

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№4 (41) 2019

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (41) 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Гришечкин Ю.А., Павленко А.В., Капшай В.Н.** Об одном приближенном аналитическом методе решения уравнения Шредингера с гауссовым потенциалом 7
- Ермаков С.Ф., Шершнев Е.Б., Никитюк Ю.В., Соколов С.И.** Влияние длины радикала жирной кислоты в эфирах холестерина на оптические свойства жидких смазочных сред 11
- Котухов А.В., Жарко Н.А., Минчук В.С., Дежжунов Н.В.** Кавитация в водных растворах углекислого газа 17
- Михаловский И.С., Матвейко Н.П., Мельникова Г.Б., Волнянко Е.Н., Бабодей В.Н., Пчельникова А.В.** Определение размеров частиц дисперсной фазы наноструктурированных фосфолипидов в нативных маслах растительного происхождения 23
- Невмержицкая А.С., Тюменков Г.Ю.** О приведенных полуэмпирических уравнениях состояния вида $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$ 28
- Юревич В.А.** Импульсы сверхизлучения в тонком слое плотной резонансной среды 31

МАТЕМАТИКА

- Близнец И.В., Селькин В.М.** Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта 36
- Бородич Р.В.** О пересечении абнормальных A -допустимых подгрупп с ограничениями на индексы, не содержащих \mathfrak{F} -корадикал 39
- Васильев А.Ф., Мельченко А.Г.** Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами 44
- Коновалова М.Н., Сохор И.Л.** Конечные группы с некоторыми формационно субнормальными подгруппами 51
- Мардвилко Т.С.** Поведение L_p -квазинормы производных произведений Бляшке на прямой 55
- Можаровский В.В., Москалева М.В., Кузьменков Д.С.** Расчет изгибных перемещений зубьев зубчатых колес из композитов 59
- Сафонов В.Г., Сафонова И.Н., Скиба А.Н.** Об одном обобщении σ -локальных и Бэра-локальных формаций 65
- Тютянов В.Н., Трофимук А.А.** Цепи в конечных группах 70

ИНФОРМАТИКА

- Дрыбин Е.А., Садов В.С., Демиденко О.М.** Повышение защищенности стеговложения за счет изменения режима встраивания данных 74
- Жердецкий Ю.В.** Метод вероятностно-алгебраического моделирования потенциально опасных технологических систем производства 78
- Осипенко Н.Б., Осипенко А.Н.** Схема эволюционного конструирования регрессионных моделей 83

ТЕХНИКА

- Киркор М.А., Покатилов А.Е., Гальмак А.М.** Исследование пространственного движения в биомеханике спорта с помощью кватернионов 92
- Киселев А.В., Гольдаде В.А.** Автоматизированная система экологического мониторинга и обнаружения ландшафтных пожаров 98
- Москвичёв М.И., Гайшун В.Е., Сидский В.В., Косенок Я.А., Васькевич В.В., Русыкин А.С., Яночкин П.С.** Пеностекломатериалы на основе стекольных отходов бытового и промышленного происхождения и силикатов щелочных металлов 102

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 16.12.19. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 11,14. Тираж 100 экз. Заказ № 811.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2019
© Проблемы физики, математики и техники, 2019
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2019

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 4 (41) 2019

CONTENTS

PHYSICS

- Grishechkin Yu.A., Paulenka A.V., Kapshai V.N.** On an approximate analytical method for solving the Schrödinger equation with the Gaussian potential 7
- Ermakov S.F., Shershnev E.B., Nikitjuk Y.V., Sokolov S.I.** Effect of the length of the fatty acid radical in cholesterol esters on the optical properties of liquid lubricating media 11
- Kotukhov A.V., Zharko N.A., Minchuk V.S., Dezhkunov N.V.** Cavitation in aqueous solutions of carbon dioxide 17
- Mikhalovsky J.S., Matveyko M.P., Melnikova G.B., Volnyanko E.N., Babodey V.N., Pchel-nikova A.V.** Particles sizes determination of the nanostructured phospholipides dispersed phase in plant origin native oils 23
- Nevmerzhitskaya A.S., Tyumenkov G.Yu.** On the reduced semi-empirical equations of state of the form $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$ 28
- Yurevich V.A.** Superradiation pulses in a thin layer of dense resonant medium 31

MATHEMATICS

- Bliznets I.V., Selkin V.M.** On finite groups with modular Schmidt subgroup 36
- Borodich R.V.** On intersection of abnormal A -admissible subgroups with index restriction that do not contain a \mathfrak{F} -residual 39
- Vasil'ev A.F., Melchenko A.G.** Finite groups with absolutely formationally subnormal Sylow subgroups 44
- Konovalova M.N., Sokhor I.L.** Finite groups with formational subnormal subgroups 51
- Mardvilko T.S.** Sharp L_p -inequalities for derivatives of Blaschke products on the straight line 55
- Mozharovsky V.V., Moskaleva M.V., Kuzmenkov D.S.** Calculation of bending deflections of tooth of gears from composites 59
- Safonov V.G., Safonova I.N., Skiba A.N.** On one generalization of σ -local and Baer-local formations 65
- Tyutyaynov V.N., Trofimuk A.A.** Chains in finite groups 70

INFORMATION SCIENCE

- Drybin Y.A., Sadov V.S., Demidenko O.M.** Improvement of stego security by changing the data integration mode 74
- Zherdetsky Y.V.** The method of probabilistic-algebraic simulation of potentially hazardous technological production systems 78
- Osipenko N.B., Osipenko A.N.** Scheme of evolutionary construction of regression models 83

TECHNICS

- Kirkor M.A., Pokatilov A.E., Gal'mak A.M.** The study of the spatial movement in biomechanics of sports with the help of quaternions 92
- Kiselyov A.V., Goldade V.A.** Automatized system of ecological monitoring and landscape fire detection 98
- Moskvichyov M.I., Gaishun V.E., Sidsky V.V., Kosenok Ya.A., Vaskevich V.V., Rusy-kin A.S., Yanochkin P.S.** Foam-glass materials based on glass waste of domestic and industrial origin and alkalium metal silicates 102

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 539.12.01

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ГАУССОВЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ю.А. Гришечкин, А.В. Павленко, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON AN APPROXIMATE ANALYTICAL METHOD FOR SOLVING THE SCHRÖDINGER EQUATION WITH THE GAUSSIAN POTENTIAL

Yu.A. Grishechkin, A.V. Paulenka, V.N. Kapshai

F. Scorina Gomel State University

Предложен приближенный аналитический метод решения уравнения Шредингера с гауссовым потенциалом. Суть метода состоит в представлении искомой волновой функции в виде суперпозиции волновых функций точно решенной задачи. Также в целях контроля точности задача была решена численным способом в импульсном представлении.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, интегральное уравнение, волновая функция, потенциал Гаусса, гармонический осциллятор.

The approximate analytical method for solving the Schrödinger equation with the Gaussian potential is proposed. The essence of the method is to represent the wave function as a superposition of wave functions of exact solving problem. Also, in order to control the accuracy, the problem was solved numerically in the momentum representation.

Keywords: Schrödinger equation, integral equation, wave function, Gaussian potential, harmonic oscillator.

Введение

Для моделирования короткодействующих взаимодействий в нерелятивистской квантовой теории широко используется уравнение Шредингера с гауссовым потенциалом [1]–[6]

$$U(r) = -V_0 \exp(-ar^2), \quad (0.1)$$

где $V_0 > 0$ – глубина потенциала, $a > 0$ – параметр, характеризующий его ширину. Для решения этой задачи были предложены различные приближенные аналитические и численные методы [1]–[6]. В данной работе предложен новый приближенный аналитический метод решения уравнения Шредингера с потенциалом (0.1), основанный на представлении искомой волновой функции в виде суперпозиции волновых функций трехмерного гармонического осциллятора. Этот метод, в отличие от других, может быть применен для решения релятивистских уравнений с потенциалами аналогичными (0.1). Решения найдены в случае связанных состояний.

1 Приближенный аналитический метод

Парциальное уравнение Шредингера в сферических координатах для произвольного орбитального момента частицы имеет вид [7]

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi_l(r) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] \psi_l(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_l(r) = 0, \quad (1.1)$$

где m – масса частицы, \hbar – приведенная постоянная Планка, r – координата, $\psi_l(r)$ – волновая

функция, $U(r)$ – потенциал, $E < 0$ – энергия частицы, $l = 0, 1, 2, \dots$ – орбитальное квантовое число. Приведем уравнение (1.1) с потенциалом (0.1) к безразмерному виду. Для этого выполним замену переменных и энергии по формулам

$$r = \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}} \zeta; \quad E = -\lambda V_0,$$

где ζ – безразмерная переменная, $\lambda > 0$ – безразмерный спектральный параметр. В результате получим уравнение

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \psi_l(\zeta) + \left[-\lambda + \exp(-q\zeta^2) - \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \right] \psi_l(\zeta) = 0, \quad (1.2)$$

где $q = \hbar^2 a / 2mV_0$.

Решение уравнения (1.2) будем искать в виде суммы

$$\psi_l(\zeta) = \sum_{n=0}^M C_n \phi_n^l(\zeta),$$

$$\phi_n^l(\zeta) = N_n^l \zeta^{l+1} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) L_n^{l+1/2}(\zeta^2), \quad (1.3)$$

где $\phi_n^l(\zeta)$ – парциальные волновые функции трехмерного гармонического осциллятора [8], $N_n^l = \sqrt{2n! / \Gamma(l+3/2+n)}$ – нормирующий множитель, $\Gamma(z)$ – гамма функция, $L_n^{l+1/2}(z)$ – обобщенный полином Лагерра [9], C_n – неизвестные постоянные коэффициенты. Выбор количества

слагаемых в сумме (1.3) обусловлен точностью, с которой нужно найти решение. Подставив (1.3) в уравнение (1.2), умножив полученное таким образом равенство на $\phi'_k(\zeta)$ и затем проинтегрировав его на полуоси $\zeta \in [0; \infty)$, получим:

$$\sum_{n=0}^M C_n \int_0^\infty \phi'_k(\zeta) \frac{d^2 \phi'_n(\zeta)}{d\zeta^2} d\zeta + \sum_{n=0}^M C_n \int_0^\infty \left[-\lambda + \exp(-q\zeta^2) - \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \right] \times \phi'_n(\zeta) \phi'_k(\zeta) d\zeta = 0. \quad (1.4)$$

Для упрощения равенства (1.4) воспользуемся уравнением Шредингера в безразмерных переменных в случае трехмерного гармонического осциллятора, выразив из него вторую производную волновой функции:

$$\frac{d^2 \phi'_n(\zeta)}{d\zeta^2} = \left(\zeta^2 - 2l - 3 - 4n + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \right) \phi'_n(\zeta). \quad (1.5)$$

Заменяя в равенстве (1.4) вторую производную функции $\phi'_n(\zeta)$ правой частью уравнения (1.5), выполнив замену переменной $\zeta^2 = t$, а также учитывая условие ортогональности обобщенных полиномов Лагерра [9], получим следующую систему уравнений для коэффициентов C_n :

$$-\sum_{n=0}^M C_n (2l + 3 + 4n) \delta_{nk} + \sum_{n=0}^M C_n I_{nk}^l + \sum_{n=0}^M C_n T_{nk}^l = C_k \lambda. \quad (1.6)$$

В равенстве (1.6) использованы следующие обозначения для интегралов:

– при $n, k > 1$

$$I_{nk}^l = \int_0^\infty \sqrt{t} \phi'_k(t) \phi'_n(t) dt = N_n^l N_k^l \left[g(n) \delta_{n,m} - g(n) \delta_{n,m-1} - g(m) \delta_{n-1,m} + g(n-1) \delta_{n-1,m-1} \right], \quad (1.7)$$

– при $n = 0$ или $k = 0$

$$I_{nk}^l = \int_0^\infty \sqrt{t} \phi'_k(t) \phi'_n(t) dt = N_n^l N_k^l \frac{\Gamma(l+5/2)\Gamma(l+n+3/2)}{n! \Gamma(l+3/2)} \times {}_2F_1 \left(-n, l + \frac{5}{2}, l + \frac{3}{2}; 1 \right),$$

а также

$$T_{nk}^l = \int_0^\infty \exp(-qt) \phi'_k(t) \phi'_n(t) dt = N_n^l N_k^l \frac{\Gamma(k+n+l+3/2) q^{n+k}}{k! n! (q+1)^{n+k+l+3/2}} \times {}_2F_1 \left(-n, -m, -n-m-l - \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{q^2} \right) = N_n^l N_k^l \frac{\Gamma(k+n+l+3/2) q^{n+k}}{k! n! (q+1)^{n+k+l+3/2}} \times {}_2F_1 \left(-n, -m, -n-m-l - \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{q^2} \right),$$

где $g(n) = \Gamma(5/2 + n + l)/n!$, ${}_2F_1(a, b, c; z)$ – гипергеометрический ряд, $\delta_{i,j}$ – дельта-символ Кронекера [9]. Значения интегралов (1.7) взяты из [10].

Таким образом, задача о решении уравнения Шредингера (1.1) с потенциалом (0.1) в случае связанных состояний сведена к задаче о нахождении собственных значений λ линейной алгебраической системы однородных уравнений

$$\sum_{n=0}^M C_n A_{nk} = \lambda C_k, \quad A_{nk} = I_{nk} + T_{nk} - (2l + 3 + 4n) \delta_{nk}.$$

Результаты нахождения λ для некоторых значений орбитального момента и $q = 0,005$ приведены в таблице 1.1.

Как видно из таблицы, для указанного значения q существуют состояния до $l = 7$. Вычисления показывают, что при увеличении q количество состояний уменьшается. Это естественно,

Таблица 1.1 – Собственные значения λ , найденные приближенно аналитически

l	n	M		
		300	600	1200
0	1	0,797388006692130	0,797388006692108	0,797388006692111
	2	0,553887457151760	0,553887457151750	0,553887457151752
	3	0,345015684742373	0,345015684819078	0,345015684819068
	4	0,175228714966775	0,175229048241779	0,175229048243878
	5	0,052202862855601	0,052522311841011	0,052522779950358
1	1	0,668962196177320	0,668962196176221	0,668962196177254
	2	0,442295685076343	0,442295685076715	0,442295685076913
	3	0,252234946770758	0,252234952063932	0,252234952063506
	4	0,104599176941210	0,104611683610239	0,104611684774289
	5	0,007846098905027	0,011733398009518	0,011860935223178
5	1	0,214944363991333	0,214944365068264	0,214944365068257
	2	0,067320876652722	0,067328054279784	0,067328056076097
6	1	0,118768189153335	0,118768251153473	0,118768251154782
7	1	0,031312330222893	0,031315796089122	0,031315798724903

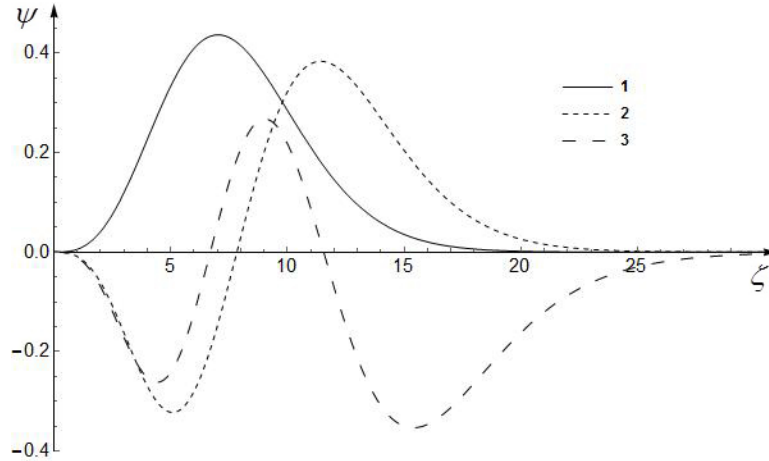


Рисунок 1.1 – Волновые функции первых трех состояний

так как согласно (1.2) величина q обратно пропорциональна глубине потенциала V_0 , а с ростом глубины число энергетических уровней возрастает. Графики волновых функций для $l = 2$, показаны на рисунке 1.1.

Для построения графиков волновых функций было использовано выражение (1.3). При этом количество слагаемых в сумме было выбрано равным 300.

2 Численный метод

Для проверки точности рассмотренного метода мы также найдём решение уравнения Шредингера с потенциалом (0.1) в импульсном представлении [8]

$$(k^2 + \lambda)\psi_l(k) = \frac{4\pi k}{2l+1} \int_0^\infty k' a_l(k, k') \psi_l(k') dk'. \quad (2.1)$$

Коэффициенты разложения $a_l(k, k')$ в уравнении (2.1) определяются по формуле

$$a_l(k, k') = (-1)^l \frac{2l+1}{8\pi q} \frac{1}{\sqrt{kk'}} \exp\left(-\frac{k^2 + k'^2}{4q}\right) I_{l+1/2}\left(\frac{kk'}{2q}\right).$$

где $I_{l+1/2}(z)$ – модифицированная функция Бесселя [9]. Волновая функция в импульсном представлении связана с волновой функцией в координатном представлении интегральным преобразованием:

$$\psi_l(k) = \int_0^\infty j_l(k\zeta) \psi_l(\zeta) d\zeta,$$

где $j_l(z)$ – сферическая функция Бесселя [9]. Коэффициенты $a_l(k, k')$ для первых трёх l имеют вид

$$a_0(k, k') = \frac{1}{8\sqrt{\pi^3 q}} \frac{1}{kk'} \left[\exp\left(-\frac{(k-k')^2}{4q}\right) - \exp\left(-\frac{(k+k')^2}{4q}\right) \right],$$

$$a_1(k, k') = \frac{2\sqrt{\pi q}}{(kk')^2} \times \exp\left(-\frac{(k+k')^2}{4q}\right) \left[\frac{kk'}{2q} \operatorname{ch}\left(\frac{kk'}{2q}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{kk'}{2q}\right) \right],$$

Таблица 2.1 – Собственные значения λ , найденные решением уравнения Шредингера в импульсном представлении

l	n	Метод прямоугольников		
		$N = 30$	$N = 60$	$N = 90$
0	1	0,797388006726273	0,797388006692112	0,797388006692111
	2	0,553887457585389	0,553887457151757	0,553887457151759
	3	0,345015689266612	0,345015684819084	0,345015684819085
	4	0,175229080177297	0,175229048243896	0,175229048243894
	5	0,052440491069795	0,052522779990877	0,052522779993554
1	1	0,668962196239081	0,668962196177262	0,668962196177261
	2	0,442295685889170	0,442295685076919	0,442295685076918
	3	0,252234961928702	0,252234952063518	0,252234952063518
	4	0,104613508887479	0,104611684774312	0,104611684774313
	5	0,012860582741014	0,011862582930241	0,011862302764435
5	1	0,214944365133800	0,214944365068268	0,214944365068266
	2	0,067328124317414	0,067328056076143	0,067328056076143
6	1	0,118768250897164	0,118768251154786	0,118768251154786
7	2	0,031315799093730	0,031315798725291	0,031315798725289

$$a_2(k, k') = \frac{5}{4\sqrt{\pi^3 q} (kk')^3} \exp\left(-\frac{(k+k')^2}{4q}\right) \times \left[(12q^2 + (kk')^2) \operatorname{sh}\left(\frac{kk'}{2q}\right) - 6qkk' \operatorname{ch}\left(\frac{kk'}{2q}\right) \right].$$

Решение интегрального уравнения (2.1) было получено методом прямоугольных квадратур [11]. Результаты вычисления значений λ для некоторых l при $q = 0,005$ показаны в таблице 2.1.

Для сравнения точности методов нахождения λ результаты приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – сравнения точности нахождения спектрального параметра λ

l	n	Приближенный метод	Численный метод
		$M = 300$	$N = 90$
0	1	0,797388006692130	0,797388006692111
	2	0,553887457151760	0,553887457151759
	3	0,345015684742373	0,345015684819085
	4	0,175228714966775	0,175229048243894
	5	0,052202862855601	0,052522779993554
1	1	0,668962196177320	0,668962196177261
	2	0,442295685076343	0,442295685076918
	3	0,252234946770758	0,252234952063518
	4	0,104599176941210	0,104611684774313
	5	0,007846098905027	0,011862302764435
5	1	0,214944363991333	0,214944365068266
	2	0,067320876652722	0,067328056076143
6	1	0,118768189153335	0,118768251154786
7	1	0,031315799093730	0,031315798725289

Сравнивая результаты, полученные двумя способами, можно сделать вывод о высокой эффективности приближенного метода. Анализ решений показал, что метод эффективен для значений $q > 10^{-8}$.

Заключение

Таким образом, в работе был предложен приближенный аналитический метод нахождения энергетического спектра связанных состояний частицы в случае потенциала Гаусса. Основная идея метода состоит в представлении искомой волновой функции в виде суммы волновых функций трехмерного гармонического осциллятора с неизвестными коэффициентами и сведе-

нии уравнения Шредингера к линейной алгебраической системе уравнений для этих коэффициентов. В целях контроля за точностью также получено численное решение уравнения Шредингера с потенциалом (0.1) в импульсном представлении. Сравнение результатов продемонстрировало эффективность предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stephenson, G.* Eigenvalues of the Schrodinger equation with a Gaussian potential / G. Stephenson // J. Phys. A: Math Gen. – 1977. – Vol. 10, L229–L232.
2. *Lai, C.S.* On the Schrodinger equation for the Gaussian potential – $A \exp(-\lambda r^2)$ / C.S. Lai // J. Phys. A: Math Gen. – 1983. – Vol.16. – L181–L185.
3. *Crandale, R.E.* Fast eigenvalue algorithm for central potentials / R.E. Crandale // J. Phys. A: Math Gen. – 1983. – Vol. 16. – L395–L399.
4. *Chatterjee, A.* $1/N$ expansion for Gaussian potential / A. Chatterjee // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – Vol. 18. – P. 2403–2408.
5. *Gomez, S.S.* Few-electron semiconductor quantum dots with Gaussian confinement / S.S. Gomez, R.H. Romero // Central Eur. J. Phys. 2009. – Vol. 7. – P. 12–21.
6. *Koksal, K.* A simple analytical expression for bound state energies for an attractive Gaussian confining potential / K. Koksal // Phys. Scr. – 2012. – Vol. 86. – P. 035006.
7. *Давыдов, А.С.* Квантовая механика / А.С. Давыдов. – 3-е изд., – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 699 с.
8. *Флюгге, З.* Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – 3-изд. – Москва: ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.
9. *Арфкен, Г.* Математические методы в физике / Г. Арфкен. – Москва: Атомиздат, 1970. – 712 с.
10. *Градштейн, И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 4-е изд. – Москва, 1963. – 1108 с.
11. *Калиткин, Н.Н.* Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

Поступила в редакцию 26.10.19.

УДК 620.18

ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ РАДИКАЛА ЖИРНОЙ КИСЛОТЫ В ЭФИРАХ ХОЛЕСТЕРИНА НА ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКИХ СМАЗОЧНЫХ СРЕД

С.Ф. Ермаков, Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

EFFECT OF THE LENGTH OF THE FATTY ACID RADICAL IN CHOLESTEROL ESTERS ON THE OPTICAL PROPERTIES OF LIQUID LUBRICATING MEDIA

S.F. Ermakov, E.B. Shershnev, Y.V. Nikitjuk, S.I. Sokolov

F. Scorina Gomel State University

Исследовано влияние добавок соединений холестерина на оптические свойства жидких смазочных сред на основе минеральных и синтетических масел. Показано, что введение эфиров холестерина в вазелиновое масло и полиэтилсилоксановую жидкость приводит к изменению их оптических свойств, что выражается в прямой зависимости угла вращения плоскости поляризации света от содержания эфиров холестерина в жидких смазочных средах. Установлено влияние на эту зависимость длины радикала жирной кислоты в эфире холестерина.

Ключевые слова: эфиры холестерина, оптические свойства растворов, радикал жирной кислоты в эфире холестерина, жидкие смазочные среды.

The influence of additives of cholesterol compounds on the optical properties of liquid lubricants based on mineral and synthetic oils was studied. It is shown that the introduction of cholesterol esters in vaseline oil and polyethylsiloxane liquid leads to a change in their optical properties, which is expressed in the direct dependence of the rotation angle of the plane of polarization of light on the content of cholesterol esters in liquid lubricants. The effect on this dependence of the length of the radical of fatty acid in the ether of cholesterol was established.

Keywords: cholesterol esters, optical properties of solutions, radical of fatty acid in cholesterol ester, liquid lubricating media.

1 Структурные свойства эфиров холестерина

Имеется множество соединений, проявляющих оптическую активность. Их общей структурной характеристикой является то, что молекулы этих соединений обладают свойством быть несовместимыми со своим зеркальным отражением, другими словами, молекулы относятся к своим зеркальным отражениям как правая рука к левой [1]. Для обозначения отношения между двумя объектами, которые относятся друг к другу как правая рука к левой, т. е. являются нетождественными зеркальными отображениями друг друга, введен термин хиральность (от греч. $\chi\epsilon\iota\rho\zeta$ – рука), а каждый из этих объектов называется хиральным. Примером таких соединений могут служить стероидные спирты, называемые стеринами или стеролами, относящиеся к очень важным для биохимии соединениям. Типичным представителем стероидов является холестерин [2].

Структура молекул эфиров холестерина показана на рисунке 1.1.

В первом приближении модель такой молекулы можно считать простым стержнем и только при более детальном рассмотрении заметно, что пространственное строение молекул эфиров холестерина более сложное: они являются хиральными, т. е. не содержат осей симметрии, поперечных плоскостей и центров симметрии.

На сегодня не вызывает сомнения, что именно с хиральностью связаны удивительные оптические свойства эфиров холестерина. При жидкокристаллическом состоянии молекулы эфиров холестерина в пространстве располагаются так, что направления их длинных осей регулярным образом поворачиваются в пространстве на определенный угол от слоя к слою, образуя спиральную структуру (рисунок 1.2).

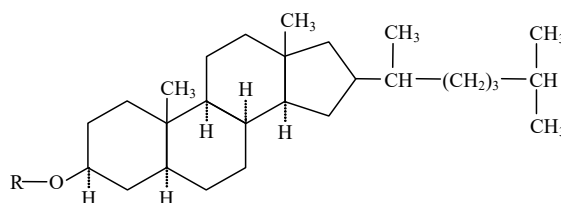


Рисунок 1.1 – Структурная формула молекулы эфира холестерина (R – радикал жирной кислоты)

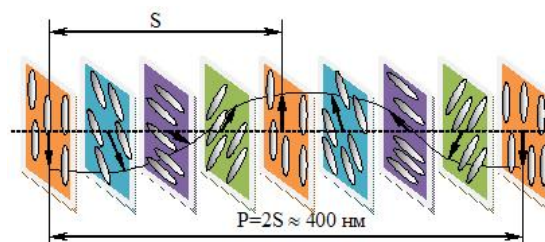


Рисунок 1.2 – Послойная организации молекул эфиров холестерина в пространстве

Из рисунка 1.2 видно, что полный шаг спирали P равен такой толщине слоистой холестерической структуры, в которой происходит поворот длинных осей молекул эфиров холестерина на угол от 0 до 360° , а расстояние $S = P/2$, при котором поворот длинных осей молекул эфиров холестерина происходит на 180° , является своеобразным периодом их жидкокристаллической структуры. Оказывается, что для большинства эфиров холестерина, находящихся в жидкокристаллическом состоянии, период S по величине соответствует диапазону длин волн от оптического до инфракрасного излучения. Он также существенно зависит от внешних воздействий (температурных, химических, электрических и т. д.) [3]. Поэтому можно утверждать, что наблюдаемые в жидкокристаллическом состоянии оптические свойства эфиров холестерина обусловлены, прежде всего, взаимодействием белого света с этой спиралью, а также изменением размеров спирали в результате внешних воздействий. Такая специфическая спиральная текстура (рисунок 1.2) в оптическом отношении ведёт себя как пластинка одноосного отрицательного кристалла, вырезанная параллельно оптической оси. Для нее характерна чрезвычайно большая оптическая активность – вращение плоскости поляризации может изменяться в пределах 10^2 – 10^4 град/см.

Вместе с тем, с точки зрения смазочного действия, т. е. когда в зоне трения решающее значение приобретают смазочные слои упорядоченной структуры, эфиры холестерина находят все большее применение как эффективные добавки к минеральным и синтетическим маслам, а также и другим смазочным средам [4]. Поскольку стероидное ядро в молекуле эфира холестерина является правовращающим, а боковая углеводная цепочка или радикал жирной кислоты левовращающим, то возможно, что длина алкильного радикала молекул этих веществ и их концентрация будут влиять на их вклад в силу закручивания, а, следовательно, оптическую активность содержащих их жидких смазочных сред. Очевидно, что последнее можно эффективно использовать для оценки и контроля, например, содержания эфиров холестерина в таких смазочных материалах и трибосистемах.

2 Результаты экспериментов

В экспериментах использовали синтезированные в промышленных условиях эфиры холестерина (таблица 2.1) [5]. Данные эфиры холестерина и их смеси являются энантиотропными [6].

Типичная температурная характеристика энантиотропного эфира холестерина при наблюдении в поляризованном свете на световом микроскопе приведена на рисунке 2.1. Из нее видно, что для энантиотропных эфиров холестерина в зависимости от температуры наблюдается три фазовых состояния:

- 1) твердый кристалл (ТК);
- 2) жидкокристаллическое состояние, включающее смектическую (СЖК) и холестерическую (ХЖК) мезофазы;
- 3) фаза изотропной жидкости (ИЖ).

Таблица 2.1 – Связь наименований и условных обозначений с числом атомов углерода в радикале жирной кислоты эфиров холестерина

Наименование эфиров холестерина	Условное обозначение эфиров холестерина [5]	Число атомов углерода в радикале жирной кислоты эфиров холестерина
Эфир холестерина уксусной кислоты (ТУ 6-09-4368-77)	X-3	2
Эфир холестерина масляной кислоты (ТУ 6-09-4371-77)	X-9	4
Эфир холестерина капроновой кислоты (ТУ 6-09-4412-77)	X-11	6
Эфир холестерина каприновой кислоты (ТУ 6-09-4380-77)	X-5	10
Эфир холестерина миристиновой кислоты (ТУ 6-09-4373-77)	X-15	14
Эфир холестерина стеариновой кислоты (ТУ 6-09-4369-77)	X-7	18

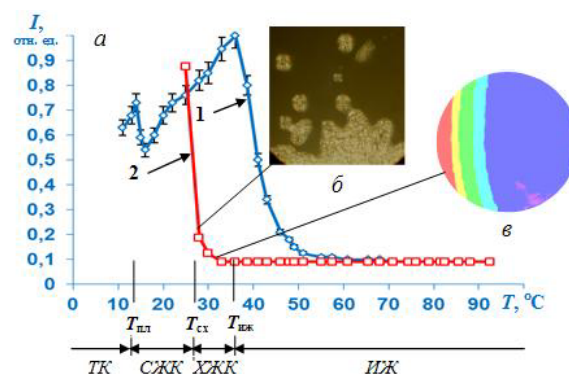


Рисунок 2.1 – Типичная температурная характеристика для энантиотропных эфиров холестерина при наблюдении в поляризованном свете на световом микроскопе:

- 1 – при нагревании; 2 – при охлаждении

При реализации холестерической мезофазы при изменении температуры наблюдаются все цвета радуги (рисунок 2.1, в), что, несомненно, связано с изменением шага спирали ХЖК в этой области температур. Переход от холестерической

к смектической мезофазе отличается резким возрастанием интенсивности проходящего поляризованного света (рисунок 2.1, кривая 2), сопровождающегося образованием вначале отдельных жидкокристаллических структур в форме мальтийского креста (рисунок 2.1, б сверху). Далее в области достаточно узкого интервала температур ($1-2^{\circ}\text{C}$) происходит последующее их сливание с образованием однородной конфокальной текстуры (рисунок 2.1, б снизу), которая характеризуется своеобразной подвижностью и текучестью вследствие жидкокристаллического состояния [3].

Поскольку у выбранных для исследований эфиров холестерина температуры перехода в изотропное жидкое состояние варьируются в широких пределах и могут превышать температуру 100°C , то для получения изотропных растворов эфиров холестерина в исследуемых жидких смазочных средах их приготовление осуществляли при нагревании всех смесей до температуры, не ниже 110°C . В качестве жидких смазочных сред использовали медицинское вазелиновое масло (ВМ, ГОСТ 3164-72) и полиэтилсилоксановую жидкость ПЭС-5 (ГОСТ 13004-67).

Растворы эфиров холестерина для испытаний формировали путем их добавки и перемешивания при нагревании до полного видимого растворения в исследуемые смазочные среды. Поведение и характер вращения плоскости поляризации света для этих жидких смазочных сред исследовали с помощью сахариметра СУ-4. Зависимости углов вращения плоскости поляризации света для составов на основе медицинского вазелинового масла определяли при температуре 72°C , а на основе полиэтилсилоксановой жидкости ПЭС-5 – при температуре 116°C посредством поддержания заданной температуры составов с помощью термостата типа УН8 (Германия).

Измерения производили в сахарных градусах ($^{\circ}\text{S}$, $1^{\circ} = 2,8885^{\circ}\text{S}$) с использованием поляриметра и методики, описанной в [7], на кюветах длиной $L = 200$ мм.

Процесс совмещения исследуемых добавок с базовой основой предусматривает введение эфиров холестерина в смазочный состав, смешение и нагрев смеси до температуры выше температуры перехода эфиров холестерина в изотропную жидкость. На первом этапе была исследована растворимость различных эфиров холестерина в медицинском вазелиновом масле и полиэтилсилоксановой жидкости ПЭС-5. ХЖК в количестве 10 мас. % вводили в исследуемые базовые среды, затем их нагревали выше температуры перехода в изотропную жидкость используемого эфира холестерина, тщательно перемешивали и охлаждали до комнатной температуры.

Установлено, что в нагретом состоянии сразу после перемешивания для всех исследуемых эфиров холестерина и жидких смазочных сред характерно образование однородных прозрачных

систем, не содержащих светорассеивающих элементов. Это позволяет полагать, что эфиры холестерина, находясь в жидкокристаллической фазе и состоянии изотропной жидкости, растворяются в исследуемых минеральных и синтетических смазочных средах.

Однако при охлаждении исследуемых смазочных сред их поведение с добавкой различных эфиров холестерина было неадекватным. Установлено, что с ростом длины радикала жирной кислоты эфиров холестерина в этих средах образуются структуры, содержащие игловидные кристаллы, которые после охлаждения начинают выпадать в осадок. Как следует из экспериментальных данных, количество образующихся игловидных кристаллов в вазелиновом масле и полиэтилсилоксановой жидкости возрастает с увеличением длины радикала жирной кислоты в эфире холестерина [4], [8]. Иными словами, этот факт позволяет заключить, что растворимость эфиров холестерина в минеральных и синтетических смазочных средах снижается с увеличением длины радикала жирной кислоты, следовательно, может существенно влиять на оптическую активность исследуемых составов. В связи с этим последующие эксперименты проводили при таких температурах, при которых данные жидкие смазочные среды заведомо представляли собой однородные прозрачные системы. Причем, как показали более детальные исследования, для составов на основе полиэтилсилоксановой жидкости требовались более высокие температуры проведения испытаний (116°C), чем для составов с медицинским вазелиновым маслом (72°C).

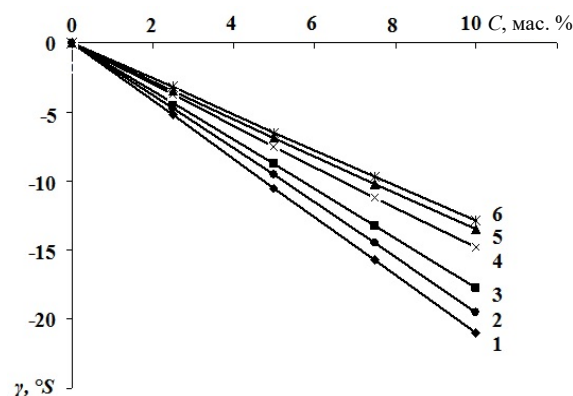


Рисунок 2.2 – Поведение угла вращения плоскости поляризации γ исследуемых составов на основе ВМ в зависимости от концентрации C эфиров холестерина: 1 – X-3; 2 – X-9; 3 – X-11; 4 – X-5; 5 – X-15; 6 – X-7. Результаты испытаний для холестерина практически совпадают с результатами для X-3

Установлено, что медицинское вазелиновое масло не проявляет оптическую активность, т. е. без добавок эфиров холестерина величина вращения плоскости поляризации света для него составляет 0°S . Как видно из рисунка 2.2,

введение в вазелиновое масло эфиров холестерина, напротив, приводит к изменению оптических свойств получаемых растворов базового масла, что выражается в правом вращении плоскости поляризации света. Исследования показали, что для гомологического ряда жирных кислот эфиров холестерина, в котором, согласно данным работ [5], [6], длина радикала монокарбоновой кислоты повышается с увеличением номера гомолога, установлено снижение оптической активности исследуемых составов вазелинового масла с ростом длины радикала жирной кислоты, используемых в них гомологов эфиров холестерина.

Показано, что зависимости углов вращения плоскости поляризации света γ от концентрации эфиров холестерина в вазелиновом масле имеют линейный характер для всех испытуемых эфиров холестерина. Очевидно, что угол γ также зависит от того, какое соединение используется в качестве добавки. Например, удельная величина вращения плоскости поляризации для эфира холестерина стеариновой кислоты (X-7) составила $\alpha = 0,33^\circ\text{S}$ на 1 мас. % добавки, тогда как для эфира холестерина уксусной кислоты (X-3) – $\alpha = 1,1^\circ\text{S}$ (при длине поляриметрической кюветы $L = 200$ мм). При этом разные зависимости вращения плоскости поляризации света от конкретных составов эфиров холестерина объясняются как отличиями в строении молекул (в частности, радикал уксусной кислоты значительно короче радикала стеариновой кислоты), так и различной молярной массой выбранных для испытаний эфиров холестерина. Например, молярные массы для эфиров холестерина уксусной кислоты (X-3) и стеариновой кислоты (X-7), соответственно, составляют 428,7 г и 653,4 г.

В результате, несмотря на одинаковые концентрации добавок в базовых составах, будет различное число молекул эфиров холестерина в единичных объемах масляных композиций (в нашем случае, число молекул для эфира холестерина стеариновой кислоты примерно в 1,5 раза меньше, чем для эфира холестерина уксусной кислоты). С учетом того, что молярная масса для эфира холестерина стеариновой кислоты больше того же параметра для эфира холестерина уксусной кислоты в 1,5 раза, можно утверждать, что молекулы эфира холестерина стеариновой кислоты оптически менее активны, чем молекулы для эфира холестерина уксусной кислоты.

Такие измерения становятся возможными благодаря статистически однородному или равномерному распределению молекул эфиров холестерина в исследуемом объеме масляных композиций, а также их хиральным свойствам. В результате этих свойств молекул эфиров холестерина, а также эффекта «гость-хозяин», согласно работам [9], [10] наблюдаемому в растворах с эфирами холестерина, вклад левого и пра-

вого вращения молекул добавок становится заметным, поскольку обеспечивает различные зависимости оптической активности от концентрации молекул эфиров холестерина в составах, интегрально влияющих на общую ориентацию молекул жидких смазочных сред в пространстве. При этом для каждой молекулы эфиров холестерина характерен свой конкретный угол φ вращения плоскости поляризации, а результирующий угол γ для каждого индивидуального эфира холестерина в жидкокристаллическом состоянии или растворах представляет собой сумму таких единичных вращений его молекул: $\gamma = \sum \varphi_i$. Это вполне обосновано соблюдается при исключении химической связи между молекулами базовой среды и молекулами эфиров холестерина, а для многокомпонентных смесей – и отсутствие взаимодействия их отдельных компонент.

Другими словами, если бы имело место химическое взаимодействие или какое-либо другое влияние одной компоненты на другую, то в смесях из отдельных представителей эфиров холестерина не наблюдался бы их суммарный или интегральный вклад. Напротив, график, приведенный на рисунке 2.3, убедительно подтверждает этот вклад. На рисунке 2.3 приведены зависимости углов вращения плоскости поляризации от концентраций молекул холестерина, эфира холестерина стеариновой кислоты (X-7), а также при равнозначном их содержании в синтетической полиэтилсилоксановой жидкости ПЭС-5. При этом следует отметить, что полиэтилсилоксановая жидкость ПЭС-5, т. е. без добавок соединений холестерина, не проявляет оптическую активность и для нее величина вращения плоскости поляризации света также как и для минерального вазелинового масла составляет 0°S .

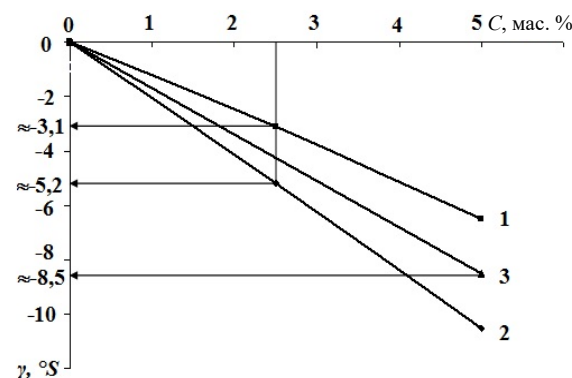


Рисунок 2.3 – Влияние холестерина и его эфира стеариновой кислоты (X-7) на угол вращения плоскости поляризации γ в зависимости от концентрации C данных соединений холестерина в ПЭС-5: 1 – холестерин; 2 – X-7; 3 – смесь холестерина и X-7 при их одинаковом содержании в ПЭС-5

Как видно из экспериментальных данных, представленных на рисунке 2.3, при введении

2,5 мас. % эфира холестерина стеариновой кислоты в ПЭС-5, угол вращения плоскости поляризации ее составил $\gamma = -3,1^\circ\text{S}$, а при введении 2,5 мас. % холестерина – $\gamma = -5,2^\circ\text{S}$. Исходя из вышесказанного, смесь эфира холестерина стеариновой кислоты и холестерина, когда доля каждого из них будет 2,5 мас. %, а общее содержание отдельных компонент, соответственно, 5 мас. %, должна будет вращать плоскость поляризации всего смазочного состава на угол $\gamma' = -3,1 + (-5,2) = -8,3^\circ\text{S}$.

Действительно, экспериментальные данные, представленные на рисунке 2.3, наглядно демонстрируют это. Для указанной жидкой смазочной среды на основе смеси рассматриваемых соединений холестерина интегральный вклад ее отдельных компонент $\gamma = -8,5^\circ\text{S}$.

Из полученных результатов хорошо видно, что γ и γ' имеют практически одинаковые значения. Следует отметить, что в работе [3] ранее также указывалось на то, что для бинарных смесей эфиров холестерина в первом приближении можно считать, что обратная (эффективная) длина волны селективного отражения смеси является аддитивной суммой взвешенных по концентрациям эффективных длин волн селективного отражения отдельных компонент, т. е. отдельных или индивидуальных эфиров холестерина. Здесь первое приближение подразумевает то, что не учитывается взаимное влияние отдельных компонент друг на друга. В связи с этим эффективные длины волн селективного отражения смеси эфиров холестерина следует рассматривать как некоторые определенные по величине параметры, соответствующие вполне конкретным значениям шага спирали и, следовательно, эффективным силам закручивания молекул в суммарной спиральной структуре. Они показывают относительный вклад каждого отдельного эфира холестерина в результирующую спиральную структуру смеси: чем больше эффективная длина волны отдельных эфиров холестерина, тем меньше их суммарная – интегральная эффективная сила закручивания и тем большим шагом спирали будут обладать смеси на их основе.

Если сопоставить углы закручивания с параметрами, характеризующими структуру индивидуальных эфиров холестерина, например, длиной цепочки или числом атомов углерода углеводородного радикала, то можно получить следующие экспериментальные результаты.

Данные, представленные на рисунке 2.4, показывают влияние длины радикала жирной кислоты в эфире холестерина на оптическую активность их растворов в вазелиновом масле. Все исследуемые эфиры холестерина содержат углеводородную цепочку вида $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_n$, т. е. в экспериментах использовались только насыщенные эфиры холестерина.

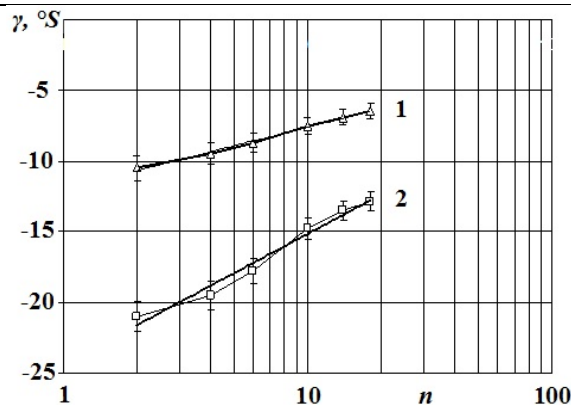


Рисунок 2.4 – Влияние содержания эфиров холестерина в вазелиновом масле на угол наклона полученных экспериментально и теоретически зависимостей углов вращения плоскости поляризации γ от числа атомов углерода n в радикале жирной кислоты эфиров холестерина: 1 – 5 мас. %; 2 – 10 мас. %

Как видно из рисунка 2.4 для концентраций 5 мас. % и 10 мас. % эфиров холестерина в вазелиновом масле в полулогарифмических координатах от числа атомов углерода N в радикале жирной кислоты в эфире холестерина наблюдаются линейные зависимости, угол наклона которых к оси X отличается лишь различной интенсивностью вращения плоскости поляризации света в зависимости от концентрации эфиров холестерина в минеральной смазочной среде. Если не учитывать точку на графике, соответствующую холестерину, у которого отсутствует цепочка радикала жирной кислоты, т. е. для $N = 0$, то экспериментально полученные кривые представляют собой логарифмические зависимости (полулогарифмические координаты). Так, для концентрации 5 мас. % эфиров холестерина в вазелиновом масле получено уравнение:

$$\gamma = 1,8944 \cdot \ln N - 11,97,$$

где коэффициент достоверности аппроксимации 0,996.

Для более высокой концентрации, а именно 10 мас. % эфиров холестерина в вазелиновом масле уравнение имеет следующий вид:

$$\gamma = 4,0111 \cdot \ln N - 24,382,$$

где коэффициент достоверности аппроксимации 0,988.

Таким образом, судя по величине коэффициентов достоверности аппроксимации, экспериментальные данные достаточно хорошо описываются полученными уравнениями. Отсюда очевидно, что при введении эфиров холестерина в минеральные и синтетические жидкие смазочные среды наблюдается вполне определенная закономерность, заключающаяся в том, что зависимость величины угла вращения плоскости поляризации света от числа атомов углерода в радикале жирной кислоты эфиров холестерина для

всех исследуемых составов в полулогарифмических координатах носит практически линейный характер.

Заключение

Таким образом, в результате проведенных экспериментов исследовано влияние длины радикала жирной кислоты на оптическую активность (вращение плоскости поляризации) эфиров холестерина, введенных в различные по природе и свойствам жидкие смазочные среды. Установлено, что добавка в минеральные и синтетические жидкие смазочные среды различных эфиров холестерина приводит к изменению оптических свойств получаемых растворов, что выражается в правом вращении плоскости поляризации света исследуемых составов. При этом отмечено, что исходные масляные композиции являются оптически неактивными средами. Обнаружена линейная зависимость угла вращения плоскости поляризации света исследуемых растворов масляных композиций от концентрации в них жидкокристаллических соединений. Установлено, что при введении эфиров холестерина в минеральные и синтетические жидкие смазочные среды зависимость величины угла вращения плоскости поляризации света от числа атомов углерода в радикале жирной кислоты эфиров холестерина для всех исследуемых сред в полулогарифмических координатах носит практически линейный характер.

Полученные результаты могут быть эффективно использованы для оценки и контроля содержания эфиров холестерина как активных добавок к жидким смазочным средам, которые в настоящее время широко используются, например, в качестве смазочных материалов в узлах трения машин и механизмов [4] или в медицине

для наружного применения при лечении суставных заболеваний [4], [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Физический энциклопедический словарь*; под ред. А.М. Прохорова. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – С. 494–495.
2. *Пацак, Й.* Органическая химия / Й. Пацак; под ред. К.П. Бутина, пер. с чешск. – М.: Мир, 1986. – 366 с.
3. *Беляков, В.А.* Оптика холестерических жидких кристаллов / В.А. Беляков, А.С. Сонин. – М.: Наука, 1982. – 360 с.
4. *Ермаков, С.Ф.* Жидкие кристаллы в технике и медицине / С.Ф. Ермаков, В.Г. Родненков, Е.Д. Белоенко, Б.И. Купчинов. – М.: ООО «Черо», Мн.: ООО «Асар», 2002. – 412 с.
5. *Химические реактивы и высокочистые вещества: каталог.* – М.: Химия, 1983. – 703 с.
6. *Тищенко, В.Г.* Строение молекул и мезоморфизм производных стероидов / В.Г. Тищенко, Р.М. Черкашина // Холестерические жидкие кристаллы. – Новосибирск. – 1976. – С. 26–34.
7. *Сахариметр универсальный СУ-4. Паспорт.* – Киевский завод «Аналитприбор», 1988. – 20 с.
8. *Ermakov, S.F.* Liquid-Crystal Nanomaterials. Tribology and Applications / S.F. Ermakov, N.K. Myshkin. – Switzerland: Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. – 215 p.
9. *Беляков, В.А.* Жидкие кристаллы / В.А. Беляков. – М.: Знание, 1986. – 160 с.
10. *Сонин, А.С.* Введение в физику жидких кристаллов / А.С. Сонин. – М.: Наука, 1983. – 320 с.

Поступила в редакцию 29.10.19.

УДК 534.29

КАВИТАЦИЯ В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ УГЛЕКИСЛОГО ГАЗА

А.В. Котухов, Н.А. Жарко, В.С. Минчук, Н.В. Дежжунов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

CAVITATION IN AQUEOUS SOLUTIONS OF CARBON DIOXIDE

A.V. Kotukhov, N.A. Zharko, V.S. Minchuk, N.V. Dezhkunov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Исследовалась активность кавитации в водных растворах углекислого газа. В ряде режимов оценивалась скорость эрозии и записывались спектры кавитационного шума. Установлено, что в пересыщенном растворе активность кавитации близка к нулевой. По мере дегазации активность кавитации растет, стремясь к уровню активности в дистиллированной воде. Сделан вывод, что на первой стадии дегазации при пульсациях пузырьков не генерируются интенсивные ударные волны и кавитация не может оказывать интенсивного разрушающего воздействия на твердые поверхности и биологические ткани. На второй стадии концентрация интенсивно захлопывающихся пузырьков существенно увеличивается.

Ключевые слова: кавитация, раствор углекислого газа, активность кавитации, захлопывание пузырьков.

The activity of cavitation in water solutions of carbon dioxide was investigated. In a number of regimes erosion rate was estimated. It is shown that in oversaturated solution of carbon dioxide the activity of cavitation is close to zero. In process of degassing the activity of cavitation grows and tends to the activity level in the distilled water. It is drawn that at the first stage of degassing intensive shock waves are not generated by bubbles pulsation and cavitation in this mode cannot make the intensive destroying impact on firm surfaces and on biological fabric. At the second stage concentration of intensively collapsing bubbles significantly increases.

Keywords: cavitation, water solutions of carbon dioxide, cavitation activity, bubbles collapses.

Введение

В настоящее время ультразвук широко применяется для интенсификации физико-химических процессов в жидкостях. При этом ключевую роль как правило играет кавитация – явление образования пульсаций и захлопывания микропузырьков газа в жидкости под действием переменного давления [1]. При захлопывании кавитационными полостями генерируются ударные волны и микроструи жидкости, а парогазовая смесь внутри пузырька разогревается до нескольких тысяч градусов [2]–[4]. Этими факторами и определяется активность кавитации, т. е. интенсивность ее воздействия на различные процессы и объекты в жидкости. Активность кавитации зависит от множества факторов, среди которых газосодержание жидкости, т. е. концентрация газа является одним из наиболее важных.

Растворенные газы могут влиять на активность кавитации различным образом. Газ с меньшим коэффициентом теплопроводности будет обеспечивать при прочих равных условиях более высокую температуру внутри пузырьков за счет уменьшения теплопередачи из пузырька в жидкость [5]. Наличие в жидкости газа с более высокой растворимостью снижает порог кавитации и повышает концентрацию пузырьков в кавитационной области [1], [3], [5]. Это должно приводить к повышению активности кавитации. Однако при слишком большой концентрации вследствие взаимодействий пузырьков друг с

другом за счет сил Бьеркнесса и ударных волн они могут распадаться на осколки на ранней стадии захлопывания. В результате эффективность преобразования энергии, запасенной пузырьком в фазе разрежения, будет уменьшаться, что может приводить к снижению активности кавитации [6]–[8]. Кроме того, при большой концентрации пузырьков важным фактором становится быстрое поглощение энергии ультразвука в кавитационной области и экранирование внутреннего объема кавитационной области внешними пузырьками [2], [8], что также может снижать активность кавитации. При большой концентрации газа в жидкости давление парогазовой смеси внутри пузырьков также будет значительным, что должно приводить к демпфированию процесса захлопывания, снижению температур, достигаемых в пузырьке, и интенсивности ударных волн, генерируемых в кавитационной области.

В работе [9] приведены результаты, не согласующиеся с [5]–[7], а именно: показано, что активность кавитации увеличивается при увеличении концентрации газа в воде. Такой же вывод сделан и авторами [10], [11], исходя из результатов скоростной фоторегистрации кавитационной области. Таким образом, представленные в литературе результаты исследований влияния газосодержания жидкости на активность ультразвуковой кавитации являются противоречивыми.

