



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№1 (42) 2020

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (42) 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Аманова М.А., Навныко В.Н., Шепелевич В.В.** Исследование двухволнового взаимодействия на смешанной отражательной голограмме в кристалле $\text{Vi}_{12}\text{TiO}_{20}$ среза (001) 7
- Вилья Н., Голосов Д.А., Мельников С.Н., Нгуен Т.Д., Голосов А.Д., Литвин Э.Е., Лам Н.Н.** Формирование пленок оксида тантала на подложках диаметром 200 миллиметров 12
- Войнова Я.А., Овсюк Е.М.** О проявлении космологической кривизны пространства в модели нейтрального фермиона с тремя массовыми параметрами 18
- Дерюжкова О.М., Парахневич А.С., Ревенок М.А.** Параметры формы и размера деформированных ядер, полученные на основе оцененных ядерных данных 29
- Есман А.К., Зыков Г.Л., Потачиц В.А.** Тонкопленочный солнечный элемент с использованием термоэлектрического слоя 39
- Козадаев К.В.** Комплексообразование данных инерциальных, барометрических, магнитометрических и спутниковых навигационных систем 45
- Кулак Г.В., Крох Г.В., Николаенко Т.В., Шакин О.В.** Дифракция бесселевых световых пучков на поверхностных ультразвуковых волнах Гуляева – Блюстейна в кубических пьезоэлектрических кристаллах 50
- Михеев С.С., Сотский А.Б., Назаров М.М., Сотская Л.И.** Расчет волноводного зонда для терагерцовой спектроскопии слоистой среды 55
- Хорошко В.В., Гременок В.Ф., Шнейдеров Е.Н., Терешкова А.С., Аксенов О.А., Бруй Н.М.** Прогнозирование электрических характеристик фотоэлектрических преобразователей на основе поликристаллического кремния по моделям их деградации 61

МАТЕМАТИКА

- Адарченко Н.М., Скиба А.Н.** Конечные группы с обобщенно σ -субнормальными и σ -перестановочными подгруппами 65
- Балычев С.В., Вегера А.С.** Разрешимые насыщенные формации со свойством \mathcal{P}_2 для конечных групп 74
- Кечко Е.П.** Скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде системы трех экспонент 81
- Нестерович А.В.** Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости 85

ИНФОРМАТИКА

- Демиденко О.М., Якимов Е.А., Денисевич Д.А.** Исследование алгоритмов рационального раскроя листового материала 91

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *Г.Н. Петухова, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 12.03.20. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,39. Уч.-изд. л. 9,92. Тираж 100 экз. Заказ № 147.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2020
© Проблемы физики, математики и техники, 2020
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2020

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 1 (42) 2020

CONTENTS

PHYSICS

Amanova M.A., Naunyka V.N., Shepelevich V.V. Study of two-wave interaction on a mixed reflective hologram in a (001) cut $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ crystal	7
Villa N., Golosov D.A., Melnikov S.N., Nguyen T.D., Golosov A.D., Litvin E.E., Lam N.N. Formation of tantalum oxide films on substrates with a diameter of 200 mm	12
Voynova Ya.A., Ovsyuk E.M. On the manifestation of the cosmological curvature of space in a model of a neutral fermion with three mass parameters	18
Deryuzhkova O.M., Parakhnevich A.S., Revenok M.A. Shape and size parameters of deformed nuclei obtained on the basis of the assessed nuclear data	29
Esman A.K., Zykov G.L., Potachits V.A. Thin-film solar cell with a thermoelectric layer	39
Kozadaev K.V. Integration of data from inertial, barometric, magnetometric and satellite navigation systems	45
Kulak G.V., Krokh G.V., Nikolaenko T.V., Shakin O.V. Diffraction of Bessel light beams by the surface Gulyaev – Blustein’s acoustical waves in cubic piezoelectrical crystals	50
Miheev S.S., Sotsky A.B., Nazarov M.M., Sotskaya L.I. Calculation of the waveguide probe for terahertz spectroscopy of a layered medium	55
Khoroshko V.V., Gremenok V.F., Shneiderov E.N., Tereshkova, A.S. Aksyonov O.A., Bruj N.M. Polycrystalline solar cells electrical characteristics forecasting based on their degradation models	61

MATHEMATICS

Adarchenko N.M., Skiba A.N. Finite groups with generalized σ -subnormal and σ -permutable subgroups	65
Balychev S.V., Vegera A.S. Soluble saturated formations with the \mathcal{P}_2 property for finite groups . .	74
Kechko E.P. The convergence rate of Hermite – Padé approximations of the three exponent system	81
Nestiarovich A.V. Deformation of a three-layer circular plate under cosine loading in its plane . .	85

INFORMATION SCIENCE

Demidenko O.M., E.A. Yakimov, Denisevich D.A. The research of rational cutting algorithms of sheet material	91
--	----

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- **Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА СМЕШАННОЙ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ГОЛОГРАММЕ В КРИСТАЛЛЕ $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ СРЕЗА (001)

М.А. Аманова, В.Н. Навныко, В.В. Шепелевич

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

STUDY OF TWO-WAVE INTERACTION ON A MIXED REFLECTIVE HOLOGRAM IN A (001) CUT $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ CRYSTAL

M.A. Amanova, V.N. Naunya, V.V. Shepelevich

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

Изучены закономерности усиления предметной волны при встречном двухволновом взаимодействии на объемной отражательной смешанной голограмме, сформированной в кубическом оптически активном фоторефрактивном пьезокристалле. Проанализирована зависимость относительной интенсивности предметной световой волны от входных азимутов линейной поляризации опорной и предметной волн при их одновременной дифракции на смешанной отражательной голограмме в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (ВТО). Установлено поляризационное условие для достижения максимальной относительной интенсивности предметной волны для смешанной отражательной голограммы. Показано, что условия достижения максимальной относительной интенсивности предметной волны для фазовой и смешанной отражательных голограмм существенно различаются.

Ключевые слова: смешанная голограмма, двухволновое взаимодействие, относительная интенсивность предметной волны, азимут поляризации, оптическая активность.

The regularities of amplification of subject wave for contra directional two-wave interaction on a volume reflection mixed hologram formed in a cubic optically active photorefractive piezocrystal are studied. The dependence of the relative intensity of the object light wave on the input azimuths of the linear polarization of the reference and subject waves during their simultaneous diffraction by a mixed reflection hologram in a $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO) crystal is analyzed. The polarization condition for achieving the maximum relative intensity of the subject wave for mixed reflection hologram is established. It is shown that the conditions for achieving the maximum relative intensity of the subject wave for phase and mixed reflection holograms are highly different.

Keywords: mixed hologram, two-wave interaction, relative intensity of the subject wave, polarization azimuth, optical activity.

Введение

Схема записи объёмных голографических решеток впервые предложена и изучена Ю.Н. Денисюком [1], [2]. Выполнение таких исследований стимулировало поиск регистрирующих материалов, перспективных для записи и считывания объёмных голограмм.

Для формирования объёмных голограмм широкое применение нашли кубические фоторефрактивные оптически активные пьезокристаллы [3] семейства силленита: силикосилленит висмута $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), германосилленит висмута $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO) и титаносилленит висмута $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (ВТО), принадлежащие классу симметрии 23.

Н. Kogelnik в [4] на основе связанных волн теоретически проанализировал процесс взаимодействия светового излучения с объёмными голографическими решётками в фоторефрактивных кристаллах. В работе автором были рассмотрены различные типы голографических решеток: фазовые, амплитудные и смешанные. Найдены аналитические выражения для расчета дифракционной эффективности голограмм и коэффициент усиления предметной волны при

двухволновом взаимодействии на пропускающих и отражательных голографических решетках.

Теоретический анализ по изучению взаимодействия светового излучения в гиротропных кристаллах на основе ковариантных (бескоординатных) методов был впервые предложен Ф.И. Фёдоровым [5], [6]. На основании полученных результатов были получены постоянные связи в уравнениях связанных волн, записанные в бескоординатной форме, и получено решение системы уравнений связанных волн.

При описании дифракции света на фазовых пропускающих голографических решетках в кубических оптически активных фоторефрактивных пьезокристаллах произвольного среза используется система дифференциальных уравнений связанных волн, полученная В.В. Шепелевичем в [7], [8]. В этих работах представлены аналитические выражения, предназначенные для нахождения дифракционной эффективности пропускающей голограммы, сформированной в кристалле произвольного среза при одновременном взаимодействии двух световых волн. Исследованы условия достижения наибольших энергетических

характеристик объемных фазовых голограмм в кубических фоторефрактивных кристаллах.

Однако в настоящее время практически не изучены особенности взаимодействия световых волн на объемных смешанных голограммах, сформированных в кубических фоторефрактивных пьезокристаллах. Таким образом, целью настоящей работы является исследование зависимости относительной интенсивности предметной волны от входных азимутов линейной поляризации опорной и предметной волн при их одновременной дифракции на смешанной отражательной голограмме в кристалле ВТО, также от толщины исследуемого кристалла.

1 Теоретическая модель

Рассмотрим фоторефрактивный кристалл ВТО с записанной в нем смешанной объемной отражательной голографической решеткой, которой соответствуют волновой вектор \vec{K} и пространственный период Λ (рисунок 1.1). Предположим, что на кристалл падают две линейно поляризованные монохроматические световые волны: опорная \vec{R} и предметная \vec{S} .

На рисунке 1.1 единичные векторы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ образуют ортонормированный базис рабочей системы координат, используемый для задания ориентации кристалла относительно голографического стола. Единичные векторы $(\vec{a}_R, \vec{b}_R, \vec{n}_R)$ и $(\vec{a}_S, \vec{b}_S, \vec{n}_S)$ являются ортонормированными базисами, относительно которых задаются направления распространения и параметры поляризации опорной и предметной волн. Векторы \vec{e}_1, \vec{a}_R и \vec{a}_S параллельны друг другу, а векторы \vec{n}_R и \vec{n}_S совпадают по направлению с волновыми векторами опорной и предметной волн. Векторы $\vec{n}_R, \vec{b}_R, \vec{n}_S, \vec{b}_S, \vec{e}_2$ и \vec{e}_3 лежат в одной плоскости. В кристаллографической системе координат направления единичных векторов

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ определяются следующим образом: $\vec{e}_1 \parallel [100], \vec{e}_2 \parallel [010], \vec{e}_3 \parallel [001]$.

Символами \vec{R} и \vec{S} соответственно обозначены векторы напряженностей электрических полей опорной и предметной волн, лежащие в плоскостях, определяемых парами векторов (\vec{a}_R, \vec{b}_R) и (\vec{a}_S, \vec{b}_S) . Параметры Ψ_R и Ψ_S – азимуты поляризации опорной и предметной волн, определяемые угловым расстоянием между векторами \vec{a}_R и \vec{R}, \vec{a}_S и \vec{S} соответственно. Параметры φ_R и φ_S используются для задания углов Брэгга; их значения равны угловым расстояниям между векторами \vec{e}_1 и $\vec{n}_R, (-\vec{e}_1)$ и \vec{n}_S соответственно.

Решение задачи об одновременной дифракции опорной и предметной волн на отражательной голографической решетке, сформированной в оптически активном фоторефрактивном пьезокристалле ВТО, получено с применением уравнений связанных волн:

$$\frac{dR_{\perp}}{dz} = ie^{i\delta} \kappa_1^R S_{\perp} + ie^{-i\delta} \kappa_2^R S_{\parallel} + \rho_R R_{\parallel},$$

$$\frac{dR_{\parallel}}{dz} = ie^{i\delta} \kappa_3^R S_{\perp} + ie^{-i\delta} \kappa_4^R S_{\parallel} - \rho_R R_{\perp},$$

$$\frac{dS_{\perp}}{dz} = ie^{i\delta} \kappa_1^S R_{\perp} + ie^{i\delta} \kappa_2^S R_{\parallel} + \rho_S S_{\parallel},$$

$$\frac{dS_{\parallel}}{dz} = ie^{i\delta} \kappa_3^S R_{\perp} + ie^{i\delta} \kappa_4^S R_{\parallel} - \rho_S S_{\perp},$$

где

$$\kappa_1^{R,S} = \frac{\vec{e}_1 \kappa \vec{e}_1}{\cos(\varphi_{R,S})}, \quad \kappa_2^{R,S} = \frac{\vec{e}_1 \kappa \vec{e}_{S,R}}{\cos(\varphi_{R,S})},$$

$$\kappa_3^{R,S} = \frac{\vec{e}_{R,S} \kappa \vec{e}_1}{\cos(\varphi_{R,S})}, \quad \kappa_4^{R,S} = \frac{\vec{e}_{R,S} \kappa \vec{e}_{S,R}}{\cos(\varphi_{R,S})},$$

$$\rho_{R,S} = \frac{\rho}{\cos(\varphi_{R,S})}, \quad \kappa = -\frac{\pi n_0^3 E_{SC}}{2\lambda} \Delta b.$$

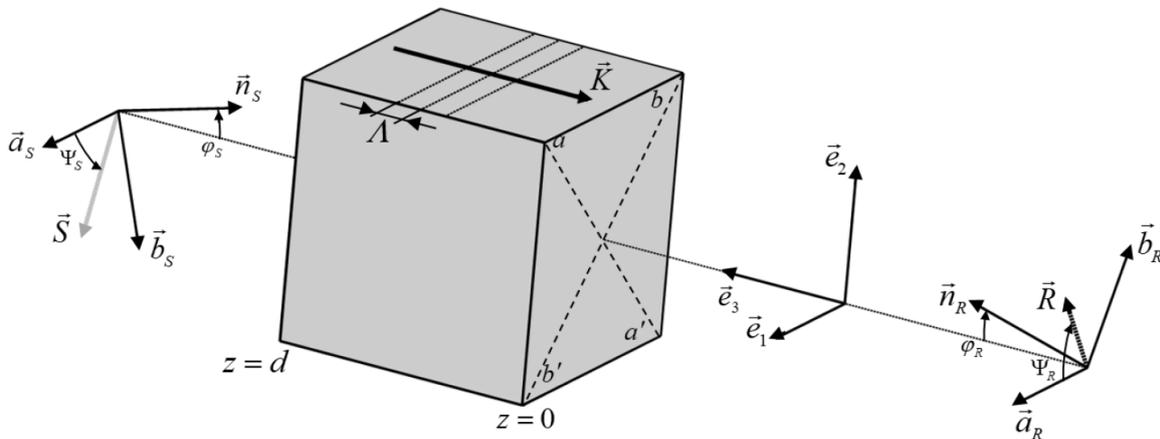


Рисунок 1.1 – Схема встречного двухволнового взаимодействия на отражательной голографической решетке, сформированной в кристалле ВТО

Здесь приняты следующие обозначения:

R_{\perp} и R_{\parallel} , S_{\perp} и S_{\parallel} – комплексные составляющие векторных амплитуд опорной (R) и предметной (S) световых волн, распространяющихся внутри кристалла;

φ_R и φ_S – углы Брегга для опорной и предметной волн;

ρ – удельное вращение кристалла;

κ_m – постоянные связи, посредством которых учитывается влияние электрооптического, обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов, при этом $m = 1, 2, 3, 4$;

$\delta = \pi/2$ – сдвиг фаз между голографической решеткой и интерференционной картиной;

n_0 – показатель преломления фоторефрактивного кристалла в отсутствие возмущения;

Δb – изменение обратного тензора диэлектрической проницаемости кубического кристалла класса 23;

E_{SC} – амплитуда напряженности электрического поля голографической решетки;

λ – длина опорной и предметной волн в вакууме;

i и e – мнимая единица и основание натурального логарифма соответственно;

$z \in [0, d]$; d – толщина кристаллического образца.

При теоретических расчетах использованы параметры кристалла ВТО, заимствованные в [9]. Напряженность электрического E_{SC} поля разделенных зарядов отражательной голографической решетки в кристалле принята равной 0,6 кВ/см. При численном решении уравнений связанных волн углы φ_R и φ_S взяты равными 5° , отношение интенсивностей предметной и опорной волн – $1/10$, длина волны – $\lambda = 633$ нм, толщина кристалла – $d = 14$ мм. При численном решении уравнений связанных волн учитывались изменения энергетических и поляризационных характеристик волн при френелевских отражениях на гранях кристалла.

2 Полученные результаты и их обсуждение

Проанализируем закономерности управления энергетическими и поляризационными характеристиками световых волн при их дифракции на отражательной смешанной голограмме, сформированной в оптически активном фоторефрактивном кристалле ВТО среза (001). Рассмотрим следующий вопрос: при каких значениях азимутов линейной поляризации опорной Ψ_{R0} и предметной Ψ_{S0} световых волн на входе в кристалл одновременная дифракция этих волн на отражательной смешанной голограмме приводит к наибольшим значениям относительной интенсивности предметной волны на выходе из кристалла.

На рисунке 2.1 представлены зависимости максимальных γ^{\max} и минимальных γ^{\min} значений относительной интенсивности предметной волны от толщины d кристалла ВТО среза (001), рассчитанные для фазовой голограммы (кривые 3, 5) и для смешанной голограммы (кривые 1, 2, 4, 6).

Расчет зависимостей 3 и 5 производился с учетом поляризационного условия [10], которое заключается в том, что азимуты линейной поляризации взаимодействующих волн связаны соотношением: $\Psi_{R0} = -\Psi_{S0} + \rho d$. Как показывают результаты численных расчетов, при выполнении этого поляризационного условия видимость интерференционной картины и относительная интенсивность предметной волны достигают наибольших значений. Таким образом, зависимости 3 и 5, рассчитанные при выполнении поляризационного условия, и являются огибающими максимальных и минимальных значений относительной интенсивности предметной волны для фазовой отражательной голограммы.

На рисунке 2.1 зависимости 2 и 4 рассчитаны с учетом поляризационного условия для смешанной голограммы, а зависимости 1 и 6 получены в результате перебора всех возможных значений Ψ_{R0} и Ψ_{S0} . Как видно из сравнения этих зависимостей, рассмотренное выше поляризационное условие для смешанной голограммы перестает работать, поскольку относительная интенсивность предметной волны, полученная при выполнении поляризационного условия, получается меньше наибольшего значения относительной интенсивности предметной волны. Для зависимости $\gamma^{\min}(d)$ ситуация аналогичная – использование поляризационного условия не позволяет получить минимально возможные значения относительной интенсивности предметной волны.

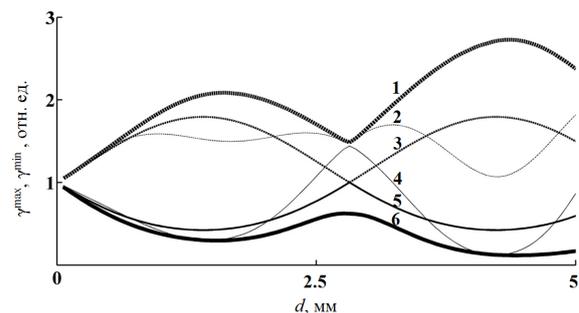


Рисунок 2.1 – Зависимости максимальных γ^{\max} и минимальных γ^{\min} значений относительной интенсивности предметной волны от толщины d кристалла ВТО среза (001):
 1, 6 – $\gamma^{\max}(d)$ и $\gamma^{\min}(d)$, смешанная голограмма;
 3, 5 – $\gamma^{\max}(d)$ и $\gamma^{\min}(d)$, фазовая голограмма;
 2, 4 – $\gamma^{\max}(d)$ и $\gamma^{\min}(d)$, рассчитанные для смешанной голограммы при учете поляризационного условия

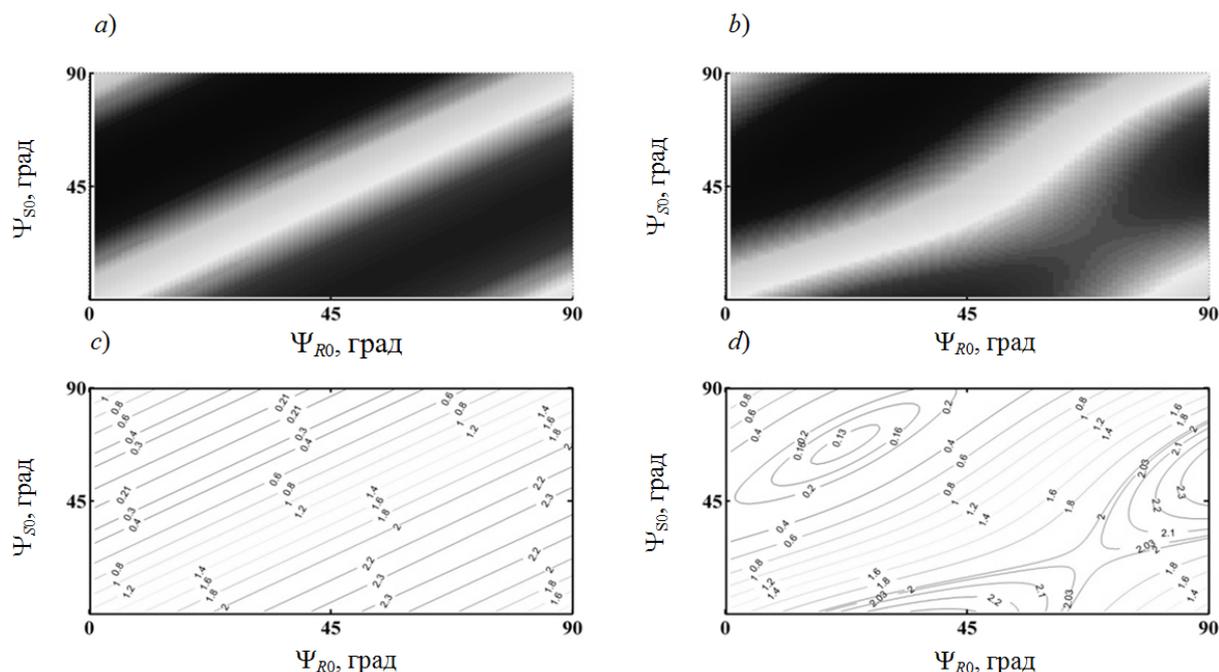


Рисунок 2.2 – Зависимости относительной интенсивности γ предметной волны от азимутов Ψ_{S0} и Ψ_{R0} на входе в кристалл, рассчитанные для кристалла ВТО среза (001) толщиной 14 мм:
 а), с) – фазовая голограмма, б), d) – смешанная голограмма

На рисунке 2.2 представлены зависимости относительной интенсивности γ предметной волны от азимута линейной поляризации Ψ_{S0} предметной волны и азимута линейной поляризации Ψ_{R0} опорной волны на входе в кристалл, рассчитанные для кристалла ВТО среза (001) толщиной 14 мм. Рисунки а) и с) рассчитаны с использованием поляризационного условия для фазовой голограммы, рисунки б) и d) получены в результате перебора всех возможных значений Ψ_{R0} и Ψ_{S0} для смешанной голограммы.

Как видно из сравнения рисунков а), с) и б), d) линейная зависимость входного азимута линейной поляризации предметной волны от входного азимута линейной поляризации опорной волны, наблюдаемая для фазовой голограммы а), с), в отношении смешанной голограммы нарушается б), d). Для смешанной голограммы наибольшие и наименьшие значения γ достигаются для конкретных пар значений Ψ_{R0} и Ψ_{S0} .

Заключение

Таким образом, в работе проанализированы поляризационно-фазовые условия управления интенсивностью световых пучков. Показано, что режимы дифракции опорной волны на амплитудно-фазовой голограмме и на фазовой голограммах существенно отличаются. Изучены условия достижения наибольших значений относительной интенсивности предметной волны в зависимости от азимутов линейной поляризации опорной Ψ_{R0} и предметной Ψ_{S0} световых волн на

входе в кристалл. Установлено, что для смешанной голограммы поляризационное условие по выбору входных азимутов не выполняется – для каждой толщины кристалла существуют конкретные пары значений Ψ_{R0} и Ψ_{S0} , при которых достигаются экстремальные значения интенсивности предметной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисюк, Ю.Н. Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения / Ю.Н. Денисюк // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 144, № 6. – С. 1275–1278.
2. Денисюк, Ю.Н. Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения / Ю.Н. Денисюк // Оптика и спектроскопия. – 1963. – Т. 15, № 4. – С. 522–532.
3. Петров, М.П. Фоточувствительные электрооптические среды в голографии и оптической обработке информации / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – Л.: Наука, 1983. – 270 с.
4. Kogelnik, H. Coupled wave theory for thick hologram grating / H. Kogelnik // Bell Syst. Tech. J. – 1969. – Vol. 48, № 9. – P. 2909–2947.
5. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск: Наука и техника, 1976. – 456 с.
6. Бокуть, Б.В. Основы теоретической кристаллооптики: в 4 ч. / Б.В. Бокуть, А.Н. Сердюков. – Гомель: ГГУ, 1977. – Ч. 2. – 70 с.
7. Шепелевич, В.В. Взаимная трансформация электромагнитных волн на голографических

решетках в кубических гиротропных фоторефрактивных кристаллах произвольного среза / В.В. Шепелевич // Оптика и спектроскопия. – 1990. – Т. 69, № 2. – С. 467–469.

8. Шепелевич, В.В. Дифракция и двухволновое взаимодействие в кубических гиротропных пьезокристаллах произвольного среза. Общие соотношения / В.В. Шепелевич // Оптика и спектроскопия. – 1997. – Т.83, № 1. – С. 172–176.

9. *Energy exchange optimization in (110)-cut BTO crystal by choice of interacting waves polarization* / A.E. Zagorskiy [et al] // Opt. Mat. – 2001. – Vol. 18. – P. 131–133.

10. *Mallik, S. Polarization properties of self-diffraction in sillenite crystals: reflection volume gratings* / S. Mallik, M. Miteva, L. Nikolova // J. Opt Soc. Am. B. – 1997. – Vol. 14, № 5. – P. 1179–1186.

Поступила в редакцию 04.02.20.

ФОРМИРОВАНИЕ ПЛЕНОК ОКСИДА ТАНТАЛА НА ПОДЛОЖКАХ ДИАМЕТРОМ 200 МИЛЛИМЕТРОВ

Н. Вилья, Д.А. Голосов, С.Н. Мельников, Т.Д. Нгуен,
А.Д. Голосов, Э.Е. Литвин, Н.Н. Лам

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

FORMATION OF TANTALUM OXIDE FILMS ON SUBSTRATES WITH A DIAMETER OF 200 MM

N. Villa, D.A. Golosov, S.N. Melnikov, T.D. Nguyen,
A.D. Golosov, E.E. Litvin, N.N. Lam

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

В результате исследований процессов реактивного магнетронного распыления Ta мишени в среде Ar/O₂ рабочих газов установлено, что формирование диэлектрических пленок наблюдается при концентрациях O₂ более 50% и определяется энтальпией образования оксида из исходного металла. Использование высоковакуумного распыления позволяет стабилизировать процесс без использования систем обратной связи. Показано, что при нанесении пленок оксида тантала на вращающуюся подложку Ø 200 мм возможно получение слоев с неравномерностью толщины менее ±2.4% и неравномерностью распределения емкости и тангенса угла диэлектрических потерь менее ±18%.

Ключевые слова: оксид тантала, тонкие пленки, реактивное магнетронное распыление, МДП структура, диэлектрические свойства.

As a result of studies of the processes of reactive magnetron sputtering of a Ta target in an Ar/O₂ working gas mixture, it is found that the formation of dielectric films is observed at the concentration of O₂ higher than 50% and it is determined by the enthalpy of oxide formation from the source metal. The use of high-vacuum sputtering allows stabilizing the process without the use of feedback systems. It is shown that when depositing tantalum oxide films on a Ø 200 mm rotating substrate, it is possible to obtain layers with a thickness non-uniformity of less than ±2.4%, a capacitance and dielectric loss tangent non-uniformity of less than ±18%.

Keywords: tantalum oxide, thin films, reactive magnetron sputtering, MOS structure, dielectric properties.

Введение

Основным направлением развития современной микроэлектроники является повышение степени интеграции интегральных схем за счет использования принципа масштабирования – пропорционального уменьшения геометрических размеров элементов. Согласно этим правилам, уменьшение длины канала транзистора металл-диэлектрик-полупроводник (МДП) сопровождается уменьшением толщины подзатворного диэлектрика, в качестве которого используется оксид кремния SiO₂. Однако дальнейшее использование SiO₂ имеет принципиальные ограничения. В первых МДП транзисторах толщина SiO₂ составляла порядка 100 нм. При переходе на новые технологические нормы емкость затвора сохранялась за счет уменьшения толщины SiO₂. Как результат, при технологических нормах 60 нм толщина SiO₂ составила 1.2 нм [1]. При дальнейшем уменьшении толщины слоя SiO₂ его диэлектрические свойства значительно ухудшаются. Поэтому для перехода к меньшим технологическим нормам необходимо использовать новые материалы с более высокой диэлектрической проницаемостью, так называемые *high-k* диэлектрики [2]. Среди *high-k* диэлектриков особый

интерес представляет оксид тантала Ta₂O₅, который обладает сравнительно высокой диэлектрической проницаемостью ($\epsilon \approx 22$), большой шириной запрещенной зоны ($E_g \approx 4.2-4.5$ эВ) и низкими токами утечки [2].

Для получения пленок оксида тантала применялся ряд методов осаждения, однако наибольшие перспективы имеет метод реактивного магнетронного распыления [3]. Метод обеспечивает высокие скорости нанесения, высокую химическую чистоту, плотность и адгезию к подложке пленки. Однако для промышленного применения технологии реактивного распыления важным вопросом является возможность воспроизводимого нанесения пленок *high-k* диэлектриков на Si подложки Ø 200 и более миллиметров с высокой равномерностью толщины и диэлектрических свойств. Хотя концептуально реактивное распыление просто, фактически это сложный и нелинейный процесс [4]. При реактивном магнетронном распылении образование оксидной пленки происходит не только на подложке, но и на поверхности мишени и стенках камеры. Образующиеся слои влияют на разряд, что приводит к изменению скоростей образования соединения и

распыления мишени. В результате, в зависимости от состояния системы, при тех же параметрах процесса скорость нанесения может изменяться на порядок, а состав пленок значительно различаться, т. е. возникает гистерезис характеристик. Наличие такой взаимосвязи параметров существенно усложняет управление процессом и требует использования специальных методов стабилизации процесса [5]. Последние результаты показывают, что использование процессов высоковакуумного магнетронного распыления позволяет значительно уменьшить гистерезис характеристик [6]. Также представляется перспективным использование для контроля и управления процессом оптической эмиссионной спектроскопии (ОЭС) как метода, который позволяет наблюдать за составом плазмы в процессе нанесения пленки [7]. Проблему равномерности толщины пленок при магнетронном распылении чаще всего решают путем увеличения размеров зоны распыления [8]. Однако это требует изготовления мишеней больших размеров и в ряде случаев это связано с рядом проблем. Одним из методов снижения неравномерности наносимых слоев является использование вращения подложек. Данный метод позволяет при небольших размерах зоны распыления магнетрона получать высокую равномерность даже на подложках, превышающих в несколько раз размер мишени. Однако практически отсутствуют статьи, в которых бы рассматривались вопросы распределения диэлектрических свойств пленок оксидов при реактивном магнетронном нанесении на вращающуюся подложку.

Таким образом, целью работы являлась разработка методов контролируемого нанесения тонких пленок оксида тантала с высокой равномерностью толщины и свойств при реактивном магнетронном распылении на вращающуюся подложку.

1 Эксперимент

Схема экспериментальной установки для нанесения слоев оксида тантала методом реактивного магнетронного распыления приведена на рисунке 1.1. Установка выполнена на базе вакуумного поста ВУ-2МП. Камера установки была оборудована высоковакуумной магнетронной распылительной системой (МРС) MARS-80 с мишенью $\varnothing 80$ мм и ионным источником на основе торцевого холловского ускорителя (ТХУ). Особенностью МРС является возможность работы при пониженных до 0.04 Па давлениях. Вращаемый подложкодержатель располагался на оси камеры. Расстояние смещения оси магнетрона относительно оси подложкодержателя регулировалось путем смещения магнетрона. Пленки оксида тантала наносились на пластины из высоколегированного монокристаллического кремния ЭКЭС 0.01 (100) $\varnothing 200$ мм. В ходе экспериментов

подложки устанавливались на подложкодержатель. Камера вакуумной установки откачивалась до остаточного давления 10^{-3} Па и производилась ионная очистка подложек. Для этого в ионный источник подавался Ar. Поток аргона составлял $Q_{Ar} = 30$ мл/мин. Время очистки, напряжение и ток разряда во всех экспериментах было постоянным и составляло 6 мин, 80 В, 7.0 А соответственно. Очистка производилась в режиме вращения подложки.

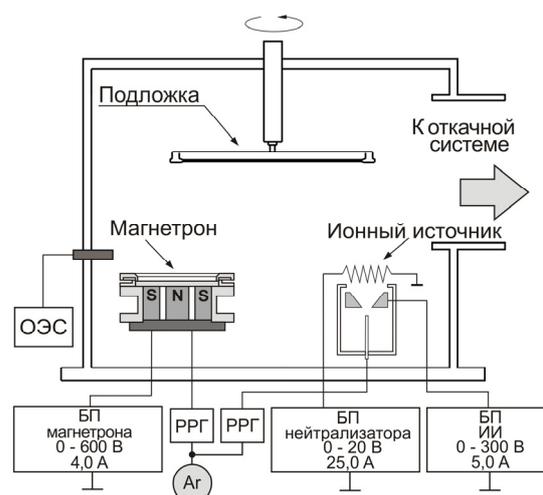


Рисунок 1.1 – Схема экспериментальной установки для нанесения пленок оксида тантала методом реактивного магнетронного распыления

Для нанесения слоев оксида тантала в газораспределительную систему магнетрона подавались рабочие газы. Распыление Ta мишени (чистота 99.9%) $\varnothing 80$ мм и толщиной 6 мм осуществлялось в Ar/O₂ смеси газов. Содержание кислорода в смеси газов G_{O_2} изменялось от 0 до 100 % при общем расходе 60 мл/мин. При этом давление в камере составляло 0.06 Па. Для поддержания заданных расходов газов использовались автоматические регуляторы расхода газа РРГ-1 (РРГ). Ток разряда магнетрона во всех экспериментах поддерживался постоянным и составлял 1.5 А. При этом напряжение разряда U_i в зависимости от концентрации кислорода изменялось от 280 до 485 В. Температура подложки в процессе нанесения не превышала 80° С.

Для анализа и контроля процесса реактивного распыления применен метод оптической эмиссионной спектроскопии (ОЭС) плазмы. Для регистрации спектров излучения использовался оптический эмиссионный спектрометр SL 40-2-2048 ISA (Солар ТИИ, РБ). Данный спектрометр позволяет регистрировать спектры оптического излучения в диапазоне 189–1097 нм с погрешностью не более 1.0 нм. Для регистрации спектров излучения оптический эмиссионный спектрометр подключался с помощью световода к камере и наконечник световода через смотровое окно

направлялся на плазму. Толщина нанесенных слоев определялось с помощью оптического интерферометрического профилометра ПОИ-08. Диэлектрические характеристики пленок измерялись на тестовых МДП структурах. Для этого на нанесенную пленку оксида тантала методом ионно-лучевого распыления через маску наносился верхний Ni электрод. Емкость и тангенс угла диэлектрических потерь исследовались с использованием измерителя иммитанса E7-20 на частотах 1.0 кГц и 1.0 МГц.

2 Результаты и их обсуждение

Методом ОЭС проведены исследования оптического излучения плазмы при распылении Ta мишени в Ar/O₂ смеси газов. Спектральный состав плазмы получен при токе разряда $I_t = 1.5$ А, концентрация кислорода в Ar/O₂ смеси газов изменялась от 0 до 100% при общем расходе 60 мл/мин. На рисунке 2.1 представлен типичный оптический эмиссионный спектр излучения плазмы при распылении Ta мишени в Ar/O₂ смеси газов. На спектрах присутствовали эмиссионные линии Ta, O₂ и Ar. Линии Ar присутствовали в диапазоне длин волн 450–500 нм и 700–950 нм. Линии Ta находились в диапазоне 250–750 нм. Наиболее интенсивные линии тантала на длинах волн 457.4 нм, 521.3 нм, 540.2 нм соответствовали возбужденным атомам TaI. Также обнаружена менее интенсивная линия ионов тантала (TaII) на длине волны 301.25 нм. Для кислорода обнаружены интенсивные тройные линии на 777.1–777.6 нм, 844.63–844.64 нм и парные линии 926.5–926.6 нм, которые принадлежали возбужденным атомам кислорода (OI). В диапазоне 390–680 нм также были выявлены менее интенсивные линии атомов возбужденного кислорода (OI) на длине волны 557.73 нм, 615.68 нм, и ионов кислорода (OII) на длинах волн 433.53 нм, 520.66 нм, 677.49 нм. На основе анализа полученных эмиссионных спектров плазмы были выделены наиболее интенсивные линии Ta, Ar и O₂, которые в дальнейшем использовались для контроля состава плазмы при управлении процессом реактивного распыления (таблица 2.1).

На рисунке 2.2 представлены зависимости интенсивности линий TaI (481.2 нм, 521.2 нм и 540.2 нм), OI (777.1 нм) и ArI (811.5 нм) от концентрации кислорода в Ar/O₂ смеси газов. Как видно из рисунка, поведение линий TaI имело сходный характер. При увеличении Γ_{O_2} интенсивности линий практически линейно снижались и достигали нуля при концентрации кислорода около 70%. Линии атомарного аргона ArI также практически линейно снижались при увеличении Γ_{O_2} и достигали нуля при распылении Ta мишени в среде чистого кислорода. Совершенно другой характер имела линия кислорода OI (777.1 нм). При увеличении концентрации кислорода линия кислорода практически линейно увеличивалась и

достигала максимума при $\Gamma_{O_2} = 70\%$. При дальнейшем увеличении Γ_{O_2} интенсивность линии кислорода начинала снижаться.

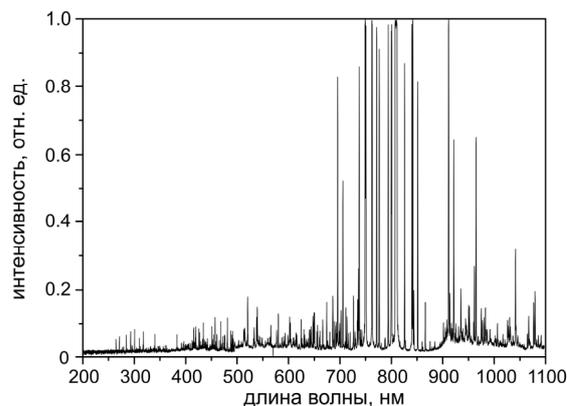


Рисунок 2.1 – Оптический эмиссионный спектр излучения плазмы при распылении Ta мишени в Ar/O₂ смеси газов ($\Gamma_{O_2} = 12.5\%$)

Таблица 2.1 – Спектральные линии, используемые для контроля состава плазмы при реактивном магнетронном нанесении пленок оксида тантала

Линия	TaI			ArI		OI	
λ , нм	481.2	521.2	540.2	750.4	763.5	811.5	777.1

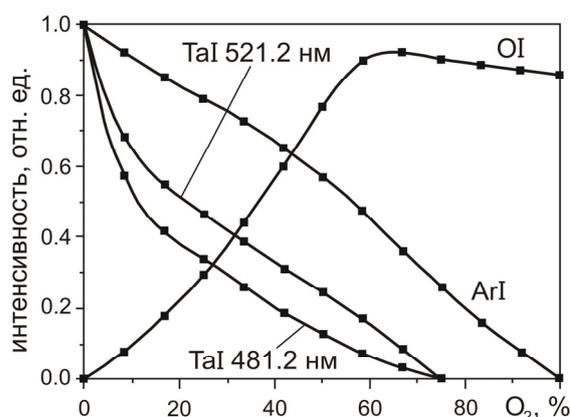


Рисунок 2.2 – Зависимость интенсивности линий TaI (481.2 нм, 521.2 нм), ArI (811.5 нм) и OI (777.1 нм) от концентрации кислорода в Ar/O₂ смеси газов

С целью определения эффективности использования для нанесения пленок оксида тантала процесса высоковакуумного реактивного магнетронного распыления исследовано изменение интенсивности линий тантала и кислорода при увеличении и уменьшении концентрации кислорода в Ar/O₂ смеси газов (рисунок 2.3). Установлено, что при увеличении и уменьшении расхода газов интенсивность линий TaI, ArI и OI однозначно зависели от соотношения газов. При этом на зависимостях практически отсутствовал гистерезис характеристик. На основе этих данных

сделан вывод, что эмиссионные линии TaI (521.2 нм) и OI (777.1 нм) могут быть эффективно использованы для контроля состава плазмы при реактивном магнетронном нанесении пленок оксида тантала.

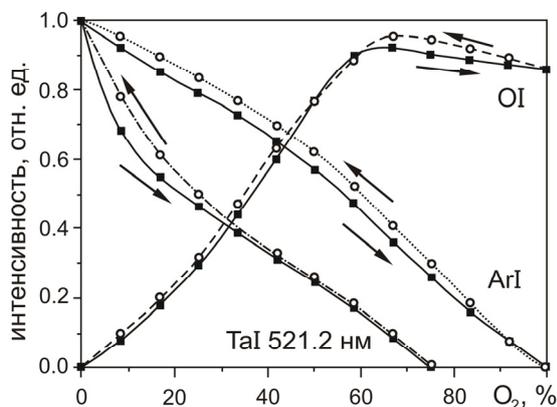


Рисунок 2.3 – Изменение интенсивности линий TaI (521.2 нм), ArI (811.5 нм) и OI (777.1 нм) при увеличении и уменьшении концентрации кислорода в Ar/O₂ смеси газов

Также проведены исследования влияния газовой среды на разрядные и эмиссионные характеристики магнетрона. Получены зависимости напряжения разряда МРС от процентного содержания кислорода в Ar/O₂ смеси газов (рисунок 2.4, а). Характеристики получены в режиме стабилизации тока разряда $I_t = 1.5$ А. Как видно из рисунка, при увеличении содержания кислорода в Ar / O₂ смеси газов напряжение разряда первоначально увеличивалось и достигало максимума 485 В при концентрации O₂ 55%. Далее напряжение разряда снижалось до 300 В при $\Gamma_{O_2} \approx 75\%$ и далее практически не зависело от концентрации кислорода. Аналогичное поведение имела зависимость скорости нанесения пленок от концентрации кислорода (рисунок 2.4, б). Первоначально при увеличении Γ_{O_2} скорость нанесения увеличивалась с 0.7 нм/с при распылении в среде Ar до 1.65 нм/с при концентрации кислорода

30%. При дальнейшем увеличении концентрации O₂ скорость нанесения снижалась до 0.18 нм/с при концентрации кислорода 75% и далее практически не зависела от концентрации кислорода.

Анализ зависимостей изменения интенсивностей линий TaI и OI, напряжения разряда и скорости нанесения от Γ_{O_2} позволяет выделить три моды процесса: металлическую, переходную и реактивную. На первом участке от 0 до 25% O₂ система находится в металлической моде процесса. Поверхность мишени свободна от окисной пленки. На данном участке происходит резкое снижение интенсивности линий TaI и плавное увеличение интенсивности линии OI. Несмотря на снижение интенсивности линий TaI, на данном участке скорость нанесения увеличивается. Напряжение разряда также увеличивается. При этом имеются два конкурирующих процесса, которые влияют на напряжение разряда. Это снижение сечения ионизации в плазме магнетронного разряда при увеличении концентрации кислорода и увеличение коэффициента ионно-электронной эмиссии (КИЭЭ) поверхности мишени при образовании оксидной пленки на ее поверхности. На данном участке доминирует эффект уменьшения сечения ионизации, что приводит к увеличению U_t . Скорость нанесения увеличивается за счет увеличения коэффициента распыления Ta при увеличении напряжения разряда и снижения плотности пленки при образовании соединения.

Переходная мода процесса наблюдается при Γ_{O_2} от 25 до 70%. На данном участке линия TaI практически линейно снижается до нуля, а линия OI линейно увеличивается. На зависимостях напряжения разряда и скорости нанесения можно выделить две зоны. В диапазоне от 25 до 50% O₂ напряжение разряда продолжает расти, но более медленно, и достигает максимума. При этом скорость нанесения начинает снижаться. Данные эффекты связаны с начальным образованием на краях зоны распыления мишени оксидной пленки,

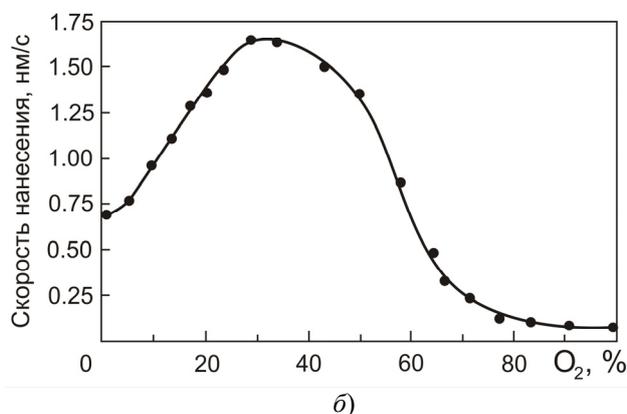
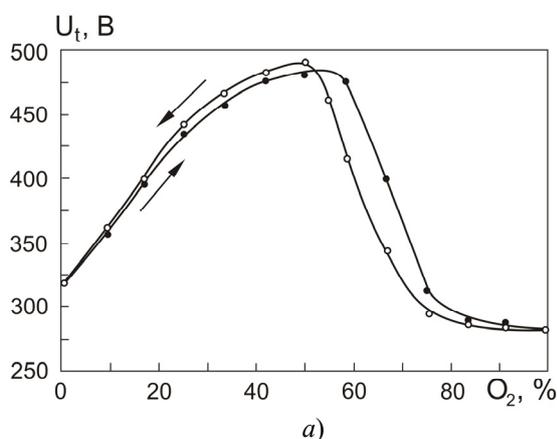


Рисунок 2.4 – Зависимость напряжения разряда (а) и скорости нанесения пленок (б) от процентного содержания кислорода при распылении Ta мишени в Ar/O₂ смеси газов

которая имеет более высокие значения КИЭЭ и более низкие значения коэффициента распыления. Во второй зоне (от 50 до 70% O_2) U_i практически линейно снижается с 480 В до 300 В. Скорость нанесения также снижается. На зависимости $U_i(G_{O_2})$ присутствует небольшой гистерезис характеристик. Снижение U_i является следствием увеличения площади зоны распыления, покрытой оксидной пленкой, которая имеет более высокий по сравнению с чистым танталом КИЭЭ. И этот процесс становится доминирующим по сравнению со снижением сечения ионизации. Снижение скорости нанесения также является следствием снижения коэффициента распыления. На третьем участке (более 70% O_2) интенсивность линии TaI очень низкая и она практически не зависит от G_{O_2} . Интенсивность линии OI также практически не изменяется. Напряжение разряда и скорость нанесения не зависят от G_{O_2} . На поверхности зоны распыления сформировалась толстая пленка оксида, которая не удаляется при распылении и система находится в реактивной моде процесса. На данном участке отсутствует гистерезис характеристик.

Анализ полученных зависимостей показывает, что, в отличие от реактивного распыления ряда других металлов (например Hf, Zr и Ti), в среде Ar/ O_2 рабочих газов [9]–[11] при распылении Ta переход в реактивную моду процесса происходит при более высоких концентрациях кислорода. Для формирования диэлектрических пленок в данном случае необходимо работать во второй зоне переходной моды или реактивной моде процесса при $G_{O_2} > 50\%$. Практически полное отсутствие гистерезиса характеристик при высоковакуумном распылении позволяет стабилизировать процесс без использования систем обратной связи. Для воспроизводимого нанесения пленок необходимо контролировать интенсивность линий TaI и OI при стабилизации других параметров процесса.

С использованием контроля процесса методом ОЭС были нанесены пленки оксида тантала на вращающуюся подложку. Пленки нанесены при следующих условиях: $I_t = 1.5$ А (поддерживался постоянным), $Q_{Ar} = 20$ мл/мин, $Q_{O_2} = 40$ мл/мин, расстояние мишень – подложка 120 мм, смещение оси подложки относительно оси магнетрона 100 мм, скорость вращения подложки 24.5 об/мин, время нанесения 30 мин. На рисунке 2.5 представлено распределение толщины нанесенной пленки. Как видно из рисунка, при нанесении на вращающуюся подложку средняя толщина пленки составила 103.5 нм. Неравномерность толщины пленки не превышала $\pm 2.4\%$.

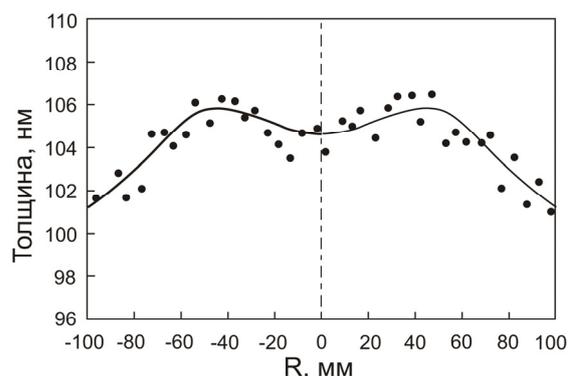


Рисунок 2.5 – Профиль распределения толщины пленки оксида тантала

На рисунке 2.6 представлены распределения емкости и тангенса угла диэлектрических потерь пленок оксида тантала, нанесенных на вращающуюся подложку. Диэлектрическая пленка оксида тантала формировалась на всей поверхности подложки. Емкость конденсаторов уменьшалась при удалении от центра подложки. Неравномерность емкости составила около $\pm 18\%$ на частотах 1.0 кГц и 1.0 МГц. Тангенс угла диэлектрических потерь на частоте 1.0 кГц составлял около 0.02 и имел равномерное распределение по всей подложке.

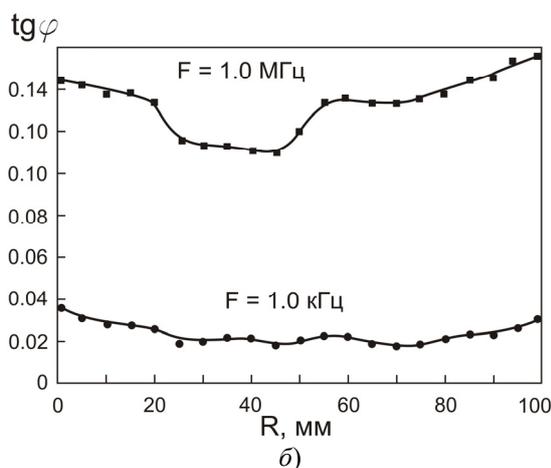
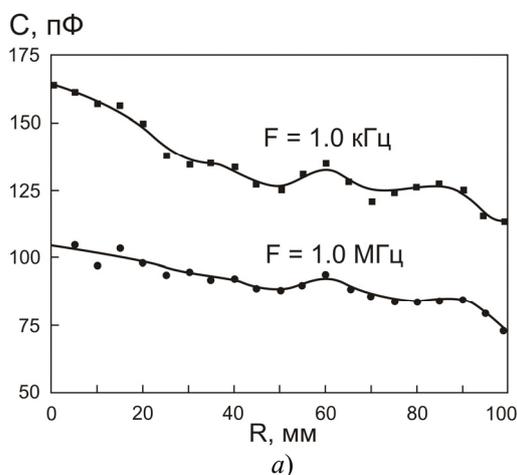


Рисунок 2.6 – Распределение емкости (а) и тангенса угла диэлектрических потерь (б) пленок оксида тантала

На частоте 1.0 МГц на радиусе подложки 20–50 мм отмечалось некоторое уменьшение диэлектрических потерь. Некоторая неравномерность емкости и диэлектрических потерь, по-видимому, связаны с эффектами ионной бомбардировки растущей пленки, что требует дальнейших исследований.

Анализ полученных результатов показывает, что, в отличие от процессов распыления ряда других металлов, образование пленок оксида тантала происходит при высоких концентрациях кислорода в Ar/O_2 смеси газов. Можно предположить, что область концентраций кислорода, при которой происходит переход в переходную и реактивную моды процесса и формирование диэлектрических пленок оксидов определяется энтальпией образования оксида из исходного металла. Чем выше энтальпия образования оксида, тем при большей концентрации кислорода происходит образование соединения. Так для оксидов гафния, циркония и титана, имеющих энтальпию образования оксида соответственно – 1117.5 кДж/моль, – 1100.6 кДж/моль, – 943.9 кДж/моль, формирование оксидных пленок осуществляется при содержании кислорода 16–20% [9]–[11], тогда как для оксида тантала, имеющего энтальпию образования соединения – 2047.0 кДж/моль, осуществляется при концентрациях кислорода более 50%.

