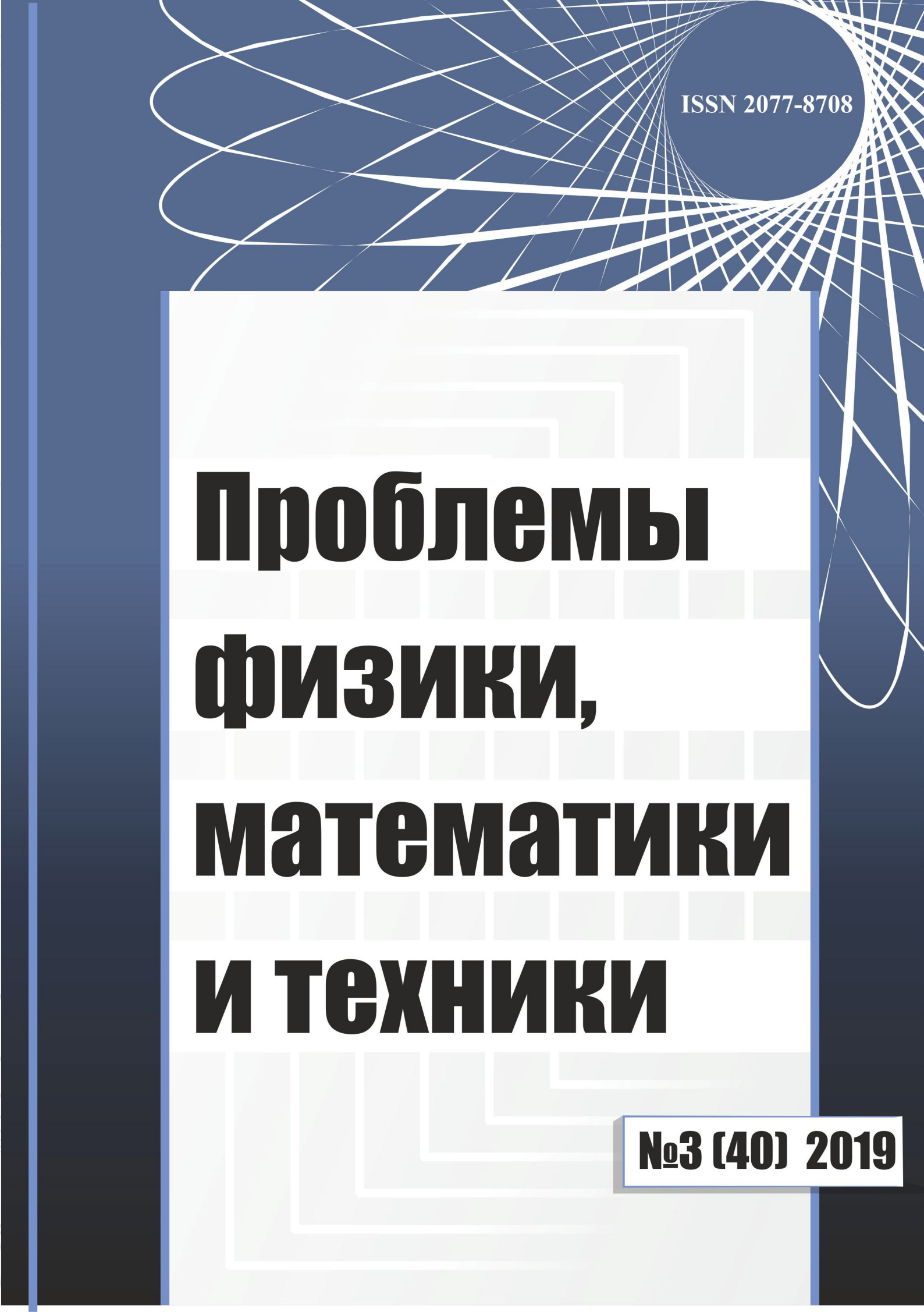




ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№3 (40) 2019

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (40) 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Джоу Б., Пилипцов Д.Г., Цзян С., Кулеш Е.А., Руденков А.С. Бор-углеродные покрытия: методы получения, особенности структуры и механических свойств 7
- Кулак Г.В., Крох Г.В., Николаенко Т.В. Акустооптическая диагностика ультразвуковых волн лэмба бесселевыми световыми пучками в кристаллах силленитов 13
- Овсюк Е.М., Коральков А.Д. Релятивистская частица со спином 1 в кулоновском поле, квантовые состояния с минимальным угловым моментом $j = 0$ в моделях Лобачевского и Римана 19
- Семченко И.В., Хахомов С.А., Самофалов А.Л., Фаняев И.А., Михалко И.С., Сонг Я., Фан Ш., Ванг Дж. Разработка двухстороннего неотражающего поглотителя микроволн на основе метаматериалов с прямоугольными омега-элементами 26
- Сердюкова М.А., Сердюков А.Н. Массивное гравитационное поле в плоском пространстве-времени. II. Законы сохранения и гравитационная изменчивость инертной массы 33
- Сердюкова М.А. Массивное гравитационное поле в плоском пространстве-времени. III. Гравитационная зависимость радиоактивного распада 40
- Тимошенко Е.В., Юревич Ю.В. Расчёт эффективности бистабильного тонкоплёночного отражателя 43
- Чжао Ц., Сонг Я., Ван Л., Семченко И.В., Самофалов А.Л. Проектирование многослойной структуры бифилярной спиральной антенны 49

МАТЕМАТИКА

- Антоневич А.Б., Шагова Т.Г. Рациональные мнемифункции на окружности 53
- Дергачева И.М., Задорожнюк Е.А., Шабалина И.П. О p -сверхразрешимости одного класса конечных групп 63
- Жогаль С.П., Жогаль С.И., Кулыба А.И. Исследование осциллятора ван дер Поля с запаздывающим отражением от нагрузки при различных типах случайных воздействий 67
- Каморников С.Ф., Шеметкова О.Л. О перестановочности σ -субнормальных подгрупп конечной группы 70
- Лубочкин А.В. Осуществление заданных движений динамических систем ограниченными оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач 74
- Мегралиев Я.Т., Ализаде У.С. О задаче идентификации линейного источника для гиперболического уравнения третьего порядка с интегральным условием 80
- Монахов В.С., Трофимук А.А., Зубей Е.В. Конечные группы с ограничениями на две максимальные подгруппы 88
- Мурашко В.И. Обобщенно ранговые композиционные формации конечных групп 93
- Старовойтов А.П., Рябченко Н.В., Драпеза А.А. О существовании и единственности многочленов Эрмита – Паде первого рода 100
- Тютянов В.Н. Простые неабелевы группы с пронормальными вторыми максимальными подгруппами 104
- Ху Б., Хуан Ц., Скиба А.Н. Конечные группы с заданными локальными секциями 107

ИНФОРМАТИКА

- Глубоков А.В., Жадан М.И., Березовская Е.М. Web-сервис автоматизированного проектирования и расчета фундаментов 111
- Таранчук В.Б. Средства и примеры интеллектуальной обработки данных для геологических моделей 117

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 12.09.19. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 14,65. Уч.-изд. л. 12,76. Тираж 100 экз. Заказ № 598.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2019
© Проблемы физики, математики и техники, 2019
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2019

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 3 (40) 2019

CONTENTS

PHYSICS

Zhou B., Pilipstov D.G., Jiang X., Kulesh E.A., Rudenkov A.S. Boron-carbon coatings: methods of deposition, structure features and mechanical properties	7
Kulak G.V., Krok G.V., Nikolaenko T.V. Acoustooptical diagnostics of ultrasonic lamb waves by the Bessel light beams in gyrotropic sillenite type crystals	13
Ovsiyuk E.M., Koral'kov A.D. Relativistic particle with spin 1 in presence of Coulomb field, quantum states with minimal angular momentum $j = 0$ in Lobachevsky an Riemann models	19
Semchenko I.V., Khakhomov S.A., Samofalov A.L., Faniayeu I.A., Mikhalka I.S., Song Y., Fan S., Wang J. The development of a double-sided nonreflecting microwaves absorber based on the metamaterials with rectangular omega elements	26
Serdyukova M.A., Serdyukov A.N. A massive gravitational field in flat spacetime. II. Conservation laws and gravitational variability of the inertial mass	33
Serdyukova M.A. A massive gravitational field in flat spacetime. III. Gravitational dependence of radioactive decay	40
Timoschenko E.V., Yurevich Yu.V. Estimation of the bistable thin-film reflector efficiency	43
Zhao J., Song Y., Wang L., Semchenko I.V., Samofalov A.L. Design of a multi-layer structure of a bifilar helical antenna	49