Углекислый газ обладает высокой степенью растворимости в воде и поэтому обеспечивает

возможность варьирования газосодержания в широком диапазоне. При постановке задачи данного исследования авторы исходили из предположения, что под действием ультразвука в пересыщенном растворе углекислого газа его концентрация будет меняться за счет ультразвуковой дегазации. Отметим, что экспериментальных исследований с растворами углекислого газа в ходе ультразвуковой обработки раствора до сих пор не проводилось.

1 Установка и методика исследований

Используемая в данной работе звукохимическая ячейка выполнена в виде цилиндрической емкости из нержавеющей стали. Внутренний диаметр емкости – 78 мм, высота – 100 мм. Пьезокерамический излучатель диаметром 50 мм с резонансной частотой 34,6 кГц приклеен к днищу емкости эпоксидным клеем.

Для измерений активности кавитации использовался кавитометр ИСА-3М (БГУИР, г. Минск) [12]. Физический принцип работы этого прибора основан на спектральном анализе кавитационного шума (КШ), т. е. акустического сигнала, генерируемого кавитационной областью. Датчик прибора представляет собой цилиндрический волновод диаметром 3 мм, на одном торце которого установлен пьезоэлемент. По волноводу акустический сигнал из кавитационной области передается на пьезоэлемент, где преобразуется в электрический. Диаметр приемного элемента гидрофона 3 мм, высота – 1 мм. Кавитометр позволяет измерять (в относительных единицах) полную активность кавитации и вклад захлопывающихся пузырьков, т. е. активность нестационарной кавитации.

Прибор оснащен программой, которая позволяет регистрировать изменение во времени полного выходного сигнала датчика и активности кавитации и одновременно отображать это изменение в виде графика на мониторе компьютера.

На рисунке 1.1, а) представлены результаты измерений, характеризующие распределение полного звукового давления (зависимость 1) и активности кавитации (зависимость 2), полученные при перемещении датчика вдоль оси рабочей емкости по направлению от границы раздела жидкость-газ к излучателю. Здесь L – расстояние от торца датчика до излучателя. Измерения выполнялись в отстоявшейся в течение двух суток водопроводной воде при температуре $23 \pm 1^\circ\text{C}$ и уровне жидкости над излучателем 80 мм.

Видно, что в местах, соответствующих максимумам активности кавитации (по показаниям прибора) наблюдается и максимум полного выходного сигнала. Расстояние между соседними максимальными и минимальными значениями равно примерно $\lambda/4$, где λ – длина звуковой волны (~ 41 мм). Наличие максимумов и минимумов связано, очевидно, с наличием стоячей

компоненты звукового поля, образующейся при сложении падающей на границу раздела жидкость-газ и отраженной от этой границы волн.

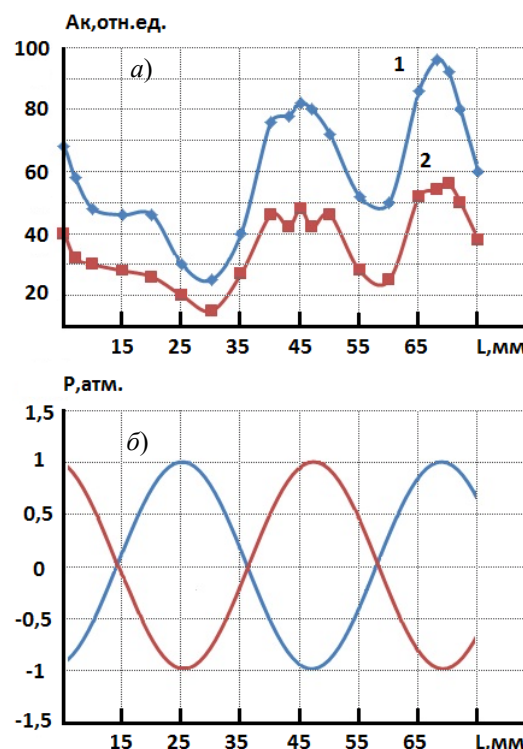


Рисунок 1.1 – Распределение полного выходного сигнала гидрофона и активности кавитации вдоль оси излучателя в дистиллированной воде а) измеренное распределение полного выходного сигнала гидрофона (1) и активности кавитации (2) вдоль оси излучателя; б) теоретическое распределение давления в поле идеальной стоячей волны для использованной частоты. Уровень жидкости в рабочей емкости над излучателем – 80 мм, L – расстояние от датчика до излучателя, 1 – полный выходной сигнал, 2 – активность кавитации, температура жидкости = $22 \pm 1,5^\circ\text{C}$

В экспериментах по исследованию влияния дегазации на кавитацию датчик размещался на оси излучателя таким образом, что его приемный элемент находился на расстоянии 70 мм от излучателя, т. е. в точке первого максимума стоячей компоненты ультразвукового поля.

Использовались два варианта процедуры воздействия ультразвуком на пересыщенный раствор углекислого газа. По первому варианту емкость заполняли жидкостью в течение 30 секунд, выдерживали еще 30 с без ультразвука, затем включали ультразвук и кавитометр и регистрировали показания с использованием описанной выше программы обработки данных в течение 1 минуты. Затем ультразвук отключали на 10 минут, после чего процедуру повторяли. Записывался полный выходной сигнал гидрофона H и активность кавитации A .

По второму варианту ультразвук и цифровой кавитометр включали сразу же после заполнения рабочей емкости жидкостью. Обработка происходила в течение 1 мин. Затем генератор и цифровой кавитометр отключали, подключали аналоговый кавитометр и снова включали ультразвук на 2 минуты, и в течение этого времени регистрировали величину выходного сигнала в различных частотных диапазонах. После этого генератор отключали на 10 минут. После 10-минутного перерыва цикл повторяли. Таким образом, при такой методике перед каждым 10-минутным перерывом происходило дополнительное воздействие ультразвуком в течение двух минут. Как оказалось, последний режим обработки по сравнению с непрерывным озвучиванием обеспечивает более интенсивную дегазацию при одинаковом полном времени ультразвукового воздействия на раствор.

2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 2.1 представлены результаты одновременной регистрации полного выходного сигнала гидрофона и сигнала высокочастотной составляющей кавитационного шума при непрерывном озвучивании, т. е. по первому варианту использовавшейся методики, а на рисунке 2.2 – по второму варианту. Зависимости на рисунках 2.2 и 2.3 получены путем «сшивания» отдельных 1-минутных зависимостей. Места соединений зависимостей выделены штриховыми линиями.

Отметим, во-первых, что для условий данного эксперимента наблюдается хорошая корреляция активности кавитации и полного выходного сигнала гидрофона, а именно: с ростом интенсивности полного сигнала растет и активность кавитации.

При включении ультразвука начинается интенсивная дегазация с выделением большого количества визуально регистрируемых пузырьков с размерами до нескольких миллиметров, активность кавитации при этом медленно увеличивается. В течение 10–15 секунд после включения ультразвука, активность кавитации быстро увеличивается, затем рост ее замедляется. Под действием ультразвука идет интенсивная дегазация с выделением большого количества визуально регистрируемых пузырьков с размерами до нескольких миллиметров. Пузырьки меньшего размера удерживаются в поле стоячей волны и постепенно увеличиваются в размерах за счет выпрямленной диффузии газа в пузырек. Затем рост замедляется и практически прекращается. А к 90-й секунде озвучивания наблюдается даже некоторое уменьшение активности кавитации, вероятно, вследствие скопления больших пузырей в узлах звукового давления и усиления, вследствие этого, поглощения ультразвука и эффекта экранирования.

На первом этапе дегазации отмечены синхронные квазипериодические скачки выходных сигналов кавитометра. Эта закономерность, вероятно, связана с образованием кластеров кавитационных полостей, которые периодически всплывают на поверхность жидкости. При этом в момент всплытия происходит удаление избытка пузырьков из ультразвукового поля, в результате поглощение ультразвука в кавитационной области на короткое время уменьшается. Уменьшается и демпфирующее действие больших пузырей, что и приводит к соответствующим всплескам активности кавитации. Затем начинается новый цикл роста пузырьков и формирования кластеров, активность кавитации несколько снижается и так далее.

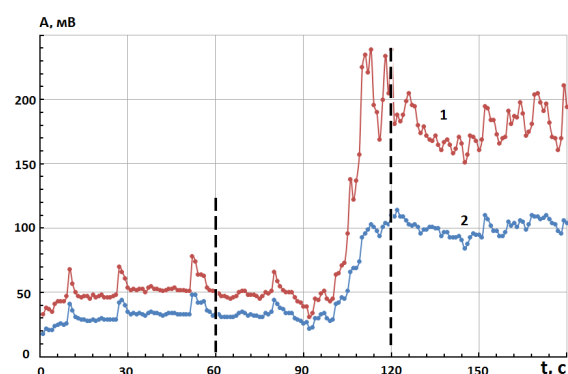


Рисунок 2.1 – Динамика изменения во времени полного выходного сигнала датчика и активности кавитации в ходе дегазации пересыщенного раствора углекислого газа

1 – полный выходной сигнал; 2 – активность кавитации, температура жидкости = $22 \pm 1,5^\circ \text{C}$.
Дегазация – по первому варианту

После достижения некоторой степени дегазации (на рисунке 2.1 – примерно на 100-й секунде) наблюдается быстрый, часто скачкообразный рост активности кавитации. Можно предполагать, что в этот момент происходит качественное изменение состояния кавитационной области, связанное, вероятно, со взаимодействием пузырьков. Далее происходит незначительное уменьшение и затем медленный рост активности кавитации.

Низкий уровень активности кавитации и полного выходного сигнала в начале эксперимента обусловлены наличием в жидкости большого количества пузырей с размерами, во много раз превышающими резонансные размеры. В такой жидкости не может быть достигнуто растягивающих напряжений, способных вызвать пульсации и захлопывание зародышей кавитации с размерами порядка резонансного или меньше (примерно – 0,05 мм для условий данного эксперимента). По мере дегазации концентрация больших пузырей, сильно ослабляющих прочность жидкости, уменьшается. Поэтому отрицательное

давление в фазе разрежения звуковой волны постепенно увеличивается, активируются пузырьки все меньшего размера и активность кавитации увеличивается.

На рисунке 2.2 представлены аналогичные зависимости, полученные по второму варианту методики, т. е. с дополнительным озвучиванием в течение 2 минут и 10-минутными перерывами после каждого этапа озвучивания. Результирующие графики, как и на рисунке 2.1, получены путем «сшивания» отдельных зависимостей.

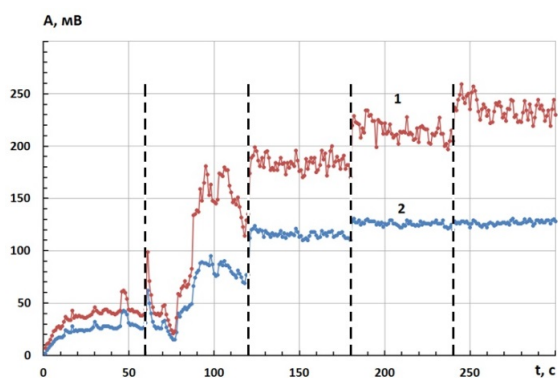


Рисунок 2.2 – Динамика изменения во времени полного выходного сигнала гидрофона и активности кавитации в ходе дегазации пересыщенного раствора углекислого газа по второму варианту обработки:
1 – полный выходной сигнал; 2 – активность кавитации, температура жидкости = $22 \pm 1,5^\circ \text{C}$.
Дегазация – по второму варианту

В начале эксперимента активность кавитации (зависимость 2) близка к нулевой. Интенсивность полного выходного сигнала гидрофона (зависимость 1) также незначительна. На начальном участке активность кавитации увеличивается медленно и в течение первой минуты выходит на плато с тенденцией к уменьшению. Так же как и в первом случае (рисунок 2.1), имеется участок с быстрым ростом (примерно на 80-й секунде), не связанный с отключением или включением ультразвуковых колебаний.

Отличие результатов данного эксперимента (рисунок 2.2) от результатов, полученных по первому варианту озвучивания (рисунок 2.1) состоит в том, что при включении ультразвука после десятиминутного перерыва регистрируемые величины имеют существенно более высокие значения по сравнению со значениями в момент отключения ультразвука при окончании предыдущего этапа озвучивания. Поэтому результирующие зависимости имеют ступенчатый вид.

Эта особенность обусловлена тем, что в данном случае после каждого 60-ти секундного цикла регистрации исследуемых параметров проводилась дополнительная обработка в течение 1 минуты (во время которой измерялись интенсивности сигналов в различных частотных

диапазонах с использованием аналогового кавитометра ИСА-3М). За это время происходила дополнительная дегазация, общая концентрация пузырьков еще больше уменьшалась. Отключение ультразвука на 10 минут (между циклами) обеспечивало всплытие больших неэффективных полостей. В результате концентрация таких пузырьков в кавитационной области в начале каждого последующего цикла оказывалась существенно меньшей, чем в конце предыдущего, что и обеспечивало повышение активности кавитации, равно как и полного выходного сигнала датчика. Этими же факторами объясняется и более быстрое достижение состояния кавитационной области, при котором происходит упомянутый выше скачок активности кавитации.

На рисунке 2.3 представлена эволюция спектров кавитационного шума по мере дегазации под действием ультразвука. Маркером отмечена основная частота $f_0 = 34,6$ кГц. Штриховой линией на рисунке 2.3 а) показан нулевой уровень, а на рисунке 2.3 б) – непрерывная составляющая спектра кавитационного шума.

На начальной стадии дегазации (рисунок 2.3, а) интенсивность сигнала на основной частоте ниже интенсивностей более высоких гармоник. Это может быть обусловлено тем, что на начальной стадии дегазации, когда объемная концентрация полостей на пути звуковой волны велика, излучаемая волна сильно поглощается в кавитационной области. Из этого можно сделать вывод, что на первой стадии основным фактором подавления активности кавитации в пересыщенном растворе CO_2 является поглощение ультразвука в кавитационной области.

По мере уменьшения газосодержания (вследствие дегазации) растет интенсивность сигнала на основной частоте, интенсивность гармоник и интенсивность непрерывной составляющей спектра кавитационного шума.

Интенсивность на частоте ультразвукового поля f_0 при переходе от первой стадии дегазации (рисунок 2.3, а) ко второй (рисунок 2.3, б) растет быстрее чем высокочастотные компоненты nf_0 , где n – целое число. Если сравнить спектры на рисунках 2.3, а) и 2.3 б), то видно, что интенсивность f_0 увеличилась за все время дегазации примерно на 40 dBm, т. е. более, чем во 100 раз, а интенсивности гармоник от $3f_0$ до $7f_0$ примерно на 10...15 dBm.

На первом этапе дегазации (рисунок 2.3, а) спектр кавитационного шума характеризуется тем, что непрерывная составляющая пренебрежимо мала по сравнению со спектрами на более поздних стадиях дегазации (рисунок 2.3, в и рисунок 2.3, г). Непрерывная компонента спектра КШ, как известно [13], [14], связана с нестационарной кавитацией, т. е. ее наличие обусловлено захлопыванием кавитационных полостей. Этот результат, таким образом, позволяет сделать

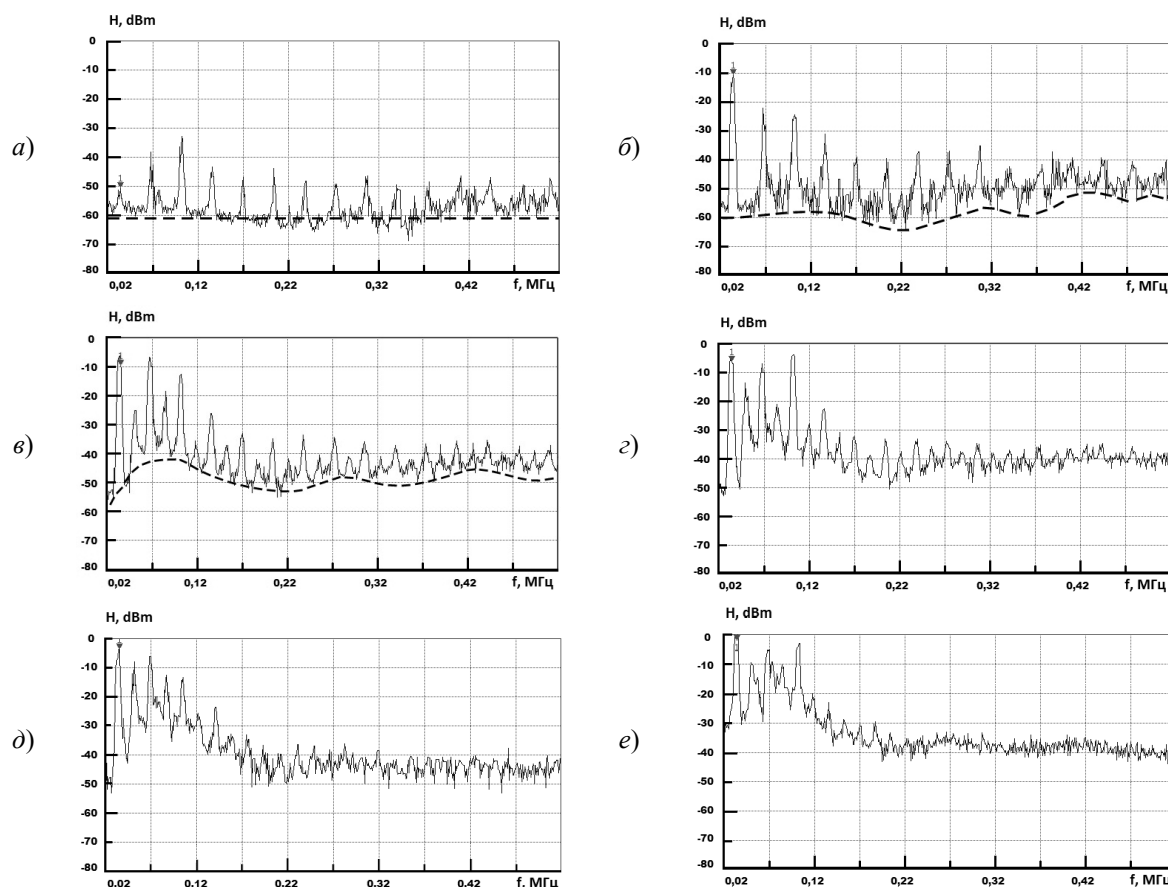


Рисунок 2.3 – Эволюция спектров кавитационного шума в ходе дегазации/

Спектры сняты после дегазации в течение 1 мин (а), 2 мин (б), 3 мин (в), 4,5 мин (г); и спектры водопроводной (д) и дистиллированной воды (е). Температура жидкости – $21 \pm 2,5^\circ \text{C}$

вывод, что в пересыщенном растворе углекислого газа не генерируется интенсивных ударных волн, следовательно, кавитация в этом режиме не может оказывать интенсивного разрушающего воздействия на твердые поверхности и биологические ткани. Т. е. в этом случае может реализоваться относительно «мягкое» кавитационное воздействие. Эта особенность обусловлена следующими факторами: 1) наличием большого количества пузырей с размерами больше резонансного, которые в соответствии с [1], [2] пульсируют незначительно меняя свои размеры и не генерируют ударных волн; 2) тем, что эти пузырьки сильно ослабляют прочность жидкости, в результате в фазе разрежения не может быть достигнуто сколько-нибудь значительных растягивающих напряжений, необходимых для приведения в движение пузырьков с размерами порядка резонансного или меньше; 3) при большой концентрации газа в жидкости давление парогазовой смеси внутри пузырьков также будет значительным, что в соответствии с [1], [15] должно приводить к демпфированию процесса захлопывания, снижению температур, достигаемых в пузырьке, и интенсивности ударных волн, генерируемых в кавитационной области.

На втором этапе (рисунок 2.3, б, 2.3, в) рост интенсивности низкочастотных компонент замедляется, а высокочастотная часть, наоборот, растет быстрее. На конечной стадии дегазации (рисунок 2.3, г) спектр КШ раствора углекислого газа приближается к спектру дистиллированной воды (рисунок 2.3, е). Согласно результатам работы [15], пузырьки с размерами меньше резонансного генерируют все более высокочастотные составляющие при уменьшении их размеров. Поэтому можно утверждать, что по мере дегазации раствора углекислого газа в кавитационной области уменьшается концентрация больших кавитационных полостей (больше резонансного размера) и увеличивается концентрация пузырьков с размерами меньше резонансного, эффективно преобразующих энергию ультразвука в другие виды энергии.

Таким образом, по мере дегазации раствора углекислого газа в кавитационной области уменьшается доля больших полостей, неэффективных с точки зрения генерирования ударных волн, и увеличивается доля пузырьков, при захлопывании которых генерируются интенсивные ударные волны и другие кавитационные эффекты. Снижение концентрации газа в жидкости

приводит к соответствующему снижению давления парагазовой смеси внутри пузырьков и уменьшению демпфирующего действия содержимого пузырьков.

Заключение

Показано, что в пересыщенном растворе углекислого газа активность кавитации близка к нулевой. При включении ультразвука начинается интенсивная дегазация с выделением большого количества визуально регистрируемых пузырьков с размерами до нескольких миллиметров, активность кавитации при этом медленно увеличивается. Отмечены квазипериодические скачки выходного сигнала гидрофона, что связано, вероятно, с образованием кластеров кавитационных полостей, которые периодически всплывают на поверхность жидкости.

Выделены две стадии развития кавитационной области при дегазации пересыщенного раствора углекислого газа: на первой стадии активность кавитации и полный выходной сигнал увеличиваются медленно, переход от первой ко второй стадии характеризуется быстрым, часто скачкообразным, ростом активности кавитации.

Спектры кавитационного шума для первой и второй стадий кавитационной области существенно различаются, что указывает на возможность идентификации стадий по спектру кавитационного шума. Исходя из анализа полученных спектров сделан вывод, что на первой стадии при пульсациях пузырьков не генерируется интенсивных ударных волн и кавитация в этом режиме не может оказывать интенсивного разрушающего воздействия на твердые поверхности и биологические ткани. На второй стадии ситуация изменяется, и концентрация интенсивно захлопывающихся пузырьков существенно увеличивается.

Авторы выражают благодарность сотрудникам БГУИР В.А. Колтовичу и А.Ф. Грибу за подготовку оборудования для проведения исследований и помощь при проведении измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сиротюк, М.Г. Акустическая кавитация / М.Г. Сиротюк. – М.: Наука, 2008. – 271 с.
2. Leighton, T.G. Acoustic Bubble / T.G. Leighton. – Pergamon Press: London, 1995. – P. 650.
3. Маргулис, М.А. Сонолюминесценция / М.А. Маргулис // Успехи физических наук. – 2000. – № 3. – С. 263–284.
4. Didenko, Y T. Molecular Emission during Single Bubble Sonoluminescence / Y.T. Didenko, K. Suslick // Nature. – 2010. – Vol. 407. – P. 877–879.
5. Gireesan, S. Modeling the effect of carbon dioxide gas on cavitation / S. Gireesan, A.B. Pandit //

Ultrasonics Sonochemistry. – 2017. – Vol. 34. – P. 721–728.

6. Sensitivity of free radicals production in acoustically driven bubble to the ultrasonic frequency and nature of dissolved gases / S. Merouani, O. Hamdaoui, Y. Rezgui, M. Guemini // Ultrasonics Sonochemistry. – 2015. – № 22. – P. 41–50.

7. Dezhkunov, N.V. Multibubble sonoluminescence intensity dependence on liquid temperature at different ultrasound intensities / N.V. Dezhkunov // Ultrasonics Sonochemistry. – 2002. – Vol. 9. – P. 103–106.

8. Эволюция кавитационной области в фокусированном ультразвуковом поле / Н.В. Дежкунов, А. Francescutto, F. Calligaris, А.Л. Николаев // Письма в журнал технической физики. – 2014. – Т. 40, №16. – С. 73–79.

9. Gogate, P.R. Intensification of cavitation activity using gases in different types of sonochemical reactors / P.R. Gogate, S. Shaha, L. Csoka // Chem. Eng. J. – 2015. – № 262. – P. 1033–1042.

10. Attached cavitation at a small diameter ultrasonic horn tip / A. Žnidarčič, R. Mettin, C. Cair, M. Dular // Physics of fluids. – 2014. – Vol. 26, № 2. – P. 023304.

11. Dynamics of attached cavitation at an ultrasonic horn tip / R. Mettin, M. Dular, A. Znidarčic, V.A. Truong // Fortschritte der Akustik / Darmstadt: DAGA. – 2012. – P. 447–448.

12. Laboratory of ultrasonic technologies and equipment [Electronic resource]. – Mode of access: <https://cavitation.bsuir.by/en/>. – Date of access: 02.09.2019.

13. Acoustic emission from cavitating solutions: Implications for the mechanisms of sonochemical reactions / G.J. Price, M. Ashokkumar, M. Hodnett, B. Zequiri, F. Grieser // Journal of Physical Chemistry B. – 2005. – Vol. 109, № 38. – P. 17799–17801.

14. Sonoluminescence and acoustic emission spectra at different stages of cavitation zone development / N.V. Dezhkunov, A. Francescutto, L. Serpe, R. Canaparo, G. Cravotto // Ultrasonics Sonochemistry. – 2018. – Vol. 40. – P. 104–109.

15. Correlation between sonoluminescence, sonochemistry and cavitation noise spectra / N. Segelbarth, O. Eulaerts, J. Reisse, L.A. Crum, T.J. Matula // Journal of Physical Chemistry. – 2002. – Vol. 2 (8–9). – P. 536–538.

Работа выполнена в рамках проекта «Разработать и изготовить ультразвуковой кавитационный комплекс (УЗКК)» подпрограммы «Уникальное научное оборудование» государственной научно-технической программы «Эталонные и научные приборы».

Поступила в редакцию 03.10.19.

УДК 539.22[53.085+35.243]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ЧАСТИЦ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ФОСФОЛИПИДОВ В НАТИВНЫХ МАСЛАХ РАСТИТЕЛЬНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

И.С. Михаловский¹, Н.П. Матвейко¹, Г.Б. Мельникова², Е.Н. Волнянко³,
В.Н. Бабодей⁴, А.В. Пчельникова⁴

¹Белорусский государственный экономический университет, Минск

²Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова НАН Беларуси, Минск

³Институт механики металлополимерных систем имени В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

⁴Научно-практический центр НАН Беларуси по продовольствию, Минск

PARTICLES SIZES DETERMINATION OF THE NANOSTRUCTURED PHOSPHOLIPIDES DISPERSED PHASE IN PLANT ORIGIN NATIVE OILS

J.S. Mikhalovsky¹, M.P. Matveyko¹, G.B. Melnikova², E.N. Volnyanko³,
V.N. Babodey⁴, A.V. Pchelnicova⁴

¹Belarus State Economic University, Minsk

²A.V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of NAS of Belarus, Minsk

³V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of NAS of Belarus, Gomel

⁴Scientific and Practical Centre for Foodstuffs of NAS of Belarus, Minsk

Предложен способ получения фосфолипидного концентрата из растительных масел и метод определения размерных характеристик дисперсной фазы из фосфолипидных структур. С использованием светорассеяния и атомно-силовой микроскопии установлено, что дисперсная фаза фосфолипидной суспензии образована структурами с линейными размерами частиц, не превышающими 100 нм. Метод получения фосфолипидов в виде наносуспензий может быть положен в основу новых технологий получения фосфолипидных концентратов как источников эмульгаторов для пищевой промышленности, технологических сред, а также переработки масличного сырья.

Ключевые слова: спектрофотометрия, атомно-силовая микроскопия, фосфолипиды, наноструктуры, технологические среды.

A method for obtaining phospholipid concentrate from vegetable oils and a method for determining the size characteristics of the dispersed phase from phospholipid structures are proposed. It was found with light scattering and atomic force microscopy that the dispersed phase of the phospholipid suspension was formed by structures with linear particle sizes not exceeding 100 nm. The method of obtaining phospholipids in the nanosuspension form can be the basis for new technologies of phospholipid concentrates as sources of emulsifiers for the food industry, technological substance, as well as processing of oilseeds.

Keywords: spectrophotometry, atomic force microscopy, phospholipids, nanostructures, technological substances.

Введение

В производстве новых материалов из биологического сырья первостепенное значение имеют подходы, основанные на использовании достижений био- и нанотехнологий [1]. Полная переработка растительных масел требует использования ряда технологических процессов [2]–[4], одним из которых является выделение из масел фосфолипидов (фосфатидов), с одной стороны, являющихся источником крайне востребованных пищевых лецитиновых эмульгаторов и кормовых концентратов, с другой стороны, перспективных в качестве основы при создании технологических сред [2]–[6]. Актуальность данной проблемы также связана с тем, что наличие фосфолипидов в нерафинированном масле приводит к образованию на маслодобывающих заводах значительного количества баковых отстоев (фузов), которые, практически, не имеют рентабельного

сбыта, а при длительном хранении становятся практически невостребованными. Рафинация масел на перерабатывающих предприятиях приводит к значительным потерям как фосфолипидов, так и глицеридов с гидратационным осадком. Вызывает интерес применение методов, позволяющих выделять фосфолипидную фракцию путем формирования турбулентности, вызванной интенсивным вращением ферромагнитных рабочих элементов в электромагнитном вихревом поле [7].

При рафинации растительных масел перспективными являются акустические методы. Установлено, что обработка подсолнечного масла ультразвуком после его гидратации ускоряет процессы седиментации, что способствует более полному удалению фосфолипидов [8]. Авторы работы [9] считают, что сочетание методов экстракции с использованием растворителя (гексан,

изопропиловый спирт) и ультразвуковой обработки увеличивает степень извлечения липидов из растительных низкоомасличных сырьевых источников (плоды, злаковые культуры). Особенности рафинирования подсолнечного и соевого масел фосфорной кислотой совместно с ультразвуковым воздействием показано в работе [10].

Высокоэффективное отделение фосфолипидной компоненты из растительных масел должно основываться на теоретической базе молекулярной биофизики и коллоидной химии. Следует понимать, что водонерастворимые амфифильные молекулы фосфолипидов с водой в маслах способны лишь к образованию регулярных низкоразмерных структур в условиях воздействия внешних факторов. Так, например, согласно математической модели, созданной с помощью гибридных функциональных сетей Петри, возможно протекание процесса формирования везикулярных фосфолипидных наноструктур путем дискретно-импульсного введения энергии [11]. В узлах стоячих ультразвуковых волн молекулы фосфолипидов в зависимости от их концентрации могут формировать в присутствии воды мицеллы, бислойные и многослойные униламеллярные и мультиламеллярные глобулярные везикулы (липосомы), линейные размеры которых характеризуются десятками нанометров [12], [13]. На этом основании акустическая обработка масел в присутствии воды должна проводиться путем формирования поля с узлами стоячих ультразвуковых волн и образованием в них фосфолипидных высокодисперсных структур. В отличие от известных способов эмульгирования фосфолипидов путем гидратации, их ультразвуковое наносупензирование и последующее осаждение структур (везикул, их агрегатов) в градиенте центробежных сил позволит получить субстанцию с характеристиками, близкими к требуемым характеристикам готового фосфатидного концентрата [2]. Сочетание метода ультразвукового наноструктурирования фосфолипидов с промышленными технологиями центрифугирования и сепарирования позволит разработать технологию получения фосфатидной фракции в высококонцентрированной суспензионной форме.

Цель работы – получение наноструктурированных фосфолипидов в маслах с использованием внешнего воздействия (ультразвука) и определение размеров дисперсных структур.

В работе введены следующие обозначения:

АСМ – атомно-силовая микроскопия;

a , м – показатель, зависящий от интенсивности падающего света;

D – оптическая плотность;

T – светопропускание;

R , % – светорассеяние;

λ , нм – длина волны.

1 Материалы и методы исследования

В работе использовали нативные (нерафинированные [2]) рапсовое, соевое и подсолнечное масла.

Ультразвуковую обработку молекулярных композиций проводили с использованием установки «ИЛ100-6/1» (ООО «Ультразвуковая техника – ИНЛАБ», Россия). Частота ультразвуковых колебаний составляла 22 кГц. Мощность генератора 750 Вт. Использовали волновод с коэффициентом передачи энергии акустических колебаний равным единице.

Механическую гомогенизацию осуществляли с помощью магнитной мешалки с использованием магнитных роторов, покрытых политетрафторэтиленом (тефлоном).

Спектральные исследования проводили с помощью цифрового спектрофлуориметрического комплекса «СМ2203» («Солар», Республика Беларусь), работающего в режиме спектрофотометра. Использовали кварцевые кюветы с оптическим путем 1 см. Шаг изменения длины волны при записи спектра – 1 нм. Время накопления сигнала при сканировании спектра – 0,5 с. Оптическая щель – 2 нм.

Использовали центрифугу «Universal 320R» («Hettich», ФРГ) с бакет-ротором и объемом чашек на пробирки до 100 мл, регулируемой температурой от минус 20° С до комнатной 18–20° С.

Структуру дисперсной фазы функциональных эмульсий на кремниевых подложках изучали методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) на приборе «НТ-206» (ОДО «Микротестмашины», Республика Беларусь). Использовали стандартные кремниевые зонды («Mikromacsh», Эстония) жесткостью 2,5 Н/м и радиусом кривизны не более 10 нм [14].

Обработку экспериментальных данных, математическую аппроксимацию спектров осуществляли с использованием программного пакета Origin for MS Windows.

2 Результаты и их обсуждение

Структурирование при условиях твердой аморфной компоненты растительного масла, представленной преимущественно амфифильными фосфолипидами, представляется возможным с использованием ультразвукового воздействия. Обработка нативного масла в присутствии воды приводит к формированию дисперсной фазы с визуально различимым желтым оттенком.

Возникают вопросы о размерных характеристиках фосфолипидных структур и последующей возможности их отделения от жидкой фракции масла, главным образом представленной глицеридами и свободными жирными кислотами. Для определения размеров дисперсной фазы применяли оригинальный методический подход, основанный на установлении характера кривой светорассеяния частиц непосредственно в

дисперсии. Так, в представлении Ангстрема [15] процесс светорассеяния дисперсными фазами при отсутствии поглощающих центров описывается уравнением (2.1), коррелирующим с зависимостью Рэлея [16]:

$$R = a / \lambda^p, \quad (2.1)$$

где R – рассеяние света с длиной волны λ ; a – показатель, зависящий от интенсивности падающего света (в спектрофотометре величина постоянная) и постоянный при неизменных:

- геометрии и условиях измерения,
- частичной концентрации (числа частиц в единице объема среды),
- объеме одной частицы,
- показателях преломления дисперсной фазы и дисперсной среды,
- расстоянии от рассеивающего объекта до точки наблюдения,
- угле рассеяния.

Установление показателя p позволяет определить порядок размеров структур дисперсной фазы липидного коллоида. Так, если спектр светорассеяния в видимой области аппроксимируется кривой по уравнению (2.1) с показателем $p = 4$ (справедлив закон Рэлея), то можно утверждать, что дисперсная фаза коллоида образована, главным образом, частицами, близкими к сферической форме, с размерами, не превышающими десятую долю длины волны рассеянного света.

Величина интенсивности светорассеяния R связана уравнением (2.2) со светопропусканием коллоида T , регистрируемым спектрофотометрическим способом:

$$R(\%) = 100(\%) - T(\%). \quad (2.2)$$

Для корректного использования данного методического подхода необходимо учитывать поглощение флуорофоров в исследуемых дисперсиях. На рисунке 2.1 представлены спектры поглощения нативного рапсового масла в кварцевой кювете, оптический путь которого 1 см (кривая 1). Наблюдается крайне интенсивное поглощение компонентов масла менее 580 нм. Кроме того, имеет место интенсивная полоса поглощения масла при 670 нм, характерная для поглощения хлорофилла [17], [18]. В этой связи применение метода анализа по светорассеянию частиц непосредственно в масле в сантиметровой кювете не представляется возможным вследствие значительного поглощения света. Регистрация спектра поглощения тонкого слоя масла (между двумя кварцевыми пластинами) существенно снижает интенсивность поглощения и позволяет определить полосы поглощения в широком 240–950 нм интервале длин волн (рисунок 2.1, кривая 2). Кроме длинноволновой полосы при 670 нм, видны полосы при 275 нм, 415 нм, 455 нм и 485 нм. Несмотря на значительное снижение интенсивности поглощения молекул масла в тонком слое, наличие поглощающих

флуорофоров не позволяет применить закон Рэлея для изучения процессов светорассеяния на дисперсных частицах непосредственно в тонком слое нативного растительного масла.

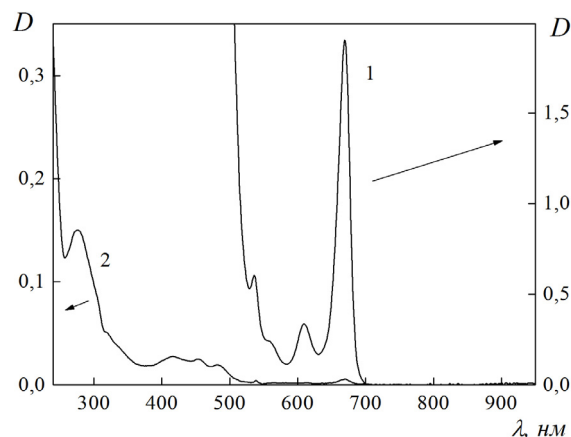


Рисунок 2.1 – Спектры поглощения рапсового масла в кварцевой кювете с оптическим путем 1 см (кривая 1) и тонкого слоя масла между кварцевыми пластинами (кривая 2) относительно воздуха

С целью оценки линейных размеров фосфолипидных структур по светорассеянию применяли методический подход, основанный на закономерностях протекания механизмов образования фосфолипидных липосом в полярных водных средах [12]. Фосфолипидные структуры, сформированные в ультразвуковом поле непосредственно в маслах, сохраняют свою геометрию и структуру в водной среде. Это позволяет применить метод светорассеяния при низкой концентрации фосфолипидных структур, при которой процессами поглощения света можно пренебречь. Для этого определенное количество структур вместе с масляной средой помещали в водную среду и гомогенизировали. Данную дисперсию центрифугировали при 3000 об/мин для флотации масляной глицеридной компоненты. Из середины супернатанта брали объем дисперсии фосфолипидных структур, достаточный для исследований (3 мл). На рисунке 2.2 представлена зависимость интенсивности рассеянного света на фосфолипидных структурах в водной среде от длины волны (кривая 1), рассчитанная на основании уравнения (2.2). Установлено, что экспериментальная кривая светорассеяния хорошо аппроксимируется зависимостью (2.1) с показателем p равным 4 в диапазоне длин волн 300–950 нм (кривая 2). При длинах волн менее 300 нм наблюдается отклонение кривой аппроксимации (рисунок 2.2), что, по-видимому, связано с процессами поглощения света дисперсными структурами. Полученные данные позволяют утверждать, что рассеивающие центры, сформированные в масле, главным образом, фосфолипидами в присутствии воды в узлах ультразвуковых стоячих

волн не превышают одну десятую длины волны видимого излучения. Можно считать, что линейные размеры исследованных структур укладываются в нанодиапазон согласно ГОСТ [19].

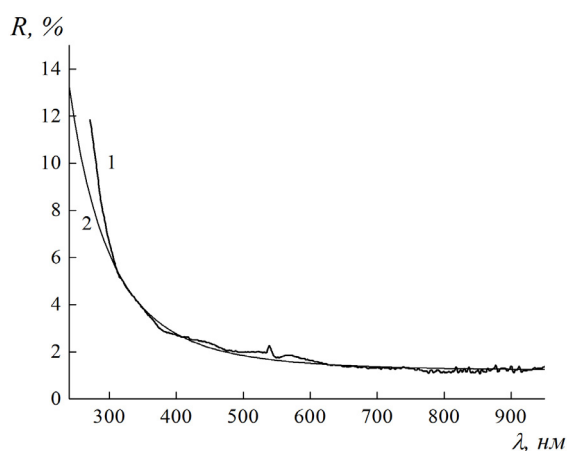


Рисунок 2.2 – Спектр светорассеяния фосфолипидных структур в водной среде (кривая 1) и его аппроксимация согласно уравнению (2.1) (кривая 2)

Исследованный образец дисперсии фосфолипидных структур использовали для определения структуры дисперсной фазы с помощью атомно-силовой микроскопии (АСМ). На рисунке 2.3 представлены 3D (а) и 2D-изображения (б) структуры эмульсий на кремниевой подложке. Размер оценивали по 2D-изображению путем построения профиля по линии сканирования с использованием специализированного программного пакета *SurfaceExplorer*. Размер дисперсной структуры определяли, как перепад высоты (z) на профиле в нижней и верхней точке выделенной частицы.

Установлено, что частицы на гидрофилизированной кремниевой подложке образуют сегменты, близкие к сферическим. Среднее значение

линейного размера сегмента фосфолипидной структуры по высоте составляет от 30 нм до 50 нм. Среднее значение линейного размера ширины (диаметр основания сегмента) дисперсных структур составляет 80 нм. Аналогичным образом проведены измерения размера остальных дисперсных частиц.

Приведенные данные АСМ о сегментарном характере частиц на подложке позволяют предположить, что формирование системы в узлах ультразвуковых стоячих волн в маслах обеспечивает сборку фосфолипидов в структуры до 100 нм. Суспензионный характер дисперсий фосфолипидов позволяет подобрать условия для их осаждения в поле центробежных сил.

Заключение

В работе предложили новый метод отделения фосфолипидов от глицеридов растительных масел, основанный на процессе наноструктурирования фосфатидов в ультразвуковом поле с образованием высокодисперсной фазы суспензионного типа (наносуспензирование), в отличие от традиционных методических подходов, в результате которых образуется эмульсионная фракция неизвестной структуры.

Применяя спектрофотометрический метод и метод атомно-силовой микроскопии установили размеры дисперсной фазы из фосфолипидов в растительном масле – линейные размеры фосфолипидных структур не превышают 100 нм.

В общем плане разработанный метод получения фосфолипидных наносуспензий может быть положен в основу технологических приемов получения фосфатидов как ценного источника пищевых эмульгаторов, кормовых добавок, биологически безопасных технологических сред, а также современных промышленных технологий рафинирования растительных масел.

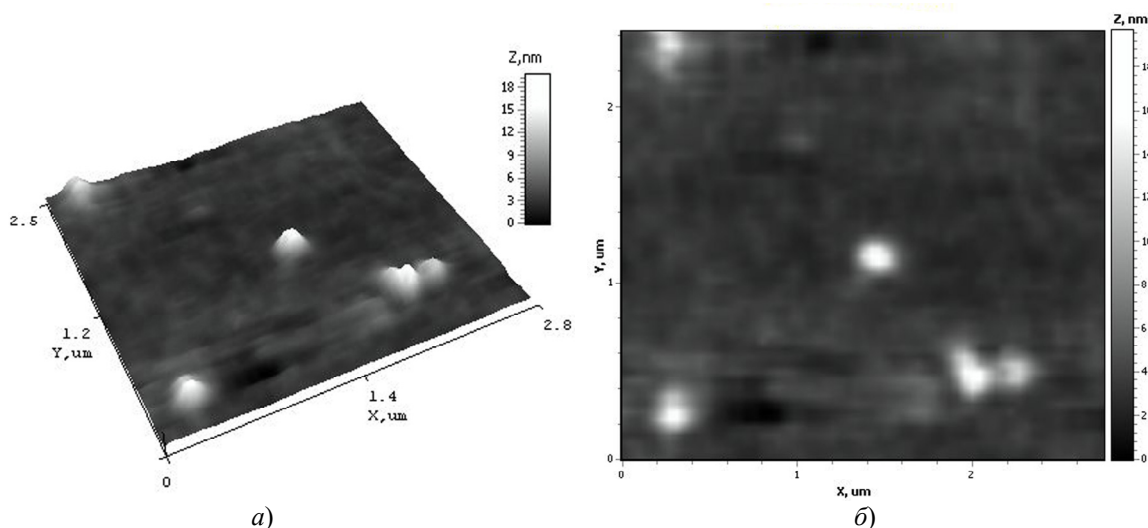


Рисунок 2.3 – АСМ-изображения дисперсной фазы фосфолипидных структур (поле сканирования 2,0×2,0 мкм): 3D-изображения (а) и 2D-изображения (б)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Программа развития промышленного комплекса Республики Беларусь на период до 2020 года* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://research.bsu.by/wp-content/uploads/2014/10/postanovlenie-sm-622-5.07.2012-red-30.06.2014.pdf>. – Дата доступа: 10.01.2010.
2. *ГОСТ 21314-75. Масла растительные. Производство. Термины и определения*. Введ. 1976-06-30. – М.: Стандартинформ, 2005. – 30 с.
3. *Технология переработки жиров* / под ред. Б.Н. Тютюнникова. – М.: Пищевая промышленность, 1970. – 652 с.
4. *Товбин, И.М. Рафинация жиров* / И.М. Товбин, Г.Г. Фаниев. – М.: Пищевая промышленность, 1977. – 240 с.
5. *Стрельцов, В.В. Тенденции использования биологических смазочных материалов* / В.В. Стрельцов, С.В. Стребков // Вестник ФГОУ ВПО МГАУ. – 2009. – № 2. – С. 66–69.
6. *Евдокимов, А.Ю. Жировое сырье в производстве смазочных материалов* / А.Ю. Евдокимов // Нефтепереработка. Нефтехимия. – 2011. – № 3. – С. 105–108.
7. *Очистка растительных масел с применением АВС: основные способы и методы* [Электронный ресурс] // GlobeCore Gmb. – 2018. – Режим доступа: <https://avs.globecore.ru/ochistka-rastitelnyh-masel-s-primeneniem-avs.html>. – Дата доступа: 10.01.2019.
8. *Алексеева, С.Л. Повышение эффективности выделения гидратированных фосфолипидов из подсолнечного масла с помощью ультразвукового воздействия* / С.Л. Алексеева, А.А. Бернацкий, В.Л. Миронов // Известия вузов. Пищевая технология. – 1996. – № 5–6. – С. 44–45.
9. *Ультразвуковой метод оценки эффективности извлечения липидов из низкомасличного сырья* / В.И. Мартовщук [и др.] // Новые технологии. – 2011. – № 2. – С. 43–45.
10. *Using of ultrasonic in degumming of soybean and sunflower seed oils: comparison with the conventional degumming* / Н. Mahmood-Fashandi, М. Ghavami, М. Ghara-chorloo, R. Abbasi, К.А. Mousavi // J. Food Processing and Preservation. – 2017. – Vol. 41, №. 1. – P. e12799.
11. *Авдеева, Л.Ю. Моделирование процесса формирования фосфолипидных везикулярных наноструктур* / Л.Ю. Авдеева, А.Ю. Чунихин [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.klgtu.ru/upload/science/magazine/news_kstu/2013_29/avdeeva-chunihin.pdf. – Дата доступа: 10.01.2019.
12. *Ивков, В.Г. Динамическая структура липидного бислоя* / В.Г. Ивков, Г.Н. Берестовский. – М.: Наука, 1981. – 293 с.
13. *Михаловский, И.С. Фосфолипидные наноструктурированные дисперсные системы как основа биоцидных препаратов* / И.С. Михаловский, В.А.Тарасевич, М.В. Самойлов // Наноструктуры в конденсированных средах: сб. науч. статей. – Минск: Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2013. – С. 317–322.
14. *Михаловский, И.С. Наноэмульсии на основе глицеридов мононенасыщенных жирных кислот для дисперсных функциональных материалов* / И.С. Михаловский, Г.Б. Мельникова, Е.Н. Волнянко // Полимерные материалы и технологии. – 2017. – № 4. – С. 75–79.
15. *Хюлст, Г. ван де. Рассеяние света малыми частицами* / Г. ван де Хюлст. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 536 с.
16. *Рэлей, Дж. Волновая теория света* / Дж. Рэлей, В. Стрэтт. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 208 с.
17. *Govindjee. Chlorophyll a fluorescence. A Bit of Basics and History* // Chlorophyll a fluorescence. A signature of photosynthesis / eds. Papageorgiou G., Govindjee G. – Dordrecht: Springer, 2004. – P. 1–42.
18. *Состав и спектральные характеристики компонентов биотоплива, синтезированных из масел рапса, рыжика и крамбе* / С.В. Романцова [и др.] // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 339–341.
19. *ГОСТ ISO/TS 80004-2-2017. Нанотехнологии. Часть 2. Нанообъекты. Термины и определения*. – М.: Стандартинформ, 2018. – 10 с.

Поступила в редакцию 09.10.19.

О ПРИВЕДЕННЫХ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ СОСТОЯНИЯ ВИДА $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$

А.С. Невмержицкая, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE REDUCED SEMI-EMPIRICAL EQUATIONS OF STATE OF THE FORM $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$

A.S. Nevmerzhitskaya, G.Yu. Tyumenkov

F. Scorina Gomel State University

В рамках термодинамического подхода к исследованию макросистем на основе использования метода Кардано рассмотрены три двухпараметрических уравнения состояния. Основываясь на приведенных формах вида $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{V}, \tilde{T})$ уравнений состояния Редлиха – Квонга, Бергло и Ван-дер-Ваальса, определен явный вид их функциональных представлений вида $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$.

Ключевые слова: полуэмпирическое уравнение состояния, кубичность по объёму, метод Кардано, приведенные переменные, представление вида $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$.

In the framework of the thermodynamic approach to the study of macrosystems using the Cardano method, three two-parameter equations of state are considered. Basing on the given forms of the form $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{V}, \tilde{T})$ of the Redlich–Kwong, Berthelot and Van der Waals equations of state, the explicit forms of their functional representations of the form $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$ are determined.

Keywords: semi-empirical equation of state, cubicity by volume, Cardano method, reduced variables, representation of the form $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$.

Введение

В настоящее время по-прежнему остаётся весьма актуальной задача дальнейшего изучения физических свойств реальных газов, жидкостей, вырожденных газов и т. д. на основе использования полуэмпирических уравнений состояния, например, [1], [2]. Эти уравнения наиболее часто представляются в несодержащем энтропию виде и, как правило, это вид $P = P(T, V)$ [3]. Все уравнения имеют, как минимум, два дополнительных параметра a и b , связанных с силами парного межмолекулярного взаимодействия, которые часто бывают зависящими от температуры. Математическая простота уравнений состояния, однако, содержит в себе определенную сложность, заключающуюся в их преобразовании к виду $V = V(T, P)$. Это связано с характером их математической зависимости от объёма макросистемы. Иногда эта задача бывает аналитически совершенно неразрешимой, как, например, в случае первого уравнения Дитеричи. Но всё же можно выделить класс зависимостей, для которых существуют аналитические методы исследования, например, уравнения состояния с кубической зависимостью от объёма V . В данной работе будут рассмотрены уравнения состояния с таким типом зависимости, а именно, уравнение

Редлиха – Квонга, уравнение Бергло и классическое уравнение Ван-дер-Ваальса. Кроме того, нами будут рассматриваться приведенные формы уравнений, обладающие наибольшей общностью получаемых результатов.

1 Уравнение состояния Редлиха-Квонга вида $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$

Рассмотрим наиболее часто используемое в практических расчетах уравнение Редлиха – Квонга, имеющее стандартный вид

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{\sqrt{TV}(V+b)}, \quad (1.1)$$

и приведенную форму [4]

$$\tilde{P} = \frac{3\tilde{T}}{\tilde{V} - \xi} - \frac{1}{\xi\sqrt{\tilde{T}}\tilde{V}(\tilde{V} + \xi)}. \quad (1.2)$$

Здесь величина $\xi = \sqrt[3]{2} - 1 = 0,25992 \approx 0,260$. Используются следующие значения критических параметров

$$V_C = \frac{b}{\xi}, \quad T_C = \left(\frac{3a\xi^2}{bR}\right)^{2/3}, \quad P_C = \left(\frac{Ra^2\xi^7}{3b^5}\right)^{1/3}.$$

Чтобы выделить искомую зависимость, сначала запишем уравнение состояния (1.2) в виде кубического уравнения

$$\tilde{P}\xi\sqrt{\tilde{T}}\tilde{V}^3 - 3\tilde{T}\xi\sqrt{\tilde{T}}\tilde{V}^2 - \left(\tilde{P}\xi^3\sqrt{\tilde{T}} + 3\tilde{T}\xi^2\sqrt{\tilde{T}} - 1\right)\tilde{V} - \xi = 0, \quad (1.3)$$

а затем решим его, используя метод Кардано [5]. Напомним, что смысл метода заключается в том, что любое кубическое уравнение общего вида

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1.4)$$

при помощи замены переменной

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

приводится к форме

$$y^3 + py + q = 0 \quad (1.5)$$

с коэффициентами

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2},$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

Для получения корней уравнения (1.5) нужно определить величину Q , задаваемую выражением:

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2. \quad (1.6)$$

Если все коэффициенты кубического уравнения вещественны, то и Q будет вещественным, и по его знаку мы можем определить тип корней:

$Q > 0$ – один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня;

$Q = 0$ – один однократный вещественный корень и один двукратный (в случае, когда $p = q = 0$, то один трёхкратный вещественный корень);

$Q < 0$ – три вещественных корня. Сами же корни кубического уравнения рассчитываются по формулам:

$$y_1 = \gamma + \beta, \\ y_{2,3} = -\frac{\gamma + \beta}{2} \pm i \frac{\alpha - \beta}{2} \sqrt{3},$$

где

$$\gamma = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}},$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}.$$

Обратившись к уравнению Редлиха – Квонга (1.3), получим его коэффициенты для кубического уравнения (1.4):

$$a = \tilde{P}\xi\sqrt{\tilde{T}}, \quad b = -3\tilde{T}\xi\sqrt{\tilde{T}},$$

$$c = -\left(\tilde{P}\xi^3\sqrt{\tilde{T}} + 3\tilde{T}\xi^2\sqrt{\tilde{T}} - 1\right), \quad d = -\xi.$$

Данные коэффициенты позволяют определить величину Q из (1.6), которая оказывается положительно определенной, что видно из графика поведения её поверхности (рисунок 1.1) в физически интересной области в разумном удалении от критической точки с координатами $\tilde{P} = 1$ и $\tilde{T} = 1$.