Заключение

Проведены исследования процессов реактивного магнетронного распыления Ta мишени в среде Ar/O_2 рабочих газов. На основе результатов исследования спектров ОЭС плазмы, разрядных и эмиссионных характеристик магнетрона установлено, что формирование диэлектрических пленок оксида тантала наблюдается при высоких концентрациях O_2 (более 50%) и определяется энтальпией образования оксида из исходного металла. Практически полное отсутствие гистерезиса характеристик при высоковакуумном распылении позволяет стабилизировать процесс без использования систем обратной связи. Для воспроизводимого нанесения пленок необходимо контролировать интенсивность линий TaI и OI при стабилизации других параметров процесса.

При нанесении пленок оксида тантала на вращающуюся подложку \varnothing 200 мм, расстояние мишень – подложка 120 мм и смещение оси подложки 100 мм получены пленки с неравномерностью толщины менее $\pm 2.4\%$ и неравномерностью распределения емкости и тангенса угла диэлектрических потерь менее $\pm 18\%$. Некоторая неравномерность емкости и диэлектрических потерь, по-видимому, связаны с эффектами ионной бомбардировки растущей пленки, что требует дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Robertson, J. High-K materials and metal gates for CMOS applications / J. Robertson, R.M. Wallace // *Materials Science and Engineering R*. – 2015. – Vol. 88. – P. 1–41.
2. Review and perspective of high-k dielectrics on silicon / S. Hall [et al.] // *J. of Telecommunications and Information Technology*. – 2007. – Vol. 2. – P. 33–43.
3. Magnetic field strength influence on the reactive magnetron sputter deposition of Ta_2O_5 / R. Hollerweger [et al.] // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2013. – Vol. 46. – P. 1–7.
4. Tsiogas, C.D. Modeling reactive sputtering process in symmetrical planar direct current magnetron systems / C.D. Tsiogas, J.N. Avaritsiotis // *J. Appl. Phys.* – 1992. – Vol. 71, № 10. – P. 5173–5182.
5. Reactive magnetron sputtering of thin films: present status and trends / J. Musil [et al.] // *Thin Solid Films*. – 2005. – Vol. 475. – P. 208–218.
6. Формирование пленок нитрида титана методом реактивного магнетронного распыления при пониженном давлении / А.П. Достанко [и др.] // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 2 (27). – С. 12–17.
7. Plasma diagnostic by optical emission spectroscopy on reactive magnetron sputtering plasma A Brief Introduction / S.R. How [et al.] // *Journal of Physics Conference Series*. – 2018. – Vol. 1027. – P. 12005.
8. Инновационные технологии и оборудование субмикронной электроники / А.П. Достанко [и др.]; под ред. акад. А.П. Достанко. – Минск: Беларуская навука, 2020. – 260 с.
9. Диэлектрические характеристики пленок оксида гафния / Д.А. Голосов [и др.] // *Российские нанотехнологии*. – 2017. – Т. 2, № 9–10. – С. 63–68.
10. Вилья, Н. Формирование пленок оксида титана методом реактивного магнетронного распыления / Н. Вилья, Д.А. Голосов, Т.Д. Нгуен // *Доклады БГУИР*. – 2019. – № 5 (123). – С. 87–93.
11. Формирование пленок оксида циркония методом реактивного магнетронного распыления / Н. Вилья [и др.] // *Взаимодействие излучений с твердым телом: материалы 12-й Междунар. конф., Минск 19–22 сент. 2017 г. / Белорусский гос. ун-т; редкол.: В.В. Углов (гл. ред.) [и др.]*. – Минск, 2017. – С. 438–440.

Исследования выполнены при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научных проектов T19КИТГ-016 и T20КИТГ-013.

Поступила в редакцию 20.01.20.

УДК 539.12

О ПРОЯВЛЕНИИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА В МОДЕЛИ НЕЙТРАЛЬНОГО ФЕРМИОНА С ТРЕМЯ МАССОВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Я.А. Войнова¹, Е.М. Овсюк²

¹Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси

²Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

ON THE MANIFESTATION OF THE COSMOLOGICAL CURVATURE OF SPACE IN A MODEL OF A NEUTRAL FERMION WITH THREE MASS PARAMETERS

Ya.A. Voynova¹, E.M. Ovsyuk²

¹B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

²I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

Исследуется обобщенная модель фермиона со спином $\frac{1}{2}$, который характеризуется тремя физическими массовыми параметрами M_i . Дополнительное взаимодействие определяется тензором внешнего электромагнитного поля и скалярной кривизной пространства-времени, оно связывает три биспинора в единую систему уравнений. Модель остается применимой и для нейтральных майорановских фермионов, при этом объединение трех биспиноров в единую систему обеспечивается ненулевой скалярной кривизной. Исследуется модельная ситуация, когда можно считать, что локально допустимо использование декартовых координат, а внешний геометрический фон можно эффективно учесть постоянным скаляром Риччи R . Для простоты ограничиваемся одномерным случаем (t, x) . Используя диагонализацию матрицы смешивания в сложной системе уравнений, приводим задачу к трем отдельным уравнениям дираковского типа с новыми эффективными массами \bar{M}_i , значения которых определяются численно в зависимости от внутренних параметров модели и от величины кривизны пространства-времени. Приведен также численный анализ необходимых диагонализующих преобразований S и S^{-1} . Решения трех отдельных уравнений майорановского типа строятся в базисе импульс-спиральность. Используя выражение для матриц преобразования S и S^{-1} , эти решения раскладываются в линейные комбинации по решениям с физическими массами и наоборот.

Ключевые слова: фермион с тремя массовыми параметрами, майорановская частица, скалярная кривизна пространства-времени, уравнение Дирака.

In this work a generalized fermion model with spin $\frac{1}{2}$, which is characterized by three physical mass parameters M_i are studied. The additional interaction is determined by the tensor of the external electromagnetic field and the scalar space-time curvature. It joints three bispinors into one physical system. The model also remains valid for neutral Majorana fermions. The coupling of three bispinors into a single system is ensured by the nonzero scalar curvature of the space-time. We study a model situation where it can be assumed that locally the use of Cartesian coordinates is permissible, and the external geometric background can be effectively taken into account by a constant Ricci curvature R . For simplicity, we restrict ourselves to the one-dimensional case (t, x) . Using the diagonalization of the mixing matrix in a complex system of equations, we reduce the problem to three separate Dirac-type equations with new effective masses \bar{M}_i , the values of which are determined numerically depending on the internal parameter of the model and the space-time curvature. A numerical analysis of the necessary diagonalizing transformations S and S^{-1} is given. The solutions of three separate equations of the Majorana type are constructed in the momentum-helicity basis. Using the expression for the transformation matrices S and S^{-1} , these solutions are decomposed into linear combinations by solutions with physical masses and vice versa.

Keywords: fermion with three mass parameters, Majorana particle, of space-time scalar curvature, Dirac equation.

1 Модель обобщенного фермиона

Хорошо известна возможность вместо простейших уравнений для элементарных частиц (Клейна – Фока – Города, Дирака, Даффина – Кеммера, Паули – Фирца, Рариты – Швингера и др.) построить более сложные уравнения, которые могут описывать частицы с несколькими спинами, несколькими массами, с дополнительными электромагнитными характеристиками (аномальным магнитным моментом, электрическим квадрупольным моментом, поляризуемостью, структурой Дарвина – Кокса и др.). Все эти обобщенные модели строятся на основе общего

теоретического подхода, созданного Гельфандом и Ягломом [1]–[61].

В частности, в работе [62] была предложена обобщенная модель фермиона со спином $\frac{1}{2}$, который характеризуется тремя массовыми параметрами. Будем исходить из найденной формы уравнения для такой сложной частицы в присутствии внешних электромагнитных и гравитационных полей:

$$\begin{aligned} i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)]\Phi_1(x) - \\ - M_1\Phi_1(x) + Y_1\Sigma(x)\Phi(x) = 0, \\ i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)]\Phi_2(x) - \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} -M_2\Phi_2(x) + Y_2\Sigma(x)\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)]\Phi_3(x) - \\ -M_3\Phi_3(x) + Y_3\Sigma(x)\Phi(x) &= 0, \end{aligned}$$

где (см. обозначения в [62])

$$Y_i = \frac{4c_3}{3M}c_2(\lambda_i - c_2),$$

$$\Phi(x) = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x).$$

Поскольку в (1.1) дополнительное взаимодействие определяется тензором внешнего электромагнитного поля и скалярной кривизной пространства-времени:

$$\Sigma(x) = -ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x) + \frac{R(x)}{4},$$

то в моделях с $R(x) \neq 0$ даже в отсутствие внешнего электромагнитного поля обобщенная система уравнений объединяет три биспинора в единую физическую систему:

$$\begin{aligned} i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)]\Phi_1(x) - \\ -M_1\Phi_1(x) + Y_1\frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)]\Phi_2(x) - \\ -M_2\Phi_2(x) + Y_2\frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x)[\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)]\Phi_3(x) - \\ -M_3\Phi_3(x) + Y_3\frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ввиду того, что в любом майорановском базисе выполняются равенства

$$[i\gamma^\alpha(x)]^* = i\gamma^\alpha(x), \quad \Gamma_\alpha^*(x) = \Gamma_\alpha(x),$$

система (1.2) допускает ограничение к случаю вещественных и чисто мнимых биспиноров, т. е. к случаю майорановских частиц с тремя массовыми параметрами.

2 Учет постоянной скалярной кривизны

Развитая теория делает возможным учесть влияние космологической структуры пространства-времени на такой майорановский фермион. Простейшей ситуацией является следующая: можно считать, что локально, например, у поверхности Земли, допустимо использование декартовых координат, а внешний геометрический фон можно эффективно учесть ненулевым постоянным скаляром Риччи R , который можно варьировать в широких пределах. Для простоты ограничимся (хотя это не существенно) одномерным случаем ($t, x, y = 0, z = 0$).

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, будем исходить из уравнений} \\ (i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - M_1)\Phi_1 + d_1(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) = 0, \\ (i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - M_2)\Phi_2 + d_2(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) = 0, \\ (i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - M_3)\Phi_3 + \\ + d_3(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) = 0; \end{aligned} \quad (2.1)$$

в (2.1) использовано обозначение $d_i = Y_i(R/4)$.

Система (2.1) может быть представлена в матричном виде

$$(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - M) \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \quad (2.2)$$

$$= - \begin{pmatrix} (M - M_1 + d_1L_1) & d_1L_2 & d_1L_3 \\ d_2L_1 & (M - M_2 + d_2L_2) & d_2L_3 \\ d_3L_1 & d_3L_2 & (M - M_3 + d_3L_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix},$$

или кратко

$$\Delta\Phi = T\Phi, \quad \Delta = -(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - M), \quad (2.3)$$

где смешивающая матрица T задается равенством

$$T = \begin{pmatrix} (M - M_1 + d_1L_1) & d_1L_2 & d_1L_3 \\ d_2L_1 & (M - M_2 + d_2L_2) & d_2L_3 \\ d_3L_1 & d_3L_2 & (M - M_3 + d_3L_3) \end{pmatrix}.$$

Подвергнем трехмерный столбец Φ биспиноров из (2.2)–(2.3) линейному преобразованию, приводящему матрицу T к диагональному виду:

$$\bar{\Phi} = S\Phi, \quad \Delta\bar{\Phi} = (STS^{-1})\bar{\Phi},$$

$$STS^{-1} = T_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

В результате будем иметь отдельные уравнения для новых биспиноров:

$$\begin{aligned} [i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_1]\bar{\Phi}_1 &= 0, \quad \bar{M}_1 = M + \mu_1, \\ [i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_2]\bar{\Phi}_2 &= 0, \quad \bar{M}_2 = M + \mu_2, \\ [i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_3]\bar{\Phi}_3 &= 0, \quad \bar{M}_3 = M + \mu_3. \end{aligned}$$

Из физических соображений нужно предполагать, что все три собственных значения μ_i будут вещественными. Чтобы найти матрицу S , обращаемся к уравнению $ST = T_0S$, которое дает

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} (M - M_1 + d_1L_1) & d_1L_2 & d_1L_3 \\ d_2L_1 & (M - M_2 + d_2L_2) & d_2L_3 \\ d_3L_1 & d_3L_2 & (M - M_3 + d_3L_3) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

отсюда получаем три подсистемы по три уравнения в каждой:

$$\begin{aligned} (M - M_1 + d_1L_1)s_{11} + d_2L_1s_{12} + d_3L_1s_{13} &= \mu_1s_{11}, \\ d_1L_2s_{11} + (M - M_2 + d_2L_2)s_{12} + d_3L_2s_{13} &= \mu_1s_{12}, \\ d_1L_3s_{11} + d_2L_3s_{12} + (M - M_3 + d_3L_3)s_{13} &= \mu_1s_{13}; \quad (2.4) \\ (M - M_1 + d_1L_1)s_{21} + d_2L_1s_{22} + d_3L_1s_{23} &= \mu_2s_{21}, \\ d_1L_2s_{21} + (M - M_2 + d_2L_2)s_{22} + d_3L_2s_{23} &= \mu_2s_{22}, \\ d_1L_3s_{21} + d_2L_3s_{22} + (M - M_3 + d_3L_3)s_{23} &= \mu_2s_{23}; \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M - M_1 + d_1 L_1) s_{31} + d_2 L_1 s_{32} + d_3 L_1 s_{33} &= \mu_3 s_{31}, \\ d_1 L_2 s_{31} + (M - M_2 + d_2 L_2) s_{32} + d_3 L_2 s_{33} &= \mu_3 s_{32}, \\ d_1 L_3 s_{31} + d_2 L_3 s_{32} + (M - M_3 + d_3 L_3) s_{33} &= \mu_3 s_{33}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь имеем три задачи на собственные значения:

$$\begin{vmatrix} M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_1 & d_2 L_1 & d_3 L_1 \\ d_1 L_2 & M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_1 & d_3 L_2 \\ d_1 L_3 & d_2 L_3 & M - M_3 + d_3 L_3 - \mu_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{matrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_2 & d_2 L_1 & d_3 L_1 \\ d_1 L_2 & M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_2 & d_3 L_2 \\ d_1 L_3 & d_2 L_3 & M - M_3 + d_3 L_3 - \mu_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{matrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_3 & d_2 L_1 & d_3 L_1 \\ d_1 L_2 & M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_3 & d_3 L_2 \\ d_1 L_3 & d_2 L_3 & M - M_3 + d_3 L_3 - \mu_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_{31} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{matrix} = 0.$$

Отметим, что строки матрицы S восстанавливаются только с точностью до произвольных множителей. Условием существования решений у этих трех систем является равенство нулю определителя

$$\det \begin{vmatrix} M - M_1 + d_1 L_1 - \mu & d_2 L_1 & d_3 L_1 \\ d_1 L_2 & M - M_2 + d_2 L_2 - \mu & d_3 L_2 \\ d_1 L_3 & d_2 L_3 & M - M_3 + d_3 L_3 - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Получим явный вид уравнения 3-й степени для μ :

$$\begin{aligned} &-\mu^3 + (3M - M_1 - M_2 - M_3 + \\ &+ d_1 L_1 + d_2 L_2 + d_3 L_3) \mu^2 + \\ &+ [-L_1 d_1 (2M - M_2 - M_3) - \\ &- d_2 L_2 (2M - M_1 - M_3) - d_3 L_3 (2M - M_2 - M_1) - \\ &- 3M^2 + 2(M_1 + M_2 + M_3)M - \\ &- (M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3)] \mu + \\ &+ L_1 d_1 (M - M_2)(M - M_3) + \\ &+ L_2 d_2 (M - M_3)(M - M_1) + \\ &+ L_3 d_3 (M - M_1)(M - M_2) + \\ &+ (M - M_1)(M - M_2)(M - M_3) = 0. \end{aligned}$$

Это представление можно преобразовать в следующее (учтем $M_i = M / \lambda_i$):

$$\begin{aligned} &-\mu^3 + \left[M \left(3 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) + L_1 d_1 + L_2 d_2 + L_3 d_3 \right] \mu^2 + \\ &+ \left[-ML_1 d_1 \left(2 - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) - ML_2 d_2 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - ML_3 d_3 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 3M^2 + 2M^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - M^2 \left(\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} \right) \right] \mu + \\ &+ \left[M^2 L_1 d_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) + \right. \\ &\quad + M^2 L_2 d_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \\ &\quad + M^2 L_3 d_3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \\ &\quad \left. + M^3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_3} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Детализируем явный вид элементов матрицы T . Сначала учтем, что параметризацию возможных значений трех массовых параметров $M / \lambda_i = M_i$ можно значительно упростить. Напомним, что корни λ_i являются решениями характеристического уравнения [62]

$$\lambda^3 - (c_1 + c_2)\lambda^2 + (c_1 c_2 + a^2 + b^2)\lambda - (c_1 a^2 + c_2 b^2) = 0,$$

где $c_3 = b > 0$, $c_4 = a > 0$. Находим выражения для λ_1, λ_2 через λ_3 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} \right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{\lambda_3}}, \\ \lambda_2 &= \frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2 - \lambda_3}{2} \right)^2 - \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{\lambda_3}}. \end{aligned}$$

Значение корня λ_3 несущественно, поскольку физически значимым параметром является $M_3 = M / \lambda_3$, при этом M произвольная величина. Наиболее простое выражение для λ_3 получается при $c_1 = c_2 = 1$; при этом кубическое уравнение и его корни значительно упрощаются

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + (1+k)\lambda - k = 0, \quad k = a^2 + b^2,$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4k},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-4k}, \quad k \in \left(0, \frac{1}{4} \right).$$

Соответственно массы M_i равны

$$M_3 = M, M_1 = \frac{2M}{1 - \sqrt{1 - 4k}},$$

$$M_2 = \frac{2M}{1 + \sqrt{1 - 4k}}, k \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Построим таблицы значений для $\lambda_i^{-1} = M_i / M$ в зависимости от значений параметра k :

$$k = 0.25, \quad 1/\lambda_1 = 2.000, \quad 1/\lambda_2 = 2.000, \quad 1/\lambda_3 = 1;$$

$$k = 0.23, \quad 1/\lambda_1 = 2.786, \quad 1/\lambda_2 = 1.560, \quad 1/\lambda_3 = 1;$$

$$k = 0.21, \quad 1/\lambda_1 = 3.333, \quad 1/\lambda_2 = 1.429, \quad 1/\lambda_3 = 1;$$

$$k = 0.20, \quad 1/\lambda_1 = 3.623, \quad 1/\lambda_2 = 1.381, \quad 1/\lambda_3 = 1;$$

$$k = 0.16, \quad 1/\lambda_1 = 5.000, \quad 1/\lambda_2 = 1.250, \quad 1/\lambda_3 = 1;$$

$$k = 0.12, \quad 1/\lambda_1 = 7.194, \quad 1/\lambda_2 = 1.161, \quad 1/\lambda_3 = 1;$$

$$k = 0.08, \quad 1/\lambda_1 = 11.364, \quad 1/\lambda_2 = 1.096, \quad 1/\lambda_3 = 1;$$

$$k = 0.04, \quad 1/\lambda_1 = 23.810, \quad 1/\lambda_2 = 1.044, \quad 1/\lambda_3 = 1;$$

$$k = 0.01, \quad 1/\lambda_1 = 100.000, \quad 1/\lambda_2 = 1.011, \quad 1/\lambda_3 = 1.$$

Детализируем коэффициенты L_i (см. [62])

$$\Phi(x) = L_1 \Phi_1(x) + L_2 \Phi_2(x) + L_3 \Phi_3(x)$$

(учитываем, что $\lambda_3 = 1$)

$$L_1 = \frac{1}{b} \frac{1}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ -2k + \frac{1}{2L} (-1 + 2\lambda_2) \right\},$$

$$L_2 = \frac{1}{b} \frac{1}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \left\{ -2k + \frac{1}{2L} (-1 + 2\lambda_1) \right\},$$

$$L_3 = \frac{1}{b} \frac{1}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} \times$$

$$\times \left\{ -2k + \frac{1}{2L} (1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_1 \lambda_2) \right\}, \quad (2.8)$$

где

$$L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}}, \quad a^2 + b^2 = k < \frac{1}{4}, \quad 0 < 2b < 1.$$

Детализируем коэффициенты d_i :

$$d_1 = \frac{Rb}{6M} \left(\lambda_1 - \frac{1}{2} \right), \quad d_2 = \frac{Rb}{6M} \left(\lambda_2 - \frac{1}{2} \right),$$

$$d_3 = \frac{Rb}{6M} \left(\lambda_3 - \frac{1}{2} \right). \quad (2.9)$$

В матрице смешивания возникают комбинации $d_i L_j$, поэтому параметр b в знаменателях из (2.8) будет сокращаться с параметром b из (2.9). Поскольку размерность скалярной кривизны R – это M^2 (обратный квадратный метр), то можно ввести подстановки

$$R = 6rM^2 \Rightarrow$$

$$d_i = \frac{Rb}{6M} \left(\lambda_i - \frac{1}{2} \right) = M \cdot rb \left(\lambda_i - \frac{1}{2} \right) = M \cdot D_i,$$

величины D_i – безразмерные. С учетом этого кубическое уравнение (2.7) переписывается в более простом виде (корни можно искать в виде $\mu_i = M \Delta_i$, где Δ_i – безразмерные величины; учитываем, что $\lambda_3 = 1$)

$$\Delta^3 + \left[2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + L_1 D_1 + L_2 D_2 + L_3 D_3 \right] \Delta^2 +$$

$$+ \left[L_1 D_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) + L_2 D_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \right.$$

$$+ L_3 D_3 \left(2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) +$$

$$+ 3 - 2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + 1 \right) + \left. \left(\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \Delta -$$

$$- L_3 D_3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} \right) = 0.$$

Замечаем, что параметр b входит множителем в D_1, D_2, D_3 и входит в множитель в знаменатели выражений для коэффициентов L_1, L_2, L_3 . Поэтому в комбинациях

$$L_1 D_1 + L_2 D_2 + L_3 D_3, \quad L_1 D_1, \quad L_2 D_2, \quad L_3 D_3$$

этот параметр сокращается. С учетом этого, опускаем этот множитель в выражениях для L_i и D_i . Тогда имеем

$$L_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ -2k + \frac{1}{2L} (2\lambda_2 - 1) \right\},$$

$$L_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \left\{ -2k + \frac{1}{2L} (2\lambda_1 - 1) \right\},$$

$$L_3 = \frac{1}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} \left\{ -2k + \frac{1}{2L} (1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_1 \lambda_2) \right\},$$

$$D_1 = \frac{r}{2} (2\lambda_1 - 1), \quad D_2 = \frac{r}{2} (2\lambda_2 - 1), \quad D_3 = \frac{r}{2},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4k}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4k}, \quad k \in \left(0, \frac{1}{4}\right),$$

$$L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}}, \quad (a^2 + b^2) = k < \frac{1}{4}.$$

Учитывая тождества

$$2\lambda_1 - 1 = -\sqrt{1 - 4k}, \quad 2\lambda_2 - 1 = +\sqrt{1 - 4k},$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = -\sqrt{1 - 4k}, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = +\sqrt{1 - 4k},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 - 1 = -\lambda_2, \quad \lambda_2 - 1 = -\lambda_1,$$

$$1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_1 \lambda_2 = 4k - 1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = k,$$

получаем более простые выражения для коэффициентов

$$L_1 = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - 4k})\sqrt{1 - 4k}} \left\{ -2k + \frac{1}{2L} \sqrt{1 - 4k} \right\},$$

$$L_2 = \frac{2}{(1 - \sqrt{1 - 4k})\sqrt{1 - 4k}} \left\{ +2k + \frac{1}{2L} \sqrt{1 - 4k} \right\},$$

$$L_3 = \frac{1}{k} \left\{ -2k + \frac{1}{2L} (4k - 1) \right\},$$

$$D_1 = -\frac{r}{2} \sqrt{1 - 4k}, \quad D_2 = +\frac{r}{2} \sqrt{1 - 4k},$$

$$D_3 = \frac{r}{2}, \quad L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}}, \quad 0 < 2b < 1.$$

Кубическое уравнение относительно Δ запишем в виде

$$\Delta^3 + A\Delta^2 + B\Delta + C = 0,$$

где коэффициенты с учетом свойств корней λ_1, λ_2 равны

$$A = 2 - \frac{1}{k} + L_1 D_1 + L_2 D_2 + L_3 D_3, \quad C = L_3 D_3,$$

$$B = -L_1 D_1 \frac{1 - \sqrt{1 - 4k}}{1 + \sqrt{1 - 4k}} - L_2 D_2 \frac{1 + \sqrt{1 - 4k}}{1 - \sqrt{1 - 4k}} + L_3 D_3 \left(2 - \frac{1}{k} \right) + 1.$$

Найдем выражения для величин

$$L_1 D_1 = \frac{2k - l\sqrt{1 - 4k}}{1 + \sqrt{1 - 4k}} r,$$

$$L_2 D_2 = \frac{2k + l\sqrt{1 - 4k}}{1 - \sqrt{1 - 4k}} r,$$

$$L_3 D_3 = - \left(1 + l \frac{1 - 4k}{2k} \right) r.$$

В результате всех преобразований получаем простое представление для уравнения

$$\Delta^3 + \frac{2k - 1}{k} \Delta^2 + \left[1 + \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2(\sqrt{6} + b)} \frac{1 - 4k}{2k} \right) r \right] \Delta + \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2(\sqrt{6} + b)} \frac{1 - 4k}{2k} \right) r = 0, \quad (2.10)$$

$$0 < k < \frac{1}{4}, \quad 0 < b < 2, \quad \text{пусть } b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2.$$

Поскольку после линейного преобразования имеем три уравнения дираковского типа

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^1 \partial_1 - M(1 + \Delta_i) \right] \bar{F}_i = 0,$$

то следует ожидать, что три новых массовых параметра $M(1 + \Delta_i)$ будут вещественными и положительными.

Напомним, что параметр r был введен соотношением $R = 6rM^2$. С учетом того, что гравитация должна искажать массовые параметры незначительно, следует предполагать безразмерный параметр r достаточно малым. Кроме того, возможны две физически разные возможности: $r > 0$ при положительной кривизне и $r < 0$ при отрицательной кривизне. Мы проследим за несколькими ситуациями слабой и сильной гравитации:

$$r = +10^{-30}, r = +10^{-5}, r = +10^{-3}, r = +10^{-2}, r = +1;$$

$$r = -10^{-30}, r = -10^{-5}, r = -10^{-3}, r = -10^{-2}, r = -1;$$

последний случай $|r| = 1$ следует относить к очень сильному искривлению пространства.

Построим несколько таблиц значений для корней $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$b = 2, \quad r = +10^{-30},$$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.667, \Delta_2 = 1.500, \Delta_3 = -1.023 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.20, \Delta_1 = 0.382, \Delta_2 = 2.618, \Delta_3 = -1.138 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.16, \Delta_1 = 0.250, \Delta_2 = 4.000, \Delta_3 = -1.310 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.12, \Delta_1 = 0.162, \Delta_2 = 6.171, \Delta_3 = -1.596 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.08, \Delta_1 = 0.096, \Delta_2 = 10.404, \Delta_3 = -2.170 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.04, \Delta_1 = 0.044, \Delta_2 = 22.956, \Delta_3 = -3.890 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.02, \Delta_1 = 0.021, \Delta_2 = 47.979, \Delta_3 = -7.331 \cdot 10^{-30};$$

$$b = 0, \quad r = +10^{-30},$$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.667, \Delta_2 = 1.500, \Delta_3 = -1.042 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.18, \Delta_1 = 0.308, \Delta_2 = 3.248, \Delta_3 = -1.389 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.14, \Delta_1 = 0.202, \Delta_2 = 4.940, \Delta_3 = -1.786 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.10, \Delta_1 = 0.127, \Delta_2 = 7.873, \Delta_3 = -2.500 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.06, \Delta_1 = 0.069, \Delta_2 = 14.598, \Delta_3 = -4.167 \cdot 10^{-30};$$

$$k = 0.02, \Delta_1 = 0.021, \Delta_2 = 47.979, \Delta_3 = -1.250 \cdot 10^{-29}.$$

Отмечаем, что зависимость корней Δ_i от параметра $b \in (0, 2)$ очень слабая, поэтому дальше используем только значение $b = 0$.

Пусть кривизна отрицательная

$$b = 0, \quad r = -10^{-30},$$

$$k = 0.24, \Delta_1 = 1.042 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.667, \Delta_3 = 1.500;$$

$$k = 0.20, \Delta_1 = 1.250 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.382, \Delta_3 = 2.618;$$

$$k = 0.16, \Delta_1 = 1.563 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.250, \Delta_3 = 4.000;$$

$$k = 0.12, \Delta_1 = 2.083 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.162, \Delta_3 = 6.171;$$

$$k = 0.08, \Delta_1 = 3.125 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.096, \Delta_3 = 10.404;$$

$$k = 0.04, \Delta_1 = 6.250 \cdot 10^{-30}, \Delta_2 = 0.044, \Delta_3 = 22.956.$$

Увеличим кривизну пространства $b = 0, r = +10^{-5}$,

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.667, \Delta_2 = 1.500, \Delta_3 = -0.00001;$$

$$k = 0.20, \Delta_1 = 0.382, \Delta_2 = 2.618, \Delta_3 = -0.00001;$$

$$k = 0.16, \Delta_1 = 0.250, \Delta_2 = 3.999, \Delta_3 = -0.00002;$$

$$k = 0.12, \Delta_1 = 0.162, \Delta_2 = 6.171, \Delta_3 = -0.00002;$$

$$k = 0.08, \Delta_1 = 0.096, \Delta_2 = 10.404, \Delta_3 = -0.00003;$$

$$k = 0.04, \Delta_1 = 0.044, \Delta_2 = 22.956, \Delta_3 = -0.00006.$$

Пусть $b = 0, r = -10^{-5}$,

$$k = 0.24, \Delta_1 = 0.0000104, \Delta_2 = 0.667, \Delta_3 = 1.500;$$

$$k = 0.20, \Delta_1 = 0.0000125, \Delta_2 = 0.382, \Delta_3 = 2.618;$$

$$k = 0.16, \Delta_1 = 0.0000156, \Delta_2 = 0.250, \Delta_3 = 4.000;$$

$$k = 0.12, \Delta_1 = 0.0000208, \Delta_2 = 0.162, \Delta_3 = 6.171;$$

$$k = 0.08, \Delta_1 = 0.0000313, \Delta_2 = 0.096, \Delta_3 = 10.404;$$

$$k = 0.04, \Delta_1 = 0.0000626, \Delta_2 = 0.043, \Delta_3 = 22.956.$$

Отмечаем закономерность: с ростом кривизны примерно до величины $|r| = 10^{-5}$ при смене знака кривизны два корня из трех остаются практически теми же, а третий корень меняет знак (нумерация корней цифрами несущественна).

Увеличиваем кривизну дальше:
 $b = 0, r = +10^{-3},$
 $k = 0.24, \Delta_1 = 0.670, \Delta_2 = 1.489, \Delta_3 = -0.001;$
 $k = 0.20, \Delta_1 = 0.384, \Delta_2 = 2.617, \Delta_3 = -0.001;$
 $k = 0.16, \Delta_1 = 0.252, \Delta_2 = 3.999, \Delta_3 = -0.002;$
 $k = 0.12, \Delta_1 = 0.164, \Delta_2 = 6.171, \Delta_3 = -0.002;$
 $k = 0.08, \Delta_1 = 0.099, \Delta_2 = 10.404, \Delta_3 = -0.003;$
 $k = 0.04, \Delta_1 = 0.049, \Delta_2 = 22.957, \Delta_3 = -0.005.$

$b = 0, r = -10^{-3},$
 $k = 0.24, \Delta_1 = 0.001, \Delta_2 = 0.664, \Delta_3 = 1.502;$
 $k = 0.20, \Delta_1 = 0.001, \Delta_2 = 0.380, \Delta_3 = 2.497;$
 $k = 0.16, \Delta_1 = 0.002, \Delta_2 = 0.248, \Delta_3 = 4.000;$
 $k = 0.12, \Delta_1 = 0.002, \Delta_2 = 0.160, \Delta_3 = 6.171;$
 $k = 0.08, \Delta_1 = 0.003, \Delta_2 = 0.093, \Delta_3 = 10.404;$
 $k = 0.04, \Delta_1 = 0.008, \Delta_2 = 0.036, \Delta_3 = 22.956;$
 $k = 0.02, \Delta_1 = 47.979, \Delta_2 = 0.0105 + 0.0122i,$
 $\Delta_3 = 0.0105 - 0.0122i;$
 $k = 0.01, \Delta_1 = 97.990, \Delta_2 = 0.005 + 0.015i,$
 $\Delta_3 = 0.005 - 0.015i.$

Замечаем, что при этой кривизне отмеченная закономерность уже не выполняется: при смене знака кривизны все три корня в общем меняются, при этом один из корней меняет и знак.

Увеличим кривизну еще больше.
 $b = 0, r = +10^{-2},$
 $k = 0.24, \Delta_1 = 0.697, \Delta_2 = 1.480, \Delta_3 = -0.010;$
 $k = 0.20, \Delta_1 = 0.399, \Delta_2 = 2.613, \Delta_3 = -0.012;$
 $k = 0.16, \Delta_1 = 0.267, \Delta_2 = 3.998, \Delta_3 = -0.015;$
 $k = 0.12, \Delta_1 = 0.181, \Delta_2 = 6.171, \Delta_3 = -0.019;$
 $k = 0.08, \Delta_1 = 0.120, \Delta_2 = 10.405, \Delta_3 = -0.025;$
 $k = 0.04, \Delta_1 = 0.077, \Delta_2 = 22.958, \Delta_3 = -0.035;$
 $k = 0.02, \Delta_1 = 0.061, \Delta_2 = 47.981, \Delta_3 = -0.043;$
 $k = 0.01, \Delta_1 = 0.055, \Delta_2 = 97.992, \Delta_3 = -0.047;$

$b = 0, r = -10^{-2},$
 $k = 0.24, \Delta_1 = 0.011, \Delta_2 = 0.637, \Delta_3 = 1.519;$
 $k = 0.20, \Delta_1 = 0.013, \Delta_2 = 0.363, \Delta_3 = 2.624;$
 $k = 0.16, \Delta_1 = 0.017, \Delta_2 = 0.231, \Delta_3 = 4.002;$
 $k = 0.12, \Delta_1 = 0.025, \Delta_2 = 0.137, \Delta_3 = 6.172;$
 $k = 0.10, \Delta_1 = 0.034, \Delta_2 = 0.093, \Delta_3 = 7.873;$
 $k = 0.08, \Delta_1 = 10.403, \Delta_2 = 0.485 + 0.256i,$
 $\Delta_3 = 0.485 - 0.256i;$
 $k = 0.06, \Delta_1 = 14.597, \Delta_2 = 0.349 + 0.405i,$
 $\Delta_3 = 0.349 - 0.405i;$
 $k = 0.04, \Delta_1 = 22.955, \Delta_2 = 0.226 + 0.470i,$
 $\Delta_3 = 0.226 - 0.470i;$
 $k = 0.02, \Delta_1 = 47.977, \Delta_2 = 0.115 + 0.497i,$
 $\Delta_3 = 0.115 - 0.497i;$

$k = 0.01, \Delta_1 = 97.987, \Delta_2 = 0.626 + 0.501i,$
 $\Delta_3 = 0.626 - 0.501i.$

Отмечаем, что при положительной кривизне все корни вещественны, а при отрицательной кривизне некоторые корни становятся комплексными, что указывает на недопустимость такой величины отрицательной кривизны в рамках рассматриваемой модели.

Наконец при еще большем увеличении кривизны корни становятся комплексными при обоих знаках кривизны: $b = 0, r = +1,$

$k = 0.24, \Delta_1 = 1.265 + 1.129i, \Delta_2 = -0.362,$
 $\Delta_3 = 1.265 - 1.129i;$
 $k = 0.209, \Delta_1 = 1.588 + 0.726i, \Delta_2 = -0.392,$
 $\Delta_3 = 1.588 - 0.726i;$
 $k = 0.206, \Delta_1 = 1.625 + 0.656i, \Delta_2 = -0.395,$
 $\Delta_3 = 1.625 - 0.656i;$
 $k = 0.203, \Delta_1 = 1.662 + 0.574i, \Delta_2 = -0.398,$
 $\Delta_3 = 1.662 - 0.574i;$
 $k = 0.18, \Delta_1 = 1.173, \Delta_2 = 2.804, \Delta_3 = -0.422;$
 $k = 0.12, \Delta_1 = 0.695, \Delta_2 = 6.128, \Delta_3 = -0.489;$
 $k = 0.06, \Delta_1 = 0.503, \Delta_2 = 14.727, \Delta_3 = -0.563;$
 $k = 0.01, \Delta_1 = 0.406, \Delta_2 = 98.221, \Delta_3 = -0.627.$

$b = 0, r = -1,$
 $k = 0.24, \Delta_1 = 2.339, \Delta_2 = -0.863 + 0.662i,$
 $\Delta_3 = -0.863 - 0.662i;$
 $k = 0.209, \Delta_1 = 2.862, \Delta_2 = -0.387 + 0.645i,$
 $\Delta_3 = -0.387 - 0.645i;$
 $k = 0.206, \Delta_1 = 2.923, \Delta_2 = -0.345 + 0.643i,$
 $\Delta_3 = -0.345 - 0.643i;$
 $k = 0.203, \Delta_1 = 2.987, \Delta_2 = -0.303 + 0.6414i,$
 $\Delta_3 = -0.303 - 0.6414i;$
 $k = 0.18, \Delta_1 = 3.556, \Delta_2 = -0.237 + 0.625i,$
 $\Delta_3 = -0.237 - 0.625i;$
 $k = 0.12, \Delta_1 = 6.213, \Delta_2 = 0.602 + 0.5759i,$
 $\Delta_3 = 0.602 - 0.5759i;$
 $k = 0.06, \Delta_1 = 14.468, \Delta_2 = 0.995 + 0.527i,$
 $\Delta_3 = 0.995 - 0.527i;$
 $k = 0.01, \Delta_1 = 97.757, \Delta_2 = 0.121 + 0.491i,$
 $\Delta_3 = 0.121 - 0.491i.$

Таким образом, на границе величины кривизны около $r = \pm 10^{-2}$ появляются комплексные корни. Это означает, что при сильной кривизне теория становится не интерпретируемой.

3 Явный вид диагонализующих преобразований

Теперь рассмотрим вопрос о явном представлении преобразований S , с помощью которых

достигается диагонализация системы уравнений (2.1). Поскольку строки матриц S находятся с точностью до множителей, то можно искать эти матрицы в виде

$$\bar{\Phi}_i = S_{ij} \Phi_j, S = \begin{pmatrix} s_{(1)1} & s_{(1)2} & 1 \\ s_{(2)1} & s_{(2)2} & 1 \\ s_{(3)1} & s_{(3)2} & 1 \end{pmatrix}, s_{13} = s_{23} = s_{33} = +1.$$

Соответственно, возвращаясь к системам (2.4)–(2.6), отбрасываем в каждой из них третье уравнение. При этом получим три неоднородные системы по два уравнения в каждой, которые определяют строки (1), (2), (3):

$$\begin{aligned} (M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_{(1)}) \cdot s_{(1)1} + d_2 L_1 \cdot s_{(1)2} &= -d_3 L_1, \\ d_1 L_2 \cdot s_{(1)1} + (M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_{(1)}) \cdot s_{(1)2} &= -d_3 L_2; \\ (M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_{(2)}) \cdot s_{(2)1} + d_2 L_1 \cdot s_{(2)2} &= -d_3 L_1, \\ d_1 L_2 \cdot s_{(2)1} + (M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_{(2)}) \cdot s_{(2)2} &= -d_3 L_2; \\ (M - M_1 + d_1 L_1 - \mu_{(3)}) \cdot s_{(3)1} + d_2 L_1 \cdot s_{(3)2} &= -d_3 L_1, \\ d_1 L_2 \cdot s_{(3)1} + (M - M_2 + d_2 L_2 - \mu_{(3)}) \cdot s_{(3)2} &= -d_3 L_2. \end{aligned}$$

Приведем выражения для величин D_i и L_j (поскольку множители b^{-1} и b компенсируют друг друга в произведениях $D_i L_j$, мы их опускаем):

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{2}{(1 + \sqrt{1 - 4k})\sqrt{1 - 4k}} \left[-2k + \frac{1}{2L} \sqrt{1 - 4k} \right], \\ L_2 &= \frac{2}{(1 - \sqrt{1 - 4k})\sqrt{1 - 4k}} \left[+2k + \frac{1}{2L} \sqrt{1 - 4k} \right], \\ L_3 &= \frac{1}{k} \left[-2k + \frac{1}{2L} (4k - 1) \right], L = 1 + \frac{b}{\sqrt{6}}, \\ &\text{пусть } b = 0, \end{aligned}$$

$$D_1 = -\frac{r}{2} \sqrt{1 - 4k}, D_2 = +\frac{r}{2} \sqrt{1 - 4k}, D_3 = \frac{r}{2}.$$

Выпишем асимптотики для функций $L_i(k)$:

$$\begin{aligned} k \rightarrow \frac{1}{4}, L_1 \rightarrow -\infty, L_2 \rightarrow +\infty, L_3 \rightarrow -2, \\ k \rightarrow 0, L_1 \rightarrow +0.5, L_2 \rightarrow +\infty, L_3 \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Имеем следующие матрицы преобразований при фиксированных параметрах:

$$\begin{aligned} k = 0.24, r = +10^{-5}, \\ S = \begin{pmatrix} -0.00000487 & 0.00001812 & 1 \\ -0.00000352 & 0.00001115 & 1 \\ -0.00000704 & 0.00003625 & 1 \end{pmatrix}, \\ S^{-1} = \begin{pmatrix} -2684319.723 & 1938913.011 & 745406.7119 \\ -376446.431 & 232070.669 & 144375.7620 \\ -5.251 & 5.237 & 1.0140 \end{pmatrix}, \\ k = 0.24, r = -10^{-5}, \\ S = \begin{pmatrix} 0.00000704 & -0.00003625 & 1 \\ 0.00000487 & -0.00001812 & 1 \\ 0.00000352 & -0.00001115 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -745406.712 & 2684319.723 & -1938913.011 \\ -144375.762 & 376446.431 & -232070.669 \\ 1.014 & -5.251 & 5.237 \end{pmatrix},$$

$$k = 0.20, r = +10^{-5},$$

$$S = \begin{pmatrix} -0.000000605 & 0.00002203 & 1 \\ -0.000000347 & 0.00000561 & 1 \\ -0.000000693 & 0.00004412 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -8693394.736 & 4986681.114 & 3706713.621 \\ -76752.901 & 18059.506 & 58693.395 \\ -2.612 & 2.644 & 0.968 \end{pmatrix},$$

$$k = 0.20, r = -10^{-5},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.0000006926 & -0.00004411 & 1 \\ 0.0000006046 & -0.00002203 & 1 \\ 0.0000003467 & -0.00000561 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -3864009.458 & 9059949.095 & -5195939.637 \\ -60689.893 & -60689.898 & -20708.455 \\ 0.999 & -2.684 & 2.685 \end{pmatrix},$$

$$k = 0.10, r = +10^{-5},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.000000114 & 0.00008816 & 1 \\ 0.000000058 & 0.00000280 & 1 \\ 0.000000116 & 0.00017610 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 36454126.28 & -1.850 & -1.797 \\ -12200.458 & 420.705 & 11779.752 \\ -2.080 & 2.071 & 1.008 \end{pmatrix},$$

$$k = 0.10, r = -10^{-5},$$

$$S = \begin{pmatrix} -0.000000116 & -0.00017596 & 1 \\ -0.000000114 & -0.00008814 & 1 \\ -0.000000058 & -0.00000280 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 17976761.23 & -36475931.28 & 18499170.04 \\ -11796.328 & 12217.625 & -421.297 \\ 1.010 & -2.081 & 2.072 \end{pmatrix},$$

$$k = 0.04, r = +10^{-5},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.0000000629 & 0.00054044 & 1 \\ 0.0000000314 & 0.00000204 & 1 \\ 0.0000000630 & 0.00107282 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 64056692.55 & -31848280.67 & -32208411.88 \\ -1890.390 & 5.982 & 1884.407 \\ -2.008 & 2.000 & 1.007 \end{pmatrix},$$

$$k = 0.04, r = -10^{-5},$$

$$S = \begin{pmatrix} -0.00000006285 & -0.001066623 & 1 \\ -0.00000006278 & -0.000539638 & 1 \\ -0.00000003137 & -0.000002039 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 32552229.90 & -64461770.05 & 31909540.15 \\ -1901.911 & 1906.150 & -4.239 \\ 1.017 & -2.018 & 2.001 \end{pmatrix}.$$

4 Майорановские плоские волны

Рассмотрим вопрос о построении в явном виде решений трех уравнений майорановского типа:

$$\begin{aligned} [i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_1]\bar{\Phi}_1 &= 0, \quad \bar{M}_1 = M(1 + \Delta_1); \\ [i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_2]\bar{\Phi}_2 &= 0, \quad \bar{M}_2 = M(1 + \Delta_2); \\ [i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_3]\bar{\Phi}_3 &= 0, \quad \bar{M}_3 = M(1 + \Delta_3). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Уравнения из (4.1) однотипны, поэтому достаточно исследовать одно из них:

$$[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_1]\bar{\Phi}_1 = 0. \quad (4.2)$$

Используем майорановский базис для матриц Дирака

$$\begin{aligned} \gamma_M^0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \\ \gamma_M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Применяем подстановки

$$\bar{\Phi}_1 = e^{-iEt + ikx} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix},$$

где $A_i = a_i + ia'_i$, $B_i = b_i + ib'_i$, $C_i = c_i + ic'_i$. Из уравнения Дирака (4.2) получаем (ниже $\varphi = Et - kx$) алгебраическую систему

$$\left\{ \begin{pmatrix} k & -E & 0 & 0 \\ E & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & E \\ 0 & 0 & -E & -k \end{pmatrix} - i\bar{M}_1 \right\} \begin{pmatrix} a_1 + ia'_1 \\ a_2 + ia'_2 \\ a_3 + ia'_3 \\ a_4 + ia'_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.3)$$

Будем строить решения этой системы, одновременно диагоналируя оператор спиральности:

$$(\gamma^2\gamma^3\partial_1)\bar{\Phi}_1 = \sigma\bar{\Phi}_1,$$

$$\bar{\Phi}_1 = (\cos\varphi - i\sin\varphi) \begin{pmatrix} a_1 + ia'_1 \\ a_2 + ia'_2 \\ a_3 + ia'_3 \\ a_4 + ia'_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ik \begin{pmatrix} a_1 + ia'_1 \\ a_2 + ia'_2 \\ a_3 + ia'_3 \\ a_4 + ia'_4 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} a_1 + ia'_1 \\ a_2 + ia'_2 \\ a_3 + ia'_3 \\ a_4 + ia'_4 \end{pmatrix}.$$

Откуда находим два собственных значения и соответствующие ограничения:

$$\begin{aligned} \sigma = +k, \quad a_3 + ia'_3 &= +i(a_1 + i'a_1), \\ a_4 + ia'_4 &= -i(a_2 + i'a_2); \end{aligned}$$

$$\sigma = -k, \quad a_3 + ia'_3 = -i(a_1 + i'a_1),$$

$$a_4 + ia'_4 = +i(a_2 + i'a_2).$$

Следовательно, решения уравнений Дирака с фиксированными спиральностями представляются в виде (пусть $k = +\sqrt{E^2 - M^2}$):

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1(\sigma = +k) &= (\cos\varphi - i\sin\varphi) \begin{pmatrix} a_1 + ia'_1 \\ a_2 + ia'_2 \\ +i(a_1 + ia'_1) \\ -i(a_2 + ia'_2) \end{pmatrix}, \\ \bar{\Phi}_1(\sigma = -k) &= (\cos\varphi - i\sin\varphi) \begin{pmatrix} a_1 + ia'_1 \\ a_2 + ia'_2 \\ -i(a_1 + ia'_1) \\ +i(a_2 + ia'_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Учтем эти ограничения в уравнении Дирака (4.3):

$$\begin{aligned} \sigma = +k, \\ \begin{pmatrix} k - i\bar{M}_1 & -E & 0 & 0 \\ E & -k - i\bar{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k - i\bar{M}_1 & E \\ 0 & 0 & -E & -k - i\bar{M}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ +iA_1 \\ -iA_2 \end{pmatrix} &= 0, \quad (4.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma = -k, \\ \begin{pmatrix} k - i\bar{M}_1 & -E & 0 & 0 \\ E & -k - i\bar{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k - i\bar{M}_1 & E \\ 0 & 0 & -E & -k - i\bar{M}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ -iA_1 \\ +iA_2 \end{pmatrix} &= 0, \quad (4.5) \end{aligned}$$

в результате из (4.4)–(4.5) получаем одну и ту же систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} (k - i\bar{M}_1)A_1 - EA_2 &= 0, \\ EA_1 + (-k - i\bar{M}_1)A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Из требования обращения в нуль определителя системы находим

$$E^2 - \bar{M}_1^2 = k^2 \Rightarrow A_2 = \frac{k - i\bar{M}_1}{E} A_1.$$

Таким образом, для решений с разными поляризациями получаем представления

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\sigma=+k} &= (\cos\varphi - i\sin\varphi) \begin{pmatrix} A_1 \\ \frac{k - i\bar{M}_1}{E} A_1 \\ +iA_1 \\ -i\frac{k - i\bar{M}_1}{E} A_1 \end{pmatrix}, \\ \bar{\Phi}_{\sigma=-k} &= (\cos\varphi - i\sin\varphi) \begin{pmatrix} A_1 \\ \frac{k - i\bar{M}_1}{E} A_1 \\ -iA_1 \\ +i\frac{k - i\bar{M}_1}{E} A_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для каждой поляризации находим выражения для майорановских компонент:

$$\bar{\Phi}_{\sigma=+k}^{+Major} = \begin{pmatrix} (a_1 \cos \varphi + a'_1 \sin \varphi) \\ E^-[(k \cos \varphi - \bar{M}_1 \sin \varphi) a_1 + (\bar{M}_1 \cos \varphi + k \sin \varphi) a'_1] \\ +(-a'_1 \cos \varphi + a_1 \sin \varphi) \\ E^{-1}[-(\bar{M}_1 \cos \varphi + k \sin \varphi) a_1 + (k \cos \varphi - \bar{M}_1 \sin \varphi) a'_1] \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_{\sigma=+k}^{-Major} = i \begin{pmatrix} (a'_1 \cos \varphi - a_1 \sin \varphi) \\ E^-[-(\bar{M}_1 \cos \varphi + k \sin \varphi) a_1 + (k \cos \varphi - \bar{M}_1 \sin \varphi) a'_1] \\ +(a_1 \cos \varphi + a'_1 \sin \varphi) \\ -E^{-1}[(k \cos \varphi - \bar{M}_1 \sin \varphi) a_1 + (\bar{M}_1 \cos \varphi + k \sin \varphi) a'_1] \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_{\sigma=-k}^{+Major} = \begin{pmatrix} (a_1 \cos \varphi + a'_1 \sin \varphi) \\ E^-[(k \cos \varphi - \bar{M}_1 \sin \varphi) a_1 + (\bar{M}_1 \cos \varphi + k \sin \varphi) a'_1] \\ -(-a'_1 \cos \varphi + a_1 \sin \varphi) \\ -E^{-1}[-(\bar{M}_1 \cos \varphi + k \sin \varphi) a_1 + (k \cos \varphi - \bar{M}_1 \sin \varphi) a'_1] \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_{\sigma=-k}^{-Major} = i \begin{pmatrix} (a'_1 \cos \varphi - a_1 \sin \varphi) \\ E^-[-(\bar{M}_1 \cos \varphi + k \sin \varphi) a_1 + (k \cos \varphi - \bar{M}_1 \sin \varphi) a'_1] \\ -(a_1 \cos \varphi + a'_1 \sin \varphi) \\ E^{-1}[(k \cos \varphi - \bar{M}_1 \sin \varphi) a_1 + (\bar{M}_1 \cos \varphi + k \sin \varphi) a'_1] \end{pmatrix}.$$

Решения для всех трех полей $\bar{\Phi}_j^{Major}$ выглядят аналогично, различие только в параметрах \bar{M}_i . Используя выражение для матрицы преобразования S и S^{-1} , эти решения можно разложить в линейные комбинации по решениям с физическими массами M_1, M_2, M_3 и наоборот:

$$\bar{\Phi}_i^{Major} = S_{ij} \Phi_j^{Major}, \Phi_i^{Major} = (S^{-1})_{ij} \bar{\Phi}_j^{Major}.$$

Заключение

Исследована теория фермиона со спином $1/2$, который характеризуется тремя физическими массовыми параметрами M_i . Рассмотрена модельная ситуация, когда можно считать, что локально допустимо использование декартовых координат, а внешний геометрический фон можно эффективно учесть постоянным скаляром Риччи R , для простоты ограничились одномерным случаем. Используя диагонализацию матрицы смешивания в сложной системе уравнений, задача приведена к трем отдельным уравнениям дираковского типа с эффективными массами \bar{M}_i , значения которых определяются численно, в зависимости от внутренних параметров модели

и от величины (положительной или отрицательной) кривизны пространства-времени. Приведен также численный анализ необходимых диагонализующих преобразований S и S^{-1} . Решения трех отдельных уравнений майорановского типа строятся в базе импульс-спиральность. Используя выражение для матрицы преобразования, эти решения раскладываются в линейные комбинации по решениям с физическими массами и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург, В.Л. О волновых уравнениях частиц с переменным спином / В.Л. Гинзбург, Я.А. Смородинский // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13. – С. 274.
2. Гинзбург, В.Л. К теории возбужденных спиновых состояний элементарных частиц / В.Л. Гинзбург // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13, вып. 1–2. – С. 33–58.
3. Давыдов, А.С. Волновое уравнение частицы, имеющей спин $3/2$, в отсутствии поля / А.С. Давыдов // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13, вып. 9–10. – С. 313–319.
4. Bhabha, H.J. On the theory of point particles / H.J. Bhabha, Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1944. – Vol. 183. – P. 134–141.
5. Bhabha, H.J. Relativistic wave equations for the proton / H.J. Bhabha // Proc. Indian Acad. Sci. A. – 1945. – Vol. 21. – 241–264.
6. Bhabha, H.J. Relativistic wave equations for elementary particles / H.J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, № 2–3. – P. 200–215.
7. Bhabha, H.J. The theory of the elementary particles / H.J. Bhabha // Rep. Progr. Phys. – 1946. – Vol. 10. – P. 253–271.
8. Harish-Chandra. On the equations of motion of point particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1946. – Vol. 185. – P. 269–287
9. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1948. – Vol. 192. – P. 195–218.
10. Гельфанд, И.М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
11. Гельфанд, И.М. Теорема Паули для общих релятивистски инвариантных уравнений / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 12. – С. 1096–1104.
12. Гельфанд, И.М. Зарядная сопряженность для общих релятивистски инвариантных уравнений / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 12. – С. 1105–1111.
13. Bhabha, H.J. Theory of elementary particles-fields / H.J. Bhabha // Lectures Delivered at 2nd Summer Seminar Canadian Math. Congress: held at University of British Columbia, 1949. – P. 1–103.