MATHEMATICS

Antonevich A.B., Shahava T.R. Rational mnemofunctions on circle	53
Dergacheva I.M., Zadorozhnyuk E.A., Shabalina I.P. On p -supersolubility of one class finite groups	63
Zhogal S.P., Zhogal S.I., Kulyba A.I. Research of the van der Pol oscillator with delayed reflection from load at various types of random effects	67
Kamornikov S.F., Shemetkova O.L. On permutability of σ -subnormal subgroups of finite group	70
Lubochkin A.V. The given motions realization of dynamic systems by bounded optimal controls of linear-quadratic problems	74
Mehraliev Ya.T., Alizade U.S. On the problem of identifying a linear source for the third-order hyperbolic equation with integral condition	80
Monakhov V.S., Trofimuk A.A., Zubei E.V. Finite groups with restrictions on two maximal subgroups	88
Murashka V.I. Generalized rank composition formations of finite groups	93
Starovoitov A.P., Ryabchenko N.V., Drapeza A.A. On the existence and uniqueness of type I Hermite – Padé polynomials	100
Tyutyanov V.N. Simple non-abelian groups with second maximal pronormal subgroups	104
Hu B., Huang J., Skiba A.N. Finite groups with given local sections	107

INFORMATION SCIENCE

Glubokov A.V., Zhadan M.I., Berezovskaya E.M. Web service of the automated design and calculation of the bases	111
Taranchuk V.B. Tools and examples of intelligent data processing for geological models	117

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Data-bases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 669.14.018.8: 621.45.038.72

БОР-УГЛЕРОДНЫЕ ПОКРЫТИЯ: МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ, ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Б. Джоу¹, Д.Г. Пилипцов², С. Цзян¹, Е.А. Кулеш², А.С. Руденков²

¹Нанкинский университет науки и технологии

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

BORON-CARBON COATINGS: METHODS OF DEPOSITION, STRUCTURE FEATURES AND MECHANICAL PROPERTIES

B. Zhou¹, D.G. Pilipstov², X. Jiang¹, E.A. Kulesh², A.S. Rudenkov²

¹Nanjing University of Science and Technology

²F. Scorina Gomel State University

Рассмотрены основные методы формирования покрытий на основе бора и углерода. Описаны основные фазовые состояния, образующиеся в процессе синтеза таких покрытий. Уделено внимание анализу взаимосвязи структуры и механических свойств. Предложена методика и устройство для осаждения бор-углеродных покрытий из совмещенных потоков углеродной плазмы, формируемой за счет электроспектрального испарения графитового катода импульсной дугой, и ионов бора, генерируемых в результате испарения мишени импульсным лазерным излучением.

Ключевые слова: углеродные покрытия, легирование, бор, микротвердость, износостойкость, коэффициент трения.

The main methods of forming coatings based on boron and carbon are considered. The main phase States formed during the synthesis of such coatings are described. Attention is paid to the analysis of the relationship between the structure and mechanical properties. A method and device for deposition of boron-carbon coatings from combined flows of carbon plasma formed by electrospray evaporation of graphite cathode by pulsed arc and boron ions generated by evaporation of the target by pulsed laser radiation is proposed.

Keywords: carbon coatings, doped, boron, microhardness, wear, coefficient of friction.

Введение

Разработка вакуумно-плазменных методов нанесения покрытий для упрочнения поверхности является перспективным направлением [1] и, следовательно, оптимизация элементного и фазового состава, конструкций композиционных многокомпонентных покрытий, адаптированных под решение конкретной проблемы, является актуальной задачей.

Среди покрытий триботехнического назначения особое место занимают композиционные системы типа В – С – N, В – С и С – N, где С – углеродная компонента, содержащая в своем объеме атомы углерода с различными типами связей, N – азот [2]–[4]. Соединения на основе бора обладают различными кристаллическими структурами и образуют большую группу твердых, тугоплавких соединений, например, В₆O, В₄C и субнитрид бора В₁₃N₂ с сильно отличающимися физическими, химическими и механическими свойствами [5]–[7].

Покрытия на основе карбида бора (В₄C₃) характеризуются высокой твердостью [8], устойчивостью к износу [9] и коррозии [10], а также высокой теплопроводностью и термостойкостью, которая не характерна для других карбидных соединений [11], и занимают третье место по величине твердости после алмазоподобных и покрытий на основе кубического нитрида бора

[12]. Особенностью трения покрытий, содержащих в своем составе бор, является способность образовывать на поверхности слои оксида бора (В₂O₃) [13], который в процессе трения при высоких контактных температурах вступает в химическое взаимодействие с молекулами воды, что приводит к образованию борной кислоты, которая выполняет функцию смазки и может значительно снизить трение и износ покрытий [14].

В работе [15] показано, что при синтезе объемных материалов со структурой карбида бора, равновесная растворимость бора в углероде составляет 2,3 ат. % бора при 2620 К. В то же время, для покрытий, полученных вакуумными методами, удалось достичь концентраций бора в покрытии на уровне 50 ат. % [16].

Целью данной работы является анализ основных методов формирования и определения основных технологических, физико-химических особенностей осаждения композиционных бор-углеродных покрытий, основных приемов направленного управления их структурой и механическими свойствами.

1 Плазмохимические методы синтеза

Для формирования композиционных, легированных бором углеродных покрытий достаточно эффективно используют CVD метод при реализации режимов и условий, обеспечивающих

образование карбида бора в соответствии с реакцией $4B + C \rightarrow B_4C$ [17]. Для осуществления такого процесса необходимо получить ионизированные потоки бора и углерода [18] заданного состава, необходимого для формирования покрытий со стехиометрией B_4C .

Одним из наиболее распространенных методов получения покрытий на основе карбида бора является осаждения покрытия из плазмы, образованной в результате разложения нетоксичного, невзрывоопасного и сравнительно дешевого борорганического соединения карборана ($C_2B_{10}H_{12}$) [19].

Молекулярная структура карборана – это додекаэдр, построенный из атомов бора и углерода и окруженный атомами углерода, которые присоединены к каждой В / С-связи. Температура плавления карборана равна ~ 370 К, однако он заметно сублимирует уже при комнатной температуре. Как правило, при формировании легированных бор-углеродных покрытий необходимо перевести кристаллический карборан в газовую фазу, для этого его помещают в плазменный реактор, температура которого находится в диапазоне 300–450 К [19]. Путем изменения температуры реактора регулируется скорость протекания паров карборана через реактор, в котором пары ионизируются и создаются условия для осаждения и роста покрытия. Для увеличения количества ионов углерода в реактор дополнительно подают углеродсодержащие газы, например, ацетилен, пропан или бутан [20]. Как показано в работе [21], осажденные таким методом покрытия обладали структурой карбида бора, хотя их стехиометрия оставалась несовершенной.

Скорость осаждения покрытий также зависит от метода возбуждения плазмы, так, например, при использовании ВЧ разряда скорость осаждения достигала значений 30 нм в секунду, что согласно данным работы [22] значительно превышает скорость осаждения бор-углеродных покрытий из плазмы тлеющего разряда. Полученное при использовании ВЧ разряда покрытие характеризуется малым размером кластеров, отсутствием пор и хорошей адгезией к поверхности. Высокая микротвердость (порядка 17 ГПа) α -С:Н:В покрытий определяется размером зерен и зависит от степени ионизации и диссоциации карборана в ВЧ плазме, имеющей намного более высокие плотность и электронную температуру (~ 40 эВ) по сравнению с плазмой тлеющего разряда, электронная температура которого не превышает ~ 1 эВ.

Как показано в работе [23], формирование композиционных бор-углеродных покрытий осуществляется CVD методом за счет осаждения углеродной компоненты покрытия из продуктов ВЧ разложения смеси $CH_4 + H_2$ и введения в углеводородную плазму паров триметилбора, образованных в результате его термодеструкции.