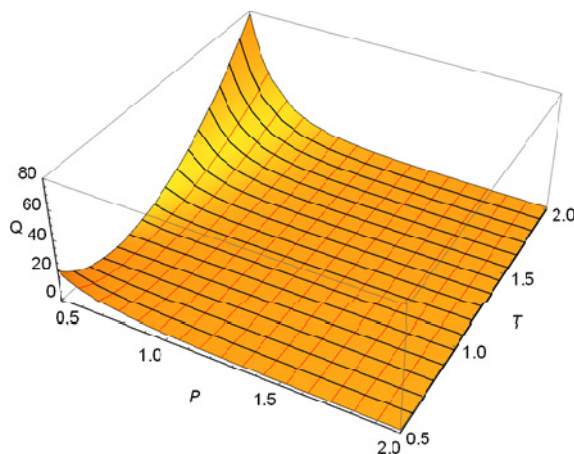


Рисунок 1.1 – Поверхность параметра Q для уравнения состояния Редлиха – Квонга

Оказывается, что уравнение (1.3) формально имеет один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня. Но ведь речь идёт об объеме макросистемы, который не является комплексной величиной. Следовательно, физическим является одно вещественное решение $y_1 = \tilde{V}$. И даже оно имеет весьма громоздкий вид, который представим следующим образом:

$$\tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T}) = (Z_1 - Z_2)^{1/3} + (Z_1 + Z_2)^{1/3}, \quad (1.7)$$

где

$$Z_1 = \frac{0.5\tilde{P}^2 - 1.92\tilde{P}\tilde{T} + 0.03\tilde{P}^2\tilde{T}^{1/2} + 0.39\tilde{P}\tilde{T}^{1/2} + \tilde{T}^{1/2}}{\tilde{P}^3\sqrt{\tilde{T}}},$$

$$Z_2 = \left(-\frac{1.14 \cdot 10^{-5}}{\tilde{P}^6\tilde{T}^3} \times \right.$$

$$\left. \times \left(-56.9\tilde{P}\sqrt{\tilde{T}} + \tilde{P}^2\tilde{T} + 11.54\tilde{P}\tilde{T}^2 + 44.38\tilde{T}^3\right)^3 + \frac{1.11\tilde{T}^2}{\tilde{P}^6\tilde{T}^3} \left(-0.95\tilde{T}^{1/2} + \tilde{P}^2(-0.47 - 0.03\tilde{T}^{3/2}) + \tilde{P}(1.83\tilde{T} - 0.37\tilde{T}^{1/2})\right)^2 \right)^{1/3}.$$

Таким образом, представление приведенного уравнения Редлиха – Квонга в форме $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$ имеет вид (1.7). Несмотря на сложность, эта форма уравнения допускает применение численного и аналитического анализа и может быть полезной при решении широкого круга задач термодинамики и физической химии.

2 Уравнения состояния Бергло и Ван-дер-Ваальса вида $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$

Следующим интересным с точки зрения физических приложений можем считать уравнение состояния Бергло, имеющее приведенную форму с кубической зависимостью от \tilde{V} вида

$$3\tilde{P}\tilde{T}\tilde{V}^3 - (\tilde{P}\tilde{T} + 8\tilde{T}^2)\tilde{V}^2 + 9\tilde{V} - 3 = 0 \quad (2.1)$$

и коэффициенты:

$$a = 3\tilde{P}\tilde{T}, \quad b = -(\tilde{P}\tilde{T} + 8\tilde{T}^2),$$

$$c = 9, \quad d = -3.$$

Для него также $Q > 0$ и единственное физическое решение представляется как

$$\tilde{V} = \frac{1}{9} \left((D_1 - D_2)^{1/3} + (D_1 + D_2)^{1/3} \right), \quad (2.2)$$

где

$$D_1 = 1 + \frac{512\tilde{T}^4 + 3\tilde{P}^2(81 + 8\tilde{T}^2) + 12\tilde{P}\tilde{T}(-81 + 16\tilde{T}^2)}{\tilde{P}^3\tilde{T}},$$

$$D_2 = 27 \left(\frac{\tilde{P}^3\tilde{T}^2 + 6\tilde{P}^2\tilde{T}(9 + 4\tilde{T}^2) + 16\tilde{T}^3(-27 + 32\tilde{T}^2)}{\tilde{P}^4\tilde{T}^3} + \frac{3\tilde{P}(243 - 360\tilde{T}^2 + 64\tilde{T}^4)}{\tilde{P}^4\tilde{T}^3} \right)^{1/2}.$$

Классическое уравнение состояния Ван-дер-Ваальса

$$3\tilde{P}\tilde{V}^3 - (\tilde{P} + 8\tilde{T})\tilde{V}^2 + 9\tilde{V} - 3 = 0 \quad (2.3)$$

имеет коэффициенты равные:

$$a = 3\tilde{P}, \quad b = -(\tilde{P} + 8\tilde{T}),$$

$$c = 9, \quad d = -3.$$

При положительном Q уравнение (2.3) может быть записано следующим образом:

$$\tilde{V} = \frac{1}{9} \left((B_1 - B_2)^{1/3} + (B_1 + B_2)^{1/3} \right), \quad (2.4)$$

где

$$B_1 = 1 + \frac{512\tilde{T}^3}{\tilde{P}^3} + \frac{3(81 + 8\tilde{T})}{\tilde{P}} + \frac{12\tilde{T}(-81 + 16\tilde{T})}{\tilde{P}^2},$$

$$B_2 = 27 \left(\frac{\tilde{P}^3 + 6\tilde{P}^2(9 + 4\tilde{T}) + 16\tilde{T}^2(-27 + 32\tilde{T})}{\tilde{P}^4} + \frac{3\tilde{P}(243 - 360\tilde{T} + 64\tilde{T}^2)}{\tilde{P}^4} \right)^{1/2}.$$

Заключение

Таким образом, в данной работе получены представления полуэмпирических двухпараметрических уравнений состояния вида $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{P}, \tilde{T})$. Представления реализованы для приведенных форм уравнений с кубической зависимостью от объема \tilde{V} , таких как уравнение Редлиха – Квонга, уравнение Бертло и классическое уравнение Ван-дер-Ваальса. Формы уравнений (1.7), (2.2) и (2.4) говорят о возможности их аналитического и численного анализа для решения широкого круга задач термодинамики и физической химии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tian, J. New equations of state for the hard polyhedron fluids / J. Tian, H. Jiang, A. Mulero // Phys. Chem. Chem. Phys. – 2019. – Vol. 24. – P. 13109–13115.
2. Equations of state from individual one-dimensional Bose gases / F. Salces-Carcoba, C.J. Billington, A. Putra, Y. Yue, S Sugawa, I.B. Spielman // New Journal of Physics. – 2018. – Vol. 20. – P. 113032–113044.
3. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 2000. – 608 с.
4. Дей, Е.А. Расчет параметров изоэнтальпического охлаждения газов Редлиха – Квонга / Е.А. Дей, О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 39–42.
5. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике в двух томах / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричкова. – Минск: Тетрасистемс, 1999. – 640 с.

Поступила в редакцию 04.09.19.

УДК 621.873

ИМПУЛЬСЫ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ ПЛОТНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЫ

В.А. Юревич

Могилёвский государственный университет продовольствия

SUPERRADIATION PULSES IN A THIN LAYER OF DENSE RESONANT MEDIUM

V.A. Yurevich

Mogilev State University of Food Technologies

В приближении однородного поля получены аналитические решения уравнений Максвелла – Блоха для поля, излучаемого тонким слоем среды с относительно высокой концентрацией активных центров. Решениями описываются импульсы сверхизлучения с фазовой модуляцией, обусловленной резонансной нелинейностью. Модельный расчёт проведен для параметров сред на основе полупроводниковых квантоворазмерных структур. С учётом конечности времени фазовой релаксации дипольных частиц, диполь-дипольного взаимодействия и влияния квазирезонансных переходов на резонансную поляризуемость активных центров формулируется новая модификация закона сохранения вектора Блоха.

Ключевые слова: плотная резонансная среда, тонкие оптические плёнки, диполь-дипольное взаимодействие, квазирезонансная поляризация.

In the homogeneous field approximation analytical solutions of the Maxwell – Bloch equations for the field emitted by a thin layer of a medium with a relatively high concentration of active centers are obtained. The solutions describe pulses of superradiance with phase modulation due to resonance nonlinearity. A model calculation was carried out for the parameters of media based on semiconductor quantum-dimensional structures. Taking into account the finiteness of the dipole particles phase relaxation time, dipole-dipole interaction, and absorption in quasi-resonance transitions, new modification of the law of Bloch vector conservation is formulated.

Keywords: dense resonant medium, thin optical films, dipole-dipole interaction, quasi-resonance polarization.

Введение

Потребности развития интегральной оптики, поиск новых эффектов с целью создания оптических систем обработки, хранения и передачи информации, традиционные задачи спектроскопии поверхности стимулируют разносторонние исследования оптических явлений, связанных с эволюцией электромагнитного излучения в тонком слое резонансной среды. Работы, посвящённые изучению нелинейного взаимодействия света с тонкими плёнками резонансных атомов, известны относительно с недавнего времени и свидетельствуют о довольно нетривиальных свойствах этих объектов [1]–[3]. Благодаря успехам технологии в последние годы стало возможным создание тонкоплёночных структур практически из любого полупроводникового материала и любой толщины с высокой плотностью активных центров. Именно поэтому свойствами образованных квантовыми точками тонкослойных полупроводниковых структур, которые относят к плотным резонансным средам, был вызван особый интерес к изучению явлений в квазидвумерных суперкристаллах, перспективных к применению в нанофотонике [4].

В формировании отклика плотных резонансных сред на излучение особо сказывается влияние на нелинейную восприимчивость

диполь-дипольного взаимодействия и существования в энергетической структуре активных центров переходов, близких к основному и способных реагировать на резонансное излучение [3], [5], [6]. Квантовые переходы с участием экситонов характеризуются гигантскими силами осциллятора, что может приводить к формированию нелинейного отклика планарных микро- или наносистем при умеренных уровнях интенсивности действующего в среде поля когерентного излучения [7]. Для квантоворазмерных структур характерны разнообразные механизмы нелинейности, малые времена релаксации и большие значения оптических нелинейностей, поэтому следует ожидать более яркого проявления указанных эффектов именно в полупроводниковых тонких плёнках. Поверхностные плёнки из активных материалов с сильным нелинейным откликом на резонансное световое поле в диапазоне оптических частот можно эффективно использовать в пассивных устройствах нанофотоники для управления световыми потоками [8].

Поэтому представляется актуальным исследование закономерностей отражения и излучения когерентного светового тонкой полупроводниковой пленкой при учёте оптических процессов с участием экситонов. Известно также, что в тонких резонансных слоях могут быть реализованы

режимы самовозбуждения [9]. Это явление перспективно к использованию для получения импульсной генерации в лазерных устройствах, где усиливающий элемент представляет собой тонкий слой резонансной среды, в которой возможно достичь высокого уровня инверсии. Именно такие среды представлены используемыми в оптике и лазерной физике квантоворазмерными полупроводниковыми структурами. Обоими предлагаемыми к рассмотрению эффектами – диполь-дипольным взаимодействием и реакцией на поле переходов – близких к основному, по мере резонансных вариаций населённости определяется смещение центра и уширение спектральной линии усиления. В настоящей работе рассмотрено влияние этих факторов нелинейной фазовой динамики на процесс сверхизлучения (СИ) в приближении сверхтонкого слоя резонансных атомов. Фазовыми эффектами определена возможность возникновения динамической обратной связи, поэтому применительно к тонким усиливающим элементам следует говорить именно о генерации с характерностью процесса СИ.

1 Кинетическая модель эффекта

Переизлучённое поляризованными атомами тонкого слоя оптическое поле в силу однородности представляется результатом когерентного эффекта СИ и развивается в процессе взаимного согласования фаз (фазировки) элементарных излучателей, образующих активную среду, через высвечиваемое ими поле. Установление коллективного СИ-состояния в результате фазировки активных диполей подразумевает возникновение макроскопической поляризации, которая предполагает формирование упорядоченного состояния в ансамбле диполей [10]. Для возникновения СИ среда должна быть максимально инвертирована, возможность обратимого процесса изменения населённости при формировании поля СИ (за счёт действия накачки) не рассматривается. В полупроводниковых средах СИ происходит как коллективная спонтанная рекомбинация [11]. Динамика компонентов отклика среды в режиме СИ определяет процесс генерации излучения в случае достижения пороговой инверсии в тонком слое, которому, естественно, присуще состояние фазировки диполей в условиях однородности поля по толщине слоя, в направлении распространения излучения. Процесс фазировки диполей, обуславливающий СИ, оптимален для условий резонанса. Естественный разброс диполей происходит за счёт их взаимодействия с атомами матрицы материала, его характерное время называют временем поперечной (фазовой) релаксации перехода (T_2), обратной ему величиной определена полуширина спектральной линии резонансного поглощения (усиления). Отстройка резонанса, вызванная действенностью ближних полей диполей, и уширение линии, характерное

для присутствия квазирезонансной поляризации, неизбежно влияют на ход процесса фазировки, снижая её эффективность. Оба процесса следует рассматривать в качестве причин автомодуляционного уширения спектральной линии, которое зависит от населённости, насыщаемой излучением. Постановка задачи об энергообмене среды и светового поля в процессе СИ в условиях существования этих факторов нелинейности, безусловно, вполне правомерна.

В основу анализа динамики СИ положен известный вариант оптических уравнений Максвелла – Блоха для квазистационарных огибающих светового поля E и вероятности поляризованности ρ , формулируемый в приближении сверхтонкого слоя резонансных атомов [1]. Далее он записан, следуя представлениям обобщённой двухуровневой схемы: поляризованность в соответствии с целью исследования включает квазирезонансную составляющую поляризации. Результирующая медленная огибающая может быть записана в виде, предложенном и использованном в [4]:

$$P(t) = N [i\mu\rho + 2\pi\Delta\alpha\varepsilon_0(n-1)E], \quad (1.1)$$

где ρ и n – вероятностные переменные резонансной поляризованности и инверсионной населённости (значения этих величин в пересчёте на один активный центр),

N – плотность активных центров (в единице объёма),

μ – средняя величина их дипольного момента,

$\Delta\alpha$ – разность поляризуемостей активных центров в основном и возбуждённом состояниях (дефект поляризуемости).

Уравнения модифицированы аналогично [12], [13] для приповерхностного планарного слоя плотной резонансной среды. В итоге масштабирования переменных и материальных параметров слоя кинетическая схема генерации для случая формального резонанса (совпадения центральной частоты линии усиления ω_0 с несущей частотой светового поля ω) представляется системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \left[\frac{n}{\tau_r} \frac{1-\gamma\beta(1-n)}{1+\beta^2(1-n)^2} - \frac{1}{T_2} \right] \rho - \\ &\quad - \frac{i}{\tau_r} \frac{\gamma-\beta(1-n)}{1+\beta^2(1-n)^2} n\rho, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{1}{\tau_r} \frac{1-\gamma\beta(1-n)}{1+\beta^2(1-n)^2} |\rho|^2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$S = \left| \frac{\mu}{\hbar} T_2 E \right|^2 = \left(\frac{T_2}{\tau_r} \right)^2 \frac{[1-\gamma\beta(1-n)]^2}{1+\beta^2(1-n)^2} |\rho|^2,$$

где S – нормированная плотность излучения, которая определена компонентом резонансного отражения, называемого сверхизлучательным [1].

$\tau_R = \hbar c \epsilon_0 / \mu^2 N l \omega_0$ – характерный для процесса вынужденного излучения параметр, обычно именуемый временем сверхизлучения [10].

Влияние ближних полей диполей на поляризуемость активных центров рассмотрено в рамках учёта локальной поправки Лоренца к действующему полю. Нормирующий коэффициент γ в компонентах системы (1.2), обусловленных учётом локальной поправки, пропорционален отношению длины волны λ поля СИ и толщины слоя l . Фактор квазирезонансной поляризации, вызывающей автомодуляционное уширение поля, в представлении (1.1) зависит от резонансной вариации инверсии $(1-n)$ и учитывается в уравнениях (1.2) компонентами с коэффициентом $\beta = 2\pi \Delta \alpha \epsilon_0 \hbar / \mu^2 T_2$, иногда называемым параметром резонансной нелинейной рефракции (в усиливающих средах на основе полупроводников – фактором Хенри). Характерный параметр сверхизлучения τ_R обратно пропорционален поверхностной концентрации Nl , с увеличением концентрации возрастает резонансный (ненасыщенный) уровень усиления, оцениваемый показателем $\kappa = T_2 / \tau_R$. Одновременно возрастает пропорциональный объёмной концентрации N параметр γ / τ_R в мнимом (фазовом) слагаемом в уравнении для ρ . Величиной γ / τ_R определяется нелинейная отстройка резонанса, порождаемая диполь-дипольным взаимодействием и изменяющаяся по мере сброса инверсии в процессе СИ.

Нетрудно показать, что интеграл системы (1.2) представляет соотношение:

$$|\rho|^2 + n^2 = 1 + \frac{1-n}{\kappa \gamma^2} [2 - \beta \gamma (1-n)] + 2 \frac{1+\gamma^2}{\kappa \beta \gamma^3} \ln [1 - \beta \gamma (1-n)]. \quad (1.3)$$

В задаче о сверхизлучении, традиционно решаемой для протяжённой среды и в пренебрежении спонтанными процессами фазовой релаксации, подобное равенство записывается в виде (см., например, [10]): $|\rho|^2 + n^2 = 1$. Его именуют законом сохранения вектора Блоха. В рассматриваемом случае соотношением (1.3) выражена модификация этого закона сохранения при учёте фазовой релаксации и в условиях действительности механизмов нелинейности, приводящей к дефазировке элементарных диполей. Аналитическая формулировка аналога закона в иной физической ситуации возможна при допущении продольно-однородного поля в инверсном слое. Соотношение (1.3) указывает на изменение пределов вариаций вероятности инверсии в условиях дефазировки.

2 Решение для инверсии и расчёт временной развёртки излучения

Проявление двух противоположных тенденций – фазового согласования активных диполей

в ходе вынужденного излучения (с формированием светового выброса) и их дефазировки по мере сброса инверсии в динамике процесса СИ – может существенно изменить его ход. Определяющий динамику излучения сброс инверсии из-за нелинейной расфазировки диполей должен быть менее результативным. Соответственно, может измениться профиль высвечиваемого импульса интенсивности и его пиковая мощность.

Для оценки этих изменений запишем систему (1.2) для определяющей плотность излучаемого поля переменной $|\rho(t)|^2$ и инверсии $n(t)$ в пренебрежении релаксационным членом в уравнении для поляризованности:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\rho|^2 &= 2 \frac{n}{\tau_R} \frac{1 - \gamma \beta (1-n)}{1 + \beta^2 (1-n)^2} |\rho|^2, \\ \frac{dn}{dt} &= - \frac{1}{\tau_R} \frac{1 - \gamma \beta (1-n)}{1 + \beta^2 (1-n)^2} |\rho|^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Интегралом системы (2.1) является простое соотношение, совпадающее с традиционной записью закона сохранения вектора Блоха [10]: $|\rho(t)|^2 + n^2(t) = 1$. Его использование даёт возможность записать решение уравнения для инверсионной заселённости из системы (2.1) в неявном виде:

$$\begin{aligned} \frac{t}{\tau_R} + C &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-n}{1+n} - \beta \frac{\gamma - 2\beta}{1 - 2\beta\gamma} \ln(1+n) + \\ &+ \frac{\beta}{\gamma} \frac{1+\gamma^2}{1 - 2\beta\gamma} \ln [1 - \beta\gamma(1-n)]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вычисления временной развёртки инверсии на основе соотношения (2.2) удобно проводить параметрическим расчётом, рассматривая вероятностную переменную n как линейно нарастающий в пределах $(-1, 1)$ параметр. Параллельный расчёт нормированной плотности $S(t)$ из выражения, учитывающего закон сохранения полярного угла вектора Блоха:

$$S = \kappa^2 \frac{[1 - \gamma \beta (1-n)]^2}{1 + \beta^2 (1-n)^2} (1-n^2) \quad (2.3)$$

даёт возможность определить форму импульса СИ.

При оценке масштаба явлений (диапазона изменения характеристик излучения и параметров сред), в расчётах исходили, в основном, из известных из литературы, например, из работы [14], параметров сред полупроводниковых квантоворазмерных структур для слоёв субмикронной толщины. Значения интенсивности в пике выброса СИ могут иметь порядок не менее 10^7 Вт/см² в соответствующем экситонным переходам диапазоне $\lambda \sim (1.25 \dots 1.30) \cdot 10^{-6}$ м.

Примеры расчёта временного хода нормированной интенсивности S и вероятностной переменной n на основе (2.2), (2.3) приведены на рисунке 2.1. Принципиально сравниваются форма, продолжительность и развиваемая пиковая

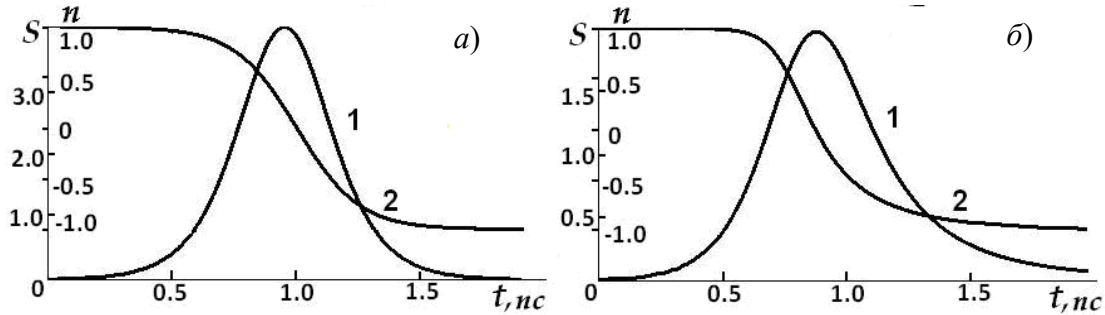


Рисунок 2.1 – Временная развёртка плотности излучения (кривая 1, в относительных единицах) и изменения инверсной населённости (2): $\beta = 0$ (а), 0.32 (б), $\tau_R = 5.0 \cdot 10^{-13}$ с, $\gamma = 1.5$

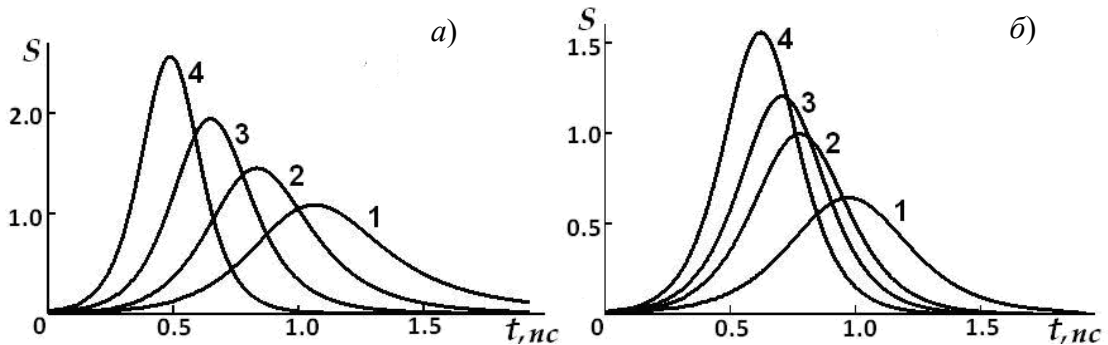


Рисунок 2.2 – Форма импульсов сверхизлучения для разного уровня усиления: $N = 5.0 \cdot 10^{17}$ (кривая 1), $6.7 \cdot 10^{17}$ (2), $8.0 \cdot 10^{17}$ (3), $1.0 \cdot 10^{18}$ см^{-3} (4), $\gamma = 1.5$, $\beta = 0.25$ (а); $N = 8.0 \cdot 10^{17}$ см^{-3} , $\gamma = 1.5$ (1), 1.8 (2), 2.4 (3), 3.0 (4), $\beta = 0.20$ (б)

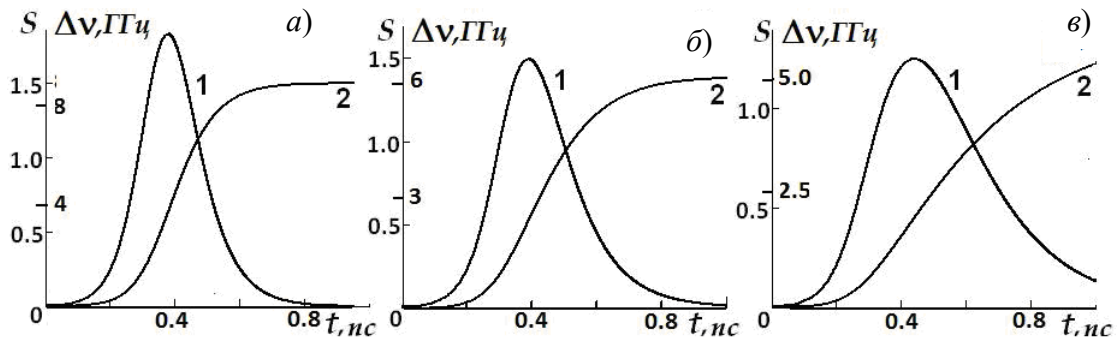


Рисунок 2.3 – Форма импульсов (кривые 1) и динамика дрейфа частоты (кривые 2); $\beta = 0.05$ (а), 0.08 (б), 0.12 (в), $N = 7.5 \cdot 10^{17}$ см^{-3} , $\gamma = 3.2$, $T_2 = 5 \cdot 10^{-12}$ с

амплитуда импульсов для «классического» варианта СИ (в отсутствие фазовых эффектов, на рисунке 2.1, а) и в случае автомодуляционного смещения резонанса (2.1, б). Зависимости на фоне различия формы и пиковой мощности выбросов в обоих случаях демонстрируют разницу в темпе сброса инверсии.

Представлялось интересным провести расчёты для разных значений показателя усиления $\kappa = T_2 / \tau_R$. Этот параметр может изменяться при вариациях концентрации N в среде слоя, а также за счёт изменения его толщины l (в пределах сделанных допущений). Сравнение кривых на рисунках 2.2, а и 2.2, б показывает на увеличение асимметрии высвечиваемых импульсов в первом случае относительного нарастания

параметра усиления, одновременно с увеличением достигнутого к началу процесса СИ усиления возрастает и уровень фазовой модуляции излучаемого поля, ввиду того, что в условиях высокой плотности N сильнее сказывается диполь-дипольное взаимодействие.

Динамика частотной отстройки, как следует из уравнения для вероятности поляризованности в схеме (2.1), описывается скоростью изменения его фазовой составляющей. Смещение частоты как функция времени может быть выражено формально зависимостью от инверсной заселённости:

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau_R} \frac{\gamma - \beta(1-n)}{1 + \beta^2(1-n)^2} n$$

и параметрически рассчитано совместно с (2.2).

Рисунок 2.3 иллюстрирует ход автомодуляционной частотной отстройки на фоне развивающегося асимметричного всплеска мощности для уровня модуляции, определяемого различием материального параметра, различия поляризуемости на уровнях основного перехода при постоянстве параметра модуляции γ . Сдвиг частоты характеризует дефазировку поля и поляризации, величина этого дрейфа при использованных модельных параметрах может составлять до десятка гигаГерц. В области заднего фронта импульса величина отстройки выходит на насыщение, поскольку, в основном, определена резонансной вариацией инверсии.

Получение фазово-модулированных импульсов представляет нетривиальную экспериментальную задачу. В этой особенности динамики световых импульсов заложена возможность дальнейшего их преобразования в направлении изменения формы и сокращения длительности. В последовательной многоэлементной схеме преобразования импульсов обычно используют селективные по частоте устройства, которые позволяют ограничивать фронты развития излучения с сильными проявлениями фазовой модуляции, которую могут стимулировать активными средствами. В этом случае задача может быть решена в рамках применения следствий автомодуляционных явлений – за счёт собственной нелинейности, реализующейся в области резонанса усиления (поглощения) и безынерционной по отношению к интенсивности.

Заключение

Для тонкого слоя среды с относительно высокой концентрацией активных центров проанализированы закономерности развития когерентного эффекта сверхизлучения. Проведена модификация соотношения, выражающего закон сохранения вектора Блоха, в случае учёта диполь-дипольного взаимодействия и квазирезонансной поляризации. В приближении однородного поля получено аналитическое решение системы уравнений Максвелла – Блоха для инверсной заселённости, позволяющее также провести аналитический расчёт формы импульса СИ и динамики автомодуляционного дрейфа его несущей частоты.

Проведённые расчётные оценки влияния нелинейных эффектов на процесс СИ значимы для разработки методов получения или профилирования сверхкоротких световых импульсов. Следует отметить, что импульсы, в случае проявлений, типичных для резонансного взаимодействия светового поля со средой тонких слоёв, фазово-модулированы, что даёт возможность эффективного изменения их формы и сокращения длительности в многокаскадных схемах усиления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benedict, M.G.* Coherent reflection as super-radiation from the boundary of a resonant medium /

M.G. Benedict, E.D. Trifonov // Phys. Rev. A. – 1990. – Vol. 38, № 6. – P. 2854–2862.

2. *Гадомский, О.Н.* Эффект ближнего поля в сверхтонкой плёнке резонансных атомов / *О.Н. Гадомский, С.В. Сухов // Квантовая электроника. – 1998. – Т. 25, № 6. – С. 529–534.*

3. *Local-field effects in a dense ensemble of resonant atoms: Model of a generalized two-level system / A.A. Afanas'ev [et al.] // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 60, № 2. – P. 1523–1529.*

4. *Nonlinear optical response of a two-dimensional quantum-dot supercrystal: Emerging multistability, periodic and aperiodic self-oscillations, chaos, and transient chaos / I.V. Ryzhov [et al.] // Phys. Rev. A. – 2019. – Vol. 100. – P. 033820–1–15.*

5. *Linear and Nonlinear Optical Measurements of the Lorentz Local Field / J.J. Maki [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1991. – Vol. 67, № 8. – P. 972–975.*

6. *Garmire, E.* Resonant optical nonlinearities in semiconductors / *E. Garmire // IEEE Journ. Sel. Top. Quant. Electron. – 2000. – Vol. 6, № 6. – P. 1094–1110.*

7. *Хаджи, П.И.* Особенности взаимодействия УКИ лазерного излучения с тонкой пленкой полупроводника / *П.И. Хаджи, Л.Е. Федоров // Квантовая электроника. – 2002. – Т. 32, № 8. – С. 711–715.*

8. *Vasil'ev, P.P.* SESAM – reflectors for cavities of solid-state pulse lasers / *P.P. Vasil'ev, I.H. White, J. Gowar // Report on Progress in Physics. – 2000. – Vol. 63. – P. 1997–2012.*

9. *Петров, Н.С.* Лазерная генерация тонких инверсных слоёв / *Н.С. Петров, А.Б. Зимин // Журн. прикл. спектр. – 2010. – Т. 77, № 1. – С. 69–73.*

10. *Аллен, Л.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы / *Л. Аллен, Дж. Эберли – Москва: Мир, 1978. – 224 с.*

11. *Васильев, П.П.* Сравнение когерентных свойств сверхизлучения и лазерного излучения в полупроводниковых структурах / *П.П. Васильев, Р.В. Пенти, И.Х. Уайт // Квантовая электроника. – 2012. – Т. 42, № 12. – С. 1081–1086.*

12. *Юревич, Ю.В.* Модуляция оптического излучения при отражении тонкой плёнкой плотной резонансной среды / *Ю.В. Юревич, В.А. Юревич // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 38–45.*

13. *Юревич, В.А.* Излучение тонкого инвертированного слоя в условиях квазирезонансной поляризации / *В.А. Юревич // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. Серія В. Природознавчія науки. – 2018. – № 2 (52). – С. 62–69.*

14. *Rabi oscillations in a semiconductor quantum dot: Influence of local fields / G. Slepian [et al.] // Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 70, № 4. – P. 045320-1–045320-5.*

Поступила в редакцию 08.07.19.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С МОДУЛЯРНОЙ ПОДГРУППОЙ ШМИДТА

И.В. Близнец, В.М. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON FINITE GROUPS WITH MODULAR SCHMIDT SUBGROUP

I.V. Bliznets, V.M. Selkin

F. Scorina Gomel State University

Пусть G конечная группа. Тогда G называется группой Шмидта, если G не является нильпотентной, а все ее собственные подгруппы нильпотентны. Подгруппа M группы G называется модулярной в G , если M является модулярным элементом (в смысле Куроша) решетки $L(G)$ всех подгрупп группы G , т. е., (i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких что $X \leq Z$, (ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких что $M \leq Z$. В работе доказывается, что если каждая подгруппа Шмидта A группы G с $A \leq G'$ является модулярной в G , тогда G является разрешимой группой, и если каждая подгруппа Шмидта группы G является модулярной в G , тогда коммутант G' является нильпотентной группой.

Ключевые слова: конечная группа, модулярная подгруппа, группа Шмидта, коммутант подгруппы, нильпотентная группа.

Let G be a finite group. Then G is called a Schmidt group if G is not nilpotent but every proper subgroup of G is nilpotent. A subgroup M of G is called modular in G if M is a modular element (in the sense of Kurosh) of the lattice $L(G)$ of all subgroups of G , that is, (i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ for all $X \leq G, Z \leq G$ such that $X \leq Z$, and (ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ for all $Y \leq G, Z \leq G$ such that $M \leq Z$. In this paper, we prove that if every Schmidt subgroup A of G with $A \leq G'$ is modular in G , then G is soluble, and if every Schmidt subgroup of G is modular in G , then the derived subgroup G' is nilpotent.

Keywords: finite group, modular subgroup, Schmidt group, derived subgroup, nilpotent group.

1 Main notations

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, $\pi(G)$ is the set of all primes dividing the order $|G|$ of G .

A subgroup M of G is called *modular* in G if M is a modular element (in the sense of Kurosh [1, p. 43]) of the lattice $L(G)$ of all subgroups of G , that is,

(i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ for all $X \leq G, Z \leq G$ such that $X \leq Z$, and

(ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ for all $Y \leq G, Z \leq G$ such that $M \leq Z$.

Modular subgroups have a significant impact on the structure of a group (see, for example, [1]–[7]).

Recall that G is said to be \mathfrak{F} -critical, \mathfrak{F} is a class of groups, if G is not in \mathfrak{F} but all proper subgroups of G are in \mathfrak{F} [8, p. 517]; G is said to be a *Schmidt group* provided G is \mathfrak{N} -critical, where \mathfrak{N} is the class of all nilpotent groups.

A large number of publications are related to the study of the influence on the structure of the group of its critical subgroups, in particular, Schmidt subgroups. It was proved, for example, that if every Schmidt subgroup of G is subnormal, then $G' \leq F(G)$ [9], [10], [12]. Later, this result was generalized in the paper [11], where in particular it was proved that if every Schmidt subgroup of G is

σ -subnormal in G [13], then G' is σ -nilpotent [13], [14].

In this paper we prove the following result in this line researches.

Theorem 1.1. (i) *If every Schmidt subgroup A of G with $A \leq G'$ is modular in G , then G is soluble.*

(ii) *If every Schmidt subgroup of G is modular in G , then the derived subgroup G' is nilpotent.*

2 Proof of Theorem 1.1

A normal subgroup A of G is said to be *hypercyclically embedded* in G [1, p. 217] if either $A = 1$ or $A \neq 1$ and every chief factor of G below A is cyclic. We use $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ to denote the product of all normal hypercyclically embedded subgroups of G . It is clear that a normal subgroup A of G is hypercyclically embedded in G if and only if $A \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$.

The following two lemmas collect the properties of modular subgroups which we use in our proofs.

Lemma 2.1 [1, Theorem 5.2.5]. *If M is a modular subgroup of G , then*

$$M^G / M_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G / M_G).$$

Lemma 2.2 [1, p. 201]. *Let A, B and N be subgroups of G , where A is modular in G and N is normal in G .*

- (1) If B is modular in G , then $\langle A, B \rangle$ is modular in G .
- (2) AN/N is modular in G/N .
- (3) N is modular in G .
- (4) If $A \leq B$, then A is modular in B .
- (5) If φ is an isomorphism of G onto \bar{G} , then A^φ is modular in \bar{G} .
- (6) If $N \leq B$ and B/N is modular in G , then B is modular in G .
- (7) If A is a maximal subgroup of G , then $|G/A_G|$ divides pq for some primes $p \neq q$.

Lemma 2.3 [15, III, Satz 5.2] or [16, VI, Theorem 24.2]. *If G is a Schmidt group, then $\pi(G) = \{p, q\}$ for some primes $p \neq q$ and $G = P \rtimes Q$, where $P = G^{\text{qt}}$ is a Sylow p -subgroup of G and $Q = \langle x \rangle$ is a cyclic Sylow q -subgroup of G . Moreover, $\langle x^q \rangle \leq \Phi(G)$ and P is of exponent p or exponent 4 if P is a non-abelian 2-group.*

Recall that if A and B are subgroups of G such that $G = AB$, then B is said to be a supplement to A in G . If B is a supplement to A in G but $AL < G$ for every proper subgroup L of B , then B is called a minimal supplement to A in G .

Proof of Theorem 1.1. (i) Assume that this assertion is false and let G be a counterexample of minimal order.

(1) If E is a proper subgroup of G , then E is soluble. Hence $G' = G$.

Let A be any Schmidt subgroup of E such that $A \leq E'$. Then $E' \leq G'$, so A is modular in G by hypothesis. Therefore A is modular in E by Lemma 2.2 (4). Hence the hypothesis holds for E , therefore E is soluble by the choice of G . Finally, note that $G' = G$ since otherwise G' is soluble and so G is soluble, contrary to the choice of G .

(2) If N is a minimal normal subgroup of G , then G/N is soluble.

If G/N is nilpotent it is evident, it is evident. Now assume that G/N is not nilpotent, and let E/N be any Schmidt subgroup of G/N . Let H be a minimal supplement to N in E . Then

$$H/(H \cap N) \simeq HN/N = E/N$$

is a Schmidt group and $H \cap N \leq \Phi(H)$ by [16, III, Lemma 11.3]. Let $\Phi = \Phi(H)$ and A be a Schmidt subgroup of H . Then $A \leq G' = G$ by Claim (1), so A is modular in G by hypothesis.

Lemma 2.3 implies that

$$\begin{aligned} & (H/(H \cap N))/\Phi(H/(H \cap N)) = \\ & = (H/(H \cap N))/(\Phi/(H \cap N)) \simeq H/\Phi = P \rtimes Q, \end{aligned}$$

where P is a Sylow p -subgroup and Q is a Sylow q -subgroup of H/Φ with $|Q| = q$, for some primes $p \neq q$. It follows, again by Lemma 2.3, that $A = A_p \rtimes A_q$, where $A = (A_q)^A$. Then $A_q \not\leq \Phi$,

since Φ is nilpotent. Therefore $\Phi A_q/\Phi$ is a Sylow q -subgroup of H/Φ and so

$$(\Phi A_q/\Phi)^{H/\Phi} = (A_q)^H \Phi/\Phi = H/\Phi.$$

Hence $(A_q)^H = H$, so $E = HN = (A_q)^H N$. By Lemma 2.2 (1), $(A_q)^H = A^H$ is modular in G and hence $E/N = (A_q)^H N/N$ is modular in G/R by Lemma 2.2 (1) (2). Therefore the hypothesis holds for G/N , so the choice of G implies that we have (2).

(3) G is soluble.

In view of Claims (1) and (2), it is enough to show that G is not non-abelian simple group. Assume that this is false and let A be any Schmidt subgroup of G . By hypothesis, A is modular in G since $G = G'$ by Claim (1). On the other hand, G is a non-abelian simple group. Hence $A_G = 1$. But then $1 < A^G$ and every chief factor of G below A^G is cyclic by Lemma 2.1. Hence G is not non-abelian simple group, a contradiction. Thus we have Claim (3). Therefore Statement (i) holds.

From now on, we suppose that every Schmidt subgroup of G is modular in G . We show that in this case the derived subgroup G' is nilpotent. Assume that this is false and let G be a counterexample of minimal order.

(4) If V is a proper subgroup of G , then $V' \leq F(V)$ (see the proof of Claim (2)).

(5) If N is a minimal normal subgroup of G , then $(G/N)' \leq F(G/N)$ (see the proof of Claim (1)).

(6) $R \not\leq \Phi(G)$ and for some prime p we have $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$. Moreover, $|R| > p$ and for some maximal subgroup M of G we have $G = R \rtimes M$.

First note that for some prime p we have $R \leq O_p(G)$ by Claim (3). Claim (5) implies that the derived subgroup

$$(G/R)' = G'R/R \simeq G'/(G' \cap R)$$

of G/R is nilpotent. Suppose that G has a minimal normal subgroup $L \neq R$. Then $G'/(G' \cap L)$ is nilpotent. But then

$$\begin{aligned} G' & \simeq G'/1 = G'/((G' \cap R) \cap (G' \cap L)) = \\ & = G'/(R \cap L) \end{aligned}$$

is nilpotent, contrary to the choice of G . Therefore R is the unique minimal normal subgroup of G and $R \leq G'$. Moreover, $R \not\leq \Phi(G)$ since otherwise G' is nilpotent by [8, Chapter A, Lemma 13.2]. Hence $R = C_G(R) = O_p(G)$ by [8, A, 15.6(2)]. Finally, note that R is not cyclic since otherwise the group

$$G/C_G(R) = G/R = G/F(G)$$

is cyclic, a contradiction. Hence we have (6).

(7) $M \simeq G/R$ is nilpotent. Hence R is a Sylow p -subgroup of G .

Assume that M is not nilpotent and let H be any Schmidt subgroup of M . Then H is modular in G . It is clear also that $H_G = 1$, so $H^G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ by Lemma 2.1, that is, every chief factor of G below H^G is cyclic. But $R \leq H^G$ by Claim (6) and hence R is cyclic, contrary to Claim (6). This contradiction shows that $M \simeq G/R$ is nilpotent. Then $O_p(M)R \leq O_p(G) = R$. Hence $O_p(M) = 1$, so Claim (7) holds.

(8) M is a Miller-Moreno group (that is, M is not abelian but every proper subgroup of M is abelian). Moreover, M is a q -group for some prime $q \neq p$.

First note that M is a Hall p' -subgroup of G by Claims (6) and (7).

Now, let S be any maximal subgroup of M . Then $RS/F_{\sigma}(RS)$ is abelian by Claim (4). In view of Claims (6) and (7), $R = (RS)'$ and hence $S \simeq RS/R$ is abelian. Therefore the choice of G implies that M is either a Schmidt group or a minimal non-abelian group of prime power order q^a . But in the former case we have $|G:M| = p = |R|$ by Lemma 2.2 (7), contrary to Claim (6). Thus we have (6).

Final contradiction for (ii). In view of Claim (8), $Z(M) \cap \Phi(M) \neq 1$. Let Z be a subgroup of order q in $Z(M) \cap \Phi(M)$ and let $E = RZ$. Then E is not nilpotent by Claim (6). On the other hand, $R = R_1 \times \dots \times R_t$, where R_k is a minimal normal subgroup of E for all $k = 1, \dots, t$ by Mashcke's theorem. Hence for some i the subgroup $R_i \rtimes Z$ is not nilpotent, so this subgroup contains a Schmidt subgroup A of the form $A = A_p \rtimes Z$.

Suppose that $A < E$. Then $|A_p| < |R|$ and $A_G = 1$. Hence $1 < A^G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ by Lemma 2.1. But then $R \leq A^G$ and so R is cyclic by Lemma 2.1, contrary to Claim (6). Therefore $A = E$, so $R = A_p$ and Z acts irreducibly on R . Since $Z \leq \Phi(M)$, every maximal subgroup of M acts irreducibly on R , which implies that every maximal subgroup of M is cyclic. Hence $q = 2$ and so $|R| = p$, contrary to Claim (6). \square

REFERENCES

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt // Walter de Gruyter, Berlin. – 1994.
2. Schmidt, R. Endliche Gruppen mit vilen modularen Untergruppen / R. Schmidt // Abhan.

Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1970. – № 34. – P. 115–125.

3. Reshko, K.A. On p -length arbitrary finite group / K.A. Reshko, V.I. Kharlamova // Matem. Zametki. – 1973. – Vol. 14, № 3. – P. 419–427.

4. Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – № 202. – P. 545–557.

5. Vasilyev, V.A. On one generalization of modular subgroups / V.A. Vasilyev, A.N. Skiba // Ukrainian Math. J. – 2012. – Vol. 63, № 10. – P. 1494–1505.

6. Vasilyev, V.A. Finite groups with submodular Sylow subgroups / V.A. Vasilyev // Siberian Math. J. – 2015. – Vol. 56, № 6. – P. 1019–1027.

7. Huang, J. Finite groups whose n -maximal subgroups are modular / J. Huang, B. Hu, X. Zheng // Siberian Math. J. – 2018. – Vol. 59, № 3. – P. 556–564.

8. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.

9. Semenchuk, V.N. Finite groups with a system of minimal non- \mathfrak{F} -groups, in Subgroup structure of finite groups / V.N. Semenchuk. – Minsk: Nauka i tehnika, 1981.

10. Monakhov, V.S. On finite groups with some subnormal Schmidt subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Knyagina // Siberian Math. Zh. – 2004. – Vol. 45, № 6. – P. 1316–1322.

11. Khaled, A. Al-Sharo, A.N. Skiba, On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / A. Khaled // Comm. Algebra. – 2017. – № 45. – P. 4158–4165.

12. Vedernikov, V.A. Finite groups with subnormal Schmidt subgroups / V.A. Vedernikov // Algebra and Logica. – 2007. – Vol. 46, № 6. – P. 669–687.

13. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – № 436. – P. 1–16.

14. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.

15. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

16. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1978.

Поступила в редакцию 12.09.19.

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ АБНОРМАЛЬНЫХ A -ДОПУСТИМЫХ ПОДГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИНДЕКСЫ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ \mathfrak{F} -КОРАДИКАЛ

Р.В. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON INTERSECTION OF ABNORMAL A -ADMISSIBLE SUBGROUPS WITH INDEX RESTRICTION THAT DO NOT CONTAIN A \mathfrak{F} -RESIDUAL

R.V. Borodich

F. Scorina Gomel State University

В работе исследуются пересечения максимальных подгрупп близких к \mathfrak{F} -абнормальным, индексы которых не делятся на некоторые простые числа.

Ключевые слова: конечная группа, абнормальная подгруппа, \mathfrak{F} -корадикал.

In this paper the intersections of maximal subgroups close to \mathfrak{F} -abnormal, whose indices are not divisible by some prime numbers are investigated.

Keywords: finite group, abnormal subgroup, \mathfrak{F} -residual.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Объекты, экстремально расположенные в группе, всегда привлекали исследователей в области теории конечных групп. В данной работе под такими объектами будут пониматься максимальные подгруппы, среди всех подгрупп, выдерживающих действие некоторой группы операторов. Исторически это направление берет свое начало от подгруппы Фраттини, введенной в работе [1]. Эта работа получила развитие в исследованиях многих авторов: В. Гашюца [2] (пересечение $\Delta(G)$ всех ненормальных максимальных подгрупп группы G), В. Дескинса [3] (пересечение $\Phi_p(G)$ всех максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на p) и других (см. монографии [4] и [5]).

Введение в работах Р.Картера, Т.Хоукса [6] и Л.А. Шеметкова [7] понятие \mathfrak{F} -абнормальной максимальной подгруппы позволило обобщить накопленный материал теории пересечений. В настоящей работе рассматриваются подгруппы близкие к \mathfrak{F} -абнормальным максимальным подгруппам.

1 Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$; *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Говорят, что группа G обладает свойством C_π , если в ней существуют холловские π -подгруппы и они сопряжены.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Класс групп называют нормально наследственным (S_n -замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G .

Класс групп \mathfrak{F} называется формацией, если выполняются следующие условия:

- 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;
- 2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то

$$G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Отображение f класса \mathfrak{G} всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

- 1) $f(G)$ – формация;
- 2) $f(G) \subseteq f(G^\phi) \cap f(\text{Ker}\phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G ;
- 3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p -группах и

$$f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p) \text{ для любой группы } G.$$

Формацию \mathfrak{F} называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется \mathfrak{F} -нормальной (\mathfrak{F} -абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M .

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \rightarrow \text{Aut}(G)$, где $\text{Aut}(G)$ – автоморфное отображение группы G в себя. Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A -допустимой для произвольной группы операторов.

Заметим, что максимальная A -допустимая подгруппа M либо целиком содержит \mathfrak{F} -корадикал группы G , либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A -допустимых подгрупп A -допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A -допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть \mathfrak{F} – формация. Обозначим через

$\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп;

$\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп;

$\Delta_p(G, A)$ ($\Delta_\pi(G, A)$) пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп, индексы которых не делятся на простое число p (простые числа из π);

$D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих \mathfrak{F} -корадикал группы G ;

$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ ($D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$) пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих \mathfrak{F} -корадикал группы G , индексы которых не делятся на простое число p (простые числа из π);

$\bar{D}_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ ($\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$) пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не принадлежащих формации \mathfrak{F} и не содержащих \mathfrak{F} -корадикал группы G , индексы которых не делятся на простое число p (простые числа из π).

В случае отсутствия подгрупп с указанными свойствами считаем, что эти пересечения равны G .

Отметим, что в случае единичности группы операторов A подгруппы $\Phi(G, A)$, $\Delta(G, A)$, $\Delta_\pi(G, A)$ совпадают соответственно с подгруппами Фраттини $\Phi(G)$, Гашюца $\Delta(G)$ и Дескинса $\Delta_\pi(G)$.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A -допустимой относительно некоторой группы операторов A , а так же не всякая максимальная A -допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [8].

2 Вспомогательные результаты

Лемма 2.1 [9, с. 114]. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Phi_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π . Тогда

$$\Delta_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Delta(G / O_\pi(G), A).$$

Теорема 2.2 [10, с. 29]. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – локальная формация. Тогда

$$D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)).$$

Теорема 2.3. [10, с. 29] Пусть \mathfrak{F} – S_π -замкнутая локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $D_\Delta^{\mathfrak{F}}(G, A) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \subseteq \Delta(G, A)$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$.

Лемма 2.4. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – формация. Тогда если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то

$$D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа из G , не содержащая $G^{\mathfrak{F}}N/N$, с индексом, не делящимся на числа из π . Тогда

$$D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = \cap (M / N)_{G/N},$$

где M/N пробегает множество всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп, не содержащих $G^{\mathfrak{F}}N/N$ из G/N , с индексом, не делящимся на числа из π .

Поэтому

$$\cap (M / N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N$$

и утверждение леммы верно. \square

Лемма 2.5. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – формация. Тогда если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то

$$\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = \bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq \bar{D}_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не содержащая \mathfrak{F} -корадикал и не принадлежащая \mathfrak{F} . Тогда

$$\bar{D}_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G/N, A) = \cap(M/N)_{G/N}, \quad (2.1)$$

где M/N пробегает множество всех максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих \mathfrak{F} -корадикал и не принадлежащих формации \mathfrak{F} .

Продолжим равенство (2.1):

$$\cap(M/N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = \bar{D}^\mathfrak{F}(G, A) / N. \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (2.2) вытекает справедливость утверждения. \square

3 Основной результат

Теорема 3.1. Пусть \mathfrak{F} – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π . Тогда

$$D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / O_\pi(G) = D_\Delta^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G), A).$$

Доказательство. Пусть $O_\pi(G) \neq 1$. По лемме 2.1

$$\Delta_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Delta(G / O_\pi(G), A).$$

Тогда теорема для факторгруппы $G / O_\pi(G)$ верна по индукции. Следовательно,

$$\begin{aligned} D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G), A) / O_\pi(G / O_\pi(G)) &= \\ &= D_\Delta^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G) / O_\pi(G / O_\pi(G)), A). \end{aligned}$$

Так как $O_\pi(G / O_\pi(G)) = 1$ и на основании леммы 2.4 $D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G), A) = D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / O_\pi(G)$, то

$$D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / O_\pi(G) = D_\Delta^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G), A).$$

Пусть теперь $O_\pi(G) = 1$. Тогда по лемме 2.1 $\Delta_\pi(G, A) / O_\pi(G) = \Delta(G / O_\pi(G), A)$. Значит,

$$D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cap G^\mathfrak{F} \subseteq \Delta_\pi(G, A) = \Delta(G, A).$$

Пусть K / N – главный фактор группы G , причём, $\Delta(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A)$.

Так как $K \cap G^\mathfrak{F} \subseteq D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cap G^\mathfrak{F} \subseteq \Delta(G, A)$, то $N = N(K \cap G^\mathfrak{F}) = K \cap NG^\mathfrak{F}$.