14. Федоров, Ф.И. К вопросу о решении релятивистских волновых уравнений / Ф.И. Федоров // Доклады АН СССР. – 1949. – Т. 65, № 6. – С. 813–814.
15. Фрадкин, Е.С. К теории частиц с высшими спинами / Е.С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.
16. Федоров, Ф.И. О минимальных полиномах матриц релятивистских волновых уравнений / Ф.И. Федоров // Доклады АН СССР. – 1951. – Т. 79, № 5. – С. 787–790.
17. Федоров, Ф.И. К теории частицы со спином 2 / Ф.И. Федоров // Ученые записки БГУ. – 1951. – Вып.12. – С. 156–173.
18. Bhabha, H.J. An equation for a particle with two mass states and positive charge density / H.J. Bhabha // Phil. Mag. – 1952. – Ser. VII, Vol. 43. – P. 33–47.
19. Федоров, Ф.И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф.И. Федоров // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.
20. Petras, M. A contribution of the theory of the Pauli-Fierz's equations a particle with spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 2. – P. 169–170.
21. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
22. Файнберг, В.Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитным и мезонным полями / В.Я. Файнберг // Труды ФИАН. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.
23. Ginzburg, V.L. On relativistic wave equations with a mass spectrum / V.L. Ginzburg // Acta Phys. Pol. – 1956. – Vol. 15. – P. 163–175.
24. Shimazu, H. A relativistic wave equation for a particle with two mass states of spin 1 and 0 / H. Shimazu // Progress of Theoretical Physics. – 1956. – Vol. 16, № 4. – P. 285–298.
25. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, № 2. – P. 325–326.
26. Bergmann, P.G. Subsidiary conditions in covariant theories / P.G. Bergmann, A.I. Janis // Phys. Rev. – 1958. – Vol. 111, № 4. – P. 1191–1200.
27. Buchdahl, H.A. On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field / H.A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1958. – Vol. 10. – P. 96–103.
28. Shelepin, L.A. Covariant theory of relativistic wave equations / L.A. Shelepin // Nucl. Phys. – 1962. – Vol. 33, № 4. – P. 580–593.
29. Capri, A.Z. First order wave equations for multi-mass fermions / A.Z. Capri // Nuovo Cim. B. – 1969. – Vol. 64, № 1. – P. 151–158.
30. Aurilia, A. Theory of high spin fields / A. Aurilia, H. Umezawa // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 182, № 5. – P. 1682–1694.
31. Федоров, Ф.И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин / Ф.И. Федоров, В.А. Плетюхов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1969. – № 6. – С. 81–86.
32. Плетюхов, В.А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.
33. Федоров, Ф.И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин / Ф.И. Федоров, В.А. Плетюхов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 78–83.
34. Плетюхов, В.А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.
35. Shamaly, A. First-order wave equations for integral spin / A. Shamaly, A.Z. Capri // Nuovo Cim. B. – 1971. – Vol. 2, № 2. – P. 235–253.
36. Amar, V. Finite dimensional Gel'fand-Yaglom equations for arbitrary integral spin / V. Amar, U. Dozzio // Nuovo Cim. B. – 1972. – Vol. 9. – P. 53–63.
37. Capri, A.Z. Electromagnetic properties of a new spin-1/2 field / A.Z. Capri // Progr. Theor. Phys. – 1972. – Vol. 48, № 4. – P. 1364–1374.
38. Shamaly, A. Unified theories for massive spin 1 fields / A. Shamaly, A.Z. Capri // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51, no 14. – P. 1467–1470.
39. Khalil, M.A.K. Properties of a 20-component spin 1/2 relativistic wave equation / M.A.K. Khalil // Phys. Rev. D. – 1977. – Vol. 15, № 6. – P. 1532–1539.
40. Wightman, A.S. Invariant wave equations: general theory and applications to the external field problem / A.S. Wightman // Lecture Notes in Physics. – 1978. – Vol. 73. – P. 1–101.
41. Khalil, M.A.K. An equivalence of relativistic field equations / M.A.K. Khalil // Nuovo Cimento. A. – 1978. – Vol. 45, № 3. – P. 389–404.
42. Garding, L. Mathematics of invariant wave equations / L. Garding // Lect. Notes in Physics. – 1978. – Vol. 73. – P. 102–164.
43. Gazeau, J.P. L'equation de Dirac avec masse et spin arbitrares: une construction simple et naturelle / J.P. Gazeau // J. Phys. G. Nucl. Phys. – 1980. – Vol. 6, № 12. – P. 1459–1475.
44. Cox, W. Higher-rank representations for zero-spin fields theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 627–635.
45. Cox, W. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.
46. Mathews, P.M. On the admissible Lorentz group representations in unique-mass, unique-spin relativistic wave equations / P.M. Mathews,

- B. Vijayalakshmi, M.Sivakuma // Phys. A. – 1982. – Vol. 15, № 11. – P. 1579–1582.
47. Mathews, P.M. On inequivalent classes unique-mass-spin relativistic wave equations involving repeated irreducible representations with arbitrary multiplicities / P.M. Mathews, B. Vijayalakshmi // J. Math. Phys. – 1984. – Vol. 25, № 4. – P. 1080–1087.
48. Cox, W. On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita-Schwinger field coupled to an external electromagnetic field / W. Cox // J. Phys. A. – 1989. – Vol. 22, № 10. – P. 1599–1608.
49. Deser, S. Inconsistencies of massive charged gravitating higher spins / S. Deser, A. Waldron // Nucl. Phys. B. – 2002. – Vol. 631. – P. 369–387.
50. Simulik, V. Relativistic wave equations of arbitrary spin in quantum mechanics and field theory, example spin $S=2$ / V. Simulik // J. of Phys. Conference Series. – 2017. – Vol. 804, № 1. – Paper 012040.
51. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / E.M. Ovsyuk, V.V. Kisel, Ya.A. Voynova, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 2. – P. 153–165.
52. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field / V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsyuk, V. Balan, V. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2017. – Vol. 20, № 1. – P. 21–39.
53. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / E.M. Ovsyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter 4 in the book «Quaternions: Theory and Applications». – Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 47–84.
54. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field / E.M. Ovsyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter 3 in the book «Quaternions: Theory and Applications». – Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers, 2017. – P. 11–46.
55. Квантовая механика частицы со спином 1 и квадрупольным моментом во внешнем однородном магнитном поле / В.В. Кисель, Е.М. Овсюк, Я.А. Войнова, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 18–27.
56. Spin 1/2 particle with two mass states. interaction with external fields / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky, E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2017. – Vol. 20, № 4. – P. 404–423.
57. Spin 1/2 particle with two masses in magnetic field / E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Applied Sciences. – 2018. – Vol. 20. – P. 148–166.
58. Spin 1/2 particle with two masses in external magnetic field / E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov, V.V. Kisel, N.V. Samsonenko // J. Mech. Cont. and Math. Sci. Special Issue. – 2019. – № 1. – P. 651–660.
59. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения / И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. – М.: Наука, 1958. – 367 с.
60. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / V.V. Kisel, E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.
61. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol II. Physical Problems / V.V. Kisel, E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p.
62. Фермион с тремя массовыми параметрами: взаимодействие с внешними полями / В.В. Кисель, В.А. Плетюхов, Е.М. Овсюк, Я.А. Войнова, О.В. Веко, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 661–667.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, проект № Ф18У-009.

Поступила в редакцию 08.10.19.

УДК 539.142; 004.67

ПАРАМЕТРЫ ФОРМЫ И РАЗМЕРА ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР, ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ОЦЕНЕННЫХ ЯДЕРНЫХ ДАННЫХ

О.М. Дерюжкова, А.С. Парахневич, М.А. Ревенок

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SHAPE AND SIZE PARAMETERS OF DEFORMED NUCLEI OBTAINED ON THE BASIS OF THE ASSESSED NUCLEAR DATA

O.M. Deryuzhkova, A.S. Parakhnevich, M.A. Revenok

F. Scorina Gomel State University

В рамках модели Нильссона, которая является объединением коллективной модели и модифицированной модели ядерных оболочек, исследованы параметры квадрупольной и аксиальной деформаций изотопов свинца с числом нуклонов $A = 178-215$. Анализ экспериментальной информации проведен с использованием базы данных «Карта параметров формы и размеров ядер».

Ключевые слова: деформация ядер, квадрупольный момент, параметры формы и размеров ядер, одночастичные и коллективные уровни, изотопы свинца.

The parameters of the quadrupole and axial deformations of lead isotopes with the nucleons number $A = 178-215$ have been studied in the Nilsson model, which is a combination of the collective model and the modified model of nuclear shells. The analysis of experimental information is carried out using the database «Map of the shape and size parameters of the nuclei».

Keywords: nuclei deformation, quadrupole moment, shape and size parameters of nuclei, single-particle and collective levels, lead isotopes.

Введение

В последнее время, благодаря совершенствованию современных исследовательских средств ядерной физики (ядерные реакторы, ускорители и детекторы частиц), накоплен богатый экспериментальный материал, позволяющий не только расширить возможности имеющихся теорий, но и упростить расчеты, повысив при этом их надежность и точность. С развитием исследований новых видов взаимодействий между нуклонами ядра, находящимися на оболочках с различными квантовыми характеристиками, возрос интерес к численным данным о квадрупольных моментах ядер и параметрах их деформации, описывающих форму ядра. Это касается не только общих сведений о форме атомного ядра, но и информации о том, как эта форма изменяется при переходе ядра из основного состояния в различные возбужденные состояния. Теоретическое описание изменения формы атомных ядер возможно в различных модельных подходах, круг которых достаточно широк [1]–[7].

Число экспериментальных исследований, посвященных изучению размеров и формы атомных ядер, также постоянно возрастает [8]–[10]. Разрабатываются новые подходы и способы исследований, создаются крупномасштабные базы параметров структуры ядра, позволяющие получать данные о деформации атомных ядер [11]. При этом важной задачей является разработка методов комбинированного изучения различных

экспериментов и оценка систематических погрешностей, т. е. для детального и системного анализа накопленной информации необходим свободный доступ к базам экспериментальных данных [12]. Такую возможность предоставляет современная информационная система, объединяющая ряд реляционных баз данных (БД), разработанная Центром данных фотоядерных экспериментов (ЦДФЭ) при Научно-исследовательском институте ядерной физики имени Д.В. Скобельцына Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (НИИЯФ МГУ). Она расположена на web-сервере ЦДФЭ и содержит оцененную, т. е. проанализированную экспертами самую точную и надежную на момент обновления последней версии числовую и библиографическую информацию [13]. Система позволяет интерактивно с большой эффективностью использовать базы ядерных данных и их поисковые ресурсы. При этом можно решать не только оригинальные ядерно-физические исследовательские задачи, получая новые результаты, но и рассмотреть уникальные проблемы, постановка и решение которых без БД невозможна [14].

Для анализа размера и формы деформированных атомных ядер воспользуемся современным подходом в описании и систематизации свойств и характеристик ядер. Будем считать, что тип симметрии ядра (форма ядра) не является его неизменной характеристикой. Такая же мера условности отвечает и выбору ядерных

моделей. Количественную проверку модели, описывающей структуру деформированного ядра, проведем с помощью параметра равновесной деформации β , извлекая и интерпретируя его с помощью банков ядерных данных ЦДФЭ, и параметра деформации δ модели Нильссона, характеризующего отклонение формы ядра от аксиально-симметричной.

1 Модель Нильссона для деформированных ядер

Форма атомного ядра зависит от того, в каком из возбужденных состояний оно находится. Уровни возбуждения ядра делятся на одночастичные и коллективные и имеют сложную, смешанную природу. Одночастичные уровни описываются оболочечной моделью ядра. Оболочечные эффекты могут приводить к образованию деформированных возбужденных состояний изначально сферических ядер, при этом их форма будет отличаться от равновесной. Согласно модели ядерных оболочек, полностью заполненные оболочки (число протонов Z и (или) число нейтронов N совпадает с магическим числом 2, 8, 20, 50, 82, 126) являются сферически симметричными, а уровни, не входящие в заполненные оболочки, анизотропны, что приводит к отклонению формы ядра от сферической. Коллективные уровни могут быть вращательными, соответствующими вращению ядра как целого, и колебательными, соответствующими колебаниям ядерной плотности или поверхности ядра. Такое поведение описывается в рамках капельной модели ядра и ее улучшенных модификациях. Таким образом, деформация атомных ядер проявляется на квантовом уровне и связана как с оболочечной структурой ядра, так и с коллективным, т.е. согласованным, характером движения нуклонов в ядре. Экспериментальным доказательством существования деформированных ядер являются спектры возбужденных состояний, которые образуют систему вращательных полос. Сравнение экспериментальных данных по спектрам возбуждений атомных ядер с теоретическими предсказаниями в различных модельных подходах дает интересную информацию о форме и размере ядра.

При незначительных деформациях ядра параметр β , определяющий форму и размер атомных ядер или степень отклонения формы ядра от сферически симметричной, связан с величиной квадрупольного момента Q и зависит от распределения плотности ядерного вещества:

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{Q}{A \langle r^2 \rangle},$$

где A – число нуклонов ядра, $\langle r^2 \rangle$ – среднеквадратичный радиус ядра.

Наибольшие значения квадрупольных моментов имеют те ядра, у которых оболочки

заполнены лишь частично (числа протонов Z и нейтронов N находятся в середине между магическими числами). Все установленные деформированные ядра имеют форму вытянутых или сплюснутых эллипсоидов вращения (рисунок 1.1 *a, б*). Большие величины квадрупольных моментов характерны для вытянутых ядер ($Q > 0$ или $\beta > 0$), число которых больше, чем сплюснутых ($Q < 0$ или $\beta < 0$).

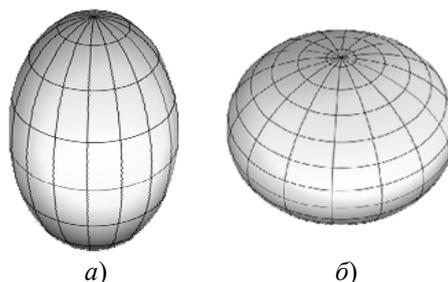


Рисунок 1.1 – Несферичная форма деформированных атомных ядер:
а) $Q > 0$, б) $Q < 0$

Рассмотрим один из вариантов обобщенной модели ядра для описания деформированных ядер: модель Нильссона, которая представляет собой объединение коллективной модели и модифицированной модели ядерных оболочек. В качестве потенциала в модели Нильссона используется потенциал гармонического осциллятора с добавленной анизотропией. При этом частоты осцилляторов вдоль трех декартовых осей не одинаковы $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$. В данной модели учитываются два типа ядерных движений: коллективное вращение ядра относительно внешней декартовой системы координат, обусловленное его деформацией, и одночастичное движение нуклонов относительно внутренней, вращающейся в деформированной потенциальной яме, системы координат. При этом форма ядра представляет собой эллипсоид с осью симметрии, принятой за z , т.е. для объяснения свойств деформированных ядер помимо изучения коллективных движений ядра как целого (вращение ядра и колебания его поверхности), необходимо также рассмотреть одночастичные состояния нуклонов (внутреннее движение в несферическом потенциале). Из-за взаимодействия между коллективными и одночастичными степенями свободы ядра в атомных ядрах наблюдаются как статические деформации, так и деформации формы или динамические. В адиабатическом приближении одночастичные и коллективные движения в ядре разделяются, поэтому полную волновую функцию ядра можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых описывает определенное движение. Рассматривая внутреннее движение в ядре, предполагаем, что отдельные нуклоны движутся

независимо в некотором фиксированном несферическом поле ядра. Гамильтониан внутреннего движения представляется, как и в обычной модели оболочек (без учета остаточного взаимодействия), в виде суммы одночастичных гамильтонианов. Таким образом, задача сводится к решению уравнения Шредингера для одной частицы, движущейся в трехмерной анизотропной гармонической осцилляторной потенциальной яме с учетом спин-орбитального взаимодействия. Данный потенциал, потенциал Нильссона, отражает основные особенности движения нуклонов в ядрах, форма которых отличается от аксиально-симметричной, и имеет простой вид. Он хорошо применим в случае средних и тяжелых атомных ядер.

Итак, потенциал Нильссона выбираем в виде суммы [2]:

$$M = \left(\frac{M}{2}\right)(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) + C(\bar{l}s) + Dl^2, \quad (1.1)$$

где $\left(\frac{M}{2}\right)(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$ – потенциал анизотропного осциллятора, учитывающего несферичность потенциальной ямы и размытость ее края; $C(\bar{l}s)$ – потенциал спин-орбитального взаимодействия; Dl^2 – слагаемое, пропорциональное l^2 , вводится для понижения энергии одночастичного состояния при больших значениях орбитального момента l . Коэффициенты C и D подбираются так, чтобы при параметре деформации в потенциале Нильссона $\delta = 0$ наиболее точно воспроизводилась последовательность уровней сферического оболочечного потенциала. При больших деформациях последние слагаемые формулы (1.1) вносят в потенциал незначительный вклад.

Так как большинство несферических ядер имеет форму, близкую к эллипсоиду вращения, то поле ядра характеризуется аксиальной симметрией и в этом случае форму ядра при постоянном объеме или плотности ядерного вещества можно описать, введя всего лишь один параметр деформации β , который определяется следующим образом через осцилляторные частоты:

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \right], \quad (1.2)$$

$$\omega_3^2 = \omega_0^2 \left[1 - 2 \left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \right], \quad (1.3)$$

где ω_0 – собственная частота гармонического осциллятора.

Параметр деформации δ , введенный Нильссоном, связан с обычным параметром равновесной деформации β соотношением:

$$\delta = \frac{2 \left(\frac{8}{15}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \hbar \omega_0(\beta)}{C}, \quad (1.4)$$

где C – модельный параметр.

Используя выражение (1.4), получим формулу для построения графической зависимости $\delta(\beta)$. Согласно (1.4) собственная частота гармонического осциллятора ω_0 , а значит и положение одночастичных уровней нуклонов в потенциале Нильссона, зависит от величины и знака деформации β . Это связано с исходным предположением о несжимаемости ядерной материи, поэтому в процессе деформации объем ядра не меняется, т. е. осцилляторные частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = const$. Тогда, используя формулы (1.2) и (1.3), получим:

$$\omega_0(\beta) = \omega_{00} \left[\left[1 + \left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \right]^2 \left[1 - 2 \left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \right] \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (1.5)$$

где ω_{00} – осцилляторная константа, которая связана с размером атомного ядра следующим образом: $\hbar \omega_{00} = 41A^{\frac{1}{3}}$ МэВ.

Умножив выражение (1.5) на \hbar , получим энергию нуклона в потенциале Нильссона аксиально-симметричной деформированной ямы со спин-орбитальной связью:

$$\hbar \omega_0(\beta) = \hbar \omega_{00} \left[\left[1 + \left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \right]^2 \left[1 - 2 \left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \right] \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (1.6)$$

Результаты расчетов в соответствии с формулой (1.4) и учетом формулы (1.6) зависят от параметров ω_{00} , C и β . Модельный параметр C подбирается таким образом, чтобы при $\beta = 0$ получилась правильная модель ядерных оболочек для сферического ядра:

$$C = 2\hbar \omega_{00} \kappa. \quad (1.7)$$

При этом параметр κ принимает два различных значения, меняясь в пределах от $\kappa = 0,05$ для $N > 50$ до $\kappa = 0,08$ для $N < 20$ (N – число нейтронов ядра).

Таким образом, выражение для моделирования, после подстановки (1.6) и (1.7) в уравнение (1.4), принимает вид:

$$\delta(\beta) = \left(\frac{8}{15}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \frac{1}{\kappa} \times \left[\left[1 + \left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \right]^2 \left[1 - 2 \left(\frac{4}{5}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \beta \right] \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (1.8)$$

Из формулы (1.8) следует, что δ не зависит от полного числа нуклонов ядра A , но равновесная деформация ядра β для различных ядер принимает разные значения в пределах от $-0,6$ до $+0,6$ [15]. Если деформация β положительна, то это значит, что нуклон колеблется быстрее в плоскости симметрии, перпендикулярной оси симметрии z , чем вдоль этой оси. При отрицательной деформации β большие колебания происходят вдоль оси симметрии z .

Обобщенная модель Нильссона позволяет провести классификацию уровней энергии ядра: одночастичных (связанных с возбуждением наружных нуклонов) и коллективных (вращательных и колебательных, связанных с возбуждением остова), определить энергии этих уровней, а также описать периодичность изменения формы ядра (от сферически симметричной до вытянутой или сплюснутой и обратно) при изменении числа нуклонов ядра.

2 Извлечение численной информации о деформированных ядрах с помощью БД «Карта параметров формы и размеров ядер»

Рассмотрим методы извлечения информации о ядрах через банки ядерных данных ЦДФЭ НИИЯФ МГУ. Доступ к содержанию БД возможен с главной страницы web-сайта ЦДФЭ (рисунок 2.1). Основными из них являются:

1. «База данных по ядерным реакциям» международной системы EXFOR, содержащая информацию об огромном количестве разнообразных характеристик (выходы, сечения, функции возбуждения реакций, энергетические, угловые, зарядовые, массовые и другие распределения частиц-продуктов реакций, поляризации, анализирующие способности, корреляции и другие) ядерных реакций под действием фотонов, нейтронов, заряженных частиц и тяжелых ионов.

2. «Полная реляционная база ядерно-спектроскопических данных «Relational ENSDF», включающая в себя всю известную информацию (энергии, спины, четности, времена жизни, мультипольности, коэффициенты ветвления и смешивания, вероятности переходов, значения параметра $\log ft$ распадов, абсолютно уникальные данные об изоспинах ядерных состояний, квадрупольных моментах и деформациях ядер и многие другие) об уровнях и переходах между ними для всех (~3500) известных в настоящее время атомных ядер из международного массива экспериментальных и оцененных данных по структуре ядер ENSDF.

3. База данных «Публикации по ядерной физике», включающая в себя справочно-библиографическую информацию из экспериментальных и теоретических работ по ядерной физике из международного массива NSR.



Рисунок 2.1 – Главная страница web-сайта ЦДФЭ

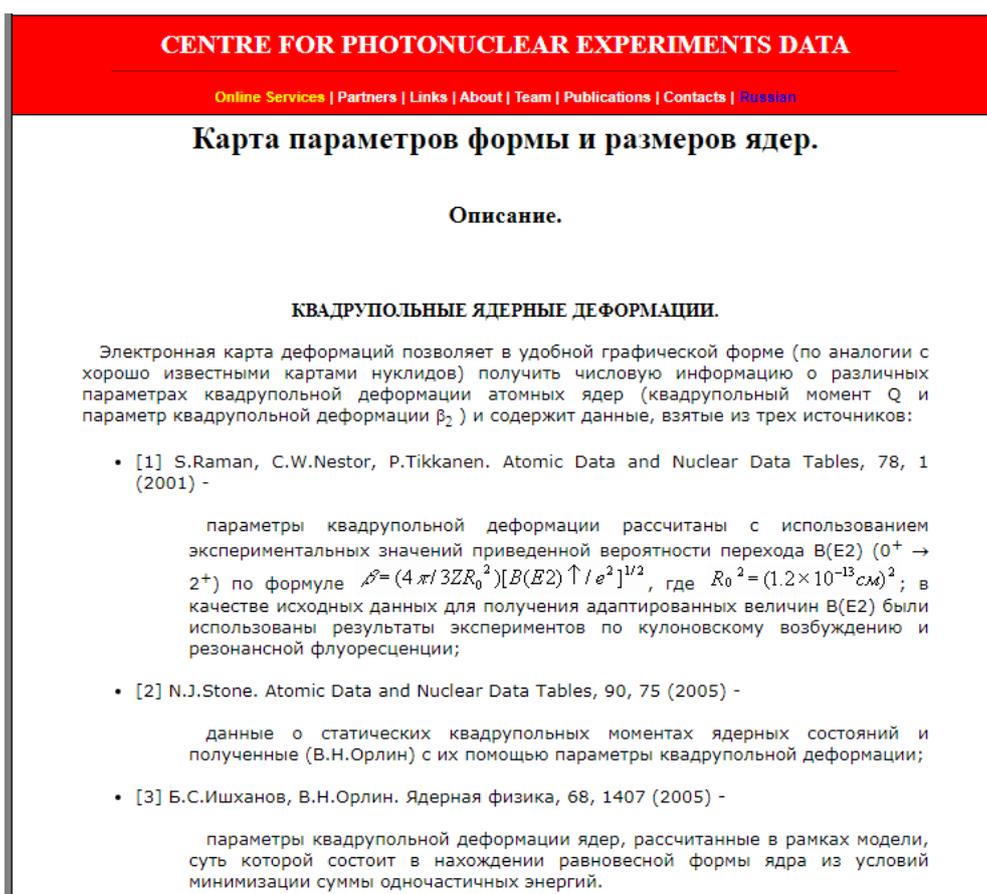


Рисунок 2.2 – Описание БД «Карта параметров формы и размеров ядер»

4. База данных «Параметры основных состояний атомных ядер», содержащая информацию о разнообразных характеристиках основных состояний атомных ядер (распространенность изотопов в естественной смеси, спин-четность, время жизни (период полураспада, ширина), масса, дефект массы, энергия связи, дипольный и квадрупольный моменты, изоспин, энергия первого изобар-аналогового состояния).

5. Интерактивный «Калькулятор порогов и энергий ядерных реакций», позволяющий на основе современных данных о массах ядер рассчитывать энергетические пороги и энергии любых возможных реакций.

Для каждой БД, кроме доступа к содержанию, организован доступ к разделу «Описание», в котором даны краткие сведения о БД. Помимо указанных основных баз данных имеются и некоторые другие, а в разделах «Партнеры» и «Ссылки» приведены гиперссылки на web-сайты других организаций, на которых также имеются электронные ресурсы, содержащие полезную ядерно-физическую информацию [13].

Данные о квадрупольном моменте Q , параметре квадрупольной деформации β_2 атомных ядер и их зарядовых радиусах r представлены в реляционной БД «Карта параметров формы и размеров ядер». При нажатии на главной странице

сайта под БД «Карта параметров формы и размеров ядер» кнопки «[описание]» появляется окно, содержащее информацию об электронной карте деформаций, таблице зарядовых радиусов и источниках численных данных (рисунок 2.2).

Рассмотрим использование БД по извлечению информации для исследования характеристик изотопов магического ядра свинца ${}_{82}\text{Pb}$ ($Z = 82$).

Для работы с БД разработана удобная графическая форма – расположение наборов данных в координатах $Z-N$. С целью облегчения поиска и идентификации данных для ядра (или группы ядер), имеющих определенную деформацию (и соответствующую ей форму), применена специальная расцветка элементов системы, аналогичная расцветке географических карт. На сайте ЦДФЭ «Карта параметров формы и размеров ядер» представлена в ярком сине-зелено-коричневом цвете. В данном случае, на рисунке 2.3 оттенками коричневого цвета («горы») обозначены ядра с положительной деформацией, то есть вытянутые; синего («морья») – ядра с отрицательной деформацией, то есть сплюснутые; зеленого («равнины») – ядра с деформацией неизвестного знака или нулевой. Пять градаций каждого цвета помогают идентифицировать параметры деформации по абсолютной величине –

наибольшему значению соответствует более интенсивный цвет. Предусмотрены (рисунок 2.3) возможности использования 4-х уровней масштаба, передвижение между которыми осуществляется с помощью специальных стрелок [16].

Также необходимый изотоп можно быстро найти, задав числа протонов Z , нейтронов N и нуклонов A в «Быстром поиске» (рисунок 2.4). Он очень удобен в использовании и позволяет значительно сократить время на поиск того или иного элемента. Его можно найти в конце БД «Карта параметров формы и размеров ядер». Если задать $Z = 82$, то система автоматически выдаст расположение изотопов свинца ^{82}Pb . В соответствии с расцветкой изотопов ^{82}Pb можно сделать предварительный вывод о знаке деформации, т. е. о форме ядер свинца в основном состоянии: изотопы $^{82}\text{Pb}^{199}$, $^{82}\text{Pb}^{205}$, $^{82}\text{Pb}^{211}$ обладают положительной деформацией, $^{82}\text{Pb}^{197}$, $^{82}\text{Pb}^{201}$, $^{82}\text{Pb}^{203}$, $^{82}\text{Pb}^{204}$, $^{82}\text{Pb}^{206}$, $^{82}\text{Pb}^{209}$ имеют отрицательную деформацию (рисунок 2.4). Так как квадрупольный момент у ядра возникает в результате нарушения сферической симметрии распределения зарядов, то при $Q = 0$ квадрупольная деформация

отсутствует, и ядро является сферически симметричным, при положительных значениях момента Q ядро вытянуто в направлении спина, а при отрицательных – сфероид сплюснен в направлении спина.

Выбрав ядро свинца ^{82}Pb на самом крупном масштабе Карты, после обработки запроса в дополнительном окне (рисунок 2.5) в табличном виде приводятся все соответствующие указанным ранее источникам информации численные данные. Доступны значения квадрупольных моментов Q и параметров квадрупольной деформации β или β_2 для БД «Карта параметров формы и размеров ядер», а также зарядовые радиусы r изотопов свинца. Численные значения позволяют оценить не только форму, но и размер исследуемого ядра. Параметр квадрупольной деформации β_2 оценивается двумя способами: по измеренным приведенным вероятностям $E2$ -переходов (данные типа «В») и по измеренным статическим квадрупольным моментам ядер (данные типа «Q») [17], [18].

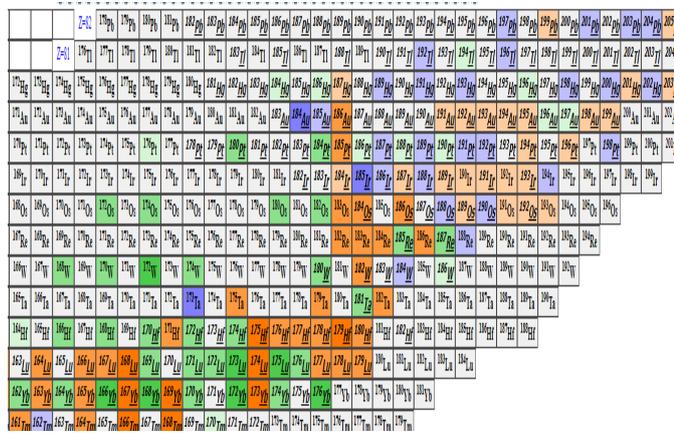
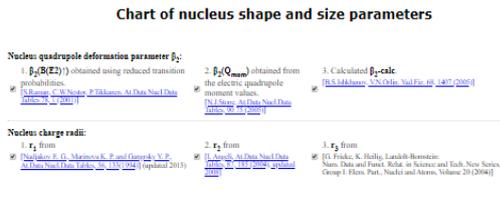


Рисунок 2.3 – Верхний и нижний уровень масштаба БД «Карта параметров формы и размеров ядер»

Быстрый поиск:

Z: A: N:

^{183}Pb	^{184}Pb	^{185}Pb	^{186}Pb	^{187}Pb	^{188}Pb	^{189}Pb	^{190}Pb	^{191}Pb	^{192}Pb	^{193}Pb	^{194}Pb	^{195}Pb	^{196}Pb	^{197}Pb	^{198}Pb	^{199}Pb	^{200}Pb	^{201}Pb	^{202}Pb	^{203}Pb	^{204}Pb	^{205}Pb	^{206}Pb	^{207}Pb	^{208}Pb	^{209}Pb	^{210}Pb	^{211}Pb	^{212}Pb	^{213}Pb	^{214}Pb	^{215}Pb														
^{183}Tl	^{183}Tl	^{184}Tl	^{185}Tl	^{186}Tl	^{187}Tl	^{188}Tl	^{189}Tl	^{190}Tl	^{191}Tl	^{192}Tl	^{193}Tl	^{194}Tl	^{195}Tl	^{196}Tl	^{197}Tl	^{198}Tl	^{199}Tl	^{200}Tl	^{201}Tl	^{202}Tl	^{203}Tl	^{204}Tl	^{205}Tl	^{206}Tl	^{207}Tl	^{208}Tl	^{209}Tl	^{210}Tl	^{211}Tl	^{212}Tl	^{213}Tl	^{214}Tl	^{215}Tl													
^{181}Ho	^{182}Ho	^{183}Ho	^{184}Ho	^{185}Ho	^{186}Ho	^{187}Ho	^{188}Ho	^{189}Ho	^{190}Ho	^{191}Ho	^{192}Ho	^{193}Ho	^{194}Ho	^{195}Ho	^{196}Ho	^{197}Ho	^{198}Ho	^{199}Ho	^{200}Ho	^{201}Ho	^{202}Ho	^{203}Ho	^{204}Ho	^{205}Ho	^{206}Ho	^{207}Ho	^{208}Ho	^{209}Ho	^{210}Ho	^{211}Ho	^{212}Ho	^{213}Ho	^{214}Ho	^{215}Ho												
^{180}Au	^{181}Au	^{182}Au	^{183}Au	^{184}Au	^{185}Au	^{186}Au	^{187}Au	^{188}Au	^{189}Au	^{190}Au	^{191}Au	^{192}Au	^{193}Au	^{194}Au	^{195}Au	^{196}Au	^{197}Au	^{198}Au	^{199}Au	^{200}Au	^{201}Au	^{202}Au	^{203}Au	^{204}Au	^{205}Au	^{206}Au	^{207}Au	^{208}Au	^{209}Au	^{210}Au	^{211}Au	^{212}Au	^{213}Au	^{214}Au	^{215}Au											
^{179}Pt	^{180}Pt	^{181}Pt	^{182}Pt	^{183}Pt	^{184}Pt	^{185}Pt	^{186}Pt	^{187}Pt	^{188}Pt	^{189}Pt	^{190}Pt	^{191}Pt	^{192}Pt	^{193}Pt	^{194}Pt	^{195}Pt	^{196}Pt	^{197}Pt	^{198}Pt	^{199}Pt	^{200}Pt	^{201}Pt	^{202}Pt	^{203}Pt	^{204}Pt	^{205}Pt	^{206}Pt	^{207}Pt	^{208}Pt	^{209}Pt	^{210}Pt	^{211}Pt	^{212}Pt	^{213}Pt	^{214}Pt	^{215}Pt										
^{178}Ir	^{179}Ir	^{180}Ir	^{181}Ir	^{182}Ir	^{183}Ir	^{184}Ir	^{185}Ir	^{186}Ir	^{187}Ir	^{188}Ir	^{189}Ir	^{190}Ir	^{191}Ir	^{192}Ir	^{193}Ir	^{194}Ir	^{195}Ir	^{196}Ir	^{197}Ir	^{198}Ir	^{199}Ir	^{200}Ir	^{201}Ir	^{202}Ir	^{203}Ir	^{204}Ir	^{205}Ir	^{206}Ir	^{207}Ir	^{208}Ir	^{209}Ir	^{210}Ir	^{211}Ir	^{212}Ir	^{213}Ir	^{214}Ir	^{215}Ir									
^{177}Os	^{178}Os	^{179}Os	^{180}Os	^{181}Os	^{182}Os	^{183}Os	^{184}Os	^{185}Os	^{186}Os	^{187}Os	^{188}Os	^{189}Os	^{190}Os	^{191}Os	^{192}Os	^{193}Os	^{194}Os	^{195}Os	^{196}Os	^{197}Os	^{198}Os	^{199}Os	^{200}Os	^{201}Os	^{202}Os	^{203}Os	^{204}Os	^{205}Os	^{206}Os	^{207}Os	^{208}Os	^{209}Os	^{210}Os	^{211}Os	^{212}Os	^{213}Os	^{214}Os	^{215}Os								
^{176}Re	^{177}Re	^{178}Re	^{179}Re	^{180}Re	^{181}Re	^{182}Re	^{183}Re	^{184}Re	^{185}Re	^{186}Re	^{187}Re	^{188}Re	^{189}Re	^{190}Re	^{191}Re	^{192}Re	^{193}Re	^{194}Re	^{195}Re	^{196}Re	^{197}Re	^{198}Re	^{199}Re	^{200}Re	^{201}Re	^{202}Re	^{203}Re	^{204}Re	^{205}Re	^{206}Re	^{207}Re	^{208}Re	^{209}Re	^{210}Re	^{211}Re	^{212}Re	^{213}Re	^{214}Re	^{215}Re							
^{175}W	^{176}W	^{177}W	^{178}W	^{179}W	^{180}W	^{181}W	^{182}W	^{183}W	^{184}W	^{185}W	^{186}W	^{187}W	^{188}W	^{189}W	^{190}W	^{191}W	^{192}W	^{193}W	^{194}W	^{195}W	^{196}W	^{197}W	^{198}W	^{199}W	^{200}W	^{201}W	^{202}W	^{203}W	^{204}W	^{205}W	^{206}W	^{207}W	^{208}W	^{209}W	^{210}W	^{211}W	^{212}W	^{213}W	^{214}W	^{215}W						
^{174}Ta	^{175}Ta	^{176}Ta	^{177}Ta	^{178}Ta	^{179}Ta	^{180}Ta	^{181}Ta	^{182}Ta	^{183}Ta	^{184}Ta	^{185}Ta	^{186}Ta	^{187}Ta	^{188}Ta	^{189}Ta	^{190}Ta	^{191}Ta	^{192}Ta	^{193}Ta	^{194}Ta	^{195}Ta	^{196}Ta	^{197}Ta	^{198}Ta	^{199}Ta	^{200}Ta	^{201}Ta	^{202}Ta	^{203}Ta	^{204}Ta	^{205}Ta	^{206}Ta	^{207}Ta	^{208}Ta	^{209}Ta	^{210}Ta	^{211}Ta	^{212}Ta	^{213}Ta	^{214}Ta	^{215}Ta					
^{173}Hf	^{174}Hf	^{175}Hf	^{176}Hf	^{177}Hf	^{178}Hf	^{179}Hf	^{180}Hf	^{181}Hf	^{182}Hf	^{183}Hf	^{184}Hf	^{185}Hf	^{186}Hf	^{187}Hf	^{188}Hf	^{189}Hf	^{190}Hf	^{191}Hf	^{192}Hf	^{193}Hf	^{194}Hf	^{195}Hf	^{196}Hf	^{197}Hf	^{198}Hf	^{199}Hf	^{200}Hf	^{201}Hf	^{202}Hf	^{203}Hf	^{204}Hf	^{205}Hf	^{206}Hf	^{207}Hf	^{208}Hf	^{209}Hf	^{210}Hf	^{211}Hf	^{212}Hf	^{213}Hf	^{214}Hf	^{215}Hf				
^{172}Lu	^{173}Lu	^{174}Lu	^{175}Lu	^{176}Lu	^{177}Lu	^{178}Lu	^{179}Lu	^{180}Lu	^{181}Lu	^{182}Lu	^{183}Lu	^{184}Lu	^{185}Lu	^{186}Lu	^{187}Lu	^{188}Lu	^{189}Lu	^{190}Lu	^{191}Lu	^{192}Lu	^{193}Lu	^{194}Lu	^{195}Lu	^{196}Lu	^{197}Lu	^{198}Lu	^{199}Lu	^{200}Lu	^{201}Lu	^{202}Lu	^{203}Lu	^{204}Lu	^{205}Lu	^{206}Lu	^{207}Lu	^{208}Lu	^{209}Lu	^{210}Lu	^{211}Lu	^{212}Lu	^{213}Lu	^{214}Lu	^{215}Lu			
^{171}Yb	^{172}Yb	^{173}Yb	^{174}Yb	^{175}Yb	^{176}Yb	^{177}Yb	^{178}Yb	^{179}Yb	^{180}Yb	^{181}Yb	^{182}Yb	^{183}Yb	^{184}Yb	^{185}Yb	^{186}Yb	^{187}Yb	^{188}Yb	^{189}Yb	^{190}Yb	^{191}Yb	^{192}Yb	^{193}Yb	^{194}Yb	^{195}Yb	^{196}Yb	^{197}Yb	^{198}Yb	^{199}Yb	^{200}Yb	^{201}Yb	^{202}Yb	^{203}Yb	^{204}Yb	^{205}Yb	^{206}Yb	^{207}Yb	^{208}Yb	^{209}Yb	^{210}Yb	^{211}Yb	^{212}Yb	^{213}Yb	^{214}Yb	^{215}Yb		
^{170}Tm	^{171}Tm	^{172}Tm	^{173}Tm	^{174}Tm	^{175}Tm	^{176}Tm	^{177}Tm	^{178}Tm	^{179}Tm	^{180}Tm	^{181}Tm	^{182}Tm	^{183}Tm	^{184}Tm	^{185}Tm	^{186}Tm	^{187}Tm	^{188}Tm	^{189}Tm	^{190}Tm	^{191}Tm	^{192}Tm	^{193}Tm	^{194}Tm	^{195}Tm	^{196}Tm	^{197}Tm	^{198}Tm	^{199}Tm	^{200}Tm	^{201}Tm	^{202}Tm	^{203}Tm	^{204}Tm	^{205}Tm	^{206}Tm	^{207}Tm	^{208}Tm	^{209}Tm	^{210}Tm	^{211}Tm	^{212}Tm	^{213}Tm	^{214}Tm	^{215}Tm	
^{169}Er	^{170}Er	^{171}Er	^{172}Er	^{173}Er	^{174}Er	^{175}Er	^{176}Er	^{177}Er	^{178}Er	^{179}Er	^{180}Er	^{181}Er	^{182}Er	^{183}Er	^{184}Er	^{185}Er	^{186}Er	^{187}Er	^{188}Er	^{189}Er	^{190}Er	^{191}Er	^{192}Er	^{193}Er	^{194}Er	^{195}Er	^{196}Er	^{197}Er	^{198}Er	^{199}Er	^{200}Er	^{201}Er	^{202}Er	^{203}Er	^{204}Er	^{205}Er	^{206}Er	^{207}Er	^{208}Er	^{209}Er	^{210}Er	^{211}Er	^{212}Er	^{213}Er	^{214}Er	^{215}Er

Рисунок 2.4 – Запрос и получение результатов «Быстрого поиска» для ^{82}Pb

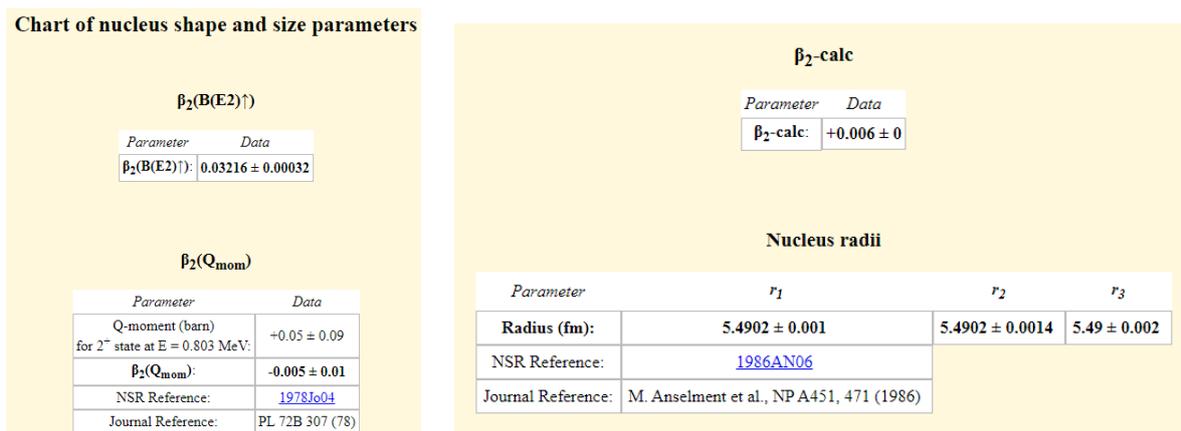


Рисунок 2.5 – Данные о квадрупольном моменте Q , параметре квадрупольной деформации β_2 и зарядовом радиусе r ядра свинца ${}_{82}\text{Pb}^{206}$

На рисунке 2.5 представлены численные данные для изотопа ${}_{82}\text{Pb}^{206}$. Значение квадрупольного момента $Q > 0$, следовательно, ядро свинца ${}_{82}\text{Pb}^{206}$ имеет форму вытянутого эллипсоида вращения. Значительное различие по модулю численных данных параметра квадрупольной деформации ядра ${}_{82}\text{Pb}^{206}$ по типу « B » и « Q » свидетельствует о большой степени нестабильности его равновесной формы.

Из рисунка 2.5 видно, что квадрупольный момент четно-четного магического ядра свинца ${}_{82}\text{Pb}^{206}$ $Q = +0,05 \pm 0,09$ барн, а параметр его квадрупольной деформации $\beta_2(B) = 0,03216 \pm 0,00032$ и $\beta_2(Q) = -0,005 \pm 0,01$. Сравнение данных типа « B » и « Q » показывает, что данные типа « B » превышают данные типа « Q ». Такое поведение параметра квадрупольной деформации β_2 при заметном превышении оценки $\beta_2(B)$ и значительной величине обеих оценок параметра деформации является признаком нестабильности равновесной формы изотопа свинца ${}_{82}\text{Pb}^{206}$. Проявление динамической деформации ядра связано с колебаниями его поверхности не только в возбужденных состояниях, но и в основном. Значит данные типа « B » отражают не только статическую деформацию, т. е. форму ядра, но и динамическую деформацию, возникающую вследствие колебаний его поверхности в основном состоянии. Это также подтверждается различием в знаке между параметром квадрупольной деформации $\beta_2(Q)$ и рассчитанным теоретически значением $\beta_2 = +0,006 \pm 0$, полученным в рамках модели, в которой равновесная форма ядра определяется из условий минимизации суммы одночастичных энергий [19]. Степень различия данных типа « B » и « Q » о параметрах квадрупольной деформации ядер может быть использована для оценки степени стабильности его равновесной формы [20].

На рисунке 2.5 в таблицах для квадрупольной деформации $\beta_2(Q_{mom})$ и зарядового радиуса указаны ссылки 1978Jo04 и 1986AN06. Первые 4 цифры в них – год публикации; последующие буквы – фамилия первого автора; а последние две цифры – уникальный идентификатор (2 цифры для первичного эталонного или 2 буквы для вторичной ссылки). Если перейти по этим ссылкам, то можно получить дополнительные данные о свинце ${}_{82}\text{Pb}^{206}$. При этом практически вся информация обеспечена библиографическими ссылками на ее источники. Благодаря этой базе, можно значительно сократить время поиска необходимой информации и получить более точные результаты исследования того или иного ядра.

Знание квадрупольных моментов атомных ядер позволяет определить форму ядра, оценить степень ее отклонения от сферически симметричной, описать свойства и характеристики деформированных ядер, используя модельный подход.

3 Параметры формы и размера изотопов свинца, полученные в модельном подходе с использованием оцененных ядерных данных

В настоящее время известно 37 изотопов свинца с числами нуклонов A от 178 до 215 (число протонов $Z = 82$, нейтронов N от 96 до 133), из них 4 изотопа ${}_{82}\text{Pb}^{204}$, ${}_{82}\text{Pb}^{206}$, ${}_{82}\text{Pb}^{207}$, ${}_{82}\text{Pb}^{208}$ стабильны [21]. Элементы, расположенные в периодической таблице после свинца, стабильных изотопов не имеют. Согласно модели ядерных оболочек свинец является магическим ядром, а его изотоп ${}_{82}\text{Pb}^{208}$ – дважды магическое ядро.

В соответствии с рисунком 2.4 информация, полученная с помощью БД «Карта параметров формы и размеров ядер», свидетельствует о том, что для легких изотопов свинца деформация неизвестна. Только начиная с изотопа ${}_{82}\text{Pb}^{197}$ можно определить квадрупольный момент Q и параметр квадрупольной деформации β_2 . Значит, в изотопах

свинца с $A > 196$ форма атомного ядра отличается от сферически-симметричной. Взаимодействие внешних нуклонов, связанных менее сильно, со сферически-симметричным остовом ядра приводят к его деформации, т. е. с увеличением числа нейтронов N в изотопах свинца нарушается сферическая симметрия ядерного потенциала.

Размер и форма деформированного ядра связаны с его средним зарядовым радиусом и параметром деформации β через соотношение

$$\langle r^2 \rangle = r_0^2 \left(1 + \frac{5}{4\pi} \beta^2 \right),$$

из которого следует, что среднеквадратичный радиус растет с увеличением параметра квадрупольной деформации независимо от его знака. На рисунке 3.1 построена зависимость зарядовых радиусов изотопов трех соседних ядер (ртути, свинца и полония) от числа нейтронов N на основе численных данных БД «Карта параметров формы и размеров ядер» [13].

