к последней строке этого определителя, получим (3.1).

Чтобы найти явный вид *j*-ой остаточной функцией для пары (Q, P), рассмотрим

$$Q_{|n|}(z) f_j(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^i} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i-|n|+1}} \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

При $n_j \neq 0$ в определителе (3.3) выделим блок F^j. Далее, вычтем из последней строки этого определителя первую строку блока F^j, умноженную на z^{-1}, вторую строку блока F^j, умноженную на z^{-2}, и так далее, вплоть до последней строки блока F^j, умноженной на z^{-n_j}. В результате вместо определителя (3.3) получим равный ему определитель, у которого в последней строке ряды имеют лакуны длинной n_j. Сохраняя только начальные строки этих рядов, придём к определителю $P_j(z)$, для которого, с учетом проделанных преобразований,

$$Q_{|n|}(z) f_j(z) - P_j(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ \sum_{i=n_j}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}} & \sum_{i=n_j}^{\infty} \frac{f_{i+1}^j}{z^{i+1}} & \dots & \sum_{i=n_j}^{\infty} \frac{f_{i+|n|}^i}{z^{i+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{n_j+i}}.$$

Здесь мы воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Очевидно, что предыдущее равенство справедливо и при $n_j = 0$. Заметим также, что ряд в (3.2) является формальным, если соответствующий ряд в (1.1) является формальным.

В заключении заметим, что аналогичные результаты получены нами и для полиортогональных многочленов I-го типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

2. *Aptekarev*, *A.I.* Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi-Bessel polynomials / A.I. Aptekarev, F. Marcellán, I. Rocha // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 1. – P. 177–146.

3. *Aptekarev*, *A.I.* Multiple orthogonal polynomials /A.I. Aptekarev // Comput. Appl. Math. – 1998. – Vol. 99, № 1–2. – P. 423–447.

4. *Aptekarev*, *A.I.* The genetic sums' representation for the moments of a system of Stieltjes functions and its application / A.I. Aptekarev, V. Kaliaguine, J. Van Iseghem // Constr. Approx. – 2000. – Vol. 16. – P. 487–524.

5. *Van Assche*, *W.* Some classical multiple orthogonal polynomials / W. Van Assche, E. Coussement // J. Comput. Appl. Math. – 2001. – Vol. 127. – P. 317 – 347.

6. *Aptekarev*, *A.I.* Multiple orthogonal polynomials for classcal weights / A.I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche // Transactions of the American Mathematical Society – 2003. – Vol. 355, № 10. – P. 3887–3914.

7. *Kuijlaars*, *A.B.J.* Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights / A.B.J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein, F. Wielonsky // Comm. Math. Phys. – 2009. – Vol. 286, № 1. – P. 217–275.

8. *Натансон*, *И.П.* Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

9. *Frank*, *E.* Orthogonality properties of C-fractions / E. Frank // Bull. Amer. Math. Soc. – 1955. – Vol. 58. – P. 384–390.

10. *Beukers*, *F.* A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ / F. Beukers // Bull. London Math. Soc. – 1979. – Vol. 11. – P. 268–272.

11. *Сорокин*, *В.Н.* Аппроксимации Эрмита – Паде для систем Никишина и иррациональность числа $\zeta(3)$ / В.Н. Сорокин // УМН – 1994. – Т. 49, № 2. – P. 167–168.

12. *Калягин*, *В.А.* Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сб. – 1994. – Т. 185, № 6. – P. 79–100.

13. *Aptekarev*, *A.I.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.

14. *Daems*, *E.* Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions / E. Daems, A.B.J. Kuijlaars // J. Approx. Theory. – 2007. – Vol. 146, № 1. – P. 91–114.

15. *Kuijlaars*, *A.B.J.* Singular values of products of Ginibre random matrices, multiple orthogonal polynomials and hard edge scalings / A.B.J. Kuijlaars, L. Zhang // Comm. Math. Phys. – 2014. – Vol. 332, № 2. – P. 750–781.

16. *Mukhin*, *E.* Multiple orthogonal polynomials and a counterexample to the Gaudin Bethe Ansatz conjecture / E. Mukhin, A. Varchenko // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – Vol. 359, № 11. – P. 5383–5418.