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$\begin{aligned} KG^\mathfrak{F} / NG^\mathfrak{F} &\simeq K / K \cap NG^\mathfrak{F} = \\ &= K / N(K \cap G^\mathfrak{F}) = K / N. \end{aligned}$$

Но $G / NG^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$, поэтому главный фактор $KG^\mathfrak{F} / NG^\mathfrak{F}$ является \mathfrak{F} -центральным в G . Следовательно, главный фактор K / N также является \mathfrak{F} -центральным в G . Таким образом, $D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / \Delta(G, A)$ – \mathfrak{F} -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Delta(G, A)$. Поэтому

$$D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / \Delta(G, A) \subseteq Z_\infty^\mathfrak{F}(G / \Delta(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 2.2

$$\begin{aligned} D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / \Delta(G, A) &\supseteq D^\mathfrak{F}(G, A) / \Delta(G, A) = \\ &= Z_\infty^\mathfrak{F}(G / \Delta(G, A)). \end{aligned}$$

Значит, $D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / \Delta(G, A) = Z_\infty^\mathfrak{F}(G / \Delta(G, A))$.

Следовательно,

$$D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / \Delta(G, A) = D^\mathfrak{F}(G, A) / \Delta(G, A),$$

то есть $D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) = D_\Delta^\mathfrak{F}(G, A)$. \square

Из теоремы 3.1 с помощью теоремы 2.3 получаем следующее

Следствие 3.1.1. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы и подгруппа $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π , тогда $D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) / O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

Так как в любой группе G подгруппа $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_p , то при $\pi = \{p\}$ получаем следующий результат.

Следствие 3.1.2 [11]. Пусть \mathfrak{F} – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда

$$D_{\Delta_p}^\mathfrak{F}(G, A) / O_p(G) = D_\Delta^\mathfrak{F}(G / O_p(G), A).$$

Следствие 3.1.3 [11]. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, тогда $D_{\Delta_p}^\mathfrak{F}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

Если группа операторов тривиальна, то из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.1.2. Пусть \mathfrak{F} – формация и подгруппа $\Delta_\pi(G)$, тогда

$$D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G) / O_\pi(G) = D_\Delta^\mathfrak{F}(G / O_\pi(G)).$$

Следствие 3.1.3. Пусть \mathfrak{F} – локальная, нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы и подгруппа $\Delta_\pi(G)$, тогда $D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G) / O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

Теорема 3.2. Пусть π и τ – множества простых чисел, таких, что $\pi \cap \tau = \emptyset$, подгруппа $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π . Тогда для любой формации \mathfrak{F} и любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|, |A|) = 1$, справедливо равенство

$$D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cap D_{\Delta_\tau}^\mathfrak{F}(G, A) = D_\Delta^\mathfrak{F}(G, A).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$D_\Delta^\mathfrak{F}(G, A) \subseteq D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cap D_{\Delta_\tau}^\mathfrak{F}(G, A).$$

Пусть $D_\Delta^\mathfrak{F}(G, A) \subset K = D_{\Delta_\pi}^\mathfrak{F}(G, A) \cap D_{\Delta_\tau}^\mathfrak{F}(G, A)$.

Тогда в G найдётся абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа M , не содержащая \mathfrak{F} -корадикал $G^{\mathfrak{F}}$, такая, что $G = MK$. Если $|G : M|$ не делится на числа $\omega \in \pi \cup \tau$, то $D_{\omega}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq M$. Следовательно, $KM = M$, что невозможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на числа из π и τ .

Пусть $O_{\pi}(G) = 1$. Тогда ввиду теоремы 3.1 имеем равенство $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Поэтому $K \subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K . Значит, $O_{\pi}(G) \neq 1$. Если $O_{\pi}(G)M = G$, то $|G : M|$ делится на числа из π . Противоречие. Поэтому $O_{\pi}(G) \subseteq M$. На основании теоремы 3.1 имеем

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A) \subseteq M / O_{\pi}(G).$$

Отсюда следует, что $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остаётся заключить, что

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A). \quad \square$$

Следствие 3.2.1. Пусть π и τ – множества простых чисел, таких, что $\pi \cap \tau = \emptyset$. Если \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 3.2.2 [11]. Пусть p и q – различные простые числа. Тогда для любой формации \mathfrak{F} и любой группы G с группой операторов A такой, что $(|G|, |A|) = 1$, справедливо равенство

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_{\Delta_q}^{\mathfrak{F}}(G, A) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Следствие 3.2.3 [11]. Пусть p и q – различные простые числа. Если \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда

$$D_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_{\Delta_q}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

В случае, когда группа операторов единична, то из теоремы 3.2 получаем

Следствие 3.2.4. Пусть π и τ – множества простых чисел, таких, что $\pi \cap \tau = \emptyset$. Тогда для любой формации \mathfrak{F} и любой группы G справедливо равенство

$$D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap D_{\Delta_{\tau}}^{\mathfrak{F}}(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G).$$

Следствие 3.2.5. Пусть π и τ – множества простых чисел, таких, что $\pi \cap \tau = \emptyset$. Если \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то

$$D_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap D_{\Delta_{\tau}}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}.$$

Теорема 3.3. Пусть \mathfrak{F} – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, и $\bar{D}_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$. Если в группе G подгруппа $\Delta_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π} , то

$$\bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A).$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$K = \bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta_{\pi}(G, A).$$

Пусть $K \not\subseteq \Delta_{\pi}(G, A)$. Тогда в G найдётся такая абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа M , индекс которой не делится на простые числа из π , что $G = KM$. Понятно, что M не содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то $K \subseteq \bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$. Отсюда

$$G / K = MK / K \cong M / M \cap K \in \mathfrak{F},$$

а это значит, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq \bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Это противоречит существованию в группе G абнормальной максимальной A -допустимой подгруппы, не содержащей \mathfrak{F} -корадикал, индекс которой не делится на простые числа из π .

Итак, $K \subseteq \Delta_{\pi}(G, A)$.

Пусть $O_{\pi}(G) \neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\Delta_{\pi}(G, A) / O_{\pi} = \Delta(G / O_{\pi}(G), A),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G / O_{\pi}(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A) / O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)) &= \\ &= D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G) / O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)), A). \end{aligned}$$

Так как $O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)) = 1$ и на основании леммы 2.5 $\bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A) = \bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G)$, то

$$\bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A).$$

Пусть теперь $O_{\pi}(G) = 1$. Тогда

$$\bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta_{\pi}(G, A) = \Delta(G, A).$$

Пусть K / N – главный фактор группы G , причём, $\Delta(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq \bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta(G, A),$$

то $N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}$. Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$\begin{aligned} KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}} &\cong K / K \cap NG^{\mathfrak{F}} = \\ &= K / N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K / N. \end{aligned}$$

Так как $G / NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}}$ является \mathfrak{F} -центральным в G . Следовательно, главный фактор K / N также является \mathfrak{F} -центральным в G . Таким образом, $\bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A)$ – \mathfrak{F} -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Delta(G, A)$. Поэтому

$$\bar{D}_{\Delta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 2.2

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) &\supseteq D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) = \\ &= Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)). \end{aligned}$$

Значит,

$$\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)).$$

Следовательно,

$$D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A),$$

то есть $D_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. \square

Следствие 3.3.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$. Если подгруппа $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π , то

$$\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_\pi(G) \in \mathfrak{F}.$$

Так как в любой группе G подгруппа $\Delta_p(G, A)$ обладает свойством C_p , то при $\pi = \{p\}$ получаем следующий результат.

Следствие 3.3.2. Пусть \mathfrak{F} – формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\bar{D}_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$. Тогда

$$\bar{D}_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

Следствие 3.3.3. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$. Если \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\bar{D}_p^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда группа операторов единична, то из теоремы 3.3 получаем следующие результаты.

Следствие 3.3.4. Пусть \mathfrak{F} – формация и $\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Если в группе G подгруппа $\Delta_\pi(G)$ обладает свойством C_π , то

$$\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) / O_\pi(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_\pi(G)).$$

Следствие 3.3.5. Пусть \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Если подгруппа $\Delta_\pi(G)$ обладает свойством C_π , то

$$\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) / O_\pi(G) \in \mathfrak{F}.$$

Следствие 3.3.6. Пусть \mathfrak{F} – формация и в группе G $\bar{D}_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$. Тогда

$$\bar{D}_{\Delta_p}^{\mathfrak{F}}(G) / O_p(G) = D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G)).$$

Следствие 3.3.7. Пусть в группе G $\bar{D}_{\Delta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$. Если \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\bar{D}_p^{\mathfrak{F}}(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.
3. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // III. J. Math. – 1961. – Vol. 5, № 2. – P. 306–313.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
5. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
6. Carter, R. The \mathfrak{F} -normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2 – P. 175–202.
7. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.
8. Бородич, Р.В. Об \mathfrak{F} -достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.
9. Бородич, Р.В. Об абнормальных подгруппах конечных групп с заданной группой операторов / Р.В. Бородич // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П.М. Машэрава. – 2003. – № 2. – С. 111–115.
10. Бородич, Р.В. О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих \mathfrak{F} -корадикал / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 26–30.
11. О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих \mathfrak{F} -корадикал, в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин, А.В. Бузланов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (114). – С. 135–140.

Поступила в редакцию 27.08.19.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С АБСОЛЮТНО ФОРМАЦИОННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.Ф. Васильев, А.Г. Мельченко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH ABSOLUTELY FORMATIONALLY SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

A.F. Vasil'ev, A.G. Melchenko

F. Scorina Gomel State University

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация групп. Подгруппу H группы G назовем абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальной) в G , если любая подгруппа, содержащая H , является K - \mathfrak{F} -субнормальной (соответственно, \mathfrak{F} -субнормальной) подгруппой в G . В работе исследуется вопрос принадлежности конечной группы насыщенной формации \mathfrak{F} , у которой все силовские подгруппы абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальны.

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, наследственная насыщенная формация, K - \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа, абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа.

Let \mathfrak{F} be a nonempty formation groups. A subgroup H of a group G we call absolutely K - \mathfrak{F} -subnormal (absolutely \mathfrak{F} -subnormal) in G if any subgroup containing H is K - \mathfrak{F} -subnormal (respectively \mathfrak{F} -subnormal) subgroup of G . In this paper, the question of whether a finite group belongs to a saturated formation \mathfrak{F} in which all Sylow subgroups are absolutely K - \mathfrak{F} -subnormal is investigated.

Keywords: finite group, Sylow subgroup, hereditary saturated formation, K - \mathfrak{F} -subnormal subgroup, absolutely K - \mathfrak{F} -subnormal subgroup.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. В нильпотентной группе каждая подгруппа является субнормальной и этим свойством подгрупп определяется каждая нильпотентная группа. С другой стороны для проверки группы на нильпотентность необязательно устанавливать, что ее все подгруппы являются субнормальными в ней. Например, хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа является субнормальной в ней.

Класс всех нильпотентных групп является примером наследственной насыщенной формации, т. е. класса групп, замкнутого относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов, подпрямых произведений и фраттиниевых расширений. Пустой класс групп по определению является формацией. В дальнейшем все рассматриваемые нами формации считаются непустыми.

Пусть \mathfrak{F} – произвольная наследственная насыщенная формация. Естественным обобщением субнормальности в классе разрешимых групп является понятие \mathfrak{F} -субнормальной, в классе всех групп – K - \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы [1], [2].

Хорошо известен следующий результат. Группа принадлежит наследственной насыщенной

формации \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда любая ее подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна в ней.

С другой стороны, имеются примеры наследственных насыщенных формаций \mathfrak{F} (например, формация всех сверхразрешимых групп) и групп, им не принадлежащих, у которых любая силовская подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна. Поэтому естественной является следующая

Проблема. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация. Найти условия, которым должны удовлетворять силовские подгруппы группы G , чтобы группа G принадлежала \mathfrak{F} .

Исследования по данной проблеме были начаты в работе [3] для случая наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} и групп, у которых силовские подгруппы являются \mathfrak{F} -субнормальными. В дальнейшем это направление получило развитие в работах различных авторов. Например, в [4]–[7] для насыщенной формации \mathfrak{F} были изучены свойства класса групп, в которых силовские подгруппы являются \mathfrak{F} -субнормальными (K - \mathfrak{F} -субнормальными), в работах [8]–[14] были найдены приложения полученных классов для решения различных конкретных задач теории групп и их формаций. В настоящей работе продолжают исследования в отмеченном выше направлении.

1 Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [1], [2] и [15].

Через \mathbb{P} обозначается множество всех простых чисел, π – подмножество из \mathbb{P} , $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Пусть G – группа, $p \in \mathbb{P}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка G , $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа G , $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π -подгруппа G , $\text{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп G , $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G , Z_p – циклическая группа порядка p , 1 – единичная подгруппа.

В следующей лемме собраны известные свойства силовских подгрупп.

Лемма 1.1 [15, гл. А, теорема 6.4]. Пусть G – группа и $p \in \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда $P \cap N \in \text{Syl}_p(N)$ и $PN/N \in \text{Syl}_p(G/N)$.
- (2) если $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$ и $P \in \text{Syl}_p(G)$, то $N_1P \cap N_2P = (N_1 \cap N_2)P$.
- (3) пусть $\{p_1, \dots, p_r\}$ – множество всех простых делителей $|G|$ и $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$ для $i = 1, \dots, r$. Тогда $G = \langle P_1, \dots, P_r \rangle$.

Пусть \mathfrak{X} – некоторый класс групп. Через $\pi(\mathfrak{X})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих \mathfrak{X} ; \mathfrak{X}_π – класс всех π -групп, принадлежащих \mathfrak{X} ; $\mathfrak{X}_p = \mathfrak{X}_\pi$ для $\pi = \{p\}$.

Класс групп \mathfrak{F} называется *формацией*, если

- 1) \mathfrak{F} – гомоморф, т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$;
- 2) из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ ($i = 1, 2$) всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется *наследственной*, если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через $G^\mathfrak{F}$ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G , для которой $G/G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$.

Приведем понятия \mathfrak{F} -субнормальной и K - \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы [1].

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется:

- 1) \mathfrak{F} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$$

такая, что $H_i^\mathfrak{F} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$;

- 2) K - \mathfrak{F} -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$$

такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^\mathfrak{F} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

Нам потребуются известные свойства \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп, которые можно найти, например, в монографии [1].

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – формация, H и K – подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Если H \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G , то HN/N \mathfrak{F} -субнормальна (соответственно, K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G/N .
- (2) Если $N \leq H$ и H/N \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G/N , то H \mathfrak{F} -субнормальна (соответственно, K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G .
- (3) Если H \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G , то HN \mathfrak{F} -субнормальна (соответственно, K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G .
- (4) Если H \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в K и K \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G , то H \mathfrak{F} -субнормальна (соответственно, K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G .
- (5) Если все композиционные факторы G принадлежат \mathfrak{F} , то всякая субнормальная подгруппа G является \mathfrak{F} -субнормальной.
- (6) Пусть p – простое число и G – p -группа. Если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то в G все подгруппы являются \mathfrak{F} -субнормальными.

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация, $H \leq G$ и $M \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Если H \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G , то $H \cap M$ \mathfrak{F} -субнормальна (соответственно, K - \mathfrak{F} -субнормальна) в M .
- (2) Если H \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G и M \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G , то $H \cap M$ \mathfrak{F} -субнормальна (соответственно, K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G .
- (3) Если $G^\mathfrak{F} \leq H$, то H \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G .
- (4) Если H \mathfrak{F} -субнормальна (K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G , то H^x \mathfrak{F} -субнормальна (соответственно, K - \mathfrak{F} -субнормальна) в G для любого $x \in G$.

2 Абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальные и \mathfrak{F} -субнормальные подгруппы

Для обоснования вводимых нами далее понятий абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальной и абсолютно \mathfrak{F} -субнормальной подгрупп рассмотрим следующий пример. Пусть $\mathfrak{F} = \mathcal{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. Отметим, что для этой формации понятия \mathcal{K} - \mathcal{U} -субнормальной и \mathcal{U} -субнормальной подгрупп эквивалентны. Рассмотрим $G = S_4$ – симметрическую группу степени 4. Заметим, что $G^{\mathcal{U}}$ совпадает с четверной подгруппой Клейна V , состоящей из перестановок $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,4)(2,3)$. Нетрудно проверить, что подгруппа $H = \langle (1, 2) \rangle$ является \mathcal{K} - \mathcal{U} -субнормальной в G , так как H \mathcal{K} - \mathcal{U} -субнормальна в силовой 2-подгруппе $P = VH$, а подгруппа P \mathcal{K} - \mathcal{U} -субнормальна в G . Отметим, что H содержится в максимальной подгруппе M группы G , изоморфной симметрической группе S_3 и не являющейся \mathcal{K} - \mathcal{U} -субнормальной в G . С другой стороны, ввиду (3) леммы 1.3 следует, что $V = G^{\mathcal{U}}$ также \mathcal{K} - \mathcal{U} -субнормальна в G и таким свойством обладает любая подгруппа ее содержащая. Рассмотрим еще одну подгруппу G . Пусть $R = \langle (1, 2, 3, 4) \rangle$ – циклическая подгруппа порядка 4 группы G . Несложно проверить, что R и любая подгруппа, содержащая R являются \mathcal{K} - \mathcal{U} -субнормальными в G .

Определение 2.1. \mathfrak{F} – формация. Подгруппу H группы G назовем абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальной (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальной) в G , если любая содержащая ее подгруппа R является \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальной (соответственно, \mathfrak{F} -субнормальной) в G .

Нетрудно видеть, что всякая абсолютно \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа является абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальной, обратное утверждение неверно.

Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация и группа $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда подгруппы G , содержащие \mathfrak{F} -корадикал, являются абсолютно \mathfrak{F} -субнормальными (\mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальными) в G , однако, как было показано в примере выше, они не исчерпывают все примеры подгрупп с таким свойством.

Нам потребуются следующие свойства абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальных и \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп.

Лемма 2.1. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Если H – подгруппа G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H является абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой группы G .

(2) Если H абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна) в G и $K \triangleleft G$, то HK/K абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна) в G/K .

(3) Если $K \triangleleft G$ и H/K абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна) в G/K , то H абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна) в G .

(4) Если H абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна) в G , то H абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна) в любой содержащей ее подгруппе.

(5) Если подгруппы H и K абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальны (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальны) в G , то подгруппа $\langle H, K \rangle$ также абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна) в G .

(6) Если подгруппа H абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна) в G , то ее всякая промежуточная подгруппа также абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна) в G .

Доказательство. Установим справедливость (1). Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H \leq G$, то

$$H/G^{\mathfrak{F}} \leq G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}.$$

Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то любая подгруппа из $G/G^{\mathfrak{F}}$ является \mathfrak{F} -субнормальной в $G/G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда следует, что $H/G^{\mathfrak{F}}$ абсолютно \mathfrak{F} -субнормальна в $G/G^{\mathfrak{F}}$, а значит, и абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна в $G/G^{\mathfrak{F}}$. Теперь нетрудно заметить, что H абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна в G . Утверждение 1) доказано.

Докажем (2). Пусть H абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна в G и $HK/K \leq G/K$. Рассмотрим $HK/K \leq R/K \leq G/K$. Тогда $HK \leq R \leq G$, а значит, R – \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа в G . По (1) леммы 1.2 R/K является \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальной в G/K . Следовательно, HK/K абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна в G/R . Утверждение (2) доказано.

Установим справедливость (3). Пусть $R \leq G$ такая, что $H \leq R \leq G$.

Из $HK/K \leq R/K \leq G/K$ в силу абсолютной \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальности подгруппы H/K в G/K следует, что R/K \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна в G/K . Теперь из (2) леммы 1.2 вытекает, что R – \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа в G . Следовательно, H абсолютно \mathcal{K} - \mathfrak{F} -субнормальна в G .

Свойства (4), (5), (6) доказываются аналогично. \square

3 Основные результаты

В данном разделе для наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} исследуются группы, у которых силовские подгруппы являются абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальными. В начале рассмотрим частный случай, когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ для рассматриваемой группы G и насыщенной наследственной формации \mathfrak{F} .

Теорема 3.1. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация. Группа G принадлежит \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G .

Доказательство. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$. Тогда из наследственности формации \mathfrak{F} следует, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая подгруппа группы G является абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной в G . Отсюда легко видеть, что любая силовская подгруппа абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальна в G .

Обратно. Пусть в группе G любая силовская подгруппа является абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной G и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, но сама группа G не принадлежит \mathfrak{F} . Выберем среди них группу G наименьшего порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Предположим, что $N = G$. Тогда ввиду выбора N и G , группа G является простой и $G^{\mathfrak{F}} = G$. Если N – абелева группа, то G – группа простого порядка. Из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и наследственности формации \mathfrak{F} следует, что G принадлежит \mathfrak{F} . Получили противоречие.

Будем считать, что $N = G$ – неабелева простая группа. Пусть P – силовская подгруппа G и M – максимальная подгруппа G , такая, что $P \subseteq M$. Тогда M является K - \mathfrak{F} -субнормальной в G . Так как $G^{\mathfrak{F}} = G$, то возможен только случай $M \triangleleft G$. Противоречие с тем, что G – простая неабелева группа. Значит, этот случай невозможен.

Пусть $N \neq G$ тогда по (2) леммы 2.1 следует, что любая силовская подгруппа фактор-группы G/N также является абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G/N . Так как $|G/N| < |G|$, то ввиду выбора группы G получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Если в G имеется еще одна минимальная нормальная подгруппа $K \neq N$, то из $G/K \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/K \cap N = G \in \mathfrak{F}$. Противоречие с выбором группы G . Следовательно, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Если $\Phi(G) \neq 1$, то из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и насыщенности \mathfrak{F} следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G . Следовательно, $\Phi(G) = 1$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть N – абелева группа. Тогда $|N| = p^\alpha$, где p – некоторое простое число. В этом случае $G = [N]M$, где $N = C_G(N) = G^{\mathfrak{F}}$ и M – некоторая максимальная подгруппа группы G . Если M – p -группа, то G – p -группа и из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и насыщенности \mathfrak{F} следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, найдется простое число $q \neq p$ такое, что $q \in \pi(M)$. Пусть M_q – силовская q -подгруппа из M . Тогда M_q является силовской q -подгруппой в G . Так как M_q абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальна в G и $M_q \subseteq M$, то M является K - \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G . Если $M \triangleleft G$, то $M \subseteq C_G(N) = N$, что невозможно. Поэтому будем считать, что M является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G . Так как $M \in \mathfrak{F}$ и $N = G^{\mathfrak{F}}$, то по теореме 15.10 из [2] следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

2. Пусть N – неабелева группа. Тогда $N = A_1 \times \dots \times A_n$ – прямое произведение попарно изоморфных простых неабелевых групп A_i . Пусть P – силовская p -подгруппа группы G , где p – некоторое простое число, делящее порядок N . Тогда $S = P \cap N$ – силовская p -подгруппа N . По лемме Фраттини $N_G(S)N = G$. Заметим, что $P \subseteq N_G(S)$. Пусть $N_G(S) \neq G$. Так как P является силовской p -подгруппой группы G , то P абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальна в G . Следовательно, по (6) леммы 2.1 $N_G(S)$ – абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа в G . Так как $N_G(S)$ – абнормальная подгруппа в G , то $N_G(S)$ является абсолютно \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G . Заметим, что $N = G^{\mathfrak{F}}$ и $N_G(S)N = G$. Получили противоречие.

Предположим, что $N_G(S) = G$. Тогда $S \triangleleft G$. Получили противоречие с тем, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа и N – неабелева группа. \square

Следствие 3.2. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы. Группа G принадлежит \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G .

Для формулировки следующего результата нам потребуется известная конструкция прямого произведения формаций [1], которая описывается в следующей лемме.

Лемма 3.3. Пусть \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 – формации, $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi_1$, $\pi(\mathfrak{F}_2) = \pi_2$ и $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Тогда

$$\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G = O_{\pi_1}(G) \times O_{\pi_2}(G)\},$$

где $O_{\pi_1}(G) \in \mathfrak{F}_1$ и $O_{\pi_2}(G) \in \mathfrak{F}_2$ – формация. Более того, если \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 – наследственные насыщенные формации, то $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ – также наследственная насыщенная формация.

Теорема 3.4. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда и только тогда группа G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi} \times \mathfrak{F}_{\pi}$, когда каждая силовская подгруппа G является абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной в G .

Доказательство. Пусть группа G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi} \times \mathfrak{F}$. Тогда $G = A \times B$, где $A \in \mathfrak{N}_{\pi \setminus \pi(\mathfrak{F})}$ и $B \in \mathfrak{F}$. Так как формации \mathfrak{N}_{π} и \mathfrak{F} являются наследственными насыщенными, то по лемме 3.3 $\mathfrak{N}_{\pi} \times \mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.

Рассмотрим произвольную силовскую p -подгруппу $P \subseteq G$. Пусть $P \leq A$. Тогда из нильпотентности A следует, что $P \trianglelefteq A$. Так как $A \trianglelefteq G$ и P характеристична в A , то $P \trianglelefteq G$, а значит, подгруппа P K - \mathfrak{F} -субнормальна в G .

Пусть теперь $P \leq B$. Из $B \in \mathfrak{F}$ и наследственности формации \mathfrak{F} следует, что P \mathfrak{F} -субнормальна в B . Отсюда и из $B \trianglelefteq G$, заключаем, что K - \mathfrak{F} -субнормальна в G .

Таким образом, произвольная силовская подгруппа P группы G является K - \mathfrak{F} -субнормальной в ней.

Покажем, что P является абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной в G . Предположим, что утверждение неверно и группа G – контрпример наименьшего порядка. Тогда в G найдется промежуточная подгруппа M для подгруппы P , которая не является K - \mathfrak{F} -субнормальной в G . Ввиду выбора G , не теряя общности рассуждений, можно считать, что M – максимальная подгруппа в G . Из $G = A \times B$, где $A \in \mathfrak{N}_{\pi \setminus \pi(\mathfrak{F})}$ и $B \in \mathfrak{F}$ следует, что возможны два случая.

1. Пусть $A \subseteq M$. Тогда из $G/A \in \mathfrak{F}$ и из наследственности формации \mathfrak{F} следует, что M/A является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G/A . Следовательно, M \mathfrak{F} -субнормальна и тем более K - \mathfrak{F} -субнормальна в G . Получили противоречие. Значит, случай 1 невозможен.

2. Предположим, что $B \subseteq M$. Тогда из $G/B \in \mathfrak{N}_{\pi}$ следует, что M/B является нормальной подгруппой в G/B . Откуда следует, что M нормальна в G , а значит K - \mathfrak{F} -субнормальна в ней. Снова получили противоречие. Таким образом, каждая силовская подгруппа из G является абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной в G .

Докажем обратное утверждение. Пусть каждая силовская подгруппа из G является абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной в G . Покажем, что G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi} \times \mathfrak{F}_{\pi}$.

Рассмотрим произвольную силовскую p -подгруппу P группы G , где $p \in \pi'$. Тогда по лемме 2.3 из [11] подгруппа $P = O_p(P) \leq O_p(G)$. Поэтому $P = O_p(G) \trianglelefteq G$. Если

$$\pi' \cap \pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$$

и $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 1, \dots, n$, то произведение $A = P_1 P_2 \dots P_n$ является нормальной нильпотентной подгруппой группы G . Ясно, что $|A|$ и $|G:A|$ взаимно просты, поэтому A – холлова подгруппа группы G и $A \in \mathfrak{N}_{\pi}$.

По теореме Шура – Цассенхауза подгруппа A имеет дополнение в G . Поэтому существует подгруппа B порядка $|G:A|$ такая, что $G = AB$ и $A \cap B = 1$. Пусть S – силовская подгруппа из B . Рассмотрим подгруппу SA . Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то S является K - \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в SA .

По лемме 2.4 из [11] подгруппа $S \trianglelefteq SA$. Это означает, что $A \leq N_G(S)$. Пусть $\{q_1, \dots, q_m\}$ – полное множество различных простых делителей $|B|$ и $S_i \in \text{Syl}_{q_i}(B)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$B = \langle S_1, \dots, S_m \rangle.$$

Из $A \leq N_G(S_i)$ для $i = 1, \dots, m$ заключаем, что $A \leq N_G(B)$. Отсюда

$$G = AB \leq N_G(B).$$

Поэтому $B \trianglelefteq G$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi} \times \mathfrak{F}$ – наследственная формация, то любая силовская подгруппа из B является K - \mathfrak{F} -субнормальной в ней. Отсюда и условия $\pi(B) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ по теореме 3.1 следует $B \in \mathfrak{F}$. Итак, доказано, что G принадлежит формации $\mathfrak{N}_{\pi} \times \mathfrak{F}$. \square

Следствие 3.4.1. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если каждая циклическая примарная подгруппа группы G является абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальной в G , то G принадлежит \mathfrak{F} .

Следствие 3.4.2. Пусть \mathfrak{U} – формация всех сверхразрешимых групп. Если каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно K - \mathfrak{U} -субнормальной в G , то G сверхразрешима.

Следствие 3.4.3. Пусть $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ – формация всех групп с нильпотентным коммутантом. Если каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно K - $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ -субнормальной в G , то G имеет нильпотентный коммутант.

Следствие 3.4.4. Пусть \mathfrak{N}^2 – формация всех метанильпотентных групп. Если каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно K - \mathfrak{N}^2 -субнормальной в G , то G метанильпотентна.

4 Заключительные замечания. Открытые проблемы

Отметим некоторые дальнейшие направления исследования групп с заданными системами абсолютно K - \mathfrak{F} -субнормальных (абсолютно \mathfrak{F} -субнормальных) подгрупп.

Наряду с силовскими подгруппами на строение конечной группы также существенно влияют свойства вложения нормализаторов силовских подгрупп (кратко, силовских нормализаторов) в группу. Отметим следующие мотивирующие результаты. Согласно известной теореме Глаубермана [16], если все силовские подгруппы группы самонормализуемы, то группа является p -группой для некоторого простого числа p .

Пусть H – подгруппа группы G . Рассмотрим цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G. \quad (4.1)$$

Согласно [17] подгруппа H называется \mathbb{P} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь (4.1) такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

В работе [18] В.С. Монахов и В.Н. Княгина установили, что группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда ее силовские нормализаторы \mathbb{P} -субнормальны в G . Заметим, если формация \mathfrak{F} совпадает с классом \mathcal{U} всех сверхразрешимых групп, то в любой разрешимой группе множества всех \mathcal{U} -субнормальных, K - \mathcal{U} -субнормальных и \mathbb{P} -субнормальных подгрупп совпадают. В произвольной группе всякая \mathcal{U} -субнормальная (K - \mathcal{U} -субнормальная) подгруппа является \mathbb{P} -субнормальной, (K - \mathbb{P} -субнормальной соответственно), обратное утверждение в общем случае неверно.

Отметим еще один результат в этом направлении. В [19]–[20] доказано, что если в группе G нормализатор любой силовской подгруппы субмодулярен, то G является сверхразрешимой группой, у которой все силовские подгруппы субмодулярны. При этом под субмодулярной подгруппой [21] понимается подгруппа H , для которой существует цепь (4.1) такая, что H_{i-1} – модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \dots, n$. Здесь модулярная в G подгруппа – это модулярный элемент в решетке всех подгрупп группы G .

В связи с перечисленными выше результатами в работе [22] были начаты исследования групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп являются \mathfrak{F} -субнормальными подгруппами, где \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация.

Поэтому представляет интерес следующая

Проблема 4.1. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация. Описать строение групп, у которых силовские нормализаторы являются абсолютно \mathfrak{F} -субнормальными подгруппами.

Частичное решение данной проблемы дает следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая наследственная насыщенная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны:

- (1) Группа G принадлежит \mathfrak{F} .
- (2) $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и каждый силовский нормализатор группы G является абсолютно \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G .
- (3) $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая максимальная подгруппа, содержащая некоторый силовский нормализатор группы G является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G .

Проблема 4.3. Можно ли в теореме 4.2 отбросить требование разрешимости формации \mathfrak{F} ?

ЛИТЕРАТУРА

1. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
4. Васильева, Т.И. Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 25–30.
5. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.
6. Вегера, А.С. О конечных группах с заданными K - \mathfrak{F} -субнормальными силовскими подгруппами / А.С. Вегера // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 53–57.
7. Васильев, А.Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. матем. журнал. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.
8. Семенчук, В.Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Мат. заметки. – 2011. – Т. 89, № 1. – С. 104–108.
9. Монахов, В.С. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами / В.С. Монахов, И.Л. Сохор // Сиб. матем. журнал. – 2017. – Т. 58, № 4. – С. 851–863.
10. Васильев, А.Ф. О K - \mathbb{P} -субнормальных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Мат. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

11. *Мурашко, В.И.* Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Сиб. мат. журнал. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.
12. *Murashka, V.I.* On analogues of Baer's theorems for widely supersoluble hypercenter of finite groups / V.I. Murashka // Asian-European J. Math. – 2018. – Vol. 11, № 3. – P. 1850043.
13. *Ballester-Bolinches, A.* Some Results on Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, A.A. Heliel, M.M. Al-Shomrani // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2017. – Vol. 40, № 3. – P.1341–1357.
14. *Ballester-Bolinches, A.* On Products of Generalised Supersoluble Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, W.M. Fakieh, M.C. Pedraza-Aguilera // Mediterr. J. Math. – 2019. – Vol. 16, № 2. – P. 46.
15. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 898 p.
16. *Glaubermann, G.* Prime-power factor groups of finite groups II / G. Glaubermann // Math. Z. – 1970. – № 117. – P. 46–56.
17. *Васильев, А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
18. *Kniahina, V.N.* On supersolvability of finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Internat. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.
19. *Васильев, В.А.* О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп / В.А. Васильев // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. – 2016. – № 2 (91). – С. 17–21.
20. *Васильев, В.А.* Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сиб. мат. журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.
21. *Zimmermann, I.* Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.
22. *Васильев, А.Ф.* Конечные группы с сильно K - \mathfrak{F} -субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 66–71.

Поступила в редакцию 12.09.19.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ ФОРМАЦИОННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

М.Н. Коновалова¹, И.Л. Сохор²

¹Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

²Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина

FINITE GROUPS WITH FORMATIONAL SUBNORMAL SUBGROUPS

M.N. Konovalova¹, I.L. Sokhor²

¹Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration

²A.S. Pushkin Brest State University

Описано строение группы, содержащей максимальную подгруппу M такую, что все максимальные в M подгруппы \mathfrak{F} -субнормальны в группе, для случая, когда \mathfrak{F} – формация всех нильпотентных подгрупп или наследственная решеточная насыщенная формация.

Ключевые слова: конечные группы, субнормальные подгруппы, \mathfrak{F} -субнормальные подгруппы, нильпотентные группы, решеточная формация.

The structure of a group G containing a maximal subgroup M such that all maximal subgroups of M are \mathfrak{F} -subnormal in G in case \mathfrak{F} is the formation of all nilpotent groups or a subgroup-closed saturated lattice formation is described.

Keywords: finite groups, subnormal subgroups, \mathfrak{F} -subnormal subgroups, nilpotent groups, lattice formation.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология и обозначения стандартны и соответствует [1], [2].

Пусть \mathfrak{F} – формация, G – группа, H – подгруппа группы G . Подгруппа H называется \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой группы G , если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G \quad (0.1)$$

такая, что $H_i / (H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i .

Это равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq (H_{i-1})_{H_i}$.

Здесь $Y_X = \bigcap_{x \in X} Y^x$ – ядро подгруппы Y в группе

X , а запись $H_{i-1} < H_i$ означает, что H_{i-1} – максимальная подгруппа группы H_i . Для формации \mathfrak{N} всех нильпотентных групп \mathfrak{N} -субнормальность подгруппы разрешимой группы равносильна [1, с. 93] субнормальности. Для формации \mathfrak{U} всех сверхразрешимых групп \mathfrak{U} -субнормальность подгруппы H в разрешимой группе G равносильна [3, лемма 1.12] существованию цепочки подгрупп (0.1) такой, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$, $\forall i$, где \mathbb{P} – множество всех простых чисел.

Для наследственной формации \mathfrak{F} известно [4, лемма 7], что если в группе G каждая максимальная подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна, то $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Если же в группе G каждая 2-максимальная подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна, то все

собственные подгруппы в G имеют нильпотентные \mathfrak{F} -корадикалы [4, теорема 1]. Группы, у которых все 2-максимальные подгруппы \mathfrak{U} -субнормальны, исследованы в [5], [6].

Строение группы, в которой все 2-максимальные подгруппы субнормальны, получено в [7]. В [8, теорема 2.3] установлено, что в группе G , содержащей ненормальную максимальную подгруппу M такую, что все максимальные в M подгруппы субнормальны в G , все собственные подгруппы нильпотентны.

В этой статье мы продолжаем исследования в данном направлении. В группе G фиксируется максимальная подгруппа M и предполагается, что все максимальные в M подгруппы \mathfrak{F} -субнормальны в G . При $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ доказывается, что либо M нормальна в G , либо в группе G все собственные подгруппы абелевы, тем самым уточняется отмеченный выше результат [8, теорема 2.3]. В случае, когда \mathfrak{F} – наследственная насыщенная решеточная формация, доказано, что либо M \mathfrak{F} -субнормальна в G , либо G – нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы.

1 Вспомогательные результаты

Запись $A \leq B$ означает, что A – подгруппа группы B ; если A – собственная подгруппа группы B , то будем писать $A < B$. Подгруппа Фраттини группы G обозначается через $\Phi(G)$;

наибольшая нормальная p -подгруппа группы G обозначается через $O_p(G)$. Запись $A \rtimes B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

Пусть H – подгруппа группы G . Если существует максимальная в G подгруппа M такая, что $H \leq M$ и H является максимальной подгруппой в M , то H называется 2-максимальной подгруппой группы G .

Пусть \mathfrak{F} – класс групп, G – группа. Группа G называется минимальной не \mathfrak{F} группой, если $G \notin \mathfrak{F}$, а каждая собственная подгруппа в G принадлежит \mathfrak{F} . Минимальная ненильпотентная группа также называется группой Шмидта, а минимальная неабелева группа – группой Миллера – Морено. Свойства этих групп хорошо известны [1], [10], [11].

Пусть \mathfrak{F} – формация, G – группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G , фактор-группы по которым принадлежат \mathfrak{F} , обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется \mathfrak{F} -корадикалом группы G .

Формация \mathfrak{F} называется решеточной, если в любой группе множество всех ее \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. Решеточные формации описаны в работе [12]. В частности, доказано [12, лемма 4], что решеточные формации сверхрадикальны. Нормально наследственная формация \mathfrak{F} называется сверхрадикальной, если любая группа $G = AB$, где A и B – \mathfrak{F} -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы из G , принадлежит \mathfrak{F} .

Лемма 1.1 [13, Лемма 3]. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная сверхрадикальная формация. Тогда разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа G является группой одного из следующих типов:

- (1) G – группа порядка p , где простое $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;
- (2) G – группа Шмидта.

Нам потребуются следующие свойства \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп.

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – формация, H и K – подгруппы группы G , $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) если K \mathfrak{F} -субнормальна в H , а H \mathfrak{F} -субнормальна в G , то K \mathfrak{F} -субнормальна в G [9, 6.1.6 (1)];

- (2) если K/N \mathfrak{F} -субнормальна в G/N , то K \mathfrak{F} -субнормальна в G [9, 6.1.6 (2)];

- (3) если H \mathfrak{F} -субнормальна в G , то HN/N \mathfrak{F} -субнормальна в G/N [9, 6.1.6 (3)];

- (4) если \mathfrak{F} – наследственная формация и $G^{\mathfrak{F}} \leq K$, то K \mathfrak{F} -субнормальна в G [9, 6.1.7 (1)];

- (5) если \mathfrak{F} – наследственная формация и H \mathfrak{F} -субнормальна в G , то $H \cap K$ \mathfrak{F} -субнормальна в K [9, 6.1.7 (2)].

2 Случай формации всех нильпотентных групп

Теорема 2.1. Пусть в группе G существует ненормальная максимальная подгруппа M . Каждая максимальная в M подгруппа субнормальна в G тогда и только тогда, когда G – ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы абелевы.

Доказательство. Необходимость. В нильпотентной группе все максимальные подгруппы нормальны [2, 3.13]. По условию в G существует ненормальная максимальная подгруппа M , поэтому G ненильпотентна.

Предположим, что в M существуют различные максимальные подгруппы M_1 и M_2 , по условию они субнормальны в G . Согласно [2, 2.41] подгруппы M_1 и M_2 субнормальны в M , поэтому они нормальны в M и $M = M_1M_2$. Так как произведение субнормальных подгрупп является субнормальной подгруппой [2, 2.43], то M – нормальная подгруппа группы G , что противоречит условию теоремы. Поэтому предположение неверно, и в M только одна максимальная подгруппа, обозначим ее через H . Если $x \in M \setminus H$, то подгруппа $\langle x \rangle$ не содержится в H , поэтому $\langle x \rangle = M$ и группа G разрешима [14, IV.7.4]. Если существуют $p, q \in \pi(M)$, $p \neq q$, то $\langle x^p \rangle$ и $\langle x^q \rangle$ – подгруппы в M индексов p и q соответственно, что противоречит единственности максимальной подгруппы H в M . Значит, $\pi(M) = \{p\}$ и M – силовская p -подгруппа группы G .

Поскольку $M = N_G(M)$, то согласно [14, IV.2.6] существует нормальная в G подгруппа Q такая, что $G = Q \rtimes M$. Так как группа G разрешима и M – максимальная в G подгруппа, то Q – силовская q -подгруппа группы G , Q – минимальная нормальная в G подгруппа. По условию подгруппа $\langle x^p \rangle$ субнормальна в G . Согласно [2, 5.31]

$$\langle x^p \rangle \leq O_p(G) \leq M, \langle x^p \rangle = O_p(G).$$

Поэтому $Q \langle x^p \rangle = Q \times O_p(G)$. Пусть K – максимальная в G подгруппа, не сопряженная с M . Тогда $Q \leq K$ и $K = Q \times O_p(G)$ абелева. Поэтому G – ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы абелевы.

Достаточность. Пусть G – ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы абелевы. Тогда она является группой Шмидта и ее силовские подгруппы абелевы. Согласно [7, лемма 5] в G все 2-максимальные подгруппы субнормальны. \square

Замечание 2.1. Стрoение ненильпотентной группы, у которой все собственные подгруппы абелевы, хорошо известно [1], [10], [11], она является ненильпотентной группой Миллера – Морено. В частности, такая группа бипримарна, т. е. ее порядок делится в точности на два различных простых числа, одна из силовских подгрупп является минимальной нормальной подгруппой группы, другая – циклическая.

Следствие 2.1.1 [7, лемма 5]. В том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда либо G нильпотентна, либо G – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Следствие 2.1.2 [8, теорема 2.3]. Если в группе G существует ненормальная максимальная подгруппа, у которой все максимальные подгруппы субнормальны в G , то G – группа Шмидта.

3 Случай решеточной формации

Лемма 3.1 [4, лемма 7]. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация. Если в группе G все максимальные подгруппы \mathfrak{F} -нормальны, то факторгруппа $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Теорема 3.2. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы. Предположим, что в группе G существует максимальная подгруппа M , которая обладает следующими свойствами:

- (1) M не \mathfrak{F} -субнормальна в G ;
- (2) каждая максимальная подгруппа из M \mathfrak{F} -субнормальна в G .

Тогда G – ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы.

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/M_G \in \mathfrak{F}$ и M \mathfrak{F} -нормальна в G , противоречие. Поэтому группа G не принадлежит \mathfrak{F} .

Поскольку каждая максимальная подгруппа из M \mathfrak{F} -субнормальна в G , то в силу леммы (1.2) (5) каждая максимальная подгруппа из M \mathfrak{F} -субнормальна в M . Поэтому $M \in \mathfrak{F}$ по лемме 3.1.

Предположим, что в M существуют различные максимальные подгруппы M_1 и M_2 . По условию M_1 и M_2 \mathfrak{F} -субнормальны в G . Так как формация \mathfrak{F} решеточная, то $M = \langle M_1, M_2 \rangle$ \mathfrak{F} -субнормальна в G , противоречие. Поэтому предположение неверно, и в группе M существует единственная максимальная подгруппа. Следовательно, $M = \langle x \rangle$ – циклическая q -подгруппа группы G для некоторого $q \in \pi(G)$ и группа G разрешима [14, IV.7.4].

Предположим, что M нормальна в G . Поскольку для формации \mathfrak{N} всех нильпотентных групп субнормальность подгруппы разрешимой группы равносильна [1, с. 93] \mathfrak{N} -субнормальности

и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то подгруппа M \mathfrak{F} -субнормальна в G , противоречие. Поэтому подгруппа M не нормальна в G . Значит, $M = N_G(M)$ и согласно [14, IV.2.6] существует нормальная в G подгруппа P такая, что $G = P \rtimes M$. Поскольку группа G разрешима и M – максимальная в G подгруппа, то P – силовская p -подгруппа группы G , P – минимальная нормальная в G подгруппа. Следовательно, G – бипримарная $\{p, q\}$ -группа.

Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $G^\delta \neq 1$. Пусть \mathfrak{A} – формация всех абелевых групп. Поскольку

$$G/P = \langle x \rangle \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F},$$

то $G^\delta \leq P$ и $G^\delta = P$. Поэтому $\Phi(G^\delta) = 1$.

Подгруппа $\langle x \rangle = M = G/P \in \mathfrak{F}$. Пусть H – максимальная в G подгруппа, не сопряженная с M . Тогда $P \leq H$ и $H = P \langle x^q \rangle$ нормальна в G . Пусть K – максимальная в H подгруппа. Если $P \leq K$, то K \mathfrak{F} -субнормальна в G по лемме 1.2 (4). Если $P \not\leq K$, то без ущерба для доказательства можно считать, что $\langle x^q \rangle \leq K$. Поэтому $K = P_1 \langle x^q \rangle$ и подгруппа $P_1 = P \cap K$ субнормальна в G . В силу [1, с. 93] подгруппа P_1 \mathfrak{N} -субнормальна в G , а поскольку $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то P_1 \mathfrak{F} -субнормальна в G . Подгруппа $\langle x^q \rangle$ также \mathfrak{F} -субнормальна в G по условию. Поскольку \mathfrak{F} – решеточная формация, $K = P_1 \langle x^q \rangle$ \mathfrak{F} -субнормальна в G . Но K – произвольная максимальная в H подгруппа, значит, все максимальные в H подгруппы \mathfrak{F} -субнормальны в G . Из леммы 1.2 (4) получаем, что все максимальные в H подгруппы \mathfrak{F} -субнормальны в H . По лемме 3.1 факторгруппа $H/\Phi(H) \in \mathfrak{F}$. По условию \mathfrak{F} – насыщенная формация, значит, $H \in \mathfrak{F}$. Таким образом, все максимальные подгруппы в G принадлежат \mathfrak{F} . Поскольку решеточные формации свехрадикальны [12, лемма 4], то в силу леммы 1.1 группа G является группой Шмидта. Так как P абелева, то в силу свойств групп Шмидта [11, теорема 1.1, теорема 1.2], каждая собственная подгруппа группы G абелева. \square

Следствие 3.2.1. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если в группе G каждая 2-максимальная подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна, то либо $G \in \mathfrak{F}$, либо G – ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы абелевы.

Доказательство. Если в группе G все максимальные подгруппы \mathfrak{F} -субнормальны, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 3.1. Если $G \notin \mathfrak{F}$ и некоторая ее максимальная подгруппа M не \mathfrak{F} -субнормальна, то G – ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы, по теореме 3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.
2. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
3. Монахов, В.С. Конечные группы с абнормальными и \mathcal{U} -субнормальными подгруппами / В.С. Монахов // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.
4. Монахов, В.С. О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105. – С. 269–277.
5. Monakhov, V.S. Finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniashina // Ricerche Mat. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.
6. Kovaleva, V.A. Finite soluble groups with all n -maximal subgroups \mathfrak{F} -subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 273–290.
7. Луценко, Ю.В. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – С. 730–740.
8. Семенчук, В.Н. О конечных группах с обобщенно субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук, М.В. Селькин, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 66–68.
9. Ballester-Bolinches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 381 p.
10. Miller, G.A. Non-abelian groups in which every subgroups is abelian / G.A. Miller, H.C. Moreno // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – Vol. 4, № 4. – P. 398–404.
11. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Укр. матем. конгресс: сб. тр. – Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 2002. – С. 81–90.
12. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: сб. науч. ст. – Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1993. – С. 27–54.
13. Семенчук, В.Н. Разрешимые \mathfrak{F} -радикальные формации / В.Н. Семенчук // Мат. заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 261–266.
14. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

Поступила в редакцию 05.07.19.

УДК 517.51+517.53

ПОВЕДЕНИЕ L_p -КВАЗИНОРМЫ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ НА ПРЯМОЙ

Т.С. Мардвилко

Белорусский государственный университет, Минск

SHARP L_p -INEQUALITIES FOR DERIVATIVES OF BLASCHKE PRODUCTS ON THE STRAIGHT LINE

T.S. Mardvilko

Belarusian State University, Minsk

Получены экстремальные L_p -оценки для производных произведений Бляшке на прямой. В работе найдены супремум и инфимум квазинормы в пространстве Лебега L_p , $0 < p < \infty$, $p \neq 1/s$, на прямой от производных произведений Бляшке. Эти результаты дополняют исследования автора о нижней и верхней оценках квазинормы $\|\cdot\|_{L_{1/s}(\mathbb{R})}$ для s -й производной произведений Бляшке.

Ключевые слова: рациональные функции, произведение Бляшке, неравенства типа Бернштейна.

Extremal problems for the derivatives of Blaschke products in the Lebesgue space on a straight line are solved. The supremum and infimum of the seminorms $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R})}$, $0 < p < \infty$, $p \neq 1/s$, from the derivatives of Blaschke products are obtained. Upper and lower inequalities for the higher derivatives of Blaschke products in the Lebesgue space $L_{1/s}(\mathbb{R})$ were obtained by the author earlier.

Keywords: rational functions, Blaschke products, Bernstein type inequality.

1 Основные результаты

Через $L_p(\mathbb{R})$, $0 < p < \infty$, обозначим пространство Лебега измеримых комплексных функций на \mathbb{R} с конечной квазинормой (нормой при $1 \leq p < \infty$)

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Пусть $a_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ – некоторый набор из n комплексных чисел, лежащих в верхней полуплоскости $\Pi = \{z : \text{Im } z > 0\}$. Рассмотрим произведение Бляшке порядка n с нулями в точках a_1, \dots, a_n :

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}. \quad (1.1)$$

Для краткости изложения введем функцию

$$\lambda(\alpha) = 2^\alpha \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})}, \quad \alpha > 0,$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

В теоремах 1.1–1.5 описано поведение квазинормы $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$, $0 < p < \infty$.

Теорема 1.1. Для любых $n, s \in \mathbb{N}$ и любого произведения Бляшке b_n справедливы соотношения

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty \text{ при } 0 < p \leq \frac{1}{s+1},$$

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} < +\infty \text{ при } \frac{1}{s+1} < p < +\infty.$$

Теорема 1.2. Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{s+1} < p < \infty$, $p \neq \frac{1}{s}$, имеет место равенство

$$\sup_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty.$$

Теорема 1.3 [1]. Для $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеет место равенство

$$\sup_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} = s! \lambda^s (1/s) n^s.$$

Теорема 1.4. Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{s+1} < p < +\infty$, $p \neq \frac{1}{s}$, имеет место равенство

$$\inf_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = 0.$$

Теорема 1.5 [1]. Для $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеет место неравенство

$$\inf_{a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} \geq \frac{\pi^s (s-1)((s-2)!)^s}{16^s (s!)^{s-1}} n^s.$$

Замечание 1.1. Для первой производной произведения Бляшке b_n известно равенство (см., например, [2]) $\|b_n'\|_{L_1} = 2\pi n$.

Замечание 1.2. Как видно из приведенных выше результатов, только при одном значении параметра $p = \frac{1}{s}$ рассматриваемая квазинорма

$\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$ при фиксированном $s \in \mathbb{N}$ и $n \rightarrow \infty$ ведет себя устойчиво относительно нулей $b_n(z)$ и имеет порядок n^s . Для всех остальных значений $\frac{1}{s+1} < p < +\infty$, $p \neq \frac{1}{s}$, квазинорма $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$ может при выборе параметров a_1, \dots, a_n становиться как сколь угодно большой, так и сколь угодно малой.

2 Доказательство основных результатов

Лемма 2.1. При любых $\alpha > 0$ и $a \in \Pi$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(2 \operatorname{Im} a)^\alpha}{|x-a|^{1+\alpha}} dx = \lambda(\alpha). \quad (2.1)$$

Доказательство. Сведем интеграл слева в (2.1) к интегралу Эйлера 1-го рода:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{(2 \operatorname{Im} a)^\alpha}{|x-a|^{1+\alpha}} dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(2 \operatorname{Im} a)^\alpha}{((x-\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(2 \operatorname{Im} a)^\alpha}{(x^2 + (\operatorname{Im} a)^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}} dx = 2^{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{1+\alpha}{2}}} = \\ &= 2^{\alpha+1} \frac{1}{2} \mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2^\alpha \mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

где \mathbf{B} – бета-функция Эйлера.

Осталось воспользоваться связью между \mathbf{B} -функцией и Γ -функцией Эйлера:

$$\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)}. \quad \square$$

Через $c(\dots)$, $c_1(\dots)$, $c_2(\dots)$, ... будем обозначать положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров.