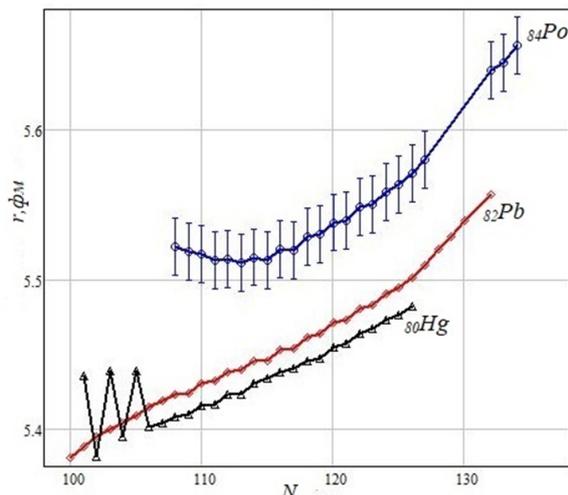


Рисунок 3.1 – Зависимость зарядового радиуса r ядра от числа нейтронов N для изотопов ртути ^{80}Hg , свинца ^{82}Pb и полония ^{84}Po

Для данных изотопов наблюдается рост радиусов с увеличением N , хотя вид зависимости для трех случаев различен. Так, для более легкого элемента ртути заметны резкие скачки значений r при переходе числа нейтронов N от 101 до 106. Радиусы изотопов свинца увеличиваются плавно. Зависимость от N для более тяжелого элемента полония имеет вначале кривой небольшой минимум, а в конце происходит значительный рост радиуса. Такое поведение радиусов связано с характером деформации ядер. При небольших N для каждого конкретного ядра изотопы имеют сферическую форму, затем происходит переход к вытянутой или сплюснутой форме, благодаря чему радиус увеличивается. Для свинца $^{82}\text{Pb}^{197}$ сферическая форма сменяется сплюснутой, а затем для свинца $^{82}\text{Pb}^{199}$ – вытянутой формой.

Такой переход происходит плавно и последовательно через промежуточные формы, которые не обладают аксиальной симметрией. Из рисунка 3.1 видно, что если к ядру добавлять нейтроны, то можно изменять равновесную форму ядра.

С помощью численных данных БД «Карта параметров формы и размеров ядер» установим зависимость модуля квадрупольной деформации $|\beta_2|$ от числа нуклонов A для изотопов свинца ^{82}Pb (рисунок 3.2). На рисунке 3.2 продемонстрированы три графика, построенные на основе данных о параметрах квадрупольной деформации ядер, полученных тремя различными способами: из экспериментальных значений приведенной вероятности переходов из основного состояния ядра в первое возбужденное состояние со спином и четностью 2^+ ($|\beta_2(B(E2)\uparrow)|$); из значений квадрупольных моментов ядер Q ($|\beta_2(Q_{mom})|$) и рассчитанных теоретически в модельном подходе ($|\beta_2 - calc|$).

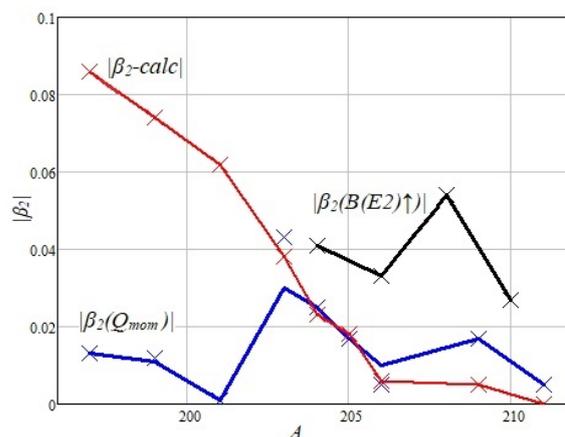


Рисунок 3.2 – Зависимость модуля квадрупольной деформации $|\beta_2|$ от числа нуклонов A для изотопов свинца ^{82}Pb

Из анализа графиков зависимости рисунка 3.2 следует существенное различие в оценке параметра квадрупольной деформации, полученной приведенными выше способами. Численные данные типа $|\beta_2(B(E2)\uparrow)|$ заметно превышают данные типа $|\beta_2(Q_{mom})|$. В первом случае значения параметра квадрупольной деформации наблюдаются вокруг магического числа нейтронов $N = 126$. Нуклоны, находящиеся сверх заполненных оболочек деформируют сферически симметричную форму ядра. Во втором случае численные данные для параметра деформации значительно меньше и наблюдаются практически во всей области исследуемых значений A . Такое поведение параметра квадрупольной деформации β_2 служит свидетельством неустойчивости равновесной формы изотопов свинца ^{82}Pb .

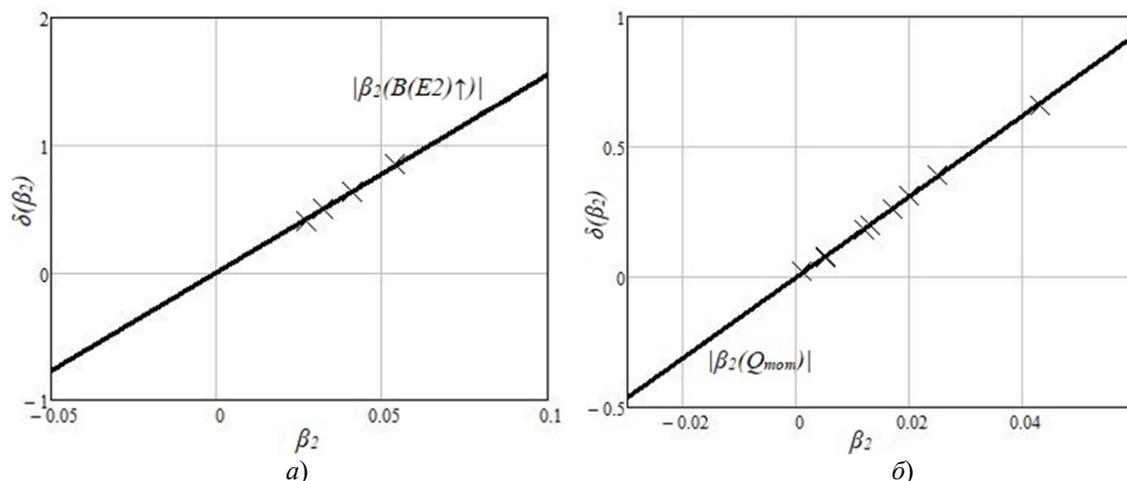


Рисунок 3.3 – Зависимость параметра деформации δ модели Нильссона от параметра квадрупольной деформации β_2 для изотопов свинца ^{82}Pb в случае данных типа: а) $|\beta_2(B(E2) \uparrow)|$, б) $|\beta_2(Q_{mom})|$

Если ядро не обладает не только сферической, но и аксиальной симметрией (модель Нильссона), то его форма определяется тремя характеристиками: квадрупольным моментом Q , параметром квадрупольной деформации β_2 и параметром деформации δ . На рисунке 3.3 а, б, представлена зависимость параметра деформации δ модели Нильссона от параметра квадрупольной деформации β_2 для изотопов свинца ^{82}Pb , полученная на основе формулы (1.8) с заменой β на β_2 и данных БД «Карта параметров формы и размеров ядер».

Для нейтроноизбыточных изотопов свинца ^{82}Pb (рисунок 3.3) характерны значительные колебания поверхности в основном состоянии. Параметр деформации δ с учетом данных типа $|\beta_2(B(E2) \uparrow)|$ (рисунок 3.3, а) принимает значения в пределах до 2, а в случае данных типа $|\beta_2(Q_{mom})|$ (рисунок 3.3, б) – до 1. Такое поведение параметра деформации δ является признаком проявления динамической деформации изотопов свинца ^{82}Pb , связанной с колебаниями ядерной поверхности не только в возбужденных состояниях, но и в основном.

Анализируя графики зависимостей $r(N)$, $|\beta_2|(A)$, $\delta(\beta_2)$ и создав таблицу численных значений, можно построить нуклонные одночастичные уровни в потенциале Нильссона как функции деформации ядра, предсказать спин и четность основных и возбужденных состояний некоторых деформированных атомных ядер.

Заключение

Деформация атомных ядер представляет собой сложный механизм проявления микроскопической ядерной структуры, обусловленный

связью одночастичных и коллективных степеней свободы.

Анализ параметров формы и размера изотопов магического ядра свинца ^{82}Pb в модельном подходе, основанном на использовании потенциала Нильссона, позволяет получить информацию о статической и динамической деформации ядер. Колебательные степени свободы ядра играют существенную роль в легких изотопах свинца. При возникновении статической деформации для тяжелых изотопов свинца на первый план выходят вращательные степени свободы. Динамическая деформация поверхности ядер наблюдается в возбужденных состояниях.

Отработанная методика извлечения оцененных ядерных данных через БД ЦДФЭ открывает огромные возможности работы с экспериментальными данными для проверки известных теорий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bohr, A. Collective and individual-particle aspects of nuclear structure / A. Bohr, B.R. Mottelson // Mat.-fys. Medd. – 1953. – Vol. 27, № 16. – P. –174.
2. Нильсон, С. Связанные состояния индивидуальных нуклонов в сильно деформированных ядрах / С. Нильсон // Сборник «Деформация ядерных ядер». – Перев. с англ. М.: Иностран. лит., 1958. – С. 232–304.
3. Давыдов, А.С. Возбужденные состояния атомных ядер / А.С. Давыдов. – М.: Атомиздат, 1967. – 265 с.
4. Соловьев, В.Г. Теория сложных ядер / В.Г. Соловьев. – М.: Наука, 1971. – 560 с.
5. Бор, О. Структура атомного ядра. Деформация ядер / О. Бор, Б. Моттelson. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 663 с.

6. Блан, Д. Ядра, частицы, ядерные реакторы / Д. Блан. – М.: Мир, 1989. – 336 с.
7. Greiner, W. Nuclear models: with 39 worked examples and problems / W. Greiner, J.A. Maruhn. – Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Budapest, Hong Kong, London, Milan, Paris, Santa Clara, Singapore, Tokyo, Spinger, 1996. – P. 394.
8. Investigation of quadrupole deformation of nucleus and its surface dynamic vibrations / ed.: O. Bersillon, F. Gunsing, E. Bauge, R. Jacqmin, S. Leray. – EDP Sciences, 2008. – P. 65–68.
9. Ядерная спектроскопия изотопов молибдена / Б.С. Ишханов [и др.] // Физика. Астрономия. – 2016. – № 1. – С. 3–34.
10. IAEA Photoneuclear Data Library 2019 / T. Kawano [et al.] // Nuclear Data Sheets. – 2019. – P. 1–53.
11. Базы ядерных данных Центра данных фотоядерных экспериментов (CDFE): гипертекстовое представление в WWW / И.Н. Бобошин [и др.]; под общ. ред. И.Н. Бобошин. – Москва, 1999. – С. 1–23.
12. Панков, А.А. Международная сеть Центров ядерных данных и перспективы ее использования в атомной энергетике Беларуси / А.А. Панков, А.В. Цитринов, И.А. Панков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2012. – № 2. – С. 26–31.
13. Центр данных фотоядерных экспериментов (ЦДФЭ) [Электронный ресурс] / Центр данных фотоядерных экспериментов (ЦДФЭ). – Россия, 2003. – Режим доступа: <http://cdfe.sinp.msu.ru/index.ru.html>. – Дата доступа: 05.02.2020.
14. Бобошин, И.Н. Электронные коллекции ядерных данных как средства фундаментальных и прикладных исследований в области физики атомных ядер и ядерных реакций / И.Н. Бобошин. – RCDL'2008, Дубна, 2008. – С. 259–267.
15. Квадрупольная деформация ядра и динамические колебания его поверхности / И.Н. Бобошин, В.В. Варламов, С.Ю. Комаров, В.Н. Орлин // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2007. – Т. 71, № 3. – С. 334–338.
16. Дерюжкова, О.М. Извлечение численной информации о ядрах на основе базы данных «Карта параметров формы и размеров ядер» / О.М. Дерюжкова, А.С. Парахневич // Проблемы теории и практики инновационного развития и интеграции современной науки и образования [Электронный ресурс]: сборник статей по итогам Международной междисциплинарной конференции (МГОУ, г. Москва, 20 февраля 2019 г.) / отв. ред. и сост. В.Г. Шевченко, М.В. Шевчук; ред. кол. Н.Н. Барабанова и др. – М.: ИИУ МГОУ, 2019. – С. 93–96.
17. Raman, S. Transition probability from the ground to the first-excited 2^+ state of even-even nuclides / S. Raman, C.W. Nestor, J.R.P. Tikkanen // Atomic Data and Nuclear Data Tables. – 2001. – Vol. 78, № 1. – P. 1–128.
18. Stone, N.J. Table of nuclear magnetic dipole and electric quadrupole moments / N.J. Stone // Atomic Data and Nuclear Data Tables. – 2005. – Vol. 90. – P. 75–176.
19. Ишханов, В.С. Использование сфероида глобального потенциала для оценки квадрупольной деформации атомных ядер / В.С. Ишханов, В.Н. Орлин // ЯФ. – 2005. – Т. 68, № 8. – С. 1407–1423.
20. Два типа данных о параметре квадрупольной деформации ядра и динамические колебания его поверхности / И.Н. Бобошин [и др.] // Вопросы атомной науки и техники. – 2007. – Вып. 1–2. – С. 33–44.
21. Isotopic compositions of the elements 2013 (IUPAC Technical Report) / Juris Meija [et al.] // Appl. Chem. – 2016. – Vol. 88 (3). – P. 293–306.

Поступила в редакцию 10.01.20.

УДК 621.383.51

ТОНКОПЛЕНОЧНЫЙ СОЛНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ**А.К. Есман, Г.Л. Зыков, В.А. Потачиц***Белорусский национальный технический университет, Минск***THIN-FILM SOLAR CELL WITH A THERMOELECTRIC LAYER****A.K. Esman, G.L. Zykov, V.A. Potachits***Belarusian National Technical University, Minsk*

Рассмотрено одно из экономически оправданных решений тонкопленочного солнечного элемента на основе фотоэлектрического преобразователя $\text{CuInSe}_2\text{-CdS}$ и термоэлектрического слоя CuInSe_2 . Данная структура солнечного элемента была реализована в программном пакете COMSOL Multiphysics. При моделировании учитывались условия, близкие к эксплуатационным. Численными методами получено распределение температуры и градиентов температуры солнечного элемента. Использование термоэлектрического слоя, концентрации солнечного излучения, а также поддержания рабочей температуры фотоэлектрического преобразователя за счет термостабилизации тыльной стороны подложки позволили достичь увеличения выходной мощности солнечного элемента до 5%.

Ключевые слова: термоэлектрический слой, фотоэлектрический преобразователь, концентрированное солнечное излучение, COMSOL Multiphysics, градиент температуры.

One of the economically viable solutions of the thin-film solar cell on the basis of: the photoelectric converter, based on $\text{CuInSe}_2\text{-CdS}$, and the thermoelectric layer, based on CuInSe_2 , is considered in this paper. This construction of the solar cell is implemented in the COMSOL Multiphysics software package. During the simulation, conditions close to operational conditions were taken into account. The temperature patterns and the temperature gradient patterns of the solar cell are obtained by using numerical methods. The use of the thermoelectric layer, the solar radiation concentration as well as maintenance of the operating temperature of the photoelectric converter due to the temperature stabilization of the substrate back side made it possible to achieve an increase in the output power of the solar cell up to 5%.

Keywords: thermoelectric layer, photoelectric converter, concentrated solar radiation, COMSOL Multiphysics, temperature gradient.

Введение

Наиболее перспективными альтернативными источниками электроэнергии по-прежнему являются полупроводниковые солнечные элементы. Наиболее практически востребованными являются дешевые тонкопленочные преобразователи. Диселенид меди и индия (CuInSe_2) наиболее полно удовлетворяет требованиям применения в наземных условиях: по ширине запрещенной зоны (1,04 эВ при температуре 300 К), наличию гомо- и гетеропереходов, гибкости, высокой радиационной устойчивости, экологической безопасности, а также стоимости. Высокая способность к поглощению солнечного излучения у CuInSe_2 (более $1,5 \text{ мкм}^{-1}$ в ближней ИК и видимой области спектра) позволяет создавать высокоэффективные тонкопленочные солнечные элементы [1], [2].

Как показали эксперименты, в результате длительной эксплуатации солнечных элементов из-за действия дестабилизирующих факторов: нагревание выше температуры окружающей среды до 55°C и более, влажности воздуха и т. д. эффективность их работы снижается и сокращается срок службы [3]. Поэтому представляет интерес поиск эффективных путей, позволяющих, с одной стороны, понизить рабочую температуру

солнечного элемента, а с другой – повысить коэффициент преобразования солнечной энергии в электричество [4]–[7].

Целью данной работы является поиск путей повышения эффективности преобразования солнечного излучения (СИ) тонкопленочным полупроводниковым элементом на основе CuInSe_2 в электричество за счет использования тепловой энергии, как выделяющейся в этом элементе, так и инфракрасных (ИК) излучений: солнца и окружающей среды.

1 Конструкция солнечного элемента

Структура предлагаемого тонкопленочного солнечного элемента на основе CuInSe_2 приведена на рисунке 1.1 [5], где на полированной лицевой поверхности подложки 1, изготовленной из нержавеющей стали, с закругленными краями, последовательно расположены электрически соединенные: первый электродный слой 2, термоэлектрический слой на основе CuInSe_2 3, второй электродный слой 4, фотоэлектрический преобразователь, состоящий из слоев CuInSe_2 5 и CdS 6, а также прозрачный электрод 7.

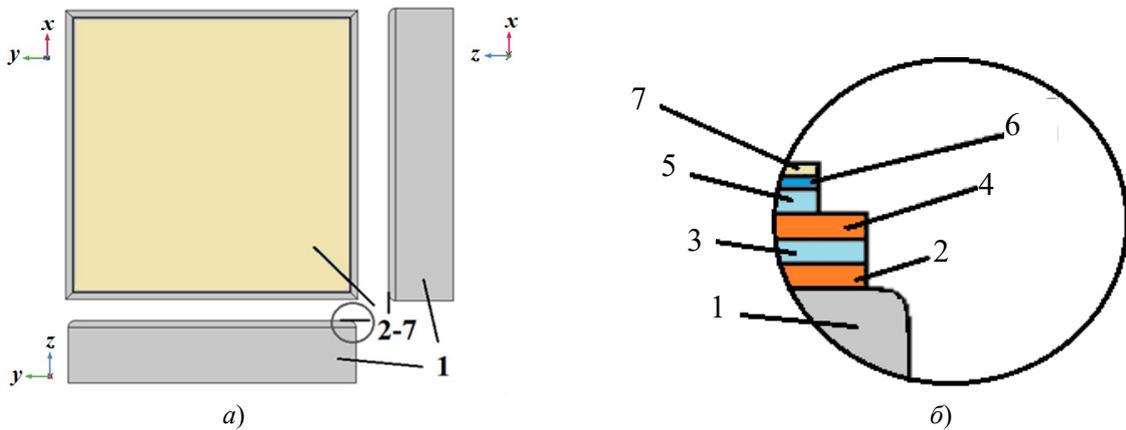


Рисунок 1.1 – Структура солнечного элемента на основе CuInSe_2 в плоскостях xy , xz , yz (а) и увеличенный его фрагмент в плоскости yz (б), где: 1 – подложка, 2 – первый электродный слой, 3 – термоэлектрический слой, 4 – второй электродный слой, 5,6 – фотоэлектрический преобразователь, 7 – прозрачный электрод

2 Алгоритм работы солнечного элемента

Входное солнечное излучение проходит сквозь прозрачный электрод 7 и видимая часть этого излучения поглощается в слоях 5, 6 фотоэлектрического преобразователя, генерируя носители электрических зарядов в слое 5 и нагревая слой 6. Часть сгенерированных зарядов, достигая p - n -перехода фотоэлектрического преобразователя, разделяется его полем, создавая фото-ЭДС между прозрачным электродом 7 и вторым электродным слоем 4. Остальная часть фотогенерированных зарядов рекомбинирует, нагревая фотоэлектрический преобразователь 5, 6. Эта тепловая энергия за счет теплопередачи нагревает второй электродный слой 4. Более того, оставшаяся инфракрасная часть входного солнечного излучения дополнительно нагревает этот слой. В тоже время торцы подложки 1 теплоизолированы, а температура её тыльной стороны стабилизировалась на уровнях $T_0 = +1^\circ\text{C}$ и $+10^\circ\text{C}$. Поэтому между первым 2 и вторым 4 электродными слоями образуется градиент температур, вызывающий появление термо-ЭДС между верхней и нижней сторонами термоэлектрического слоя 3, который является полупроводником с дырочным типом проводимости. В результате этого между первым электродным слоем 2, электрически соединенным с нижней стороной термоэлектрического слоя 3, и прозрачным электродом 7 возникает выходное напряжение солнечного элемента, состоящее из фото- и термо-ЭДС. Эффективность преобразования солнечного излучения в электричество поддерживалась на постоянном уровне за счёт стабилизации температуры фотоэлектрического преобразователя 5, 6.

3 Компьютерное моделирование

Компьютерное моделирование является неотъемлемым инструментом создания современных

технических объектов, так как оно позволяет значительно сократить финансовые затраты на разработку элементной базы солнечной энергетики. Более того, использование компьютерного моделирования позволяет оптимизировать производственные процессы с целью снижения энерго- и ресурсоёмкости выпускаемой продукции, улучшения её потребительских качеств и, в конечном счете, повышения её конкурентоспособности.

Моделирование проводилось с помощью программы COMSOL Multiphysics, используемой для решения большинства научных и инженерных задач (начиная от определения геометрических параметров и описания физики и заканчивая визуализацией и сохранением полученных результатов), основанных на системе дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных элементов. Для количественной оценки повышения вырабатываемой электроэнергии предложенным тонкопленочным солнечным элементом на основе CuInSe_2 использовался модуль «Теплопередача» (Heat Transfer Module) данной программной среды. Этот модуль является специализированным инструментом для моделирования тепловых процессов в элементах электронной техники и энергетике, включая солнечные элементы, работающие в реальных условиях эксплуатации.

Для учёта солнечного излучения и излучения в окружающую среду использовались специальные опции, которые позволяют задать разный коэффициент поглощения (степень черноты) для коротковолнового (характерного для солнечного излучения) и длинноволнового (характерного для излучения окружающей среды) частей спектра. Кроме того, по географическому положению и времени суток определялось направление солнечного излучения. Угловые коэффициенты излучения рассчитывались методом полукуба или

прямым интегрированием по поверхности. Для экономии вычислительных ресурсов при моделировании использовались условия симметрии [8].

В разработанной численной трехмерной модели тонкопленочного солнечного элемента рассматривались различные условия его эксплуатации: при наличии и отсутствии теплоизоляции торцов подложки, а так же при наличии и отсутствии стабилизации температуры тыльной стороны подложки.

Расчеты выполнялись для географических координат г. Минска с учетом суточного и сезонного изменения как температуры окружающей среды, так и мощности солнечного излучения спектра AM1,5, максимальное значение которой составляло 500 кВт/м^2 [9] при использовании концентраторов [10]. Изменение температуры окружающей среды моделировалось по гармоническому закону [11]. При моделировании использовались данные о средних минимальной и максимальной месячной температурах воздуха в г. Минске с сайта <http://belmeteo.net>. Температура подложки задавалась как с учётом изменения температуры окружающей среды, так и при условии термостабилизации её тыльной стороны на уровне $T_0 = +1^\circ \text{C}$ (если температура окружающей среды равна $+1^\circ \text{C}$ и ниже) и $T_0 = +10^\circ \text{C}$ (если температура окружающей среды выше $+1^\circ \text{C}$).

Тонкопленочный солнечный элемент в процессе моделирования разбивался на конечные элементы в форме тетраэдров. Плотность сетки для каждого слоя солнечного элемента настраивалась с учетом его геометрической конфигурации путем выбора одного из девяти предустановленных режимов: от чрезвычайно точного до

чрезвычайно грубого. При необходимости использования более мелкой сетки в какой-либо области, как, например, для слоев 6 и 7 толщиной 50 нм, разбиение выполнялось вручную. Решение задачи осуществлялось с учетом изменения температуры окружающей среды. Технические средства программы позволяли визуализировать и обрабатывать расчетные числовые данные для всех рассматриваемых режимов работы тонкопленочного солнечного элемента.

4 Анализ полученных результатов

Как показали расчеты, суточное и сезонное изменение температуры и плотности мощности солнечного излучения приводит к неравномерному нагреву всех слоев солнечного элемента, как поверхностных, так и внутренних. Следует отметить, что больше всего нагреваются торцы солнечного элемента. В указанных выше условиях поверхность предложенного тонкопленочного солнечного элемента на основе CuInSe_2 без охлаждения и при отсутствии теплоизоляции торцов подложки может нагреваться до температуры в пределах от 650°C до 750°C в течение светового дня, что приводит к необратимым повреждениям. Теплоизоляция торцов подложки и стабилизация температуры её тыльной стороны на уровне $T_0 = 10^\circ \text{C}$ позволили снизить температуру поверхности тонкопленочного солнечного элемента на основе CuInSe_2 до $T \approx 14,2^\circ \text{C}$ (рисунок 4.1) и менее. Так, например, при восходе солнца её температура составляла не более $10,3^\circ \text{C}$. Также были рассчитаны профили градиента температуры рассмотренного солнечного элемента (рисунок 4.2).

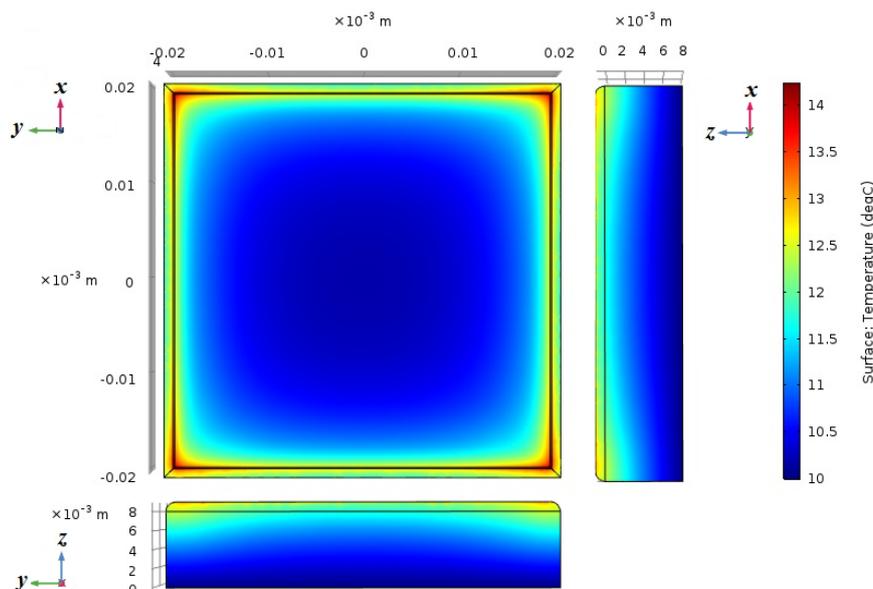


Рисунок 4.1 – Профили распределения температуры в 12 часов 30 минут в середине июля на поверхностях (плоскости xy , xz , yz) тонкопленочного солнечного элемента на основе CuInSe_2 со стабилизацией температуры $T_0 = 10^\circ \text{C}$ тыльной стороны подложки при наличии теплоизоляции торцов подложки

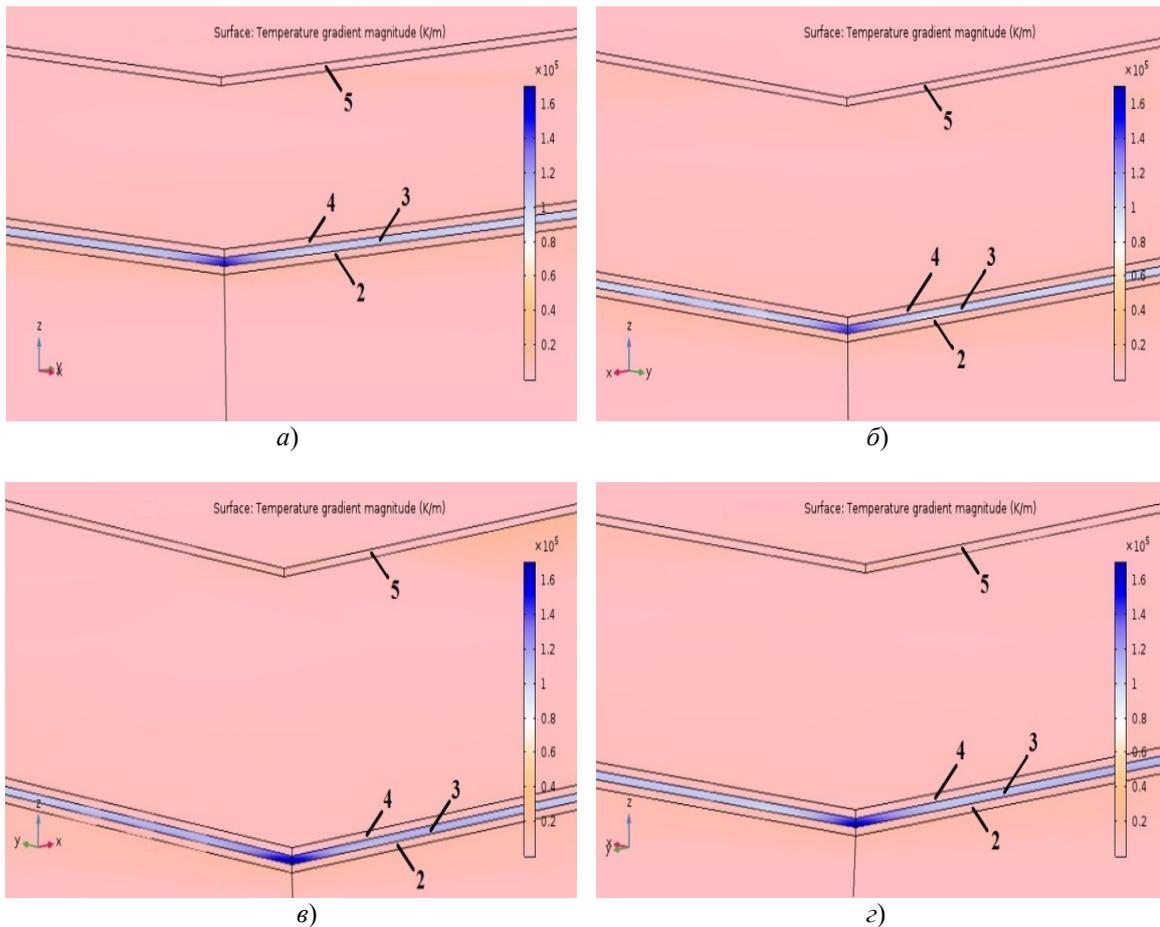


Рисунок 4.2 – Увеличенный фрагмент профилей распределения градиентов температуры в 12 часов 30 минут в середине июля с северо-восточной (а), северо-западной (б), юго-восточной (в) и юго-западной (г) сторон тонкопленочного солнечного элемента на основе CuInSe_2 со стабилизацией температуры $T_0 = 10^\circ \text{C}$ тыльной стороны подложки при наличии теплоизоляции торцов подложки

Согласно полученным результатам, градиент температуры достигает своего максимального значения $\sim 1,7 \times 10^5 \text{ K/m}$ на нижней границе раздела термоэлектрического слоя с юго-восточной стороны около 12 часов 30 минут, а затем – с юго-западной стороны около 14 часов. С северо-востока и северо-запада градиенты температуры на данной границе раздела ниже и составляют соответственно $\sim 1,5 \times 10^5 \text{ K/m}$. Поэтому в дальнейшем целесообразно приводить результаты расчетов только для юго-восточной стороны солнечного элемента, так как там имеем максимальный градиент температур. Увеличение толщины слоев CuInSe_2 до 3 мкм приводит лишь к незначительному снижению градиента температуры на границе раздела первый электродный слой / термоэлектрический слой до $\sim 1,65 \times 10^5 \text{ K/m}$.

Как показали расчеты, минимальная разность температур на границах раздела термоэлектрического слоя наблюдалась в январе $\sim 0,07^\circ \text{C}$ (кривая 4), а максимальная – в июле $\sim 0,17^\circ \text{C}$ (кривая 1) (рисунок 4.3, а). В апреле

и октябре разности температур на границах раздела термоэлектрического слоя соответственно составили $\sim 0,15^\circ \text{C}$ (кривая 2) и $\sim 0,11^\circ \text{C}$ (кривая 3) (рисунок 4.3 б). Максимальные значения градиентов температуры термоэлектрического слоя при этом были равны $\sim 1,70 \times 10^5 \text{ K/m}$ (кривая 1) в июле, $\sim 1,54 \times 10^5 \text{ K/m}$ (кривая 2) в апреле, $\sim 1,16 \times 10^5 \text{ K/m}$ (кривая 3) в октябре и $\sim 0,83 \times 10^5 \text{ K/m}$ (кривая 4) в январе (рисунок 4.4). Как показали расчеты, градиент температуры термоэлектрического слоя в течение года изменяется в пределах от $\sim 1,7 \times 10^5 \text{ K/m}$ до $\sim 0,8 \times 10^5 \text{ K/m}$ (кривая 2) и от $\sim 1,55 \times 10^5 \text{ K/m}$ до $\sim 0,51 \times 10^5 \text{ K/m}$ (кривая 3) соответственно на верхней и нижней границах раздела термоэлектрического слоя (рисунок 4.5). При этом амплитуда выходного напряжения, генерируемого термоэлектрическим слоем тонкопленочного солнечного элемента на основе CuInSe_2 , изменяется в пределах от 2,1 мВ (в декабре) до 5,2 мВ (в июне – июле) (кривая 1) (рисунок 4.5).

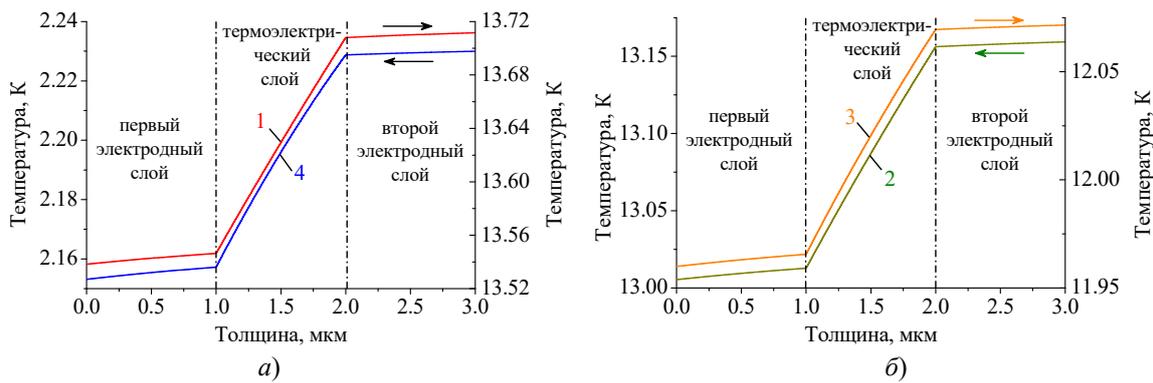


Рисунок 4.3 – Профили распределения температуры в первом электродном слое (толщина 0-1 мкм), термоэлектрическом слое (толщина 1-2 мкм) и втором электродном слое (толщина 2-3 мкм) с юго-восточной стороны в 12 часов 30 минут в середине июля (1) (а), апреля (2) (б), октября (3) (б) и января (4) (а)

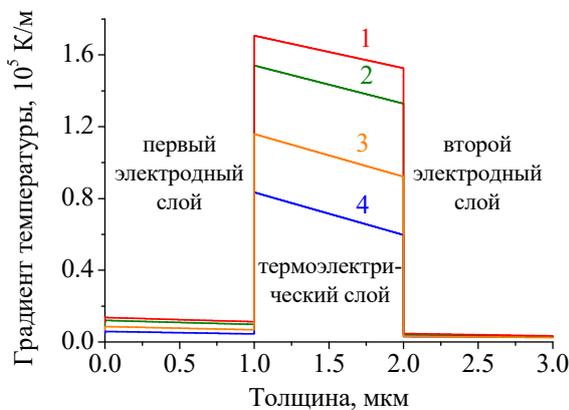


Рисунок 4.4 – Профили распределения градиента температуры в первом электродном слое (толщина 0–1 мкм), термоэлектрическом слое (толщина 1–2 мкм) и втором электродном слое (толщина 2–3 мкм) с юго-восточной стороны в 12 часов 30 минут в июле (1), апреле (2), октябре (3) и январе (4)

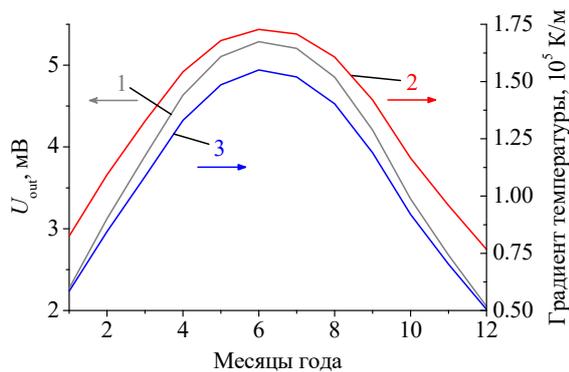


Рисунок 4.5 – Амплитуда выходного напряжения (1), генерируемого термоэлектрическим слоем, и градиенты температуры солнечного элемента $CuInSe_2$ с теплоизоляцией торцов подложки на верхней (2) и нижней (3) границах раздела термоэлектрического слоя с юго-восточной стороны в течение года

Как видно из зависимостей, приведенных на рисунке 4.4, градиент температуры имеет максимальное значение на нижней границе раздела термоэлектрического слоя $CuInSe_2$ независимо от времени года, а также температуру окружающего воздуха и верхней поверхности прозрачного электрода. За счет термостабилизации тыльной стороны подложки и теплоизоляции торцов подложки можно оптимизировать рабочую температуру фотоэлектрического преобразователя в реальных условиях эксплуатации.

Закключение

Компьютерный эксперимент показал, что амплитуда выходного напряжения, генерируемого термоэлектрическим слоем тонкопленочного солнечного элемента на основе $CuInSe_2$, изменяется в пределах от 2,1 мВ (в декабре) до 5,2 мВ (в июне и июле). Это означает, что выбором рабочей точки на вольт-амперной характеристике указанного солнечного элемента, за счет использования термоэлектрического слоя, можно получить увеличение его выходной мощности до 5%. Более того, при стабилизации температуры подложки и наличии концентратора солнечного излучения можно достичь ещё более существенного увеличения выходной мощности рассматриваемого солнечного элемента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марончук, И.И. Солнечные элементы: современное состояние и перспективы развития / И.И. Марончук, Д.Д. Санникович, В.И. Марончук // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2019. – № 2. – С. 105–123.
2. Новиков, Г.Ф. Солнечные преобразователи третьего поколения на основе $Cu-In-Ga-(S, Se)$ / Г.Ф. Новиков, М.В. Гапанович // Успехи физических наук. – 2017. – Т. 187, № 2. – С. 173–191.
3. Davis, M.W. Prediction of building integrated photovoltaic cell temperatures / M.W. Davis,

A.H. Fanney, B.P. Dougherty // J. Sol. Energy Eng. – 2001. – Vol. 123, № 2. – P. 200–210.

4. Есман, А.К. Повышение энергоэффективности тонкопленочных солнечных элементов на основе соединения $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$ / А.К. Есман, В.А. Потачиц, Г.Л. Зыков // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 30–33.

5. Способ изготовления тонкопленочного солнечного элемента: пат. 20481 Респ. Беларусь: МПК Н 01L 31/18, Н 01L 31/0264 / А.К. Есман, В.К. Кулешов, Г.Л. Зыков и др.; дата публ. 30.10.2016.

6. Есман, А.К. Моделирование характеристик солнечного элемента на основе CuInSe_2 / А.К. Есман, Г.Л. Зыков, В.А. Потачиц // Приборостроение – 2018: материалы 11-й Международной научно-технической конференции, 14–16 ноября 2018 года, Минск, Республика Беларусь / Белорусский национальный технический университет; редкол.: О.К. Гусев [и др.]. – Минск: БНТУ, 2018. – С. 279–281.

7. Ali, O.A. CuInSe_2 (CIS) as a light absorption layer of photovoltaic solar cells / O.A. Ali // American Journal of Nanotechnology. – 2016. – № 7 (1). – P. 13–19.

8. Analyze thermal effects with the Heat Transfer Module. USA, COMSOL, Inc. – Mode of access: <https://www.comsol.com/heat-transfer-module>. – Date of access: 05.12.2019.

9. Алферов, Ж.И. Тенденции и перспективы развития солнечной фотоэнергетики / Ж.И. Алферов, В.М. Андреев, В.Д. Румянцев // Физика и техника полупроводников. – 2004. – Т. 38, вып. 8. – С. 937–948.

10. A review of solar photovoltaic concentrators / M. Khamooshi [et al.] // International Journal of Photoenergy. – 2014. – Vol. 2014. – P. 958521–1–17.

11. Хромов, С.П. Метеорология и климатология: учебник. – 7-е изд. / С.П. Хромов, М.А. Петросянц. – М.: Изд-во Моск. ун-та: Наука, 2006. – С. 212–214.

Поступила в редакцию 11.12.19.

УДК 629.07

КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ ДАННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ, БАРОМЕТРИЧЕСКИХ, МАГНИТОМЕТРИЧЕСКИХ И СПУТНИКОВЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

К.В. Козадаев

Белорусский государственный университет, Минск

INTEGRATION OF DATA FROM INERTIAL, BAROMETRIC, MAGNETOMETRIC AND SATELLITE NAVIGATION SYSTEMS

K.V. Kozadaev

Belarusian State University, Minsk

В статье для комплексирования данных автономных и спутниковых навигационных систем предлагается использовать двухкаскадную схему фильтра Калмана. Это позволяет решить проблему различной скорости обновления данных в автономных и спутниковых навигационных системах, а также получить оптимальную оценку состояния динамической системы, основываясь на измерениях, неизбежно содержащих погрешности.

Ключевые слова: инерциально-спутниковые навигационные системы, фильтр Калмана, комплексирование потоков данных, навигационное решение.

The use of a two-stage Kalman filter scheme for integrating data from autonomous and satellite navigation systems is considered. This allows us to solve the problem of different data update rates in autonomous and satellite navigation systems, as well as to obtain an optimal estimate of the state of a dynamic system based on measurements that inevitably contain errors.

Keywords: inertial-satellite navigation systems, Kalman filter, data stream aggregation, navigation solution.

Введение

Задача интеграции показаний автономных и спутниковых навигационных систем с целью построения точного и надежного навигационного решения в настоящее время приобретает значительный практический интерес с точки зрения конструирования и применения малогабаритных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [1]–[4]. Одним из способов оптимального учета погрешностей навигационных систем является применение динамических фильтров Калмана (ФК), которые позволяют комплексировать потоки навигационных данных в режиме реального времени, обладая при этом хорошими показателями сходимости решений и минимизации аппаратных ошибок [1], [5]–[7].

Основной целью статьи является разработка схемы комплексирования потоков данных, формируемых спутниковыми и автономными навигационными системами типовых пилотажно-навигационных комплексов (ПНК) малых БПЛА, в состав которых входят: 3-х осевой акселерометр, 3-х осевой гироскоп, 3-х осевой магнитометр, статический и динамический барометрические датчики, а также модуль приема и обработки сигналов спутниковых радионавигационных систем (СРНС).

1 Алгоритм идеальной бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС)

При описании ориентации и положения БПЛА в основном используются три системы координат (СК) [2], [4]:

- жестко сцепленная с корпусом БПЛА *связанная СК*;
- *сопровождающая СК*, ассоциированная с центром масс БПЛА;
- *геодезическая СК* Земли (например, WGS-84, ПЗ-90).

Связанная СК определяется взаимным расположением осей датчиков (акселерометров, гироскопов, магнитометров и пр.) и элементов фюзеляжа БПЛА. В данной работе предполагается что все датчики, действующие на разных физических принципах, соосны (для соответствующих осей) между собой, и при этом центр СК совпадает с центром масс БПЛА. Ось $Ox_{св}$ направлена вдоль линии, соединяющей центр масс БПЛА и его нос, $Oy_{св}$ – перпендикулярно $Ox_{св}$ в продольной плоскости симметрии БПЛА, ось $Oz_{св}$ – образует правую тройку с $Ox_{св}$ и $Oy_{св}$. Далее в работе проекции векторов различных параметров на эти оси будут иметь индекс «св».

В качестве СК, ассоциированной с центром масс БПЛА, применяется *сопровождающая СК*, в которой центр СК совпадает с центром масс БПЛА, ось Oy_g противоположно направлена вектору ускорения свободного падения \vec{g} , ось Ox_g ориентирована на север перпендикулярно Oy_g , ось Oz_g – образует правую тройку с Ox_g и Oy_g . Далее в работе проекции различных параметров на эти оси будут иметь дополнительный индекс «g». Взаимное расположение сопровождающей и связанной СК показано на рисунке 1.1.

Сопровождающая СК перемещается в пространстве геодезической СК с угловой скоростью, вызванной суточным вращением Земли с модулем угловой скорости Ω и угловыми скоростями изменения широты B , долготы L и высоты H (СК WGS-84), обусловленные перемещением БПЛА. Для ориентирования БПЛА в геодезической СК на основе инерциальных датчиков применяется алгоритм идеальной БИНС, позволяющий преобразовывать показания бортовых 3-х осевых акселерометров и гироскопов из ассоциированной с БПЛА связанной СК в геодезическую СК. В работе проекции различных параметров на эти оси будут иметь дополнительный индекс «GEO»

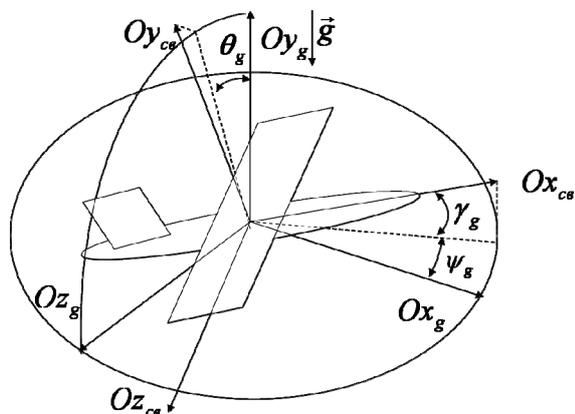


Рисунок 1.1 – Связь сопровождающей и связанной СК. Углы Эйлера в качестве параметров ориентации БПЛА

Для работы алгоритма идеальной БИНС необходимо в каждый момент времени иметь информацию о положении связанной СК относительно сопровождающей СК. Эта информация может быть получена из матрицы направляющих косинусов C , описывающей в каждый момент времени переход из сопровождающей СК в связанную СК [2], [4], [8]. Зная C , можно пересчитать вектор ускорения БПЛА, измеренный в связанной СК с помощью акселерометров, в сопровождающую СК, используя соотношение (1.1):

$$\vec{a}_g = C \times \vec{a}_{CB}. \quad (1.1)$$

Учитывая показания гироскопов, можно определить параметры изменения ориентации $\vec{\eta}_g = (\eta_{xg}, \eta_{yg}, \eta_{zg}) = (\psi_g, \theta_g, \gamma_g)$ – углы Эйлера (см. рисунок 1.1).

Соотношения алгоритма БИНС [2] описывают преобразование первичной информации о кажущихся ускорении и угловой скорости БПЛА в связанной СК в координаты его центра масс и угловое положение относительно геодезической СК. Задавая на каждом новом шаге описанной процедуры в качестве начальных данных вектор скорости БПЛА в сопровождающей СК и его координату в геодезической СК, полученные на

предыдущем шаге, и результаты измерений акселерометров и гироскопов, фактически реализуется рекуррентный алгоритм идеальной БИНС. Отличительной особенностью описанного алгоритма является то, что навигационные параметры, получаемые в ходе его работы, совместимы с сопровождающей и геодезической СК, что делает их, в свою очередь, легко совместимыми с данными бортовых магнитометров и показаниями СРНС.

В практике конструирования малых и средних БПЛА зачастую применяется БИНС на основе микро электромеханических систем (МЭМС), что обусловлено их относительной дешевизной, низким энергопотреблением, малыми габаритами и массой [3]. Однако, измерения, формируемые микро электромеханическими акселерометрами (ММА) и микро электромеханическими гироскопами (ММГ), характеризуются значимой случайной шумовой составляющей и подвержены эффекту дрейфа нуля. Это приводит к быстрому росту погрешности результирующих показаний БИНС, особенно при работе в течение длительного промежутка времени в автономном режиме без внешней коррекции.

2 Магнитометрическая система ориентации

Для определения ориентации БПЛА в пространстве с помощью 3-х мерных магнитометрических (ММ) датчиков целесообразно кроме сопровождающей СК использовать опорную магнитную СК, отличающуюся тем, что ось Ox_m направлена не на географический северный полюс, а на магнитный. Ось Oy_m соответствует геодезической вертикали (то есть совпадает с Oy_g), ось Oz_m – образует правую тройку с Ox_m и Oy_m . Далее в работе проекции различных параметров на эти оси будут иметь дополнительный индекс «m».

Таким образом, опорная магнитная СК повернута относительно сопровождающей СК вокруг общей оси Oy на угол магнитного склонения δ . Следовательно для углов Эйлера справедливо соотношение (2.1):

$$(\psi_g, \theta_g, \gamma_g) = (\psi_m + \delta, \theta_m, \gamma_m). \quad (2.1)$$

Вектор напряженности магнитного поля земли \vec{H} в опорной магнитной СК имеет две составляющие: H_h и H_v – горизонтальную (вдоль оси Ox_m) и вертикальную (вдоль оси Oy_m) соответственно, как это показано на рисунке 2.1.

Соотношение этих составляющих определяет угол i магнитного наклона магнитного поля Земли в данной точке поверхности ($i = \arctg(H_v / H_h)$). Следовательно проекции вектора \vec{H} на оси, связанной СК БПЛА, соответствуют вектору показаний трехосевого ММ датчика $\vec{H}_{ИЗМ}$, оси чувствительности которого по аналогии с инерциальными датчиками направлены по осям Ox_{cb} , Oy_{cb} и Oz_{cb} .

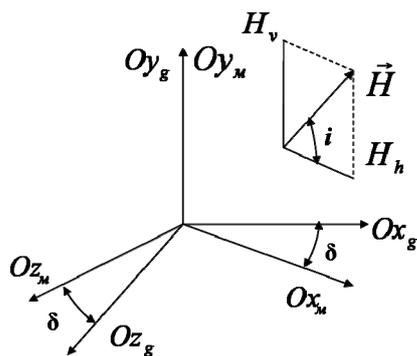


Рисунок 2.1 – Связь сопровождающей и опорной магнитной СК

Для определения углов Эйлера на основании показаний магнитометрической системы в данной работе применяется алгоритм, процесс функционирования которого можно кратко описать следующим образом:

1. Показания датчиков трехосевой магнитометрической системы формируют $\vec{H}_{ИЗМ}$, который далее перенормируется на 1 и корректируется, определяя $\vec{H}_{СВ}$.

2. Параллельно на основании данных о положении, согласно имеющейся карте магнитных наклонений и склонений, моделируется вектор напряженности магнитного поля Земли в данной точке пространства для случая *геодезической* СК $\vec{H}_{ГЕО}$.

3. Используя углы Эйлера, рассчитанные на предыдущем шаге алгоритма, формируется матрица поворота в *сопровождающую* СК (матрица направляющих косинусов C), и производится преобразование компонент вектора напряженности магнитного поля Земли $\vec{H}_{СВ}$ из *связанной* СК в *сопровождающую* СК, вследствие чего определяется вектор \vec{H}_g (2.2):

$$\vec{H}_g = C \times \vec{H}_{СВ}. \quad (2.2)$$

4. Далее производится вычисление степени рассогласования векторов \vec{H}_g и $\vec{H}_{ГЕО}$, на основании чего строится функционал рассогласования и производится его минимизация. Параметры ориентации, полученные при минимизации функционала рассогласования, применяются для независимой оценки углов Эйлера ориентации БПЛА.

Учет в навигационных измерениях показаний магнитометрических датчиков имеет ряд особенностей. Например, угол наклона магнитного поля Земли в широтах Беларуси составляет порядка 65–70 градусов, это приводит к тому, что при горизонтальном полете большая часть модуля вектора напряженности поля приходится на вертикальную ось, а на две оставшиеся – не более 6–7% его значения, что приводит к

значимому влиянию погрешности на измерения по этим осям. Кроме этого, магнитные датчики крайне восприимчивы к влиянию электромагнитных полей, являющихся результатом как внешних наводок, так и работы некоторого бортового оборудования.

3 Показания барометрических датчиков

Зная истинную воздушную скорость и скорость ветра с определенной точностью, можно оценить вектор путевой скорости БПЛА \vec{w} . Параметры ветра, используемые в навигационных алгоритмах БПЛА определяются перед стартом по данным метеорологической разведки или должны быть определены во время полета на борту БПЛА самим ПНК. Один из возможных алгоритмов определения параметров ветра (угла направления ветра φ_e и скорости ветра U_e) строится путем сравнения векторов путевой \vec{w} и истинной воздушной скоростей \vec{V}_u БПЛА. Источником информации о векторе \vec{w} на борту БПЛА может выступать СРНС, а источником информации о векторе \vec{V}_u – система воздушных скоростей (СВС), построенная на датчиках полного и статического давлений.