Поступила в редакцию 05.05.2020.

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.912

СИНТЕЗ ЗАПРОСОВ И ПОИСК АЛЬТЕРНАТИВ В СИСТЕМЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

С.Ф. Липницкий

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск

QUERY SYNTHESIS AND SEARCH OF ALTERNATIVES IN THE SYSTEM OF INFORMATION SUPPORT FOR DECISION MAKING

S.F. Lipnitsky

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Предлагается математическая модель синтеза запросов и веб-поиска альтернатив в системе информационной поддержки процессов принятия решений. В рамках модели решены задачи вычисления информативности слов, предложений и текстов, а также информативности вербальной ассоциации между ними. Приведены описания алгоритмов синтеза запросов, поиска веб-страниц и фактографической информации.

***Ключевые слова**: индексирование, информативность, информационный поиск, математическая модель, принятие решений, синтез запросов.*

A mathematical model of query synthesis and web search of alternatives in the information support system for decision-making processes is proposed. Within the framework of the model, the problems of calculating the information content of words, sentences and texts, as well as the information content of the verbal association between them are solved. Descriptions of the algorithms for query synthesis, search for web pages and factual information are described.

Keywords: *indexing, informativeness, information retrieval, mathematical model, decision making, query synthesis.*

Введение

Процесс принятия решений в различных предметных областях включает, как правило, следующие основные этапы:

– описание проблемной ситуации и постановка задачи принятия решения;

– поиск вариантов (альтернатив) решения поставленной задачи;

– выбор критериев оценки альтернатив для описания вариантов решения;

– выявление ограничений на критерии;

– принятие решения с учетом результатов оценки альтернатив.

При вербальном анализе решений используется качественная (нечисловая) информация на всех его этапах [1].

В данной статье предлагается математическая модель синтеза запросов и веб-поиска альтернативных решений путем исследования вербальных ассоциаций между предложениями в описании проблемной ситуации [2]. Процесс синтеза запросов и поиска альтернатив осуществляется в три этапа.

На первом этапе предложения из текста, содержащего описание проблемной ситуации, классифицируются с учетом информативности вербальной ассоциации между ними.

На втором этапе вычисляется информативность каждого класса. Наиболее информативные из сформированных классов после их индексирования используются в качестве запросов на веб-поиск альтернативных вариантов решения поставленной задачи.

На третьем этапе осуществляется поиск таких вариантов.

1 Классификация предложений в описании проблемной ситуации

Пусть $T = \langle \rho_1, \rho_2, ..., \rho_l \rangle$ – описание проблемной ситуации, где $\langle \rho_1, \rho_2, ..., \rho_l \rangle$ – кортеж предложений текста T. Процессу разбиения кортежа предложений на классы предшествуют процедуры вычисления информативности вербальной ассоциации между словами предложений и между самими предложениями.

1.1 Информативность вербальной ассоциации между словами. Пусть Ct_i $(i = \overline{1, n};$ $n \geq 1)$ – тематические корпусы текстов, а $Cf = \bigcup_{i=1}^{n} Ct_i$ – полный корпус, объединяющий все тематические. Обозначим через W множество всех словоформ корпуса Cf, а через $\prec_W$ – отношение строгого порядка на W (транзитивное и антирефлексивное бинарное отношение). Определим, кроме того, на множестве W антирефлексивное и антисимметричное бинарное отношение Θ, такое, что любая пара слов (a, b) из множества W является элементом отношения Θ тогда и только тогда, когда слова a и b из этой пары содержатся хотя бы в одном предложении

© *Липницкий С.Ф.*, 2020

корпуса *Cf* и выполняется соотношение $a \prec_W b$. Отношение Θ назовем отношением вербальной ассоциации слов в полном корпусе текстов *Cf*.

Информативность вербальной ассоциации между произвольными словами *a* и *b* некоторого предложения определим как вероятность его появления в корпусе *Cf*. При практической реализации информационной системы под указанной информативностью будем понимать дробь

$$I_{Cf}^{ab} = n_{Cf}^{ab} / N_{Cf}, \qquad (1.1)$$

где n_{Cf}^{ab} – количество всех предложений в полном корпусе текстов *Cf*, в которых присутствуют слова *a* и *b* или их синонимы и словоизменения, а N_{Cf} – количество всех предложений в корпусе *Cf*.