Недостатком, ограничивающим применение данного метода, является неконтролируемое присутствие в объеме покрытия как бора, так и высокомолекулярных соединений бора. Наличие высокомолекулярных соединений приводит к дефектам структуры и ограничивает область применения таких покрытий.

В работе [24] описан плазмохимический метод получения покрытий на основе карбида бора, который заключается в вдувании порошка бора в аргон-водородную плазму вместе с газовой смесью на основе пропан-бутана. Образующийся при пиролизе пропана и бутана углерод взаимодействует с бором, и при осаждении формируется покрытие с размером кристаллических областей порядка 0,1–0,2 мкм. Толщина покрытия определяется мощностью разряда и временем осаждения, ее максимальное значение достигает 4 мкм. Как показано в работе [25], при концентрации бора в углеродном покрытии до 4 ат. % происходит снижение внутренних напряжений до значений 1–3 ГПа, при этом концентрация кластеров, образованных атомами углерода с sp^2 гибридизации связей, снижается до 45 ат. % за счет преимущественного взаимодействия бора с атомами углерода с данной гибридизацией связей [25].

В работе [26] предложен метод осаждения покрытий карбида бора методом термического разложения смеси BCl_3 , CH_4 и H_2 на нагретой в вакууме до 1800 °С подложке. В качестве материала подложки используются молибден, вольфрам, тантал, титан и графит. Установлено, что стехиометрия, структура и свойства α -С:Н:В покрытий определяются температурой подложки, давлением и отношением компонент в смеси реактивных газов в камере. Существенным недостатком данной технологии является возможность осаждать покрытия на подложки, нагретые до высоких температур, что существенно ограничивает класс используемых материалов в качестве подложек.

В работе [27] показано, что скорость осаждения α -С:Н:В покрытий с использованием тлеющего разряда зависит от температуры подложки и составляет около 200 мкм/ч при 1300 °С и 700 мкм/ч при 1700 °С. Покрытия характеризуются сложным составом и содержанием кислорода в покрытии порядка 7 ат. %. Наличие кислорода, а также связей типа С–Н, определяет низкие значения микротвердости и низкую адгезию к металлическим подложкам. Необходимость использования высоких температур ограничивает тип подложек, на которые возможно осаждать покрытие.

Согласно данным работы [28] α -С:Н:В покрытие толщиной 1,1 мкм было сформировано методом химического осаждения с использованием импульсного возбуждения плазменного потока, в качестве плазмообразующего газа

использовали триметилбор $B(CH_3)_3$. За счет особенностей возбуждения импульсной плазмы и диссоциации реактивного газа в структуре покрытия образовалось значительное количество пор, наличие которых в процессе трения привело к быстрому разрушению покрытия. Однако методами инструментального наноиндентирования показано, что нанотвердость и модуль Юнга для α -C:H:V покрытий составляет 8,1 ГПа и 62,2 ГПа соответственно, что меньше, чем для α -C:H покрытий.

Проведенные в работе [22] трибологические испытания при наличии смазки и без нее показали сильное различие в износостойкости данных покрытий. Так, в режиме сухого трения (контртело шарик из стали) α -C:H:V покрытие в сравнении с α -C:H покрытием характеризуется более низким значением коэффициента трения и более низкой износостойкостью, что было связано с наличием пор в объеме покрытия, которые привели под воздействием высоких контактных нагрузок к образованию более крупных дефектов и расслоению α -C:H:V покрытия. При наличии смазки в зоне трения α -C:H:V покрытие имеет более высокую износостойкость (ресурс работы составил 100000 циклов) и характеризуется более низкими значениями коэффициента трения. Установлено [22], что смазочная среда заполняет поры покрытия и поступает в зону трения, снижая износ контртела и способствуя более стабильной работе пары трения.

В работе [29] легированные бором покрытия были получены из плазмы тлеющего разряда, горящего в газовой смеси ацетилена и триметилбора при давлении порядка 10^{-1} Па. Отношение концентраций бора и углерода в покрытии (B/C) изменялось от 0 до 0,4 и определялось отношением расходов газов, проходящих через реактор. Триботехнические испытания показали, что легирование бором с отношением компонент $B/C = 0,03$ приводит к снижению твердости, уменьшению коэффициента трения ($\mu = 0,1$) и износостойкости в сравнении с α -C:H покрытием. При отношении B/C в покрытии равном 0,03 и 0,4 покрытие характеризуется высокой смачиваемостью в среде топлив и масел.

2 Методы физического распыления

Для синтеза безводородных α -C:V покрытий методами PVD используют магнетронное [30], ионно-лучевое [31] и импульсное лазерное распыление [32] как композиционных бор-графитовых мишеней [33], так и нескольких катодов, изготовленных из бора и графита [34], [35].

В работе [24] легированные бором α -C покрытия получали в результате распыления композиционного бор-углеродного катода дугой постоянного тока. Для уменьшения капельной фазы в покрытии использовали систему магнитной сепарации плазменного потока. Полученные

покрытия характеризовались хорошей адгезией и высокой микротвердостью. Однако зависимость механических свойств осажденных α -C:V покрытий от концентрации бора не установлена.

Проведенные в работе [9] исследования триботехнических свойств композиционных бор-углеродных покрытий показали, что для таких покрытий на начальных стадиях процесса характерны высокие значения коэффициента трения, однако после приработки значения коэффициента трения снизились до значений 0,25.

В работе [36] установлено, что легирование бором углеродных покрытий, полученных с использованием магнетронного метода распыления композиционной бор-углеродной мишени, приводит к росту микротвердости на 40% в сравнении с нелегированными покрытиями и достигает значений 28 ГПа.

В работе [19] показано, что в процессе трения в среде масла со стабилизирующими добавками в виде наночастиц Mo, легированное бором алмазоподобное покрытие показало низкие значения коэффициента трения (менее 0,03 в диапазоне от 2 до 12 ат. % концентрации бора) при высокой температуре трения. Данные значения коэффициента трения оказались ниже чем у монокомпонентного α -C покрытия. Было высказано предположение, что низкие значения коэффициента трения для α -C:V покрытия обусловлены селективной абсорбцией кислорода из объема масла, что приводит к формированию на поверхности покрытия оксида бора, характеризующегося высокой химической инертностью при высокой температуре и стабильно низким коэффициентом трения в широком диапазоне температур.

В работе [19] α -C:V покрытие осаждали методом ионного распыления мишени, выполненной из B_4C , в качестве дополнительного источника углерода использовали ионы углерода, образованные в результате разложения CH_4 в тлеющем разряде. Проведенное исследование показало, что в объеме покрытия содержатся углеродные кластеры с кристаллической структурой, случайным образом распределенные в объеме покрытия. Методом РФЭС установлено, что в покрытии присутствует значительное количество кислорода (около 17 ат. %), а также установлено наличие связей типа B – O и B – C и определено, что бор в покрытии химически связывается с углеродом, а часть атомов бора, не вступившая в взаимодействие с углеродом, стремится вступить в взаимодействие с кислородом с образованием B_2O_3 .

В работе [10] методом дуального магнетронного распыления мишеней из карбида бора и графита были получены композиционные α -C:(B_4C) покрытия. Концентрация бора изменялась от 0 до 7,9%, что определяет высокую анизотропию поверхностных свойств покрытия. Методом РДА было установлено наличие кластеров

со структурой карбида бора, внедренных в объём углеродной матрицы. Методами сканирующей электронной микроскопии показано, что покрытие обладает столбчатой структурой. Методом РФЭС была обнаружена химическая связь типа В – В, что указывает на образование чистого бора во время процесса осаждения. Установлено, что $\alpha\text{-C}:(\text{B}_4\text{C})$ покрытия характеризуются высокой, в сравнении с монокомпонентным $\alpha\text{-C}$ покрытием, микротвердостью, ударной вязкостью, а также адгезионной прочностью. Оптимальное отношение микротвердость/внутренние напряжения достигается при концентрации бора в покрытии 2,92 ат. %. Установлено, что $\alpha\text{-C}:(\text{B}_4\text{C})$ покрытие с концентрацией бора 2,92 ат. % характеризуется коэффициентом трения 0,05, что является самым низким значением для покрытий, формируемых этим методом, а также показывает самую высокую износостойкость при сухом трении. Особенностью трения $\alpha\text{-C}:(\text{B}_4\text{C})$ покрытий при относительной влажности 20% является отсутствие образования на поверхности и в зоне трения борной кислоты.