Проекция вектора путевой скорости БПЛА на оси, сопровождающей подвижную СК, определяются выражениями (3.1) и (3.2):

$$w_{gx} = V_{gu} \cos \psi + U_e \cos \varphi_e, \quad (3.1)$$

$$w_{gy} = V_{gu} \sin \psi + U_e \sin \varphi_e, \quad (3.2)$$

где U_e – модуль вектора скорости ветра; V_{gu} – проекция вектора истинной воздушной скорости БПЛА на плоскость $x_g O y_g$; ψ – путевой угол.

4 Спутниковая навигация

В настоящее время спутниковые радионавигационные системы (СРНС) являются удобным общедоступным инструментом для определения пространственных координат и параметров движения мобильных объектов на поверхности Земли и в околоземном пространстве [1], [9]. Навигационные параметры, полученные с помощью СРНС, не имеют тенденции к накоплению погрешностей, однако в большей степени подвержены различным случайным помехам и имеют низкую скорость обновления информации (как правило единицы герц). Типичные значения погрешности наиболее распространенных приемников сигналов СРНС составляют порядка 5–10 метров в горизонтальной плоскости и 10–15 метров в вертикальной. Значимым недостатком СРНС является существенный разброс навигационных решений (параметры B , L , H и компоненты вектора скорости в *геодезической* СК), формируемых последовательно, даже при неподвижности приемника, что требует дополнительной

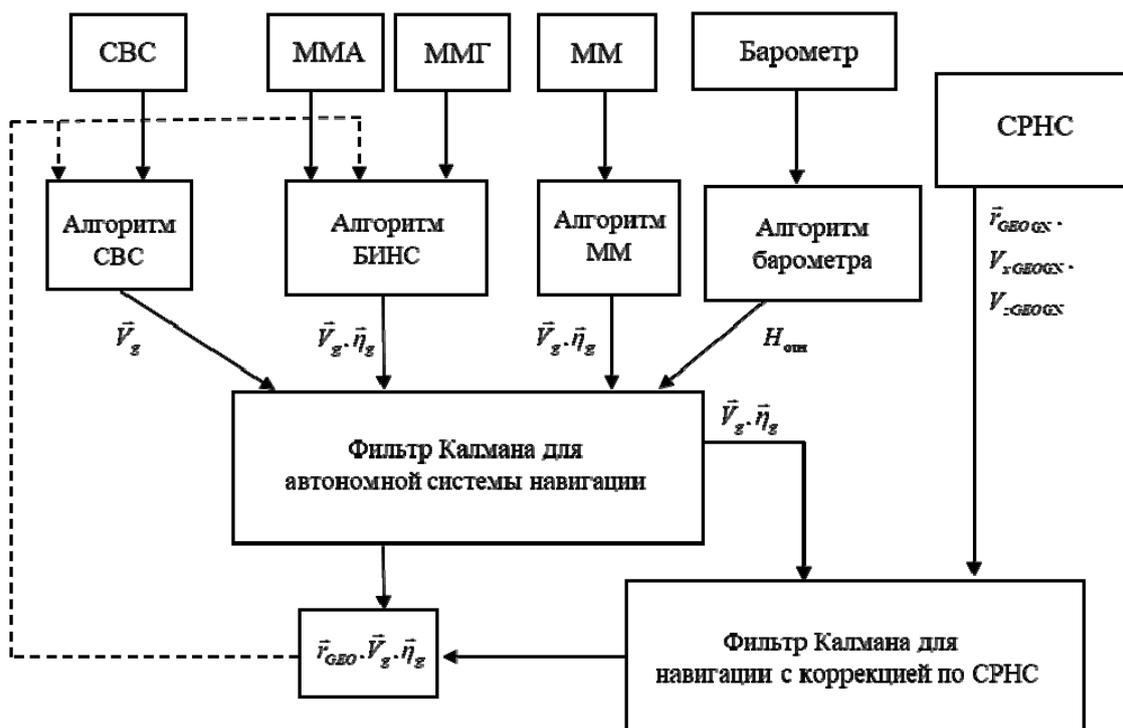


Рисунок 4.1 – Функциональная схема комплексирования данных

коррекции при их использовании в автоматизированных системах управления.

5 Схема алгоритма комплексирования навигационных данных

Двухкаскадная схема алгоритма комплексирования разнородных данных приведена на рисунке 4.1.

Предобработка данных с помощью алгоритма БИНС позволяет оптимально учесть взаимное влияние ММГ и ММА при повороте БПЛА вокруг центра масс. При этом на выходе алгоритма БИНС формируются навигационные параметры в нормальной СК, что позволяет значительно упростить вид основных матриц ФК [5]–[7], исключив из них преобразования поворотов относительно нормальной СК. Алгоритм ФК для автономной системы навигации работает синхронно с алгоритмами БИНС, ММ и барометра, что позволяет не проводить операцию интегрирования показаний датчиков внутри периода работы ФК и тем самым не накапливать ошибки аддитивно.

Матрицы перехода и чувствительности ФК имеют простой вид [5]–[7], что позволяет значительно оптимизировать процедуры их обчета, а, следовательно, максимизировать скоростные характеристики алгоритма. Матрицы ошибок измерений и динамического шума системы состоят из изменяющихся элементов, что с одной стороны позволит оптимально учесть все основные параметры моделей шума датчиков и системы, а с другой – отнести разработанный ФК к адаптивным фильтрам.

Заключение

Применение каскадной схемы комплексирования с применением ФК для навигации с коррекцией по СРНС позволяет, с одной стороны, обеспечить возможность работы ПНК в автономном режиме и режиме внешней коррекции, с другой – оптимальным образом учесть шумовые характеристики автономной системы навигации при комплексировании разнородных данных. Таким образом, применение только первого каскада (алгоритмы БИНС, ММ и барометрического датчика + ФК для автономной системы навигации) реализует автономный режим работы системы. Дополнительное использование второго каскада (первый каскад + ФК для навигации с коррекцией по СРНС) позволяет учесть уточняющие данные СРНС, производя процедуру внешней коррекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grewal, M. Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration / M. Grewal, L. Weill, P. Andrews – London: John Wiley and Sons Inc. – 2001 – 392 p.
2. Матвеев, В.В. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В.В. Матвеев, В.Я. Распопов; под общ. ред. В.Я. Распопова. – СПб: Электроприбор, 2009. – 280 с.
3. Shin, E.-H. Techniques for Low-Cost Inertial Navigation / E.-H. Shin – Alberta: Department of Geomatics Engineering Calgary. – 2005 – 206 p.
4. Алешин, Б.С. Ориентация и навигация подвижных объектов / Б.С. Алешин; под общ.

ред. Б.С. Алешина, К.К. Веремеенко, А.И. Черноморского. – Москва: Физматлит, 2006. – 422 с.

5. *Комплексирование данных навигационных систем на основе нелинейного фильтра Калмана* / К.В. Козадаев [и др.] // Информатика. – 2012. – № 1. – С. 106–114.

6. *Козадаев, К.В.* Повышение точности инерциально-спутниковой навигационной системы в режиме неподвижности / К.В. Козадаев, А.Е. Макаренко // Информатика. – 2017. – № 2. – С. 113–120.

7. *Козадаев, К.В.* Алгоритм повышения точности слабосвязанной инерциально-спутниковой навигационной системы на основе фильтра Калмана для ошибок БИНС / К.В. Козадаев,

А.Е. Макаренко // Электроника-инфо. – 2015. – № 9. – С 45–48.

8. *Красильщиков, М.Н.* Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / М.Н. Красильщиков; под ред. М.Н. Красильщикова, Г.Г. Сербрякова. – Москва: Физматлит, 2003. – 280 с.

9. *Kaplan, E.D.* Understanding GPS. Principles and Applications / E.D. Kaplan, E.D. Grewal, C.J. Hegarty. – London: Artech Hous, 2006. – 707 p.

Поступила в редакцию 13.02.20.

ДИФРАКЦИЯ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ ГУЛЯЕВА – БЛЮСТЕЙНА В КУБИЧЕСКИХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

Г.В. Кулак¹, Г.В. Крох¹, Т.В. Николаенко¹, О.В. Шакин²

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

²Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург

DIFFRACTION OF BESSEL LIGHT BEAMS BY THE SURFACE GULYAEV – BLUSTEIN'S ACOUSTICAL WAVES IN CUBIC PIEZOELECTRICAL CRYSTALS

G.V. Kulak¹, G.V. Krokh¹, T.V. Nikolaenko¹, O.V. Shakin²

¹I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

²State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg

Показано, что для акустооптической дефлекции и модуляции бesselевых световых пучков, дифрагированных на поверхностных акустических волнах Гуляева – Блюстейна, следует наряду с прошедшими дифракционными порядками использовать и отраженные дифракционные порядки. Акустооптическая дифракция бesselевых световых пучков может применяться для диагностики поверхностных волн Гуляева – Блюстейна в кубических пьезоэлектрических кристаллах. Дифракция бesselевых световых пучков низших порядков на кристаллических структурах: воздух – GaAs – AlGaAs может быть использована для создания многокоординатных акустооптических дефлекторов и модуляторов.

Ключевые слова: плоскопараллельный слой, волна Гуляева – Блюстейна, акустооптическая дифракция, кубический кристалл, коэффициенты отражения и пропускания, модуляция света.

It is shown that for acousto-optic diffraction and modulation of Bessel light beams diffracted on Gulyaev – Blustein surface acoustic waves, reflected diffraction orders should be used along with the transmission diffraction orders. Acousto-optic diffraction of Bessel light beams can be used to diagnose Gulyaev – Blustein surface waves in cubic piezoelectric crystals. Diffraction of Bessel light beams of lower orders on crystal structures: air – GaAs – AlGaAs can be used to create multi-coordinate acousto-optic deflectors and modulators.

Keywords: plan-parallel slab, Gulyaev – Blustein's waves, acousto-optical diffraction, cubic crystal, coefficients of reflection and transmission, light modulation.

Введение

Поверхностные ультразвуковые (УЗ) волны Гуляева – Блюстейна (ГБ) привлекают значительный интерес исследователей в связи с проблемой создания акустоэлектронных и акустооптических устройств, а также их диагностики [1], [2]. Они могут возбуждаться в некоторых срезах пьезоэлектрических кристаллов и имеют поляризацию, параллельную свободной поверхности слоя. В настоящее время значительный интерес для оптических технологий представляют квазибездифракционные световые поля, которые соответствуют световым пучкам с сохраняющимся в процессе распространения поперечным распределением амплитуды поля. Наиболее известным классом квазибездифракционных полей являются бesselевы световые пучки (БСП) [3]–[6]. Энергия в поперечном сечении БСП распределена в виде яркого центрального пятна, окруженного системой концентрических колец. При этом интенсивность в кольцевых зонах уменьшается с увеличением радиальной координаты. Важной отличительной чертой БСП в сравнении с традиционными гауссовыми пучками является

бездифракционность в заданной области пространства и способность самореконструкции волнового фронта за экраном [6].

В работе [7] исследовано акустооптическое (АО) взаимодействие волноводных оптических мод TE и TM поляризации на волнах ГБ. Отмечена возможность диагностики таких волн при брэгговской дифракции света на ультразвуке в условиях пропускания. Однако при этом не учтено френелевское отражение света от границ звукопровода.

В настоящей работе исследованы особенности брэгговской дифракции БСП на ПАВ ГБ, обусловленные акустоиндуцированной анизотропией кристалла и френелевским отражением от границ модулированного слоя.

1 Теоретические результаты и обсуждение

Плоскопараллельный слой толщиной h , диэлектрическая проницаемость которого ϵ_2 , расположен между однородными прозрачными средами с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_3 (рисунок 1.1). Начало системы координат XYZ

расположено на верхней границе слоя, а ось Y перпендикулярна границе слоя.

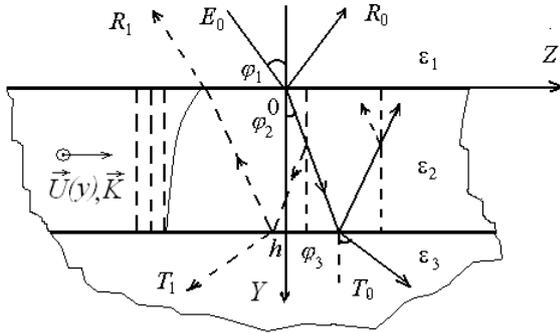


Рисунок 1.1 – Схема диагностики волн Гуляева – Блюстейна в условиях анизотропной АО дифракции в слое

Кубические кристаллы арсенида галлия GaAs, широко используемые в акустоэлектронике и оптоэлектронике [1], [7], относятся к классу симметрии $\bar{4}3m$. В волне ГБ присутствуют два компонента тензора деформаций U_5 и U_6 ; им соответствуют компоненты напряженности пьезоэлектрического поля ультразвуковой волны E_3 и E_2 . Для световой волны TE поляризации, падающей на поверхность кристалла, существенны компоненты деформации U_6 и напряженности пьезоэлектрического поля E_2 , которые определяются соотношениями [8]:

$$\begin{aligned} U_6 &= A_1 K [\alpha_1 \exp(-\alpha_1 Ky) + \\ &+ a_{21} \alpha_2 \exp(-\alpha_2 Ky)] \exp[i(Kz - \Omega t)], \\ E_2 &= -A_1 K [b_{11} \alpha_1 \exp(-\alpha_1 Ky) + \\ &+ a_{21} b_{22} \alpha_2 \exp(-\alpha_2 Ky)] \exp[i(Kz - \Omega t)], \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $a_{21} = -1,4758 \cdot 10^4$, $b_{11} = 1,8512 \cdot 10^{11}$, $b_{22} = 1,6436 \cdot 10^9$, $\alpha_1 = 0,9912$, $\alpha_2 = 3,3879 \cdot 10^{-4}$, A_1 – постоянная величина, Ω и K – круговая частота и волновое число УЗ волны.

УЗ волна (1.1) индуцирует решетку диэлектрической проницаемости периодическую в пространстве и во времени вдоль оси Z и пространственно-неоднородную вдоль оси Y :

$$\varepsilon_2(y, z, t) = \varepsilon_2 + \Delta \varepsilon_2(y) \exp[i(Kz - \Omega t)],$$

где $\Delta \varepsilon_2(y) = -\varepsilon_2^2 [p_{\text{эф}} U_6(y) + r_{\text{эф}} E_2(y)]$, $p_{\text{эф}}(r_{\text{эф}})$ – эффективная фотоупругая (электрооптическая) постоянная кристалла.

Допустим, что падающий и дифрагированные БСП с частотой $\omega \gg \Omega$ и волновым вектором $\vec{k} = \vec{e}_y k_{1y} + \vec{e}_z k_{1z}$ ($k_{1y} = kn_1 \cos \varphi_1$, $k_{1z} = kn_1 \sin \varphi_1$, $k = \omega/c$, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$, c – скорость света в вакууме) имеют эллиптическую поляризацию и угол преломления φ_2 близок к углу Брэгга $\varphi_2 \approx \varphi_B$.

Поле дифрагированных БСП представимо в виде ряда

$$\vec{E} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} A_p(z) \vec{e}_{i,d}(\rho, \varphi) \exp \left[i \left(k_{pz} z - \omega_p t - \frac{\pi p}{2} \right) \right], \quad (1.2)$$

где $k_{pz} = k_{0z} + pK$, $\omega_p = \omega + p\Omega$: здесь $\vec{e}_{i,d}(\rho, \varphi)$ – вектор-функции поляризации дифрагированных волн для БСП произвольного порядка (m). Вектор-функции поляризации имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= e_{i1} \vec{e}_1 + e_{i2} \vec{e}_2 + e_{i3} \vec{e}_3, \\ \vec{e}_d &= e_{d1} \vec{e}_1 + e_{d2} \vec{e}_2 + e_{d3} \vec{e}_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} e_{d1} &= k^{-1} n^{-4} \{ [q_d^2 \sin^2 \varphi_B (J_{m-2}(q_d \rho) e^{-i2\varphi} - \\ &- J_{m+2}(q_d \rho) e^{i2\varphi}) / 4] + \\ &+ [q_d^2 \cos \varphi_B ((J_{m+1}(q_d \rho) e^{i\varphi} - J_{m-1}(q_d \rho) e^{-i\varphi}) / 2)] \}, \\ e_{d2} &= ik^{-1} n^{-4} \{ [-q_d^2 \sin 2\varphi_B (J_{m+2}(q_d \rho) e^{i2\varphi} + \\ &+ J_{m-2}(q_d \rho) e^{-i2\varphi}) / 4] + \\ &- [q_d^2 \cos 2\varphi_B ((J_{m-1}(q_d \rho) e^{-i\varphi} + J_{m+1}(q_d \rho) e^{i\varphi}) / 2) - \\ &- (k^2 - 3q_d^2 / 2) \sin 2\varphi_B J_m(q_d \rho)] \}, \\ e_{d3} &= ik^{-1} n^{-4} \{ [q_d^2 \sin 2\varphi_B (J_{m+2}(q_d \rho) e^{i2\varphi} + \\ &+ J_{m-2}(q_d \rho) e^{-i2\varphi}) / 4] + \varphi + \\ &+ [-q_d^2 \sin 2\varphi_B ((J_{m-1}(q_d \rho) e^{-i\varphi} + J_{m+1}(q_d \rho) e^{i\varphi}) / 2) + \\ &+ q_d^2 (1 + \cos^2 \varphi_B + q_d^2 \sin^2 \varphi_B) J_m(q_d \rho)] \}. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – единичные векторы в кристаллографической системе координат X_1, X_2, X_3 ; ρ, φ – цилиндрические координаты БСП, n – показатель преломления кристалла; $q_{i,d} = k_{i,d} \sin \gamma_{i,d}$, причем $k_{i,d}$ – волновые числа падающего и дифрагированного БСП, $\gamma_{i,d}$ – параметры конусности БСП.

При $k_{0z} \approx K/2$ из совокупности дифрагированных волн (1.2) следует выделить лишь две наиболее существенные, то есть с дифракционными порядками $m = 0$ и $m = -1$. Система неоднородных уравнений связанных волн для комплексных амплитуд A_0 и A_{-1} имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_0}{dy^2} + k_{0x}^2 A_0 - ik_{2z}^2 g_m \eta A_{-1} &= 0, \\ \frac{d^2 A_{-1}}{dy^2} + k_{-1x}^2 A_{-1} + ik_{2z}^2 g_m \eta A_0 &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_{0x} &= \sqrt{k_2^2 - k_{0z}^2}, \\ k_{-1x} &= \sqrt{k_2^2 - k_{-1z}^2}, \\ k_{0z} &= k_2 \sin \varphi_B, \\ k_{-1z} &\approx k_2 \sin \varphi_B; \\ \eta(y) &= -n_2^2 [p_{\text{эф}} U_6(y) + r_{\text{эф}} E_2(y)]. \end{aligned}$$

Интегралы перекрытия дифрагированных волн находим из соотношений:

$$g_m = \frac{\left| \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} (\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_d) \rho d\varphi d\rho \right|}{\sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\mathbf{e}_d|^2 \rho d\varphi d\rho} \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\mathbf{e}_i|^2 \rho d\varphi d\rho}}, \quad (1.3)$$

где R_B – радиус БСП.

Решение системы уравнений связанных волн в брэгговском режиме дифракции можно представить в виде:

$$\begin{aligned} A_0 &= (U_2 + U_1) / 2, \\ A_{-1} &= i(U_2 - U_1) / 2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

причем величины $U_{1,2}$ находим из решения уравнений

$$\frac{d^2 U_{1,2}}{dy^2} + k_2^2 \left[\cos^2 \varphi_2 \pm \frac{1}{2} \eta(y) g_m \right] U_{1,2} = 0. \quad (1.5)$$

Решения неоднородных дифференциальных уравнений (1.5), содержащих большой параметр k_2 , в рамках ВКБ – приближения имеют вид:

$$U_{1,2} = C_1^\pm \exp\{ik_2^\pm(y)\} + C_2^\pm \exp\{-ik_2^\pm(y)\}, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} k_2^\pm &= \\ &= k_2 y \left\{ \cos \varphi_2 \pm \left[p_{\varphi\varphi} \int_0^h U_6(y) dy + r_{\varphi\varphi} \int_0^h E_2(y) dy \right] \frac{g_m}{2y} \right\}; \end{aligned}$$

$C_{1,2}^\pm$ – постоянные коэффициенты, определяемые с применением граничных условий.

При условии малости фотоупругих постоянных и при наличии затухания УЗ волны в подложке АО взаимодействием в ней можно пренебречь. Подставляя выражения (1.6) в (1.4), а затем (1.4) в (1.2), и применив стандартные граничные условия на плоскостях $y = 0$ и $y = h$ [8], [9], получим систему алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов пропускания t_0, t_{-1} и отражения r_0, r_{-1} для волн нулевого и первого порядков. Данная система уравнений может быть решена лишь численными методами. Пренебрегая медленным изменением линейных членов, зависящих от y , по сравнению с экспоненциальными, и используя (1.3), получим систему линейных алгебраических уравнений, решение которой представимо в замкнутой форме.

Глубина проникновения волны ГБ \bar{h} в подложку значительно больше глубины проникновения ПАВ Рэлея [1], [2]. Для рассматриваемого направления распространения ПАВ в кристалле GaAs при частоте ультразвука $f = 1$ ГГц глубина проникновения волны ГБ составляет $\bar{h} \approx 2,5$ мм. Для системы воздух – GaAs – AlGaAs толщина возмущенного слоя из кристалла GaAs удовлетворяет соотношению: $h \leq \bar{h}$ [8].

Коэффициенты отражения и пропускания дифрагированных волн s -поляризации определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{-n_1 n_2 \left[(e^{-ik_a} + e^{-ik_b}) + r_{12} r_{23} (e^{ik_a} + e^{ik_b}) \right] e^{-ik_3 h}}{(r_{12} r_{23} e^{ik_a} + e^{-ik_a})(e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})}, \\ r_0 &= \frac{-(e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})}{(e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})}, \\ t_{-1} &= \frac{2n_1 n_2 \left[(e^{-ik_a} + e^{-ik_b}) + r_{12} r_{23} (e^{ik_a} - e^{ik_b}) \right] e^{-ik_3 h}}{(r_{12} r_{23} e^{ik_a} + e^{-ik_a})(e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})}, \\ r_{-1} &= \frac{4in_1 n_2 (n_2 - n_3) \sin(k_a - k_b)}{(n_1 + n_2)(r_{12} r_{23} e^{ik_a} + e^{-ik_a})(e^{-ik_b} + r_{12} r_{23} e^{ik_b})}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{n_1 \cos \varphi_1 - n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1 + n_2 \cos \varphi_2}, \\ r_{23} &= \frac{n_2 \cos \varphi_2 - n_3 \cos \varphi_3}{n_2 \cos \varphi_2 + n_3 \cos \varphi_3}, \\ k_3 &= kn_3; \\ n_3 &= \sqrt{\varepsilon_3}; \\ k_{a,b} &= k_2 h g_m \sqrt{(1 \mp \eta_a \mp \eta_b) - \frac{K^2}{4k_2^2}}; \\ \eta_a &= n_2^2 p_{\varphi\varphi} U_6(0) / 2, \\ \eta_b &= n_2^2 r_{\varphi\varphi} E_2(0) / 2. \end{aligned}$$

При выводе выражений (1.7) предполагалось, что угол Брэгга φ_B – мал. Данное условие выполняется при частоте ультразвука ~ 1 ГГц. В дальнейшем будем считать, что

$$\begin{aligned} E_2(0) &= \left[\frac{b_{11} \alpha_1 + a_{21} b_{22} \alpha_2}{\alpha_1 + a_{21} \alpha_2} \right] g_m U, \\ U &= U_6(0). \end{aligned}$$

Коэффициенты отражения ($R_{0,1}$) и пропускания ($T_{0,1}$) дифрагированных волн находим из соотношений [9]:

$$\begin{aligned} R_0 &= |r_0|^2, \\ R_1 &= |r_{-1}|^2, \\ T_0 &= \frac{n_3 \cos \varphi_3}{n_1 \cos \varphi_1} |t_0|^2, \\ T_1 &= \frac{n_3 \cos \varphi_3}{n_1 \cos \varphi_1} |t_{-1}|^2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

2 Результаты численных расчетов

Численные расчеты на основании выражений (1.8) проведены для многослойной системы: воздух – GaAs – AlGaAs [2]. При расчетах использована длина световой волны в вакууме $\lambda_0 = 1,15$ мкм, амплитуда тензора деформаций

$$U = \sqrt{2I_a / \rho v^3},$$

где $I_a(v)$ – интенсивность (фазовая скорость) ПАВ; $P_{эф} = P_{44}$ ($r_{эф} = r_{41}$) – эффективная фотоупругая (электрооптическая) постоянная.

Зависимости коэффициентов отражения $R_{0,1}$ и пропускания $T_{0,1}$ дифрагированных волн нулевого ($a, в$) и первого ($б, з$) порядка от параметра отстройки $q_n = \Delta q / q_i$ ($\Delta q = |q_d - q_i|$) для дифракции БСП нулевого порядка $m = 0$ представлены на рисунке 2.1.

Из рисунка 2.1 ($б, в, з$) следует, что соответствующие коэффициенты отражения (R_1) и пропускания (T_0, T_1) достигают максимального значения при условии поперечного фазового синхронизма ($q_n = 0$). Коэффициент отражения нулевого порядка (R_0) достигает максимального значения при отсутствии поперечного фазового синхронизма ($q_n \neq 0$).

На рисунке 2.2 представлены зависимости коэффициентов отражения $R_{0,1}$ и пропускания $T_{0,1}$ волн, дифрагированных в нулевой и минус первый порядки, от амплитуды деформации U и толщины слоя h для моды БСП нулевого порядка при условии поперечного фазового синхронизма ($q_n = 0$).

Коэффициент отражения дифрагированной волны минус первого порядка R_1 мал, что объясняется незначительным отличием показателей преломления слоя и подложки для системы: воздух – GaAs – AlGaAs. Коэффициенты отражения волн, дифрагированных в нулевой порядок (R_0), достигают $\sim 0,3$ при $h = 0,4$ мм и $h = 0,8$ мм. Наиболее существенные изменения R_0 наблюдаются при большой толщине слоя, то есть $h = 0,8$ мм.

Зависимости коэффициентов пропускания T_0 и T_1 дифрагированных БСП в нулевой и минус первый порядки от амплитуды деформации U и толщины слоя h представлены на рисунке 2.2 ($в, з$). Из рисунка видно, что при $U = 4,5 \cdot 10^{-4}$ и увеличении толщины слоя h от 0,2 мм до 0,8 мм величина коэффициента пропускания T_1 увеличивается на 70%. При малых $U \leq 10^{-4}$ коэффициент пропускания T_0 при $h = 0,8$ мм является наименьшим. Это объясняется тем, что, кроме дифракционных максимумов, для прошедших БСП, формируются также и дифракционные максимумы в отраженных БСП.

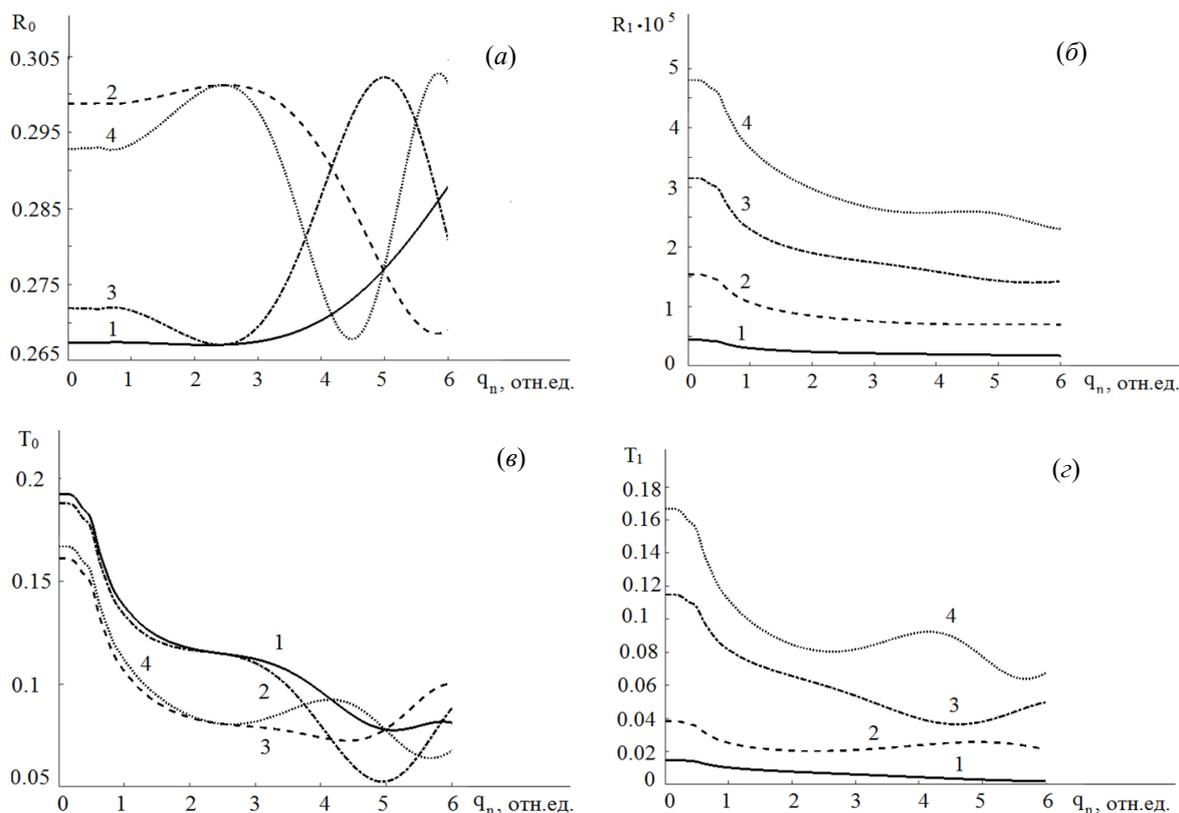


Рисунок 2.1 – Зависимость энергетического коэффициента отражения $R_{0,1}$ ($a, б$) (пропускания $T_{0,1}$ ($в, з$)) от параметра отстройки q_n при различной толщине модулированного слоя h (1 – $h = 0,2$ мм; 2 – $h = 0,4$ мм; 3 – $h = 0,6$ мм; 4 – $h = 0,8$ мм; система: воздух – GaAs – AlGaAs, $\varphi_1 = 2^0$, $\lambda_0 = 1,15$ мкм, $U = 10^{-4}$, $m = 0$)

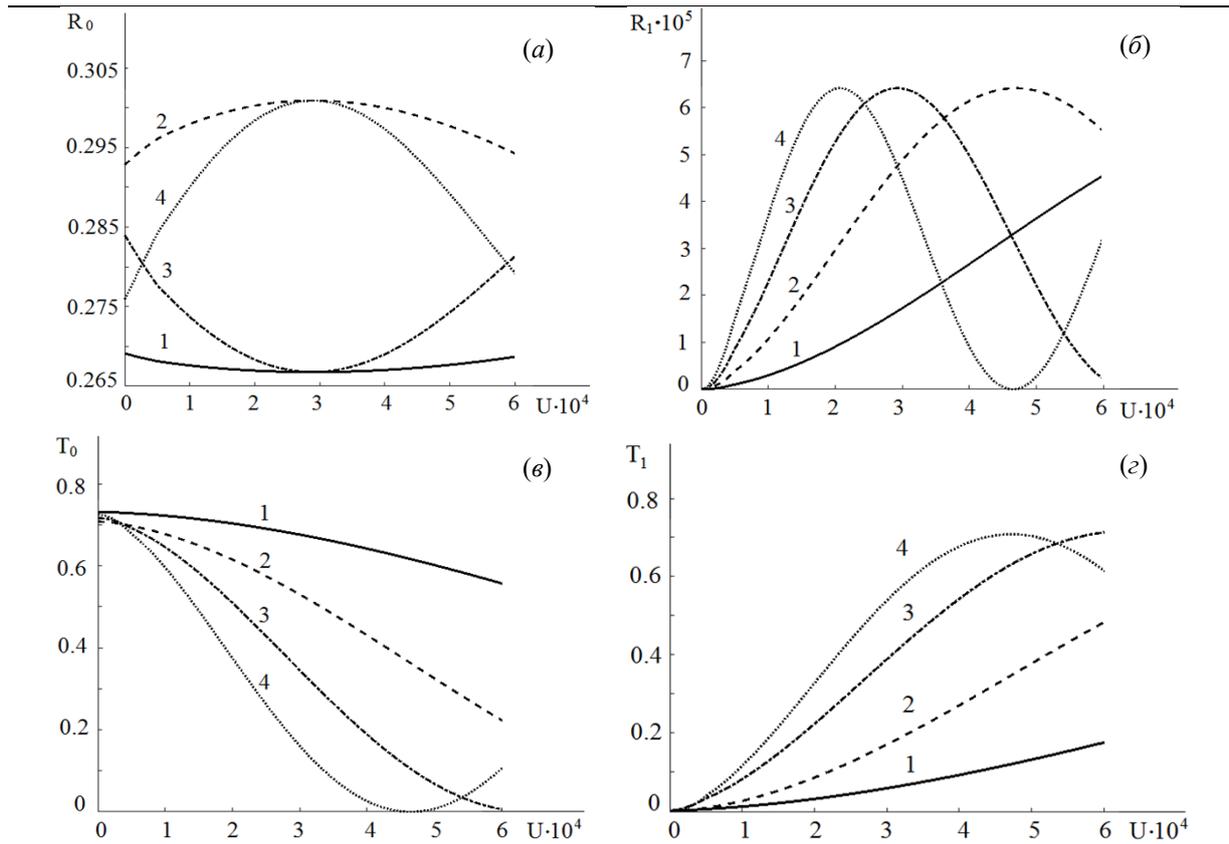


Рисунок 2.2 – Зависимость энергетического коэффициента отражения $R_{0,1}$ (а, б) (пропускания $T_{0,1}$ (в, г)) от амплитуды деформации U при различной толщине модулированного слоя h ($1 - h = 0,2$ мм; $2 - h = 0,4$ мм; $3 - h = 0,6$ мм; $4 - h = 0,8$ мм; система: воздух – GaAs – AlGaAs, $\varphi_1 = 2^0$, $\lambda_0 = 1,15$ мкм, $q_n = 0$, $m = 0$)

Заключение

Преимущество предложенного метода АО модуляции света и диагностики поверхностных акустических волн ГБ, по сравнению с традиционными, заключается в использовании как прошедших, так и отраженных дифрагированных БСП низших порядков. Полученные результаты найдут применение для АО диагностики волн ГБ АО методами в различных средах, в том числе, в системе GaAs – AlGaAs с использованием высоко проникающих БСП низших порядков. Дифракция на кристаллических структурах: воздух – GaAs – AlGaAs может быть использована для создания многокоординатных АО дефлекторов и модуляторов БСП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьельсан, Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьельсан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
2. Яковкин, И.Б. Дифракция света на акустических поверхностных волнах / И.Б. Яковкин, Д.В. Петров. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1979. – 184 с.
3. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams / J. Durnin // J. Opt. Soc. Am. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.

4. Влияние светоиндуцированных решеток на акустооптическое взаимодействие бесселевых световых пучков в одноосных гиротропных кристаллах / Г.В. Кулак, Г.В. Крох, П.И. Ропот, О.В. Шакин // Оптический журнал. – 2017. – Т. 84, № 2. – С. 103–109.

5. Noncollinear Bragg diffraction of Bessel light beams by ultrasound in uniaxial gyrotropic crystals / V.N. Belyi, S.V. Kulakov, G.V. Kulak, G.V. Krokh, P.I. Ropot, O.V. Shakin // Wave Electronics and Its Applications in the Information and Telecommunication Systems: XVIII International Conference for Young Researchers, Saint-Petersburg, 1–5 June 2015. – Saint-Petersburg, 2015. – P. 39–40.

6. Herman, R.M. Production and uses of diffractionless beams / R.M. Herman, T.A. Wiggins // J. Opt. Soc. Am. – 1991. – Vol. 8, № 6. – P. 932–942.

7. Bright, V.M. Acousto-optic interactions between optical waves and Bleustein-Gulyaev surface acoustic waves in gallium arsenide and other piezoelectric cubic crystals / V.M. Bright, W.D. Hunt // J. Appl. Phys. – 1990. – Vol. 67, № 2. – P. 654–662.

8. Викторов, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов – М.: Наука, 1981. – 287 с.

9. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 719 с.

Поступила в редакцию 06.11.19.

УДК 621.383.4

РАСЧЕТ ВОЛНОВОДНОГО ЗОНДА ДЛЯ ТЕРАГЕРЦОВОЙ СПЕКТРОСКОПИИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

С.С. Михеев¹, А.Б. Сотский¹, М.М. Назаров², Л.И. Сотская³¹Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова²Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва³Белорусско-Российский университет, Могилев

CALCULATION OF THE WAVEGUIDE PROBE FOR TERAHERTZ SPECTROSCOPY OF A LAYERED MEDIUM

S.S. Miheev¹, A.B. Sotsky¹, M.M. Nazarov², L.I. Sotskaya³¹Mogilev State A. Kuleshov University²Kurchatov Institute National Research Center, Moscow³Belarusian-Russian University, Mogilev

В приближении Кирхгофа получено аналитическое решение дифракционной задачи о нахождении спектров амплитуд мод волноводного зонда при отражении терагерцового импульса от открытого торца волновода с поллой сердцевинной, контактирующей со слоистой средой. На примере электродинамической модели кожи в виде двух слоев водного раствора альбумина, возбуждаемых модами полого металлического волновода, исследовано влияние влажности эпидермиса на спектры амплитуд отраженных мод, допускающие измерение методом терагерцовой спектроскопии во временной области. Установлено, что оптимальным для данного метода является выбор частотного диапазона, соответствующего одномодовому режиму работы волновода.

Ключевые слова: волновод с поллой сердцевинной, зонд, терагерцовая спектроскопия во временной области, слоистая среда, биологический сенсор.

Using the Kirchhoff approximation, an analytical solution of the diffraction problem on finding the spectra of the amplitudes of the modes of a waveguide probe at reflection of a terahertz pulse from the open end of a hollow core waveguide contacting with a layered medium, is obtained. On example of the electrodynamic model of the skin as two layers of an aqueous albumin solution excited by the modes of a hollow metal waveguide, the effect of epidermal humidity on the spectra of amplitudes of reflected waveguide modes, which can be measured using the time domain spectroscopy, is studied. It is established that the optimal choice of the frequency range refers to single-mode regime of the waveguide work.

Keywords: hollow-core waveguide, waveguide probe, terahertz time domain spectroscopy, layered medium, biologic sensor.

Введение

В отличие от схем объемной терагерцовой (ТГц) оптики, используемых для диагностики биологических тканей, волноводный зонд может обеспечить локальный доступ к биологическим объектам, в том числе к труднодоступным, *in vivo* [1], [2]. Он одновременно выполняет две функции – доставки импульсного ТГц излучения к изучаемому объекту и получения отраженного сигнала, несущего информацию об объекте, извлекаемую методом ТГц спектроскопии во временной области (time domain spectroscopy (TDS)) [1], [2]. Для зондовых применений в ТГц диапазоне, по-видимому, наиболее перспективны полые волноводы с металлизированной внутренней границей [1], [3]–[6], которые можно изготовить в гибкой конфигурации, используя внутреннюю металлизацию полимерных трубок [3]–[6]. Передаточные характеристики таких волноводов исследованы в работах [3]–[7]. В настоящей статье рассматривается практически не изученный на данный момент вопрос о расчете коэффициентов отражения мод полого ТГц волновода с открытым торцом от слоистой среды. Он актуален,

в частности, с позиций зондовой ТДС локальных участков кожи при диагностике границ опасных заболеваний. В приближении Кирхгофа для названных коэффициентов получены аналитические выражения. В рамках двухслойной модели кожи оценена чувствительность ТГц зонда в виде металлического волновода с поллой сердцевинной кругового сечения к влажности эпидермиса.

1 Расчетная схема

Исследуемая оптическая схема приведена на рисунке 1.1.

Здесь некоторая мода трехмерного ТГц волновода с поллой сердцевинной (выбор волновода такого типа объясняется значительным поглощением ТГц излучения всеми известными веществами за исключением сухого воздуха [8]), обозначенная символом I , падает на плоскостойкую среду, расположенную в области $z < 0$. Среда состоит из $n + 1$ однородных слоев. Искомыми являются амплитуды отраженных мод (на рисунке 1.1 символ R), формирующие импульс на приемной фотоантенне [6].

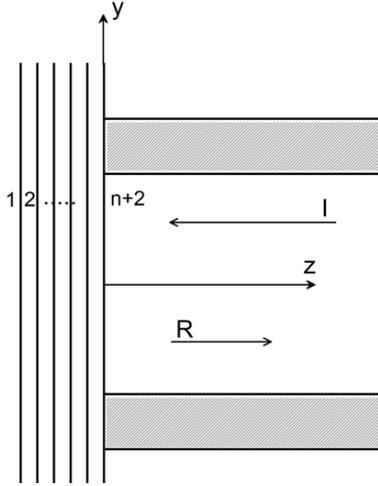


Рисунок 1.1 – Геометрия задачи об отражении моды волновода с открытым торцом от слоистой среды

В строгой постановке соответствующая дифракционная задача является весьма сложной. Для ее упрощения воспользуемся приближением Кирхгофа [9], [10], в котором отраженное поле в сердцевине волновода при $z = +0$ совпадает с полем пучка, отраженного от слоистой среды при падении на нее из области $z > 0$, занятой воздухом с относительной диэлектрической проницаемостью ε_a , пучка, поле которого в пределе при $z \rightarrow +0$ равно полю падающей волноводной моды.

В указанном приближении решение дифракционной задачи об отражении ТГц импульса от слоистой среды сводится к решению двух независимых дифракционных задач для полей с компонентами $E_z = 0$ и $H_z = 0$ [11]. При выделении в поле ТГц импульса монохроматической компоненты $\exp(i\omega t)$ ($\omega = 2\pi f$, f – частота) дифракционное поле представляется интегралами Фурье по пространственным частотам k_x, k_y :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{E}(x, y, z), \mathbf{H}(x, y, z)] = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y, z), \hat{\mathbf{H}}(k_x, k_y, z)] \times \\ & \times \exp(-ik_x x - ik_y y) dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для волн первого типа ($E_z = 0$)

$$\begin{aligned} \hat{E}_x &= -\omega \mu_0 k_y k^{-2} \hat{H}_z, \quad \hat{E}_y = \omega \mu_0 k_x k^{-2} \hat{H}_z, \\ \hat{H}_x &= -ik_x k^{-2} \nabla_z \hat{H}_z, \quad \hat{H}_y = -ik_y k^{-2} \nabla_z \hat{H}_z, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, а \hat{H}_z подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\nabla_z^2 \hat{H}_z + [k_0^2 \varepsilon(z) - k^2] \hat{H}_z = 0, \quad (1.3)$$

где $k_0 = \omega c^{-1}$ – волновое число вакуума, $\varepsilon(z)$ – относительная диэлектрическая проницаемость

слоистой среды на частоте ω . Решение уравнения (1.3) дает для отраженного поля:

$$\hat{H}_z^{(r)} = A \hat{h}_z(k_x, k_y) r_s(k^2) \exp(-i\beta_{n+2} z). \quad (1.4)$$

Здесь $\hat{h}_z(k_x, k_y)$ – фурье-образ z -компоненты магнитного поля падающей моды $h_z(x, y)$,

A – амплитуда данной моды, $\beta_{n+2} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_a - k^2}$ – коэффициент

$$r_s(k^2) = (i\gamma H_{n+2} - H'_{n+2})(i\beta_{n+2} H_{n+2} - H'_{n+2})^{-1}, \quad (1.5)$$

где γ – постоянная распространения моды, находится с применением рекуррентных формул

$$H_{j+1} = H_j \cos(\beta_j \Delta z_j) + H'_j \sin(\beta_j \Delta z_j) \beta_j^{-1}, \quad (1.6)$$

$$H'_{j+1} = -H_j \beta_j \sin(\beta_j \Delta z_j) + H'_j \cos(\beta_j \Delta z_j), \quad (1.7)$$

в которых $\beta_j = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_j - k^2}$, ε_j и Δz_j – диэлектрическая проницаемость и толщина j -го слоя, $H_2 = 1$, $H'_2 = i\beta_1$.

Для волн второго типа ($H_z = 0$) соотношения, аналогичные (1.2)–(1.7) имеют вид

$$\hat{E}_x = -ik_x k^{-2} D', \quad \hat{E}_y = -ik_y k^{-2} D',$$

$$\hat{H}_x = \varepsilon_0 \omega k_y k^{-2} D, \quad \hat{H}_y = -\varepsilon_0 \omega k_x k^{-2} D, \quad (1.8)$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $D = \varepsilon(z) \hat{E}_z$, $D' = [\varepsilon(z)]^{-1} \nabla_z D$,

$$\varepsilon(y) \nabla_z [\varepsilon(z)]^{-1} \nabla_z D + [k_0^2 \varepsilon(z) - k^2] D = 0, \quad (1.9)$$

$$\hat{E}_z^{(r)} = A \hat{e}_z(k_x, k_y) r_p(k^2) \exp(-i\beta_{n+2} z), \quad (1.10)$$

$\hat{e}_z(k_x, k_y)$ – фурье-образ z -компоненты электрического поля падающей волноводной моды $e_z(x, y)$,

$$r_p(k^2) =$$

$$= (i\gamma D_{n+2} - \varepsilon_a D'_{n+2})(i\beta_{n+2} D_{n+2} + \varepsilon_a D'_{n+2})^{-1}, \quad (1.11)$$

$$D_{j+1} = H_j \cos(\beta_j \Delta z_j) + \varepsilon_j D'_j \sin(\beta_j \Delta z_j) \beta_j^{-1}, \quad (1.12)$$

$$D'_{j+1} = -H_j \varepsilon_j^{-1} \beta_j \sin(\beta_j \Delta z_j) + D'_j \cos(\beta_j \Delta z_j), \quad (1.13)$$

$$D_2 = 1, \quad D'_2 = i\beta_1 \varepsilon_1^{-1}.$$

Подстановка в (1.1) значений (1.2), где $\hat{H}_z = \hat{H}_z^{(r)}$ и (1.8), где $\hat{E}_z = \hat{E}_z^{(r)}$ позволяет аналитически рассчитать отраженное электромагнитное поле в пределе при $z \rightarrow +0$. Обозначим это поле через $\mathbf{E}^{(r)}, \mathbf{H}^{(r)}$. Нахождение ТГц импульса, отраженного от слоистой среды в окрестности торца волновода, сводится к прямому интегрированию данного поля по спектру временных частот по схеме, описанной в [7].

Для полного расчета характеристик волноводного зонда необходимо дополнить полученное решение нахождением амплитуд волноводных мод, отраженных от слоистой среды. В рассматриваемой геометрии эффекты взаимного преобразования мод разного порядка не существенны, что позволяет выполнить названный расчет в приближении, где мода отражается сама в

себя [12]. В этом случае применение векторных соотношений ортогональности мод [13] приводит к следующему выражению для амплитуды B отраженной моды:

$$B = RA = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\mathbf{e} \times \mathbf{h})_z \right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\bar{\mathbf{E}}^{(r)} \times \mathbf{h})_z, \quad (1.14)$$

где R – амплитудный коэффициент отражения моды от слоистой среды, $\bar{\mathbf{E}}^{(r)} = A^{-1} \mathbf{E}^{(r)}$, $\mathbf{E}^{(r)}$ – напряженность отраженного поля, найденная на предыдущем шаге решения.

Учитывая, что поле моды любого ТГц волновода практически полностью локализовано в его полой сердцевине и принимает пренебрежимо малые значения вне сердцевины и на ее периметре [7], [8], а также то, что в сердцевине волновода выполняются уравнения

$$(\nabla_x^2 + \nabla_y^2)(e_z, h_z) = -\kappa^2(e_z, h_z),$$

где $\kappa^2 = k_0^2 \varepsilon_a - \gamma^2$, из (1.1), (1.2), (1.8) получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\bar{\mathbf{E}}^{(r)} \times \mathbf{h})_z = \frac{4\pi^2 \omega}{\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y (\varepsilon_0 \varepsilon_a \beta_{n+2} r_p \hat{e}_z^2 - \mu_0 \gamma r_s \hat{h}_z^2), \quad (1.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\mathbf{e} \times \mathbf{h})_z = \frac{\gamma \omega}{\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\varepsilon_0 \varepsilon_a e_z^2 + \mu_0 h_z^2). \quad (1.16)$$

Представим компоненты поля моды в сердцевине волновода рядами Рэлея [14]

$$(e_z, h_z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} (CE_{\mu}, CH_{\mu}) \exp(i\mu\phi) J_{\mu}(\kappa r),$$

где $J_{\mu}(\kappa r)$ – функция Бесселя, CE_{μ} , CH_{μ} – амплитуды цилиндрических гармоник и использованы полярные координаты ($x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$). Тогда после вычисления интегралов от функций Бесселя выражения (1.15), (1.16) преобразуются к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\bar{\mathbf{E}}^{(r)} \times \mathbf{h})_z = \frac{2\pi\omega a^2}{\kappa_v^2} \int_0^{\infty} k dk [f_0^2 (CE_0 \beta_{n+2} \varepsilon_0 \varepsilon_a r_p - CH_0 \mu_0 \gamma r_s) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} f_{\mu}^2 (CE_{\mu} CE_{-\mu} \beta_{n+2} \varepsilon_0 \varepsilon_a r_p - CH_{\mu} CH_{-\mu} \mu_0 \gamma r_s)], \quad (1.17)$$

где a – радиус сердцевины волновода,

$$f_{\mu} = [\kappa J_{\mu}(\kappa a) J_{\mu-1}(\kappa a) - k J_{\mu-1}(\kappa a) J_{\mu}(\kappa a)] (k^2 - \kappa^2)^{-1} \quad (k \neq \kappa),$$

$$f_{\mu} = 0.5a [J_{\mu}^2(\kappa a) - J_{\mu-1}(\kappa a) J_{\mu+1}(\kappa a)] \quad (k = \kappa),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\mathbf{e} \times \mathbf{h})_z = \quad (1.18)$$

$$= \frac{\pi\gamma\omega a^2}{\kappa^2} \left\{ (\varepsilon_0 \varepsilon_a CE_0^2 + \mu_0 CH_0^2) [J_0^2(\kappa a) + J_1^2(\kappa a) - 1] + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} (\varepsilon_0 \varepsilon_a CE_{\mu} CE_{-\mu} + \mu_0 CH_{\mu} CH_{-\mu}) \times [J_{\mu}^2(\kappa a) - J_{\mu-1}(\kappa a) J_{\mu+1}(\kappa a)] \right\}.$$

Выражения (1.14), (1.17), (1.18) дают итоговое решение дифракционной задачи для комплексных коэффициентов отражения мод волновода с полой сердцевинной, относящихся к спектральной компоненте импульса с частотой f .

2 Волноводный ТГц зонд как сенсор влажности кожи

Представленные ниже расчетные данные имеют цель оценки чувствительности волноводного ТГц сенсора влажности кожи. Они получены для модели кожи в виде двух слоев водного раствора альбумина. Для задания диэлектрической проницаемости слоев использована модель Бругемана [15]:

$$\varepsilon_{1,2} = 0.25(\sqrt{S^2 + 8\varepsilon_p \varepsilon_w} + S),$$

$$S = 3(1-C)(\varepsilon_p - \varepsilon_w) + 2\varepsilon_w - \varepsilon_p,$$

где C – объемная доля воды в растворе, а диэлектрические проницаемости воды (ε_w) и протеина (ε_p) вычисляются по эмпирическим формулам [15], [16]

$$\varepsilon_w = 2.5 + 75(1 + i19\pi f)^{-1} + 1.47(1 + i0.46\pi f)^{-1} + 32(28.09 - f^2 + i5.35f)^{-1},$$

$$\varepsilon_p = 4.185 - i0.598 - (0.805 + i0.766)(f - \bar{f}) - (0.179 - i0.751)(f - \bar{f})^2,$$

где $\bar{f} = 0.503$ ТГц, f берется в ТГц. Для дермы (слой 1) использовано фиксированное значение $C = 0.7$, а доля воды C в эпидермисе (слой 2) рассматривалась переменной. Такая модель оправдана с точки зрения диагностики некоторых кожных заболеваний [1]. При расчетах толщина эпидермиса полагалась равной $\Delta z_2 = 50$ мкм. Зондирование слоистой среды выполнено при помощи полого металлического волновода с сердцевинной кругового сечения радиуса $a = 900$ мкм (медицинская игла 13 калибра), заполненной сухим воздухом ($\varepsilon_a = 1$).