В развернутом виде формулу (1.1) можно переписать, используя информацию, которую содержат специальные лингвистические словари:

– частотный словарь словоформ

$$Dic_a = \{\langle a,\ n_{Cf}^a,\ n_{Ct_1}^a,\ n_{Ct_2}^a, \ldots,\ n_{Ct_n}^a \rangle \mid a \in W_{Cf}\},$$

в котором каждой словоформе приписаны частоты ее встречаемости n_{Cf}^a, $n_{Ct_1}^a$, $n_{Ct_2}^a$, …, $n_{Ct_n}^a$ во всех корпусах текстов;

– словарь вербально-ассоциативных пар слов

$$Dic_{ab} = \{\langle (a, b),\ I_{Cf}^{ab} \rangle \mid a, b \in \pi, \pi \in Cf\},$$

в котором каждой паре слов поставлена в соответствие информативность их вербальной ассоциации;

– словарь словоизменительных парадигм

$$Dic_{par} = \{(a, Par_a) \mid a \in W_{Cf}, a \in Par_a\},$$

состоящий из пар ⟨*словоформа*, *парадигма*⟩. В позиции парадигмы Par_a представлены все словоизменения данной словоформы *a*;

– словарь синонимичных словоформ

$$Dic_{syn} = \{(a, Syn_a) \mid a \in W_{Cf}, a \in Syn_a\},$$

включающий в себя пары ⟨*словоформа*, *синонимичные словоформы*⟩, в которых каждой словоформе *a* соответствует множество ее синонимов Syn_a.

С учетом информации из словарей формулу (1.1) представим в виде

$$I_{Cf}^{ab} = \frac{n_{Cf}^{ab} + n_{Cf}^{Par_{ab}} + n_{Cf}^{Syn_{ab}}}{N_{Cf}}. \qquad (1.2)$$

Параметр $n_{Cf}^{Par_{ab}}$ в формуле (1.2) указывает на число вхождений всех пар словоформ, являющихся словоизменениями соответственно слов *a* и (или) *b* и встречающимися в одном и том же предложении корпуса текстов *Cf*:

$$n_{Cf}^{Par_{ab}} = \sum_{\substack{c \in Par_a,\ d \in Par_b,\\ c \neq a \text{ и (или) } d \neq b,\\ (c,d) \in \Theta}} n_{Cf}^{cd}.$$

Аналогичное выражение справедливо для параметра $n_{Cf}^{Syn_{ab}}$:

$$n_{Cf}^{Syn_{ab}} = \sum_{\substack{d \in Syn_a,\ f \in Syn_b,\\ d \neq a \text{ и (или) } f \neq b,\\ (d,f) \in \Theta}} n_{Cf}^{df}.$$

1.2 Информативность вербальной ассоциации между предложениями и текстами. Рассмотрим *l*-мерное евклидово пространство *E*. Для его построения лексикографически упорядочим все пары словоформ из полного корпуса текстов *Cf*, т. е. сформируем кортеж

$$\Theta = \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_l, b_l) \rangle.$$

Согласно определению отношения Θ, для каждой пары (a_i, b_i) из данного кортежа существует хотя бы одно предложение в корпусе *Cf*, в котором содержатся обе словоформы a_i и b_i $(i = \overline{1, l})$ и для них справедливо соотношение $a_i \prec_W b_i$.

Пусть π и ρ – два предложения (или два текста) из корпуса *Cf*, а W_π и W_ρ – соответственно множества всех словоформ в этих предложениях, дополненные всеми синонимами и всеми словоизменениями из словарей Dic_{par} и Dic_{syn}.

Построим вектор в пространстве *E*:

$$\mathbf{I}_{Cf}^{\pi\rho} = (I_{Cf}^{a_1 b_1}, I_{Cf}^{a_2 b_2}, \ldots, I_{Cf}^{a_l b_l}). \qquad (1.3)$$

В формуле (1.3) значение информативности $I_{Cf}^{a_i b_i}$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ определяется из словаря вербально-ассоциативных пар слов Dic_{ab}, если $(a_i, b_i) \in \Theta$ и выполняется хотя бы одно из двух условий:

1) $a_i \in W_\pi$, $b_i \in W_\rho$;

2) $b_i \in W_\pi$, $a_i \in W_\rho$.