В работе [32] композиционные $\alpha\text{-C}:\text{B}$ покрытия получали методом ВЧ магнетронного распыления B_4C мишени с одновременной обработкой растущего покрытия ионами Ag и CH^+ . Данный метод осаждения позволил получить покрытия с микротвердостью в диапазоне от 15 до 20 ГПа. Установлено, что коэффициент трения покрытия зависит от концентрации бора. При концентрации бора равной 10% происходило резкое снижение коэффициента трения до значений 0,2, что определялось образованием на поверхности покрытия соединений типа В – О.

Основной недостаток формирования композиционных $\alpha\text{-C}:\text{B}$ покрытий заключается в сложности осаждения, многофакторной зависимости структуры и свойств углеродной матрицы. Как правило, при этом используют методы химического осаждения из газовой фазы, что приводит к формированию относительно мягких (микротвердость не более 7–9 ГПа) углеродных покрытий, или методы распыления композиционных B_4C мишеней [37], что обуславливает высокую концентрацию атомов углерода с sp^2 гибридизацией связей [34]. При применении лазерных методов для формирования $\alpha\text{-C}:\text{B}$ покрытий за счет распыления композиционных мишеней [31] скорость роста покрытий является низкой, что ограничивает их использование на практике. Применение же методов химического осаждения, характеризующихся высокой температурой синтеза ($\geq 750^\circ\text{C}$), [38], предъявляет требования по высокой термостойкости материала подложек.

На основании анализа известных технологических методов в качестве наиболее универсальной, реализующей различные условия и режимы генерации атомарных потоков, определяющих заданный фазовый и элементный состав слоев,

предлагается методика и устройство формирования легированных бором углеродных покрытий, в соответствии с которыми осаждение углеродной компоненты покрытия осуществляется из углеродной плазмы, получаемой за счет распыления графитового катода импульсной дугой, а введение бора в объём растущего покрытия происходит за счет испарения лазерным излучением мишени, изготовленной методом прессования из порошка бора чистотой 99,95%.

Для получения легированных углеродных покрытий использовали модернизированную установку вакуумного напыления УВНИПА-1-001, содержащую:

1) газовый ионный источник типа «АИДА», с помощью которого производится очистка и нагрев подложек;

2) источник плазмы стационарного катодно-дугового разряда с катодом из титана (подслой титана толщиной 100 нм используется в качестве адгезионного слоя);

3) источник плазмы импульсного катодно-дугового разряда с катодом из графита, используемого для нанесения углеродных покрытий;

4) твердотельный лазер на основе YAG:Nd^{3+} , работающий в импульсном режиме (рисунок 2.1).

Степень легирования бором регулируется путем изменения мощности излучения, частоты следования импульсов в интервале от 1 до 50 Гц. Предложенная методика формирования композиционных бор-углеродных покрытий позволяет формировать углеродную матрицу с регулируемым содержанием атомов углерода с sp^3 и sp^2 связями и за счет варьирования частоты импульсного генератора и мощности искрового разряда. Использование химически чистых материалов, а также отсутствие водорода и высокомолекулярных соединений позволяет получать покрытия с бездефектной структурой и, следовательно, высокими механическими свойствами.

Особенностью разработанной технологии формирования композиционных бор-углеродных покрытий является использование для получения легированных бором алмазоподобных покрытий двух высоко ионизированных независимых потоков ионов углерода с энергией, обеспечивающих осаждение углеродной матрицы с высоким содержанием атомов углерода с sp^3 связями и высокую реакционную активность потока ионов бора. Применение таких ионизированных независимых ионных потоков позволяет осуществлять реакции плазмохимического синтеза покрытий с высоким содержанием Csp^3 фазы и соединений B_xC_y , а также осуществить высокие скорости роста покрытий с контролируемой тепловой нагрузкой на подложку.

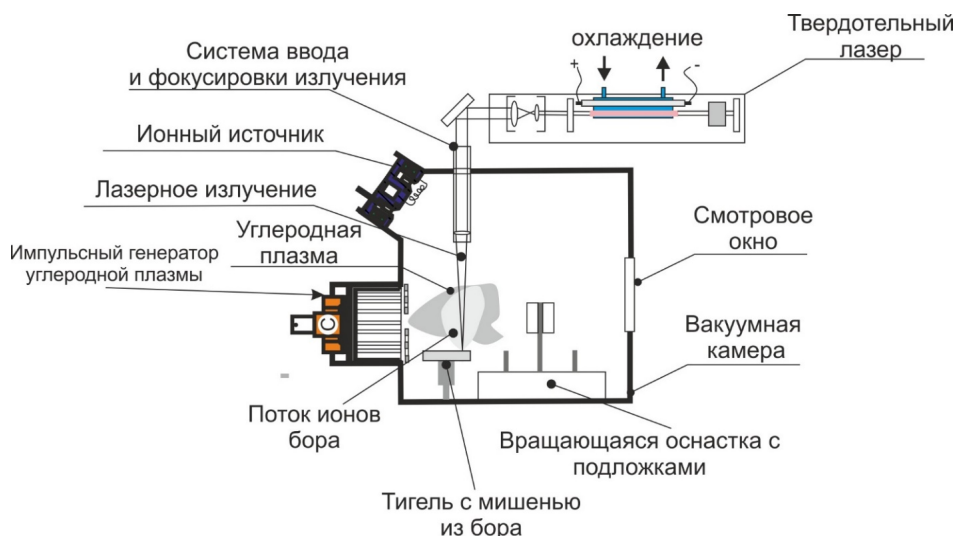


Рисунок 2.1 – Схема экспериментального устройства, предназначенного для осаждения бор-углеродных покрытий

Выводы

Проведен анализ основных методов получения углеродных покрытий, легированных бором. Показаны преимущества и недостатки, характерные для методов химического осаждения из газовой фазы композиционных покрытий. Установлены особенности формирования структуры покрытий при их формировании с использованием методов физического распыления композиционных бор-углеродных мишеней. В качестве наиболее универсального, реализующего различные условия и режимы генерации атомарных потоков, и, соответственно, позволяющего осаждать слои с различным фазовым и элементным составом, предлагается методика формирования легированных бором углеродных покрытий из углеродной плазмы потока ионов бора, генерируемых лазерным испарением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tailoring the mechanical and tribological properties of B₄C/a-C coatings by controlling the boron carbide content* / D. He [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2017. – Vol. 329. – P. 11–18.
2. *Donnet, C. Recent progress on the technology of doped diamond-like and carbon alloy coatings* / C. Donnet // Surface and Coatings Technology. – 1998. – Vol. 100–101. – P. 180–186.
3. *Influence of nitrogen and temperature on the deposition of tetrahedrally bonded amorphous carbon* / B. Kleinsorge [et al.] // Journal of Applied Physics. – 2000. – Vol. 88. – P. 1149.
4. *Podgornik, B. Low-friction behavior of boundary-lubricated diamond-like carbon coatings containing tungsten* / B. Podgornik, D. Hren, J. Vizintin // Thin Solid Films. – 2005. – Vol. 476, № 1. – P. 92–100.
5. *Effects of relative humidity on tribological properties of boron carbide coating against steel* /

P.D. Cuong [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2006. – Vol. 201. – P. 4230–4235.

6. *Wentorf, R.H. Synthesis of the Cubic Form of Boron Nitride* / R.H. Wentorf // The Journal of Chemical Physics. – 1961. – Vol. 34. – P. 809.

7. *Synthesis of superhard cubic BC₂N* / V.L. Solozhenko [et al.] // Applied Physics Letters. – 2001. – Vol. 78. – P. 1385–1387.

8. *Ito, H. Deposition of mechanically hard amorphous carbon nitride films from decomposition of BrCN. Effects of substrate cooling and pulsed rf-bias voltage* / H. Ito, K. Hori, H. Saitoh // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2006. – Vol. 352, № 1. – P. 1–7.