Исследованы спектры коэффициентов отражения основной H_{11} и первой высшей E_{11} мод, допускающих возбуждение ТГц фотоантенной, расположенной симметрично относительно входного торца волновода [3], [4], [7].

Для моды H_{11} $CE_{\mu} = 0$ при всех μ , $CH_{\mu} = 0$ при $|\mu| \neq 1$, $CH_1 = 1$, $CH_{-1} = -1$, а дисперсионное уравнение $J_0(\kappa a) = J_2(\kappa a)$ имеет решение $\kappa a = 1.8412$ [17]. Соответственно,

частота отсечки, на которой $\gamma = 0$, составляет $f_c = \kappa c(2\pi a)^{-1} = 0.098$ ТГц. Согласно (1.14), (1.17), (1.18), для данной моды

$$R = 2[J_0^2(\kappa a) - J_1^2(\kappa a)]^{-1} \int_0^\infty \kappa r_s f_1^2 dk. \quad (2.1)$$

Для моды E_{11} $CH_\mu = 0$ при всех μ , $CE_\mu = 0$ при $|\mu| \neq 1$, $CE_1 = 1$, $CE_{-1} = -1$, а дисперсионное уравнение $J_1(\kappa a) = 0$ имеет решение $\kappa_v a = 3.8317$ [17]. Частота отсечки данной моды $f_c = 0.203$ ТГц. Здесь, согласно (1.14), (1.17), (1.18)

$$R = 2[\gamma J_0^2(\kappa a)]^{-1} \int_0^\infty \kappa r_p \beta_{n+2} f_1^2 dk. \quad (2.2)$$

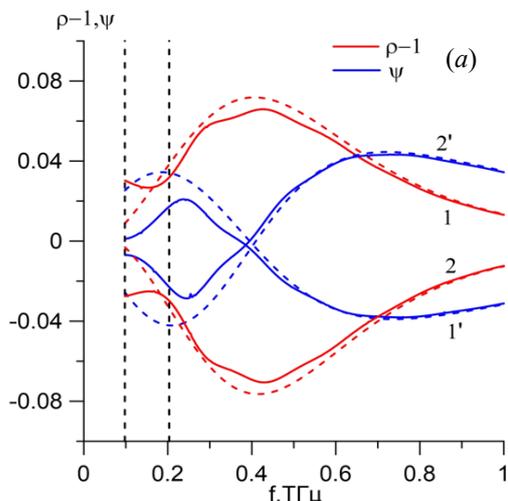
Заметим, что равномерная относительно f сходимость интегралов в (2.1) и (2.2) обеспечивается асимптотиками подынтегральных функций $O(1/k^5)$ и $O(1/k^3)$ при $k \rightarrow \infty$, соответственно.

На рисунке 2.1 сопоставлены спектры коэффициентов отражения мод H_{11} и E_{11} , рассчитанные на основании (2.1) и (2.2) при $C = 0.2$. На низких частотах ($f < 0.6$ ТГц) эти спектры существенно различаются, но по мере увеличения частоты они сближаются. Последний результат естественен, так как при высоких частотах обе рассматриваемые моды переходят в плоскую ТЕМ волну, нормально отражающуюся от слоистой среды.

На рисунке 2.2 приведены относительные спектры коэффициентов отражения мод, допускающие измерение методом TDS при условии селективного возбуждения мод. Для них

$$\rho = |R(C)/R(C_0)|, \quad \psi = \arg[R(C)/R(C_0)], \quad (2.3)$$

где C – текущая доля воды в эпидермисе, $C_0 = 0.2$ – доля воды в эпидермисе при записи



опорного спектра. Спектры (2.3) сопоставлены с относительными спектрами коэффициента отражения плоской волны, нормально падающей на слоистую среду. Для последних

$$\rho = |r_s(C)/r_s(C_0)|,$$

$$\psi = \arg[r_s(C)/r_s(C_0)],$$

где r_s рассчитывается по формуле (1.5) при условиях $\gamma = \beta_{n+2}$, $k = 0$.

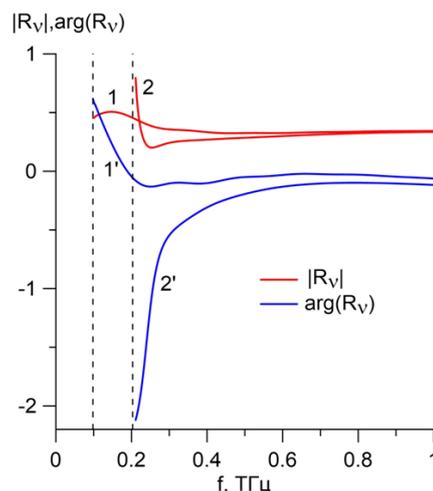


Рисунок 2.1 – Спектры коэффициентов отражения от кожи основной (1, 1') и первой высшей (2, 2') мод полого металлического волновода. Вертикальными штриховыми линиями отмечены частоты отсечки мод

Согласно рисунку 2.2, в области $f < 0.6$ ТГц чувствительность мод H_{11} и E_{11} к влажности эпидермиса заметно различается. Эта особенность затрудняет интерпретацию экспериментальных данных TDS [5], [7]. При $f > 0.6$ ТГц спектры отношений $R(C)/R(C_0)$ для обеих мод

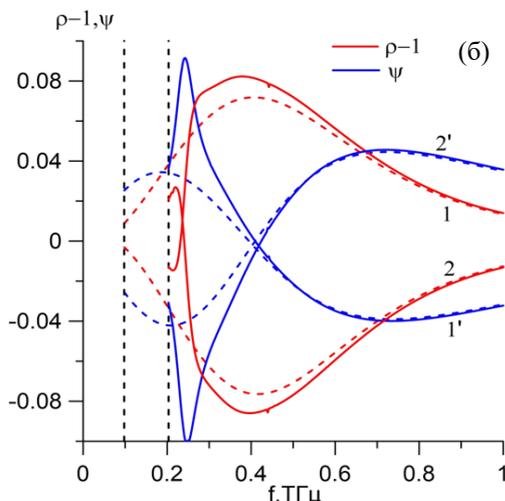


Рисунок 2.2 – Спектры относительных коэффициентов отражения мод H_{11} (а) и E_{11} (б) при $C = 0.3$ (1, 1') и $C = 0.1$ (2, 2'). Штриховые цветные кривые – плосковолновая модель

сближаются и практически совпадают со спектром отношения $r_s(C)/r_s(C_0)$. В этом диапазоне частот волновод ведет себя как объемная среда, вследствие чего в нем резко возрастают изгибные потери энергии, которые в ходе реальных измерений трудно предсказуемо влияют на данные TDS [1].

Таким образом, основной практический интерес для зондовых применений представляет диапазон частот, в котором волновод является одномодовым (на рисунке 2.2 этот диапазон ограничен вертикальными штриховыми линиями). Согласно представленным выше формулам, положение и ширина данного диапазона могут регулироваться выбором диаметра полой сердцевины волновода.

Рисунок 2.3 иллюстрирует чувствительность волноводного зонда к влажности эпидермиса на частоте $f = 0.15$ ТГц, являющейся центральной для диапазона одномодового режима работы волновода. Расчет выполнен по формулам (2.1), (2.3).

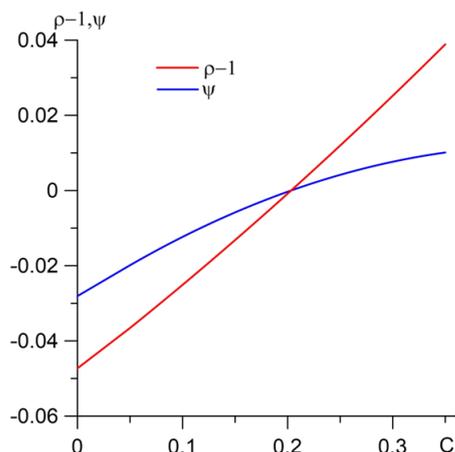


Рисунок 2.3 – Чувствительность одномодового волноводного зонда к влажности эпидермиса

Согласно рисунку 2.3, при диагностике влажности кожи методом TDS с использованием одномодового волноводного зонда предпочтительно ориентироваться на зависимость $\rho(C)$, которая в представляющем практический интерес диапазоне изменения влажности практически линейна и, по сравнению с зависимостью $\psi(C)$, более резко выражена.

Заключение

В приближении Кирхгофа получено аналитическое решение дифракционной задачи о расчете спектров амплитуд мод волноводного зонда при отражении ТГц импульса от торца волновода, контактирующего со слоистой средой. В рамках двухслойной модели кожи исследованы частотные характеристики отраженных сигналов, получаемых с помощью зонда в виде металлического

волновода кругового сечения. Установлено, что при использовании данного зонда в качестве сенсора влажности кожи, определяемой методом TDS, предпочтительно работать в том диапазоне частот, где волновод является одномодовым. В этом случае чувствительность амплитуды отраженного сигнала к влажности эпидермиса достаточна для использования в диагностических целях (рисунок 2.3). Найденный оптимальный диапазон частот (0.1–0.2 ТГц) доступен также для измерений СВЧ методами, где векторный анализатор цепей позволяет получить фазовую информацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doradla, P. Terahertz endoscopic imaging for colorectal cancer detection: Current status and future perspectives / P. Doradla, C. Joseph, R. Giles // World J Gastrointest Endosc. – 2017. – Vol. 9, № 8. – P. 346–358.
2. Terahertz biophotonics as a tool for studies of dielectric and spectral properties of biological tissues and liquids / O.A. Smolyanskaya [et al.] // Prog Quant Electron. – 2018. – Vol. 62. – P. 1–77.
3. Reducing transmission losses in hollow THz waveguides / O. Mitrofanov [et al.] // IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology. – 2011. – Vol. 1, № 1. – P. 124–132.
4. Terahertz wave transmission in flexible polystyrene-lined hollow metallic waveguides for the 2.5–5 THz band / M. Navarro-Cía [et al.] // Opt. Express. – 2013. – Vol. 21, № 20. – P.23748–23755.
5. Terahertz waveguides with low transmission losses: Characterization and applications / O. Mitrofanov [et al.] // Proc. of SPIE. – 2014. – Vol. 9199. – P. 91990I-1–91990I-8.
6. Ito, K. Analysis of transmission properties of terahertz hollow-core optical fiber by using time-domain spectroscopy and application for remote spectroscopy / K. Ito, T. Katagiri, Y. Matsuura // J. Opt. Soc. Am. B. – 2017. – Vol. 34, № 1. – P. 60–65.
7. Сотский, А.Б. Распространение терагерцевых импульсов в капиллярных волноводах с металлизированной границей / А.Б. Сотский, А.В. Шилов, Л.И. Сотская // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 6. – С. 803–811.
8. Eight-capillary cladding THz waveguide with low propagation losses and dispersion / M.M. Nazarov [et al.] // IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology. – 2018. – Vol. 8, № 2. – P. 183–191.
9. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 719 с.
10. Обратная задача волноводной спектроскопии при ограниченной призме связи / А.Б. Сотский [и др.] // Известия НАН Беларуси, сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 3. – С. 66–74.
11. Сотский, А.Б. Теория оптических волноводных элементов / А.Б. Сотский. – Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – 456 с.

12. Гончаренко, А.М. Основы теории оптических волноводов / А.М. Гончаренко, В.А. Карпенко. – Минск: Наука и техника, 1983. – 237 с.
 13. Снайдер, А. Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. – Москва: Радио и связь, 1987. – 656 с.
 14. Yeh, C. The essence of dielectric waveguides / C. Yeh, F. Shimabukuro. – Springer, 2008. – 522 p.
 15. Vinh, N.Q. Dielectric Spectroscopy of proteins as a quantitative experimental test of computational models of their low-frequency harmonic motions // J. Am. Chem. Soc. – 2011. – Vol. 133. – P. 8942–8947.
 16. Nazarov, M.M. Study of the dielectric function of aqueous solutions of glucose and albumin by THz time-domain spectroscopy / M.M. Nazarov, O.P. Cherkasova, A.P. Shkurinov // Quantum Electron. – 2016. – Vol. 46, № 6 – P. 488–495.
 17. Семенов, Н.А. Техническая электродинамика / Н.А. Семенов. – М.: Связь, 1972. – 478 с.
- Работа выполнена при поддержке БРФФИ (грант Ф18Р-143/1) и РФФИ (грант 18-52-00040).*
- Поступила в редакцию 16.10.19.*

УДК 621.383.51-048.24

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ ПО МОДЕЛЯМ ИХ ДЕГРАДАЦИИ

В.В. Хорошко¹, В.Ф. Гременок², Е.Н. Шнейдеров¹,
А.С. Терешкова¹, О.А. Аксенов¹, Н.М. Бруй¹

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

²Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению, Минск

POLYCRYSTALLINE SOLAR CELLS ELECTRICAL CHARACTERISTICS FORECASTING BASED ON THEIR DEGRADATION MODELS

V.V. Khoroshko¹, V.F. Gremenok², E.N. Shneiderov¹,
A.S. Tereshkova¹, O.A. Aksyonov¹, N.M. Bruj¹

¹Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

²Scientific and Practical Materials Research Centre of NAS Belarus, Minsk

Представлены результаты ускоренных испытаний полупроводниковых фотоэлектрических (солнечных) элементов (СЭ) класса В на основе поликристаллического кремния. Установлено, что автомодельность эксперимента соблюдается при температурах до 150–160° С и уровнях освещения до 2000 Вт/м². За 168 ч ускоренных испытаний относительная деградация КПД составила 5,8%. Установлена закономерность деградации коэффициента заполнения (ff) и тока короткого замыкания (I_{sc}) СЭ в начальный и конечный момент времени испытаний.

Ключевые слова: поликристаллические солнечные элементы, испытания, модели деградации, возобновляемые источники энергии.

In this paper we present the results of accelerated tests B class based solar cells. It is established that the self-similarity of the experiment is observed at temperatures up to 150–160° C and lighting levels up to 2000 W/m². During over 168 h of accelerated testing the relative degradation of efficiency was 5,8%. The pattern of degradation of the duty cycle (ff) and short-circuit current (I_{sc}) of the solar cells at the initial and final time points of the tests is established.

Keywords: polycrystalline solar cells, tests, degradation models, renewable energy sources.

«Солнце это неиссякаемый, абсолютно безопасный источник энергии, в равной степени всем принадлежащий и всем доступный».

Ж.И. Алфёров

Введение

Фотоэлектрическое преобразование солнечного излучения является одним из наиболее перспективных способов в альтернативной энергетике, т. к. позволяет напрямую преобразовывать энергию солнечного излучения в электроэнергию. Развитие солнечной энергетики в последние десятилетия это только подтверждает. Одной из важнейших составляющих эффективной работы модуля в составе солнечной электростанции (СЭС) является стабильность и прогнозируемость электрических характеристик элементов, составляющих модуль [1]. Построение достоверных моделей деградации («старения») солнечных элементов позволит в начальный момент времени судить о функционировании модулей в целом через длительный промежуток времени. На сегодняшний день около 95% рынка солнечных модулей составляют модули на основе моно или

поликристаллического кремния, что и обусловило выбор объекта исследования.

1 Эксперимент

Для эксперимента были выбраны поликристаллические солнечные элементы (СЭ) класса В с КПД 12,5%. Для проведения испытаний СЭ размерами 52×26 мм² располагались в печи на керамическом основании в соответствии со схемой, показанной на рисунке 1.1. Схематическое изображение установки для испытаний показано на рисунке 1.2. Для периодического контроля параметров СЭ от каждого элемента 2 контакта подключались к разъёму (8 на рисунке 1.2). Схематично подключение элементов к контактам показано на рисунке 1.3. На протяжении всех испытаний элементы были подключены к нагрузочной и измерительной схемам, сопротивление нагрузки было подобрано таким образом, чтобы элементы работали в точке максимальной мощности ВАХ (U_{mpp}). Перед проведением испытаний были проведены измерения характеристик элементов в условиях, эквивалентных 1000 Вт/м², все электрические характеристики были стабильными в пределах погрешности измерений, за

исключением тока короткого замыкания (I_{sc}), который изменялся в пределах 390–410 мА. Расчеты характеристик СЭ проводились по формулам (1.1), (1.2) [2]:

$$ff = \frac{U_{mpp} I_{mpp}}{U_{oc} I_{sc}}, \quad (1.1)$$

где U_{mpp} , I_{mpp} – напряжение и ток в точке максимальной мощности;

$$\eta = \frac{ff U_{oc} I_{sc}}{P}, \quad (1.2)$$

где η – КПД, P – мощность излучения, падающего на СЭ.

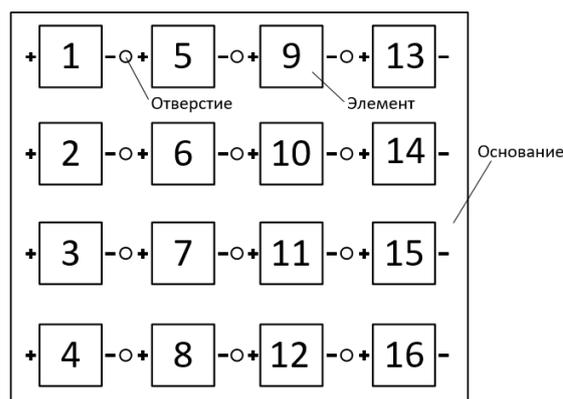
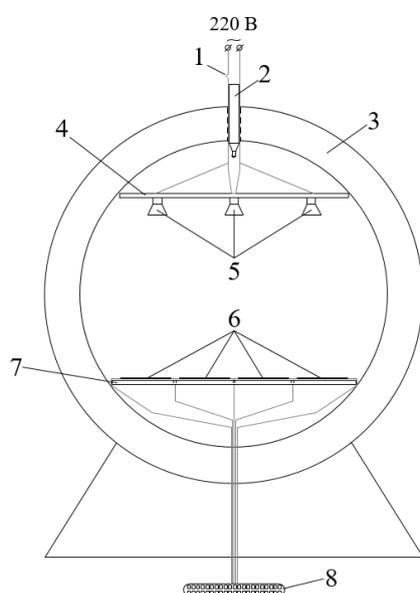


Рисунок 1.1 – Схема соединения СЭ



- 1 – Переключатели
- 2 – Ртутный термометр
- 3 – Печь
- 4 – Алюминиевая пластина
- 5 – Галогеновые лампы
- 6 – Фотоэлектрические элементы
- 7 – Керамическое основание
- 8 – Разъём

Рисунок 1.2 – Испытательная установка

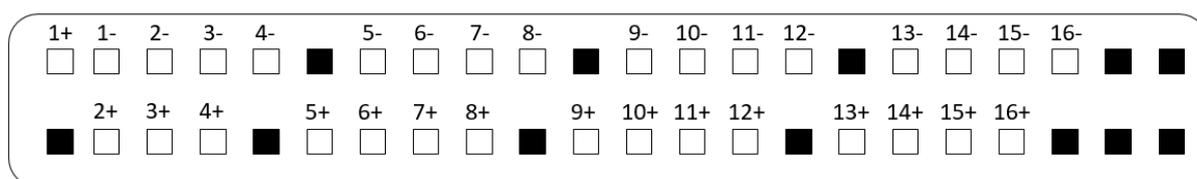


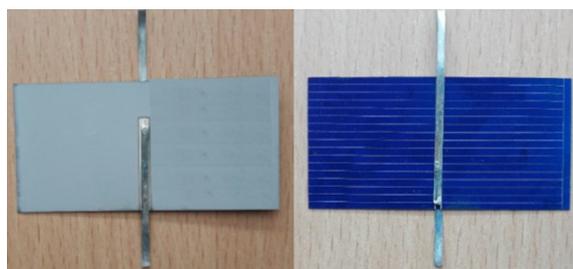
Рисунок 1.3 – Подключение элементов к разъему

Установка для проведения испытаний представляла собой печь с вмонтированными галогеновыми лампами. Схема расположения ламп обеспечивала равномерный уровень освещения. Типичный спектр излучения галогеновой лампы хорошо соответствует спектру солнечного излучения. Одновременно с уровнем освещения работа галогеновых ламп обуславливала температуру внутри печи. Уровень и однородность освещенности поверхности устанавливалась по току короткого замыкания (I_{sc}) эталонного СЭ, параметры которого измерены на имитаторе спектра солнечного излучения.

2 Результаты и их обсуждение

Для установления предельных режимов испытаний уровень освещенности изменялся от 1000 до 3000 Вт/м², а температура варьировалась от 120 до 180°С. При превышении температуры 180°С происходила частичная отпайка шин от контактных площадок (рисунок 2.1 а, б). При температурах испытаний до 150°С и последующим плавным охлаждением в течении двух часов до комнатной температуры (с целью исключения влияния на результат различных коэффициентов термического расширения) отслоения шин от контактных площадок не наблюдалось, однако усилие отрыва шины от СЭ снижалось более чем

в 2 раза, что коррелирует с данными по изучению ускоренного старения контактов [3].



а) – внешний вид СЭ до испытаний;



б) – вид контактных площадок до испытаний (слева) и после воздействия температуры испытаний 180° С (справа)

Рисунок 2.1 – Солнечные элементы 52×26 мм² до и после испытаний

Вторым фактором, ускоряющим «старение» СЭ, является уровень инсоляции. В процессе исследований происходило измерение ВАХ при различных эквивалентных уровнях освещенности: 500, 750, 1000, 1250, 1500, 2000 Вт/м². Уровень освещенности устанавливался по I_{sc} эталонного СЭ. Как известно, напряжение холостого хода (U_{oc}) СЭ сильно зависит от температуры, поэтому для исключения влияния повышенной температуры применялось охлаждение образцов в процессе измерений. Температура во всех измерениях контролировалась с помощью ИК пирометра и составляла 20–22° С. Для проведения испытаний были отобраны образцы с относительно близкими характеристиками (значение I_{sc} 395–401 мА). Среднеарифметические результаты измерений электрических характеристик образцов приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Результаты измерений

P_{nao} Вт / м ²	U_{oc} , мВ	I_{sc} , мА	ff	η , %
500	594	398	71,6	12,5
750	594	602	71,8	12,6
1000	596	810	72,2	12,5
1250	600	1020	71,5	12,3
1500	600	1240	65,5	11,4
2000	602	1605	58,2	10,4
3000	606	2410	52,6	9,4

Как видно из таблицы 2.1 увеличение напряжения холостого хода U_{oc} (незначительное) и тока короткого замыкания I_{sc} (линейное) соответствуют теории. Основной причиной падения КПД является уменьшение коэффициента запол-

нения ВАХ ff , из-за существенного уменьшения шунтирующего сопротивления R_{sh} по сравнению с относительно медленным падением последовательного сопротивления R_s . Относительное падение КПД при увеличении освещения с 500 Вт/м² до 3000 Вт/м² составило 32%. Дальнейшее увеличение мощности ещё более снижает КПД СЭ. Вероятнее всего это происходит из-за рекомбинации на границах зерен поликристаллических элементов, а также из-за наличия примесей в структуре СЭ. Полученные данные в целом совпадают с данными авторов [4], однако относительное падение ff в данной работе оказалось ниже, что обусловлено различными объектами исследования. Таким образом, предельным уровнем освещения для данного типа элементов является 2000 Вт/м².

Изменений спектральной фоточувствительности образцов до и после испытаний обнаружено не было (рисунок 2.2).

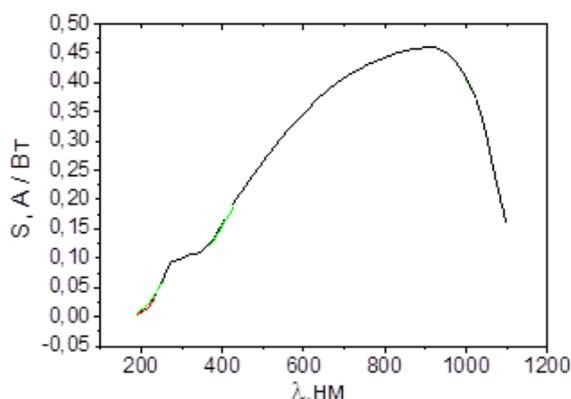


Рисунок 2.2 – Типичная спектральная чувствительность образцов

Были проведены ускоренные испытания СЭ в количестве 150 шт. в печи при температурах 150–155° С и эквивалентном уровне освещения 2000 Вт/м². Испытания проводились в течение 168 часов, а измерения проводились через каждые 56 часов. В таблице 2.2 приведены среднеарифметические значения основных электрических характеристик СЭ в указанные промежутки времени. Из данных видно, что деградация СЭ произошла преимущественно за счёт уменьшения ff и, незначительно, за счёт уменьшения I_{sc} . Таким образом, итоговое относительное снижение КПД относительно начального момента времени составило ~5,8%.

Таблица 2.2 – Результаты испытаний

Временной промежуток	Электрические характеристики СЭ			
	U_{oc} , мВ	I_{sc} , мА	ff , %	η , %
Через 56 ч	595	401	70,3	12,38
Через 112 ч	594	397	69,2	12,05
Через 168 ч	596	392	68,3	11,78

По результатам испытаний была установлена закономерность деградации ff и I_{sc} , проявляющаяся в наличии линейной корреляционной зависимости (коэффициент корреляции $\sim 0,9$) между его значением в начальный и конечный моменты времени.

Стоит отметить, что классическая гипотеза о нормальном распределении разброса параметра позволяет достоверно формировать модели лишь в начальный момент времени, когда коэффициент асимметрии не превышает 1% и, по-видимому, в течении небольшого периода наработки. При этом в конечный момент времени коэффициент асимметрии составил 8,2%.

Заключение

Таким образом, основными результатами работы можно считать следующие:

1. При проведении предварительных ускоренных испытаний СЭ установлено, что модельность эксперимента соблюдается при температурах испытаний до 150–160° С и одновременно при освещении до 2000 Вт/м². При температуре более 180° С наблюдается частичная отпайка шин от контактных площадок СЭ, а при уровнях освещения больших, чем 3000 Вт/м², для СЭ на основе поликристаллического кремния наблюдается падение КПД.

2. Ускоренные испытания показали, что за 168 ч ускоренных испытаний относительная деградация КПД составила 5,8% за счет изменений ff и I_{sc} .

3. Установлена закономерность деградации коэффициента заполнения ff и I_{sc} , проявляющаяся в наличии линейной корреляционной зависимости (коэффициент корреляции $\sim 0,9$) между его

значением в начальный и конечный моменты времени. При этом предварительный анализ данных деградации параметров показал, что для статистического анализа и построения вероятностных моделей деградации гипотеза о нормальном распределении параметра позволяет достоверно формировать модели лишь при незначительной наработке, когда коэффициент асимметрии не превышает 1%, а в момент окончания испытаний коэффициент асимметрии составил 8,2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jordan, D. Photovoltaic Degradation Rates – An Analytical Review / D. Jordan, S. Kurtz // Progress in Photovoltaics: Research and Applications. – January 2013. – Vol. 21, №1. – P. 12–29.

2. Гременок, В.Ф. Солнечные элементы на основе полупроводниковых материалов / В.Ф. Гременок, М.С. Тиванов, В.Б. Залесский. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2007. – 222 с.

3. Cracks in Solar Cell Metallization Leading to Module Power Loss under Mechanical Loads / J. Käsewiter, F. Haase, M.H. Larrodé, M. Köntges // Energy Procedia. – 2014. – Vol. 55. – P. 469–477.

4. Connell, E. Degradation of polycrystalline Si solar cell efficiency with increased incident optical power – Experiments and theory / E. Connell, A. Semichaevsky // 2016 IEEE 43rd Photovoltaic Specialists Conference (PVSC). – 2016.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований договор № Т19М-037.

Поступила в редакцию 29.10.19.

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННО σ -СУБНОРМАЛЬНЫМИ И σ -ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Н.М. Адарченко, А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH GENERALIZED σ -SUBNORMAL AND σ -PERMUTABLE SUBGROUPS

N.M. Adarchenko, A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University

На протяжении всей статьи все группы конечны, и G всегда обозначает конечную группу. Мы говорим, что подгруппа H из G почти модульна в G , если A нормальна в G или $H_G \neq H^G$ и каждый главный фактор H/K группы G между H_G и H^G является почти центральным в G , то есть $|H/K \parallel GC_G(H/K)|$ делит pq для некоторых простых чисел p и q . Мы говорим, что подгруппа A группы G является:

- (i) почти σ -субнормальной в G , если $A = \langle L, T \rangle$, где L является почти модульной подгруппой и T является σ -субнормальной подгруппой в G ;
- (ii) почти σ -перестановочной в G , если $A = \langle L, T \rangle$, где L – почти модульная подгруппа и T является σ -перестановочной подгруппой G .
- (iii) слабо σ -перестановочной в G , если в G имеется почти σ -перестановочная подгруппа S и подгруппа T такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq S \leq H$.

В данной статье изучаются конечные группы с некоторыми системами почти σ -субнормальных, почти σ -перестановочных и слабо σ -перестановочных подгрупп. Обобщены некоторые известные результаты.

Ключевые слова: конечная группа, n -максимальная подгруппа, почти σ -субнормальная подгруппа, почти σ -перестановочная подгруппа, почти σ -нильпотентная группа.

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. We say that a subgroup H of G is nearly modular in G if either A is normal in G or $H_G \neq H^G$ and every chief factor H/K of G between H_G and H^G is nearly central in G , that is, $|H/K \parallel G/C_G(H/K)|$ divides pq for some primes p and q . We say that a subgroup A of G is:

- (i) nearly σ -subnormal in G if $A = \langle L, T \rangle$, where L is a nearly modular subgroup and T is a σ -subnormal subgroup of G ;
- (ii) nearly σ -permutable in G if $A = \langle L, T \rangle$, where L is a nearly modular subgroup and T is a σ -permutable subgroup of G .
- (iii) weakly σ -permutable in G if there are a nearly σ -permutable subgroup S and a subgroup T of G such that $G = HT$ and $H \cap T \leq S \leq H$.

In the given paper, we study finite groups with some systems of nearly σ -subnormal, nearly σ -permutable and weakly σ -permutable subgroups. Some known results are generalized.

Keywords: finite group, n -maximal subgroup, nearly σ -subnormal subgroup, nearly σ -permutable subgroup, σ -nearly nilpotent group.

Mathematics Subject Classification (2010): 20D10, 20D20, 20D30, 20D35.

1 The concepts and results

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group.

We say that: a chief factor H/K of G is nearly central in G if $|H/K \parallel G/C_G(H/K)|$ divides pq for some primes p and q ; a subgroup H of G is nearly modular in G if either A is normal in G or $H_G \neq H^G$ and every chief factor of G between H_G and H^G is nearly central in G .

In what follows, σ is some partition of \mathbb{P} [1], that is, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$.

We say that a chief factor H/K is: σ -central in G if $|H/K \parallel G/C_G(H/K)|$ is σ -primary; nearly σ -central in G if H/K is either σ -central or nearly central in G .

A set \mathcal{H} of subgroups of G is a complete Hall σ -set of G [2], [3] if every member $\neq 1$ of \mathcal{H} is a Hall σ_i -subgroup of G for some $\sigma_i \in \sigma$ and \mathcal{H} contains exactly one Hall σ_i -subgroup of G for all i ; G is said to be σ -full if G possesses a complete Hall σ -set.

A subgroup A of G is called [1]: σ -subnormal in G [1] if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, t$; σ -permutable in G if G is σ -full and A permutes with all Hall σ_i -subgroups of G for all i .

The σ -subnormal and σ -permutable subgroups proved to be very useful and found many applications in the study of various classes of generalized solvable groups (see, for example, the papers [1]–[13]). In this paper, we consider the following generalizations of these two concepts.

Definition 1.1. We say that a subgroup A of G is:

(i) *nearly σ -subnormal* (respectively *nearly subnormal*) in G if $A = \langle L, T \rangle$, where L is a nearly modular subgroup and T is a σ -subnormal (respectively subnormal) subgroup of G ;

(ii) *nearly σ -permutable* (respectively *nearly S -permutable*) in G if $A = \langle L, T \rangle$, where L is a nearly modular subgroup and T is a σ -permutable (respectively an S -permutable) subgroup of G ;

(iii) *weakly σ -permutable* (respectively *weakly S -permutable*) in G if there are a nearly σ -permutable (respectively a nearly S -permutable) subgroup S and a subgroup T of G such that $G = HT$ and $H \cap T \leq S \leq H$.

Example 1.2. Let p, q, r, t be distinct primes, where q divides $p-1$ and T divides $r-1$. Let $V = Q \rtimes C_p$, where q is a simple $\mathbb{F}_q C_p$ -module which is faithful for C_p . $C_r \rtimes C_t$ a non-abelian group of order rt .

(i) Let $G = (Q \rtimes C_p) \times (C_r \rtimes C_t)$. Let B be a subgroup of order q in Q . Then $B < Q$ since $p > q$. Let $H = \langle C_r, B \rangle$. Then A is nearly modular in G , so H is nearly subnormal in G . Assume that H is nearly modular in G . Then $B = H \cap (Q \rtimes C_p)$ is nearly modular in $(Q \rtimes C_p)$ by Lemma 2.8 (4) in [15]. Hence q is cyclic. This contradiction shows that H is not nearly modular in G . Similarly, if H is subnormal in G , then $C_t = H \cap (C_r \rtimes C_t)$ is subnormal in $C_r \rtimes C_t$ and so C_t is normal in $C_r \rtimes C_t$. But then $C_r \rtimes C_t$ is abelian. This contradiction shows that H is not subnormal in G .

(ii) Now, let p be a simple $\mathbb{F}_p V$ -module which is faithful for V and $G = (P \rtimes (Q \rtimes C_p)) \times (C_r \rtimes C_t)$. Since q divides $p-1$, pq is supersoluble. Hence for some normal subgroup B of pq we have $1 < B < P$. Then for every Sylow p -subgroup G_p of G we have $B \leq P \leq G_p$, so $BG_p = G_p = G_p B$. On the other hand, for every Sylow q -subgroup Q^x of G we have $Q^x \leq PQ$, so $BQ^x = Q^x B$. Hence B is S -permutable in G . It is clear that C_t is nearly modular in G .

Then $H = \langle A, B \rangle$ is nearly S -permutable in G . Moreover, H is neither nearly modular nor S -permutable in G .

We say that G is: *nearly σ -nilpotent* if every non-frattini chief factor H/K of G (that is, $H/K \not\leq \Phi(G/K)$) is nearly σ -central in G , *strongly supersoluble* if G is supersoluble and G induces on any its chief factor H/K an automorphism group of square free order.

Recall that if

$$M_n < M_{n-1} < \dots < M_1 < M_0 = G, \quad (1.1)$$

where M_i is a maximal subgroup of M_{i-1} for all $i = 1, \dots, n$, then the chain (1.1) is said to be a *maximal chain of G of length n* and M_n ($n > 0$), is an *n -maximal subgroup of G* .

Our first observation is the following

Theorem 1.3. (i) *If in every maximal chain $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G , of length 3, at least one of the subgroups $M_3, M_2,$ or M_1 is nearly σ -subnormal in G , then G is σ -soluble.*

(ii) *If every 2-maximal subgroup of G is σ -permutable, then G is either σ -nilpotent or supersoluble.*

(iii) *If every 2-maximal subgroup of G is nearly S -permutable in G , then G is a nearly nilpotent group. Hence G is strongly supersoluble.*

Corollary 1.4 (Spencer [16]). *If in every maximal chain $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G , of length 3, at least one of the subgroups $M_3, M_2,$ or M_1 is subnormal in G , then G is soluble.*

Corollary 1.5 (Agrawal [17]). *If every 2-maximal subgroup of G is S -permutable in G , then G is supersoluble.*

Corollary 1.6 (Huppert [18]). *If every 3-maximal subgroup of G is normal in G , then G is soluble.*

Corollary 1.7 (Guo, Skiba in [13]). *If in every maximal chain $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G , of length 3, at least one of the subgroups $M_3, M_2,$ or M_1 is σ -subnormal in G , then G is σ -soluble.*

A subgroup M of G is called *modular* if M is a modular element (in the sense of Kurosh [19, 2, p. 43]) of the lattice $\mathcal{L}(G)$ of all subgroups of G , that is,

(i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ for all $X \leq G, Z \leq G$ such that $X \leq Z$, and

(ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ for all $Y \leq G, Z \leq G$ such that $M \leq Z$.

From Theorem 5.2.5 in [19] it follows that every modular subgroup of G is also nearly modular in G . Hence we get from Theorem 1.3 (iii) the following known result.

Corollary 1.8 (Schmidt [20]). *If every 2-maximal subgroup M of G is modular, then G is nearly nilpotent.*

Theorem 1.9. Suppose that G is not σ -nilpotent. Then every maximal chain of length 2 in G includes a proper nearly σ -subnormal subgroup of G if and only if G is either nearly σ -nilpotent or a Schmidt group (that is, a non-nilpotent group all of which subgroups are nilpotent) with abelian Sylow subgroups.

In the case when $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ we get from Theorem 1.9 the following known results.

Corollary 1.10 (See Theorem A in [21]). Suppose that G is not nilpotent. Then every maximal chain of length 2 in G includes a proper subgroup H of G of the form $M = \langle A, B \rangle$, where A is modular and B is subnormal in G , if and only if G is either nearly nilpotent or a Schmidt group with abelian Sylow subgroups.

Corollary 1.11 (Schmidt [20]). If every 2-maximal subgroup M of G is modular, then G is nearly nilpotent.

Note that Theorems 1.3 and 1.9 are the basis in the proofs of all other results of this paper. In particular, being based on these results we obtain the following result.

Theorem 1.12. Suppose that G is soluble and every n -maximal subgroup of G is nearly S -permutable in G . If $n \leq |\pi(G)|$, then G is strongly supersoluble and G induces on any its non-Frattini chief factor H/K an automorphism group of order dividing $p_1 \cdots p_m$, where $m \leq n$ and p_1, \dots, p_m are distinct primes.

The example of the alternating group A_4 of degree 4 shows that the restrictions on $|\pi(G)|$ in Theorem 1.12 cannot be weakened.

Corollary 1.13 (See Theorem B in [21]). Suppose that G is soluble and every n -maximal subgroup M of G is of the form $M = \langle A, B \rangle$, where A is modular and B is S -permutable in G . If $n \leq |\pi(G)|$, then G is strongly supersoluble and G induces on any its non-Frattini chief factor H/K an automorphism group of order dividing $p_1 \cdots p_m$, where $m \leq n$ and p_1, \dots, p_m are distinct primes.

We prove also the following results.

Theorem 1.14. Let E be a normal subgroup of G and let p be a Sylow p -subgroup of E such that $(p-1, |E|) = 1$. If either all maximal subgroups of p are weakly S -permutable in G or every cyclic subgroup of p of order p and order 4 (if $p = 2$ and p is non-abelian) are weakly S -permutable in G , then E is p -nilpotent and $E/O_p(E)$ is hypercyclically embedded in G .

Theorem 1.15. Let E be a normal subgroup of G . If every cyclic subgroup of E of prime odd order is weakly S -permutable in G , then $E/O_2(E)$ is hypercyclically embedded in G .

Theorem 1.16. Let E be a normal subgroup of G . Suppose that for any non-cyclic Sylow subgroup

p of E every maximal subgroup of p or every cyclic subgroup of p with prime order and order 4 (in the case when p is a non-abelian 2-group) are weakly S -permutable in G . Then E is hypercyclically embedded in G .

2 Proofs of the results

Proof of Theorem 1.3. (i) Suppose that this assertion is false and let G be a counterexample of minimal order.

(1) The group G/R is σ -soluble for every minimal normal subgroup R of G . Hence R is the unique minimal normal subgroup of G and R is not σ -primary. Assume that this is false. Then G/R is not nilpotent, so G/R has a Schmidt subgroup H/R . Then H/R is soluble by Lemma 2.12 in [15], so $H < G$. Moreover, from Lemma 2.12 in [15] it follows that for every prime p dividing $|H/R|$ and for every Sylow p -subgroup p of H/R it follows that p is contained in some 2-maximal subgroup of G/R . Hence R is contained in some 3-maximal subgroup of G . Now let

$$M_3/R < M_2/R < M_1/R < M_0/R = G/R$$

be any maximal of G of length 3. Then $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ is a maximal chain in G of length 3 and so for some i the subgroup M_i nearly σ -subnormal in G by hypothesis. But then M_i/R is nearly σ -subnormal in G/R by Lemma 2.11 (1) in [15]. Therefore the hypothesis holds for G/R , so the choice of G implies that G/R is σ -soluble. Hence the choice of G implies that R is the unique minimal normal subgroup of G and R is not σ -primary. Hence Claim (1) holds.

From Claim (1) it follows that R is not abelian. Let p be any odd prime dividing $|R|$ and R_p a Sylow p -subgroup of R . Let G_p be a Sylow p -subgroup of G such that $R_p = G_p \cap R$. Then $G_p \leq N_G(R_p)$. Moreover, the Frattini argument implies that $G = RN_G(R_p)$. Hence there is a maximal subgroup M of G such that $G_p \leq N_G(R_p) \leq M$ and $G = RM$. Then $M \neq M_G = 1$ by Claim (1).

(2) The subgroup M is not nearly σ -subnormal in G . Indeed, suppose that $M = \langle A, B \rangle$, where A is some nearly modular subgroup of G and B is a σ -subnormal subgroup of G . Suppose that $A = 1$, that is, $M = B$ is a σ -subnormal subgroup of G . Then there is a subgroup chain

$$M = M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_r = G$$

such that either $M_{i-1} \trianglelefteq M_i$ or $M_i/(M_{i-1})_{M_i}$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, r$. But M is a maximal subgroup of G and so, in fact, $M = M_{r-1}$ is not normal in G . Hence $G \cong G/M_G = G/1$ is σ -primary,

so G is σ -soluble. This contradiction shows that $A \neq 1$. On the other hand, $A_G \leq M_G = 1$ and $A^G / A_G \leq Z_{n\infty}(G / A_G)$. Hence $R \leq A^G \leq Z_{n\infty}(G)$ by Claim (1). But then R is abelian since every chief factor of G below $Z_{n\infty}(G)$ is soluble by Lemma 2.7 in [15]. This contradiction completes the proof of the claim.

(3) *The subgroup $D = M \cap R$ is not nilpotent. Hence $D \not\leq \Phi(M)$ and $|D|$ is not a prime power.* Assume that D is nilpotent. Note that

$$R_p = G_p \cap R \leq M \cap R = D,$$

so R_p a Sylow p -subgroup of D . Then R_p is characteristic in D and so it is normal in M . Hence $Z(J(R_p))$ is normal in M . Since $M_G = 1$, it follows that $N_G(Z(J(R_p))) = M$ and so $N_R(Z(J(R_p))) = D$ is nilpotent. This implies that R is p -nilpotent by Glauberman-Thompson's theorem on the normal p -complements [22, Chapter 8, Theorem 3.1]. But then R is a p -group, a contradiction. Hence we have (3).

(4) $R < G$. Indeed, suppose that $R = G$ is a simple non-abelian group. Let p be a Sylow p -subgroup of G , where p is the smallest prime dividing $|G|$, and let L be a maximal subgroup of G containing p . Then, in view of [23, IV, Satz 2.8], $|P| > p$. Let V be a maximal subgroup of p .

If $|V| = p$, then p is abelian, so $1 < V < P < L$ by [23, IV, Satz 7.4]. On the other hand, in the case when $|V| > p$ we have $1 < W < V < P < G$, where W is a maximal subgroup of V . Hence there is a 3-maximal subgroup E of G such that $E \neq 1$. But then some proper non-identity subgroup H of G is nearly σ -subnormal in G by hypothesis. Hence $H = \langle A, B \rangle$ for some nearly modular subgroup A and some σ -subnormal subgroup B of G . Assume that $A \neq 1$. Then $A_G = 1$ and $A^G = G \leq Z_{n\infty}(G)$. Therefore G is soluble, a contradiction.

Therefore $A = 1$, so $H = B$ is σ -subnormal in G . Then there is a subgroup chain

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$$

such that either $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ or $H_i / (H_{i-1})_{H_i}$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, n$. Without loss of generality, we can assume that $M = A_{n-1} < G$. Then $M_G = 1$ since $G = R$ is simple, so $G \simeq G/1$ is σ -primary. This contradiction shows that we have (4).

(5) M is σ -soluble. If the identity subgroup 1 of M is either maximal or 2-maximal in M , it is clear. Now let $L < T < M$, where L is a maximal subgroup of T and T is a maximal subgroup of M . Since M is not nearly σ -subnormal in G by Claim (2), either L or T is nearly σ -subnormal in G and so it is nearly σ -subnormal in M by Lemma 2.11 (2) in [15]. Hence the hypothesis holds for M , so M is σ -soluble by the choice of G .

(6) $M = D \rtimes T$, where T is a maximal subgroup of M of prime order. In view of Claim (3), there is a maximal subgroup T of M such that $M = DT$. Then $G = RM = R(DT) = RT$ and so, in view of (4), $T \neq 1$. Assume that $|T|$ is not a prime and let V be a maximal subgroup of T . Then $V \neq 1$. Since M is not nearly σ -subnormal in G , at least one of the subgroups T or V is nearly σ -subnormal in G by hypothesis. Claim (5) implies that both subgroups V and T are σ -soluble. Consider, for example, the case when V is nearly σ -subnormal in G , that is, $V = \langle A, B \rangle$ for some nearly modular subgroup A and some σ -subnormal subgroup B of G . Note that B is also σ -soluble, so in the case when $B \neq 1$ we get that $O_{\sigma_i}(V) \neq 1$ for some i . But $O_{\sigma_i}(B) \leq O_{\sigma_i}(G)$ by Lemma 2.10 (5) in [15], so $O_{\sigma_i}(G) \neq 1$, which implies that R is σ -primary by Claim (1), a contradiction.

Therefore $B = 1$, that is, $V = A$ is nearly modular in G . It is clear that $A_G = 1$ and hence $1 < A^G = V^G \leq Z_{n\infty}(G)$, which implies that $R \leq Z_{n\infty}(G)$. But then R is abelian, a contradiction. Hence $|T|$ is a prime, so $M = D \rtimes T$.

Final contradiction for (i). Since T is a maximal subgroup of M and it is cyclic, M is soluble by [23, IV, Theorem 7.4] and so $|D|$ is a prime power, contrary to Claim (3). Hence Assertion (i) is true.

(ii) Suppose that this assertion is false and let G be a counterexample of minimal order. Then G is neither σ -nilpotent nor supersoluble but every maximal subgroup M of G is σ -nilpotent. Indeed, if T is a maximal subgroup of M , then T is σ -permutable in G , so T is σ -subnormal in G by [1, Theorem B]. Hence T is σ -subnormal in M by Lemma 2.10 (1) in [15]. Hence every maximal subgroup of M is T is σ -subnormal in M , so M is σ -nilpotent by Proposition 2.3 in [1].

Therefore G is an \mathfrak{N}_σ -critical group, so G is a Schmidt group by Lemma 2.13 in [15]. Hence, in view of Lemma 2.12 in [15], $G = P \rtimes Q$, where $P = G^\sigma$ is a Sylow p -subgroup of G and $Q = \langle x \rangle$ is a cyclic Sylow q -subgroup of G . Moreover, $\Phi(P)\langle x^q \rangle \leq \Phi(G)$, p is of exponent p or exponent 4 if p is a non-abelian 2-group and $P/\Phi(P)$ is a non-central chief factor of G . It is clear that $M = \Phi(P)Q$ is a maximal subgroup of G and p is the Hall σ_i -subgroup of G and q is a Hall σ_j -subgroup of G for some $p \in \sigma_i$ and $q \in \sigma_j$. Moreover, $Q^G = G$ since $P = G^\sigma$.

First assume that $\Phi(P) \neq 1$ and let V be a maximal subgroup of M containing q . Then V is 2-maximal in G , so it is σ -permutable in G .

It follows that $G = Q^G \leq V < G$, a contradiction. Hence $\Phi(P) = 1$, so p is a minimal normal subgroup of G and hence q is a maximal subgroup of G . Since G is not supersoluble for a maximal subgroup W of p we have $W \neq 1$ and $W\langle x^q \rangle$ is a 2-maximal subgroup of G . Hence

$$W\langle x^q \rangle Q = QW\langle x^q \rangle,$$

which implies that p is not a minimal normal subgroup of G . This contradiction completes the proof of Statement (ii).

(iii) First note that G is soluble by Part (i). Therefore, in view of Proposition 2.18 in [15], we need only to show that for every maximal subgroup M of G we have $G/M_G \in \mathfrak{N}_n$.

If $M_G \neq 1$, then the choice of G and Lemma 2.15 (2) in [15] imply that $G/M_G \in \mathfrak{N}_n$. Now assume that $M_G = 1$, so there is a minimal normal subgroup R of G such that $G = R \rtimes M$ and $R = C_G(R) = O_p(G)$ for some prime p by [24, Chapter A, Theorem 15.6]. Lemma 2.16 (1) in [15] implies that $|M| = q$ for some prime q and hence R is a maximal subgroup of G . Then, by Lemma 2.16 (2) in [15], $|R| = p$, which implies that $|G| = pq$. Hence $G \cong G/M_G$ is nearly nilpotent, so the Statement (iii) holds. \square

Proof of Theorem 1.9. Necessity. First suppose that G is not nearly σ -nilpotent and every maximal chain of length 2 in G includes a proper nearly σ -subnormal subgroup of G . We show that in this case G is a Schmidt group with abelian Sylow subgroups. First note that, by Proposition 4.2 in [15], for some maximal subgroup M of G we have $G/M_G \notin \mathfrak{N}_{n\sigma}$, so M is not nearly σ -subnormal in G by Lemma 2.11 (5) in [15]. Then every maximal subgroup V of M is nearly σ -subnormal in G by hypothesis. Therefore, if M has two different maximal subgroups V and W , then $M = \langle V, W \rangle$ is nearly σ -subnormal in G by Lemma 2.11 (4) in [15], so M possesses the unique maximal subgroup and hence M is a cyclic Sylow q -subgroup of G for some prime q . In view [23, IV, Satz 7.4], G is soluble.

Suppose that $M_G \neq 1$ and let R be a minimal normal subgroup of G contained in M_G . Then $R \leq Z(G)$, since $M \leq C_G(R)$ and M is a maximal subgroup of G which is clearly not normal in G . In view of Lemma 2.11 (1) in [15], the hypothesis holds for G/R , so G/R is either nearly σ -nilpotent or a Schmidt group with abelian Sylow subgroups. In the former case we have

$$G/M_G \cong (G/R)/(M_G/R) \in \mathfrak{N}_n$$

by Proposition 4.2. But then M is nearly σ -subnormal in G by Lemma 2.11 (6) in [15], contrary to our assumption on M , and so we have the second case.

Therefore, if V/R is any maximal subgroup of G/R , then V/R is nilpotent and hence V is nilpotent since $R \leq Z(G)$. Therefore every maximal subgroup of G containing R is nilpotent. Note also that if for some maximal subgroup V of G we have $G = RV$, then $M = R(M \cap V)$ and so $M \cap V = 1$ since M is cyclic q -group. But then $M = R$ is normal in G , a contradiction. Therefore $R \leq \Phi(G)$. Thus G is a Schmidt group. From Lemma 2.12 in [15] it follows that $G/R = (PR/R) \rtimes (M/R)$, where: $P \cong PR/R = (G/R)G^{\sigma}$ is a Sylow p -subgroup of G/R and p is a Sylow o -subgroup of G ; M/R is a Sylow q -subgroup of G/R . Therefore all Sylow subgroups of G are abelian.

Now assume that $M_G = V_G = 1$. Then $G = R \rtimes M$, where $R = C_G(R)$ is a minimal normal subgroup of G [24, Chapter A, Theorem 15.2]. It is clear also that $R = G^{\sigma}$. By hypothesis, $V = AB$ for some nearly modular subgroup A and σ -subnormal subgroup B of G . But since M is a cyclic Sylow subgroup of G , then we have that either $V = A$ or $V = B$.