В противном случае $I_{Cf}^{a_i b_i} = 0$.

С учетом рассмотренных обозначений нормализованную информативность $I_{Cf}^{\pi\rho}$ вербальной ассоциации между предложениями (текстами) π и ρ можно интерпретировать как проекцию вектора $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)$ размерности *l* на направление вектора $\mathbf{I}_{Cf}^{\pi\rho}$, т. е. отношение скалярного произведения векторов $\mathbf{I}_{Cf}^{\pi\rho}$ и $\mathbf{e}$ к длине вектора $\mathbf{I}_{Cf}^{\pi\rho}$:

$$I_{Cf}^{\pi\rho} = \frac{\mathbf{I}_{Cf}^{\pi\rho} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{I}_{Cf}^{\pi\rho}|} = \frac{\sum_{i=1}^{l} I_{Cf}^{a_i b_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{l} (I_{Cf}^{a_i b_i})^2}}. \qquad (1.4)$$

При реализации алгоритма вычисления информативности вербальной ассоциации между предложениями или текстами удобно пользоваться следующей формулой, полученной из выражения (1.4):

$$I_{Cf}^{\pi\rho} = \frac{I_1 + I_2 + \ldots + I_r}{\sqrt{(I_1)^2 + (I_2)^2 + \ldots + (I_r)^2}}, \qquad (1.5)$$

где I_1, I_2, ..., I_r – все отличные от нуля координаты вектора $\mathbf{I}_{Cf}^{\pi\rho}$.

1.3 Описание алгоритма классификации предложений. Алгоритм разбиения кортежа *T* на классы работает следующим образом.

На начальном этапе в качестве единственного элемента первого класса S_1 будем

рассматривать предложение ρ_1. Затем формируются множества словоформ предложений ρ_1 и ρ_2 и по формуле (1.5) вычисляется информативнось вербальной ассоциации между ними. Если вычисленное значение не меньше некоторой пороговой величины ρ_0, то предложение ρ_2 помещается в класс S_1. Далее аналогичным образом вычисляется информативность вербальной ассоциации между предложениями из пар (ρ_1, ρ_3), ... ,(ρ_1, ρ_l). После завершения процесса формирования класса S_1 точно так же формируются и другие классы. В итоге будем иметь совокупность классов $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ $(m \le l)$.

2 Индексирование информативных классов предложений

Среди сформированных классов предложений S_1, S_2, ..., S_m могут быть неинформативные, использование которых в качестве запросов на поиск альтернативных решений поставленной проблемы нецелесообразно. В связи с этим рассмотрим вопросы вычисления информативности классов предложений.

2.1 Информативность слов из полнотекстовых документов. Пусть T – полнотекстовый документ, объем которого обеспечивает вычисление статистических характеристик его словоформ и предложений. Информативность I_T^a слова a из текста T определена в статье [3] как вероятность того, что слово а имеется в данном текстовом документе при условии, что оно содержится в полном корпусе текстов. Рассмотрим совокупность событий (в вероятностном смысле):

– S_D – некоторая словоформа a извлечена случайным образом из текста T ($T \in Cf$);

– H_T – появление текста T;

– S_{Cf} – словоформа a содержится в полном корпусе текстов Cf.

Тогда $I_T^a = P(S_T \mid S_{Cf})$, где $P(S_T \mid S_{Cf})$ – условная вероятность того, что словоформа а извлечена из текста T при условии, что она уже извлечена из полного корпуса текстов Cf. Эта вероятность вычисляется следующим образом:

$$P(S_T / S_{Cf}) = \frac{P(S_T \cdot S_{Cf})}{P(S_{Cf})} = \frac{P(S_T) \cdot P(S_{Cf} / S_T)}{P(S_{Cf})}.$$