9. *Mechanical and tribological properties of boron, nitrogen-coincorporated diamond like carbon films prepared by reactive radio-frequency magnetron sputtering* / Nakazawa H. [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2010. – Vol. 19. – P. 503–506.

10. *Effects of B(CH₃O)₃ content on a PACVD plasma-boriding process* / X. Qiao [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2000. – Vol. 131. – P. 291–293.

11. *Cordero, B. Covalent radii revisited* / B. Cordero [et al.] // Dalton Transactions. – 2008. – Vol. 21. – P. 2832–2838.

12. *Chin, H. Tribological behavior of binary B–C films deposited by sputtering-PBII hybrid system* / H. Chin, S. Yoshida, S. Watanabe // Materials Sciences and Applications. – 2018. – Vol. 9. – P. 723–731.

13. *Herrmann, M. Boron-doped diamond with improved oxidation resistance* / M. Herrmann, B. Matthey, T. Gestrich // Diamond and Related Materials. – 2019. – Vol. 92. – P. 47–52.

14. *Влияние добавления диборана на свойства плазмохимически осаждаемых углеродных пленок* / Е.Н. Шубина [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2017. – Т. 43, № 1. – С. 80–88.

15. *Effect of boron and silicon doping on the surface and electrical properties of diamond like carbon films by magnetron sputtering technique* / C.S. Park [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 2013. – Vol. 231. – P. 131–134.
 16. *Low friction property of boron doped DLC under engine oil* / H. Mori [et al.] // *Tribology Online*. – 2017. – Vol. 12, № 3. – P. 135–140.
 17. *Тонкие пленки карбонитридов кремния и бора: синтез, исследование состава и структуры* / Н.И. Файнер [и др.] // *Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева*. – 2001. – Т. XLV, № 3. – С. 101–108.
 18. *Direct and large scale electric arc discharge synthesis of boron and nitrogen doped single-walled carbon nanotubes and their electronic properties* / B. Wang [et al.] // *Carbon*. – 2009. – Vol. 47, № 8. – P. 2112–2142.
 19. *Plasma deposition of boron films with high growth rate and efficiency using carborane* / O.I. Buzhinskij [et al.] // *Journal of Nuclear Materials*. – 2003. – Vol. 313–316. – P. 214–218.
 20. *Nekkanty, S. Indentation damage to boron carbide-DLC coatings with different compositions* / S. Nekkanty, M.E. Walter // *Surface and Coating Tech.* – 2004. – Vol. 183. – P. 1–9.
 21. *Structural and electrical characterization of boron containing diamond-like carbon films deposited by femtosecond pulsed laser ablation* / A. Sikora [et al.] // *Solid State Sci.* – 2009. – Vol. 11. – P. 1738–1741.
 22. *Tribological and thermal stability study of nanoporous amorphous boron carbide films prepared by pulsed plasma chemical vapor deposition* / S. Liza [et al.] // *Science and Technology of Advanced Materials*. – 2015. – Vol. 16. – Art. 035007 (13 pp).
 23. *Deposition of boron doped DLC films on TiNb and characterization of their mechanical properties and blood compatibility* / S. Liza [et al.] // *Science and Technology of Advanced Materials*. – 2017. – Vol. 18, № 1. – P. 76–87.
 24. *Ramesham, R. Cyclic voltammetric response of boron-doped homoepitaxial U₃ grown single crystal and noncrystalline CVD diamond* / R. Ramesham // *Sensors and Actuators B*. – 1998. – Vol. 50. – P. 131–139.
 25. *Synthesis of boron / nitrogen-incorporated diamondlike carbon films by pulsed laser deposition using nitrogen gas and a boron-containing graphite target* / H. Nakazawa [et al.] // *Japanese J. of Applied Physics*. – 2017. – Vol. 56, № 10. – Art. 105501 (7 pp.).
 26. *Synthesis and characterization of boron incorporated diamond-like carbon thin films* / L.L. Zhang [et al.] // *Thin Solid Films*. – 2015. – Vol. 589. – P. 457–464.
 27. *Theory of composite B_xC_yN_z nanotube heterojunctions* / X. Blasé [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 1997. – Vol. 70, № 2. – P. 197–199.
 28. *Formation of defects in boron nitride by low energy ion bombardment* / R. Peter [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2009. – Vol. 106, № 8. – P. 083523.
 29. *Effects of nitrogen gas ratio on composition and microstructure of BCN films prepared by RF magnetron sputtering* / S. Nakao [et al.] // *Vacuum*. – 2009. – Vol. 84. – P. 642–647.
 30. *Characterization of boron doped diamond-like carbon film by HRTEM* / X.J. Lia [et al.] // *Appl. Surf. Sci.* – 2015. – Vol. 357. – P. 2141–2146.
 31. *Effect of chemical doping of boron and nitrogen on the electronic, optical, and electrochemical properties of carbon nanotubes* / D. Jana [et al.] // *Chen. Prog. Mater. Sci.* – 2013. – Vol. 58, № 5. – P. 565–635.
 32. *Highly tetrahedral amorphous carbon films with low stress* / M. Chhowalla [et al.] // *Applied Physics Letters*. – 1996. – Vol. 69. – P. 2344.
 33. *Генерация плазмы бора в вакуумной дуге с катодом из гексаборида лантана* / А.Г. Николаев [и др.] // *Письма в ЖТФ*. – 2015. – Т. 41, № 18. – С. 30–37.
 34. *Organisation of carbon and boron nitride layers in mixed nanoparticles and nanotubes synthesized by arc discharge* / K. Suenaga [et al.] // *Appl. Phys. A*. – 1999. – Vol. 68, № 3. – P. 301–308.
 35. *Photovoltaic characteristics of amorphous silicon solar cells using boron doped tetrahedral amorphous carbon films as p-type window materials* / J. Han [et al.] // *Appl. Physics Lett.* – 2007. – Vol. 90. – P. 083508.
 36. *Effect of boron and nitrogen additives on structure and transport properties of arc-produced carbon* / O.V. Sedelnikova [et al.] // *Carbon*. – 2019. – Vol. 143. – P. 660–668.
 37. *Исследование поликристаллических алмазных пленок, легированных бором, методами спектроскопии рамановского рассеяния и спектроскопии оптического поглощения* / В.А. Кривченко [и др.] // *Журнал технической физики*. – 2007. – Т. 77, № 11. – С. 83–87.
 38. *B – C – N nanotubes and boron doping of carbon nanotubes* / P. Redlich [et al.] // *Chem. Phys. Lett.* – 1996. – Vol. 260. – P. 465–470.
- Работа выполнена в рамках заданий «Синтез высоколегированных бором и их соединениями покрытий из аморфного углерода, определение их структурно-фазового состояния, механических и коррозионных свойств при эксплуатации в среде топлив и масел», ГПНИ «Физическое материаловедение, новые материалы и технологии», подпрограмма «Материалы в технике».*

Поступила в редакцию 14.06.19.

УДК 535.42:534.8

АКУСТООПТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН ЛЭМБА БЕССЕЛЕВЫМИ СВЕТОВЫМИ ПУЧКАМИ В КРИСТАЛЛАХ СИЛЛЕНИТОВ**Г.В. Кулак, Г.В. Крох, Т.В. Николаенко***Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина***ACOUSTOOPTICAL DIAGNOSTICS OF ULTRASONIC LAMB WAVES BY THE BESSEL LIGHT BEAMS IN GYROTROPIC SILLENITE TYPE CRYSTALS****G.V. Kulak, G.V. Krokh, T.V. Nikolaenko***I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University*

Показано, что для бесселевого светового пучка возможно раздельное наблюдение изотропной и анизотропной брэгговской дифракции циркулярно поляризованных волн на модах Лэмба в гиротропных кубических кристаллах. При этом эффективное акустооптическое взаимодействие в прошедших и отраженных дифракционных порядках реализуется в узком интервале толщин слоя вблизи толщины отсечки моды. Наибольший интерес для акустооптической диагностики мод Лэмба представляет нулевая мода бесселевого светового пучка при условии изотропной дифракции циркулярно поляризованных волн при точном поперечном фазовом синхронизме дифрагированных пучков.

Ключевые слова: плоскопараллельный слой, волны Лэмба, акустооптическая дифракция, гиротропный кубический кристалл, коэффициенты отражения и пропускания.