First assume that $V = A$. Then

$$RV = V^G \leq Z_{n\sigma}(G),$$

which implies that $R/1$ is nearly central in G by Lemma 2.7 in [15]. Hence

$$|G| = |R| |G/C_G(R)| = |R| |G/R|$$

divides pq for some primes p and q . Therefore G is either nearly σ -nilpotent or a Schmidt group with abelian Sylow subgroups.

Now consider the case when $V = B$ is σ -subnormal in G . Since G is not nearly σ -nilpotent, it is not σ -primary. Hence, in fact, $V = B$ is subnormal in G , then

$$V^G = V^{RM} = V^M \leq M_G = 1$$

by [24, Chapter A, Theorem 14.3] and so $|M| = q$, which implies that G is a Schmidt group with abelian Sylow subgroups, contrary to our assumption on G . This contradiction completes the proof of the necessity of the condition of the theorem.

Sufficiency. If G is nearly σ -nilpotent, then every maximal subgroup of G is nearly σ -subnormal in G by Lemma 2.11 (6) in [15]. Finally, if G is a Schmidt group with abelian Sylow subgroup, then $G = R \rtimes M$, where R is a minimal normal subgroup of G and M_G is the maximal subgroup of M by Lemma 2.12 in [15]. Hence every 2-maximal subgroup of G is subnormal and so nearly σ -subnormal in G . \square

Proof of Theorem 1.12. Assume this theorem is false and let G be a counter example of minimal order.

I. First we show that G is strongly supersoluble. Suppose that this is false. Let R be a minimal normal subgroup of G .

(1) G/R is strongly supersoluble. Hence G is primitive and so $R \not\leq \Phi(G)$ and

$$R = C_G(R) = O_p(G)$$

for some prime p . Lemma 2.15 (2) in [15] implies that the hypothesis holds for G/R , so the choice of G implies that G/R is strongly supersoluble. Therefore, again by the choice of G , R is the unique minimal normal subgroup of G and $R \not\leq \Phi(G)$ by Theorem A in [25]. Hence G is primitive and so

$$R = C_G(R) = O_p(G)$$

for some prime p by [24, Chapter A, 15.6].

(2) Every maximal subgroup M of G is strongly supersoluble. By hypothesis every $(n-1)$ -maximal subgroup T of M is nearly S -permutable in G . Hence T is nearly S -permutable in M by Lemma 2.15 (3) in [15]. Since the solubility of G implies that either $|\pi(M)| = |\pi(G)|$ or $|\pi(M)| = |\pi(G)| - 1$, the hypothesis holds for M . It follows that M is strongly supersoluble by the choice of G .

(3) G is supersoluble. Suppose that this is false. Since every maximal subgroup M of G is strongly supersoluble by Claim (2), G is an \mathcal{U} -critical group. Then Lemma 2.19 (1) in [15] yields that $|\pi(G)| = 2$ or $|\pi(G)| = 3$. But in the former case G is strongly supersoluble by Theorem 1.5 (iii), so $|\pi(G)| = 3$ and every 3-maximal subgroup of G is nearly S -permutable in G . Claim (1) and Lemma 2.15 (3) in [15] imply that $G = R \rtimes S$, where S is a Miller – Moreno group. Moreover, since $|\pi(S)| = 2$ and S is strongly supersoluble by Claim (2), S is not nilpotent and so $S = Q \rtimes T$, where $|Q| = q$, $|T| = t$ and $C_S(Q) = Q$ for some distinct primes q and T . Hence R is a 2-maximal subgroup of G , so every maximal subgroup of R is nearly S -permutable in G . Therefore G is supersoluble by Lemma 2.16 (2) in [15].

Final contradiction for I. From Claims (1) and (3) we get that for some maximal subgroup M of G we have $G = R \rtimes M = C_G(R) \rtimes M$ and $|R| = p$, so M is cyclic. Since G is not strongly supersoluble, for some prime q dividing $|M|$ and for the Sylow q -subgroup Q of M we have $|Q| > q$. First assume that $RQ \neq G$, and let $RQ \leq V$, where V is a maximal subgroup of G . Then V is strongly supersoluble by Claim (2). Hence $C_G(R) \neq 1$, contrary to $R = C_G(R)$. Hence $RQ = G$ and so $|\pi(G)| = 2$. Therefore G is strongly supersoluble by Theorem 1.3, a contradiction. Thus we have I.

II. Now we show that G induces on any its non-Frattini chief factor H/K an automorphism group $G/C_G(H/K)$ of order dividing $p_1 \cdots p_m$, where $m \leq n$ and p_1, \dots, p_m are distinct primes.

Let M be a maximal subgroup of G such that $K \leq M$ and $MH = G$. Then

$$G/M_G \cong (H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$$

by Lemma 2.19 in [15]. If $M_G \neq 1$, the choice of G implies that $m \leq n$. Now suppose that $M_G = 1$, so $G = H \rtimes M$, where $|H|$ is a prime and $H = C_G(H)$. Then, by Claim I, M is a cyclic group of order dividing $p_1 \cdots p_m$ for some distinct primes p_1, \dots, p_m . Assume that $n < m$. Then G has an n -maximal subgroup T such that $T \leq M$ and $|T|$ is not a prime, contrary to Lemma 2.16 (1) in [15]. Thus we have II. \square

Proof of Theorem 1.14. Suppose that this theorem is false and consider a counter example (G, E) for which $|G| + |E|$ is minimal. Let $Z = Z_{n^\infty}(G)$.

(1) If R is a normal p' -subgroup of G , then the hypothesis hold for $(G/R, ER/R)$. First note that $PR/R \cong P$ is a Sylow p -subgroup of ER/R , and if V/R is a subgroup of PR/R , then for a Sylow p -subgroup W of V we have $V/R = WR/R$. Moreover, if V/R is a maximal subgroup of PR/R , then $|P:W| = p$ and so W is a maximal subgroup of p . On the other hand, if V/R is a cyclic subgroup of PR/R of order p or order 4, then W is a cyclic subgroup of p of order p (respectively of order 4) since $W \cong V/R$. Hence the hypothesis holds for $(G/R, ER/R)$ by Lemma 2.2 (1) in [26].

(2) $O_{p'}(G) = 1$. Assume that $O_{p'}(G) \neq 1$, and let R be a minimal normal subgroup of G contained in $O_{p'}(G)$. Then the hypothesis holds for $(G/R, ER/R)$ by Claim (1), so

$$(ER/R)/O_{p'}(ER/R)$$

is hypercyclically embedded in G/R and

$$ER/R \cong E/(E \cap R)$$

is p -nilpotent. Hence E is p -nilpotent and from

$$\begin{aligned} (ER/R)/O_{p'}(ER/R) &= \\ = (ER/R)/(O_{p'}(ER)/R) &= \\ = (ER/R)/(O_{p'}(E)R/R) & \end{aligned}$$

and from the G -isomorphisms

$$\begin{aligned} (ER/R)/(O_{p'}(E)R/R) &\cong ER/O_{p'}(E)R \cong \\ &\cong E/(E \cap O_{p'}(E)R) = \\ &= E/O_{p'}(E)(E \cap R) = E/O_{p'}(E) \end{aligned}$$

we get that $E/O_{p'}(E)$ is hypercyclically embedded in G , contrary to the choice of (G, E) . Hence we have (2).

(3) $Z \cap E \leq Z_\infty(E)$. Indeed, since Z is clearly supersoluble, a Sylow q -subgroup q of Z , where q is the largest prime dividing $|Z|$, is normal and so characteristic in Z . Then q is normal in G , which implies that $Z = Q$ by Claim (2), so $Z \cap E \leq Z_\infty(E)$ since $(p-1, |E|) = 1$.

(4) E is p -nilpotent. Assume that this is false.

(a) $E = G$. Since the hypothesis holds for (E, E) by Lemma 2.2 (2) in [26], in the case when $E \neq G$, the subgroup E is p -nilpotent by the choice of G .

(b) Every cyclic subgroup of p of order p and order 4 are m - S -supplemented in G . It is enough to show that some maximal subgroup of p is not m - S -supplemented in G . Suppose that this is false.

First we show that $O_p(G) \neq 1$. Assume that $O_p(G) = 1$. Let V be a maximal subgroup of p . There are a nearly S -permutable subgroup S and a subgroup T of G such that $G = VT$ and $V \cap T \leq S \leq V$. Let A be a nearly modular subgroup and B an S -permutable subgroup of G such that $S = \langle A, B \rangle$. Then $BP^x = P^xB = P^x$ for all $x \in G$, so $B \leq P_G = O_p(G) = 1$. Hence $S = A$ and $A_G = 1$, therefore $S \leq Z \leq Z_\infty(G)$ by Lemma 2.4 in [26] and Claim (3) since $E = G$ by Claim (a). Since $Z_\infty(G)$ is nilpotent, a Sylow p -subgroup of $Z_\infty(G)$ is normal in G , so $A = S = 1$ since $V_G = 1$. Therefore T is a complement to V in G , so for a Sylow p -subgroup T_p of T we have $|T_p| = p$. Therefore T is p -nilpotent since $(p-1, |E|) = (p-1, |G|) = 1$. Hence every maximal subgroup V of p has a p -nilpotent complement in G , so G is p -nilpotent by Lemma 2.13 in [26]. This contradiction shows that $O_p(G) \neq 1$.

Let R be a minimal normal subgroup of G contained in $O_p(G)$. First we show that $R \neq P$. Assume that $R = P$ and let V be any maximal subgroup of R . There are a nearly S -permutable subgroup S and a subgroup T of G such that $G = VT$ and $V \cap T \leq S \leq V$. Let A be a nearly modular subgroup and B an S -permutable subgroup of G such that $S = \langle A, B \rangle$. Then $A_G = 1$, so $A^G \leq Z$ by Lemma 2.4 in [26]. Therefore $A = 1$ and so $S = B$ is S -permutable in G . But then S is normal in G by Lemma 1.2.16 in [27]. Hence $S = 1$ and so $T \cap V = 1$. But then $1 < T \cap R < R$, where $T \cap R$ is normal in G . This contradiction shows that $R \neq P$. Therefore the hypothesis holds for G/R , so G/R is p -nilpotent. Hence G is p -soluble. Therefore every minimal normal subgroup R of G is a p -group by Claim (2), hence R is a unique minimal normal subgroup of G and $R \not\leq \Phi(G)$, so $R = C_G(R) = O_p(G)$ by [24, Chapter A, Theorem 15.6]. It is clear also that $|R| > p$, so $Z = 1$.

Let V be a maximal subgroup of p such that $RV = P$. Then $W = V \cap R$ is normal in p , $|P:W| = p$ and $V_G = 1$. There are a nearly S -permutable subgroup S and a subgroup T of G such that $G = VT$ and $V \cap T \leq S \leq V$. Arguing as above, we can show that S is S -permutable in G . It follows that $S \leq O_p(G) = R$. Hence $S \leq R \cap V = W$ and so

$S^G = S^{PO^p(G)} = S^W \leq W$ by [27, Lemma 1.2.16], which implies that $S = 1$. Then T is a complement to V in G , so T is p -nilpotent.

Now let V be any maximal subgroup of p containing R , and let M be a maximal subgroup of G such that $G = R \rtimes M$. Then $M \simeq G/R$ is p -nilpotent, so M is a p -nilpotent supplement to V in G . Thus every maximal subgroup of p has a p -nilpotent supplement in G . Therefore G is p -nilpotent by Lemma 2.13. This contradiction shows that some maximal subgroup of p is not weakly S -permutable in G , so we have (b) by hypothesis.

Final contradiction for (4). Since G is not p -nilpotent, it has a non-nilpotent subgroup H such that every proper subgroup of H is nilpotent by [23, IV, Satz 5.4]. Moreover, Proposition 1.9 in [29, Chapter 1] implies that $H = H_p \rtimes H_q$, where H_p is a Sylow p -subgroup and H_q is a Sylow q -subgroup of H for some prime $q \neq p$ and the following hold:

- (i) H_p is of exponent p or exponent 4 (if $p = 2$ and H_p is non-abelian);
- (ii) H_p is the smallest normal subgroup of H with nilpotent quotient H/H_p ;
- (iii) $H_p/\Phi(H_p)$ is a chief factor of H . Then $C_H(H_p/\Phi(H_p)) \neq H$ since $H/\Phi(H_p)$ is not nilpotent. Therefore $|H_p/\Phi(H_p)| > p$ since clearly $(p-1, |H|) = 1$. Lemma 2.2 (2) in [26] and Claim (b) imply that every cyclic subgroup of H_p of order p and order 4 are weakly S -permutable in H . On the other hand, Property (i) implies that $\Omega(H_p) = H_p$ and so H_p is hypercyclically embedded in H by Lemma 2.12 in [26] and so $|H_p/\Phi(H_p)| = p$. This contradiction completes the proof of (4).

The final contradiction. Claims (2) and (4) imply that $E = P$ is a normal p -subgroup of G . Let $D = \Omega(C)$, where C is a Thompson critical subgroup of E . If $D < E$, then D is hypercyclically embedded in G by the choice of (G, E) and so in this case E is hypercyclically embedded in G by Lemma 2.11 in [26]. Therefore $D = E$ and so E is hypercyclically embedded in G by Lemma 2.12 in [26]. This final contradiction completes the proof of the result. \square

Proof of Theorem 1.15. Suppose that this theorem is false and consider a counterexample (G, E) for which $|G| + |E|$ is minimal.

First we show that E is $2'$ -supersoluble and so E is soluble. Assume that this is false.

(a) $E = G$. Hence every proper subgroup of G is $2'$ -supersoluble. Indeed, the hypothesis holds for (E, E) by Lemma 2.2 (2) in [26], so in the case when $E \neq G$ the choice of (G, E) implies that $E/O_2(E)$

is supersoluble and hence E is $2'$ -supersoluble, contrary to our assumption on E . Hence $E = G$, so we have (a) by Lemma 2.2 (2) in [26].

(b) G is soluble. Assume that this is false and let $F = F(G)$. Then $F = \Phi(G)$ since otherwise G is soluble by Claim (a). Moreover, G/F is a non-abelian simple group and every maximal subgroup of G/F is soluble. Therefore, in view of [28], G/F is isomorphic with some of the following groups: $PSL_2(p)$, where $p > 3$ is a prime such that $p^2 + 1 \equiv 0(5)$; $PSL_2(3^p)$, where p is an odd prime; $PSL_2(2^p)$, where p is a prime; $PSL_3(3)$; Suzuki group $Sz(2^p)$, where p is an odd prime.

Let r be the largest prime dividing $|G/F|$ and let G_r be a Sylow r -subgroup of G . Then $r > 3$ by the Burnside $p^a q^b$ -theorem. Let $p \neq r$ be any odd prime dividing $|G/F|$ and let C_p be a subgroup of G of order p . We show that $C_p \leq F$. Suppose that this is false. By hypothesis, C_p is weakly S -permutable in G . First assume that C_p is nearly S -permutable in G . Then there is a proper subgroup T of G such that $C_p T = G$ and $C_p \cap T = 1$. Hence $|G:T| = p$, so T is a maximal subgroup of G . By considering the permutation representation of G/T_G on the right coset of T/T_G one can see that G/T_G is isomorphic with some subgroup of the symmetric group S_p of degree p . Since T is a maximal subgroup of G , $F = \Phi(G) \leq T$. Hence $T_G = F$, so $p = r$. This contradiction shows that for every prime $2 < p < r$ dividing $|G/F|$, every subgroup C_p of G of order p with $C_p \not\leq F$ is nearly S -permutable in G . Then C_p is either nearly modular or nearly S -permutable in G . Moreover, C_p is not normal in G , so in the former case we have $(C_p)^G$ is hypercyclically embedded in G by Lemma 2.4 in [26] and hence $(C_p)^G F/F = G/F$ is soluble. This contradiction shows that C_p is S -permutable in G , so $C_p \leq O_p(G)$ and hence $G = FO_p(G)$ is soluble. This contradiction completes the proof of the fact that $C_p \leq F$.

Let P be a Sylow p -subgroup of F . Then p is characteristic in F and so it is normal in G . Let $R = (G_r)^x$ for some $x \in G$. Then $V = P \rtimes R \neq G$, so V is supersoluble by Claim (a). But then $V = P \times R$ since $r > p$, so $R \leq C_G(P)$. But then $(G_r)^G \leq C_G(P)$. Since r divides $|G/F|$, $(G_r)^G \not\leq F$ and hence

$$G = (G_r)^G F = (G_r)^G \Phi(G) = (G_r)^G.$$

Therefore $P \leq Z(G)$ and $P \leq \Phi(G) = F$. Now let

W be a Hall p' -subgroup of F . Then

$$PW/W \leq Z(G/W) \text{ and } PW/W \leq \Phi(G/W)$$

and so p divides $|M(G/F)|$, where $M(G/F)$ is the Schur multiplier of G/F . But

$$\pi(|M(G/F)|) \subseteq \{2, 3\}$$

(see [29, Chapter 4]). Therefore $p = 3$ since $p > 2$ and so $\pi(G/F) = \{2, 3, r\}$. But from the above we also know that G/F is a minimal non-soluble group, so from [29, Chapter 4] we deduce that the Schur multiplier of G/F is of order 2. This contradiction completes the proof of the fact that G is soluble.

Let p be any odd prime. We show that G is p -supersoluble. Suppose that this is false. Then p divides $|G|$ and G is a minimal non- p -supersoluble group.

It is well-known that the class of all p -supersoluble groups \mathfrak{F} is a saturated formation. Hence G has a normal subgroup D such that G/D is p -supersoluble and D is a q -group for some prime q . It is clear that $q = p$, so D is hypercyclically embedded in G by Theorem 1.14. Hence G is p -supersoluble. This contradiction completes the proof of the fact that E is $2'$ -supersoluble.

Let $\{p_1, \dots, p_n\}$ be the set of all odd primes dividing $|E|$. Then $O_{p_i}(E) \cap \dots \cap O_{p_n}(E) = O_2(E)$. On the other hand, $E/O_{p_i}(E)$ is supersoluble by Theorem 1.14 for all $i = 1, \dots, n$, so $E/O_2(E)$ is supersoluble. Assume that $O_2(E) \neq 1$. The subgroup $O_2(E)$ is characteristic in E , so it is normal in G . The hypothesis holds for $(G/O_2(E), E/O_2(E))$ by Lemma 2.2 (1) in [26], so the choice of (G, E) implies that $H/O_2(E)$ is hypercyclically embedded in $G/O_2(E)$, so $E/O_2(E)$ is hypercyclically embedded in G . Therefore $O_2(E) = 1$, so E is supersoluble.

Now let E_q be a Sylow q -subgroup of E , where q is the largest prime dividing $|E|$. Then E_q is characteristic in E , so E_q is normal in G . The hypothesis holds for (G, E_q) and $(G/E_q, E/E_q)$ by Lemma 2.2 (1) in [26], so in the case when $E_q < E$, E_q and E/E_q are hypercyclically embedded in G . But then E is hypercyclically embedded in G , contrary to the choice of (G, E) . Hence $E_q = E$, so E is hypercyclically embedded in G by Theorem 1.14. This final contradiction completes the proof of the result.

Proof of Theorem 1.16. Suppose that this theorem is false and consider a counterexample (G, E) for which $|G| + |E|$ is minimal. Let p be the least prime dividing $|E|$ and let P be a Sylow p -subgroup of E .

Note that the hypothesis holds for (E, E) by Lemma 2.2 (2) in [26], so E is p -supersoluble by Theorem 1.14 and hence E is p -nilpotent since p is the least prime dividing $|E|$. Note also that if X is a non-identity Hall subgroup of E , then $X = E$. Indeed, the hypothesis holds for $(G/X, E/X)$ and for (G, X) by Lemma 2.2 (1) in [26]. Hence in the case $X \neq E$ the choice of G implies that E/X and X are hypercyclically embedded in G . Hence E is hypercyclically embedded in G by the Jordan-Hölder theorem for the chief series. This contradiction shows that $E = P$, so E is hypercyclically embedded in G by Theorem 1.14. The theorem is proved.

REFERENCES

1. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
2. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
3. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Application. – 2016. – Vol. 15. – P. 21–36.
4. Skiba, A.N. On τ_σ -quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.
5. Huang, J. Finite groups all of whose subgroups are σ -subnormal or σ -abnormal / J. Huang, B. Hu, X. Wu // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 1. – P. 4542–4549.
6. Al-Sharo, Kh.A. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / Kh. A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.
7. Hu, B. Groups with only σ -semipermutable and σ -abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Acta Math. Hung. – 2017. – Vol. 153, № 1. – P. 236–248.
8. Hu, B. On finite groups with generalized σ -subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 4. – P. 1758–1769.
9. Guo, W. On Π -quasinormal subgroups of finite groups / W. Guo, A.N. Skiba // Monatsh. Math. – 2016. – Vol. 185, № 3. – P. 1–11.
10. Guo, W. On σ -supersoluble groups and one generalization of CLT -groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.
11. Kovaleva, V.A. A criterion for a finite group to be σ -soluble / V.A. Kovaleva // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 46, № 12. – P. 5410–5415.
12. Skiba, A.N. On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – Vol. 3. – P. 35–47.
13. Guo, W. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Science China. Mathematics. – 2019. – Vol. 62, № 7. – P. 1355–1372.
14. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
15. Adarchenko, N.M. Finite groups with generalized S -permutable subgroups / N.M. Adarchenko, A.N. Skiba. – Preprint, 2019.
16. Spencer, A.E. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 27. – P. 167–173.
17. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
18. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
19. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
20. Schmidt, R. Endliche Gruppen mit vilen modularen Untergruppen / R. Schmidt // Abhan. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1970. – Vol. 34. – P. 115–125.
21. Hu, B. On generalized S -quasinorma and generalized subnormal subgroups of finite groups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 4. – P. 1758–1769.
22. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York – Evanston – London: Harper & Row Publishers, 1968.
23. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1967.
24. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.
25. Vasilyev, V.A. Finite groups with submodular Sylow subgroups / V.A. Vasilyev // Siberian Math. J. – 2015. – Vol. 56, № 6. – P. 1019–1027.
26. Adarchenko, N.M. Finite groups with the given systems of generalized σ -permutable subgroups / N.M. Adarchenko, A.N. Skiba. – Preprint, 2019.
27. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2010.
28. Thompson, J.G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable / J.G. Thompson // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 74, № 3. – P. 383–437.
29. Gorenstein, D. Finite Simple Groups / D. Gorenstein. – New York – Evanston – London: Plenum Press, 1982.

Поступила в редакцию 17.12.19.

РАЗРЕШИМЫЕ НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ СО СВОЙСТВОМ \mathcal{P}_2 ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С.В. Балычев, А.С. Вегера

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SOLUBLE SATURATED FORMATIONS WITH THE \mathcal{P}_2 PROPERTY FOR FINITE GROUPS

S.V. Balychev, A.S. Vegera

F. Scorina Gomel State University

Исследуются конечные группы, представимые в виде произведения попарно перестановочных подгрупп с формационными ограничениями на их частичные произведения. В частности, получено описание введенных Б. Амбергом, Л.С. Казариным и Б. Хефлингом разрешимых наследственных насыщенных формаций групп со свойством \mathcal{P}_2 .

Ключевые слова: конечная группа, произведение попарно перестановочных подгрупп, формация со свойством \mathcal{P}_2 , формация с условием Кегеля, формация с условием Шеметкова.

The finite groups that can be represented as a product of pairwise permutable subgroups with formational restrictions on factors and their partial products are studied. In particular, the description of solvable hereditary saturated formations of groups with the property \mathcal{P}_2 introduced by B. Amberg, A.S. Kazarin and Hefling is obtained.

Keywords: finite group, product of pairwise permutable subgroups, formation with the \mathcal{P}_2 property, formation with the Kegel property, formation with the Shemetkov property.

Введение

Все рассматриваемые группы являются конечными. Группа G называется произведением попарно перестановочных подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n , если $G = A_1 A_2 \dots A_n$ и $A_i A_j = A_j A_i$ для любых пар чисел $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Изучению групп с такой факторизацией посвящены классические работы Ф. Холла, С.А. Чунихина, Б. Хупперта, Г. Виландта, О. Кегеля, Л.С. Казарина. Ряд важных результатов, полученных в этом направлении до 2010 года, отражены в монографии [1].

В работе [2] В. Амберг, Л.С. Казарин и Б. Хефлинг, используя методы теории классов (формаций), получили существенное продвижение в изучении групп, факторизуемых своими попарно перестановочными подгруппами. Ими было введено следующее

Определение. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} – классы групп и k – натуральное число. Говорят, что класс \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_k для \mathfrak{X} -групп, если \mathfrak{X} -группа G принадлежит \mathfrak{F} в том случае, когда G может быть записана в виде произведения n подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n таких, что для каждого выбора индексов $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$ группа $A_{i_1} \dots A_{i_k}$ принадлежит \mathfrak{F} .

Если \mathfrak{X} совпадает с классом всех групп, то в этом случае просто говорят, что класс \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_k .

В работе [2] для каждого натурального $k \geq 2$ были построены серии разрешимых формаций, обладающие свойством \mathcal{P}_k , но не обладающие свойством \mathcal{P}_{k-1} . Полностью описаны все разрешимые наследственные и насыщенные классы (формации) групп, имеющие свойство \mathcal{P}_1 для разрешимых групп. Приведены также серии формаций произвольных групп, обладающих свойством \mathcal{P}_1 .

В настоящей статье мы продолжаем исследования, начатые в [2]. Нами исследуется следующая естественная

Проблема. Пусть \mathfrak{X} – наследственный класс групп и n – заданное натуральное число, $n > 1$. Найти конструктивное описание всех насыщенных формаций \mathfrak{F} , имеющих свойство \mathcal{P}_n для \mathfrak{X} -групп.

Настоящая работа посвящена решению данной проблемы для разрешимых наследственных насыщенных формаций в случае, когда $n = 2$ и \mathfrak{X} совпадает с классом всех групп.

1 Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения, определения и известные результаты, которые при необходимости можно найти в монографиях [1], [3]–[4]. В настоящем разделе мы приводим необходимые сведения, которые нам потребуются для краткости формулировок и доказательств основных результатов работы.

Закрепим следующие обозначения: \mathbb{P} – множество всех простых чисел. Пусть G – группа, $p \in \mathbb{P}$, π – некоторое множество простых чисел; через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка G ; $\text{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп G ; $F_p(G)$ – p -нильпотентный радикал группы G , т. е. наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа G ; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G ; 1 – единичная группа; $N \times M$ обозначает полупрямое произведение групп N и M .

Будем использовать следующие стандартные обозначения для классов групп:

\mathfrak{S} – класс всех разрешимых групп; \mathfrak{S}_π – класс всех разрешимых π -групп, где π – некоторое множество простых чисел ($\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_\pi$, для $\pi = \{p\}$); \mathfrak{N} – класс всех nilпотентных групп; \mathfrak{N}_π – класс всех nilпотентных π -групп; \mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп.

Класс групп \mathfrak{X} называется формацией, если:

1) из $G \in \mathfrak{X}$ и $N \triangleleft G$, всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{X}$;

2) из $G/N_1 \in \mathfrak{X}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{X}$, всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{X}$.

Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \subseteq \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется наследственной (нормально наследственной), если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит все ее (нормальные) подгруппы. Через G^δ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G для которой $G/G^\delta \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что нормально наследственный класс \mathfrak{F} называется классом Фиттинга, если \mathfrak{F} содержит всякую группу $G = AB$, являющуюся произведением своих нормальных (субнормальных) \mathfrak{F} -подгрупп A и B . Формация групп, одновременно являющаяся классом Фиттинга, называется формацией Фиттинга.

Пусть \mathfrak{X} – непустой класс групп. Группа G называется минимальной не \mathfrak{X} -группой, если G не принадлежит \mathfrak{X} , а все собственные ее подгруппы принадлежат \mathfrak{X} . Минимальные не \mathfrak{N} -группы называются группами Шмидта. Множество минимальных не \mathfrak{X} -групп для класса \mathfrak{X} обозначается через $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$.

Функция $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Через $LF(f)$ обозначается класс всех групп G , у которых для любого главного фактора H/K и для каждого $p \in \pi(H/K)$ выполняется условие:

$$G/C_G(H/K) \in f(p).$$

Формация \mathfrak{F} называется локальной, если существует локальный экран f , такой что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Согласно знаменитой теореме Гашноца – Любезеде – Шмида непустая формация является насыщенной тогда и только тогда, когда она локальна.

Лемма 1.1 [3, лемма 4.5]. Пусть f – локальный экран формации \mathfrak{F} . Группа G тогда и только тогда принадлежит \mathfrak{F} , когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.

Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда локальный экран h , где $h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p также является локальным экраном \mathfrak{F} . Такой локальный экран называется полным. Локальный экран f называется внутренним, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого простого p . Согласно теореме 3.3 из [3] всякая локальная формация \mathfrak{F} имеет единственный максимальный внутренний локальный экран h , причем h является полным.

Формация \mathfrak{F} называется разрешимой, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$; локальный экран f называется разрешимым, если $f(p) \subseteq \mathfrak{S}$ для каждого простого p .

Пусть \mathfrak{F} – разрешимая локальная формация. Множество Ω всех ее разрешимых локальных экранов можно считать частично упорядоченным с отношением, которое задается следующим образом: если f_1, f_2 – элементы множества Ω , то $f_1 \leq f_2$, если $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для любого простого числа p . К. Дерк доказал, что множество Ω в данном упорядочении имеет единственный максимальный элемент. Используя идею Дерка, в работе [5] был получен аналогичный результат для случая, когда \mathfrak{F} – разрешимая наследственная локальная формация, а Ω – множество всех ее наследственных локальных экранов.

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Формация \mathfrak{F} имеет единственный разрешимый максимальный наследственный локальный экран f , причем f полный, т. е. $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для каждого простого p ;

(2) $\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}$ для любого простого p .

Для получения основного результата работы нами существенно будет использоваться

конструкция формации $w\mathfrak{F}$. Для ее определения и применения нам потребуются определение и известные свойства \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп, доказательства которых можно найти в монографии [4].

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G , если либо $H = G$, либо существует цепь максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$. Кратко обозначается $H \mathfrak{F}$ -sn G .

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{F} – формация, H и K – подгруппы группы G и $N \triangleleft G$. Тогда справедливы следующие результаты.

- (1) Если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N .
- (2) Если $H/N \mathfrak{F}$ -sn G/N , то $H \mathfrak{F}$ -sn G .
- (3) Если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $HN \mathfrak{F}$ -sn G .
- (4) Если $H \mathfrak{F}$ -sn K и $K \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \mathfrak{F}$ -sn G .
- (5) Если все композиционные факторы G принадлежат \mathfrak{F} , то всякая субнормальная подгруппа G является \mathfrak{F} -субнормальной.
- (6) Пусть p – простое число и G – p -группа, если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то все подгруппы G являются \mathfrak{F} -субнормальными.

Лемма 1.4. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация, $H \leq G$ и $M \leq G$. Тогда справедливы следующие результаты.

- (1) Если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \cap M \mathfrak{F}$ -sn M .
- (2) Если $H \mathfrak{F}$ -sn G и $M \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \cap M \mathfrak{F}$ -sn G ;
- (3) Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H \mathfrak{F}$ -sn G .

В работе [6] было начато рассмотрение следующей задачи. Пусть \mathfrak{F} – формация. Что можно сказать о структуре группы G , если все ее силовские подгруппы \mathfrak{F} -субнормальны в G ? В статье [7] был введен и исследовался класс групп $w\mathfrak{F}$.

Определение 1.5 [7]. Для непустой формации \mathfrak{F} через $w\mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп G таких, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в G любая силовская подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна.

В работах [7]–[8] были установлены основные свойства формации $w\mathfrak{F}$. В работе [7] было доказано, что если \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, то $w\mathfrak{F}$ также является наследственной насыщенной формацией. В [8] было подробно изучено локальное задание $w\mathfrak{F}$ и найдены необходимые и достаточные условия, при которых $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

2 Основной результат

Начало изучения формаций со свойством \mathcal{P}_2 восходит к работам О. Кегеля и Б. Хупперта.

Пусть группа $G = A_1 A_2 \dots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n и π – множество простых чисел. Из результата О. Кегеля [9] и леммы 2.2 [1] следует, что G имеет нормальную холлову π -подгруппу, если каждое из произведений $A_i A_j$ имеет нормальную холлову π -подгруппу. В частности, если все $A_i A_j$ нильпотентны, то и группа G нильпотентна. В [10, теорема VI, 10.2] Б. Хупперт показал, если каждое произведение $A_i A_j$ группы G является φ -дисперсивной подгруппой, где φ – некоторое линейное упорядочение множества, то и сама группа G будет φ -дисперсивной.

Сформулируем важный для нашей работы результат Л.С. Казарина.

Теорема 2.1 [11]. Пусть группа $G = A_1 A_2 \dots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Если каждая подгруппа $A_i A_j$ разрешима, то и сама группа G разрешима.

Для доказательства основного результата нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 2.2. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация, имеющая свойство \mathcal{P}_2 . Тогда \mathfrak{F} является формацией Фиттинга.

Доказательство. Нам необходимо показать, что формация \mathfrak{F} замкнута относительно взятия произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Предположим противное. Выберем группу $G = HK$ минимального порядка такую, что H и K – нормальные \mathfrak{F} -подгруппы группы G , но $G \notin \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – разрешимая формация, то $G \in \mathfrak{S}$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда для G/N все условия леммы выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Из того, что \mathfrak{F} – формация, следует, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Из насыщенности \mathfrak{F} вытекает, что $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = N \rtimes M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G и $N = F(G) = C_G(N)$. Из $N \subseteq H$ и

$$H = H \cap NM = N(H \cap M),$$

$N \subseteq K$ и $K = K \cap NM = N(K \cap M)$ следует, что $H \cap M$ и $K \cap M$ – нормальные группы в M и $M = (M \cap H)(M \cap K)$.

Рассмотрим факторизацию $G = NT_1 T_2$, где $T_1 = H \cap M$ и $T_2 = K \cap M$. Заметим, что $T_1 T_2 = M \in \mathfrak{F}$. Тогда $NT_1 = H \in \mathfrak{F}$ и $NT_2 = K \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 , то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. \square

Лемма 2.3. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация, имеющая свойство \mathcal{P}_2 . Тогда $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Доказательство. По 2) теоремы 3.1 из [8] формация $\mathfrak{F} \subseteq w\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение $w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $w\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F} \neq \emptyset$. Выберем группу G минимального порядка из $w\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} и $w\mathfrak{F}$ – наследственные насыщенные формации, то нетрудно показать, что группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , $\Phi(G) = 1$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Ввиду разрешимости G выполняется $N = F(G)$.

Так как группа G разрешима, то по теореме Холла G можно представить в виде произведения ее попарно перестановочных силовских подгрупп, т. е. $G = G_{p_1} G_{p_2} \cdots G_{p_n}$, где G_{p_i} – силовская p_i -подгруппа и $p_i \in \pi(G)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть $n = 1$. Тогда $G = G_{p_1}$. Из насыщенности \mathfrak{F} и $p_1 \in \pi(w\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

2. Пусть $n > 2$. Тогда $G = G_{p_1} G_{p_2} \cdots G_{p_n}$. Так как $G \in w\mathfrak{F}$, то для любой $G_{p_i} \in \text{Syl}(G)$ верно, что $G_{p_i} \mathfrak{F}$ -sn G для $i \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим произведение $G_{p_i} G_{p_j}$, где $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $i \neq j$. Ввиду (1) леммы 1.4 имеем, что $G_{p_i} \mathfrak{F}$ -sn $G_{p_i} G_{p_j}$. Так как $|G_{p_i} G_{p_j}| < |G|$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $G_{p_i} G_{p_j} \in \mathfrak{F}$. Так как формация \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 , то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

3. Пусть $n = 2$. Тогда $G = G_{p_1} G_{p_2}$ представима в виде $G = N \rtimes M$, где M – максимальная подгруппа G . Возможны два случая:

а) $p_1, p_2 \in \pi(M)$ и N – p_1 -группа. Тогда $M = M_{p_1} M_{p_2}$, где M_{p_i} – силовские p_i -подгруппы группы M для $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, $G = N M_{p_1} M_{p_2}$. Так как \mathfrak{F} является насыщенной формацией, то $N M_{p_1} \in \mathfrak{F}$. Так как порядок $|N M_{p_2}| < |G|$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $N M_{p_2} \in \mathfrak{F}$. Аналогично, $M_{p_1} M_{p_2} \in \mathfrak{F}$. Так как формация \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 , то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

б) $p_1 \notin \pi(M)$ и $p_2 \in \pi(M)$ и N – силовская p_1 -группа. Тогда $G = G_{p_1} G_{p_2} = N M = F(G) M$. Так как \mathfrak{F} – насыщенная формация и $G_{p_2} \mathfrak{F}$ -sn G , то по теореме 15.10 [3] следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Итак, $w\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = w\mathfrak{F}$. \square

Обратное утверждение неверно. В качестве примера можем взять формацию $\mathfrak{F} = w\mathcal{U}$ всех расширенно сверхразрешимых групп, свойства которой хорошо изучены в работе [12]. Формация $\mathfrak{F} = w\mathcal{U}$ не является формацией Фиттинга, поэтому ввиду леммы 2.2 не обладает свойством \mathcal{P}_2 . С другой стороны, ввиду утверждения 3) леммы 1.2 из [7] выполняется

$$w\mathfrak{F} = w(w\mathcal{U}) = \mathfrak{F}.$$

Напомним [5], что формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию Кегеля, если \mathfrak{F} содержит всякую группу $G = AB = BC = AC$, где подгруппы A, B и C принадлежат \mathfrak{F} . Условию Кегеля удовлетворяют, например, формации всех нильпотентных групп [9], всех разрешимых групп [11]. Разрешимые насыщенные формации с условием Кегеля изучались в работах [5], [13]–[15].

Отметим необходимые для доказательства основной нашей теоремы результаты.

Лемма 2.4 [2, лемма 2.2]. Пусть \mathfrak{V} и \mathfrak{X} – классы групп и \mathfrak{X} обладает следующим свойством: как только \mathfrak{V} -группа G имеет \mathfrak{X} -подгруппы A, B и C , такие что $G = AB = AC = BC$, то G является \mathfrak{X} -группой. Тогда \mathfrak{X} удовлетворяет \mathcal{P}_2 для \mathfrak{V} -групп.

Теорема 2.5 [5, лемма 2.2]. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда \mathfrak{F} в том и только том случае удовлетворяет условию Кегеля, когда \mathfrak{F} имеет такой полный локальный экран f , что при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$.

Докажем основной результат работы.

Теорема 2.6. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию Кегеля.
- (2) Формация \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 .
- (3) \mathfrak{F} является формацией Фиттинга и $\mathfrak{F} = w\mathfrak{F}$.
- (4) Формация \mathfrak{F} имеет максимальный разрешимый наследственный локальный экран f такой, что

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Доказательство. Импликация из (1) \Rightarrow (2) получается из леммы 2.4.

Установим (2) \Rightarrow (3). Пусть разрешимая наследственная насыщенная формация \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 . Тогда по лемме 2.2 \mathfrak{F} является формацией Фиттинга. Применяя лемму 2.3 получаем, что $\mathfrak{F} = w\mathfrak{F}$.

Докажем, что из (3) следует (4). Пусть h – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . По лемме 1.2 формация \mathfrak{F} обладает единственным разрешимым максимальным наследственным локальным экраном f , который является полным и

$$\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}.$$

Рассмотрим локальный экран g такой, что $g(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $g(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$.

Покажем, что $f(p) = g(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Ясно, что $f(p) \subseteq g(p)$ для любого p . Допустим, что класс $g(p) \setminus f(p)$ непуст для некоторого простого p . Выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $f(p)$ и $g(p)$ – наследственные формации, то

$$G \in \mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}.$$

Из полноты экрана f и выбора G следует, что $O_p(G) = 1$ и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Тогда существует точный неприводимый G -модуль U над полем F_p , где F_p – поле из p элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $R = U \rtimes G$. Ясно, что U является единственной минимальной нормальной подгруппой группы R , причем $U = F_p(R)$.

Установим, что R является минимальной не \mathfrak{F} -группой. Так как

$$G \in \mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F},$$

то $G \in \mathfrak{F}$. Из $G \in \mathcal{M}(f(p))$ и свойств подгруппы U следует, что $G^{\mathfrak{S}} = U$. Пусть H – произвольная максимальная подгруппа группы R , не сопряженная с подгруппой G . Тогда $U \subseteq H$. Из $\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p))$ и $R/U \cong G \in \mathcal{M}(f(p))$ вытекает, что $H/U \in h(p)$. Так как $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ и $h(p) \subseteq \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$. Отсюда из наследственности формации \mathfrak{F} следует, что любая собственная подгруппа из R принадлежит \mathfrak{F} . Следовательно, R является минимальной не \mathfrak{F} -группой.

Используя свойства формации \mathfrak{F} из пункта 2) нашей теоремы уточним строение группы $R = U \rtimes G$. Покажем, что подгруппа G является q -подгруппой для некоторого простого q отличного от p . Допустим противное. Пусть S – силовская подгруппа группы R . Тогда подгруппа US является собственной подгруппой R . Так как $U = G^{\mathfrak{S}}$, то из (2) по лемме 1.3 следует, US является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в R . Из $US \in \mathfrak{F}$ и наследственности формации \mathfrak{F} следует, что подгруппа U \mathfrak{F} -субнормальна в US . Теперь из (4) леммы 1.3 следует, U является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G . Отсюда и из

$\pi(R) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ следует, что $R \in w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Будем считать, что G – q -подгруппа для некоторого простого q отличного от p . Покажем, что G является циклической q -группой. Допустим противное. Тогда в G найдутся, по крайней мере, две различные максимальные подгруппы S_1 и S_2 . Рассмотрим подгруппы $T_1 = US_1$ и $T_2 = US_2$. Ясно, что T_1 и T_2 – нормальные \mathfrak{F} -подгруппы в R и $R = T_1 T_2$. Так как по условию \mathfrak{F} является формацией Фиттинга, то получаем, что $R \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с $R \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Пусть G – циклическая q -группа и $|G| = q^n$. Предположим, что $n > 1$. Пусть Q и Z – циклические группы, причем $|Q| = q^{n-1}$ и $|Z| = q$. Рассмотрим регулярное сплетение $F = Q \wr Z$. Тогда $F = Q \wr Z = W \rtimes Z$, где W – база сплетения $F = Q \wr Z$. По известной теореме Калужнина – Краснера группа G вкладывается в качестве подгруппы в $F = Q \wr Z$. Так как $f(p)$ – наследственная формация и G не принадлежит $f(p)$, то $F = Q \wr Z$ также не принадлежит $f(p)$. При этом отметим, что Q и Z принадлежат формации $f(p)$. Возьмем еще одно регулярное сплетение $E = P \wr F$, где $|P| = p$. Тогда $E = P \wr F = V \rtimes F$, где V – база данного сплетения.

Рассмотрим группу $E = P \wr F = V \rtimes (W \rtimes Z)$. Так как Q и Z принадлежат формации $f(p)$, то подгруппы $R_1 = V \rtimes W$ и $R_2 = V \rtimes Z$ принадлежат формации \mathfrak{F} . Заметим, что R_1 и R_2 – субнормальные подгруппы в E и $E = R_1 R_2$. По условию \mathfrak{F} является формацией Фиттинга. Поэтому E принадлежит \mathfrak{F} . Получили противоречие.

Остается принять, что G – циклическая группа простого порядка q . Вспомним, что $G \in g(p) \setminus f(p)$. Так как $f(p), g(p)$ – наследственные формации и $\pi(f(p)) = \pi(g(p))$, то $G \in f(p)$. Получили окончательное противоречие. Следовательно, $f(p) = g(p)$ и импликация (3) \Rightarrow (4) доказана.

Установим (4) \Rightarrow (1). Пусть формация \mathfrak{F} имеет разрешимый максимальный наследственный локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$. Тогда по теореме 2.5 получаем, что формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию Кегеля. \square

3 Заключительные замечания, дальнейшего направления исследований

Приведем обзор некоторых следствий из теоремы 2.6. Изучаемые нами разрешимые фор-

мации со свойством \mathcal{P}_2 тесно связаны с хорошо известными формациями с условием Шеметкова.

Напомним (см., [5] или [1, с. 268]), формация \mathfrak{F} называется формацией с условием Шеметкова (кратко, \check{S} -формацией), если всякая ее минимальная не \mathfrak{F} -группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Начало изучения таких формаций восходит к работе [16] В.Н. Семенчука и А.Ф. Васильева, в которой ими в классе \mathfrak{S} было получено конструктивное описание всех наследственных насыщенных \check{S} -формаций. В работе [17] А.Н. Скиба показал, что всякая разрешимая наследственная \check{S} -формация является насыщенной.

Следствие 3.1. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная \check{S} -формация. Тогда \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 . Обратное утверждение неверно.

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная \check{S} -формация. Из отмеченного выше результата А.Н. Скибы следует, что \mathfrak{F} – насыщенная формация. Ввиду теоремы 3 из [16] (см., также [4, теорема 6.4.11]) \mathfrak{F} имеет такой полный локальный экран f , что при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Теперь результат следует из теоремы 2.6. Нетрудно проверить, что разрешимая наследственная формация \mathfrak{A} всех абелевых групп обладает свойством \mathcal{P}_2 , но она, очевидно, не является \check{S} -формацией. Имеются также примеры разрешимых наследственных насыщенных не \check{S} -формаций со свойством \mathcal{P}_2 . Их нетрудно построить, используя результаты работы [18]. \square

В качестве следствий из теоремы мы можем получить не только отмеченные выше известные результаты В. Хупперта и О. Кегеля, но и новые. Приведем некоторые из них.

Напомним, что \mathfrak{F} называется решеточной формацией (см., например, [1, с. 248]), если множество всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой группе.

Следствие 3.3. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная решеточная формация. Тогда \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_2 .

В работе [19] В.С. Монахов ввел и изучил классы групп \mathfrak{R} и \mathfrak{D} с ограничениями на подгруппы Шмидта групп из этих классов. Класс \mathfrak{R} содержит только те группы, у которых любая подгруппа Шмидта сверхразрешима. Класс состоит из всех групп с несверхразрешимыми подгруппами Шмидта. В работе доказано, что \mathfrak{R} и \mathfrak{D} являются разрешимыми наследственными

формациями Фиттинга. В работе [20] доказано, что \mathfrak{R} и \mathfrak{D} являются формациями с условием Кегеля.

Следствие 3.3. Пусть группа $G = A_1 A_2 \cdots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Если в каждом произведении $A_i A_j$ любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, то и в G любая подгруппа Шмидта сверхразрешима.

(2) Если каждая подгруппа $A_i A_j$ сверхразрешима, то любая подгруппа Шмидта группы G сверхразрешима.

(3) Если в каждом произведении $A_i A_j$ любая сверхразрешимая подгруппа нильпотентна, то и в группе G любая сверхразрешимая подгруппа нильпотентна.

Таким образом, в настоящей работе получено конструктивное решение отмеченной во введении проблемы. В дальнейшем нами планируется изучить разрешимые формации со свойством \mathcal{P}_2 в общем случае, с ослабленными свойствами наследственности или насыщенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ballester-Bolinches A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.
2. Амберг, Б. Конечные группы с кратными факторизациями / Б. Амберг, Л.С. Казарин, Б. Хефлинг // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 1251–1263.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
4. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.
5. Васильев, А.Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 3–11.
6. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
7. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.
8. Васильев, А.Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. мат. журнал. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

9. Kegel, O.H. Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. – 1965. – Vol. 87, № 1. – S. 42–48.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen. I / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 794 s.
11. Казарин, Л.С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журнал. – 1991. – Т. 34, № 7–8. – С. 947–950.
12. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
13. Васильев, А.Ф. О перечислении локальных формаций с условием Кегеля / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 7. – С. 86–93.
14. Ballester-Bolinches, A. Finite trifactorized groups and formations / A. Ballester-Bolinches, A. Martinez-Pastor, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 2000. – Vol. 226, № 2. – P. 990–1000.
15. Ballester-Bolinches, A. On formations with the Kegel property / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro // J. Group Theory. – 2005. – № 8. – P. 605–611.
16. Семенчук, В.Н. Характеризация локальных формаций \mathfrak{F} по заданным свойствам минимальных не \mathfrak{F} -групп / В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 175–181.
17. Скиба, А.Н. Об одном классе локальных формаций конечных групп / А.Н. Скиба // Докл. Акад. наук БССР. – 1990. – Т. 34, № 11. – С. 382–385.
18. Murashka, V.I. Soluble formations with the Shemetkov property / V.I. Murashka // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 82–87.
19. Монахов, В.С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Математические заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.
20. Васильев, А.Ф. Арифметические графы и классы групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Сиб. мат. журнал. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 55–73.

Поступила в редакцию 08.10.19.

УДК 517.538.52+517.538.53

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЭКСПОНЕНТ

Е.П. Кечко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE CONVERGENCE RATE OF HERMITE – PADÉ APPROXIMATIONS OF THE THREE EXPONENT SYSTEM

E.P. Kechko

F. Scorina Gomel State University

Для системы $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$ найдена скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода. Доказанные теоремы дополняют результаты, полученные ранее О. Перроном, Д. Браессом, А.И. Аптекаревым, А.П. Старовойтовым и др.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде 2-го рода, система экспоненциальных функций, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.

The convergence rate of type II Hermite – Padé approximants for the system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$ is found. The theorems proved in the paper complement the results obtained earlier by O. Perron, D. Braess, A.I. Aptekarev, A.P. Starovoitov and other authors.

Keywords: type II Hermite – Padé approximations, system of exponential functions, asymptotic equalities, Hermite integrals.

Введение

Рассмотрим систему экспоненциальных функций

$$\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k,$$

где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные отличные от нуля комплексные числа. Для индекса $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$, $m_j \in \mathbb{N}_0$ существуют многочлены $Q_{n, \vec{m}}(z) \neq 0$, $P_{n, \vec{m}}^j(z)$:

$$\deg Q_{n, \vec{m}} \leq |m|, \quad \deg P_{n, \vec{m}}^j \leq n_j, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} R_{n, \vec{m}}^j(z) &= R_{n, \vec{m}}^j(z; \vec{f}) = \\ &= Q_{n, \vec{m}}(z)e^{\lambda_j z} - P_{n, \vec{m}}^j(z) = O(z^{n+|m|+1}), \quad z \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $|m| = \sum_{i=1}^k m_i$, $n_j = n + |m| - m_j$, $j = 1, 2, \dots, k$.

При $k = 1$ считаем, что $\lambda_1 = 1$.

Многочлены $Q_{n, \vec{m}}(z)$, $P_{n, \vec{m}}^1(z)$, ..., $P_{n, \vec{m}}^k(z)$ принято называть *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода*, а рациональные функции

$$\pi_{n, \vec{m}}^j(z) = \pi_{n, \vec{m}}^j(z; \vec{f}) = \frac{P_{n, \vec{m}}^j(z)}{Q_{n, \vec{m}}(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

– *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода (совместными аппроксимациями Паде)* системы экспонент. Диагональному случаю соответствует набор индексов, для которого $n = m_1 = \dots = m_k$.

Многочлены Эрмита – Паде 2-го рода для системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ были введены Ш. Эрмитом

в работе [1], посвященной доказательству трансцендентности числа e . Им также были найдены явные выражения (подробнее см. [2]) для многочленов и остаточной функции, удовлетворяющие условиям (0.1): если $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, то

$$Q_{n, \vec{m}}(z) = \frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^{+\infty} \left[x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx,$$

$$P_{n, \vec{m}}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_{\lambda_j}^{+\infty} \left[x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx,$$

$$R_{n, \vec{m}}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^{\lambda_j} \left[x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

При $k = 1$ $\vec{m} = m_1 = m$, а $\pi_{n, \vec{m}}(z) := \pi_{n, m}^1(z)$ называется *аппроксимацией Паде*. Ее свойства достаточно хорошо изучены [3]. Так, Паде доказал, что при $n/m \rightarrow \gamma$, $0 \leq \gamma \leq +\infty$ дроби $\pi_{n, m}(z)$ равномерно сходятся к e^z на компактах из \mathbb{C} . О. Перрон [4] получил аналогичный результат при $n+m \rightarrow \infty$. Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n, m}(z)$, которая была решена Д. Браессом [5]: для любого комплексного z при $n+m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{n, m}(z) &= \\ &= (-1)^m \frac{m! n! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (0.2)$$

Для $k > 1$ Е.М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных

аппроксимаций Паде для системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные отличные от нуля комплексные числа. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [6], который доказал, что: дроби $\pi_{n,\bar{m}}^j(z; e^{\lambda_j z})$ сходятся к $e^{\lambda_j z}$ равномерно на компактах в \mathbb{C} и для любого $z \in \mathbb{C}$ при $n + |\bar{m}| \rightarrow +\infty$

$$Q_{n,\bar{m}}(z) = \exp \left\{ - \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j m_j}{n + |\bar{m}|} z \right\} (1 + o(1)). \quad (0.3)$$

Отметим, что в настоящее время скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде в основном исследовалась лишь при действительных $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ [7]–[10] и в диагональном случае.