Учитывая, что $P(S_{Cf} / S_T) = 1$, воспользовавшись формулой полной вероятности, получим

$$P(S_T / S_{Cf}) = \frac{P(S_T / H_D)}{P(S_{Cf})} \cdot P(H_T).$$

При достаточно больших объемах полного корпуса текстов Ct и текстового документа T можно считать, что

$$P(S_T / H_T) \approx \frac{n_T}{N_T},\ P(S_{Cf}) \approx \frac{n_{Cf}}{N_{Cf}},\ P(H_T) \approx \frac{N_T}{N_{Cf}},$$

где n_T, n_{Cf} – частоты встречаемости (с учетом словоизменения и синонимии) словоформы a в тексте T и полном корпусе текстов Cf, а N_T, N_{Cf} – число вхождений всех словоформ в T и Cf соответственно. Тогда формула для вычисления информативности I_T^a словоформы a в тексте T имеет вид

$$I_T^a = \frac{n_T}{n_{Cf}}. \qquad (2.1)$$

Используя лингвистические словари Dic_{par} и Dic_{syn}, формулу (2.1) перепишем в виде

$$I_T^a = \frac{n_T^a + n_T^{Par_a} + n_T^{Syn_a}}{n_{Cf}^a + N_{Cf}^{Par_a} + N_{Cf}^{Syn_a}}. \qquad (2.2)$$

В формуле (2.2) $n_T^{Par_a}$ – это число вхождений всех словоформ текста T, являющихся словоизменениями словоформы a, т. е.

$$n_T^{Par_a} = \sum_{b \in Par_a,\, b \ne a} n_T^b.$$

Параметр $n_T^{Syn_a}$ означает количество синонимов словоформы a в тексте T:

$$n_T^{Syn_a} = \sum_{c \in Syn_a,\, c \ne a} n_T^c.$$

Аналогичный смысл имеют параметры $N_{Cf}^{Par_a}$ и $N_{Cf}^{Syn_a}$:

$$N_{Cf}^{Par_a} = \sum_{b \in Par_a,\, b \ne a} n_{Cf}^b,$$

$$N_{Cf}^{Syn_a} = \sum_{c \in Syn_a,\, c \ne a} n_{Cf}^c.$$

2.2 Информативность слов из кратких текстовых сообщений. Под кратким сообщением будем понимать текстовый документ, объем которого не позволяет выявить статистические характеристики его словоформ. Поэтому индексированию краткого сообщения предшествует процесс его расширения за счет включения релевантных предложений из полного корпуса текстов.

Рассмотрим краткое текстовое сообщение Q. Обозначим через W_Q множество всех его словоформ. Вычислим информативность $J_{Cf}^{Q\pi}$ вербальной ассоциации между текстом Q и некоторым предложением π из полного корпуса текстов Cf. По аналогии с выражением (1.3) построим вектор $\mathbf{J}_{Cf}^{Q\pi} = (J_{Cf}^{c_1 d_1}, J_{Cf}^{c_2 d_2}, ..., J_{Cf}^{a_k b_k})$ в евклидовом пространстве. Для вычисления информативности $J_{Cf}^{Q\pi}$ воспользуемся аналогом формулы (1.5):

$$J_{Cf}^{Q\pi} = \frac{J_1 + J_2 + ...}{\sqrt{(J_1)^2 + (J_2)^2 + ...}}, \qquad (2.3)$$

где J_1, J_2, ... – все отличные от нуля координаты вектора $\mathbf{J}_{Cf}^{Q\pi}$. Если информативность (2.3) не меньше некоторого критического значения, то предложение π занесем в текст Q. Аналогично

поступим и с другими такими предложениями полного корпуса текстов. В результате получим расширенное множество предложений, которое снова будем считать текстом *Q*.