It is shown that, for Bessel light beam, it is possible to separately observe isotropic and anisotropic Bragg diffraction of circularly polarized waves on Lamb modes in gyrotropic cubic crystals. In this case, the effective acousto-optical interaction in the transmitted and reflected diffraction orders is realized in a narrow range of layer thickness near the mode cut-off thickness. Of greatest for acousto-optic diagnostics of Lamb modes is the zero mode of a Bessel light beam under the condition of isotropic diffraction of circularly polarized waves with accurate transverse phase synchronism of the diffracted beams.

Keywords: plan-parallel slab, Lamb's waves, acousto-optical diffraction, gyrotropic cubic crystal, reflection coefficients and transmission coefficients.

Введение

В работе [1] теоретически и экспериментально исследованы многослойные акустооптические структуры на основе кристаллов кремния, окиси цинка, кварца и парателлурита. Показано [1], [2], что в многослойных структурах при возбуждении поверхностных акустических волн (ПАВ), интенсивности ультразвуковых (УЗ) волн в тонком слое толщиной $h \sim 1$ мм могут достигать ~ 1 МВт/см² и амплитуда деформации ультразвуковой (УЗ) волны $U \sim 10^{-2}$. В работе [3] впервые исследовано отражение и пропускание дифрагированных волн в плоскопараллельном периодически модулированном (возмущенном) слое. В работе [4] исследована дифракция световых волн в плоскопараллельном слое с однородным распределением упругих деформаций, а в [5] – в слое, возбужденном волнами Лява. К настоящему времени хорошо изучены ультразвуковые волны Лэмба пластины со сложным неоднородным распределением упругих деформаций по ее сечению, широко применяемые для неразрушающего контроля и создания акустоэлектронных устройств обработки сигналов [6]–[8]. При этом особый интерес представляют кубические кристаллы типа силленита [7], [8]. В работе [9] экспериментально исследована акустооптическая диагностика волн Лэмба высших порядков

при их распространении и отражении от края пластины из кварца. В [9] теоретические исследования ограничились лишь изучением брэгговской акустооптической (АО) дифракции в оптически изотропном материале из плавленого кварца. При этом, однако, кристаллы типа силленита ($\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$) обладают значительной гиротропией, которая приводит к существенному изменению поляризационных и энергетических характеристик дифрагированных на ультразвуке световых волн [10], [11].

Характерным свойством БСП является их малая угловая расходимость [12], [13]. В связи с этим при заданной частоте ультразвука изменением угла падения света возможно раздельное наблюдение всех четырех дифракционных процессов для собственных циркулярно поляризованных волн в гиротропном кристалле. При этом дифрагированные световые пучки сохраняют структуру БСП гиротропного кристалла. Для расходящихся световых пучков, например гауссовых, возможно наложение различных дифракционных процессов изотропной и анизотропной дифракции, приводящих к возникновению трехпиковой структуры брэгговского максимума со сложной поляризацией волнового поля в дифракционном порядке [11].

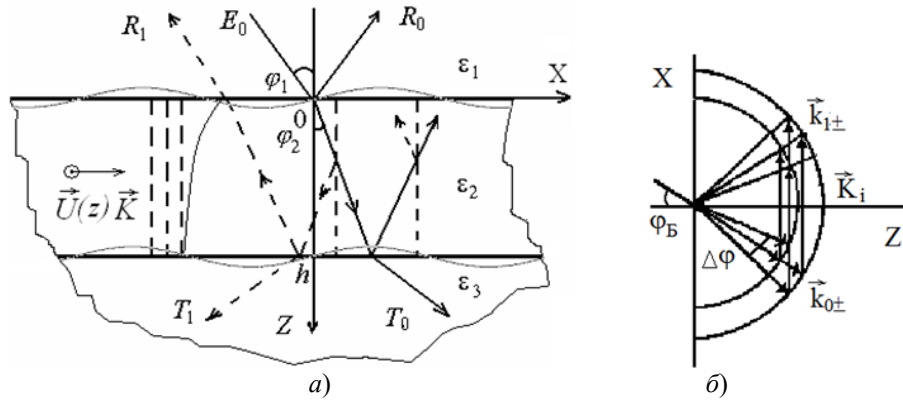


Рисунок 0.1 – Схема АО дифракции на модах Лэмба высоких порядков (а); расположение волновых векторов дифрагированных пучков с правой ($\vec{k}_{0+,1+}$) и левой ($\vec{k}_{0-,1-}$) циркулярной поляризацией и ультразвука $\vec{K}_i$ ($i=1-4$) в различных геометрических условиях изотропной и анизотропной дифракции (б)

1 Теоретические результаты

Положим, что плоскопараллельный слой толщиной h с диэлектрической проницаемостью ε_2 расположен между однородными прозрачными средами с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_3 (рисунок 0.1, а). Начало системы координат XYZ расположено на верхней границе слоя, а ось Y перпендикулярна плоскости падения. При условии $h \gg \Lambda_t / 2\pi$, где Λ_t – длина волны объемной сдвиговой УЗ волны в слое, в нем распространяются моды Лэмба высших порядков вдоль оси X и искривлением границ слоя можно пренебречь [6]. Другие ограничения на толщину слоя обусловлены условиями брэгговской дифракции света в слое $(\lambda_0 h f^2 / 2n_2 v^2) \gg 1$ [2], где $f(v)$ – частота (фазовая скорость) УЗ волны, λ_0 – длина световой волны в вакууме, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$.

Дисперсионные уравнения для волн Лэмба находятся из граничных условий с учетом непрерывности УЗ смещений и напряжений на границах слоя [6]. При этом рассматриваются симметричные (s) и антисимметричные (a) бегущие волны Лэмба бесконечного плоскопараллельного слоя. Компоненты вектора смещений для симметричной моды имеют вид:

$$U_x = U_0 \left[\frac{ch(qz)}{sh(qh)} - \frac{2qs}{(K^2 + s^2)} \frac{ch(sz)}{sh(sh)} \right] e^{i(Kx - \Omega t)}, \quad (1.1)$$

$$U_z = -iU_0 \frac{q}{K} \left[\frac{sh(qz)}{sh(qh)} - \frac{2K^2}{(K^2 + s^2)} \frac{ch(sz)}{sh(sh)} \right] e^{i(Kx - \Omega t)},$$

где U_0 – амплитуда волны; $K = \Omega / v$ (Ω – циклическая частота, v – фазовая скорость УЗ волны); $q = (K^2 - K_l^2)^{1/2}$, $s = (K^2 - K_s^2)^{1/2}$, где $K_l = \Omega / v_l$, $K_s = \Omega / v_s$ (v_l (v_s) – фазовая скорость продольной (сдвиговой) УЗ волны). Поле смещений для антисимметричной моды Лэмба дается соотношениями:

$$U_x = U_0 \left[\frac{sh(qz)}{ch(qh)} - \frac{2qs}{(K^2 + s^2)} \frac{sh(sz)}{ch(sh)} \right] e^{i(Kx - \Omega t)}, \quad (1.2)$$

$$U_z = -iU_0 \frac{q}{K} \left[\frac{ch(qz)}{ch(qh)} - \frac{2K^2}{(K^2 + s^2)} \frac{ch(sz)}{ch(sh)} \right] e^{i(Kx - \Omega t)}.$$

Фазовую скорость симметричной и антисимметричной моды Лэмба находим соответственно из соотношений:

$$\frac{th(sh)}{th(qh)} = \frac{4K^2 qs}{(K^2 + S^2)^2}, \quad \frac{th(sh)}{th(qh)} = \frac{(K^2 + S^2)^2}{4K^2 qs}.$$

УЗ волна (1.1) и (1.2) создает периодическую в пространстве и во времени решетку диэлектрической проницаемости вдоль оси X и пространственно-неоднородную вдоль оси Z , то есть

$$\varepsilon_2(x, z, t) = \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2(z) \exp[i(Kx - \Omega t)],$$

где $\Delta\varepsilon_2 = -\varepsilon_2^2 p_{\text{эф}} U_{\text{эф}}(z)$ ($U_{\text{эф}}(z)$ – эффективная амплитуда деформации УЗ волны, $p_{\text{эф}}$ – эффективная фотоупругая постоянная).