Доказательство теоремы 1.1. Произведение Бляшке вида (1.1) есть функция аналитическая в области $|z| > \rho$, где

$$\rho = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}.$$

При этом $b_n(\infty) = 1$. Поэтому $b_n(z)$ в области $|z| > \rho$ можно разложить в ряд Лорана:

$$b_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{z^k}.$$

Коэффициент β_1 в этом разложении имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lim_{z \rightarrow \infty} z(b_n(z) - 1) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z\left(\prod_{k=1}^n (z - a_k) - \prod_{k=1}^n (z - \bar{a}_k)\right)}{\prod_{k=1}^n (z - \bar{a}_k)} = \\ &= -2i \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} a_k. \end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Im} a_k > 0$ для всех $k = 1, \dots, n$, то $\beta_1 \neq 0$, и, следовательно,

$$|b_n^{(s)}(z)| \sim \frac{s! |\beta_1|}{|z|^{s+1}} \text{ при } |z| \rightarrow \infty.$$

Из полученной эквивалентности и признака сходимости несобственных интегралов получим утверждение теоремы 1.1. \square

Доказательство теоремы 1.2. Если $n = 1$ введем произведения Бляшке

$$b_1(x, r) = \frac{x - ir}{x + ir}, \quad r > 0.$$

Поскольку

$$b_1^{(s)}(x, r) = (-1)^{s-1} s! \frac{2ir}{(x + ir)^{s+1}}, \quad s \in \mathbb{N},$$

то, пользуясь леммой 2.1, находим

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} = s! \left\| \frac{2r}{(x + ir)^{s+1}} \right\|_{L_p} = \frac{s!}{(2r)^{s-1/p}} \lambda^{1/p}(sp + p - 1).$$

Из полученного выражения для квазинормы видно, что $\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +0$, если $p > \frac{1}{s}$, и при $r \rightarrow +\infty$ в случае $\frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}$.

В случае $n \geq 2$ рассмотрим однопараметрическое семейство произведений Бляшке

$$b_n(x, r) = \frac{x - ir}{x + ir} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{x - a_k}{x - \bar{a}_k}, \quad r > 0,$$

где нули $a_k = 2^k(1 + i)$, а параметр

$$r \in E_n := (0, 1] \cup [2^{n+1}, +\infty).$$

Разложим $b_n(x, r)$ на простейшие дроби:

$$b_n(x, r) = 1 + \frac{2rA_0}{x + ir} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k+1}A_k}{x - \bar{a}_k}. \quad (2.2)$$

Оценим $|A_0|$ снизу. При $r \in [2^{n+1}, +\infty)$ имеем

$$\begin{aligned} |A_0| &= \left| i \prod_{k=1}^{n-1} \frac{ir + a_k}{ir + \bar{a}_k} \right| = \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 + \frac{a_k - \bar{a}_k}{ir + \bar{a}_k} \right| \geq \\ &\geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2 \operatorname{Im} a_k}{|ir + \bar{a}_k|} \right) \geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2^{k+1}}{|2^{n+1}i + \bar{a}_1|} \right) \geq \\ &\geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2^{k+1}}{2^{n+1}} \right) \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Если $r \in (0, 1]$, то

$$\begin{aligned} |A_0| &= \left| \prod_{k=1}^{n-1} \frac{ir + a_k}{ir + \bar{a}_k} \right| \geq \\ &\geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2 \operatorname{Im} a_k}{|ir + \bar{a}_k|} - 1 \right) \geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2^{k+1}}{1 + 2^k} - 1 \right) > \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $r \in E_n$ справедлива оценка

$$|A_0| \geq c_1(n). \quad (2.3)$$

Покажем, что $A_k, k = 1, \dots, n-1$, равномерно по $r \in E_n$ ограничены сверху. Действительно, при $r \in (0, 1]$ получим

$$|A_k| = \left| \frac{ir - \bar{a}_k \prod_{j \neq k} \bar{a}_k - a_j}{ir + \bar{a}_k \prod_{j \neq k} \bar{a}_k - \bar{a}_j} \right| \leq \frac{2^k(1-i) + 1}{2^k(1-i) - 1} \prod_{j \neq k} \frac{|\bar{a}_k| + |a_j|}{|\bar{a}_k| - |\bar{a}_j|} \leq 3 \cdot 2^{(n-2)^2}. \quad (2.4)$$

Если $r \in [2^{n+1}, +\infty)$, то имеет место оценка

$$|A_k| \leq \frac{1 + 2^{k-n-1}(1-i)}{1 - 2^{k-n-1}(1-i)} \prod_{j \neq k} \frac{|\bar{a}_k| + |a_j|}{|\bar{a}_k| - |\bar{a}_j|} \leq 3 \cdot 2^{(n-2)^2}. \quad (2.5)$$

Если $1 \leq p < \infty$, то для произведения Бляшке (2.2) выполняется

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \geq s! A_0 \left\| \frac{2r}{(x+ir)^{s+1}} \right\|_{L_p} - \sum_{k=1}^{n-1} s! A_k \left\| \frac{2^{k+1}}{(x-\bar{a}_k)^{s+1}} \right\|_{L_p}.$$

В силу леммы 2.1 и оценок (2.3)–(2.5) из последнего неравенства имеем

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \geq s! A_0 \frac{\lambda^{1/p}(ps+p-1)}{(2r)^{s-\frac{1}{p}}} - c_1(n, p, s) \rightarrow +\infty, \quad r \rightarrow +0.$$

При $\frac{1}{s+1} < p < 1$ соответственно получим

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p}^p \geq (s!)^p A_0^p \left\| \frac{2r}{(x+ir)^{s+1}} \right\|_{L_p}^p - \sum_{k=1}^{n-1} (s! A_k)^p \left\| \frac{2^{k+1}}{(x-\bar{a}_k)^{s+1}} \right\|_{L_p}^p \geq (s!)^p A_0^p \frac{\lambda(ps+p-1)}{(2r)^{sp-1}} - c_2(n, p, s).$$

Чтобы убедиться, что рассматриваемая квазинорма может неограниченно возрастать, достаточно при $\frac{1}{s} < p < 1$ в последнем неравенстве рассмотреть параметр $r \rightarrow +0$, а при $\frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}$ параметр $r \rightarrow +\infty$. \square

Доказательство теоремы 1.4. Рассмотрим произведение Бляшке с единственным полюсом кратности n :

$$b_n(x, a) = \left(\frac{x-a}{x-\bar{a}} \right)^n, \quad a \in \Pi.$$

Такое произведение Бляшке можно представить в виде

$$b_n(x, a) = \left(\frac{x-\bar{a} + (\bar{a}-a)}{x-\bar{a}} \right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-2i \operatorname{Im} a)^k}{(x-\bar{a})^k}.$$

Тогда s -ая производная $b_n(x, a)$ имеет вид:

$$b_n^{(s)}(x, a) = \sum_{k=1}^n c(k, s, n) \frac{(-2i \operatorname{Im} a)^k}{(x-\bar{a})^{k+s}}.$$

Если $p \geq 1$, то для оценки сверху L_p -нормы $b_n^{(s)}(x)$ воспользуемся леммой 2.1 и неравенством треугольника:

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} \leq \sum_{k=1}^n c(k, s, n) \left\| \frac{(2 \operatorname{Im} a)^k}{(x-\bar{a})^{s+k}} \right\|_{L_p} \leq \frac{c_3(n, p, s)}{(\operatorname{Im} a)^{s-\frac{1}{p}}} \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im} a \rightarrow +\infty.$$

В случае $\frac{1}{s+1} < p < 1$ воспользуемся леммой 2.1 и p -неравенством треугольника для соответствующей квазинормы:

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p}^p \leq \sum_{k=1}^n (c(k, s, n))^p \left\| \frac{(2 \operatorname{Im} a)^k}{(x-\bar{a})^{s+k}} \right\|_{L_p}^p \leq \frac{c_4(n, p, s)}{(\operatorname{Im} a)^{sp-1}}. \quad (2.6)$$

В случае $\frac{1}{s} < p < 1$ из (2.6) получаем, что

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p}^p \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} a \rightarrow +\infty. \quad \text{Если} \quad \frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}, \quad \text{то} \quad \|b_n^{(s)}\|_{L_p}^p \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} a \rightarrow +0. \quad \square$$

3 Заключение

Через $C(\mathbb{R})$ обозначим пространство непрерывных комплекснозначных функций f на \mathbb{R} с нормой

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty.$$

Рассмотрим рациональные функции вида

$$r_n(z) = \frac{p_n(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)},$$

где $p_n(z)$ – алгебраический многочлен степени не выше n , а $a_k \in \Pi, k = 1, \dots, n$.

Для первой производной $r_n(z)$ Е.П. Долженко (см., например, [3]–[5]) получено следующее экстремальное неравенство

$$\|r_n'\|_{L_1} \leq 2\pi n \|r_n\|_{C(\mathbb{R})}. \quad (3.1)$$

Равенство в (3.1) достигается для функций вида

$$r_n(z) = cb_n(z), \quad c = \text{const}.$$

А.А. Пекарский [6] (см. также [4], [5]) обобщил (3.1) на высшие производные:

$$\|r_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} \leq c(s)n^s \|r_n\|_{C(\mathbb{R})}, \quad s \geq 2. \quad (3.2)$$

Неравенства (3.2) являются точными по порядку, т. е. относительно множителя n^s . Точная постоянная в (3.2) пока не найдена. В [1] автором получены оценки постоянной $c(s)$ из неравенства (3.2). Важную роль при доказательстве этих результатов играют точечные и интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке.

Неравенства (3.1) и (3.2) в свою очередь применяются для доказательства обратных теорем рациональной аппроксимации [3]–[5].

Отметим, что ранее автором были получены интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке для круга [7], [8]. Интересно, что для $p \neq \frac{1}{s}$ поведение $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$, $0 < p < \infty$, отличается от аналогичных результатов для прямой.

Автор благодарит А.А. Пекарского за полезные замечания, которые способствовали улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мардвилко, Т.С.* О значении постоянных в неравенствах типа Бернштейна для высших производных рациональных функций на прямой / Т.С. Мардвилко // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. – 2009. – Серия 2, № 3 (27). – С. 18–25.
2. *Русак, В.Н.* Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак // Минск: Изд-во БГУ, 1979.
3. *Pekarskii, A.A.* Approximation by rational functions with free poles / A.A. Pekarskii // East journal on approximations. – 2007. – Vol. 13, № 3. – P. 227–319.

4. *Lorenz, G.G.* Constructive Approximation. Advanced Problems / G.G. Lorenz, M.V. Golitschek, Y. Makovoz. – Berlin: Springer-Verlag, 1996.

5. *Petrushev, P.P.* Rational Approximations of Real Functions / P.P. Petrushev, V.A. Popov. – Cambridge: Univ. Press, 1987.

6. *Пекарский, А.А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации / А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1984. – Т. 124 (166), № 4 (8). – С. 571–588.

7. *Мардвилко, Т.С.* Интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке для круга / Т.С. Мардвилко // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2018. – № 1. – С. 10–16.

8. *Mardvilko, T.S.* On the value of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions / T.S. Mardvilko // East journal on approximations. – 2009. – Vol. 15, № 2. – P. 31–42.

Работа выполнена в рамках ГПНИ НАН Беларуси «Конвергенция».

Поступила в редакцию 04.09.19.

УДК 539.3

РАСЧЕТ ИЗГИБНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ИЗ КОМПОЗИТОВ

В.В. Можаровский, М.В. Москалева, Д.С. Кузьменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

CALCULATION OF BENDING DEFLECTIONS OF TOOTH OF GEARS FROM COMPOSITES

V.V. Mozharovsky, M.V. Moskaleva, D.S. Kuzmenkov

F. Scorina Gomel State University

Исследуется изгибное перемещение зуба зубчатого колеса из волокнистого материала с анизотропными свойствами, находящегося под действием сосредоточенной силы в различных характерных точках на поверхности зуба. Разработан алгоритм расчета коэффициента изгибной деформации при описании изгиба тремя моделями зуба зубчатого колеса из композитов.

Ключевые слова: деформация, композит, эвольвента, зубчатое колесо.

The flexural movement of a gear tooth made of fibrous material with anisotropic properties, which is under the action of a concentrated force at various characteristic points on the tooth surface, is investigated. An algorithm for calculating the coefficient of flexural deformation for three models of a gear tooth of composites has been developed.

Keywords: deformation, composite, evolvent, gear wheel.

Введение

Одним из наиболее важных компонентов в механической системе передач является зубчатая передача. Из-за высокой степени надежности, способностью передавать момент в большом диапазоне нагрузок и скоростей вращения, относительной простотой и компактностью конструкции зубчатые передачи получили широкое распространение. Такие передачи характеризуются длительным сроком эксплуатации и не предъявляют высоких требований к обслуживанию. Наряду с очевидными достоинствами, этим механизмам присущ и ряд недостатков. В отличие от других типов передач, они более сложны в изготовлении, требуют более высокой точности обработки и применения специализированного обрабатывающего оборудования. Выбор материалов для зубчатых колес должен обеспечить сопротивляемость значительным механическим усилиям. Высокая жесткость, реализуемая зубчатой передачей, способствует минимизации потерь при передаче механической энергии. Однако такая конструкция не позволяет преодолевать большие значения динамической нагрузки, что часто приводит к разрушению механизма. Еще одним негативным явлением, возникающим в процессе работы зубчатой пары, становится шум. Его уровень напрямую связан с частотой вращения механизма и зависит от качества изготовления колес.

С развитием и созданием новых композиционных материалов повышается их роль в различных отраслях машиностроения, происходит

активное их внедрение в разработку современных элементов деталей машин. Благодаря таким свойствам как легкий вес, коррозионная устойчивость, более высокая прочность и лучшие термические и электрические свойства широко используется композит в [1], [2]. В [3] исследовано уменьшение нагрузки и распределение напряжений для цилиндрического прямозубого зубчатого колеса из литой стали и композиционных материалов, проведен сравнительный анализ зубчатых колес из композитов, сделанных из литой стали, углеродного волокна и чугуна. В работе [4] рассмотрена замена металлического зубчатого колеса композитным материалом. Композитные зубчатые колеса были изготовлены методом литья с перемешиванием из сплава алюминия и карбида кремния. Проведено моделирование и анализ методом конечных элементов зубчатых колес с использованием ANSYS 14.0. В [5] показано, что значение напряжений для композиционных материалов меньше по сравнению с литыми стальными цилиндрическими зубчатыми колесами. В работе [6] предложен новый подход к проектированию цилиндрического зубчатого колеса, который предполагает изготовление только конца зуба зубчатого колеса отдельно из композита в отличие от использования композитов для всего зуба. Это позволило снизить вес колеса на 18%, а также уменьшить расход композита, что может привести к уменьшению затрат на производство из-за высокой стоимости композитов.

Современный мировой опыт использования зубчатых колес из композитов показал, что исследование в данной области предполагает разработку компьютерных программ, в основе которых лежат численные методы, такие как метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных уравнений (МГУ), метод разностных уравнений и т. д. с учетом свойств композита. Широко распространённым программным продуктом для моделирования, анализа и расчета деформации зубьев зубчатых колес является ANSYS, но в то же время для уточненного расчета, нами разрабатываются программы численного расчета деформативности зубьев зубчатых колес из композитов по МКЭ, например, аналогично методике [7].

В работе рассматривается создание и реализация программы расчета изгибных перемещений зубьев зубчатых колес из композитов. За основу взяты методы сопротивления материалов для расчета изгибных перемещений зубьев зубчатых колес и методики, применяющиеся при расчетах податливости зубчатых передач из пластмасс [8]–[14].

1 Постановка задачи

В работе рассчитывается изгибная деформация зуба зубчатого колеса из волокнистого материала с анизотропными свойствами. Здесь и далее используем классический термин, принятый в деталях машин, «деформация», имея в виду, что определяется размерная величина, то есть перемещение. Моделируем деформацию зубьев в виде действия сосредоточенной силы в различных характерных точках на поверхности зуба, считая, что зуб можно моделировать в виде клина, параболы и эвольвенты с галтелью. Расчет для зуба-клина и зуба-параболы выполняется по замкнутым формулам, а для реального зуба с эвольвентой и галтелью требуется численное интегрирование.

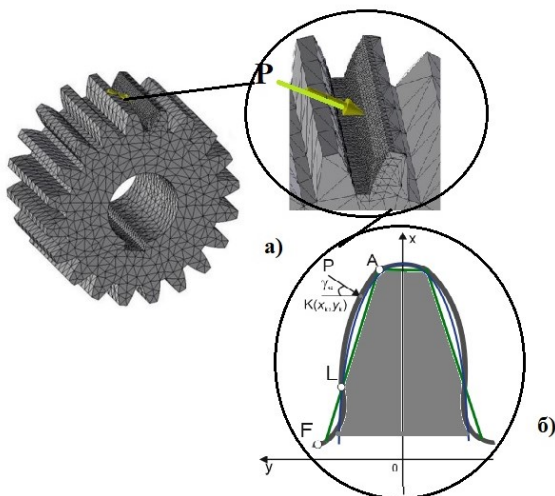


Рисунок 1.1 – Схема деформации зуба зубчатого колеса: а) расчет по МКЭ [15], б) – предлагаемая модель расчета

Рассмотрим зуб (рисунок 1.1), обозначив т. A – начало эвольвенты и вершина зуба, т. L – конец эвольвенты и начало галтели, т. F – конец галтели. Расположим систему координат xoy так, чтобы начало координат совпадало с центром зубчатого колеса. Пренебрегая трением, примем, что сила P в некоторой точке $K(x_k; y_k)$ (рисунок 1.1, б) действует по нормали к рабочей поверхности профиля зуба.

Введём обозначения: δ_e – деформация зуба, имеющего эвольвентную форму, δ_{kl} – деформация зуба клина, δ_{par} – деформация зуба, имеющего форму параболы (рисунок 1.1, б).

2 Построение математической модели

Как известно, деформация зубьев складываются из трех составляющих изгибной δ_u , сдвиговой δ_{sd} и деформация сжатия δ_{sg} . Величина деформации в направлении силы P рассчитывается по формуле:

$$\delta = \delta_u + \delta_{sd} + \delta_{sg} = y_u \cos \gamma_k + y_{sd} \cos \gamma_k + y_{sg} \sin \gamma_k,$$
 где y_u, y_{sd}, y_{sg} – соответствующие деформации, γ_k – угол давления в точке.

Применяя теорему Кастильяно, получим формулу для деформации зуба с эвольвентным профилем:

$$\delta_e = \frac{P \cos^2 \gamma_k}{Eb_w} \left(1,5J_1 + [1,2(1+\nu) + 0,5tg^2 \gamma_k] J_2 \right),$$

где E – модуль упругости композита, P – сила, действующая в точке $K(x_k; y_k)$, b_w – ширина зубчатого венца, ν – коэффициент Пуассона,

$$J_1 = \int_{x_{fp}}^{x_k} \frac{(x_k - x)[(x_k - x) - y_k tg \gamma_k]}{y^3} dx, \tag{2.1}$$

$$J_2 = \int_{x_{fp}}^{x_k} \frac{dx}{y}.$$

Далее в работе будет рассматриваться безразмерный коэффициент деформации:

$$k_e = \delta_e \frac{Eb_w}{P}. \tag{2.2}$$

Для определения J_1 и J_2 разобьем участок интегрирования $[x_F; x_k]$ на два $[x_F; x_L]$ и $[x_L; x_k]$, соответственно описываемые уравнениями:

– галтели

$$x = \frac{z_2}{2} \cos \varphi - \left(\frac{a_n}{\sin \alpha_s} + \rho_0 \right) \sin(\alpha_s - \varphi), \tag{2.3}$$

$$y = \frac{z_2}{2} \sin \varphi - \left(\frac{a_n}{\sin \alpha_s} + \rho_0 \right) \cos(\alpha_s - \varphi),$$

– эвольвенты

$$x = R \cos \beta, \quad y = R \sin \beta, \tag{2.4}$$

где

$$\varphi = \frac{2}{z_2} (a_n \operatorname{ctg} \alpha_s + b_n); \quad (2.5)$$

$$a_n = f_0 + c_0 - \rho_0; \quad b_n = \frac{\pi}{4} + f_0 \operatorname{tg} \alpha_0 + \rho_0 \cos \alpha_0;$$

$$\beta = \frac{\pi}{2z_2} + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha; \quad \alpha = \arccos \frac{z_2 \cos \alpha_0}{2R}.$$

В (2.3)–(2.5) введены обозначения: f_0 – коэффициент высоты головки зуба, α_0 – профильный угол, c_0 – коэффициент радиального зазора исходного контура инструмента, ρ_0 – радиус округления исходного контура инструмента, α – угол профиля зуба в произвольной точке профиля, α_s – угол между начальном прямой рейки и общей нормалью к галтели ($20^\circ \leq \alpha_s \leq 90^\circ$), m – модуль, z_2, z_1 – число зубьев колеса и шестерни соответственно.

Координаты точки впадины x_F, y_F находим из (2.4) при

$$R = R_F = \frac{z_2}{2} - (f_0 + c_0), \quad (2.6)$$

координаты точки галтели x_L, y_L – из (2.3) при $\alpha_s = \alpha_0$

$$x = \frac{z_2}{2} \cos \varphi - \left(\frac{a_n}{\sin \alpha_0} + \rho_0 \right) \sin(\alpha_0 - \varphi), \quad (2.7)$$

$$y = \frac{z_2}{2} \sin \varphi - \left(\frac{a_n}{\sin \alpha_0} + \rho_0 \right) \cos(\alpha_0 - \varphi).$$

Координаты точек приложения нагрузки x_k и y_k определяем из уравнения (2.4), используя таблицу 2.1 [12], где $\alpha_{e_{1,2}}$ – определяется по формуле (2.5) при

$$R_{e_{1,2}} = \frac{z_{1,2}}{2} + f_0.$$

Угол давления для каждой точки определяется по формуле

$$\gamma_k = \alpha_k - \beta_k, \quad (2.8)$$

где значение α_k находим по таблице 2.1, β_k – вычисляется по формуле (2.5).

Деформация зуба-клина определяется аналогично

$$\delta_{kl} = \frac{P \cos^2 \gamma_k}{Eb} \left(1,5J'_1 + [1,2(1+\nu) + 0,5\operatorname{tg}^2 \gamma_k] J'_2 \right),$$

где J'_1 и J'_2 определяются по формуле (2.2) с текущими координатами x', y' , и аналогично рассчитывается коэффициент деформации:

$$k_{kl} = \delta_{kl} \frac{Eb_w}{P}. \quad (2.9)$$

Координаты точки $K'(x'_k; y'_k)$ на клине, полученной при продолжении линии действия сил от точки K к профилю клина, можно вычислить через координаты точки K :

$$\begin{aligned} x' &= x - g \sin \gamma_k; \\ y' &= y - g \cos \gamma_k; \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$g = \frac{\cos \gamma_1}{\cos(\gamma_k - \gamma_1)} [(y - y_L) + (x - x_L) \operatorname{tg} \gamma_1],$$

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \frac{y_L - y_A}{x_A - x_L}.$$

Интегралы J'_1, J'_2 вычислим, учитывая, что уравнение боковой стороны клина представляет собой прямую, проходящую через вершину зуба (точка A), конец эвольвенты и начало галтели (точка L):

$$x' = cy' + d, \quad (2.11)$$

$$\text{где } c = \frac{x_L - x_A}{y_L - y'_A}, \quad d = x_A - cy_A.$$

Учитывая, что при заданном числе зубьев текущий радиус R меняется в пределах

$$\frac{z_2}{2} - (f_0 + c_0) \leq R \leq \frac{z_2}{2} + f_0, \quad (2.12)$$

а нижний предел интегрирования

Таблица 2.1 – Формулы, определяющие точки приложения нагрузки

Точка приложения нагрузки	Значение R_k	Значение α_k
вершина зуба (точка 1)	$R = \frac{z_2}{2} + f_0$	$\alpha = \alpha_e$
начало однопарного зацепления (точка 2)	$R_k = \frac{z_2 \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha}$	$\alpha_{(2)} = \operatorname{arctg} \left[\frac{2\pi}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2} + 1 \right) \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{z_1}{z_2} \operatorname{tg} \alpha_{e_1} \right]$
полус (точка 3)		$\alpha_{(3)} = \alpha_0;$
конец однопарного зацепления (точка 4)		$\alpha_{(4)} = \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \alpha_{e_2} - \frac{2\pi}{z_2} \right]$
конец активного участка линии зацепления (точка 5)		$\alpha_{(5)} = \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{z_1}{z_2} + 1 \right) \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{z_1}{z_2} \operatorname{tg} \alpha_{e_1} \right]$

$$y'_F = \frac{\sqrt{R_F^2(1+c^2) - d^2} - cd}{1+c^2},$$

$$x'_F = cy'_F + d, \quad (2.13)$$

получим следующие формулы для вычисления J'_1 и J'_2 :

$$J'_1 = \frac{1}{c^2} \left[J'_2 + \frac{2y'_k}{c} \left(\frac{1}{y'_k} - \frac{1}{y'_F} \right) - \frac{y_k'^2}{2c} \left(\frac{1}{y_k'^2} - \frac{1}{y_F'^2} \right) \right] -$$

$$- \frac{y'_k \operatorname{tg} \gamma_k}{c^2} \left[\frac{1}{y'_k} - \frac{1}{y'_F} - \frac{y_k}{2} \left(\frac{1}{y_k'^2} - \frac{1}{y_F'^2} \right) \right],$$

$$J'_2 = \frac{1}{c} \ln \frac{y'_k}{y'_F}. \quad (2.14)$$

Деформация зуба и коэффициент деформации, профиль которого описывается параболой, определяется аналогично:

$$\delta_{par} = \frac{P \cos^2 \gamma_k}{Eb} \left(1,5J'_1 + \left[1,2(1+\nu) + 0,5 \operatorname{tg}^2 \gamma_k \right] J'_2 \right),$$

$$k_{par} = \delta_{par} \frac{Eb_w}{P}. \quad (2.15)$$

Определяем интегралы J''_1 и J''_2 по (2.2) с текущими координатами x'', y'' .

Координаты точки $K''(x''_k; y''_k)$ на параболе можно получить через координаты точки K :

$$x'' = ay''^2 + b; \quad (2.16)$$

$$y'' = \frac{1}{2a} \left(-\operatorname{tg} \gamma_k - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma_k + 4a(x_k + \operatorname{tg} \gamma_k y_k - b)} \right);$$

где

$$b = \frac{z_2}{2} + f_0, \quad a = \frac{x_L - b}{y_L^2}.$$

Интегралы J''_1 и J''_2 вычислим, учитывая, что уравнение зуба представляет собой уравнение параболы вида

$$x'' = ay''^2 + b. \quad (2.17)$$

Нижний предел интегрирования задается формулами:

$$x''_F = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a(b + aR_F^2)}}{2a},$$

$$y''_F = R_F^2 - x''_F.$$

Таким образом, формулы для вычисления J''_1 и J''_2 примут вид:

$$J''_1 = 2a \left[\frac{a^2}{3} (y_k''^3 - y_F''^3) - \right.$$

$$\left. - (x_k'' - b) J''_2 - (x_k'' - b)^2 \left(\frac{1}{y_k''} - \frac{1}{y_F''} \right) \right] -$$

$$- 2ay_k'' \operatorname{tg} \gamma_k \left[(b - x_k'') \left(\frac{1}{y_k''} - \frac{1}{y_F''} \right) - a(y_k'' - y_F'') \right],$$

$$J''_2 = 2a(y_k'' - y_F''). \quad (2.18)$$

Все вычисления производятся для зубчатого колеса единичного модуля $m = 1$ с числом зубьев $z_2 \geq z_1$.

Расчеты проведены для зубчатых колес, нарезаемых реечным инструментом с исходным контуром по ГОСТ 13755-68 ($\alpha_0 = 20^\circ; f_0 = 1; c = 0.25$).

Для расчетов принято среднее значение коэффициента Пуассона $\nu = 0,4$.

3 Модели расчета

На основе описанной выше методики были разработаны модели расчета изгибных перемещений в зависимости от профиля зуба.

Модель расчета для эвольвенты. Координаты точек галтели и впадины вычислим по формулам (2.6), (2.7), точек приложения силы $(x_k; y_k)$ – используя значения из таблицы 2.1. Для вычисления интегралов используется формула Симпсона, интегрирование осуществлялось на двух участках, которые (в свою очередь) разбивались на n ($n = 20$) участков и определялись узлы интегрирования

$$x_{1i} = x_1 + i\Delta x_1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{2i} = x_2 + i\Delta x_2, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\Delta x_1 = \frac{x_r - x_{vp}}{n}, \quad \Delta x_2 = \frac{x_k - x_r}{n}.$$

Для определения координат y_{1i} и y_{2i} соответственно для первого и второго участков интегрирования решали первое уравнение (2.3) для определения α , и первое уравнение (2.4) для определения R .

Удовлетворительная сходимость была получена при использовании метода половинного деления при значениях α , удовлетворяющих требованию $|x - x_{1i}| < \varepsilon$ и $|x - x_{2i}| < \varepsilon$ (где ε наперед заданное достаточно малое число). Имея значения α_i и R_i , по вторым уравнениям (2.3) и (2.4), определялись y_{1i} и y_{2i} . Используя x_{1i} , x_{2i} и y_{1i} , y_{2i} , значения J_1 и J_2 определяли численным методом по формуле Симпсона.

Модель расчета для клина. Координаты точек галтели и впадины вычислим по формулам (2.7), (2.13), точек приложения силы $(x_k; y_k)$ – по формулам (2.10), а значения интегралов – по формулам (2.14).

Модель расчета для параболы. Координаты точек галтели и впадины вычислим по формулам (2.7), (2.16), точек приложения силы $(x_k; y_k)$ – по формулам (2.16), а вычисление интегралов – по формулам (2.18).

Для всех моделей рассчитывается коэффициент деформации по формулам (2.2), (2.9), (2.15) соответственно.

4 Результаты расчетов

Разработана программа, реализующая алгоритм расчета коэффициента изгибной деформации при описании изгиба тремя моделями зуба зубчатого колеса. Для расчета выбраны следующие параметры: $m = 1$, числом зубьев $z_1 = 20$, $z_2 = 20$, $\alpha_0 = 20^\circ$; $f_0 = 1$; $c = 0.25$, $\rho_0 = 0,37995$.

На рисунке 4.1 представлены графики зависимости коэффициента деформации в вершине зуба от числа зубьев.

На рисунке 4.2 представлены графики зависимости коэффициента деформации зуба с эвольвентным профилем от числа зубьев в разных точках приложения нагрузки.

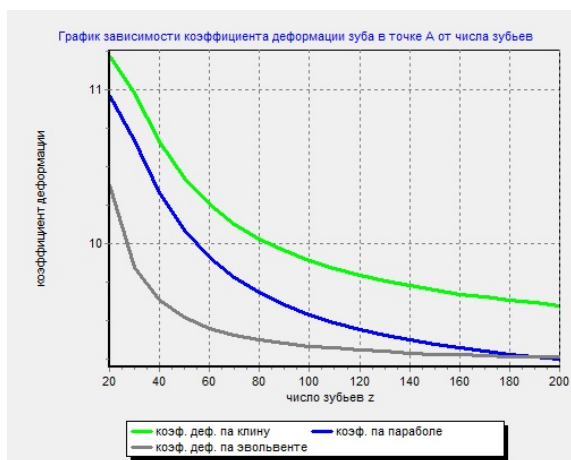


Рисунок 4.1 – Графики зависимости k_e, k_{kl}, k_{par} от z в вершине зуба (точка А)

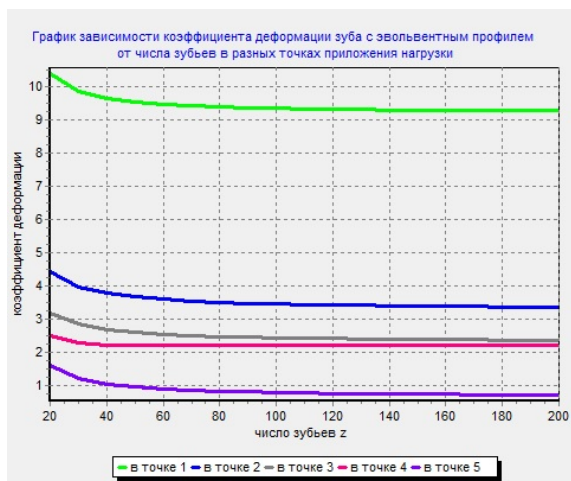


Рисунок 4.2 – Графики зависимости k_e от z в разных точках приложения нагрузки

5 Деформативность зубьев зубчатых колес из композита

Описанные выше алгоритм и методика расчета изгибных перемещений зуба зубчатого колеса представлены в относительных величинах, независимо от свойств материала. Если зубчатое колесо изготовлено из композита, то необходимо

модуль упругости Юнга представить с позиций макроподхода, то есть сделать следующую замену

$$E_C = E_f V_f + E_m V_m,$$

где E_C – модуль упругости Юнга для зуба из композита, E_f – модуль Юнга армирующего волокна, E_m – модуль Юнга для матрицы (среды армирования), V_f – объемное содержание волокна в композите, V_m – объемное содержание материала матрицы в композите.

Для расчета были выбраны следующие параметры: $m = 1$, числом зубьев $z_1 = 20$, $z_2 = 20$, $\alpha_0 = 20^\circ$; $f_0 = 1$; $c = 0.25$, $\rho_0 = 0,37995$, $E_f = 300000$ МПа, $E_m = 210000$ МПа, $V_f = 0.2$, $V_m = 0,8$, $P = 1466$, $b_w = 54$.

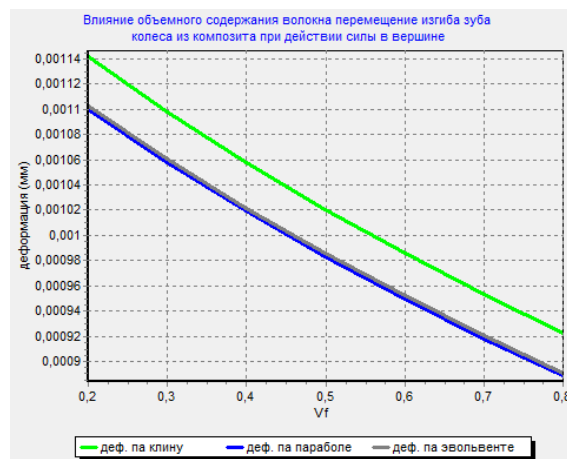


Рисунок 5.1 – График перемещения (мм) изгиба зуба колеса относительно объемного содержания волокна

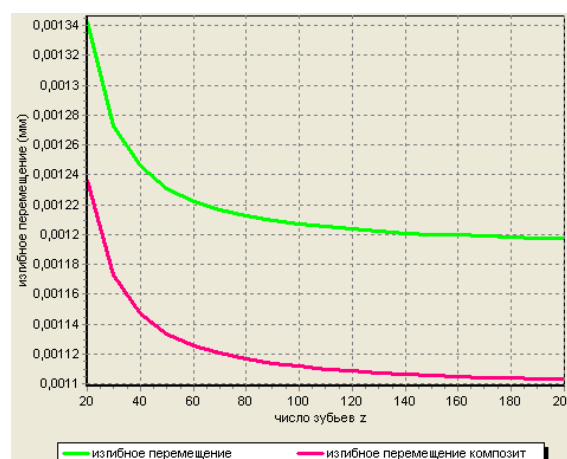


Рисунок 5.2 – График перемещения (мм) изгиба зуба колеса из стали и из композита в вершине зуба (точка А)

Рассчитано изгибное перемещение для трех выше описанных моделей по V_f с учетом действия силы в вершине (рисунок 5.1). Также можно

производить расчеты изгибной деформации и при действии силы в других характерных точках (таблица 2.1).

Полученные расчеты показывают, что изгибное перемещение для разного числа зубьев, например из стали (можно выбрать другой материал), могут быть больше чем для композита (рисунок 5.2).

Полученные результаты не противоречат результатам других исследователей, полученных при расчете деформации зубьев по параболе [1].

Заключение

Разработана и реализована методика нахождения изгибных деформаций зубьев зубчатых колес из композита. Программа позволяет не только вычислить коэффициент деформации с разным профилем зуба (эвольвентный, по клину и по параболе) и в характерных точках (таблица 2.1), но и рассчитать изгибное перемещение в заданных точках с учетом профиля зуба и свойств композиционного материала. Результаты расчетов могут быть предоставлены как в численном виде, так и в виде графиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Design and Manufacturing of Spur gear tooth: A New Approach Towards Composites* / TannujSrivastava, Sushovan Ghosh, Rohit Ghosh, RabindraNath Barman // IJET. – 2017. – Vol. 9, № 3. – P. 1551–1560.
2. *Chatterjee, S. A comparative analysis on two gear tooth materials for low speed and high torque transmission* / S. Chatterjee, K. Gupta // *Advances in Modelling and Analysis C.* – 2018. – Vol. 73, № 3. – P. 79–83.
3. *Gedam, P.V. Analysis of Spur Gear by using Composite Material* / P.V. Gedam, P.J. Bhadange // IJERA. – 2015. – Vol. 5, № 11. – P. 46–51.
4. *Pawar, P.B. Analysis of Composite Material Spur Gear under Static Loading Condition* / P.B. Pawar, Abhay A. Utpat // *Materials Today: Proceedings.* – 2015. – № 2. – P. 2968–2974.
5. *Mahendran, S. Design and Analysis of Composite Spur Gear* / S. Mahendran, K.M. Eazhil, L. Senthil Kumar // IJRSI. – 2014. – Vol. 1, № 6. – P. 42–53.
6. *Moya, J.L. A new approach for polyamide composite gear design* / J.L. Moya, A.S. Machado // *Wear.* – 2007. – Vol. 262. – P. 432–441.

7. *Можаровский, В.В.* Численная реализация методики по определению напряжений и перемещений в объемном теле применительно к техническим приложениям / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // *Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины.* – 2014. – № 6 (87). – С. 161–165.

8. *Старжинский, В.Е.* О влиянии формы зуба на изгибную деформацию зубьев эвольвентных цилиндрических зубчатых колес / В.Е. Старжинский, В.В. Можаровский // *Известия АН БССР. Сер. физ.-техн.* – 1974, № 4. – С. 118–123.

9. *Старжинский, В.Е.* Теоретическое и экспериментальное определение деформации зубьев пластмассовых колес / В.Е. Старжинский, В.В. Можаровский // *Известия АН БССР. Сер. физ.-техн.* – 1975, № 12. – С. 127–128.

10. *Старжинский, В.* Изгибные деформации зубьев пластмассовых зубчатых колес с модифицированными исходными контурами / В.Е. Старжинский, В.В. Можаровский // *Известия АН БССР. Сер. физ.-техн.* – 1975, № 2. – С. 128–129.

11. *Старжинский, В.Е.* Алгоритм определения изгибных деформаций зубьев зубчатых колес / В.Е. Старжинский, В.В. Можаровский, Т.А. Дорошкіна // *Известия АН БССР. Сер. физ.-техн.* – 1975. – № 1. – С. 129.

12. *Старжинский, В.Е.* О расчете параметров характерных точек зубчатого зацепления / В.Е. Старжинский, В.В. Можаровский // *ДАН АН БССР. Сер. физ.-техн.* – 1975. – № 12. – С. 1082–1084.

13. *Таблицы для определения координат характерных точек эвольвентного профиля и перемещений зуба зубчатого колеса под действием сил, приложенных в этих точках* / В.Е. Старжинский, Т.А. Дорошкіна, В.В. Можаровский, А.Г. Федорова // *Известия АН БССР. Сер. физ.-техн.* – 1977, № 4. – С. 117.

14. *Belyi, V.A.* On the determination of tooth deflection for plastic gear / V.A. Belyi. V.E. Starzhynskii, V.V. Mozharovskii // *Buletinul institutului politehnic DIN JASI.* – 1977, Т. XXIII, № 1–2. – P. 29–36.

15. *Numerical analysis of aluminum composite cylindrical gears* / Slobodan Garić [et al.] // *Cometa 2016: materials 3-rd international scientific conference, Jahorina, Republic of Srpska, B&H, 7–9 december 2016.* – University of East Sarajevo. – Jahorina, Republic of Srpska, 2016. – P. 147–154.

Поступила в редакцию 28.06.19.

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ σ -ЛОКАЛЬНЫХ И БЭРА-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

В.Г. Сафонов¹, И.Н. Сафонова¹, А.Н. Скиба²

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON ONE GENERALIZATION OF σ -LOCAL AND BAER-LOCAL FORMATIONS

V.G. Safonov¹, I.N. Safonova¹, A.N. Skiba²

¹Belarusian State University, Minsk

²F. Scorina Gomel State University

Все рассматриваемые в работе группы конечны, и G – конечная группа. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} . Тогда $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$; $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G \text{ содержит главный фактор } H/K, \text{ такой что } \sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$. Группа G называется: σ -*примарной*, если G – σ_i -группа для некоторого i ; σ -*разрешимой*, если каждый главный фактор из G является σ -примарным. Символ $R_\sigma(G)$ обозначает произведение всех нормальных σ -разрешимых подгрупп из G . Главный фактор H/K из G называется: σ -*центральным* (в G), если произведение $(H/K) \times (G/C_G(H/K))$ является σ -примарным; σ_i -*фактором*, если H/K – σ_i -группа. Мы говорим, что G : σ -*нильпотентна*, если каждый главный фактор из G σ -централен; *обобщенно $\{\sigma_i\}$ -нильпотентна*, если каждый главный σ_i -фактор из G σ -централен. Символ $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$ обозначает произведение всех нормальных обобщенно $\{\sigma_i\}$ -нильпотентных подгрупп из G . Мы называем произвольную функцию f вида $f: \sigma \cup \{\emptyset\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(\emptyset) \neq \emptyset$, *обобщенно формационной σ -функцией* и полагаем

$$BLF_\sigma(f) = (G \mid G/R_\sigma(G) \in f(\emptyset) \text{ и } G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma^+(G)).$$

Если для некоторой обобщенно формационной σ -функции f имеет место $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, то мы говорим, что класс \mathfrak{F} является *Бэра- σ -локальным* и f – *обобщенно σ -локальное определение \mathfrak{F}* . В данной работе описываются основные свойства, примеры и некоторые приложения Бэра- σ -локальных формаций.

Ключевые слова: конечная группа, обобщенно формационная σ -функция, Бэра- σ -локальная формация, обобщенно $\{\sigma_i\}$ -нильпотентная группа, произведение Гашиуца.

Throughout this paper, all groups are finite and G is a group. Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be some partition of the set of all primes \mathbb{P} . Then $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$; $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G \text{ has a chief factor } H/K \text{ such that } \sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$. The group G is said to be: σ -*primary* if G is σ_i -group for some i ; σ -*soluble* if every chief factor of G is σ -primary. The symbol $R_\sigma(G)$ denotes the product of all normal σ -soluble subgroups of G . The chief factor H/K of G is said to be: σ -*central* (in G) if $(H/K) \times (G/C_G(H/K))$ is σ -primary; a σ_i -*factor* if H/K is a σ_i -group. We say that G is: σ -*nilpotent* if every chief factor of G is σ -central; *generalized $\{\sigma_i\}$ -nilpotent* if every chief σ_i -factor of G is σ -central. The symbol $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$ denotes the product of all normal generalized $\{\sigma_i\}$ -nilpotent subgroups of G . We call any function f of the form $f: \sigma \cup \{\emptyset\} \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$, where $f(\emptyset) \neq \emptyset$, a *generalized formation σ -function* and we put

$$BLF_\sigma(f) = (G \mid G/R_\sigma(G) \in f(\emptyset) \text{ and } G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma^+(G)).$$

If for some generalized formation σ -function f we have $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, then we say that the class \mathfrak{F} is *Baer- σ -local* and f is a *generalized σ -local definition of \mathfrak{F}* . In this paper, we describe basic properties, examples, and some applications of Baer- σ -local formations.

Keywords: finite group, generalized formation σ -function, Baer- σ -local formation, generalized $\{\sigma_i\}$ -nilpotent group, Gaschütz product.

1 Base concept

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, \mathbb{P} is the

set of all primes, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ and if n is an integer, then the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n ; as usual,

$$\pi(G) = \pi(|G|),$$

the set of all primes dividing the order of the group G ; $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \pi(G)$.

Following [1], σ is some partition of \mathbb{P} , that is, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. By analogy with the notations $\pi(n)$ and $\pi(G)$, we write

$$\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$$

and $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ [2].

The group G is said to be [3]: σ -primary if G is a σ_i -group for some i ; σ -soluble if $G = 1$ or $G \neq 1$ and every chief factor of G is σ -primary.

The chief factor H/K of G is said to be: σ -central (in G) if

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$$

is σ -primary; a σ_i -factor if H/K is a σ_i -group. We say that G is: σ -nilpotent if every chief factor of G is σ -central [3]; $\{\sigma_i\}$ -nilpotent if every chief factor H/K of G with $\sigma(H/K) \cap \sigma_i \neq \emptyset$ is σ -central; generalized $\{\sigma_i\}$ -nilpotent if every chief σ_i -factor of G is σ -central. We use $F_{\{\sigma_i\}}(G)$ (respectively $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$) to denote the product of all normal $\{\sigma_i\}$ -nilpotent (respectively generalized $\{\sigma_i\}$ -nilpotent) subgroups of G .

In what follows, \mathfrak{F} is a class of groups containing all identity groups; $G^{\mathfrak{F}}$ denotes the intersection of all normal subgroups N of G with $G/N \in \mathfrak{F}$; $G_{\mathfrak{F}}$ is the product of all normal subgroups N of G with $N \in \mathfrak{F}$. The class \mathfrak{F} is said to be: a formation if for every group G every homomorphic image of $G/G^{\mathfrak{F}}$ belongs to \mathfrak{F} ; a Fitting class if for every group G every normal subgroup of $G_{\mathfrak{F}}$ belongs to \mathfrak{F} .

The formation \mathfrak{F} is called: saturated or local if $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$; solubly saturated or Baer-local if $G \in \mathfrak{F}$ whenever

$$G/\Phi(R(G)) \in \mathfrak{F},$$

where $R(G)$ is the radical of G , that is, the largest normal soluble subgroup of G ; (normally) hereditary if $H \in \mathfrak{F}$ whenever $H \leq G \in \mathfrak{F}$ (respectively whenever $H \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$). The study of the σ -properties of the group, that are, its properties depending on the choice of the partition σ of \mathbb{P} leads in some situations to the need to find and study appropriate σ -modifications of these concepts.

Recall that any function f of the form

$$f: \sigma \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$$

is called a formation σ -function [4] and we put

$$LF_{\sigma}(f) = (G \mid G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and}$$

$$G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

If for some formation σ -function f we have $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$, then we say, following [4], that the class \mathfrak{F} is σ -local and f is a σ -local definition of \mathfrak{F} .

The basic properties and various applications of σ -local formations were discussed in the papers [4]–[8].

In this paper, we introduce and study various classes of Baer- σ -local formations, which simultaneously generalize σ -local and Baer-local formations (see [9, Chapter IV] or [10, Chapter 3]). In particular, we get that the set of all Baer- σ -local formations containing all nilpotent groups forms a subsemigroup of the semigroup of all formations $G\mathfrak{G}$ [11, p. 67] and the set of all Baer- σ -local formations containing all σ -nilpotent groups is a right ideal in $G\mathfrak{G}$.

Let

$$\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G \text{ has a chief factor } H/K \text{ such that } \sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\},$$

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G) \text{ and } \sigma^+(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma^+(G).$$

We call any function f of the form

$$f: \sigma \cup \{\emptyset\} \rightarrow \{\text{formations of groups}\},$$

where $f(\emptyset) \neq \emptyset$, a generalized formation σ -function [12] and we put, following [12],

$$BLF_{\sigma}(f) = (G \mid G/R_{\sigma}(G) \in f(\emptyset) \text{ and}$$

$$G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma^+(G)).$$

The symbol $\text{Supp}(f)$ denotes the support of f , that is, the set of all σ_i such that $f(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Definition. If for some generalized formation σ -function f we have $\mathfrak{F} = BLF_{\sigma}(f)$, then we say that the class \mathfrak{F} is Baer- σ -local and f is a generalized σ -local definition of \mathfrak{F} .

2 Main results

We use \mathfrak{G}_{Π^+} to denote the class of all groups G with

$$\sigma^+(G) \subseteq \Pi \subseteq \sigma.$$

Note that $\mathfrak{G}_{\emptyset^+}$ is the class of all groups G with

$$\sigma^+(G) = \emptyset;$$

$\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$ denotes the class of all generalized $\{\sigma_i\}$ -nilpotent groups, \mathfrak{S}_{σ} is the class of all σ -soluble groups.

If \mathfrak{M} and \mathfrak{H} are non-empty formations, then $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ is the class of groups G such that for some normal subgroup N of G we have $G/N \in \mathfrak{H}$ and $N \in \mathfrak{M}$.

Our first two results are basic.

Proposition 2.1 [12, Proposition 1.2]. Let $\mathfrak{F} = BLF_{\sigma}(f)$ and $\Pi = \text{Supp}(f)$.

- (1) \mathfrak{F} is a non-empty formation and $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$.
- (2) $G \in \mathfrak{F}$ if and only if $G \in \mathfrak{S}_{\sigma}f(\emptyset)$ and $G \in \mathfrak{S}_{\{g\sigma_i\}}f(\sigma_i)$

for all $\sigma_i \in \sigma^+(G)$.

$$(3) \quad \mathfrak{F} = \begin{cases} \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\{g\sigma_i\}}f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{S}_{\sigma}f(\emptyset) \cap \mathfrak{S}_{\Pi^+} & \text{if } \Pi \neq \emptyset, \\ \mathfrak{S}_{\sigma}f(\emptyset) \cap \mathfrak{S}_{\Pi^+} & \text{if } \Pi = \emptyset. \end{cases}$$

Note that the class $\mathfrak{S}_{\{g\sigma_i\}}$ is a Fitting formation, so the product $\mathfrak{S}_{\{g\sigma_i\}}f(\sigma_i)$ is also a Fitting formation for all

$$\sigma_i \in \Pi = \sigma^+(\mathfrak{F}).$$

Hence from Proposition 2.1 we get the following useful fact.

Corollary 2.2. Let $\mathfrak{F} = BLF_{\sigma}(f)$ be a Baer- σ -local formation. If $f(a)$ is normally hereditary (respectively a Fitting formation) for all $a \in \sigma \cup \{\emptyset\}$, then \mathfrak{F} is also normally hereditary (respectively a Fitting formation).

Now we show that every Baer- σ -local formation possesses a generalized σ -local definition for which the inverse of this corollary holds.

A (generalized) formation σ -function f is said to be: *integrated* if

$$f(\sigma_i) \subseteq LF_{\sigma}(f)$$

for all i (if, respectively, $f(a) \subseteq BLF_{\sigma}(f)$ for all $a \in \sigma \cup \{\emptyset\}$); *full* if

$$f(\sigma_i) = \mathfrak{S}_{\sigma_i}f(\sigma_i)$$

for all i (if, respectively, $f(\emptyset) = BLF_{\sigma}(f)$ and $f(\sigma_i) = \mathfrak{S}_{\sigma_i}f(\sigma_i)$ for all i).

Theorem 2.3 [12, Theorem 1.4]. Let \mathfrak{F} be a Baer- σ -local formation. Then \mathfrak{F} has a unique full integrated generalized σ -local definition F . Moreover,

- (i) $F(\sigma_i) = \mathfrak{S}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ for every generalized σ -local definition f of \mathfrak{F} and for all $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F})$, and
- (ii) If \mathfrak{F} is normally hereditary (respectively a Fitting formation), then $F(a)$ is normally hereditary (respectively a Fitting formation) for all $a \in \sigma \cup \{\emptyset\}$.

If F is a full integrated σ -function and $\mathfrak{F} = BLF_{\sigma}(F)$ (respectively $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(F)$), then we say that F is the *canonical generalized σ -local definition* (respectively *canonical σ -local definition*) of \mathfrak{F} .

If f and g be generalized formation σ -functions such that $f(a) \subseteq g(a)$ for all $a \in \sigma \cup \{\emptyset\}$, then we write $f \leq g$. It is clear that if $f \leq g$, then

$$BLF_{\sigma}(f) \subseteq BLF_{\sigma}(g).$$

The second important property of the canonical generalized σ -local definition of a Baer- σ -local formation is associated with the following fact, which is also a corollary of Proposition 2.1.

Corollary 2.4. Let $\mathfrak{F}_i = BLF_{\sigma}(F_i)$, where F_i is the canonical generalized σ -local definition of \mathfrak{F}_i , $i = 1, 2$. Then $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ if and only if $F_1 \leq F_2$.

Theorem 2.5 [12, Theorem 1.6]. Let $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$ be a σ -local formation. Then $\mathfrak{F} = BLF_{\sigma}(g)$, where $g(\emptyset) = \mathfrak{F}$ and $g(\sigma_i) = f(\sigma_i)$ for all i . Moreover, if h is any integer generalized σ -local definition of \mathfrak{F} , then $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(h)$, where h is the restriction of h on σ .

In view of Theorem 2.5, we get from Theorem 2.3 the following known results.

Corollary 2.6 [7, Proposition 1.6]. Every σ -local formation has the unique canonical σ -local definition.

In the case when $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ we get from Theorem 2.3 and Corollary 2.6 the following results.

Corollary 2.7 [1, Chapter I, Theorem 3.2]. Every Baer-local formation has the unique canonical generalized local definition.

Corollary 2.8 [1, Chapter I, Theorem 3.3]. Every local formation has the unique canonical local definition.

Corollary 2.9 [1, Chapter I, Theorem 4.7 and 4.10]. Let \mathfrak{F} be the generalized local definition of Baer-local formation \mathfrak{F} . If \mathfrak{F} is a Fitting formation, then $F(p)$ is a Fitting formation for all primes p .

Before continuing, consider a few examples.