Информативность I_Q^a любого слова $a \in W_Q$ вычислим по формуле (2.2):

$$I_Q^a = \frac{n_Q^a + n_Q^{Par_a} + n_Q^{Syn_a}}{n_{Cf}^a + N_{Cf}^{Par_a} + N_{Cf}^{Syn_a}}. \qquad (2.4)$$

2.3 Информативность предложений и текстов. При вычислении информативности предложений текста T будем также исходить из их векторного представления: $\mathbf{\Pi} = (I_\pi^{a_1}, I_\pi^{a_2}, ..., I_\pi^{a_l})$, где $I_\pi^{a_1}, I_\pi^{a_2}, ..., I_\pi^{a_l}$ – значения информативности слов произвольного предложения π (компонента вектора **Π** равна нулю, если соответствующего слова нет в предложении π). Тогда, аналогично формуле (2.3), нормализованную информативность I_T^π предложения π будем вычислять по формуле:

$$I_T^\pi = \frac{I_1 + I_2 + ...}{\sqrt{(I_1)^2 + (I_2)^2 + ...}}, \qquad (2.5)$$

где $I_1, I_2, ...$ – значения информативности всех слов предложения π [4].

Информативность произвольного текста *T* из полного корпуса текстов будем вычислять по формуле, аналогичной выражению (2.5):

$$I_{Cf}^T = \frac{I_T^\pi + I_T^\rho + ...}{\sqrt{(I_T^\pi)^2 + (I_T^\rho)^2 + ...}}, \qquad (2.6)$$

где I_T^π, I_T^ρ, ... – значения информативности всех предложений документа *T*.

2.4 Описание алгоритма индексирования классов предложений. Алгоритм индексирования классов предложений из описания проблемной ситуации функционирует в три этапа.

На первом этапе вычисляется информативность каждого из классов предложений S_1, S_2, ..., S_m по формуле (2.6). Класс будем считать информативным, если значение информативности не меньше некоторой пороговой величины. В результате выполнения первого этапа имеем совокупность информативных классов предложений $\{U_1, U_2, ..., U_s\}$ $(s \le m)$. Классы, имеющие недостаточный объем для вычисления статистических характеристик словоформ (т. е. являющиеся краткими сообщениями), дополняются релевантными предложениями из полного корпуса текстов *Cf* с использованием формулы (2.3). Полученные в результате такого расширения новые классы будем использовать в качестве запросов на поиск альтернатив.

На втором этапе вычисляется информативность $I_{U_i}^a$ $(i = \overline{1, s})$ всех словоформ из предложений всех классов U_1, U_2, ..., U_s по формулам (2.2) и (2.4).

На третьем этапе формируются поисковые образы

$$\text{ПП}_i = \{(a, I_{U_i}^a); (b, I_{U_i}^b)); ... \mid a, b, ... \in U_i\}, \quad i = \overline{1, s} \qquad (2.7)$$

всех классов U_1, U_2, ..., U_s предложений из описания проблемной ситуации. Эти поисковые образы будут использованы в качестве поисковых предписаний на поиск альтернативных вариантов решения поставленной задачи в рамках проблемной ситуации.

3 Поиск альтернативных вариантов решения проблемной ситуации

Выявление альтернатив при принятии решений связано с двумя видами информационного поиска – поиска веб-страниц, упорядоченных по убыванию их информативности, и фактографического поиска информативных фрагментов полнотекстовых документов на этих страницах.
При поиске альтернативных вариантов решения поставленной задачи нужно учитывать тот факт, что в Интернете индексируются не сами документы, а веб-страницы, на которых они расположены. Это обстоятельство существенным образом влияет на выбор критериев выдачи и построение алгоритмов поиска альтернатив.

3.1 Критерии выдачи. Под критерием выдачи понимается правило, по которому вычисляется степень соответствия запросу веб-страниц или текстовых документов, найденных в процессе информационного поиска. В большинстве известных информационных систем критерии выдачи строятся на основе векторной модели описания данных [5] в виде косинуса угла между векторами поискового предписания и поискового образа документа. Рассмотрим эту меру близости, используя принятые выше обозначения. Пусть, по-прежнему, *W* – множество всех словоформ полного корпуса текстов *Cf*, а *E* – *m*-мерное евклидово пространство $(m = |W|)$. Для каждой веб-страницы *S* построим вектор ее поискового образа в пространстве *E*: $\mathbf{F}_S = (I_{a_1}, I_{a_2}, ..., I_{a_m})$. Аналогично запишем вектор поискового предписания (2.7):

$$\mathbf{F}_{\Pi\Pi_i} = (I_{b_1}, I_{b_2}, ..., I_{b_m}).$$

Тогда для поиска веб-страниц по поисковому предписанию $\mathbf{F}_{\Pi\Pi_i}$ в качестве критерия выдачи используем косинус угла φ между векторами $\mathbf{F}_S$ и $\mathbf{F}_{\Pi\Pi_i}$:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{F}_S \cdot \mathbf{F}_{\Pi\Pi_i}}{|\mathbf{F}_S| \cdot |\mathbf{F}_{\Pi\Pi_i}|} = \frac{\sum_{j=1}^{m} I_{a_j} I_{b_j}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} (I_{a_j})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (I_{b_j})^2}}. \qquad (3.1)$$