Если падающая на слой световая волна является линейно поляризованной, то в среде возможны четыре типа взаимодействий циркулярных мод, для каждого из которых существует свой угол Брэгга. Для взаимодействия волн с одинаковыми поляризациями (изотропная дифракция) условия Брэгга выполняются одновременно при одном и том же угле падения $\varphi_B = \arcsin(\lambda_0 / 2n\Lambda)$, где λ_0 и Λ – длина световой и ультразвуковой волн соответственно; n – показатель преломления кристалла без учета гиротропии. В случае взаимодействия волн с различными поляризациями (анизотропная дифракция) углы Брэгга отличаются от φ_B на величину $\Delta\varphi = \pm 2\delta / (n \sin 2\varphi_B)$ (рисунок 0.1, б), где δ – параметр гиротропии [14]. При соблюдении условия $\delta \gg \Delta n_a$ (Δn_a – глубина модуляции

показателя преломления акустической волной), возможно независимое рассмотрение всех четырех дифракционных процессов в гиротропных средах. Данное условие выполняется для большинства гиротропных сред используемых в акустооптике.

Предположим, что падающий БСП с частотой $\omega \gg \Omega$ и волновым вектором

$$\vec{k}_{1\pm} = \vec{e}_x k_{1\pm x} + \vec{e}_z k_{1\pm z}$$

$$(k_{\pm 1x} = k n_{1\pm} \sin \varphi_{1\pm}, \quad k_{1\pm z} = k n_{1\pm} \cos \varphi_{1\pm}),$$

$k = \omega / c$, $n_{1\pm} = n_1 \cos \gamma_1 \pm \delta$ (n_1 – показатель преломления среды без учета гиротропии, γ_1 – угол конусности БСП в первой среде при $z < 0$) имеет правую (нижний индекс «+») или левую (знак «-») циркулярную поляризацию. Углы преломления циркулярно поляризованных волн различны, то есть $\varphi_{2\pm} = \arcsin(n_{1\pm} / n_{2\pm} \sin \varphi_{1\pm})$ и близки к углу Брэгга $\varphi_{2\pm} \approx \varphi_B \approx K / 2k_{2\pm}$, где $k_{2\pm} = k n_{2\pm}$ ($n_{2\pm} = n_2 \cos \gamma_2 \pm \delta$, где γ_2 – угол конусности БСП в слое при $0 < z < h$).

Решение волнового уравнения для дифрагированного поля электромагнитной волны в слое имеет вид [3]:

$$\vec{E} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} A_p^{\pm}(z) \vec{e}_{\pm}(\rho, \varphi) \exp[i(K_{pz} z - \omega_p t - \pi p / 2)], \quad (1.3)$$

где $k_{p\pm z} = k_{0\pm z} + pK$, $\omega_p = \omega + p\Omega$; здесь $\vec{e}_{\pm}(\rho, \varphi)$ – вектор-функции поляризации дифрагированных волн для бесселевых световых пучков произвольного порядка (m). Вектор-функции поляризации имеют вид [13]:

$$\vec{e}_+ = e_{\rho+} \vec{e}_{\rho} + e_{\varphi+} \vec{e}_{\varphi},$$

$$\vec{e}_- = e_{\rho-} \vec{e}_{\rho} + e_{\varphi-} \vec{e}_{\varphi},$$

$$e_{\rho+} = i \left[\frac{m}{q\rho} J_m(q\rho)(1 + \cos \gamma_+) - J_{m+1}(q\rho) \cos \gamma_+ \right],$$

$$e_{\varphi+} = \left[J_{m+1}(q\rho) - \frac{m}{q\rho} J_m(q\rho)(1 + \cos \gamma_+) \right],$$

$$e_{\rho-} = -i \left[\frac{m}{q\rho} J_m(q\rho)(1 - \cos \gamma_-) + J_{m+1}(q\rho) \cos \gamma_- \right],$$

$$e_{\varphi-} = \left[-J_{m+1}(q\rho) + \frac{m}{q\rho} J_m(q\rho)(1 - \cos \gamma_-) \right],$$

где $\vec{e}_{\rho}, \vec{e}_{\varphi}, \vec{e}_z$ – единичные векторы в цилиндрических координатах ρ, φ, z (продольные компоненты вследствие их малости не учитываются); m – целое число, указывающее порядок моды БСП;

$$q = k_{2\pm} \gamma_2 \approx k_2 \gamma_2;$$

$$\cos(\gamma_{\pm}) = \cos(\gamma_2) [1 \pm (c\delta / \omega n_2) \operatorname{tg}(\gamma_2)].$$

При $k_{0\pm z} \approx K / 2$ из совокупности (1.3) дифрагированных волн выделяют две наиболее существенные с дифракционными порядками $p = 0$ и $p = -1$. Система неоднородных уравнений связанных волн имеет вид:

$$\frac{d^2 A_0^{\pm}}{dz^2} + k_{0\pm z}^2 A_0^{\pm} - i\eta^{\pm}(z) k_{2\pm}^2 A_{-1}^{\pm} = 0,$$

$$\frac{d^2 A_{-1}^{\pm}}{dz^2} + k_{-1\pm z}^2 A_{-1}^{\pm} + i\eta^{\pm}(z) k_{2\pm}^2 A_0^{\pm} = 0, \quad (1.4)$$

$$\text{где } k_{0\pm z} = (k_{2\pm}^2 - k_{0\pm x}^2)^{1/2}, \quad k_{-1\pm z} = (k_{2\pm}^2 - k_{-1\pm x}^2)^{1/2},$$

$$k_{0\pm x} = k_{2\pm} \sin \varphi_{B\pm}, \quad k_{-1\pm x} = k_{2\pm} \sin \varphi_B,$$

$$\eta^{\pm}(z) = -n_{2\pm}^2 g_{\pm, \pm} P_{\varphi\varphi}^{\pm}(z) / 2 \cos \varphi_{2\pm}$$

($g_{\pm, \pm}$ – интегралы перекрытия дифрагированных волн). Интегралы перекрытия дифрагированных волн для различных типов изотропной и анизотропной дифракции циркулярно-поляризованных волн находим из соотношений:

$$g_{\pm, \pm} =$$

$$\frac{\left| \int_0^{R_N} [(\vec{e}_{\rho\pm}^* e_{\rho\pm}) + (\vec{e}_{\varphi\pm}^* e_{\varphi\pm})] \rho d\rho \right|}{\sqrt{\int_0^{R_N} (|\vec{e}_{\rho\pm}|^2 + |\vec{e}_{\varphi\pm}|^2) \rho d\rho} \sqrt{\int_0^{R_N} (|e_{\rho\pm}|^2 + |e_{\varphi\pm}|^2) \rho d\rho}}, \quad (1.5)$$

где R_N – радиус БСП; здесь следует использовать любые комбинации знаков «+» и «-» в нижних индексах, соответствующих разным дифракционным процессам, представленным на рисунке 0.1, б. В приведенных выше формулах для $g_{\pm, \pm}$ символ « $\vec{e}$ -бар» означает, что символ q , соответствующий поперечному волновому числу дифрагированной световой волны минус первого порядка ($p = -1$), следует заменить на символ q_0 для дифрагированной волны нулевого порядка ($p = 0$).

С учетом результатов работ [3]–[5], решение системы уравнений (1.4) в брэгговском режиме дифракции можно представить в виде:

$$A_0^{\pm} = (U_2^{\pm} + U_1^{\pm}) / 2, \quad A_{-1}^{\pm} = (U_2^{\pm} - U_1^{\pm}) / 2.$$

Величины $U_{1,2}^{\pm}$ находим из решения неоднородного уравнения:

$$\frac{d^2 U_{1,2}^{\pm}}{dz^2} + k_2^2 \left[\cos^2 \varphi_{2\pm} \pm \frac{1}{2} \eta^{\pm}(z) \right] U_{1,2}^{\pm} = 0.$$

Решение уравнений (1.5) в ВКБ – приближении имеет вид [15]:

$$U_{1,2}^{\pm} = C_1^{\pm} e^{ik_{2\pm}^{\pm}(z)} + C_2^{\pm} e^{-ik_{2\pm}^{\pm}(z)}, \quad (1.6)$$

где

$$k_{2\pm}^{\pm}(z) = k_{2\pm} z \left[(1 - n_{1\pm}^2 / n_{2\pm}^2) \sin^2 \varphi_{1\pm} \right] \pm \pm (n_{2\pm}^2 p_{\varphi\varphi}^{\pm} U / 4K \cos \varphi_{2\pm}) \int_{-z/2}^{z/2} U_{\varphi\varphi}(z) dz;$$

$C_{1,2}^{\pm}$ – постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий, U – амплитуда деформации. В рамках приближения ВКБ предполагается, что множители перед экспонентами в (1.6) слабо изменяются по сравнению с экспоненциальными сомножителями, содержащими большой положительный параметр $k_{2\pm} z \gg 1$.