Example 2.10. (i) In the classical case, when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ (we use here the notation in [2]): \mathfrak{F} is a local formation if and only if it is a σ^1 -local formation by [13, Chapter VI, Hilfssatz 7.4] (see also [9, Chapter IV, Theorem 3.2]) and \mathfrak{F} is a Baer-local formation if and only if it is a Baer- σ^1 -local formation by the results in [14].

(ii) Every Baer- σ -local formation \mathfrak{F} which contains only σ -soluble groups is σ -local. Indeed, if $\mathfrak{F} = BLF_{\sigma}(f)$ and h is a formation σ -function such that $h(\sigma_i) = f(\sigma_i)$ for all i , then $G \in \mathfrak{F}$ if and only if $G \in LF_{\sigma}(h)$ since for every σ -soluble group G we have $F_{\{\sigma_i\}}(G) = F_{\{g\sigma_i\}}(G)$ for every $\sigma_i \in \sigma(G)$.

(iii) The group G is called σ -semisimple [15] if either $G = 1$ or $G = A_1 \times \dots \times A_t$ is the direct product of simple non- σ -primary groups A_1, \dots, A_t . We use \mathfrak{M}_{σ} to denote the class of all σ -semisimple

groups. Let $f(\emptyset) = \mathfrak{M}_\sigma$ and $f(\sigma_i) = \emptyset$ for all i . Then

$$BLF_\sigma(f) = \mathfrak{S}_\sigma \mathfrak{M}_\sigma \cap \mathfrak{G}_{\sigma^+} = \mathfrak{M}_\sigma$$

by Proposition 2.1 (3). Hence \mathfrak{M}_σ is a Baer- σ -local formation.

(iv) The group G is: σ -quasinilpotent [16] if it has a normal subgroup Z such that G/Z is σ -semisimple and every chief factor of G below Z is σ -central in G ; *generalized σ -nilpotent* if every σ -primary chief factor of G is σ -central in G . We use \mathfrak{N}_σ^* and $\mathfrak{N}_{g\sigma}$ to denote the class of all σ -quasinilpotent groups and the class of all generalized σ -nilpotent groups, respectively.

L.A. Shemetkov proved [17] that the class of all quasinilpotent groups $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_{\sigma_i}^*$ is a Baer-local formation. Now we show that the class \mathfrak{N}_σ^* is a Baer- σ -local formation for each partition σ of \mathbb{P} . Indeed, let f be a generalized formation σ -function such that $f(\emptyset) = \mathfrak{M}_\sigma$ is the class of all σ -semisimple groups and $f(\sigma_i) = \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ for all i . It is clear that $\sigma^+(\mathfrak{N}_\sigma^*) = \sigma$ and so, by Proposition 2.1 (3), we have

$$\begin{aligned} & \left(\bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\{\sigma_i\}} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \right) \cap \mathfrak{S}_\sigma \mathfrak{M}_\sigma \cap \mathfrak{G}_{\sigma^+} = \\ & = \left(\bigcap_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\{\sigma_i\}} \right) \cap \mathfrak{S}_\sigma \mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{N}_{g\sigma} \cap \mathfrak{S}_\sigma \mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{N}_\sigma^* \end{aligned}$$

since $\mathfrak{G}_{\{\sigma_i\}} \mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{G}_{\{\sigma_i\}}$. Therefore the class \mathfrak{N}_σ^* is a Baer- σ -local formation.

The Gaschütz product $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ of the formations \mathfrak{M} and \mathfrak{H} is defined as follows: $G \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ if and only if $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$ (by definition $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = \emptyset$ in the case when $\mathfrak{H} = \emptyset$). It is easy to verify that $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ is a formation, and if \mathfrak{M} is normally hereditary, then $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$. Moreover, for every three formations \mathfrak{M} , \mathfrak{H} and \mathfrak{F} we have

$$(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F})$$

(see [11, Chapter II] or [9, Chapter IV]). Therefore the set $G\mathfrak{G}$ [11, p. 67], of all formations, forms a semigroup with respect to the operation \circ .

Now we give the conditions under which the Gaschütz product of two formations is Baer- σ -local.

Theorem 2.11 [12, Theorem 1.12]. *Let $\mathfrak{M} = BLF_\sigma(m)$ and $\mathfrak{H} = BLF_\sigma(h)$, where m and h are integrated. Suppose that \mathfrak{M} contains each p -group for all $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Then $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = BLF_\sigma(f)$, where*

$$f(a) = \begin{cases} m(\sigma_i) \circ \mathfrak{H} & \text{if } a = \sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{M}), \\ h(\sigma_i) & \text{if } a = \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{M}), \\ m(\emptyset) \circ \mathfrak{H} & \text{if } a = \emptyset. \end{cases}$$

As a first application of this result, we get the following

Theorem 2.12 [12, Theorem 1.13]. *The set of all Baer- σ -local formations \mathfrak{F} containing all nilpotent π -groups, where $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, forms a subgroup of the semigroup of all formations $G\mathfrak{G}$.*

From Theorem 2.11 we get also the following known result.

Corollary 2.13 [11, Chapter 2, Theorem 7.9]. *The Gaschütz product $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ of any two Baer-local formations \mathfrak{M} and \mathfrak{H} , where \mathfrak{M} contains each p -group for all $p \in \pi(\mathfrak{M})$, is also a Baer-local formation.*

Theorem 2.14 [12, Theorem 1.15]. *Let $\mathfrak{M} = BLF_\sigma(m)$ and let \mathfrak{H} be a non-empty formation with $\sigma^+(\mathfrak{H}) \subseteq \sigma^+(\mathfrak{M})$, where m is integrated. Then*

$$\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = BLF_\sigma(f),$$

where

$$f(a) = \begin{cases} m(\sigma_i) \circ \mathfrak{H} & \text{if } a = \sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{M}), \\ \emptyset & \text{if } a = \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{M}), \\ m(\emptyset) \circ \mathfrak{H} & \text{if } a = \emptyset. \end{cases}$$

From Theorem 2.14 we get the following

Theorem 2.15 [12, Theorem 1.16]. *The set of all Baer- σ -local formations containing all σ -nilpotent groups forms a right ideal in the semigroup of all formations $G\mathfrak{G}$.*

From Theorem 2.14 we get also the following known result.

Corollary 2.16 [11, Chapter 2, Theorem 7.10]. *The Gaschütz product $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ of any two formations \mathfrak{M} and \mathfrak{H} , where \mathfrak{M} is a Baer-local formation containing all nilpotent groups, is also a Baer-local formation.*

REFERENCES

1. Shemetkov, L.A. Formations of Finite Groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, 1978.
2. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.
3. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
4. Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.
5. Chi, Z. On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – P. 85–88.
6. Chi, Z. On n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 1–10.

7. Chi, Z. On Σ_t^σ -closed classes of finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Ukrainian Math. J. – 2019. – Vol. 70, № 2. – P. 1707–1716.
8. Chi, Z. A generalization of Kramer's theory / Z. Chi, A.N. Skiba // Acta Math. Hungar. – Vol. 158, № 1. – P. 87–99.
9. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
10. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006.
11. Shemetkov, L.A. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow: Nauka, 1989.
12. Safonov, V.G. On Baer- σ -local formations of finite groups / V.G. Safonov, I.N. Safonova, A.N. Skiba. – Preprint, 2019.
13. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.
14. Skiba, A.N. Multiply \mathcal{L} -composition formations of finite groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainian Math. J. – 2000. – Vol. 52, № 6. – P. 898–913.
15. Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.
16. Hu, B. On the generalized σ -Fitting subgroup of finite groups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 2019. – Vol. 141. – P. 19–36.
17. Shemetkov, L.A. Composition formations and radicals of finite groups / L.A. Shemetkov // Ukrainian Math. J. – 1988. – Vol. 40, № 3. – P. 369–375.

Поступила в редакцию 01.11.19.

УДК 512.542

ЦЕПИ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В.Н. Тютянов¹, А.А. Трофимук²

¹Международный университет МИТСО, Гомель

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

CHAINS IN FINITE GROUPS

V.N. Tyutyaynov¹, A.A. Trofimuk²

¹International University MITSO, Gomel

²F. Scorina Gomel State University

Пусть \mathbb{N} и \mathbb{P} – множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Подгруппа H называется \mathbb{P}^∞ -субнормальной подгруппой группы G ($H \mathbb{P}^\infty$ -sn G), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^\infty$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Здесь $\mathbb{P}^\infty = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. В настоящей работе перечислены конечные простые неабелевы группы G со свойством $1 \mathbb{P}^\infty$ -sn G .

Ключевые слова: конечная группа, простая неабелева группа, \mathbb{P}^∞ -субнормальная подгруппа.

Let \mathbb{N} and \mathbb{P} be the set of all positive integers and all primes, respectively. A subgroup H of G is called \mathbb{P}^∞ -subnormal in G ($H \mathbb{P}^\infty$ -sn G) if there is a chain $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ such that $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^\infty$ for every $i = 1, \dots, n$, where $\mathbb{P}^\infty = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. We obtained finite simple non-abelian groups G with $1 \mathbb{P}^\infty$ -sn G .

Keywords: finite group, simple non-abelian group, \mathbb{P}^∞ -subnormal subgroup.

Введение

Будем рассматривать только конечные группы. В работе [1] было введено следующее понятие.

Определение. Подгруппа H группы G называется \mathbb{P} -субнормальной в G (обозначается $H \mathbb{P}$ -sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \dots, n$.

Имеется достаточно много работ, где изучались конечные группы, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является \mathbb{P} -субнормальной в группе. Отметим работу Л.С. Казарина [2, теорема 6], в которой он перечислил простые неабелевы композиционные факторы конечных групп G , для которых $1 \mathbb{P}$ -sn G . Данный результат был уточнен в [3, теорема 3.2]. В этой работе также были указаны некоторые цепи подгрупп простых индексов для простых неабелевых групп.

В дальнейшем понятие \mathbb{P} -субнормальности неоднократно обобщалось в различных направлениях. В работе [4] было введено следующее понятие. Пусть \mathbb{N} и \mathbb{P} – множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Для фиксированного $t \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathbb{P}^t = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, k \leq t\},$$

обозначим

$$\mathbb{P}^\infty = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Подгруппа H называется \mathbb{P}^t (\mathbb{P}^∞)-субнормальной подгруппой группы G , если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^t$ (\mathbb{P}^∞) для всех $i = 1, \dots, n$. При этом используется обозначение $H \mathbb{P}^t$ (\mathbb{P}^∞)-sn G .

Отметим, что всякая \mathbb{P}^t -субнормальная подгруппа будет \mathbb{P}^∞ -субнормальной. При $t = 1$ получим понятие \mathbb{P} -субнормальной подгруппы.

В настоящей работе мы перечислим простые неабелевы группы G , в которых $1 \mathbb{P}^\infty$ -sn G .

Теорема. Пусть G – простая неабелева группа и $1 \mathbb{P}^\infty$ -sn G . Тогда $G \in \{SL_3(3), SL_3(5), PSL_2(7), PSL_2(11), SL_2(2^n)\}$, где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма, $SL_2(8), PSL_2(r)$, где $r = 2^m - 1$ – простое число Мерсенна, $PSU_4(2), PSL_3(8)\}$.

1 Вспомогательные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти, например, в [5], [6]. Нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1.1 [7, теорема 1]. Пусть G – простая неабелева группа, $H < G$ и $|G:H| = p^m$, где p – простое число. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

- (a) $G \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$, где $n = p^m$;
- (b) $G \cong PSL_r(q)$, H – параболическая подгруппа в G , $|G:H| = \frac{q^r - 1}{q - 1} = p^m$ и r – простое

число;

- (c) $G \cong PSL_2(11)$, $H \cong A_5$;
- (d) $G \cong M_{23}$, $H \cong M_{22}$ или $G \cong M_{11}$, $H \cong M_{10}$;
- (e) $G \cong PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$, H – параболическая подгруппа индекса 27.

В частности, только группа $PSL_2(7)$ имеет подгруппы различных примарных индексов.

Следующий результат хорошо известен.

Лемма 1.2. Пусть p и q – простые числа и $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $p^m = q^n + 1$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

- (1) $q = 2, p = 3, n = 3, m = 2$;
- (2) $q = 2, m = 1$ и $p = q^n + 1$ – простое число Ферма, где n – степень числа 2;
- (3) $p = 2, n = 1$ и $q = p^m - 1$ – простое число Мерсенна, где m – простое число.

Лемма 1.3 [3, теорема 3.2]. Пусть G – простая неабелева группа и $1 \mathbb{P}$ - sn G . Тогда $G \in \{SL_3(3), SL_3(5), PSL_2(7), PSL_2(11), SL_2(2^n)\}$, где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма.

Лемма 1.4 [4, лемма 4]. Пусть H – подгруппа группы G , N – нормальная в G подгруппа и $t \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо следующее утверждение. Если $H \mathbb{P}^t(\mathbb{P}^\infty)$ - sn G , то $(H \cap N) \mathbb{P}^t(\mathbb{P}^\infty)$ - sn N и $HN/N \mathbb{P}^t(\mathbb{P}^\infty)$ - sn G/N .

2 Доказательство теоремы

Так как $1 \mathbb{P}^\infty$ - sn G , то группа G обладает собственной подгруппой примарного индекса. По лемме 1.1 имеет место один из следующих случаев.

- (I) $G \cong A_{p^m}$, где p – простое число и $p^m \geq 5$.

Подгруппы индекса p^m в A_{p^m} это в точности группы $A_{p^{m-1}}$. Если $A_{p^{m-1}}$ разрешима, то $G \cong A_5 \cong SL_2(2^2)$ и по лемме 1.3 $1 \mathbb{P}$ - sn G , а значит $1 \mathbb{P}^\infty$ - sn G . Следовательно, $A_{p^{m-1}}$ – простая неабелева группа и $1 \mathbb{P}^\infty$ - sn $A_{p^{m-1}}$. По лемме 1.1 $p^m - 1 = q^n \geq 5$, где q – простое число. Отсюда $p^m = q^n + 1 \geq 6$. По лемме 1.2 имеет место один из следующих случаев.

- (1) $q = 2, p = 3, n = 3, m = 2$.

В этом случае $G \cong A_9$. Группа A_9 содержит подгруппу A_8 индекса 3^2 , группа A_8 содержит подгруппу A_7 индекса 2^3 в A_8 , группа A_7 содержит подгруппу A_6 индекса 7 в A_7 . Однако A_6 не имеет собственных подгрупп примарных индексов. Таким образом, в случае (1) 1 не является \mathbb{P}^∞ -субнормальной в G .

- (2) $q = 2, m = 1$ и $p = 2^{2^l} + 1$ – простое число Ферма.

Отметим, что $l \geq 2$. Группа $A_p = A_{2^{2^l} + 1}$ содержит подгруппу $A_{2^{2^l}}$ простого индекса p . Так как $l \geq 2$, то группа $A_{2^{2^l}}$ должна содержать простую неабелеву подгруппу $A_{2^{2^l-1}}$ индекса 2^{2^l} в $A_{2^{2^l}}$ и $1 \mathbb{P}^\infty$ - sn $A_{2^{2^l-1}}$. По лемме 1.1 получим, что $2^{2^l} - 1 = q^t$ или $2^{2^l} = q^t + 1$, где q – простое число. Из леммы 1.2 следует, что $t = 1$ и $q = 2^{2^l} - 1$ – простое число Мерсенна. В частности, 2^l – простое число. Так как $l \geq 2$, то это невозможно.

- (3) $p = 2, n = 1$ и $q = p^m - 1$ – простое число Мерсенна. В частности, m – простое число.

В этом случае $G \cong A_{2^m}$, $m \geq 3$. В G имеется подгруппа $A_{2^{m-1}}$ индекса 2^m . Так как $m \geq 3$, то $A_{2^{m-1}}$ – простая неабелева группа и $A_{2^{m-1}} = A_q$, где $q \geq 7$. Группа A_q содержит подгруппу A_{q-1} и $1 \mathbb{P}^\infty$ - sn A_{q-1} . Поэтому $A_{q-1} = A_{2^{2^l}}$, где $2^l \geq 6$. Следовательно, $2^l \geq 8$ и $l \geq 3$. Имеем, что $q = 2^m - 1$ и $q - 1 = 2^l$. Отсюда следует, что $2^m - 2^l = 2$ или $2^l(2^{m-l} - 1) = 2$. Так как $l \geq 3$, то случай (3) невозможен.

Таким образом, если G – знакопеременная группа и $1 \mathbb{P}^\infty$ - sn G , то $G \cong A_5$.

- (II) $G \cong PSL_2(11)$.

Из леммы 1.3 следует, что $1 \mathbb{P}^\infty$ - sn G .

- (III) $G \cong M_{11}$.

Группа M_{11} содержит подгруппу A_6 индекса 11. Следовательно, $1 \mathbb{P}^\infty$ - sn A_6 . Из пункта 1 леммы 1.1 следует, что это невозможно.

- (IV) $G \cong M_{23}$.

Подгруппой индекса 23 в M_{23} является M_{22} . Следовательно, $1 \mathbb{P}^\infty$ - sn M_{22} , поэтому M_{22} должна обладать собственной подгруппой примарного индекса, что невозможно по лемме 1.1.

- (V) $G \cong PSU_4(2)$.

Группа $PSU_4(2)$ обладает максимальной параболической подгруппой $2^4 : A_5$ индекса 3^3 .

По лемме 1.1 $1 \mathbb{P}^{-sn} 2^4 : A_5$. Таким образом, $1 \mathbb{P}^{-sn} PSU_4(2)$.

(VI) $G \cong PSL_r(q)$, где r – простое число, $q = s^n$ и s – простое число.

Группа $PSL_r(q)$ содержит собственную подгруппу индекса p^m , если $(q^r - 1)/(q - 1) = p^m$.

Пусть сначала $r = 2$ и $G \cong PSL_2(q)$. Рассмотрим два случая.

(1) $G \cong SL_2(2^n)$. По лемме 1.1 $2^n + 1 = p^m$, где p – нечетное простое число. По лемме 1.2 имеет место одна из следующих возможностей.

(a) $p = 3, n = 3, m = 2$ и $G \cong SL_2(2^3)$. Группа $SL_2(8)$ имеет подгруппу $2^3 : 7$ индекса 3^2 . Поэтому $1 \mathbb{P}^{-sn} SL_2(8)$.

(b) $p = 2^n + 1$ – простое число Ферма. По лемме 1.3 $1 \mathbb{P}^{-sn} G$.

(2) $G \cong PSL_2(s^n)$, где s – нечетное простое число. По лемме 1.1 $s^n + 1 = 2^m$. Из леммы 1.2 следует, что $n = 1$ и $s = 2^m - 1$ – простое число Мерсенна. Группа $PSL_2(s)$ имеет подгруппу Бореля $s : (\frac{s-1}{2})$ индекса 2^m в $PSL_2(s)$. Таким образом, $1 \mathbb{P}^{-sn} G$.

Пусть $r = 3$. Параболическая подгруппа P группы G имеет разложение Леви $P = O_s(P)LH$, где H – подгруппа Картана, $L \cong A_1(q)$. Если $s = 2$, то $G \cong PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$ и, очевидно, что $1 \mathbb{P}^{-sn} G$. Если $s = 3$, то $G \cong SL_3(3)$ и $1 \mathbb{P}^{-sn} G$. Поэтому будем считать, что $s \notin \{2, 3\}$ и подгруппа P содержит единственный простой неабелев композиционный фактор, изоморфный $PSL_2(q)$. Из леммы 1.4 следует, что $1 \mathbb{P}^{-sn} PSL_2(q)$. Следовательно, $PSL_2(q) \in \{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_2(8), PSL_2(r)\}$, где $r = 2^m - 1$ – простое число Мерсенна, $SL_2(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма, $PSL_2(5) \cong SL_2(2^2)$.

Каждому простому фактору соответствуют группы: $PSL_3(7)$, $PSL_3(11)$, $PSL_3(8)$, $PSL_3(r)$, где $r = 2^m - 1$ – простое число Мерсенна, $PSL_3(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма, $PSL_3(5)$. Из леммы 1.1 следует, что во всех случаях $(q^3 - 1)/(q - 1) = q^2 + q + 1$ – степень простого числа. Рассмотрим все варианты.

(a) $G \cong PSL_3(7)$. Тогда $7^2 + 7 + 1 = 57 = 3 \cdot 19$ – не степень простого числа.

(b) $G \cong PSL_3(11)$. Тогда $11^2 + 11 + 1 = 133 = 7 \cdot 19$ – не степень простого числа.

(c) $G \cong PSL_3(8)$. Тогда $8^2 + 8 + 1 = 73$ – простое число. Группа $PSL_3(8)$ содержит параболическую

подгруппу $2^6 : (7 \times PSL_2(8))$ индекса 73. Поэтому $1 \mathbb{P}^{-sn} PSL_3(8)$.

(d) $G \cong PSL_3(r)$, где $r = 2^m - 1$ – простое число Мерсенна и $r^2 + r + 1$ степень простого числа. Отметим, что m – простое число. Если $m = 2$, то $G \cong PSL_3(3)$ и $1 \mathbb{P}^{-sn} G$. Поэтому будем считать, что m – нечетное простое число. Имеем

$$r^2 + r + 1 = (2^m - 1)^2 + 2^m - 1 + 1 = 2^{2m} - 2^m + 1.$$

Покажем методом математической индукции, что числа вида $2^{2u} - 2^u + 1$, где u – нечетное число, делятся на 3. Если $u = 3$, то $2^{2 \cdot 3} - 2^3 + 1 = 3 \cdot 19$ делится на 3. Пусть $2^{2u} - 2^u + 1$ делится на 3. Тогда

$$\begin{aligned} 2^{2(u+2)} - 2^{u+2} + 1 &= 16 \cdot 2^{2u} - 4 \cdot 2^u + 1 = \\ &= 16 \cdot 2^{2u} - 16 \cdot 2^u + 12 \cdot 2^u + 16 - 15 = \\ &= 16(2^{2u} - 2^u + 1) + 12 \cdot 2^u - 15 = \\ &= 16(2^{2u} - 2^u + 1) + 3(4 \cdot 2^u - 5) \end{aligned}$$

делится на 3.

Следовательно, $2^{2m} - 2^m + 1 = 3^k$. Отсюда следует, что $2^m(2^m - 1) + 1 = 3^k$ или $2^m \cdot r = 3^k - 1$, где $m \geq 3$. Имеет место равенство:

$$\begin{aligned} 3^k - 1 &= (3 - 1)(3^{k-1} + 3^{k-2} + \dots + 3^1 + 3^0) = \\ &= 2(3^{k-1} + 3^{k-2} + \dots + 3^1 + 3^0). \end{aligned}$$

Если k нечетное число, то $3^{k-1} + 3^{k-2} + \dots + 3^1 + 3^0$ также нечетное число. Так как $m \geq 3$, то это невозможно. Таким образом, $k = 2l$. Поэтому

$$2^m \cdot r = (3^l - 1)(3^l + 1).$$

Очевидно, что $(3^l - 1, 3^l + 1) = 2$. Значит одно из чисел $3^l - 1$ или $3^l + 1$ является степенью числа 2.

Пусть $3^l - 1 = 2^f$ или $3^l = 2^f + 1$. По лемме 1.2 или $f = 3, l = 2$, или $l = f = 1$. В первом случае $2^m \cdot r = (3^2 - 1)(3^2 + 1) = 2^4 \cdot 5$. Так как m – простое число, то это невозможно. Во втором случае $2^m \cdot r = (3 - 1)(3 + 1) = 2^3$, что невозможно.

Пусть $3^l + 1 = 2^f$. По лемме 1.2 $l = 1$. Поэтому $2^m \cdot r = (3 - 1)(3 + 1) = 2^3$, что невозможно.

(e) $G \cong PSL_3(2^{2^k})$, где $2^{2^k} + 1 = p$ – простое число Ферма и $2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1$ – степень простого числа. При $k = 0$ группа $G \cong PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$ и $1 \mathbb{P}^{-sn} G$. Поэтому будем считать, что $k \geq 1$.

Покажем методом математической индукции, что $2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1$ делится на 3. При $k = 1$ получим $2^{2^2} + 2^{2^1} + 1 = 21$ делится на 3. Пусть $2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1$ делится на 3. Имеем

$$\begin{aligned} 2^{2^{k+2}} + 2^{2^{k+1}} + 1 &= 2^{2^{k+2}} + 2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} - 2^{2^k} + 1 = \\ &= (2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1) + 2^{2^{k+2}} - 2^{2^k} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1) + (2^{2^k})^4 - 2^{2^k} = \\
&= (2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1) + 2^{2^k} (2^{2^k} - 1)((2^{2^k})^2 + 2^{2^k} + 1) = \\
&= (2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1)(1 + 2^{2^k} (2^{2^k} - 1)).
\end{aligned}$$

Следовательно, по индукции $2^{2^{k+2}} + 2^{2^{k+1}} + 1$ делится на 3.

Таким образом, $2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1 = 3^m$. Отсюда получим, что $2^{2^k} (2^{2^k} + 1) + 1 = 3^m$ или $2^{2^k} \cdot p + 1 = 3^m$.

Значит $2^{2^k} \cdot p = 3^m - 1$, где $k \geq 1$ и $p \geq 5$.

Если m – нечетное число, то

$$\begin{aligned}
3^m - 1 &= (3 - 1)(3^{m-1} + 3^{m-2} + \dots + 3^1 + 3^0) = \\
&= 2(3^{m-1} + 3^{m-2} + \dots + 3^1 + 3^0),
\end{aligned}$$

где $3^{m-1} + 3^{m-2} + \dots + 3^1 + 3^0$ – нечетное число. Так как $k \geq 1$, то это невозможно. Следовательно, $m = 2l$ и $2^{2^k} \cdot p = (3^l - 1)(3^l + 1)$. Поскольку $(3^l - 1, 3^l + 1) = 2$, то одно из чисел $3^l - 1$ или $3^l + 1$ – степень числа 2.

Пусть $3^l - 1 = 2^f$ или $3^l = 2^f + 1$. По лемме 1.2 или $l = 2$, $f = 3$, или $l = f = 1$. В первом случае $2^{2^k} \cdot p = (3^2 - 1)(3^2 + 1) = 2^{2^2} \cdot 5$. Поэтому $k = 2$ и $G \cong PSL_3(16)$. Однако $16^2 + 16 + 1 = 3 \cdot 7 \cdot 13$ не степень простого числа. Во втором случае $2^{2^k} \cdot p = (3^1 - 1)(3^1 + 1) = 2^3$, что невозможно.

Пусть $3^l + 1 = 2^f$. По лемме 1.2 $l = 1$ и $2^{2^k} \cdot p = (3^1 - 1)(3^1 + 1) = 2^3$, что невозможно.

(f) $G \cong PSL_3(5)$. По лемме 1.3 1 \mathbb{P} -sn G .

Таким образом, $r \geq 5$. В этом случае параболическая подгруппа P группы G имеет

разложение Леви $P = O_s(P)LH$ и подгруппа P содержит единственный простой неабелев композиционный фактор, изоморфный $PSL_{r-1}(q)$. Поскольку $r-1$ не является простым числом, то случай $r \geq 5$ невозможен. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
2. Казарин, Л.С. О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.
3. Васильев, А.Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.
4. Тютянов, В.Н. Факторизации конечных групп r -разрешимыми подгруппами с заданными вложениями / В.Н. Тютянов, В.Н. Княгина // Укр. матем. журнал. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1431–1435.
5. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York: Harper and Row, 1968. – 519 p.
6. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.
7. Guralnick, R.M. Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81. – P. 304–311.

Поступила в редакцию 04.07.19.

ПОВЫШЕНИЕ ЗАЩИЩЕННОСТИ СТЕГОВЛОЖЕНИЯ ЗА СЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ РЕЖИМА ВСТРАИВАНИЯ ДАННЫХ

Е.А. Дрыбин¹, В.С. Садов¹, О.М. Демиденко²

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

IMPROVEMENT OF STEGO SECURITY BY CHANGING THE DATA INTEGRATION MODE

Y.A. Drybin¹, V.S. Sadov¹, O.M. Demidenko²

¹Belarusian State University, Minsk

²F. Scorina Gomel State University

Предложены различные режимы сокрытия информации и проанализировано их влияние на основные характеристики стеганографического канала связи на примере метода сетевой стеганографии с использованием сообщений протокола HTTP в качестве контейнера. Метод пространственного распределения данных по элементам контейнера позволяет повысить защищенность секретного сообщения средствами стеганографии.

Ключевые слова: стеганография, компьютерные сети.

Various modes of information hiding are proposed. Their influence on the main characteristics of the steganographic communication channel using the network steganography method based on HTTP as an example is analyzed. The method of spatial distribution of data among container elements makes it possible to increase the security of a secret message by means of steganography.

Keywords: steganography, computer networks.

Введение

Обеспечение конфиденциальности передаваемых сообщений является одной из наиболее актуальных задач современных информационных технологий. Эта задача, как правило, решается с использованием криптографических методов, основанных на сложных математических задачах (для этих задач не опубликовано эффективных алгоритмов решения). Однако наибольшей надежности в задачах защиты информации можно достичь методами стеганографии, скрывая сам факт передачи сообщения. Кроме того, как будет показано в настоящей статье, стеганография позволяет одновременно с сокрытием вложения и повысить его защищенность, не прибегая при этом к криптографии и шифрованию данных, использование которых может быть ограничено на законодательном уровне.

1 Различные режимы сокрытия данных

Рассмотрим возможные режимы сокрытия информации на примере стеганографического метода с использованием полей механизма хеширования сообщений HTTP [1].

Встраивание информации в значение заголовка ETag или If-Non-Match производится следующим образом. Сначала в разряды тега, которым соответствуют единичные биты фрагмента маски внедрения, помещаются биты секретного сообщения, как это изображено на рисунке 1.1.

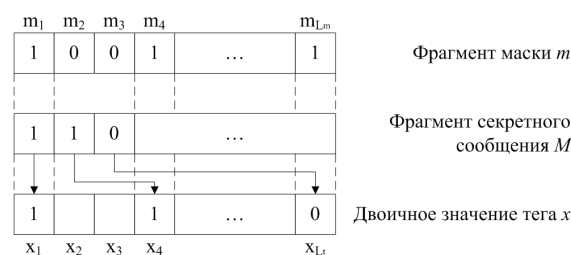


Рисунок 1.1 – Встраивание бит секретного сообщения в значение тега

После этого в разряды тега, которым соответствуют нулевые биты фрагмента маски внедрения, помещают произвольные биты таким образом, чтобы добиться их равномерного распределения. Полученное двоичное значение тега преобразуется в шестнадцатеричный вид и встраивается в виде строки в значение заголовка ETag или If-Non-Match очередного сообщения HTTP для передачи по сети.

Наиболее примитивный режим сокрытия данных обеспечивается при использовании неизменной маски внедрения. В этом режиме маска внедрения генерируется один раз и применяется ко всем сообщениям в рамках всего процесса обмена информацией. Маска внедрения в этом случае определяется следующим выражением:

$$m = f(k),$$

где m – маска внедрения;

k – стеганографический ключ;
 f – функция получения последовательности бит.

Мощность маски внедрения $|m|$ равна стеганографической емкости единицы контейнера и равна длине тега:

$$|m| = L_s = L_t,$$

где L_s – стеганографическая емкость единицы контейнера в битах;

L_t – длина уникального идентификатора ресурса в битах.

В данном режиме используется одинаковая маска внедрения для каждого сообщения, а, значит, преимущество в защищенности от применения сокрытия зависит непосредственно от длины маски внедрения и составляет:

$$\frac{P_s}{P_0} = 2^{|m|}.$$

Длина маски в случае внедрения информации в поле значения тега и использования уникального идентификатора ресурса длиной $L_t = 128$ бит составит $|m| = L_t = 128$ бит. Таким образом, для успешного проведения атаки исчерпывающего поиска маски внедрения потребуются выполнить

$$N = 2^{|m|} = 2^{128} = 3,4 \cdot 10^{38}$$

переборов (оценка сверху, т. е. неблагоприятный исход с точки зрения атакующего). Сложность вскрытия секретного ключа в этом случае сопоставима с алгоритмом шифрования 2DES (который требует выполнения 2^{112} операций), что является нетривиальной задачей, однако, представляется возможным.

В качестве логического развития режима сокрытия с неизменной маской внедрения можно предложить режим с расширенной неизменной маской. В этом режиме маска внедрения также генерируется один раз, но на нее накладывается следующие ограничения:

$$|m| \geq |k|, \quad (1.1)$$

$$|m_i| = L_s = L_t,$$

где $|m|$ – мощность (длина) маски внедрения;

$|k|$ – мощность (длина) стеганографического ключа;

$|m_i|$ – мощность (длина) i -го фрагмента маски внедрения $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$.

Так как длина каждого фрагмента маски внедрения совпадает со стеганографической емкостью единицы контейнера, то длина всей маски внедрения должна быть кратна стеганографической емкости одного контейнера.

Каждый фрагмент маски внедрения m_i используется в процессе сокрытия фрагмента секретного послания в одном контейнере, т. е. в одном сообщении НТТР, при этом для встраивания

информации в i -м сообщении НТТР используется i -й фрагмент маски внедрения m_i . После того, как подобным образом были использованы все n фрагментов маски внедрения, для сокрытия $(n+1)$ -го фрагмента секретного текста используется первый фрагмент маски и т. д.

Учитывая ограничение (1.1), преимущество в защищенности от применения сокрытия зависит от длины секретного ключа и составляет:

$$\frac{P_s}{P_0} = 2^{|k|}.$$

Главным недостатком этого режима является циклическое использование фрагментов маски внедрения. Очевидно, что при длине маски равной или большей длины передаваемого сообщения, данный недостаток режима расширенной неизменной маски внедрения никак не проявляется и не влияет на защищенность скрытого вложения (т.к. каждый бит маски внедрения используется не более одного раза).

Для преодоления этого недостатка можно также использовать режим со сцеплением фрагментов маски. В этом случае маска внедрения определяется следующими выражениями:

$$m_1 = f(k),$$

$$m_i = f(m_{i-1}, k),$$

где m_i – i -ый фрагмент маски внедрения.

В этом случае каждый последующий фрагмент маски внедрения получается на основе предыдущего, при этом должно выполняться следующее условие:

$$|m_i| \geq k.$$

Для встраивания каждого фрагмента данных в контейнер используется только количество бит маски внедрения, равное длине тега L_t . При этом для формирования последующего фрагмента маски используются все биты предыдущего фрагмента. Такой подход объясняется тем, что благодаря относительно малой длине фрагмента маски нарушитель может осуществить по нему исчерпывающий поиск и, т. к. все последующие фрагменты маски внедрения зависят от него, затем выполнить атаку на основе известного открытого текста.

Кроме того, можно реализовать режим встраивания данных, обеспечивающий скрытую имитозащиту содержимого сообщения НТТР. Для этого формирование маски внедрения необходимо проводить следующим образом:

$$m_1 = f(k),$$

$$m_i = f(m_{i-1}, k) \oplus f(P_i, k),$$

где P_i – содержимое поля данных i -го сообщения НТТР.

Такой способ генерации маски внедрения позволяет скрытно контролировать целостность полезной нагрузки сообщения НТТР, т. к. в случае

ее изменения будет разрушен скрытый канал (в результате неверного расчета маски внедрения на принимающей стороне).

2 Распределение скрытых данных

Описанные выше способы стеганографического встраивания информации в сообщения НТТР скрывают данные в предсказуемой последовательности в каждом элементе контейнера, что существенно упрощает задачу анализа контейнера. Для устранения данной уязвимости можно применить метод пространственного распределения встраиваемых данных между элементами контейнера.

Для этого перед сокрытием данных необходимо сгенерировать так называемую маску распределения, которая, как и в случае с маской внедрения, представляет собой последовательность бит с равномерным распределением, которая однозначно определяется стеганографическим ключом. В сообщения НТТР, которым соответствуют единичные значения битов маски распределения, производится встраивание секретного сообщения согласно разработанному выше методу. При нулевом значении соответствующего бита маски распределения в сообщение НТТР встраиваются некие произвольные данные.

Пропускная способность скрытого канала в каждом направлении в случае использования вероятностной маски распределения в сети передачи данных на основе технологии Gigabit Ethernet с общей пропускной способностью канала $C = 1$ Гбит/с будет определяться следующими выражениями:

$$C_{s1kd} = \frac{8L_S p(1)p_d(1)}{8t_b(L_{H1} + L_{TCP} + L_{IP} + L_{ETH}) + t_f} =$$

$$= \frac{(8 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) \text{ бит}}{(8 \cdot 1 \cdot (364 + 20 + 20 + 26) + 96) \cdot 10^{-9} \text{ с}} =$$

$$= 9,05 \cdot 10^6 \text{ бит/с,}$$

$$C_{s2kd} = \frac{8L_S p(1)p_d(1)}{8t_b(L_{H2} + L_{TCP} + L_{IP} + L_{ETH}) + t_f} =$$

$$= \frac{(8 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) \text{ бит}}{(8 \cdot 1 \cdot (271 + 20 + 20 + 26) + 96) \cdot 10^{-9} \text{ с}} =$$

$$= 1,15 \cdot 10^7 \text{ бит/с,}$$

где L_S – длина тега в байтах;
 L_{H1} – длина запроса НТТР;
 L_{TCP} – длина заголовка сегмента TCP;
 L_{IP} – длина заголовка пакета IP;
 L_{ETH} – длина заголовка кадра Ethernet;
 t_f – время задержки между передачей кадров Ethernet (межкадровый интервал);
 t_b – время сериализации одного бита;
 $p(1)$ – вероятность появления единичного бита в маске внедрения;

$p_d(1)$ – вероятность появления единичного бита в маске распределения.

Максимальная пропускная способность скрытого канала достигается при следующих условиях:

$$\begin{cases} p(1) = 1, \\ p_d(1) = 1. \end{cases}$$

При этом преимущество в стойкости вложения за счет использования стеганографии отсутствует:

$$\frac{P_S}{P_0} = 1.$$

Это значит, что при достижении максимума скорости стеганографический путь встраиваемых данных становится полностью предопределенным.

Таким образом, максимальное преимущество в защищенности вложения за счет сокрытия стеганографическим методом обеспечивается при следующих условиях:

- максимальная неопределенность значения каждого бита маски внедрения;
- максимальная неопределенность значения каждого бита маски распределения.

Максимум неопределенности (мерой которой является энтропия) достигается при равномерном распределении значений бит в последовательности [2]. Данное утверждение справедливо как для маски внедрения, так и для маски распределения (с учетом того, что маски генерируются независимо друг от друга). Поэтому максимальное преимущество в защищенности вложения за счет сокрытия обеспечивается при следующих значениях вероятности появления единичного бита в масках:

$$\begin{cases} p(1) = \frac{1}{2}, \\ p_d(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

При формировании масок внедрения и распределения с использованием одного секретного ключа преимущество в стойкости вложения предоставляемое стеганографическим методом составит:

$$\frac{P_S}{P_0} = 2^{|k|}.$$

Если же применять два независимых секретных ключа k_1 и k_2 для получения масок внедрения и распределения соответственно, преимущество в защищенности скрытого сообщения может быть увеличено:

$$\frac{P_S}{P_0} = 2^{|k_1|+|k_2|}.$$

Таким образом, чем выше защищенность вложения, тем меньше пропускная способность скрытого канала, и наоборот. За счет использования независимых ключей различной длины для генерации масок внедрения и распределения мы можем контролировать и изменять соотношение

защищенности вложения и пропускной способности скрытого канала в зависимости от важности передаваемого секретного сообщения.

Заключение

В статье предложены различные режимы сокрытия информации и проанализировано их влияние на основные характеристики стеганографического канала связи на примере метода сетевой стеганографии с использованием сообщений протокола HTTP в качестве контейнера. Также с использованием предложенного режима имитозащиты можно осуществлять скрытый контроль целостности полезной нагрузки сообщений протокола HTTP. Разработанный стеганографический метод сокрытия информации с ее пространственным распределением по элементам контейнера позволяет увеличить преимущество в защищенности скрытого сообщения средствами стеганографии.

Сравнение основных характеристик стеганографического канала в различных режимах сокрытия данных приведено в таблице.

Полученные результаты и предложенные техники применимы к различным алгоритмам сетевой и компьютерной стеганографии и позволяют повысить защищенность секретного сообщения, не используя криптографические методы.

Таблица – Характеристики стегоканала в различных режимах сокрытия данных

Режим сокрытия данных	Пропускная способность скрытого канала в сети Gigabit Ethernet, Мбит/с	Преимущество в защищенности вложения за счет применения стеганографического метода
Неизменная маска внедрения	18,10	$2^{ m }$
	22,92	
Расширенная неизменная маска внедрения	18,10	$2^{ k }$
	22,92	
Со сцеплением фрагментов маски	18,10	$2^{ k }$
	22,92	
С пространственным распределением	9,05	$2^{ k_1 + k_2 }$
	11,46	

ЛИТЕРАТУРА

1. Дрыбин, Е.А. Метод организации стеганографического канала связи с использованием протокола HTTP / Е.А. Дрыбин, В.С. Садов // «Вестник связи». – 2019. – № 4 (156). – С. 60–63.
2. Shannon, C.E. A Mathematical Theory Of Communication / C.E. Shannon // The Bell System Technical Journal. – 1948. – Vol. 27. – P. 379–423, 623–656.

Поступила в редакцию 05.11.19.

МЕТОД ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНО ОПАСНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОДСТВА

Ю.В. Жердецкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE METHOD OF PROBABILISTIC-ALGEBRAIC SIMULATION OF POTENTIALLY HAZARDOUS TECHNOLOGICAL PRODUCTION SYSTEMS

Y.V. Zherdetsky

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается новый подход к оценке вероятностных характеристик надёжности (безопасности) технологического процесса производства, включающего элементы потенциальной опасности, основанный на применении аппарата вероятностно-алгебраического моделирования.

Ключевые слова: вероятностно-алгебраическое моделирование, надёжность, технологические процессы производства, стохастические алгебры, графы.

A new approach to assessing the probabilistic characteristics of the reliability (safety) of the production process, including elements of potential danger, based on the use of probabilistic-algebraic simulating is considered.

Keywords: probabilistic-algebraic simulation, reliability, technological processes of production, stochastic algebras, graphs.

Введение

Исследования показывают, что проблемы оценки надёжности и безопасности технологических процессов производства (ТПП) при наличии в их составе элементов потенциальной опасности обусловлены всё возрастающей сложностью и размерностью структур производственных объектов. Поэтому даже незначительные сбои в ходе выполнения технологических операций (ТХО) приводят к аварийным ситуациям, снижающим эффективность работы производственных объектов и затрудняющим выбор профилактических мер по обеспечению их надёжного и безопасного функционирования [1].

При выборе вариантов реализации ТПП необходимо учитывать сложность и масштабы процессов, подлежащих воспроизведению, большое число случайных факторов, затрудняющих надёжную реализацию технологических циклов. Поэтому самым перспективным для решения задачи оценки надёжности / безопасности технологической системы является использование метода моделирования и программно-технологических средств его автоматизации, обеспечивающих системный подход к решению поставленной задачи.

Модели технологических систем производства с элементами потенциальной опасности должны воссоздавать самые опасные режимы их работы, которые редко проявляются в повседневных условиях эксплуатации, но должны быть изучены при их разработке на стадии проектирования и производственной эксплуатации [2].

Вероятностную природу функционирования ТПП позволяет учесть имитационное моделирование, обеспечивающее высокий уровень детализации объекта, возможность рассмотрения его в динамике, определение его «узких мест» и выбор рационального варианта организации. Для ТПП с переменной структурой возможна реализация метода пошаговой реструктуризации, базирующегося на имитационном моделировании и позволяющего решить классическую задачу синтеза оптимальных систем [3].

Однако большая ресурсоемкость этого способа, невозможность оценки влияния редких событий на надёжность реализации технологического цикла, ограничения в точности получаемого решения не позволяют использовать имитационное моделирование для оценки надёжности и безопасности ТПП с элементами потенциальной опасности.

В статье описывается новый метод вероятностно-алгебраического моделирования (ВАЛМ) потенциально опасных технологических систем производства (ТСП), который подразумевает поэтапное сближение сложной современной технической науки с опытом, полученным на практике, позволяющее в сжатые сроки обеспечить надёжное функционирование технологических систем производства. Высокоэффективное направление такого взаимодействия подразумевает применение моделирования ТСП, как на стадии их первоначальной разработки, проектное моделирование, так и использование моделей в составе алгоритмов в процессе работы ТСП [4].

Для автоматизации всех этапов вероятностно-алгебраического моделирования ТПП с элементами потенциальной опасности используется программно-технологический комплекс «Control-Syst» [5], реализующий расчет вероятностных характеристик надежности/безопасности ТПП по вероятностным характеристикам их структурных элементов, включая элементы потенциальной опасности, тем самым формируя оценку риска возникновения опасных ситуаций и позволяя предупредить возникновение сбоев, аварий в работе ТСП с учетом сложности её структурной организации.

1 Идея метода

Идея метода заключается в разложении исследуемой ТСП с элементами потенциальной опасности на элементарные части, создании моделей, соответствующих структуре и особенностям функционирования, выделенных при разложении частей, объединении полученных моделей, представляющих объект исследования, с элементами потенциальной опасности, и расчитанных значений в общую модель для всей системы и значения с использованием аппарата вероятностно-алгебраического моделирования [6].

Серьезным отличием вероятностно-алгебраического подхода от популярных логико-вероятностных методов является возможность рассмотрения ТСП с элементами потенциальной опасности со множеством состояний и применение разнообразных операций, позволяющие описать сложные функциональные связи между всеми элементами системы [7].

Метод моделирования ТСП с элементами потенциальной опасности базируется на двух положениях:

1. Всем элементам изучаемой системы, отобраным в процессе её разложения на элементарные части, соотносится набор состояний, каждое состояние описывается совокупностью значений параметров надёжности системы и изменяется вероятностным образом. Вектору состояний элемента ставится в соответствие вектор вероятностей надёжности элемента.

2. Между элементами ТСП с элементами потенциальной опасности устанавливаются связи, которые представляются в виде функций, описывающих взаимодействие элементов и определённым образом влияющих на надёжность реализации ТПП. Набор функций устанавливается с учётом особенностей исследуемых систем и решаемых задач.

2 Этапы метода

Использование метода вероятностно-алгебраического моделирования ТСП с элементами потенциальной опасности предполагает последовательное выполнение следующих этапов.

На *этапе 1* решаются задачи сбора и подготовки исходных данных для проведения ВАЛМ надёжности системы. Этап включает три взаимосвязанные части.

1. На основе содержательного описания ТСП формируется множество её элементов $K = \{K_i\}$ и функциональных отношений (пространственных или временных) между этими элементами $F = \{F_j\}$. Выделяются элементы ТСП, характеристики которых наиболее существенным образом влияют на функционирование системы, изменяя вероятностные значения надёжности и определяя некоторый уровень нарушения выполнения предписанных системе функций.

Разрабатывается графическая схема $G(F, K)$, определяющая структуру вероятностно-алгебраической модели исследуемой системы, где F обозначает множество вершин (детерминированные / вероятностные, бинарные / n -арные функции), определяющих связи между элементами системы, K – множество рёбер, соответствующих элементам исследуемой системы и промежуточным результатам моделирования. Графическая схема имеет вид дерева, что обосновывается компактностью задания модели и ее широким практическим использованием для исследования надёжности ТСП. Она представляет собой строго формализованное отображение знаний о том, какие элементы включает система и какие отношения между ними возникают в процессе её функционирования.

2. Для совокупности выделенных элементов ТСП разрабатываются вероятностные модели, отражающие особенности их функционирования. При этом выбирается вид модели, определяются её параметры и реализуется первичное вероятностное моделирование. Для описания вероятностного изменения надёжности отдельными элементами используются различные параметрические функции, параметром которых может быть время, состояния элементов и системы в целом.

В ряде случаев описание особенностей стохастического процесса изменения характеристик надёжности элементов возможно с использованием различных видов Марковских моделей, для задания параметров которых используются стохастические матрицы, являющиеся элементами представлений стохастических алгебр, определяющих процесс вероятностно-алгебраического моделирования. Значения стохастических матриц, описывающих случайные Марковские процессы изменения надёжности элементов ТСП и однозначно определяющих Марковский граф переходов в пространстве состояний, определяются путём проведения натурных экспериментов с элементами исследуемых ТСП и последующей обработки полученных статистических данных.

При использовании Марковских моделей определённого вида [7] имеется возможность нахождения матрицы M'_{\max} , сохраняющей структуру

модели и свойства её параметров при уменьшении шага моделирования, что соответствует более детальному рассмотрению процесса функционирования элемента и изменения параметров его надёжности.

Первичное моделирование вероятностного процесса изменения надёжности элементов реализуется с использованием выбранных видов моделей, позволяющих определить значения совокупности векторов вероятностей, характеризующих непрерывное изменение надёжности выделенными элементами системы.

3. Исходя из анализа влияния надёжности элементов друг на друга и ТСП в целом устанавливаются управляющие правила вида «если..., то...». Содержание условных частей правил и их заключений формируется на основе оценок экспертов в исследуемой предметной области, полученных в результате опытных наблюдений за процессом реализации технологического цикла производственной системы и выявляющих закономерности изменения надёжности элементов и объекта в целом. К ним можно отнести следующие виды зависимостей:

- изменение параметров работы одних элементов в зависимости от произошедших изменений с другими элементами и всей системой;
- изменение состава функций, задающих связи между элементами в зависимости от текущего состояния элементов и всей системы;
- изменение состава элементов, функционирующих одинаково.

Примером может служить правило, регулирующее ситуацию критического изменения состояния надёжности элемента ТСП. В условной части такого правила анализируется математическое ожидание величины надёжности элемента. При выходе контролируемого статистического показателя за установленные границы запускается механизм реализации корректирующих воздействий, обновляющие параметры контрольного элемента системы либо изменяющие параметры функционирования элементов, зависимых от него во времени.

4. С учётом целей исследования задаётся критерий надёжности функционирования ТСП, который определяет допустимые границы изменения контролируемых параметров системы, определяющих состояния надёжности системы. Для сложных ТСП, включающих многофункциональные технологические процессы, задаётся несколько критериев надёжности и используются различные виды моделей. По результатам вероятностно-алгебраического моделирования объекта исследования реализуется процедура выбора решения с учётом многих критериев установленных для совокупности математических моделей. Сформированное решение определяет надёжный вариант организации ТСП с элементами потенциальной опасности.

На *этапе 2* формируется алгебраическая форма модели ТСП. С использованием средств автоматизации процесса моделирования происходит объединение моделей элементов ТСП и рассчитанных с их помощью показателей надёжности элементов в итоговую вероятностно-алгебраическую модель и вероятностные показатели. Алгебраическая форма модели строится с использованием графической схемы системы $G(F, K)$ и совокупности установленных функций. В символьном виде она записывается следующим образом:

$$Z = F_1(F_2(Y_1, Y_2, F_3(Y_3, Y_5), \dots, F_z(Y_{m-1}, Y_m))),$$

где $F = \{F_j\}$, $j = \overline{1, z}$ – множество функций, определяющих отношения между элементарными устройствами модели $Y = \{Y_i\}$, $i = \overline{1, m}$. Аргументами функций, описывающих взаимодействие элементов являются состояния элементов, вероятностные значения которых задаются векторами вероятностей $P = \{P^i\}$, $i = \overline{1, n}$.

Последовательность преобразований, символично представленная в виде алгебраической формы модели ТСП, позволяет сформировать вектор вероятностей состояний надёжности исследуемого объекта с учётом структурной вложенности используемых функций ВАЛМ.

На *этапе 3* строится и используется вероятностная форма модели ТСП. Эта форма определяет последовательность расчётов вероятностных показателей надёжности исследуемой ТСП, которая реализуется путём автоматического преобразования алгебраической формы модели в вероятностную:

$$P^{st} = P(\{P^{it}, Z\}, i = \overline{1, m}, t = \overline{1, T}), \quad (2.1)$$

где $P^{it} = (p_1^{it}, p_2^{it}, \dots, p_n^{it})$ – векторы вероятностей состояний надёжности элементов системы, $P^{st} = (p_1^{st}, p_2^{st}, \dots, p_n^{st})$ – вектор вероятностей состояний надёжности ТСП,

$$Z = F_1(F_2(Y_1, Y_2, F_3(Y_3, Y_5), \dots, F_z(Y_{m-1}, Y_m)))$$

– алгебраическая модель исследуемой ТСП.

Статически ВАЛМ реализуется путём последовательного вероятностно-алгебраического умножения векторов вероятностей устройств модели с учётом уровня вложенности функций и коэффициентов вероятностно-алгебраического моделирования по формуле

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^k p_i^1 p_j^2, \quad i, j, k = \overline{1, n},$$

где $P^1 = (p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1)$, $P^2 = (p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)$ и $P^3 = (p_1^3, p_2^3, \dots, p_n^3)$ вектора вероятностей состояний устройств Y_1 , Y_2 и Y_3 , $Z = F(Y_1, Y_2)$.

Коэффициенты a_{ij}^k называются коэффициентами вероятностно-алгебраического моделирования. Они задаются с учётом функции,

определяющей отношения между устройствами алгебраической модели, и удовлетворяют условию

$$\forall i, j, k \quad a_{ij}^k \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^n a_{ij}^k = 1.$$

Если отношение между устройствами модели определяется детерминированной функцией, коэффициенты вероятностно-алгебраического моделирования определяются следующим образом

$$\begin{cases} a_{ij}^k = 1, & \text{если } k = F(i, j), \\ a_{ij}^k = 0, & \text{если } k \neq F(i, j). \end{cases}$$

Повысить уровень адекватного описания объекта исследования позволяет динамическое ВАЛМ, которое предполагает многократную реализацию статического вероятностно-алгебраического моделирования на каждой итерации многошагового процесса исследования объекта в динамике с учетом взаимодействия независимых элементов и корректирующего управления. В соответствии с выбранным шагом моделирования элементы изменяют свои параметры в дискретные моменты времени между итерациями статического моделирования, а в ходе одномоментного моделирования рассматриваются как независимые.