3.2 Описание алгоритма поиска веб-страниц. Поиск альтернативных вариантов при принятии решений осуществляется в три этапа.

На первом этапе предложения текста описания проблемной ситуации разбиваются на классы в соответствии с алгоритмом, описанном в п. 1.3.

На втором этапе выполняется алгоритм из п. 2.4. Согласно этому алгоритму реализуется индексирование информативных классов предложений. В результате индексирования формируется совокупность поисковых предписаний (3.1) для интернет-поиска альтернатив при принятии решений.

На третьем этапе по каждому поисковому предписанию ПП_i $(i = \overline{1, s})$ проводится поиск веб-страниц, содержащих альтернативные варианты решения поставленной задачи в рамках проблемной ситуации. При поиске используется критерий выдачи (3.2). Все найденные страницы упорядочиваются по убыванию его значений.

3.3 Описание алгоритма фактографического поиска. Поиск сводится к выделению в найденных текстах информативных фрагментов, релевантных каждому классу предложений U из множества классов $\{U_1, U_2, ..., U_s\}$ $(s \le m)$. Процедура включает два этапа.

На первом этапе вычисляется информативность I_T^a каждой словоформы a из найденного текста T по формуле, аналогичной выражению (2.2):

$$I_T^a = \frac{n_U^a + n_U^{Par_a} + n_U^{Syn_a}}{n_{Cf}^a + N_{Cf}^{Par_a} + N_{Cf}^{Syn_a}}.$$

Затем определяется информативность I_T^π, I_T^ρ, ... каждого предложения текста T по формуле (2.5).

На втором этапе фактографического поиска выявляется контекстное окружение всех информативных предложений текста T путем вычисления информативности вербальной ассоциации каждого из них с другими предложениями данного текста по формуле (1.5).

Сформированные таким образом фрагменты текстовых документов на найденных веб-страницах могут быть использованы при информационной поддержке процессов принятия решений.

Заключение

Разработана математическая модель синтеза запросов и веб-поиска альтернативных вариантов в системе информационной поддержки процесса принятия решений. Промоделированы три этапа данного процесса. На первом этапе предложения из текста, содержащего описание проблемной ситуации, классифицируются с учетом информативности вербальной ассоциации между ними. На втором этапе вычисляется информативность каждого класса. Наиболее информативные из сформированных классов после их индексирования используются в качестве запросов на веб-поиск альтернативных вариантов решения поставленной задачи. На третьем этапе осуществляется поиск таких вариантов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ларичев*, *О.И.* Вербальный анализ решений / О.И. Ларичев. – М.: Наука, 2006. – 181 с.

2. *Мартинович*, *Г.А.* Вербальные ассоциации и организация лексикона человека / Г.А. Мартинович // Филологические науки. – 1989. – № 3. – С. 39–45.

3. *Липницкий*, *С.Ф.* Модель представления знаний в информационных системах на основе вербальных ассоциаций / С.Ф. Липницкий // Информатика. – 2011. – № 4. – С. 21–28.

4. *Липницкий*, *С.Ф.* Математическая модель синтеза текстов на основе слияния коммуникативных фрагментов / С.Ф. Липницкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 106–110.

5. *Ландэ*, *Д.В.* Поиск знаний в Internet. Профессиональная работа / Д.В. Ландэ. – М.: Диалектика-Вильямс, 2005. – 272 с.

Поступила в редакцию 05.03.2020.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

– соответствовать профилю журнала;

– являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

– содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

– сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

– сведения об авторах;

– экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

– договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу http://pfmt.gsu.by.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal “Problems of Physics, Mathematics and Technics” the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author’s commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).