В работе [9] описана асимптотика при $k = 2$. Недиагональные аппроксимации Эрмита – Паде для системы $\{e^{jz}\}_{j=1}^3$ рассмотрены в [10].

В данной работе исследована скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^3$ – различные отличные от нуля комплексные числа. Сформулированные результаты справедливы в том числе и для недиагонального случая. При доказательстве теоремы использовался новый подход [9], который опирается на теорему Тейлора и эвристические соображения асимптотических методов перевала и Лапласа.

1 Теорема о скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде

Теорема 1.1. Пусть n, m_1, m_2, m_3 – произвольные целые неотрицательные числа, а рациональные дроби $\pi_{n,\bar{m}}^j(z)$, $j = 1, 2, 3$ – аппроксимации Эрмита – Паде для системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^3$ – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, то для любого комплексного числа z равномерно по всем \bar{m} , для которых $0 \leq |m| \leq m(n)$, при $n \rightarrow +\infty$

$$e^{\lambda_1 z} - \pi_{n,\bar{m}}^1(z) = (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \frac{m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!} (1 + o(1)), \quad (1.1)$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi_{n,\bar{m}}^2(z) = (-1)^{|m|} \lambda_2^{n+m_2+1} (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} (\lambda_3 - \lambda_2)^{m_3} \times \frac{m_2! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!} (1 + o(1)), \quad (1.2)$$

$$e^{\lambda_3 z} - \pi_{n,\bar{m}}^3(z) = (-1)^{|m|} \lambda_3^{n+m_3+1} (\lambda_1 - \lambda_3)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda_3)^{m_2} \times \frac{m_3! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_3+1)!} (1 + o(1)), \quad (1.3)$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leq L$. Здесь и далее L, L_1 – абсолютные постоянные.

Доказательство. Рассмотрим

$$R_{n,\bar{m}}^1(z) = \frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \times \int_0^{\lambda_1} x^n (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} (x - \lambda_3)^{m_3} e^{(\lambda_1 - x)z} dx.$$

В интеграле

$$I_1(z) = \int_0^{\lambda_1} x^n (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} (x - \lambda_3)^{m_3} e^{(\lambda_1 - x)z} dx$$

сделаем замену $x = \lambda_1 t$. В результате получим

$$I_1(z) = \lambda_1^{n+m_1+1} \int_0^1 t^n (t - 1)^{m_1} (\lambda_1 t - \lambda_2)^{m_2} (\lambda_1 t - \lambda_3)^{m_3} e^{\lambda_1(1-t)z} dt.$$

В новом интеграле сделаем следующую замену $u = 1 - t$. Тогда

$$I_1(z) = (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1}\right)^{m_3} e^{\lambda_1 u z} du.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1^p(z) = \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1+p} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1}\right)^{m_3} du.$$

Используя формулу бинома Ньютона и равенство

$$\left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k\right) \left(\sum_{t=0}^m C_m^t x^t\right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{t=0}^k C_n^t C_m^{k-t}\right) x^k,$$

а затем свойства бета-функции Эйлера $B(u; v)$, легко показать, что

$$J_1^p(z) = \sum_{k=0}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} \lambda_1^k}{(\lambda_2 - \lambda_1)^j (\lambda_3 - \lambda_1)^{k-j}} \right) \times B(m_1 + p + k + 1; n + 1).$$

Исследуем асимптотику поведения интеграла $J_1^0(z)$ при $n \rightarrow \infty$. Выражая бета-функцию Эйлера через гамма-функцию, получим:

$$J_1^0(z) = \sum_{k=0}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} \lambda_1^k}{(\lambda_2 - \lambda_1)^j (\lambda_3 - \lambda_1)^{k-j}} \right) \times B(m_1 + k + 1; n + 1) = \frac{\Gamma(m_1 + 1) \Gamma(n + 1)}{\Gamma(m_1 + n + 2)} \times \left[1 + \sum_{k=1}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} \lambda_1^k}{(\lambda_2 - \lambda_1)^j (\lambda_3 - \lambda_1)^{k-j}} \right) \right]$$

$$\times \frac{(m_1 + 1)(m_1 + 2) \dots (m_1 + k)}{(n + m_1 + 2) \dots (n + m_1 + k + 1)} \Big].$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} \lambda_1^k}{(\lambda_2 - \lambda_1)^j (\lambda_3 - \lambda_1)^{k-j}} \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{(m_1 + 1)(m_1 + 2) \dots (m_1 + k)}{(n + m_1 + 2) \dots (n + m_1 + k + 1)} \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^{m_2+m_3} \left(\sum_{j=0}^k \frac{C_{m_2}^j C_{m_3}^{k-j} |\lambda_1|^k}{|\lambda_2 - \lambda_1|^j |\lambda_3 - \lambda_1|^{k-j}} \right) \left(\frac{|m|}{n + |m|} \right)^k - 1 = \\ & = \left(1 + \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \frac{|m|}{n + |m|} \right)^{m_2} \times \\ & \times \left(1 + \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3 - \lambda_1|} \frac{|m|}{n + |m|} \right)^{m_3} - 1, \end{aligned}$$

учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, получим, что последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$J_1^0(z) = \frac{\Gamma(m_1 + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + 2)}(1 + o(1)). \quad (1.4)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_1^p(z) = \frac{\Gamma(m_1 + p + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + p + 2)}(1 + o(1)), \quad (1.5)$$

$$p = 1, 2, \dots$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$.

При $n \rightarrow \infty$ $u_0 = \frac{J_1^1}{J_1^0} = \frac{m_1 + 1}{n + m_1 + 2}(1 + o(1))$. Следовательно, при достаточно больших n имеем $u_0 \in [0, 1]$.

Разлагая в ряд Тейлора функцию $e^{\lambda_1(u-u_0)z}$ в окрестности точки u_0 , получим

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 u z} &= e^{\lambda_1 u_0 z} e^{\lambda_1 (u-u_0)z} = \\ &= e^{\lambda_1 u_0 z} \left\{ 1 + \lambda_1 z (u - u_0) + \frac{(\lambda_1 z)^2}{2!} (u - u_0)^2 + \dots \right\} = \\ &= e^{\lambda_1 u_0 z} + e^{\lambda_1 u_0 z} \lambda_1 z (u - u_0) + \rho_u(z), \end{aligned}$$

где при $|z| \leq L$ и $u \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & |\rho_u(z)| \leq \\ & \leq |u - u_0|^2 \left\{ \frac{(|\lambda_1| L)^2}{2!} + \dots + \frac{(|\lambda_n| L)^n}{n!} + \dots \right\} \leq \\ & \leq L_1 (u - u_0)^2. \end{aligned}$$

Учитывая (1.4), (1.5) и выбор u_0 , получаем равенство

$$\begin{aligned} I_1(z) &= (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \\ & \times \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^{m_2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^{m_3} e^{\lambda_1 u_0 z} du + \\ & + \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^{m_2} \times \\ & \times \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^{m_3} \rho_u(z) du = \\ & = (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \\ & \times \left[e^{\lambda_1 u_0 z} J_1^0 + A_p(z) \right], \quad (1.6) \end{aligned}$$

где при $|z| \leq L$

$$\begin{aligned} & |A_p(z)| \leq \\ & \leq L_1 \int_0^1 (1-u)^n u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^{m_2} \times \\ & \times \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^{m_3} (u - u_0)^2 du = \\ & = L_1 (J_1^2 - u_0 J_1^1). \end{aligned}$$

В предыдущем выражении воспользовались представлением

$$(u - u_0)^2 = (u^2 - uu_0) - (uu_0 - u_0^2)$$

и тем, что $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} & |A_p(z)| \leq \\ & \leq L_1 \left\{ \frac{\Gamma(m_1 + 3)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + 4)} - u_0 \frac{\Gamma(m_1 + 2)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + 3)} \right\}. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$|A_p(z)| \leq L_1 \frac{\Gamma(m_1 + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + m_1 + 2)} o(1).$$

Принимая во внимание последнее неравенство, из (1.6) следует

$$\begin{aligned} I_1(z) &= (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \\ & \times e^{\lambda_1 u_0 z} B(m_1 + 1; n + 1)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $|z| \leq L$ окончательно получаем

$$\begin{aligned} R_{n,\bar{m}}^1(z) &= (-1)^{|m|} \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} (\lambda_3 - \lambda_1)^{m_3} \times \\ & \times \frac{m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n + m_1 + 1)!(n + |m|)!} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом случае равенство (0.3) имеет вид $Q_{n,\bar{m}}(z) = (1 + o(1))$, то справедливо равенство (1.1). Равенства (1.2) и (1.3) доказываются аналогично. \square

2 Следствия и обобщения

Из теоремы 1.1, в качестве частных случаев, можно получить уже известные результаты. Не сложно заметить, что при $k = 1$ ($m_1 = m$, $m_2 = m_3 = 0$) из теоремы 1.1 следует результат Д. Браесса (0.2), а при $k = 2$ и $\lambda_3 = 0$, $m_3 = 0$ согласуется с результатами из работ [8], [9]:

Следствие 2.1. Пусть $\vec{m} = (m_1, m_2)$,

$$|m| = m_1 + m_2,$$

а дроби $\pi_{n,\vec{m}}^j(z; e^{\lambda_j z})$ являются аппроксимациями

Эрмита – Паде 2-го рода для системы $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^2$,

где λ_1, λ_2 – различные и отличные от нуля ком-

плексные числа. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) / \sqrt{n} = 0$, то

равномерно по всем \vec{m} , для которых

$$0 \leq |m| \leq m(n),$$

при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 z} - \pi_{n,\vec{m}}^1(z; e^{\lambda_1 z}) &= \\ &= (-1)^{|m|} \frac{m_1! n! (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \lambda_1^{n+m_1+1} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_1+1)!} (1+o(1)), \\ e^{\lambda_2 z} - \pi_{n,\vec{m}}^2(z; e^{\lambda_2 z}) &= \\ &= (-1)^{|m|} \frac{m_2! n! (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} \lambda_2^{n+m_2+1} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_2+1)!} (1+o(1)), \end{aligned}$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leq L$.

При $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, 3$, теорема 1.1 обобщает результаты работы [10].

Следствие 2.2. Пусть n, m_1, m_2, m_3 – произ-

вольные целые неотрицательные числа, а $\pi_{n,\vec{m}}^j(z)$,

$j = 1, 2, 3$ – аппроксимации Эрмита – Паде для

$\vec{f} = \{e^{jz}\}_{j=1}^3$. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} |m| / \sqrt{n} = 0$, то для

любого комплексного числа z равномерно по всем \vec{m} , для которых $0 \leq |m| \leq m(n)$, при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{n,\vec{m}}^1(z) &= (-1)^{|m|} \frac{2^{m_3} m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_1+1)!} (1+o(1)), \\ e^{2z} - \pi_{n,\vec{m}}^2(z) &= \\ &= (-1)^{|m|} \frac{(-1)^{m_1} 2^{n+m_2+1} m_2! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_2+1)!} (1+o(1)), \\ e^{3z} - \pi_{n,\vec{m}}^3(z) &= \\ &= (-1)^{m_3} \frac{2^{m_1} 3^{n+m_3+1} m_3! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! (n+m_3+1)!} (1+o(1)). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Acad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

2. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

3. *Бейкер, Дж. мл.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

4. *Perron, O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig: Teubner, 1929. – 524 p.

5. *Braess, D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z , II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

6. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.

7. *Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function* / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207, № 2. – P. 227–244.

8. *Старовойтов, А.П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 1, ч. 2. – С. 88–91.

9. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.

10. *Кечко, Е.П.* Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде системы трех экспонент / Е.П. Кечко, М.В. Сидорцов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (144). – С. 158–162.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф18М-025).

Поступила в редакцию 13.01.20.

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ КОСИНУСОИДАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

А.В. Нестерович

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

DEFORMATION OF A THREE-LAYER CIRCULAR PLATE UNDER COSINE LOADING IN ITS PLANE

A.V. Nestsiarovich

Belarusian State University of Transport, Gomel

Исследованы перемещения в несимметричной по толщине круглой трехслойной пластине при неосесимметричном нагружении в своей плоскости. Распределенная нагрузка, зависящая от радиальной и тангенциальной координат, приложена в срединной плоскости заполнителя. Уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Общее решение выписано в рядах Фурье. Решение в конечном виде приведено для косинусоидальной нагрузки. Проведена его численная апробация.

Ключевые слова: трехслойная круглая пластина, перемещения, неосесимметричное растяжение-сжатие, косинусоидальная нагрузка.

The displacements in a round three-layer plate asymmetric in thickness under non-axisymmetric loading in its plane are investigated. The distributed load, depending on the radial and tangential coordinates, is applied in the median plane of the aggregate. Equilibrium equations are obtained by the variational Lagrange method. The general decision is written out in the Fourier series. The final solution is given for a cosine load. It was numerically tested.

Keywords: three-layer round plate, displacements, axisymmetric tension-compression, cosine load.

Введение

К материалам, применяемым в современном машиностроении и строительстве, диктуются все более высокие требования по прочности и долговечности. Это обусловило появление композиционных, в том числе трехслойных, элементов конструкций.

Изучению их деформирования посвящено множество публикаций. Постановки и методы решения соответствующих краевых задач приведены в монографиях [1]–[4]. Колебания трехслойных элементов конструкций под действием различных нагрузок посвящены статьи [5]–[12]. В публикациях [13]–[18] рассмотрено напряженно-деформированное состояние трехслойных стержней, прямоугольных и круговых пластин при термосиловых нагружениях. Результаты, исследований изотермического осесимметричного деформирования трехслойных круговых и кольцевых пластин, в том числе связанных с упругим основанием, приведены в статьях [19]–[25]. Постановка и вывод основных уравнений равновесия трехслойных круглых пластин при деформировании в своей плоскости опубликованы в статьях [26]–[30].

Здесь приведена общая постановка и решение краевой задачи о неосесимметричном растяжении-сжатии и кручении упругой круговой трехслойной пластины. Рассмотрен частный случай нагружения косинусоидальной нагрузкой, получены аналитические и численные результаты.

1 Определение общего решения краевой задачи

Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная круглая пластина, состоящая из двух несущих слоев и толстого несжимаемого заполнителя. Постановка задачи приводится в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , связанной со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1.1). К срединной плоскости заполнителя приложена внешняя распределенная нагрузка, проекции которой на оси координат: $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$.

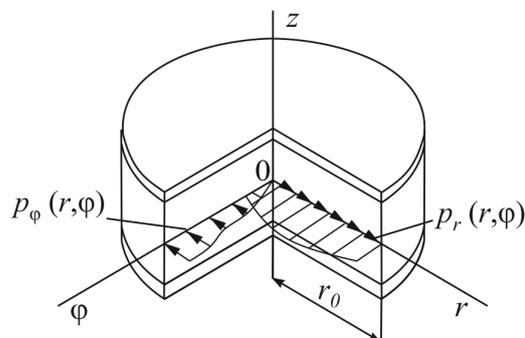


Рисунок 1.1 – Расчетная схема круглой трехслойной пластины

Искомые перемещения обозначим через $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$. Радиальные и тангенциальные деформации будут определяться соотношениями:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_{\varphi,\varphi} + u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{u_{r,\varphi} - u_{\varphi,r} + u_{\varphi,r} r}{2r}.$$

Напряжения следуют из закона Гука. Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где δA – вариация работы внешних сил; δW – вариация работы напряжений.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет

$$\delta A = \iint_S (p_r \delta u_r + p_\varphi \delta u_\varphi) r dr d\varphi,$$

где двойной интеграл берется по всей срединной поверхности заполнителя S .

Виртуальная работа сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int (\sigma_{rr}^{(k)} \delta \varepsilon_{rr}^{(k)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \delta \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + 2\sigma_{r\varphi}^{(k)} \delta \varepsilon_{r\varphi}^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi.$$

Проведя необходимые преобразования, получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{r,rr} + \frac{a_1}{r} u_{r,r} - \frac{a_1}{r^2} u_r + \frac{a_3}{r^2} u_{r,\varphi\varphi} + \\ + \frac{a_2 + a_3}{r} u_{\varphi,\varphi r} - \frac{a_1 + a_3}{r^2} u_{\varphi,\varphi} = -p_r, \\ a_3 u_{\varphi,rr} + \frac{a_{13}}{r} u_{\varphi,r} - \frac{a_3}{r^2} u_\varphi + \frac{a_2 + a_3}{r} u_{r,\varphi} + \\ + \frac{a_1}{r^2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{r^2} u_{r,\varphi} = -p_\varphi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; a_1, a_2, a_3 – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 \left(K_k + \frac{4}{3} G_k \right) h_k, \\ a_2 &= \sum_{k=1}^3 \left(K_k - \frac{2}{3} G_k \right) h_k, \\ a_3 &= \sum_{k=1}^3 G_k h_k. \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (1.1) искомые перемещения и нагрузки раскладываются в тригонометрические ряды Фурье по координате φ :

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi) &= u_{r0}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{rn}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_{rn}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\ u_\varphi(r, \varphi) &= u_{\varphi0}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_r(r, \varphi) &= p_{r0}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{rn}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_{rn}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\ p_\varphi(r, \varphi) &= p_{\varphi0}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $u_{r0}(r), u_{\varphi0}(r)$ – перемещения, соответствующие осесимметричному нагружению; $u_{rn}^{(1)}(r), u_{rn}^{(2)}(r), u_{\varphi n}^{(1)}(r), u_{\varphi n}^{(2)}(r)$ – искомые амплитудные составляющие перемещений, зависящие от радиальной координаты; $p_{r0}(r), p_{\varphi0}(r)$ – осесимметричные составляющие нагрузки; $p_{rn}^{(1)}(r), p_{rn}^{(2)}(r), p_{\varphi n}^{(1)}(r), p_{\varphi n}^{(2)}(r)$ – амплитудные составляющие радиальной и тангенциальной неосесимметричных внешних нагрузок, которые определяются формулами

$$\begin{aligned} p_{rn}^{(1)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ p_{rn}^{(2)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \\ p_{\varphi n}^{(1)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ p_{\varphi n}^{(2)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

После подстановки разложений (1.2) в уравнения равновесия (1.1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему из четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для определения искомых амплитудных функций:

$$\begin{aligned} L_2 \left(a_1 u_{rn}^{(1)}(r) \right) - \frac{a_3 n^2}{r^2} u_{rn}^{(1)}(r) + \frac{(a_2 + a_3)n}{r} u_{\varphi n}^{(2),r}(r) - \\ - \frac{(a_1 + a_3)n}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)}(r) = -p_{rn}^{(1)}(r), \\ L_2 \left(a_1 u_{rn}^{(2)}(r) \right) - \frac{a_3 n^2}{r^2} u_{rn}^{(2)}(r) - \frac{(a_2 + a_3)n}{r} u_{\varphi n}^{(1),r}(r) + \\ + \frac{(a_1 + a_3)n}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)}(r) = -p_{rn}^{(2)}(r), \\ L_2 \left(a_3 u_{\varphi n}^{(1)}(r) \right) + \frac{(a_2 + a_3)n}{r} u_{rn}^{(2),r}(r) - \frac{a_1 n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)}(r) + \\ + \frac{(a_1 + a_3)n}{r^2} u_{rn}^{(2)}(r) = -p_{\varphi n}^{(1)}(r), \\ L_2 \left(a_3 u_{\varphi n}^{(2)}(r) \right) - \frac{(a_2 + a_3)n}{r} u_{rn}^{(1),r}(r) - \frac{a_1 n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)}(r) - \\ - \frac{(a_1 + a_3)n}{r^2} u_{rn}^{(1)}(r) = -p_{\varphi n}^{(2)}(r). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Общее решение системы (1.4) представим в виде суммы решений соответствующей однородной

системы и частного решения $u_{rn}^{(1)*}$, $u_{\varphi n}^{(1)*}$, $u_{rn}^{(2)*}$, $u_{\varphi n}^{(2)*}$ данной системы. Для однородной системы общее решение получено с помощью программного пакета Maple. В результате, с учетом условия ограниченности перемещений в центре пластины, амплитудные перемещения для n -ой составляющей принимают вид

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)} &= C_{n1}r^{S_{n1}} + C_{n2}r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(1)*}, \\ u_{\varphi n}^{(2)} &= -C_{n1}h_{n1}r^{S_{n1}} - C_{n2}h_{n2}r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(2)*}, \\ u_{rn}^{(2)} &= C_{n3}r^{S_{n1}} + C_{n4}r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(2)*}, \\ u_{\varphi n}^{(1)} &= C_{n3}h_{n1}r^{S_{n1}} + C_{n4}h_{n2}r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(1)*}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где C_{ni} ($i=1, \dots, 4$) – константы интегрирования, следующие из граничных условий; S_{n1} , S_{n2} – степени в фундаментальных решениях, зависящие от параметра n , геометрических и упругих характеристик материалов слоев

$$S_{n1} = \sqrt{\frac{a_1^2 n^2 - a_2^2 n^2 - 2a_2 a_{13} n^2 + 2a_1 a_3 - Q_n}{2a_1 a_3}},$$

$$S_{n2} = \sqrt{\frac{a_1^2 n^2 - a_2^2 n^2 - 2a_2 a_3 n^2 + 2a_1 a_3 + Q_n}{2a_1 a_3}},$$

$$Q_n = \sqrt{n^2 (a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_3)} \times \sqrt{(n^2 a_1^2 + (4 - 2n^2)a_1 a_3 - n^2 a_2^2 - 2n^2 a_2 a_3)};$$

h_{n1} , h_{n2} – коэффициенты

$$h_{n1} = \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_3 n^2 - Q) \times (a_1 + a_3 + (a_2 + a_{13})S_{n1})}{h_z},$$

$$h_{n2} = \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_3 n^2 + Q) \times (a_1 + a_{13} + (a_2 + a_3)S_{n2})}{h_z},$$

$$h_z = 2 \left((a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2) a_3^2 + (2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2) a_3 + a_1 a_2^2 n^2 \right) n.$$

2 Косинусоидальная нагрузка

Рассмотрим деформирование пластины под действием неосимметричной косинусоидальной нагрузки (рисунок 2.1)

$$p_r(r, \varphi) = p_0 \cos \varphi, \quad p_\varphi = 0, \quad p_0 = \text{const.} \quad (2.1)$$

Коэффициенты разложения нагрузки (2.1) в ряд (1.2) следуют из (1.3)

$$p_{rn}^{(1)}(r) = \frac{p_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos(n\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ p_0, & n = 1, \end{cases}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} p_{r1}^{(1)}(r) &= p_0, \quad p_{rn}^{(1)}(r) = 0 \quad \text{при } n > 1, \\ p_{rn}^{(2)}(r) &= 0, \quad p_{\varphi n}^{(1)}(r) = p_{\varphi n}^{(2)}(r) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

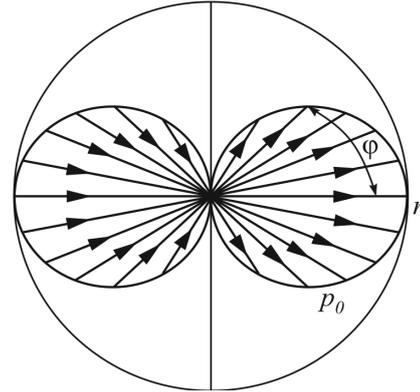


Рисунок 2.1 – Расчетная схема при косинусоидальной нагрузке

Разложение нагрузки в ряд (2.2) содержит одно ненулевое слагаемое, которое не зависит от радиальной координаты, при этом $S_{11} = 0$, $h_{11} = -1$. Ненулевой компонент перемещений будет

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)} &= -C_{11} + C_{12} h_{12} r^{S_{12}} + \\ &+ \frac{a_1 - 3a_3}{4(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r^2, \\ u_{\varphi 1}^{(2)} &= C_{11} + C_{12} r^{S_{12}} - \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{4(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r^2, \\ u_{r1}^{(2)} &= C_{13} - C_{14} h_{12} r^{S_{12}}, \\ u_{\varphi 1}^{(1)} &= C_{13} + C_{14} r^{S_{12}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$S_{12} = \sqrt{\frac{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_3)}{a_1 a_3}},$$

$$h_{12} = \frac{a_1 a_3 + a_3^2 - a_3(a_2 + a_3)S_{12}}{a_1^2 + a_1 a_3 - a_2^2 - 2a_2 a_3 - a_3^2}.$$

Константы интегрирования C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{14} следуют из условия равенства нулю перемещений (2.3) на контуре

$$u_{r1}^{(1)}(r_0) = -C_{11} + C_{12} h_{12} r_0^{S_{12}} + \frac{a_1 - 3a_3}{4(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r_0^2 = 0,$$

$$u_{\varphi 1}^{(2)}(r_0) = C_{11} + C_{12} r_0^{S_{12}} - \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{4(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r_0^2 = 0,$$

$$u_{r1}^{(2)}(r_0) = C_{13} - C_{14} h_{12} r_0^{S_{12}} = 0,$$

$$u_{\varphi 1}^{(1)}(r_0) = C_{13} + C_{14} r_0^{S_{12}} = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{a_1 - 3a_3 + (a_1 + 2a_2 + 3a_3)h_{12}}{4(1 + h_{12})(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r_0^2, \\ C_{12} &= \frac{a_2 + 3a_3}{2(1 + h_{12})(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} p_0 r_0^{2-S_{12}}, \\ C_{13} &= 0, \quad C_{14} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полные перемещения в пластине следуют из соотношений (1.2)

$$u_r(r, \varphi) = u_{r0}(r) + u_{r1}^{(1)}(r) \cos \varphi,$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = u_{\varphi0}(r) + u_{\varphi1}^{(2)}(r) \sin \varphi, \quad (2.5)$$

где $u_{r1}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi1}^{(2)}(r)$ определяются соотношениями (2.3), (2.4).

Симметричная составляющая перемещений отсутствует, поэтому $u_{r0}(r) \equiv 0$, $u_{\varphi0}(r) \equiv 0$. Окончательно выражения для полных перемещений примут вид:

$$u_r(r, \varphi) = - \left[(a_1 - 3a_3)(1 + h_{12})(r_0^2 - r^2) + 2(a_2 + 3a_3)h_{12}(r_0^2 - r_0^{2-S_{12}}r^{S_{12}}) \right] \times$$

$$\times \frac{P_0}{4(1 + h_{12})(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} \cos \varphi,$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = \left[(a_1 - 3a_3 + h_{12}(a_1 + 2a_2 + 3a_3)) \times \right.$$

$$\times (r_0^2 - r^2) + 2(a_2 + 3a_3)(r_0^{2-S_{12}}r^{S_{12}} - r^2) \left. \right] \times$$

$$\times \frac{P_0}{4(1 + h_{12})(a_1 + a_2)(-a_1 + a_2 + 2a_3)} \sin \varphi. \quad (2.6)$$

3 Численные результаты

Результаты получены при интенсивности поверхностной распределенной нагрузки $p_0 = 10$ МПа. Материалы слоев Д16Т-фторопласт-4-Д16Т, радиус пластины $r_0 = 1$ м, толщины слоев $h_1 = 0,02$ м, $h_2 = 0,04$ м, $h_3 = 2c$, $c = 0,2$ м. Механические характеристики материалов заимствованы из [3].

На рисунке 3.1 показано изменение радиальных перемещений $u_r(r, \varphi)$ вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты: 1 – $\varphi = 0, 2\pi$; 2 – $\varphi = \pi/4, 7\pi/4$; 3 – $\varphi = 3\pi/4, 5\pi/4$; 4 – $\varphi = \pi$. Положительный знак

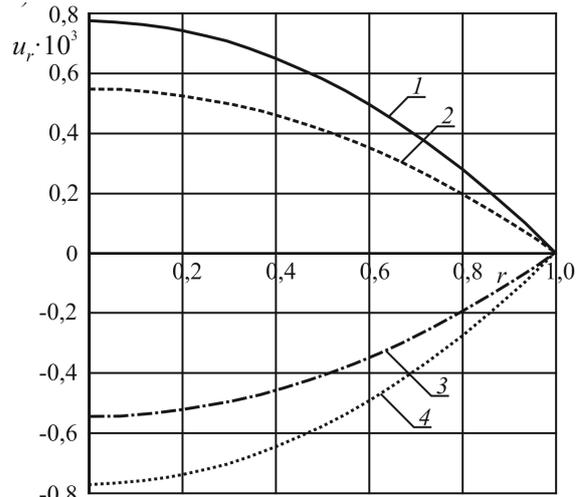


Рисунок 3.1 – Изменение радиальных перемещений $u_r(r, \varphi)$ вдоль радиуса пластины

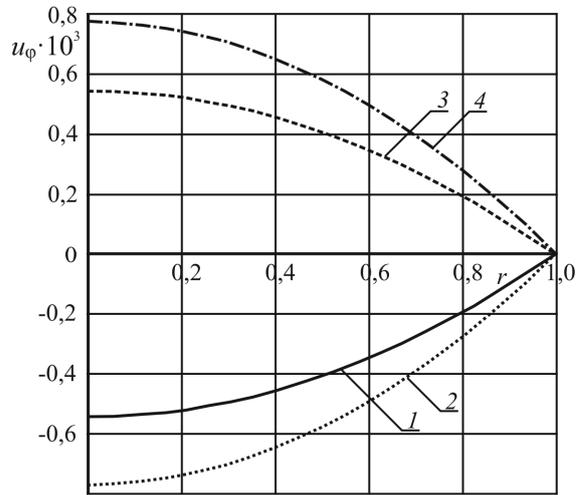


Рисунок 3.2 – Изменение тангенциальных перемещений $u_\varphi(r, \varphi)$ вдоль радиуса пластины

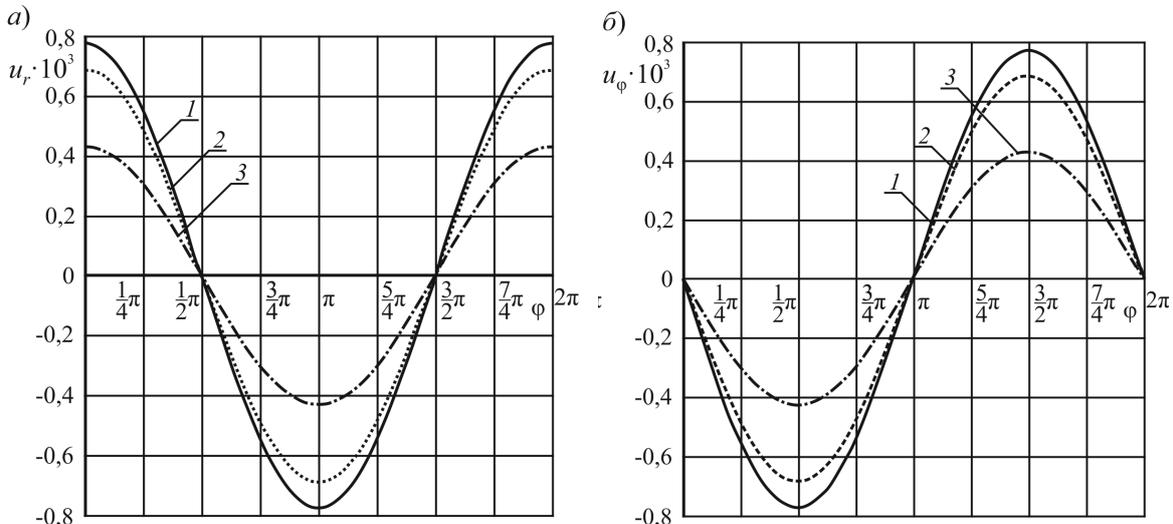


Рисунок 3.3 – Изменение радиальных $u_r(r, \varphi)$ и тангенциальных $u_\varphi(r, \varphi)$ перемещений в зависимости от окружной координаты

радиальных перемещений показывает растяжение, отрицательный – сжатие. Таким образом, первая и четвертая четверти пластины растянуты, вторая и третья – сжаты, из чего следует, что центр пластины сдвинут вправо. Максимальные значения радиальных перемещений по модулю достигаются в центре сечения.

Рисунок 3.2 иллюстрирует изменение тангенциальных $u_\varphi(r, \varphi)$ перемещений вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты: $1 - \varphi = \pi/4, 3\pi/4$; $2 - \varphi = \pi/2$; $3 - \varphi = 5\pi/4, 7\pi/4$; $4 - \varphi = 3\pi/2$. Максимальные значения тангенциальных перемещений совпадают по модулю с радиальными и достигаются в центре пластины. Точки верхней части пластины поворачиваются по часовой стрелке, т. к. соответствующие тангенциальные перемещения отрицательные, нижней – против часовой стрелки.

Рисунок 3.3 иллюстрирует изменение радиальных $u_r(r, \varphi)$ – (а) и тангенциальных $u_\varphi(r, \varphi)$ – (б) перемещений в зависимости от окружной координаты φ : $1 - r = 0, 2 - r = r_0/3, 3 - r = 2r_0/3$. Экстремальные значения радиальных перемещений соответствуют экстремумам функции $\cos\varphi$, тангенциальных – $\sin\varphi$. При приближении к контуру пластины перемещения уменьшаются до нуля в соответствии с граничными условиями.

Заключение

Предложенное общее аналитическое решение и численные результаты могут быть использованы для исследования напряженно-деформированного состояния при нагружении произвольной неосесимметричной нагрузкой в плоскости пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
2. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 275 с.
3. Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.B. Nagiyev. – Apple Academic Press, New York, 2012. – 346 p.
4. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – М.: Физматлит, 2008. – 384 с.
5. Старовойтов, Э.И. Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А.В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002. – Т. 34, № 5. – С. 70–79.
6. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов,

Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

7. Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 86–93.

8. Старовойтов, Э.И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

9. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 8. – P. 945–952.

10. Deshpande, V.S. Dynamic Response of a Clamped Circular Sandwich Plate Subject to Shock Loading / V.S. Deshpande, N.A. Fleck // J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71, № 5. – P. 637–645.

11. Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates under resonant loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 12. – P. 1458–1463.

12. Леоненко, Д.В. Колебания элементов авиационных конструкций, возбужденные тепловым воздействием / Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский, Э.И. Старовойтов // Известия вузов. Авиационная техника. – 2016. – № 4. – С. 25–32.

13. Старовойтов, Э.И. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня / Э.И. Старовойтов, А.В. Попченко, Д.В. Тарлаковский // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – Вып. 28. – С. 23–26.

14. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А.С. Зеленая // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 98–104.

15. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

16. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

17. Starovoitov, E.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.

18. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
19. Козел, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.
20. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.
21. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.
22. Козел, А.Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А.Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.
23. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 53–57.
24. Захарчук, Ю.В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10. – С. 55–66.
25. Захарчук, Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.
26. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.
27. Нестерович, А.В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.
28. Нестерович, А.В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.
29. Нестерович, А.В. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 266–272.
30. Нестерович, А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).

Поступила в редакцию 15.01.20.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСКРОЯ ЛИСТОВОГО МАТЕРИАЛА

О.М. Демиденко¹, Е.А. Якимов², Д.А. Денисевич²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Белорусско-Российский университет, Могилев

THE RESEARCH OF RATIONAL CUTTING ALGORITHMS OF SHEET MATERIAL

O.M. Demidenko¹, E.A. Yakimov², D.A. Denisevich²

¹F. Scorina Gomel State University

²Belarusian-Russian University, Mogilev

Рассматривается исследование алгоритмов раскроя листового материала. Представлены результаты исследования трех алгоритмов: первый подходящий, первый подходящий с упорядочиванием и генетический алгоритм. Предложен способ сравнения алгоритмов при решении задач одномерного раскроя по критерию «бесполезный материал».

Ключевые слова: рациональный раскрой материала, алгоритмы раскроя.

The study of rational cutting algorithms of sheet material is considered. The results of the study of three algorithms are presented: the first suitable, the first suitable with ordering and the genetic algorithm. A method for comparing algorithms for solving problems of one-dimensional cutting by the criterion of “useless material” is proposed.

Keywords: rational cutting of material, cutting algorithms.

Введение

Раскрой материалов – технологический процесс получения изделий из листовых материалов (стекло, фанера, металл и др.). Выполняется с учетом наиболее эффективного использования площади листового материала и минимизации отходов производства. В качестве объекта исследования выбран процесс изготовления продукции из листового материала в условиях предприятий с единичным или мелкосерийным типом производства.

Как известно, при раскрое листового материала важным показателем, как для переработчиков, так и для заказчиков их продукции является оптимизация производственных процессов на предприятии, которая заключается в сокращении отходов материала, уменьшении трудоемкости продукции (отсутствии дополнительных операций).

При организации раскроя перед технологами, конструкторами, специалистами управленческого учета стоит задача увеличения коэффициента использования материала с целью снижения технологических затрат, оптимизации структуры затрат (увеличении доли оплаты труда за счет снижения материальных затрат), увеличения объема производства и реализации продукции.

Технология раскроя часто регламентируется специальной технической документацией в виде раскройных карт. При разработке карт раскроя необходимо использовать резервы экономии материалов путем сокращения отходов.

Технологический процесс раскроя происходит следующим образом: на станок подается листовая материал, а в программу управления станком загружается карта раскроя листа (в виде файла в специальном формате).

Общая постановка задачи формулируется следующим образом: имеется прямоугольный листовый материал определенных размеров и прямоугольные изделия с индивидуальными размерами. Для получения изделий лист необходимо раскроить с минимальными отходами.

Математическая постановка задачи заключается в размещении прямоугольных изделий различных размеров на листовом материале заданного размера с минимальными остатками исходного материала при определенных ограничениях, например, геометрические ограничения:

- проверка принадлежности объектов (изделий) к области размещения;
- отсутствие пересечения объектов.

Для оценки эффективности методов решения задачи раскроя необходимо применить ряд количественных критериев. В классической постановке задачи основным критерием оценки эффективности алгоритмов получения карт раскроя является максимальное значение коэффициента использования материала – отношение суммы площадей полученных изделий к сумме площади исходного листового материала [1].

Другими критериями являются: коэффициент делового остатка, коэффициент расхода материала, коэффициент относительной плотности

размещения. Деловым остатком является остаток производства с заданным минимальным линейным размером, который определяется из технологии производства [2]. Коэффициент делового остатка – отношение площади делового остатка к общей площади листового материала; коэффициент расхода материала – дополнение до единицы коэффициента делового остатка; коэффициент относительной плотности размещения – отношение суммарной площади изделий к разности между общей площадью листа и площадью делового остатка.

Также имеют место некоторые частные случаи, для оценки эффективности которых необходимо учитывать, например, дополнительный критерий минимизации площади прямоугольника, который охватывает все изделия на листовом материале. Решение задачи состоит в том, чтобы минимизировать сумму площадей между изделиями внутри этого прямоугольника. Сумма таких площадей считается «бесполезным материалом», поскольку она небольшая и из нее невозможно изготовить какие-либо изделия [3].

1 Формализация задачи исследования

Пусть $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n \mid n = |N|\}$ – множество изделий, которое требуется изготовить из листового материала площадью S . Каждое изделие N_i , $i = 1, \dots, |N|$ имеет ширину W_i , длину L_i , площадь $s_i = W_i \cdot L_i$, $0 < s_i \leq S$, $i = 1, \dots, |N|$.

Множество изделий имеет ограничение по площади:

$$\sum_{i=1}^{|N|} s_i \cdot x_i \leq S, \quad (1.1)$$

где x_i – количество изделий i -го типа, $i = 1, \dots, |N|$, размещаемых на листовом материале.

Ограничение на переменные:

$$s_i \geq 0, x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, |N|. \quad (1.2)$$

Целевая функция для минимизации отходов листового материала имеет вид:

$$S - \sum_{i=1}^{|N|} s_i \cdot x_i \rightarrow \min, \quad i = 1, \dots, |N|.$$

Критерий «бесполезный материал» P – разность площади прямоугольника, охватывающего все изделия на листовом материале, и суммы площадей изделий (рисунок 1.1).

При этом множество изделий имеет ограничение по площади:

$$\sum_{i=1}^{|N|} s_i \cdot x_i \leq D, \quad i = 1, \dots, |N|,$$

где D – площадь прямоугольника, охватывающего все изделия на листовом материале (рисунок 1.1).

Ограничение на переменные совпадает с (1.2). Тогда критерий «бесполезный материал» P вычисляется по формуле:

$$P = D - \sum_{i=1}^{|N|} s_i \cdot x_i \rightarrow \min, \quad i = 1, \dots, |N|. \quad (1.3)$$

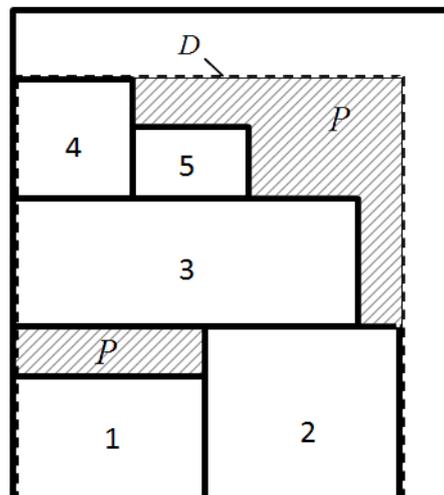


Рисунок 1.1 – Карта раскроя листового материала: P – «бесполезный материал»; D – прямоугольник, охватывающий все изделия на листовом материале

2 Алгоритмы рационального раскроя листового материала

Алгоритм «Первый подходящий». В соответствии с алгоритмом «Первый подходящий» изделия добавляют в карту раскроя по следующему правилу: первое изделие добавляют на листовую материал, начиная с левого нижнего угла. На шаге k пытаются добавить изделие N_i в листовую материал, начиная с нижнего правого угла N_{i-1} изделия. Если изделие входит по ширине листа, то добавляют его, иначе пытаются добавить по длине листа, начиная от верхнего левого угла изделия N_{i-1} . Если же изделие не помещается по ширине и по длине листового материала, его добавляют в список неподходящих изделий [4].

Шаги решения задачи:

Шаг 1. Вводят значения ширины и длины для листового материала.

Шаг 2. Вводят значения ширины W_i и длины L_i для каждого изделия N_i .

Шаг 3. Проверяют, помещается ли изделие N_i по ширине листового материала. Если да, то добавляют первое изделие на листовую материал в левый нижний угол, если нет – добавляют в список неподходящих изделий.

Шаг 4. Добавляют следующее изделие на листовую материал и проверяют, помещается ли изделие по ширине листового материала, начиная с нижнего правого угла N_{i-1} изделия.

Шаг 5. Если изделие помещается, то добавляют, иначе – пробуют добавить по длине, начиная с левого верхнего угла изделия N_{i-1} .

Шаг 6. Проверяют, помещается ли изделие по длине и по ширине листового материала, если

да, то добавляют в карту раскроя, иначе – в список неподходящих изделий.

Шаг 7. Возврат к шагу 4, пока не будут добавлены все изделия.

Алгоритм «Первый подходящий с упорядочиванием». По алгоритму «Первый подходящий с упорядочиванием» изделия сортируются по убыванию их площади. Шаги решения задачи совпадают с выполнением алгоритма «Первый подходящий». Однако после шага 2 следует дополнительный шаг 2.1, который сортирует изделия в порядке убывания их площади.

Генетический алгоритм – это алгоритм, который позволяет найти рациональное решение аналитически неразрешимых или сложно решаемых проблем. Алгоритм использует естественный отбор и изменения при эволюции, напоминающие биологическую эволюцию, что позволяет отыскать наилучшее решение проблемы [5].

Шаги работы алгоритма:

Шаг 1. Формирование случайной начальной популяции возможных решений.

Шаг 2. Оценка «приспособленности особей» – вычисление целевой функции. Приспособленность каждой особи оценивается с помощью функции приспособленности. В задаче раскроя приспособленность определяется количеством свободного места на листовом материале, поэтому функцией приспособленности будет являться целевая функция для минимизации отходов листового материала.

Шаг 3. Проверяется, было ли получено оптимальное решение (или достаточно хорошее) или выполнены ли другие условия останки. Если да, то алгоритм заканчивается. Если нет – переход к четвертому шагу.

Шаг 4. Размножение путем случайной рекомбинации частей геномов двух особей. Особи в популяции сортируются по убыванию значения целевой функции. Вся популяция разбивается на подгруппы и из каждой подгруппы берутся пары лучших особей-родителей для скрещивания.

Шаг 5. Затем происходит генерация потомков. Генерация потомков означает появление новых особей в процессе кроссинговера, при котором два родителя обмениваются генами для получения новой особи.

Шаг 6. Мутация – это, фактически, процесс клонирования, при котором происходят различные изменения при передаче информации от родителя к потомку. Уменьшают размер популяции до заданного сортировкой по значению целевой функции и отсечением «лишних», наименее приспособленных. Вычисляют целевые функции для мутировавших особей.

Шаг 7. Проверяют сходимость решения и количество поколений. Если условие прекращения алгоритма достигнуто – выход и возврат лучшей «особи». Если нет – переход шагу 4. В проводимых исследованиях критерием останки является формирование сотого поколения [6].

В области раскроя особыми выступают изделия. Они, в свою очередь, делятся на две взаимосвязанные хромосомы, первая из которых включает в себя размеры изделия, вторая – параметр взаимосвязанности с соседним изделием. Гены – это данные первой и второй хромосомы вместе для одного изделия.

3 Методика и результаты исследования

Для исследования алгоритмов «Первый подходящий», «Первый подходящий с упорядочиванием» и генетического алгоритма требуется ввод исходных данных, которые могут быть сгенерированы как случайная выборка или описаны вручную. В ходе исследования данные предложено описывать вручную в соответствии с ограничением (1.1). Размеры заказанных изделий и листового материала представлены целыми числами. Если заказаны два одинаковых изделия, то имеется возможность указать их количество для размещения на листовом материале. Условия проведения экспериментов для всех алгоритмов одинаковые. Полученные таким образом в результате исследований экспериментальные данные позволяют провести анализ решения задачи раскроя по критерию (P, m^2) «бесполезная площадь» (1.3) и времени (T, c) ее решения каждым алгоритмом. Предложено провести три эксперимента с каждым алгоритмом.

Эксперимент 1. Заказаны изделия с одинаковыми размерами: $W_i = 1$ м, $L_i = 1$ м, $i = 1, \dots, 10$. Площадь каждого изделия $s_i = 1$ м², $i = 1, \dots, 10$. Изделия укладываются на листовом материале шириной $W = 2$ м и длиной $L = 5$ м без отходов. Эксперимент используется для тестирования программного обеспечения, реализующего алгоритм раскроя.

Эксперимент 2. Размеры изделий изменяются по ширине в пределах от 0,7 м до 1,2 м и по длине от 1,0 м до 1,5 м. Площадь изделий, расположенных на листовом материале шириной $W = 2$ м и длиной $L = 5$ м составляет

$$\sum_{i=1}^7 s_i = 8,25 \text{ м}^2.$$

Эксперимент 3. Размеры изделий изменяются по ширине в пределах от 0,4 м до 1,5 м и по длине от 0,5 м до 1,3 м. Площадь изделий, расположенных на листовом материале шириной $W = 2$ м и длиной $L = 5$ м составляет

$$\sum_{i=1}^{15} s_i = 7,26 \text{ м}^2 \dots$$

В эксперименте 2 заказаны 7 изделий с размерами, отличающимися не более, чем в 2 раза. В эксперименте 3 заказаны 15 изделий со значительными отличиями по размерам до 5 раз (таблица 3.1).

Программное обеспечение алгоритмов реализовано на языке JavaScript. Эксперименты выполнены на компьютере с процессором Intel Core i5 3230M 2,6 ГГц, ОЗУ 6 ГБ (таблица 3.2).

Таблица 3.1 – Исходные данные для второго и третьего экспериментов

Эксперимент 2				Эксперимент 3			
№ изделия (кол-во)	W_i , м	L_i , м	s_i , м ²	№ изделия (кол-во)	W_i , м	L_i , м	s_i , м ²
1–2 (2)	1,0	1,5	1,5	1–5 (5)	0,4	0,5	0,2
3 (1)	0,7	1,5	1,05	6–10 (5)	0,4	0,5	0,2
4 (1)	0,8	1,5	1,2	11–12 (2)	1,0	1,0	1,0
5 (1)	1,2	1,0	1,2	13 (1)	1,5	0,7	1,05
6 (1)	0,8	1,0	0,8	14 (1)	1,0	1,3	1,3
7 (1)	1,0	1,0	1,0	15 (1)	0,7	1,3	0,91

Таблица 3.2 – Результаты исследования алгоритмов раскроя

Алгоритм	Эксперимент 1		Эксперимент 2		Эксперимент 3	
	T , с	P , м ²	T , с	P , м ²	T , с	P , м ²
Первый подходящий	0,004	0	0,006	1,75	0,006	2,29
Первый подходящий с упорядочиванием	0,006	0	0,006	1,75	0,006	1,74
Генетический алгоритм	12,77	0	7,99	1,12	78,81	1,07

4 Обсуждение результатов

В первом эксперименте алгоритмы уложили все изделия на листовом материале без отходов. При этом генетический алгоритм значительно проигрывает по времени, $T = 12,77$ с (таблица 3.2).

Во втором эксперименте алгоритмы «Первый подходящий» и «Первый подходящий с упорядочиванием» уложили изделия на листовом материале за одинаковое время. При этом площадь D (рисунок 1.1) совпадает с площадью S листового материала:

$$S - \sum_{i=1}^7 s_i = 1,75 \text{ м}^2.$$

Генетический алгоритм укладывает изделия более плотно и $D < S$. При этом значительно уступает другим алгоритмам по времени ($T = 7,99$ с).

В третьем эксперименте алгоритм «Первый подходящий» по критерию «бесполезный материал» уступает двум другим: $P = 2,29 \text{ м}^2$ (таблица 3.2). Генетический алгоритм дает лучший результат по критерию «бесполезный материал» ($P = 1,07 \text{ м}^2$) и на порядок худший результат по времени по сравнению со вторым экспериментом ($T = 78,81$ с).

Следует отметить, что с ростом сложности задачи раскроя генетический алгоритм находит лучшее решение в сравнении с остальными алгоритмами, но значительно проигрывает по времени.

Заключение

Выполненные исследования показывают, что генетический алгоритм по быстродействию уступает исследуемым алгоритмам «Первый подходящий», «Первый подходящий с упорядочиванием» и превосходит их по критерию «бесполезный материал». Однако в производственных условиях критерий быстродействия в поиске лучшего решения не является приоритетным для раскроя листовых материалов.

Практическая значимость выполненного исследования заключается в их использовании при организации рационального раскроя листового материала на предприятиях с целью снижения технологических затрат, оптимизации структуры затрат, увеличения объема производства и реализации продукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исследование бизнес-процесса учета делового остатка при раскрое листовых материалов* / Р.А. Файзрахманов [и др.] // Вестник ПНИПУ. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2013. – № 7. – С. 143–148.
2. *Марков, В.Н.* Критерии эффективности методов решения задачи раскроя-упаковки плоских материалов / В.Н. Марков, Е.А. Руденко // Научные труды КубГТУ. – 2014. – № S6. – С. 316–322.
3. *Rodríguez, I.S.* Aplicación de Algoritmos Genéticos para la optimización del corte de material / I.S. Rodríguez // Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Informàtica Universitat Politècnica de València. Trabajo Fin de Grado. Grado en Ingeniería Informàtica. – 2015. – P. 14.
4. *Кошлаков, Н.В.* Задача геометрического покрытия / Н.В. Кошлаков // Политехнический молодежный журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2018. – № 1 (18). – С. 3.
5. *Клименко, А.В.* Методика динамического ценообразования на основе использования нейросетевого моделирования / А.В. Клименко, М.В. Яцковец, Ю.С. Карась // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2018. – № 3 (108). – С. 104–108.
6. *Ковалевич, А.А.* Исследование стохастических алгоритмов оптимизации для применения в имитационном моделировании систем / А.А. Ковалевич, А.И. Якимов, Д.М. Албкейрат // Информационные технологии. – 2011. – № 8. – С. 55–60.

Поступила в редакцию 03.02.20.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).