На каждой итерации динамического ВАЛМ контролируются текущие вероятностные характеристики надёжности системы. Считается, что соответствие их значений допустимым границам изменения обеспечивает необходимый уровень надёжной организации ТСП. Использование управляющих правил, которые автоматически просматриваются и срабатывают в процессе динамического вероятностно-алгебраического моделирования, позволяет учесть эволюционную зависимость элементов объекта исследования.

В случае выхода вероятностных параметров надёжности элементов или всей ТСП за допустимые границы их изменения запускается процесс генерации корректирующих управляющих воздействий. В рамках описанного аппарата различают следующие виды воздействий: изменение параметров элементов ТСП, изменение структуры модели; завершение процесса моделирования. После реализации управляющих воздействий, запущенных в результате срабатывания правил моделирования, процесс вероятностно-алгебраического моделирования продолжается.

Процесс моделирования продолжается и в случае нахождения вероятностных характеристик в допустимых границах. Результаты моделирования для каждой итерации рассмотрения объекта в динамике сохраняются в информационной базе данных модели.

На этапе 4 анализируются полученные результаты моделирования. К этому моменту в базе данных модели находится вариант рациональной структуры исследуемой системы с параметрами отдельных компонентов и всей ТСП,

а также варианты его изменения в процессе функционирования, позволяющие обеспечить необходимый уровень надёжности функционирования системы с учетом реализовавшихся изменений вероятностных параметров надёжности элементов.

Результирующие векторы вероятностей надёжности системы (2.1) позволяют судить об изменении надёжности системы во времени. В процессе моделирования отслеживаются нарушения в функционировании системы, требующие определенных мер, корректирующих как работу отдельных элементов, так и параметров их взаимодействия. При регистрации нарушения допустимых границ изменения надёжности системы определяется элемент системы, вероятностные характеристики которого привели к общему нарушению работы ТСП. В случае наличия множества таких элементов устанавливается степень влияния каждого на надёжность ТСП в целом. Таким образом реализуется возможность установления причин снижения надёжности функционирования ТСП.

Своевременное выявление нарушений в работе элементов и реагирование на них путём изменения режима их работы, замены элементов, корректирующих воздействий на работу остальных элементов, значительно повысит уровень доверия к моделям ТСП и обеспечит получение более точных результатов моделирования.

Заключение

Описанный метод направлен на теоретическое развитие и обобщение важной практической задачи моделирования и вероятностной оценки надёжности (безопасности) потенциально опасных систем производства с различными особенностями функционирования при рассмотрении случайных процессов, приводящих к отказам.

Использование метода позволяет оценить надёжность и безопасность ТПП, оценить изменение вероятностных характеристик системы во времени с учётом управляющих воздействий на каждом шаге моделирования. Формализация ТПП в виде древовидной структуры обеспечивает ряд преимуществ, используемых при автоматизации процесса моделирования вероятностных характеристик надёжности объекта, а именно:

- наглядное представление отношений между элементами системы;
- изменение параметров терминальных узлов;
- установление уровней иерархии элементов системы;
- замещение функциональных связей между элементами системы вероятностными расчётами;
- использование эффективных алгоритмов обхода узлов дерева, сложность которых зависит от количества уровней дерева, т. е. приблизительно от $\log_2 n$ (n – количество узлов).

Метод вероятностно-алгебраического моделирования ориентирован на определение интегральных вероятностных показателей надежности/безопасности ТПП, увеличение числа элементов которых и их состояний не приводит к экспоненциальному усложнению расчетов. К положительным особенностям данного метода можно отнести следующие: возможность оперировать вероятностными состояниями элементов, для описания отношений между которыми используются произвольные функции; наличие алгебраической основы, позволяющей единым образом описать детерминированные и вероятностные связи между элементами; возможность учитывать в динамике эволюционную зависимость элементов. Новизна метода проявляется в новых возможностях, позволяющих решать обратные задачи, получать решение в символьном виде, переходить к непрерывному времени моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Расчёт надёжности и безопасности технологических процессов производства с элементами потенциальной опасности* / О.М. Демиденко, В.С. Смородин Е.И. Сукач Ю.В. Жердецкий // Математические машины и системы. – 2016. – № 2. – С. 148–155.
2. *Жердецкий, Ю.В.* Вероятностно-алгебраические модели технологических систем производства с элементами потенциальной опасности / Ю.В. Жердецкий // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2014. – № 6 (87). – С. 123–128.
3. *Смородин, В.С.* Методы и средства имитационного моделирования технологических процессов производства: монография / В.С. Смородин, И.В. Максимей. – М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, 2007. – 369 с.
4. *Сукач, Е.И.* Метод адаптивного вероятностно-алгебраического моделирования управляемых технологических процессов производства с элементами потенциальной опасности / В.С. Смородин, Е.И. Сукач, Ю.В. Жердецкий // Доклады БГУИР. – 2016. – № 3 (26). – С.80–84.
5. *Жердецкий, Ю.В.* Вероятностно-алгебраическое моделирование как средство оценки надёжности при проектировании электроэнергетических систем / Е.И. Сукач, М.А. Бужан, Ю.В. Жердецкий // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2017. – № 3 (102). – С. 77–82.
6. *Сукач, Е.И.* Вероятностно-алгебраическое моделирование сложных систем графовой структуры / Е.И. Сукач; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 224 с.
7. *Способ формализации объектов графовой структуры с вероятностными параметрами функционирования* / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, Ю.В. Жердецкий, Г.А. Мальцева // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 5 (74). – С. 195–202.

Поступила в редакцию 05.06.19.

УДК 519.25

СХЕМА ЭВОЛЮЦИОННОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Н.Б. Осипенко, А.Н. Осипенко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SCHEME OF EVOLUTIONARY CONSTRUCTION OF REGRESSION MODELS

N.B. Osipenko, A.N. Osipenko

F. Scorina Gomel State University

Представлена схема эволюционного конструирования модели системы регрессионного типа, в которой последовательно отражены точки бифуркации по способам: постановки задач, выборочного описания концептуального представления факторов, формирования фактор-признаков, репрезентации выборочного описания, формирования классов-первообразов, объединения классов-первообразов в цепочки, построения итоговой классификации их покрытия, а также разработки стратегии балансировки процессов построения регрессионной модели.

Ключевые слова: эволюционное моделирование, классификация, регрессионный анализ, активная система.

A scheme of the evolutionary design of a model of a system of a regression type is presented. It consistently reflects the bifurcation points in the following ways: setting goal, a selective description of the conceptual representation of factors, forming factor signs, representation of a selective descriptions, formation of class-prototypes, combining class-prototypes into chain, construction of final classification of their coverage, and developing a balancing of the process of building a regression model.

Keywords: evolutionary modeling, classification, regression analysis, active system.

Введение

Работа посвящена проблеме автоматизации моделирования активных систем (АС) [1]. Особенность АС состоит в том, что у нее источник организации является автономной структурной составляющей, обеспечивающей управление и координацию всех жизнеобразующих процессов. Практическим предназначением описываемых ниже моделей регрессионного типа является аудит и сравнительный анализ совокупности объектов АС (специалистов или организаций в медицине, образовании, производстве, сфере услуг) для выявления их сильных и слабых сторон с последующей выработкой полезных рекомендаций по совершенствованию как отдельных объектов, так и всей АС. На фоне бурного распространения в последнее время методов глубинного обучения на базе Big Data подобного прорыва в рассматриваемой нами задаче не произошло, в частности, в связи с необходимостью использования выборок системных экземпляров малого или среднего объема и правдоподобной интерпретации формируемых фактор-признаков объектов. Применяемые обычно при исследовании АС стандартные программные комплексы обработки статистических данных не в состоянии достичь адекватного уровня сложности модели из-за ограниченных возможностей привлечения разнообразных априорных данных и экспертных знаний. В настоящей статье авторы обобщили опыт разрешения этой проблемы [2]–[9] в виде схемы эволюционного конструирования модели АС.

1 Основные способы достижения адекватности и устойчивости модели

Выделим основные способы достижения адекватности модели, упорядочив их по степени сложности.

1. *Генерация серии модельных форм согласно некоторой последовательности значений управляющего параметра* (или многомерного плана эксперимента по группе таких параметров) *без адаптации* к выборочному описанию с последующим выделением (синтезом) допустимых вариантов модели. Такой способ позволяет произвести распараллеливание генераций отдельных вариантов модели до момента накопления заданного числа интерпретаций модельных форм.

2. *Итеративная генерация серии модельных форм согласно некоторому начальному варианту и алгоритму адаптации* путем коррекции параметров текущей модельной формы в зависимости от значений показателей ее невязки с выборочным описанием. В этом случае выбор допустимых вариантов происходит при достижении показателем невязки определенного порога – значения критерия останова.

3. *Смешанная параллельно-адаптивная генерация с двухъярусным допуском вариантов моделей:* сначала на первом уровне адаптивной интерпретации выделяются перспективные варианты для каждого варианта эксперимента в плане параллельной генерации, а затем на втором уровне полученный набор вариантов «просеивается» по критерию адекватности согласно первому способу.

2 Эволюционное конструирование модели АС регрессионного типа

С целью конкретизации метода эволюционного конструирования остановимся на моделях регрессионного типа (рисунок 2.1). Опишем потенциальный план построения таких моделей в виде последовательности расширяющейся сети точек бифуркации (*Bifurcation Points – BP*).

BP1. (Бифуркация по задачам) *Определение предмета исследования и постановка задачи*. В зависимости от целей исследования, ресурсных возможностей, наличия данных и экспертных знаний спектр усложняющихся направлений движения (*directions – DIR*) может иметь вид:

BP1.DIR1 = Задача 1: построение классификационного образа для восприятия и дифферен-

циации определенного рода явлений жизнедеятельности АС;

BP1.DIR2 = Задача 1 + Развитие 1: ориентация на последующее распознавание классов явлений с помощью некоторых менее ресурсоемких (в сравнении с задачей 1) признаков (распознавание связано с принятием дифференцированных решений для явлений разных классов);

BP1.DIR3 = Задача 1 + Развитие 2: выделение факторов формирования целевого свойства (ЦС) исследуемого явления и качественное (интуитивно-экспертное) описание характера влияния объясняющих факторов на ЦС;

BP1.DIR4 = Задача 1 + Развитие 2 + Развитие 3: количественное описание характера влияния объясняющих факторов на ЦС;

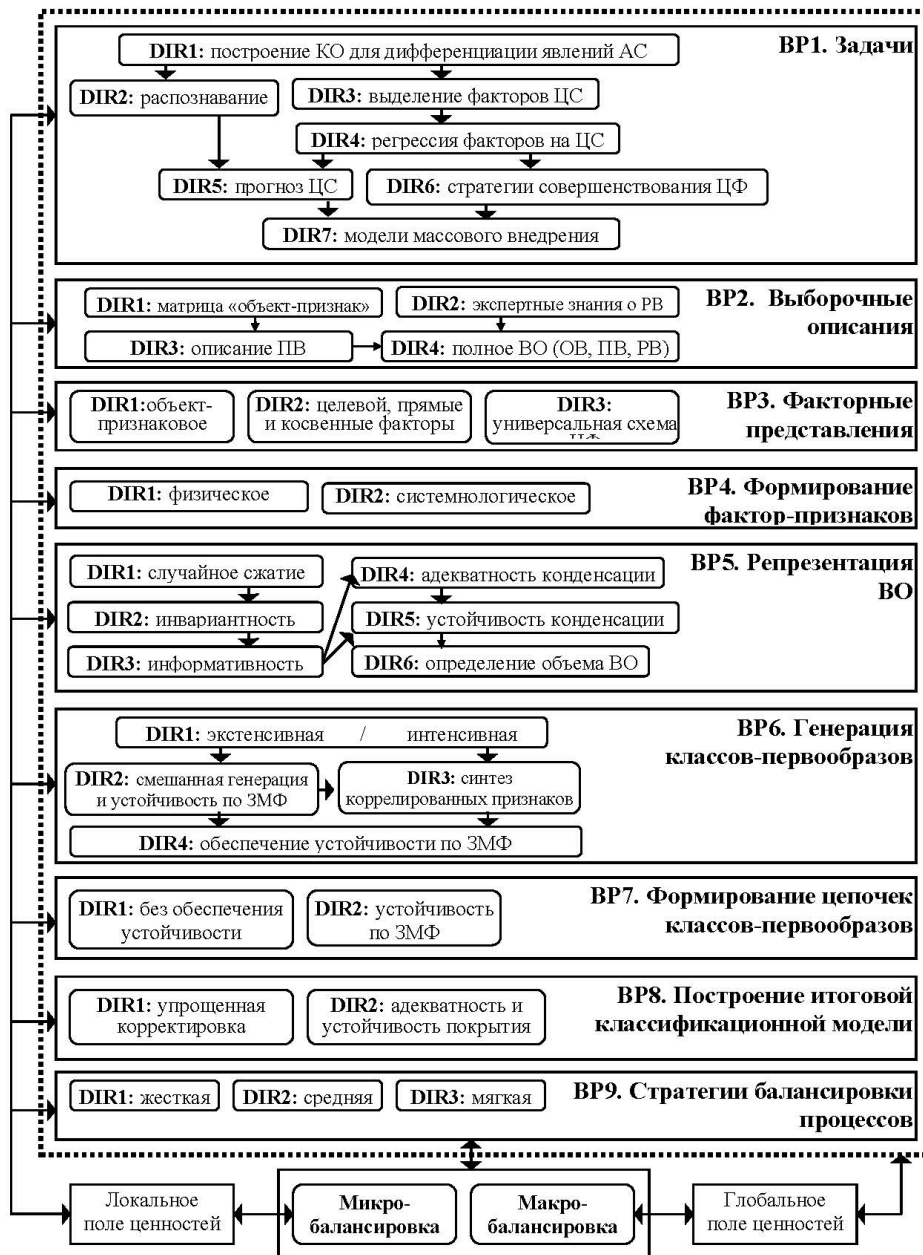


Рисунок 2.1 – Схема метода эволюционного конструирования модели

BP1.DIR5 = Задача 1 + Развитие 1 + Развитие 2 + Развитие 3 + Развитие 4: ориентация на последующий прогноз (интерполяция и экстраполяция) ЦС с помощью некоторых менее ресурсоемких (в сравнении с направлением BP1.DIR4) признаков (качественный и количественный прогноз ЦС связан с принятием одного из альтернативных решений об усвоении явления АС субъектом в зависимости от качественной градации или количественного значения ЦС). Конечная цель исследования состоит в получении модели или точной и устойчивой оценки ЦС, при этом глубина факторного представления и степень адекватности отражения факторов влияния и обоснованность интеграции их показателей учитываются только в плане достижения конечной цели;

BP1.DIR6 = Задача 1 + Развитие 2 + Развитие 3 + Развитие 4: ориентация на разработку стратегий оптимизации вектора показателей факторных функционирований с целью выработки вариантов комплексного совершенствования (проводимая с помощью имитационного моделирования) фрагментов этих функционирований и повышения эффективности целевого функционирования (ЦФ);

BP1.DIR7 = Задача 1 + Развитие 1 + Развитие 2 + Развитие 3 + Развитие 4 + Развитие 4: данное направление решает полный круг задач моделирования регрессионного типа, обеспечивая дополнительно выбор вариантов совершенствования для ситуаций, описанных менее ресурсоемкими (в сравнении с направлением BP1.DIR6) признаками;

BP2 (Бифуркация по выборочным описаниям). Данная точка бифуркации непосредственно зависит от выбора движения в точке BP1 и отвечает за выделение потока выборочных описаний исследуемых явлений (объектов). В состав BP2 входят следующие направления:

BP2.DIR1. Данное направление *рассматривает только традиционную обучающую выборку* (ОВ) в виде матрицы описаний (типа объект-признак) и может использоваться при решении задач BP1.DIR1 – BP1.DIR5. В рамках этого направления параллельно проверяется несколько путей, начиная от варианта с наименьшим объемом выборки, но с достаточно точными и достоверными (в плане доверия к измерителю или оценщику) признаками и кончая вариантом с максимально возможным объемом выборки, где для признаковых значений учитываются уровни их точности и достоверности. В последнем случае в выборке сохраняются и те объекты (явления), по некоторым признакам которых значения либо ложные, либо отсутствуют.

BP2.DIR2. В качестве выборочных описаний объектов (явлений АС) для этого направления *используются достаточно полные и детальные знания экспертов* о, как правило,

малочисленной группе *реперных объектов*. К таким знаниям относятся: качественно-количественное описание *реперной выборки* (РВ) объектов в виде матрицы объект-признак, развивающее описание направления BP2.DIR1 как в плане точности и достоверности измерения или оценки признаков, задействованных в обучающей выборке, так и в плане дополнения РВ новыми признаками. К последним могут относиться: признаки прямого измерения или оценки целевого и объясняющих факторов, косвенные признаки истории происхождения объекта (явления), контекста (т. е. фона) ситуации жизнедеятельности на момент его измерения или оценки. Отметим, что, в случае обеспечения репрезентативности выборки реперных объектов, данное направление движения может использоваться в задачах BP1.DIR1 – BP1.DIR3 и BP1.DIR6.

BP2.DIR3. Поток выборочных описаний этого направления составляют обучающая и прогнозная выборки (ПВ). ПВ содержит малоисследованные объекты, для которых требуется распознать тип объекта и / или осуществить интерполяционное (или экстраполяционное) восстановление отсутствующих значений ЦС, а так же, как правило, имеет большой объем и описывается малоресурсоемкими и доступными признаками. Применяется данное направление в задачах BP1.DIR2, BP1.DIR5.

BP2.DIR4. Полный поток выборочных описаний (РВ + ОВ + ПВ), используемый в задаче BP1.DIR7.

BP3. (Бифуркация по факторным представлениям) В данной точке бифуркации *выбирается характер и глубина представления целевого функционирования* в виде дерева факторов. Корневой вершиной этого дерева является фактор выходного предмета ЦФ. Остальные вершины – это объясняющие факторы: средств ЦФ, инструмента ЦФ, фона, компонентов управляющего воздействия со стороны сознания ЦФ (информационный, энергетический и отражательный планы). Кроме того, в состав дерева входят факторы коммуникативного и балансирующего функционирования АС, поддерживающие ЦФ. Ветви данного дерева являются соответствующие причинно-следственные связи. Существенная особенность факторного представления ЦФ активной системы состоит в том, что ее субъект (носитель сознания ЦФ) является трехуровневым, а управляющие воздействия формируются со стороны индивида (непосредственного субъекта ЦФ), группы коллектива индивидов (квази-субъекта) и метасубъекта. В такой ситуации принципиальное значение имеет характер ориентации субъекта ведущего уровня целевого функционирования. Например, в случае ориентации ЦФ на потребности метасубъекта его эффективность в значительной степени будет зависеть от коммуникативного и балансирующего

функционирования в рамках жизнедеятельности АС, охватывающей все три уровня (выраженно-го, в частности, в степени перераспределения ресурсов и ценностных ориентиров с метауровня на уровни коллектива и индивида).

В состав точки бифуркации ВРЗ входят следующие направления:

ВР3.DIR1. *Традиционное объект-признаковое представление*, не прибегающее явно к выделению системных факторов. Такой подход применяется в задачах ВР1.DIR1 – ВР1.DIR5 при выборочных описаниях ВР2.DIR1 и ВР2.DIR3. Построение факторов здесь осуществляется а posteriori с помощью методов факторного анализа, базирующихся на оптимизации либо критерия дискриминации объектов, либо качества прогноза целевого свойства. Попытки содержательной экспертной интерпретации полученных таким способом факторов путем их согласования с интуитивным образом факторов формирования целевого свойства АС чаще всего дают отрицательный результат: в состав линейной комбинации «оптимального» фактора, как правило, попадают признаки, отражающие разные системные факторы.

ВР3.DIR2. *Простейшая систематизация факторов путем выделения целевого фактора, а также прямых и косвенных объясняющих его факторов*. Данный способ реализован в [7]. К прямым факторам относятся те, которые в дереве факторов непосредственно связаны с целевым, в частности, это могут быть средства ЦФ вместе с входным предметом ЦФ или инструмент ЦФ, если он обладает значимой вариативностью в процессе формирования ЦС. К косвенным факторам здесь относятся те, которые определяют прямые факторы, в частности, факторы сознания ЦФ, контролируемые посредством управляющих воздействий параметры прямых факторов ЦФ. Настоящее направление факторного представления, так же как и предыдущее, относится к задачам ВР1.DIR1 – ВР1.DIR5 и нацелено на эффективный прогноз ЦС. В основе данной систематизации факторов лежит физическая структура связи явлений. Например, в официальных процедурах оценки доз внутреннего облучения жителей населенного пункта этот подход в качестве одного из главных признаков ставит такой признак, как объем потребления радиационно-значимого продукта. В то же время логически этот признак (отражающий средство ЦФ по формированию дозы) является производным от фактора ориентации жителей населенного пункта на потребление данного продукта, определяемого в свою очередь факторами жизнедеятельности социума – населенного пункта и метасоциума – региона государства. Таким образом, логически более глубокие косвенные факторы сознания субъекта ЦФ оказываются ближе к ЦС, чем прямые. Если при этом учесть большую ресурсоемкость

измерения признаков прямых факторов и соответствующую неопределенность значений этих признаков, то становится понятным, почему в работе [7] привлечение к построению регрессионной модели косвенных признаков формирования дозы позволило существенно улучшить качество ее оценки.

ВР3.DIR3. *Представление факторов согласно универсальной схеме ЦФ* и обеспечивающих его коммуникативного и балансирующего функционирования жизнедеятельности АС. Практическая реализация такой логической систематизации факторов осуществлена авторами в работе [8]. Заметим, что данное направление представления факторов может быть использовано при решении всех задач точки бифуркации ВР1, но наибольшую его эффективность следует ожидать в задачах ВР1.DIR3, ВР1.DIR6 – ВР1.DIR7 при наличии соответствующего для этих задач выборочных описаний ВР2.DIR2 и ВР2.DIR4.

ВР4. (Бифуркация по способам формирования фактор-признаков) После того как исследователь определился с факторным описанием ЦФ, являющимся его концептуальной моделью, следующим шагом становится конкретизация выделенных факторов путем характеристики их некоторыми обобщенными признаками (фактор-признаками), синтезированными из набора признаков выборочного описания. Определим основные направления данной точки бифуркации.

ВР4.DIR1. *Формирование фактор-признаков, исходя из физических представлений о факторах*. В рамках данного направления выделим два пути:

1. Отождествление факторов с некоторыми так называемыми «существенными» или «информативными» признаками из выборочного описания. Данный способ факторизации на практике является наиболее распространенным и связан с традиционной ориентацией исследователей на нефеноменологическую концепцию жизнедеятельности АС.

2. Аналитический синтез «информативных» фактор-признаков из набора признаков выборочного описания с помощью методов автоматической классификации, корреляционного и факторного анализа [10].

Отметим, что это направление формирования фактор-признаков соответствует задачам ВР1.DIR1 – ВР1.DIR5, выборочному описанию ВР2.DIR1 и факторному представлению ВР3.DIR1.

ВР4.DIR2. *Синтез фактор-признаков с позиций системно-логического восприятия жизнедеятельности АС* [8]. Данное направление относится к ветвям исследования в пучке:

(ВР1.DIR3 – ВР1.DIR7) → (ВР2.DIR1 – ВР2.DIR4) → ВР3.DIR3.

Первый этап синтеза фактор-признаков (ориентация) состоит в отборе по каждому фактору отражающих его признаков (РВ, ОВ, ПВ) на основе интуитивных представлений эксперта и имеющихся в базе знаний описаний признаков «импульсов воздействия».

На втором этапе (преобразования) по каждому фактору осуществляется генерация альтернативных формул синтеза его признаков, отличающихся как по составу признаков, так и по способу аккумуляции их в фактор-признаке. В зависимости от способа аккумуляции (накопления) признаков отражений фактора можно выделить три пути синтеза:

1. *Аддитивное аккумулятивное*, соответствующее случаю условной независимости факторных признаков.

2. *Мультипликативное аккумулятивное* признаков фактора, отвечающее ситуации их взаимной зависимости (отметим, что в практике исследования АС о наличии взаимной зависимости признаков говорит коэффициент их корреляции, начиная со значений 0.2–0.3).

3. *Смешанное аддитивно-мультипликативное аккумулятивное*. Настоящая процедура синтеза, как правило, связана с наличием более глубоких факторов, определяющих данный, и требует пересмотра и углубления соответствующего фрагмента дерева фактор-признаков.

Первый и второй этапы синтеза требуют специальной поддержки процессами многокритериального отражения с последующим отсевом или отбраковкой генерируемых альтернатив согласно п. 1. В работе [8] под критерием синтеза качества фактор-признака рассматривался показатель корреляционной взаимосвязи генерируемого фактор-признака с ЦС. В случае, если фактор-признак синтезируется для самого целевого фактора (при этом фактор-признак становится ЦС), осуществляется попеременная взаимная оптимизация: сначала объясняющих фактор-признаков (каждый в паре с начальным вариантом целевого), затем – целевого со всеми объясняющими фактор-признаками.

Отметим, что во всех трех путях синтеза фактор-признака, по возможности, следует использовать дополнительные способы повышения его адекватности и устойчивости, описанные в п. 1.

BP5. (Бифуркация по способам репрезентации выборочного описания). *Под репрезентацией здесь понимается представление выборочного описания некоторым сжатым описанием* (в частности, подвыборкой из наиболее характерных или типичных объектов), сохраняющим основную информацию исходного выборочного описания, необходимую для построения модели. Репрезентация выборочного описания предназначена для следующих целей:

– обеспечение репрезентативности обучающей и прогнозной выборок (заметим, что

большой объем выборки не гарантирует репрезентативности, так как в ней неестественным образом могут преобладать объекты одного типа явлений и незначительно представлены объекты другого типа);

– получение минимально возможного числа представителей для эффективной визуализации в процессе общения с экспертом;

– ускорение расчета при дальнейшем построении модели.

Опишем спектр возможных направлений репрезентации.

BP5.DIR1. *Сжатие выборки (обучающей или прогнозной) путем выделения случайной подвыборки заданного объема (существенно меньше объема исходной выборки)*. Данный способ применяется в случае уверенности исследователя в репрезентативности исходной выборки. Заметим, что при решении задач BP1.DIR1 – BP1.DIR7 при наличии в выборочном описании выборки реперных объектов необходимо обеспечить максимальное представительство РВ в сжатой подвыборке.

BP5.DIR2. *Сжатие выборки путем выделения случайной подвыборки с максимально возможным сохранением функции плотности эмпирического распределения* в многомерном пространстве признаков. В рамках этого направления могут быть использованы два пути достижения инвариантности эмпирического распределения на подвыборке. Первый способ – это метрический метод оценки многомерной плотности распределения ядерного типа по подмножеству точек сжатой выборки, второй – топологическое деление многомерного пространства признаков на ячейки. В обоих случаях требуется сохранить пропорциональность представительства точек в области (в ядерном окне или ячейке) при переходе от выборки к подвыборке.

BP5.DIR3. *Развитие предыдущего направления за счет усовершенствования генератора подвыборки*. Опишем два пути такого усовершенствования. Для первого – все выборочные точки пространства признаков сначала упорядочиваются по степени их «центристости» (более центристская точка имеет большее значение локальной функции эмпирической плотности распределения по сравнению с соседними точками), а затем по принципу решета Эратосфена [10] генерируются последовательно: наиболее «центристая» точка выборки, следующая по «центристости» точка, не попавшая в локальную окрестность первой точки и т. д. Отметим, что данный способ сжатия выборки реализован авторами в [9]. Второй путь усовершенствования генератора использует локальную адаптацию, когда сгенерированная случайная точка выборки «ищет» свой локальный центр по принципу алгоритма ФОРЭЛЬ или динамического сгущения [10].

BP5.DIR4. Данное направление *развивает предыдущее в плане обеспечения адекватности представления выборки подвыборкой*. В качестве показателя адекватности в [9] использовался критерий суммарного отклонения точек выборки от своих ближайших точек сжатой подвыборки. Оптимальная по этому показателю подвыборка получила название конденсации. Отметим, что при решении задач BP1.DIR2, BP1.DIR5, BP1.DIR7 с выборочным описанием BP2.DIR3 или BP2.DIR4 осуществляется согласование конденсаций обучающей и прогнозной выборок. С этой целью при построении конденсаций ПВ в генераторе объектов для формирования сжатой подвыборки все объекты ПВ наделяются соответствующими уровнями приоритетности выбора. Максимальная приоритетность присвоена реперным объектам. Далее идут объекты конденсации ОБ, затем – объекты ОБ, не попавшие в конденсацию. Объекты из множества ПВ\ОБ имеют наименьший приоритет.

BP5.DIR5. *Совершенствование репрезентации выборки путем формирования устойчивой конденсации по принципам метода МГУА [11], скользящего экзамена или выделения закономерных форм* (см. п. 1).

BP5.DIR6. *Развитие предыдущего направления путем уточнения объема выборки – конденсации*. Для этой цели в случае метода МГУА может быть использована процедура обнаружения скачка показателя устойчивости (т. е. различия конденсаций, построенных по парам независимых подвыборок) при постепенном уменьшении объема подвыборки конденсации. Аналогичную процедуру можно осуществить с показателем устойчивости в методе скользящего экзамена и с показателем закономерности в методе выделения закономерных форм. Заметим, что с помощью данного способа можно показать принципиальную невозможность получения репрезентативной подвыборки. Для этого случая характерно отсутствие этапа затухания на графике показателя устойчивости в зависимости от объема подвыборки.

BP6 (Бифуркация по способам формирования классов первообразов выборочного описания). Под *классом-первообразом* будем понимать некоторый класс в виде проинтерпретированной (программой, а иногда и экспертом) формы класса, обладающий такими свойствами, как простота формы и регулярность. Простота формы класса означает элементарность (единичность) ядра и минимальность числа параметров описания периферии в многомерном пространстве признаков выборочного описания. Элементарные ядра класса могут различаться по форме (точечные, шарообразные, линейные, например, при регрессионном представлении класса). Аналогично, форма периферии класса может иметь вид сферы, эллипсоида, параллелепипеда, гиперболоида.

Регулярность класса-первообраза означает симметричность расположения точек в «очерченной» периферии окрестности ядра, а также сконцентрированность точек вокруг ядра, что характерно для колоколообразной формы многомерной функции плотности распределения. Частным случаем регулярности класса является равномерное расположение точек в пределах его периферии.

Следуя [2], выделим два этапа формирования класса-первообраза: *экстенсивный* и *интенсивный* (экстенсивный поиск класса предполагает максимально возможный охват перспективных ядер с наиболее простой периферией; интенсивный поиск опирается на результат экстенсивного поиска и обеспечивает интенсивную локальную адаптацию формы класса-первообраза).

Опираясь на основные способы достижения адекватности и устойчивости модели, выделим следующие направления формирования классов-первообразов.

BP6.DIR1. Этап 1. *Параллельная экстенсивная генерация и интерпретация* (см. п. 1) *однотипных форм класса* (например, с фиксированным спектром значений радиусов), покрывающих точки выборки с заданным уровнем перекрытия. В качестве ядер форм класса здесь могут быть выбраны точки объектов конденсации. Отсев первоначально осуществляется отдельно по каждой цепочке расширяющихся сфер с выбором одной или двух форм, отвечающих интервалу значений радиуса, где наблюдается относительная стабилизация показателей качества класса и далее идет скачок этих показателей в сторону ухудшения. Отсев неперспективных форм проводится на основе решета Эратосфена (см. BP5.DIR3), используя результат упорядочения всех классов по интегральному показателю качества их регулярности и (для задач BP1.DIR3 – BP1.DIR7) инвариантности целевого свойства.

Этап 2. *Параллельная генерация и интерпретация вариантов интенсивной модификации* каждой формы класса, допущенной на первом этапе. В основу генератора здесь в соответствии с п. 1 положен многомерный план эксперимента, где роль управляющих параметров выполняют показатели размеров формы класса вдоль каждого признака. Отсев для этого направления проводится сначала отдельно по вариациям каждой исходной формы с выделением нескольких наиболее качественных вариантов, а затем осуществляется совместная отбраковка всех оставшихся форм согласно принципу решета Эратосфена по алгоритму этапа 1.

В рамках данного направления выделим три пути формирования класса-первообраза в зависимости от вида формы класса.

Путь 1. *Метрическая форма* класса с осями, параллельными координатным, в виде сферы или эллипсоида (периферии) в многомерном

пространстве признаков с центром в некоторой точке (ядре). Интерпретация такой формы класса по исходной выборке (ОВ или ПВ) осуществляется путем сравнения с радиусом сферы расстояний точек выборки до ее центра. Экстенсивная генерация форм класса сводится к обеспечению разнообразия ядер классов (при фиксированном радиусе). Интенсивная модификация формы класса состоит в получении той или иной формы эллипсоида путем изменения весов признаков в формуле многомерного расстояния.

Путь 2. *Топологическая форма* класса в виде гиперпараллелепипеда (периферии), ядром которого является одна из его внутренних точек. Интерпретация данной формы проводится путем проверки попадания точек выборки в область периферии в результате поочередной фильтрации точек интервалами признаков. Как отмечено нами в [2], для эксперта этот способ интерпретации является более естественным и корректным по сравнению с метрическим, так как не требует вычисления абстрактных расстояний между объектами, не имеющих под собой, как правило, какого-либо основания. Учитывая это обстоятельство, в работе [2], на базе понятия многомерного порядкового пространства признаков, был развит аппарат непараметрического анализа и построена классификация путем покрытия точек выборки некоторым оптимальным набором (гиперпараллелепипедов). Интенсивная модификация такой формы на этапе 2 осуществляется за счет сужения или расширения интервалов признаков вплоть до их граничных значений (что равносильно удалению соответствующих признаков).

Путь 3. *Графовая форма* класса-первообраза в рамках метрического пространства. В качестве ядра формы здесь, как и ранее, берется точка выборки в многомерном пространстве признаков. Дискретным радиусом графовой формы является количество k ближайших соседей. Экстенсивный поиск формы класса в этом случае осуществляется так же, как в предыдущих. Интенсивный поиск аналогичен второму пути и сводится к перебору вариантов взвешивания признаков в формуле метрических расстояний.

Достоинство данного пути формирования классов-первообразов состоит в том, что графовая форма класса, в отличие от эллипсоида и, тем более, гиперпараллелепипеда, является наиболее гибкой, так как позволяет покрывать точки пространства, расположенные в наиболее естественных формах наклонного эллипсоида.

BP6.DIR2. Настоящее направление *развивает предыдущее на этапе экстенсивного поиска перспективных форм классов-первообразов* применительно для всех трех перечисленных выше путей. При этом параллельная генерация и интерпретация разнообразного множества однотипных форм заменяется на смешанную генерацию,

дополнительно осуществляющую адаптацию интерпретируемых форм. Одновременно с этим в целях обеспечения устойчивости результата первого этапа реализуется метод выделения закономерных модельных форм (см. п. 1) путем увеличения плотности точек ядер при параллельной генерации форм, последующего расчета их показателя закономерности и включения этих показателей в интегральные характеристики качеств формы. Более закономерной здесь будет та итоговая форма, которая имеет большее число источников первичных форм, преобразованных в процессе адаптации в данную итоговую форму.

BP6.DIR3. Данное направление *развивает предыдущие два направления на этапе интенсивного поиска* путем замены каждой пары коррелированных признаков в рамках всего пространства и всей выборки (этому варианту соответствует путь 1), либо в рамках отдельной модельной формы (путь 2) на один объединенный признак в виде отношения признаков этой пары, отнормированных путем вычитания своих средних значений. Настоящий прием позволит значительно упростить формы классов. В частности, можно перейти от областей расположения точек вдоль наклонного эллипсоида к областям с более компактной и ненаклонной формой, удобной для анализа метрическим или топологическим методом. Отметим, что подобный способ интенсивной модификации модельной формы (наряду с перебором весов признаков в метрическом или графовом подходе, либо варьирования диапазонов признаков в топологическом подходе) приводит к достаточно глубокой адаптации модели к локальным особенностям выборки. Поэтому в условиях ограниченной выборки данное направление формирования классов-первообразов должно быть дополнено процедурой обеспечения устойчивости результата.

BP6.DIR4. *Развитие предыдущего направления за счет подключения метода выделения закономерных модельных форм* ко второму этапу. При необходимости итоговая устойчивость полученных наборов классов может быть проверена либо по методу МГУА (в случае выборки большого объема), либо по методу скользящего экзамена.

BP7. (Бифуркация по способам объединения классов-первообразов в цепочки). В связи с тем, что образованные предшествующим направлением классы-первообразы могут пересекаться (как по составу объектов, так и по своим формам-областям многомерного пространства признаков), возникает задача объединения пересекающихся элементарных форм в связные цепочки или *фигуры*. Выделим, в зависимости от имеющихся ресурсов, объема выборки и степени разнообразия покрытия выборки наборами из сформированных ранее классов-первообразов, два направления объединения.

BP7.DIR1. *Объединение классов-первообразов без контроля на устойчивость.* В рамках данного направления предполагается, что в результате выполнения предыдущего направления был выделен некоторый минимальный набор элементарных качественных форм, образующих покрытие точек выборки. В этой ситуации объединяются в цепочки те классы, показатель пересечения которых (по составу и многомерным областям) выше заданного порога. В процессе объединения двух форм может быть использована эффективная процедура свертки пары признаков в один (аналогично, как в BP6.DIR3) в случае наличия между ними регрессионной зависимости (в общем случае нелинейной). Отметим, что подобная процедура представляет интерес в связи с построением регрессионной модели оценки ЦС. Так, в рамках формы-первообраза или объединенной формы можно получать одну или несколько одномерных локальных регрессий и использовать их далее при синтезе итоговой мультипликативной или аддитивной формулы оценки ЦС.

BP7.DIR2. *Объединение классов-первообразов с обеспечением устойчивости формируемого покрытия.* В этом случае от предыдущего направления оставляется набор упорядоченных по качеству форм, образующих минимальное покрытие (см. направление BP6.DIR1), и дополнительно к нему группа из оставшихся форм, качество которых выше или незначительно меньше качества последней формы минимального набора. Особенностью дополнительной группы является также то, что каждая из ее форм отличается от любой другой формы (из минимального и дополнительного наборов) более чем на заданный порог. При этом, так же как и для первого направления, на множестве форм вводится показатель близости, совмещающий в себе долю пересеченности по объектам и долю пересеченности объемов областей пространства признаков. Далее на множестве выбранных форм организуется процедура достижения адекватности образуемых фигур, согласно п. 1. При этом для параллельной генерации используются все исходные формы. Каждая из этих форм порождает свою цепочку связанных форм или фигуру. Алгоритм порождения фигуры состоит в поэтапном и адапционном объединении образующейся фигуры с новой элементарной формой, имеющей с ней пересечение не менее заданного порога и ядро вне периферии формы фигуры. В процессе объединения фигуры так же, как и для пути 1, может применяться (в случае повышения качества класса) процедура свертки признаков, коррелированных в рамках объединенной формы. Локальная адаптация фигуры реализуется путем подбора в качестве следующей объединяющейся с ней только той элементарной формы, которая даст наивысшее качество текущего объединенного класса.

После получения набора фигур осуществляется процедура оценки закономерности каждой из них с целью достижения устойчивости (см. п. 1). Закономерность фигуры так же, как и закономерность элементарной формы (см. BP6.DIR2), характеризуется числом первоисточников, породивших ее в процессе адаптации.

BP8. (Бифуркация по способам построения итоговой классификации или покрытие объектов выборки).

BP8.DIR1. Первое направление соответствует *упрощенному варианту построения фигур* (BP7.DIR1) и выполняет функцию «подчистки» итоговой классификации, состоящую в корректировке пересекающихся фигур покрытия путем разнесения объектов из пересечения к более близким классам с последующей модификацией границ фигур этих классов. В процессе интерпретации классов итоговой классификации эксперт по причинам нестыковки некоторого класса с соседними классами (в частности, по тенденции изменения вида уравнения оценки ЦС) может забраковать этот класс. Если таких классов оказалось несколько, либо это большой (по составу и размеру фигуры) класс, то необходимо возвращаться на одну из предыдущих точек бифуркации в рамках функционирования балансировки. В случае отбраковки малого класса, он может быть расформирован аналогично, как объект из зоны пересечения классов.

BP8.DIR2. В рамках данного направления, опирающегося на результаты BP7.DIR2, решается *задача получения адекватного и устойчивого покрытия.* С этой целью на множестве подготовленных ранее перспективных закономерных фигур организуется эксперимент по перебору различных вариантов покрытия. При этом в интегральный показатель качества покрытия включаются: взвешенный показатель качества классов, включающий точность и устойчивость оценки ЦС; суммарная характеристика пересеченности классов; средний показатель закономерности задействованных в покрытии фигур. После выделения оптимального покрытия, при необходимости, оно может быть скорректировано с помощью описанной для первого направления процедуры «подчистки» классификации.

BP9. (Бифуркация по стратегиям балансировки процессов построения регрессионной модели). В зависимости от типа решаемой задачи, объема времени на разработку модели, а также других имеющихся в распоряжении исследователя ресурсов, могут выбираться, по крайней мере, три типа стратегий: *жесткая, средняя и мягкая.*

BP9.DIR1. *Направление с жесткой балансировкой.* Используется данное направление преимущественно для более простых задач (BP1.DIR1 – BP1.DIR5) с ориентацией в каждой точке бифуркации на наименее ресурсоемкие

данные, менее глубокие фактор-представления и более простые способы построения классов-первообразов, фигур классов и итогового покрытия. При этом во всех случаях поиск оптимальных вариантов, диапазоны переборов или пороги для останова процесса адаптации выбираются так, чтобы минимизировать число вариантов или итераций.

BP9.DIR2. *Направление со стратегией балансировки среднего типа* применяется также при решении задач BP1.DIR1 – BP1.DIR5 при необходимости достижения более высокой по сравнению с первым направлением точности оценки ЦС. В этом случае по ряду точек бифуркации могут быть выбраны более сложные направления и более широкие диапазоны переборов, обеспечивающие адекватность и устойчивость результата.

BP9.DIR3. Данное *направление со стратегией мягкой балансировки* предназначено для решения задач BP1.DIR6 и BP1.DIR7, предполагающих углубленное выяснение природы формирования ЦФ. Соответственно, для этих целей выбираются самые сложные (по мере наличия ресурсов) направления точек бифуркации и наиболее широкие диапазоны переборов.

Заключение

В рамках представленной схемы, используемая обычно в качестве необязательного методологического приема, известная идея поэтапного развития регрессионной модели [11] переведена в разряд ведущего источника оптимизации процесса моделирования АС. Практическая значимость схемы выражена в ее ориентированности, благодаря оригинальному механизму обеспечения адекватности и устойчивости модели, на создание гибких и эффективных программно-технологических средств моделирования процессов совершенствования реальных АС. Реализованный подход, с одной стороны, обеспечивает системный охват основных способов и приемов разработки модели, гибкий доступ к широкому набору данных в виде реперных, обучающих и прогнозных выборок, априорных форм и интуитивных знаний эксперта, а, с другой стороны, – представляет возможность для оперативного подключения разнообразной корректирующей информации к процессам генерации, интерпретации, оценке качества модельных форм и отсева неэффективных моделей. Ограниченность данного метода связана с необходимостью привлечения к моделированию наиболее ресурсоемких способов оптимизации модели, а также высококвалифицированных экспертов по разработке концептуальной модели ЦФ и организации синтеза фактор-признаков. Для каждого вида АС требуется отдельное моделирование и программирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осипенко, А.Н.* Метод и средства автоматизации моделирования активных систем: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / А.Н. Осипенко; ГГУ им. Ф. Скорины. – Гомель, 1997. – 16 с.
2. *Осипенко А.Н.* О формировании эмпирического образа данных / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко // М.: НТИ. – 1990. – Сер. 2. – С.30–35.
3. *Осипенко, А.Н.* Систематизация пострадавших в результате чернобыльской катастрофы сельскохозяйственных предприятий и выбор направлений их экономического развития / А.Н. Осипенко, П.Н. Стрибук // Известия Академии аграрных наук РБ. – 2001. – № 2. – С. 20–26.
4. *Осипенко, А.Н.* Выявление причинно-следственных связей в компьютерном моделировании социальных и природных систем / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко, П.Н. Стрибук // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2002. – № 6 (15). – С. 105–109.
5. *Построение модели факторов здоровья сельского населения по данным скринингового обследования* / А.Н. Осипенко [и др.] // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 4 (37). – С. 113–115.
6. *Пример применения метода корреляционно-регрессионного анализа в производственной проблеме* / Н.Б. Осипенко [и др.] // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 59–64.
7. *Кластерно-регрессионная модель оценки дозы внутреннего облучения жителей сельских населенных пунктов* / А.Н. Осипенко [и др.] // Сб. Прогноз, профилактика, лечение и медико-психологическая реабилитация пострадавших. – Минск, 1995. – С. 37–41.
8. *Осипенко, А.Н.* Концепция комплексного моделирования поставочных процессов жизнедеятельности социума населенного пункта / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко, В.Н. Подобедов // Сб. статей научно-практической конф. «Медицинские последствия Чернобыльской катастрофы». – Минск, 1997. – С. 263–268.
9. *Осипенко, А.Н.* Алгоритм анализа данных на базе порядкового пространства признаков / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко, В.Н. Подобедов // Вопросы экономики и организации информационных технологий: Матер. Всесоюз. науч.-практ. конф. Ч. 2. – Гомель, 1991. – С. 28–30.
10. *Айвазян, С.А.* Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: справочное изд. / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков. – М.: Финансы и статистика. 1989. – 605 с.
11. *Ивахненко, А.Г.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным / А.Г. Ивахненко, Ю.П. Юрачковский. – М.: Радио и связь, 1987. – 120 с.

Поступила в редакцию 14.10.19.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В БИОМЕХАНИКЕ СПОРТА С ПОМОЩЬЮ КВАТЕРНИОНОВ

М.А. Киркор, А.Е. Покатилов, А.М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия

THE STUDY OF THE SPATIAL MOVEMENT IN BIOMECHANICS OF SPORTS WITH THE HELP OF QUATERNIONS

M.A. Kirkor, A.E. Pokatilov, A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies

В статье представлены исследования пространственного движения опорно-двигательного аппарата спортсмена с использованием модели биомеханической системы с 25 звеньями. Показано, что при анализе спортивного упражнения задача разбивается на ряд этапов: натурный эксперимент, автоматизированную обработку результатов видеосъемки, разработку математических моделей с использованием алгебры кватернионов, вычислительный эксперимент на ЭВМ. Для получения исходных данных вычислительного эксперимента предложено использовать технологию «компьютерного зрения» на основе программного комплекса *iPi Soft*. При этом математические модели разбиваются на две группы: описывающие движение полюса биомеханической системы и модели на основе кватернионов для описания механики поворотов звеньев в суставах опорно-двигательного аппарата спортсмена.

Ключевые слова: анализ движения, захват движения, кватернионы, компьютерное зрение, пространственное движение, полюс.

A study of the spatial movement of the musculoskeletal system of the athlete using a model of a biomechanical system with 25 links is presented. It is shown that in the analysis of sports exercises the problem is divided into a number of stages: full-scale experiment, automated processing of video results, the development of mathematical models using the algebra of quaternions and computational experiment on a computer. To obtain the initial data of the computational experiment, it is proposed to use the technology of "computer vision" based on the software complex *iPi Soft*. Thus the mathematical models are divided into two groups: those describing the movement of the pole of the biomechanical system, and the model based on quaternions for the description of the mechanics of the turns of the links in the joints of the musculoskeletal system of the athlete.

Keywords: motion analysis, motion capture, quaternions, computer vision, spatial motion, pole.

Введение

Существующие на сегодняшний день проблемы в организации экспериментальных исследований по биомеханике пространственного движения в спорте и отсутствие математических моделей, позволяющих адекватно описать такое движение для пространственной модели опорно-двигательного аппарата спортсмена с увязкой с вычислительными алгоритмами расчета по ним на ПЭВМ, ставят задачи как для теоретического исследования пространственного движения, так и задачи разработки методов, алгоритмов, компьютерных программ и аппаратной части для проведения натурного эксперимента [1].

При анализе любого вида движения в спорте: плоского или пространственного, возникает проблема получения обобщенных координат биомеханической системы (БМС). Проблема имеет несколько аспектов: это техническая возможность получения траекторных положений звеньев биосистемы как таковых и возможность в приемлемые сроки и с приемлемой точностью на следующем этапе выполнить вычислительный эксперимент [2], [3].

Применяемые в биомеханике спорта модели биомеханической системы имеют ряд существенных

недостатков: обычно модели описывают плоское движение, а математические модели для него построены с использованием рекуррентных отношений по результатам анализа трехзвенной БМС, то есть описывают частный случай [3], [4].

Более сложные варианты, т. е. пространственное движение спортсмена, при исследовании на экспериментальном и теоретическом уровнях разбиваются или на изучение движения отдельных звеньев, а не всей системы, или весьма сложны и очень трудоемки, и поэтому используются всего лишь модели БМС с небольшим числом звеньев, т. е. исследуются модели с малым числом степеней свободы. Отметим, что трудоемкость расчетов с увеличением числа звеньев в применяемой модели БМС при переходе к пространственному движению такова, что она является ограничивающим фактором, т. е. критичным. Многие теоретические и экспериментальные исследования не проводятся из-за невозможности их выполнения в приемлемых временных рамках.

Следующими важнейшими проблемами являются отсутствие математических моделей адекватно описывающих пространственное движение биомеханической системы с учетом ее

сложности, трудоемкости расчетов по ней параметров движения на кинематическом и динамическом уровнях по существующим алгоритмам, моделям и методикам, а также наличие определенных ограничений в применении большинства методов, изучающих пространственное движение [5].

Анатомия человеческого тела позволяет совершать только угловые плоские или пространственные движения звеньев в суставах. Перемещение всего тела спортсмена (БМС) является лишь следствием этого движения. Таким образом, исследования в области биомеханики поворота является приоритетной задачей при исследовании пространственного движения [6].

Использование направляющих косинусов при больших объемах вычислений с расчетной точки зрения невыгодны, а при решении задач биомеханики движения порой и невозможны, так как для каждого звена БМС требуется шесть уравнений да еще с учетом того, что каждый тригонометрический параметр с точки зрения компьютерных вычислений это подпрограмма, требующая своего времени вычисления [5], [7].

Использование в непосредственных вычислениях углов Эйлера – Крылова тоже сопряжено с определенными проблемами. В [5] отмечено, что любая система углов моделирует некоторый карданов подвес, который при определенных значениях углов будет отражать эффект складывания рамок этого подвеса, т. е. происходит вырождение кинематических уравнений.

В работах [5], [7], [8] показано, что применение кватернионов дает, во-первых, всего одно уравнение связи, позволяющее проще комбинировать вращения, а также избежать проблемы, связанной с невозможностью поворота вокруг оси независимо от совершённого вращения по другим осям, а также создает удобный и наглядный формализм.

1 Экспериментальное исследование пространственного движения биомеханической системы

Отметим, что многие методы, аппаратура и прочее, используемые в исследованиях по биомеханике спорта не обязательно разрабатываются для решения проблем спорта, первоначальное применение может быть иное. Например, широко применяемые в натурном эксперименте по получению траекторных положений спортсмена

видеокамеры имеют более общее назначение, чем только для спорта [9]. Поэтому анализ смежных областей промышленности, культуры и искусства показал, что в настоящее время развиваются методы и совершенствуется материальная часть, предназначенные для автоматизированного получения координат движущегося тела, робота, человека и т. д. без привязки к исследовательским задачам биомеханики движения в спорте. Применяются результаты такой работы в кинематографе при разработке спецэффектов, в компьютерных играх, съемке мультипликационных фильмов, в робототехнике, при распознавании человеческих эмоций и пр. [9]–[12].

Такие технологии получили общее название «захват движения» (*motion capture*). Более целенаправленный анализ существующего уровня техники и науки показывает перспективность применения технологии безмаркерного «захвата движения» под названием «компьютерное зрение» [13]. Отметим только, что применение «захвата движения» в кинематографе и биомеханике спорта преследует разные конечные цели: в кинематографе это визуализация необходимых движений нарисованных графических структур, а в биомеханике – получение исходных данных по координатам спортсмена во время выполнения упражнения для последующего проведения вычислительного эксперимента по соответствующим математическим моделям на кинематическом и динамическом уровнях [13]–[15].

На рисунке 1.1 показан фрагмент видеозаписи выполнения формального упражнения в карате (ката) компьютерной программой *iPi Recorder* по технологии «компьютерного зрения». Съемка проводилась 4-мя видеокамерами *Sony PlayStation Eye for PS3* со скоростью 60 кадров в секунду. Выполнял ката мастер спорта РБ А.Р. в спортивном комплексе МГУП.

Для экспериментального исследования пространственного движения была использована кинематическая схема опорно-двигательного аппарата человека, представленная на рисунке 1.2. Данная схема моделирует движение позвоночника, головы и отдельных сегментов конечностей: рук и ног, что позволяет в последующем получить кинематические и динамические характеристики движения с необходимой детализацией применительно к человеческому телу, определяемого нами как биомеханическая система (БМС).



Рисунок 1.1 – Видеозапись ката (карате) программой *iPi Recorder*

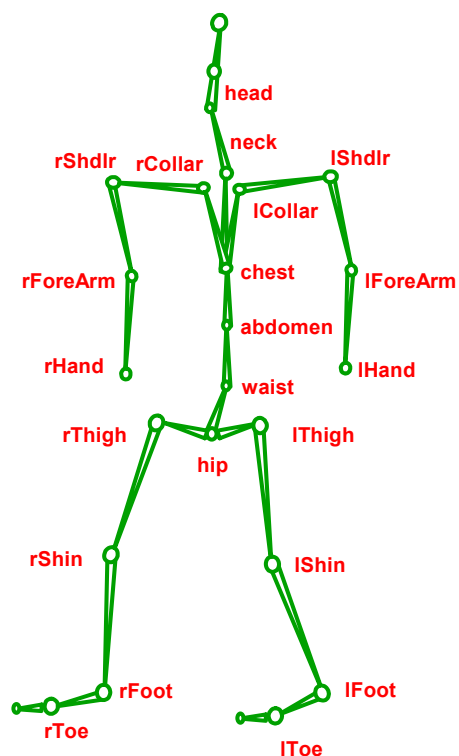


Рисунок 1.2 – Модель биомеханической системы

Такой подход позволил значительно увеличить степень свободы биомеханической системы (БМС) по сравнению с традиционно применяемой в биомеханике спорта, где зачастую ограничиваются всего тремя звеньями: ноги, туловище

и руки. В модели по рисунку 1.2 имеем 25 звеньев. Детализация увеличивается на порядок, при этом из плоской схема стала пространственной, что изменило ее качественно [16], [17].

Также отметим, что в человеческом теле с точки зрения механики суставы биомеханической системы (узлы) относят к одноподвижным, двухподвижным и трехподвижным. Это все узлы вращательного типа. На применяемой модели по рисунку 1.2 таких анатомических ограничений нет, что увеличивает точность применяемых математических моделей на кинематическом и динамическом уровнях.

На рисунке 1.3 показана отработка методики «компьютерного зрения» и проверка границ ее применимости. Условия видеосъемки специально затруднены и проводятся в учебной аудитории на сложном пестром фоне. Спортсмен одет в повседневную одежду.

На рисунке 1.4 показан еще один момент отработки «компьютерного зрения» после расшифровки и визуализации результатов программой *iPi Mocap Studio* [18]. Спортсмен одет в однотонного цвета спортивный костюм без всяких датчиков и маркеров и движется не только на сложном фоне, но и в условиях визуальных преград – штатив мешает видеосъемке. Тем не менее на результате анализа координат в виде графического скелета на рисунке 1.4 помеха не сказывается. На рисунке 1.5 показан тот же скелет по рисунку 1.4, но в отсутствии изображения спортсмена.



Рисунок 1.3 – Съемка «компьютерным зрением» в сложных условиях



Рисунок 1.4 – Видеокадр после расшифровки

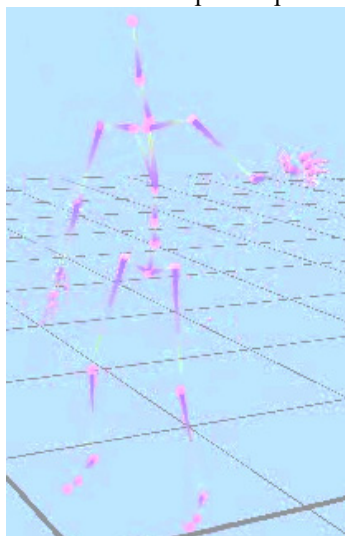


Рисунок 1.5 – Скелет БМС

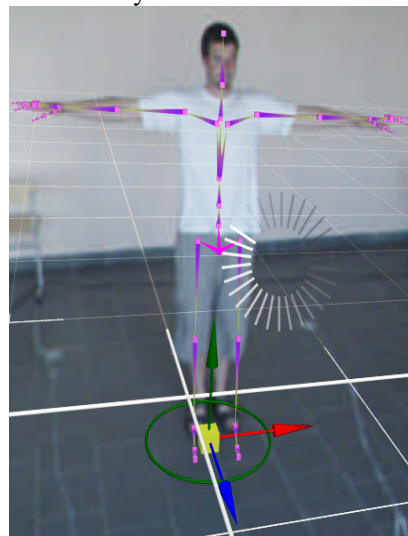


Рисунок 1.6 – Настройка «компьютерного зрения»

На рисунке 1.6 показана настройка «компьютерного зрения» на этапе расшифровки видеосъемки. Для этого типовой скелет применяемой модели биомеханической системы по рисунку 1.2 визуально подстраивается под размеры конкретного спортсмена. Данный этап существует во всех технологиях «захвата движения», использующих компьютерную обработку видеозображения [11], [17].

Также отметим, что по рисунку 1.6 полюс настраиваемого типового скелета биомеханической системы находится в области ног (опора).

Так же укажем на важный момент в работе «компьютерного зрения»: результатом работы программы *iPi Recorder* и, прежде всего, *iPi Mocap Studio*, является файл формата *BVH* (*Bio Vision Hierarchical*) со структурой графической модели в виде графа и кадровыми координатами звеньев в суставах в виде углов Эйлера [13], [16]. Структура графа (графическое дерево) соответствует рисунку 1.2.

Именно наличие кадрово численных значений угловых координат в виде углов Эйлера всех звеньев биомеханической системы и позволяет выполнить в дальнейшем вычислительный эксперимент по кинематике и динамике пространственного движения по разработанным исследователем математическим моделям пространственного движения.

Отметим, что скорость расшифровки координат по технологии «компьютерного зрения» не выполняется в режиме *on-line*, но, тем не менее, занимает всего несколько часов и зависит только от мощности применяемой видеооплаты, так как вся расшифровка видео выполняется ею, а не процессором [18].

2 Математическое моделирование пространственного движения с использованием алгебры кватернионов

На рисунке 2.1 показан «захват движения» по технологии «компьютерного зрения» шестью камерами после выполнения расшифровки движения. Здесь скелет в автоматическом режиме наложен на изображение спортсмена.

Отметим, что на данном этапе компьютерной программой уже сформирован файл формата *BVH* с линейными координатами биомеханической системы в начальном положении и угловыми (углы Эйлера) координатами модели БМС по рисунку 1.2 для каждого звена покадрово.

На рисунке 2.1 имеем абсолютную (глобальную) координатную систему $Oxyz$ и полюс P , расположенный в тазовой области БМС. Отметим разницу в понятии и назначении полюса в технологии «компьютерного зрения» (рисунок 1.6) и в биомеханике (рисунок 2.1). Также различно и их местоположение. В «компьютерном зрении» относительно полюса настраивается скелет БМС, а в биомеханике относительно полюса записываются все кинематические уравнения пространственного движения спортсмена [1], [2], [19].

Координата любого узла БМС \bar{R}_{O_i} по рисунку 2.1 в абсолютных координатах определяется как

$$\bar{R}_{O_i} = \bar{R}_{OP} + \sum_{k=1}^i \bar{r}_k. \quad (2.1)$$

Здесь радиус-вектор \bar{R}_{OP} определяет положение полюса БМС, находящегося в тазовой области тела спортсмена, вектор \bar{r}_k определяет уже положение каждого звена в пространстве относительно проксимального по отношению к полюсу

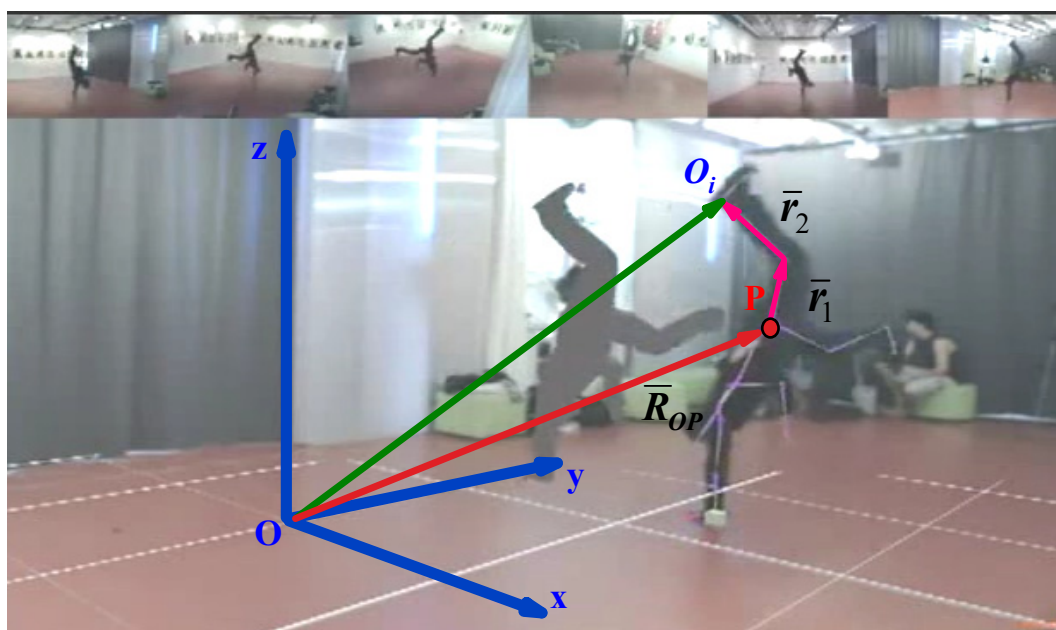


Рисунок 2.1 – Захват движения с помощью «компьютерного зрения»

сустава, то есть родительскому суставу по графическому дереву файла формата *BVH*.

Таким образом, в соответствии с уравнением (2.1) пространственное движение разбивается на два движения: на движение полюса ОР биомеханической системы и поворот каждого звена в соответствующем суставе. Последняя задача относится к механике поворотов [5]–[8].

Продифференцируем по времени выражение (2.1). В общем виде получим векторную скорость \bar{v}_{O_i} любой точки O_i биомеханической системы

$$\bar{v}_{O_i} = \frac{d\bar{R}_{O_i}}{dt} = \frac{d\bar{R}_{OP}}{dt} + \frac{d\left(\sum_{k=1}^i \bar{r}_k\right)}{dt}. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) можно использовать для получения линейных скоростей суставов БМС, центров масс звеньев и общего центра масс биосистемы.

Продифференцировав по времени уравнение (2.2), получим в общем виде уравнения для ускорений всех точек БМС. Имеем

$$\bar{a}_{O_i} = \frac{d\bar{v}_{O_i}}{dt}. \quad (2.3)$$

Выражение для ускорений (2.3) представлено в самом общем виде.

Важным моментом является тот факт, что необходимо математические модели и технологию «компьютерного зрения» связать в единое целое, и решать как сквозную задачу – «захват движения» обеспечивает исходными данными математические модели пространственного движения спортсмена, и поэтому последние должны разрабатываться под данный способ получения пространственных координат.

По технологии «компьютерного зрения» данные о движении показываются в виде иерархии основных узлов скелета человека, где вращение одних суставов относительно других представлено в виде кватернионов (роль вращающихся векторов выполняют кости скелета), а смещение представлено в виде трехмерных векторов в локальной для каждого узла системе координат:

$$T_{лок}^n = (x_n - x_{n-1}, y_n - y_{n-1}, z_n - z_{n-1}), \quad (2.4)$$

где $T_{лок}^n$ – локальное смещение каждого n -го узла относительно родительского узла, $n > 0$;

$$T_{глоб}^n = \prod_{i=0}^n T_{лок}^i, \quad (2.5)$$

$T_{глоб}^n$ – смещение n -го узла относительно глобальной системы координат;

$$Q_{глоб}^n = \prod_{i=0}^n Q_{лок}^i, \quad (2.6)$$

$Q_{глоб}^n$ – кватернион, представляющий вращение в глобальной системе координат (СК); $Q_{лок}^i$ – кватернион, представляющий вращение в локальной СК (относительно родительского элемента); n – порядковый номер узла в иерархической цепочке

скелета тела человека; i – порядковый номер дочернего узла в цепочке, $i < n$.

Таким образом, любой узел человеческого тела в представлении движения характеризуется вектором смещения T и кватернионом вращения Q , и для каждого кадра f имеем:

$$J_n = \langle Q_n T_n f \rangle = \begin{cases} n, f \in N, \\ Q \in H, \\ T \in R^3. \end{cases} \quad (2.7)$$

Получается, чтобы представить движение в формате *BVH*, необходимо найти соответствие между кватернионными представлениями углов вращений основных суставов человеческого тела и представлением этих же вращений в углах Эйлера и использовать математические модели (2.4)–(2.7).

Для данной технологии применения «компьютерного зрения» и алгебры кватернионов предложен общий алгоритм формализации движения в *BVH*-файле в виде блок-схемы.

Заключение

Исследование пространственного движения разбивается на ряд этапов, включающих разработку методов измерения траекторных положений спортсмена во время выполнения спортивного упражнения, разработку математических моделей на основе алгебры кватернионов и проведение вычислительного эксперимента на ПЭВМ. При этом методы измерения пространственных координат биомеханической системы, математические модели движения и расчетные алгоритмы вычислительного эксперимента составляют единый согласованный исследовательский комплекс, направленный на получение расчетных данных по кинематике и динамике пространственного движения с необходимой точностью для многозвенной пространственной биосистемы и с разумной трудоемкостью расчетов как при решении задач анализа целенаправленного движения так и его синтеза.

Одним из важнейших элементов исследования пространственного движения является «компьютерное зрение». Исследование и экспериментальная апробация данного метода на примере некоторых видов спорта и обычного повседневного пространственного движения показали устойчивость данного метода к помехам при видеосъемке, а также устойчивость к сложному фону, на котором перемещается биомеханическая система.

Также экспериментально установлено, что данная технология «захвата движения» предъявляет низкие требования к одежде и обуви человека – сниматься можно в специализированной спортивной форме, например, в кимоно, в повседневной одежде и в одноцветном спортивном костюме.

Теоретические исследования по кинематике пространственного движения показали, что

математические модели движения биомеханической системы имеют следующую структуру: первая часть описывает перемещение полюса биомеханической системы, расположенного в области общего центра масс (ОЦМ) биосистемы (тазовая область), а вторая часть описывает перемещение каждого звена (кости) тела спортсмена. При этом все звенья совершают вращательное движение в проксимальных по отношению к ОЦМ суставах.

Следовательно, математические модели построены таким образом, что учитывают два уровня движения каждого сустава (узла): локальный и глобальный. Локальный отображает кинематику движения относительно проксимального (родительского) сустава звена. На глобальном же уровне определяют смещение каждого сустава в глобальной (неподвижной, абсолютной) координатной системе. Разделение математических моделей на локальный и глобальный уровни относится как к линейному перемещению, так и к кватернионам, описывающим вращательное движение звеньев (костей).

Исследования пространственного движения на кинематическом уровне являются основой для изучения динамики целенаправленного движения спортсмена. В этом случае на кинематическом уровне должны быть не только уравнения линейных и угловых координат, но и их первые и вторые производные по времени.

Предложенный триединый исследовательский методический комплекс позволяет автоматизировать получение координат пространственного движения спортсмена на основе использования «компьютерного зрения», на порядок усложнить применяемые модели биомеханической системы, приблизив их к реальному скелету человека, и с использованием алгебры кватернионов выполнить вычислительный эксперимент по оптимальным алгоритмам с минимальным временем расчета, что является критичным в случае анализа и синтеза пространственного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бегун, П.И.* Моделирование в биомеханике: учеб. пособие / П.И. Бегун, П.Н. Афонин. – М.: Высш. шк., 2004. – 390 с.
2. *Покатилов, А.Е.* Биодинамические исследования спортивных упражнений в условиях упругой опоры / А.Е. Покатилов, В.И. Загrevский, Д.А. Лавшук. – Минск: Изд. центр БГУ, 2008. – 279 с.
3. *Покатилов, А.Е.* Биомеханика взаимодействия спортсмена с упругой опорой / А.Е. Покатилов; под ред. В.И. Загrevского. – Минск: Изд. центр БГУ, 2006. – 351 с.
4. *Бегун, П.И.* Биомеханика: учеб. для вузов / П.И. Бегун, Ю.А. Шукейло. – СПб.: Политехника, 2000. – 463 с.
5. *Бранец, В.Н.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1973. – 320 с.

6. *Борисенко, Л.А.* Манипуляторы: Механика поворотов / Л.А. Борисенко. – Мн.: Техналогия, 2001. – 121 с.

7. *Kulpers, J.B.* Quaternions and rotation sequences / J.B. Kulpers. – Princeton., New Jersey. – 1999. – 371 с.

8. *Мирмович, Э.Г.* Алгебра кватернионов и вращения в трехмерном пространстве / Э.Г. Мирмович, Т.В. Усачева // Научные и образовательные гражданской защиты. – 2009. – № 1. – С. 71–79.

9. *Техническое зрение роботов* / В.И. Мошкин, А.А. Петров, В.С. Титов, Ю.Г. Якушенко; под общ. ред. Ю.Г. Якушенко. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.

10. *Орлова, Ю.А.* Обзор современных автоматизированных систем распознавания эмоциональных реакций человека / Ю.А. Орлова, В.Л. Розалиев // Изв. Волг. ГТУ. Серия «Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах». Вып. 10: межвуз. сб. науч. ст. / ВолгГТУ. – 2011. – № 3. – С. 68–72.

11. *Развитие системы автоматизированного определения эмоций и возможные сферы применения* / А.В. Заболеева-Зотова, Ю.А. Орлова, В.Л. Розалиев, А.С. Бобков // Открытое образование. – 2011. – № 2. – С. 59–62.

12. *Покатилов, А.Е.* Проблемы исследования механики движения опорно-двигательного аппарата человека / А.Е. Покатилов, М.А. Киркор // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 59–67.

13. *Методы обработки и распознавания изображений лиц в задачах биометрии* / Г.А. Кухарев [и др.]. – М.: Политехника, 2013. – 416 с.

14. *Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения* / С.Ю. Желтов [и др.]. – М.: Физматкнига, 2010. – 672 с.

15. *Розалиев, В.Л.* Анализ видеоряда для определения эмоциональных реакций человека / В.Л. Розалиев, А.С. Бобков, О.С. Федоров // Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе (IT+SE'10). Майская сессия (Украина, Крым, Ялта – Гурзуф, 20–30 мая 2010 г.): матер. XXXVII Междунар. конф. и дискуссионного науч. клуба: прилож. к журн. «Открытое образование» / РАН [и др.]. – Б/м, 2010. – С. 79–81.

16. *Шати́ро, Л.* Компьютерное зрение / Л. Шати́ро, Дж. Стокман. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 752 с.

17. *Форсайт, Д.* Компьютерное зрение. Современный подход / Д. Форсайт, Ж. Понс. – М.: «Вильямс», 2004. – 928 с.

18. *Лукьяница, А.А.* Цифровая обработка видеоизображений / А.А. Лукьяница, А.Г. Шишкин. – М.: «Ай-Эс-Эс Пресс», 2009. – 518 с.

19. *Покатилов, А.Е.* Математическое моделирование движения биомеханической системы / А.Е. Покатилов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 4 (17). – С. 95–99.

Поступила в редакцию 18.07.19.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА И ОБНАРУЖЕНИЯ ЛАНДШАФТНЫХ ПОЖАРОВ

А.В. Киселев^{1,2}, В.А. Гольдаде^{1,3}

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²ООО «Совершенные системы», Гомель

³Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси

AUTOMATIZED SYSTEM OF ECOLOGICAL MONITORING AND LANDSCAPE FIRE DETECTION

A.V. Kiselyov^{1,2}, V.A. Goldade^{1,3}

¹F. Scorina Gomel State University

²“Perfect systems” Ltd. Co., Gomel

³V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of NAS of Belarus

Рассмотрены методы обнаружения лесных пожаров, среди которых особое внимание уделено мониторингу с помощью поворотных видеокамер, установленных на вышках. Предложена система видеомониторинга, которая обеспечивает свободное вращение IP-камеры в горизонтальной плоскости на 360 градусов и позволяет контролировать состояние лесного массива с отсутствием «мертвых зон». Система позволяет с высокой оперативностью обнаруживать возгорание, осуществлять радиационный контроль и фиксировать изменения параметров радиационного фона в случаях возникновения лесных пожаров.

Ключевые слова: лесные пожары, радиационный фон, поворотная видеокамера, мониторинг.

Methods of landscape fire detection are examined and among them, special attention is devoted to monitoring with the help of rotary video camera placed on towers. A system of video-monitoring is suggested which secures free 360 degrees rotation of the IP-camera in horizontal plane and allows controlling the state of the forestland without “dead space”. The system allows detecting ignition with high efficiency, exercising radiation monitoring, and fixing the changes of radiation background parameters in case of forest fire beginnings.

Keywords: forest fire, radiation background, rotating video-camera, monitoring.

Введение

Традиционный метод обнаружения ландшафтных пожаров базируется на использовании специализированных пожарно-наблюдательных вышек, где располагается наблюдатель, который посредством связи и оптических устройств визуального контроля обнаруживает возгорание и сообщает об этом в диспетчерский пункт [1]. К преимуществам данного подхода можно отнести сохранившуюся до сегодняшних дней инфраструктуру вышек, простоту, масштабируемость и высокую оперативность. Однако данный способ предусматривает необходимость постоянного использования человеческого труда в каждой точке расположения вышки и увеличение дозой нагрузки на работников лесного хозяйства, осуществляющих противопожарный и радиационно-измерительный мониторинг территории.

Методы обнаружения пожаров с воздуха с использованием *летательных аппаратов* разного класса [2], которые с определенной периодичностью облетают пожароопасную территорию и при обнаружении пожара определяют его координаты и передают в центр контроля информацию об обнаруженном пожаре, позволяют осуществлять мониторинг больших территорий.

Основным недостатком является высокая стоимость летного часа и отсутствие возможности вести постоянный радиационный контроль для определенного участка местности. Использование беспилотных летательных аппаратов (дронов) может существенно снизить стоимость летного часа, но их использование пока сдерживается по многим причинам [3].

Глобальный подход для мониторинга лесных пожаров основан на использовании *специализированных спутников*, находящихся на негостационарных орбитах и производящих снимки земной поверхности в ИК-диапазоне [4]. Картинка передается в специальные центры, откуда заинтересованные пользователи могут получать все данные через сеть Интернет. К преимуществам данного способа относятся: автоматизация процесса получения данных, дистанционность способа, возможность мониторинга любых участков местности, легкий доступ к информации через сеть Интернет. В качестве недостатков спутникового мониторинга можно отметить большую площадь минимально обнаруживаемого очага возгорания (1–50 га), невысокую периодичность получения данных (несколько раз в сутки) и сильное влияние погодных условий.

В условиях ветреной погоды задержка обнаружения в 4–6 часов даже небольшого пожара может привести к серьезным последствиям и увеличить стоимость его ликвидации в разы. Но при всех недостатках спутниковый мониторинг необходим в случае контроля больших лесных территорий и отсутствием возможности мониторинга другими способами. Стоимость спутникового мониторинга также является очень высокой.

1 Системы видеомониторинга

Примерно с начала 2000-х годов начинают появляться системы видеомониторинга, предназначенные для обнаружения лесных пожаров [5]. Основной особенностью видеосистемы мониторинга является высокая степень автоматизации и возможность использования существующей инфраструктуры пожарно-наблюдательных вышек. Существующие видеосистемы представляют собой поворотные камеры, устанавливаемые на вышках с выводом видеоизображения на пульт оператора, который должен находиться рядом с постом видеомониторинга и вести круглосуточное наблюдение за территорией. Однако данный подход требует постоянного использования человеческого труда в каждой точке расположения вышки, не позволяет дистанционно определять координаты очага возгорания. Масштабировать такую систему также не представляется возможным.

Система мониторинга лесных пожаров «Лесной дозор» в некоторой степени лишена этих недостатков [6], [7]. Система содержит оборудование, необходимое для наблюдения на высотных сооружениях (купольные поворотные видеокамеры, инфракрасные камеры, тепловизоры), и обеспечивает высокую эффективность обнаружения лесных пожаров с возможностью дистанционного вычисления координат очага возгорания. Недостатком системы является невозможность полного охвата горизонта (360 градусов) с помощью одной купольной поворотной видеокамеры (рисунок 1.1). Наличие «мертвых зон» вынуждает использовать как минимум две

поворотные камеры на одной вышке для гарантированного обнаружения очагов возгорания, что увеличивает стоимость системы.

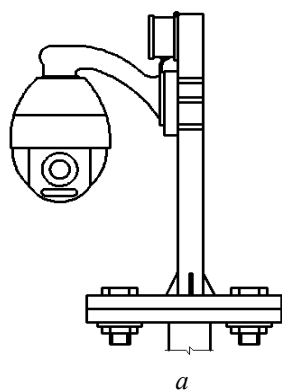
Недостатком является также необходимость вручную на мониторе оператора указывать точку очага возгорания, после чего система рассчитывает направление (азимут) места пожара. Кроме того, система не предусматривает возможность дистанционного радиационного контроля и передачи информации об изменении параметров радиационного фона на пульт оператора.

2 Автоматизированная система

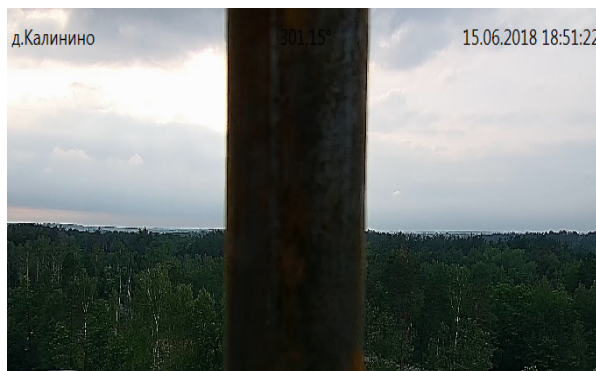
Нами разработана система на базе IP-камеры, лишенная этих недостатков. IP-камера снабжена специальной опорно-поворотной платформой с двумя независимыми приводами – горизонтальным и вертикальным. Конструкция обеспечивает свободное вращение IP-камеры в горизонтальной плоскости на 360 градусов и позволяет контролировать состояние лесного массива с отсутствием «мертвых зон» (рисунок 2.1).

Для решения задачи автоматического вычисления координаты направления на очаг возгорания (азимута пожара) IP-камера снабжена специальным контроллером, позволяющим в режиме реального времени контролировать угол поворота IP-камеры и автоматически вычислять азимут очага возгорания на однотипной картинке лесного массива с углом обзора 360 градусов (рисунок 2.2).

Для решения задачи экологического контроля IP-камера снабжается специальным датчиком, что позволяет дистанционным наземным методом осуществлять радиационный контроль и фиксировать изменения параметров радиационного фона в случаях возникновения лесных пожаров (рисунок 2.3). Такое применение IP-камеры особенно важно на радиоактивно загрязненных территориях, так как дым, поступающий в атмосферу в результате лесных пожаров, загрязняет воздух, ухудшает экологическую обстановку в регионе, наносит ущерб здоровью людей.



а



б

Рисунок 1.1 – Установка купольной поворотной видеокамеры:
а – способ монтажа на вертикальном кронштейне;
б – панорама лесного массива с «мертвой зоной»



Рисунок 2.1 – IP-камера на опорно-поворотной платформе на вертикальном кронштейне:
 а – способ монтажа видеокамеры на опорно-поворотной платформе;
 б – панорама лесного массива без «мертвой зоны»



Рисунок 2.2 – Пример пользовательского интерфейса программного обеспечения и работа контроллера по автоматическому вычислению азимута очага возгорания

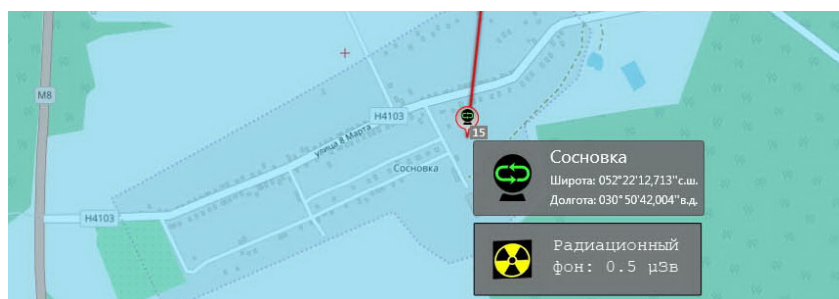


Рисунок 2.3 – Пример пользовательского интерфейса программного обеспечения и работа датчика по радиационному контролю

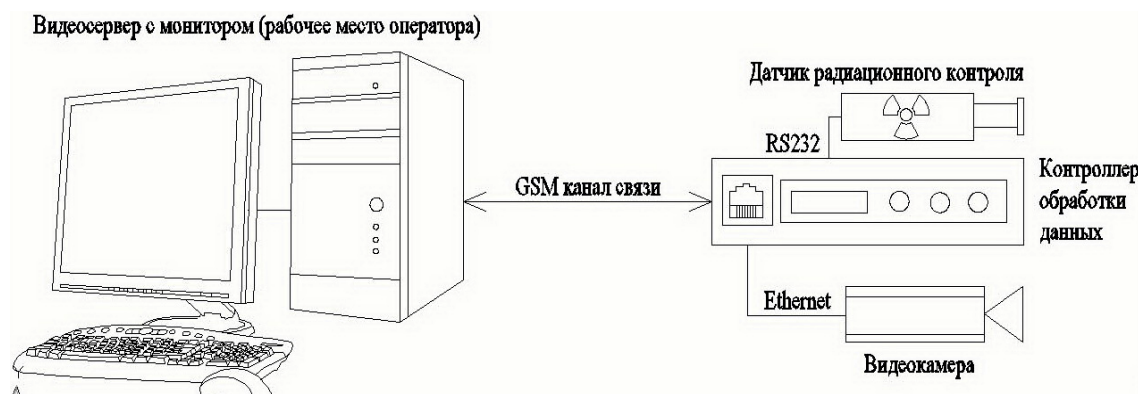


Рисунок 2.4 – Структурная схема автоматизированной системы обнаружения ландшафтных пожаров и экологического мониторинга

Система обнаружения ландшафтных пожаров и экологического мониторинга состоит из аппаратной части – IP-видеокамер с высокой разрешающей способностью, устанавливаемых на опорно-поворотных платформах, специальных датчиков радиационного контроля, контроллеров угла поворота и программной части, позволяющей управлять камерами и обмениваться информацией с датчиками и контроллерами в роботизированном режиме (рисунок 2.4).

Видеокамеры собирают и обрабатывают информацию о состоянии лесного массива в режиме реального времени. Контроллеры угла поворота вычисляют азимут точки обзора видеокамеры. Датчики радиационного контроля измеряют и обрабатывают информацию о состоянии радиационного фона. Информация со всех видеокамер, контроллеров и датчиков передается на сервер со специализированным ПО для автоматизированной обработки данных. В случае обнаружения дымового шлейфа или огня система оповещает оператора и ответственных лиц. В случае фиксации роста значения измерений или превышения порогового значения радиационного фона система также оповещает оператора и ответственных лиц. Система предусматривает возможность интеграции с различными типами карт, где отмечены точки установки видеокамер и точки установки датчиков радиационного контроля.

Адаптация и усовершенствование таких систем мониторинга позволит обеспечить пожарную и радиационную безопасность в лесах, загрязненных радионуклидами; скорейшее обнаружение лесных пожаров на загрязненных территориях; повышение противопожарной и биологической устойчивости лесов; снижение дозовых нагрузок на персонал лесной отрасли. Для этого необходимо обеспечить дистанционный видеоконтроль, а также обеспечить контроль радиационного фона территорий с фиксацией изменений его значений в случаях возникновения лесных пожаров, когда загрязненный радионуклидами дым может поступать в атмосферу.

Заключение

Автоматизированная система экологического мониторинга и обнаружения ландшафтных пожаров с использованием современных технологий компьютерного зрения, ГИС-технологий, технологий распределенных вычислений, клиент-серверных интернет-технологий, является важной составной частью комплекса мер по охране лесов от пожаров, а также территорий, загрязненных радионуклидами. Система позволяет существенно увеличить оперативность обнаружения изменений показателей радиационного

фона и возникновения зон возгорания, уменьшить время, трудозатраты, материальные и финансовые затраты на мероприятия по локализации и ликвидации радиоактивных лесных пожаров, снизить экономический и экологический ущерб от случайных и сезонных возгораний.

Существенным положительным эффектом от введения в действие автоматизированной системы обнаружения ландшафтных пожаров и экологического мониторинга является снижение дозовой нагрузки на работников лесного хозяйства, осуществляющих противопожарное и радиационно-измерительное патрулирование территории, а также улучшение качества контроля доступа населения на участки лесного фонда с высокими уровнями радиационного загрязнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ипатов, Ю.А.* Проектирование распределенной наземной системы мониторинга за лесными пожарами / Ю.А. Ипатов, А.В. Кривецкий, В.О. Шмакин // Кибернетика и программирование. – 2013. – № 2. – С. 20–28.
2. *Кудрин, А.Ю.* Современные методы обнаружения и мониторинга лесных пожаров / А.Ю. Кудрин, Л.И. Запорожец, Ю.В. Подрезов // Технологии гражданской безопасности. – 2006. – С. 66–67.
3. *Многоцелевой авиационный комплекс мониторинга, предупреждения и защиты от стихийных бедствий на базе беспилотного летательного аппарата «нарт»* / М.Т. Абшаев, А.М. Абшаев, М.А. Анаев, В.В. Соловьев, С.И. Шагин // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2017. – С. 229–238.
4. *Ханин, А.* Принципы оптического метода автоматического детектирования лесных пожаров / А. Ханин, Р. Чеботарев // Алгоритм безопасности. – 2011. – № 1. – С. 76–80.
5. *Шепелёва, И.С.* Видеомониторинг – один из способов обнаружения лесных пожаров / И.С. Шепелёва // Лесохозяйственная информация. – 2015. – № 4. – С. 46–50.
6. *Шишалов, О.И.* «Лесной Дозор» – эффективная система раннего обнаружения лесных пожаров / О.И. Шишалов, И.С. Шишалов, О.И. Пыпина // Лесной бюллетень. – 2010. – № 1. – С. 21–26.
7. *Система мониторинга леса «Лесной дозор»* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://lesdozor.ru/ru/>. – Дата доступа: 14.03.2019.

Поступила в редакцию 10.05.19.

УДК 691.618.93

ПЕНОСТЕКЛОМАТЕРИАЛЫ НА ОСНОВЕ СТЕКОЛЬНЫХ ОТХОДОВ БЫТОВОГО И ПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ И СИЛИКАТОВ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ

М.И. Москвичёв, В.Е. Гайшун, В.В. Сидский, Я.А. Косенок, В.В. Васькевич,
А.С. Русыкин, П.С. Яночкин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FOAM-GLASS MATERIALS BASED ON GLASS WASTE OF DOMESTIC AND INDUSTRIAL ORIGIN AND ALKALIUM METAL SILICATES

M.I. Moskvichyov, V.E. Gaishun, V.V. Sidsky, Ya.A. Kosenok, V.V. Vaskevich,
A.S. Ruykin, P.S. Yanochkin

F. Scorina Gomel State University

Представлена методика получения пеностекломатериалов на основе силикатов щелочных металлов и вторичного минерального сырья: стекольных отходов бытового и промышленного происхождения. Определены оптимальные составы и режимы термической обработки пеностекла. Исследованы структурные и теплофизические характеристики полученных материалов.

Ключевые слова: пеностекло, стеклобой, порообразователь, плотность, водопоглощение, теплопроводность.

A method for producing foam glass materials based on alkali metal silicates and secondary mineral raw materials: glass wastes of domestic and industrial origin is presented. The optimal compositions and modes of heat treatment of foam glass are determined. The structural and thermophysical characteristics of the obtained materials are investigated.

Keywords: foam glass, cullet, foaming agent, density, water absorption, heat conductivity.

Введение

Современное состояние строительной отрасли предполагает активное использование теплоизоляционных материалов для увеличения энергоэффективности зданий и сооружений, снижение затрат основных строительных материалов, уменьшение толщины и облегчение ограждающих конструкций [1]. Актуальным вопросом является получение новых теплоизоляционных материалов, обладающих стабильными теплофизическими и физико-механическими характеристиками: низкой теплопроводностью (не более $0,175 \text{ Вт / (м}\cdot\text{К)}$), небольшой средней плотностью (до 600 кг / м^3), малым водопоглощением (не более 10%), экологической чистотой, устойчивостью к высоким температурам и агрессивным средам [1]–[3].

Пеностекло представляет собой пористый неорганический материал, имеющий форму блоков или гранул, который получают из смеси порошка стекла с порообразователем. Основными преимуществами пеностекла перед другими теплоизоляционными материалами являются устойчивость к влаге, относительно высокая механическая прочность, негорючесть и биологическая стойкость [3], [4].

Снижение стоимости сырьевых материалов для получения пеностекла является важной задачей. В качестве исходного компонента активно применяется кремнеземсодержащее сырье –

полезные ископаемые, щелочесодержащие горные породы, отходы химической промышленности. Ископаемыми полезными материалами, используемыми для получения блочного и гранулированного пеностекла, являются трепелы, опоки, диатомиты, перлиты, цеолитсодержащие породы, алюмосиликатные породы (глины, суглинки, глинистые сланцы, граниты, золы ТЭЦ, гранитоидные породы) [4]–[6].

Ряд работ посвящен использованию вторичного сырья в производстве пеностекла, в том числе невозвратного стеклобоя, получаемого при производстве листового, тарного, электротехнического стекла [3], [7], [8]. Использование вторичного сырья в процессе производства пеностекла позволяет решить ряд проблем, связанных с сырьевой базой, высокой стоимостью и экологической безопасностью получаемых материалов.

На размеры и форму пор и, как следствие, на характеристики пеностекломатериалов влияет тип и концентрация применяемого порообразователя. Наиболее распространены два вида порообразователей: карбонатные, которые разлагаются с выделением CO_2 и углеродсодержащие – выделяющие газ вследствие реакции окисления кислородом и триоксидом серы, растворенным в стекломассе [3]. В работе [9] отмечается, что применение традиционных углеродных порообразующих компонентов, в частности, антрацита,

содержащего до 1,5 масс. % серы, снижает экологическую безопасность пеностекломатериалов и исключает возможность их применения для внутренней отделки жилых помещений.

В работах [10], [11] при получении вспененных теплоизоляционных материалов в качестве порообразователя применяется жидкое стекло, использование которого позволяет увеличить содержание связанной воды в системе на этапе приготовления шихты. Испарение связанной воды в процессе вспенивания пеностекла значительно снижает вязкость расплава и способствует снижению плотности материала и формированию равномерно замкнутых пор [4].

Целью проводимых исследований являлось изучение возможности получения пеностекломатериалов на основе вторичного минерального сырья, в частности, стекольных отходов бытового и промышленного происхождения, с применением экологически безопасных порообразователей и формирование структуры конечного вспененного пеностекломатериала с помощью разработанных оригинальных технологических приёмов.

1 Методика эксперимента

Для получения пеностекломатериалов наиболее подходящими характеристиками обладают стекла следующего состава: 60–72,5 масс. % SiO₂, 0–2,5 масс. % Fe₂O₃, 4,5–6 масс. % CaO, 1,5–2,5 масс. % MgO, 12,5–15,0 масс. % Na₂O [12]. Содержание основных оксидов в оконном и бутылочном стекле, которые наиболее часто встречаются в твердых бытовых отходах, удовлетворяет вышеприведенному соотношению [4]. В качестве стекольных отходов использовали бой коричневого и полубелого тарного стекла, состав которых представлен в таблице 1.1.

Стеклобой предварительно измельчался в шаровой мельнице FRITSCH Pulverisette 0 и просеивался через сито с диаметром ячейки 0,1 мм. Затем молотый стеклобой смешивался с натриевым жидким стеклом (ГОСТ 13078-81) [13] (а также, при необходимости, с водой) в соотношениях, представленных в таблице 1.2.

Полученная смесь помещалась в сушильный шкаф, где в течение 4–5 часов при 80° С происходило её отверждение. Затем отвержденную смесь измельчали на мелкие частицы и засыпали их в металлическую форму. Внутренние стенки формы заранее покрывались каолиновой пастой для предотвращения прилипания расплавленного стекла к металлической поверхности. Форма помещалась в муфельную печь, где при температуре от 850° до 900° С происходило образование пористой структуры, скорость нагрева составляла 450° С / час. В процессе термической обработки пеностекломатериалов особое внимание следует уделить наличию зоны резкого охлаждения. На данном этапе проводилась фиксация структуры и формы вспененных материалов,

что предотвращало оседание вспененной стекломассы и образование впадин в центре блоков, а также способствовало улучшению конечной структуры пеностекла. Температурный график процесса спекания представлен на рисунке 1.1.

Таблица 1.1 – Состав полубелого и коричневого тарных стекол

Виды стекла	Состав, масс. %			
	SiO ₂	CaO	Na ₂ O	Оксиды Al, Fe, Mg, K и др.
Полубелое тарное стекло	67–68	10,5–11,0	14,5–15,5	6,5–8,0
Коричневое тарное стекло	69–70	9–10	14,5–15,5	4,5–7,5

Таблица 1.2 – Состав и соотношения исходных компонентов сырьевой смеси для получения пеностекломатериалов

№ образца	Компоненты	Соотношение, масс.ч.
1	Коричневый тарный стеклобой: жидкое стекло	1:0,5
2	Полубелый тарный стеклобой: жидкое стекло	1:1,2
3	Полубелый тарный стеклобой: жидкое стекло: вода	1:0,8:0,5



Рисунок 1.1 – Температурный график процесса спекания пеностекла: 1 – нагрев, 2 – плавление и образование пор, 3 – резкое охлаждение и стабилизация структуры, 4 – отжиг

После завершения термической обработки готовый материал извлекался из формы и обрабатывался до требуемых геометрических размеров.

2 Результаты и их обсуждение

Внешний вид поверхности полученных образцов пеностекла представлен на рисунке 2.1.

Полученные образцы имеют пористую, преимущественно замкнутую, структуру, поры равномерно распределены по всему объёму образца. Окраска образцов пеностекла зависела от цвета стеклобоя, используемого при их изготовлении.

Теплопроводность полученных пеностекломатериалов определялась с помощью измерителя теплопроводности ИТП-МГ4 «100».

Плотность образцов была установлена согласно ГОСТ 12730.1–78 при состоянии их естественной влажности [14]. Образцы, имеющие правильную прямоугольную форму, взвешивали с точностью до 0,1 грамма и определяли их объем. Объемную массу в $г / см^3$ вычисляли по формуле:

$$\rho_{об.} = \frac{M_c}{V},$$

где M_c – масса высушенного образца в граммах; V – объем образца в $см^3$.

Для установления величины водопоглощения образцы пеностекла высушивали до постоянной массы (удаляли физически связанную воду) и погружали в ёмкость с водой, нагретой до комнатной температуры (20 ± 3)°С. Для полного погружения образца в воду на время испытания сверху помещали груз соответствующей массы. Через 24 часа образец вынимали из воды, удаляли с его поверхности избыточную воду и производили взвешивание. Масса вытекающей воды из пор образца в процессе взвешивания включалась в определяемую массу образца. Водопоглощение отдельного образца W_m по массе определяли по ГОСТ 12730.3–78 [15] по формуле:

$$W_m = \frac{m_b - m_c}{m_c} \cdot 100\%,$$

где m_c – масса высушенного образца, г; m_b – масса водонасыщенного образца, г.

Результаты исследования характеристик полученных пеностекломатериалов представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Характеристики полученных образцов пеностекла

№ образца	1	2	3
Размеры пор, мм	0,5–1,0	2,0–5,0	3,0–7,0
Плотность, г / $см^3$	0,81	0,54	0,32
Водопоглощение за 24 ч., масс. %	3,1	3,4	3,8
Теплопроводность, $г / (м \cdot ^\circ C)$	0,108	0,081	0,072

Установлено, что на увеличение размеров пор и, как следствие, уменьшение плотности материала влияет исходная концентрация жидкого стекла в шихте. Дополнительное введение воды на этапе приготовления шихты позволяет снизить плотность пеностекла. Значения водопоглощения полученных образцов не превышают 3,8 масс. %, что удовлетворяет требованиям к современным теплоизоляционным материалам. Установлено, что теплопроводность полученных материалов практически линейно зависит от их плотности, поэтому наилучшие теплоизоляционные характеристики имеет образец № 3, обладающий наименьшей плотностью.

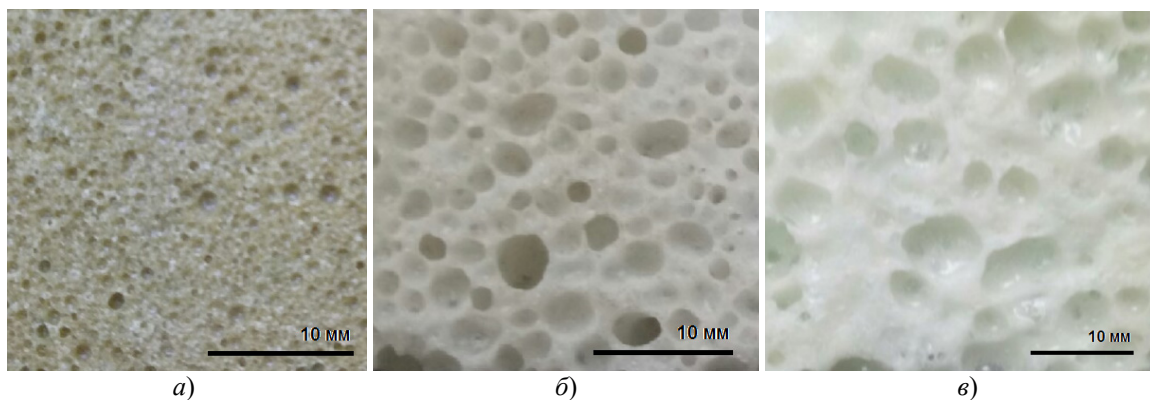


Рисунок 2.1 – Изображение пористой структуры образцов пеностекла (а – образец № 1, б – образец № 2, в – образец № 3)

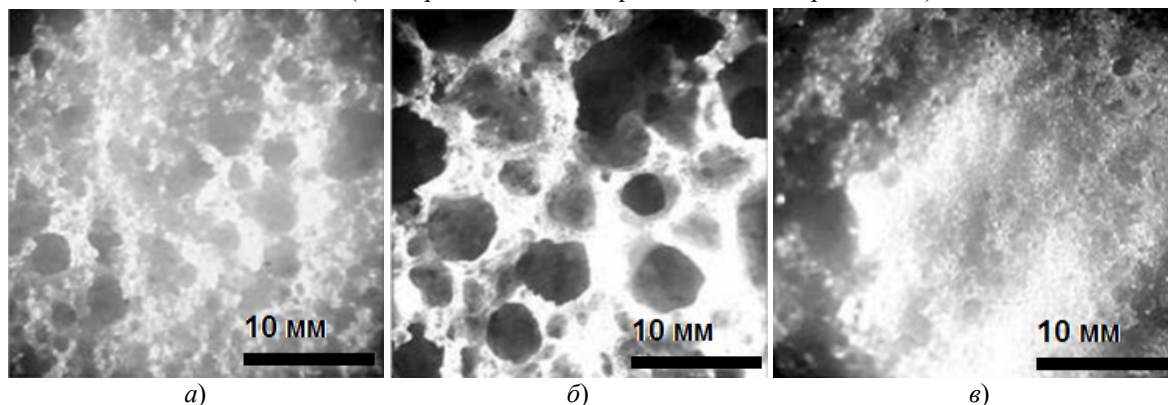


Рисунок 2.2 – Микрофотографии среза образцов пеностекла, полученных при различных температурах: а – 800°С; б – 900°С; в – 950°С

В результате проведенных исследований было получены образцы пеностекломатериала состава № 2 при температурах 800° С, 900° С и 950° С. Микрофотографии среза образцов представлены на рисунке 2.2.

Из рисунка 2.2 видно, что при высокой температуре обработки высушенной и измельченной шихты происходит размягчение стеклянных частиц и их последующее спекание. За счёт выделяющихся газов, образующихся при разложении порообразователя, вязкая стеклянная масса постепенно вспенивается и происходит образование системы открытых и закрытых пор. В нашем случае оптимальную структуру и размеры пор можно получить при температуре 900° С. При превышении этого значения происходит оплавление пористой структуры пеностекла, оседание вспененной стекломассы и резкое уменьшение размеров пор.

Заключение

Разработаны составы, определены этапы методики получения и установлен оптимальный режим температурной обработки пеностекломатериалов на основе стекольных отходов и экологически безопасного порообразователя – жидкого стекла. Температурная обработка предполагает этапы нагрева, плавления и образования пор, резкого охлаждения и отжига. Установленная оптимальная температура плавления и формирования пористой структуры пеностекломатериалов составляет 900° С. Полученные материалы устойчивы к воздействию влаги, высоких температур, имеют невысокую теплопроводность и, в зависимости от характеристик, могут применяться в качестве как конструкционных, так и теплоизоляционных материалов. Разработанная методика позволяет эффективно использовать стекольные отходы, решает проблему их утилизации, расширяет сырьевую базу и уменьшает экономические затраты на производство пеностекла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербак, А.С. Исследование свойств современных теплоизоляционных материалов / А.С. Щербак // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. – 2013. – № 2 (44). – С. 136–143.
2. Тихонов, В.Б. Особенности использования современных теплоизоляционных материалов на полимерной основе / В.Б. Тихонов, М.П. Колесниченко // Энергобезопасность и энергосбережение. – 2011. – № 1. – С. 24–27.
3. Производство стеклообразных пеноматериалов: проблемы и решения / Р.Г. Мелконян [и др.] // Вестник Кольского научного центра РАН. – 2018. – № 1 (10). – С. 133–156.

4. Семейных, Н.С. Анализ использования различных сырьевых компонентов в производстве гранулированного пеностекла / Н.С. Семейных, Г.В. Сопегин // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2017. – № 1. – С. 60–74.

5. Дамдинова, Д.Р. Эффективные пеностекла на основе отходов промышленности и природного сырья Предбайкалья / Д.Р. Дамдинова, А.А. Кулюкин // Вестник ИрГТУ. – 2012. – № 3 (62). – С. 64–69.

6. Бобкова, Н.М. Пеностекло на основе отходов промышленного производства / Н.М. Бобкова, С.Е. Баранцева, Е.Е. Трусова // Стекло мира. – 2006. – № 4. – С. 90–91.

7. Preparation of foam glass from waste glass and fly ash / J. Bai, X. Yang, S. Xu, W. Jing, J. Yang // Materials Letters. – 2014. – № 136. – P. 52–54.

8. SaeediHeydari, M. Influence of Co_3O_4 , Fe_2O_3 and SiC on microstructure and properties of glass foam from waste cathode ray tube display panel (CRT) / M. SaeediHeydari, S.M. Mirkazemi, S. Abbasi // Advances in Applied Ceramics. – 2014. – Vol. 113, № 4. – 234–239.

9. Новое пеностекло на основе промышленных отходов / В.В. Артамонов [и др.] // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2009. – № 2 (37). – С. 69–73.

10. Сырьевая смесь для изготовления теплоизоляционного материала: пат. 16311 Респ. Беларусь, МПК С04В 28/26 / Б.В. Плющ, В.Е. Гайшун, М.Н. Капшай, Я.А. Косенок; заявитель УО «Гом. гос. ун-т». – № 20101926; заявл.: 30.12.2010; дата публ.: 28.05.2012.

11. Композиция для изготовления теплоизоляционного материала: пат. 2209793 Рос. Федерация: МПК⁷ С04В028/26 С04В038/06 / В.И. Ремизникова, В.Х. Фахрутдиннова, В.Г. Хозин, Е.А. Никифоров; заявитель и патентообладатель ООО Производственно-инвестиционная компания «ДиатомитИнвест». – №20113119, заявл.: 21.11.2001; дата публ.: 10.08.2003.

12. Кулаева, Н.С. Пеностекло из стеклобоя / Н.С. Кулаева, М.С. Гаркави // Строительные материалы. – 2007. – № 3. – С. 74.

13. ГОСТ 13078–81. Стекло натриевое жидкое. Технические условия. – Введ. 1982-01-01 с изменениями. – Минск: Гос. комитет по стандартизации РБ. – 20 с.

14. ГОСТ 12730.1–78. Бетоны. Методы определения плотности. – Введ. 1980-01-01. – Минск: Гос. комитет по стандартизации РБ. – 8 с.

15. ГОСТ 12730.3–78. Бетоны. Метод определения водопоглощения. – Введ. 1980-01-01. – Минск: Гос. комитет по стандартизации РБ. – 8 с.

Поступила в редакцию 29.10.19.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).

ПОПРАВКИ
к статьям, опубликованным в журнале
«Проблемы физики, математики и техники»

В статье Семченко И.В., Хахомов С.А., Самофалов А.Л., Фаняев И.А., Михалко И.С., Сонг Я., Фан Ш., Ванг Дж. «Разработка двухстороннего неотражающего поглотителя микроволн на основе метаматериалов с прямоугольными омега-элементами», опубликованной в журнале «Проблемы физики, математики и техники», № 3 (40) 2019, дату поступления статьи на странице 32 необходимо читать в следующей редакции: «*Поступила в редакцию 14.06.19*».

В статье Чжао Ц., Сонг Я., Ван Л., Семченко И.В., Самофалов А.Л. «Проектирование многослойной структуры бифилярной спиральной антенны», опубликованной в журнале «Проблемы физики, математики и техники», № 3 (40) 2019, дату поступления статьи на странице 52 необходимо читать в следующей редакции: «*Поступила в редакцию 17.06.19*».

Опечатки были устранены в электронных версиях статей, которые находятся на сайте журнала.