Сшивая напряженности электрического и магнитных полей в слое [3]–[5], а также в областях $z < 0$ и $z > h$, находим коэффициенты отражения и пропускания (относительные интенсивности) дифрагированных волн на границе слоя. Решение системы восьми алгебраических уравнений можно найти в замкнутой форме. Эффективные волновые числа $k_{x\pm}^{+,-}$ для антисимметричных волн Лэмба даются соотношением:

$$k_{x\pm}^{+,-} = k_{2\pm} \left\{ \left(1 - (n_{1\pm}^2 / n_{2\pm}^2) \right) \sin^2 \varphi_{1\pm} \pm \frac{p_{\varphi\phi}^{\pm} U}{2h \cos \varphi_{2\pm}} \left[\frac{sh(qh/2)}{Kch(qh)} - \frac{4qKsh(sh/2)}{s(K^2 + s^2)ch(sh)} \right] \right\}.$$

В случае дифракции на симметричных модах Лэмба следует положить:

$$k_{x\pm}^{+,-} = k_{2\pm} \left\{ \left(1 - (n_{1\pm}^2 / n_{2\pm}^2) \right) \sin^2 \varphi_{1\pm} \pm \frac{p_{\varphi\phi}^{\pm} U}{2h \cos \varphi_{2\pm}} \left[\frac{sh(qh/2)}{qsh(qh)} - \frac{4qsh(sh/2)}{(K^2 + s^2)sh(sh)} \right] \right\}.$$

Коэффициенты отражения ($R_{0\pm}$) и пропускания ($T_{0\pm}$) циркулярно поляризованных составляющих дифрагированных волн нулевого и первого ($R_{1\pm}$, $T_{1\pm}$) порядков определяются соотношениями:

$$R_{0\pm} = \left| \frac{\Delta_{0\pm}^r}{\Delta_{\pm}} \right|^2, R_{1\pm} = \left| \frac{2\Delta_{1\pm}^r}{n_{1\pm}\Delta_{\pm}} \right|^2, \\ T_{0\pm} = \frac{n_{3\pm}}{n_{1\pm}} \left| \frac{2\Delta_{0\pm}^t}{n_{3\pm}\Delta_{\pm}} \right|^2, T_{1\pm} = \frac{n_{3\pm}}{n_{1\pm}} \left| \frac{2\Delta_{1\pm}^t}{n_{3\pm}\Delta_{\pm}} \right|^2, \quad (1.7)$$

где

$$\Delta_{\pm} = (-\alpha_{1+}^{-}\alpha_{3+}^{+}e_{1\pm}^{-*} + \alpha_{1-}^{-}\alpha_{3-}^{+}e_{1\pm}^{-}) \times \\ \times (\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_{1\pm}^{+*} - \alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_{1\pm}^{+}) + \\ + (\alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_{1\pm}^{+*} - \alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_{1\pm}^{+*}) (\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_{1\pm}^{-*} - \alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_{1\pm}^{-}) , \\ \alpha_{1-}^{-}e_{1-}^{-} \left[\alpha_{3-}^{-}b_{1\pm}^{+} + n_{2\pm}\alpha_{3-}^{+} + \alpha_{3+}^{+}(b_{1\pm}^{+} - b_{1\pm}^{-})/2 \right], \\ \Delta_{0\pm}^r = (-\alpha_{1+}^{-}\alpha_{3+}^{+}e_{1\pm}^{-*} + \alpha_{1-}^{-}\alpha_{3-}^{+}e_{1\pm}^{-}) \times \\ \times (\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_{1\pm}^{+*} - \alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_{1\pm}^{+}) + \\ + (-\alpha_{1+}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_{1\pm}^{+*} + \alpha_{1-}^{+}\alpha_{3-}^{+}e_{1\pm}^{+*}) (\alpha_{1-}^{-}\alpha_{3-}^{-}e_{1\pm}^{-*} - \alpha_{1+}^{-}\alpha_{3+}^{-}e_{1\pm}^{-}) , \\ \Delta_{1\pm}^r = (b_{1\pm}^{-} - b_{1\pm}^{+}) (\alpha_{3-}^{+}\alpha_{3+}^{+}e_{1\pm}^{+*} - \alpha_{3+}^{+}\alpha_{3-}^{-}e_{1\pm}^{+*}) + \\ + (b_{1\pm}^{-} - b_{1\pm}^{+}) \left[(\alpha_{3-}^{-})^2 e_{1\pm}^{+} e_{1\pm}^{-} - (\alpha_{3+}^{+})^2 e_{1\pm}^{-*} e_{1\pm}^{+*} \right], \quad (1.8) \\ \Delta_{0\pm,1\pm}^t = \mp \alpha_{1+}^{+}e_{1\pm}^{+*} \left[\alpha_{3+}^{+}b_{1\pm}^{-} + n_{2\pm}\alpha_{3+}^{-} + \alpha_{3-}^{-}(b_{1\pm}^{-} - b_{1\pm}^{+})/2 \right] \pm \\ \pm \alpha_{1-}^{+}e_{1\pm}^{+*} \left[\alpha_{3-}^{+}b_{1\pm}^{-} + n_{2\pm}\alpha_{3-}^{-} + \alpha_{3+}^{+}(b_{1\pm}^{-} - b_{1\pm}^{+})/2 \right] - \\ - \alpha_{1+}^{-}e_{1\pm}^{-*} \left[\alpha_{3+}^{+}b_{1\pm}^{+} + n_{2\pm}\alpha_{3+}^{-} + \alpha_{3-}^{-}(b_{1\pm}^{+} - b_{1\pm}^{-})/2 \right] + \\ - \alpha_{1-}^{-}e_{1\pm}^{-*} \left[\alpha_{3-}^{+}b_{1\pm}^{+} + n_{2\pm}\alpha_{3-}^{-} + \alpha_{3+}^{+}(b_{1\pm}^{+} - b_{1\pm}^{-})/2 \right].$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha_{1,3+}^{\pm} = (1 + n_{1\pm,3\pm}^{-1} b_{1\pm}^{\pm}), \quad \alpha_{1,3-}^{\pm} = (1 - n_{1\pm,3\pm}^{-1} b_{1\pm}^{\pm}), \\ b_{1\pm}^{\pm} = k_{x\pm}^{+,-} / k, \quad e_{1\pm}^{\pm} = \exp(ihk_{x\pm}^{+,-}),$$

причем $n_{3\pm} = n_3 \cos \gamma_3 \pm \delta$ (γ_3 – угол конусности БСП в третьей среде (подложке) при $z > h$); знаком «*» обозначено комплексное сопряжение. Из выражений (1.7), (1.8) следует, что выполняются соотношения: $R_{0\pm} + R_{1\pm} + T_{0\pm} + T_{1\pm} = 1$.

2 Численные расчеты и их обсуждение

Численные расчеты проводились для плоскопараллельного слоя из гиротропного кубического кристалла германата висмута ($\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$) в случае дифракции линейно поляризованного излучения *He-Ne*-лазера с длиной волны $\lambda_0 = 0,6328$ мкм на симметричных и антисимметричных УЗ волнах Лэмба различных порядков. Предполагалось, что слой материала ($n_2 = 2,55$, $\delta = 3,9 \cdot 10^{-5}$) граничит с воздухом ($n_1 = n_3 = 1$, $\delta = 0$). Амплитуда тензора деформаций $U = (2I_a / \rho v_k^3)^{1/2}$, где I_a – интенсивность УЗ волны Лэмба; v_k – фазовая скорость УЗ волны Лэмба, причем k – ее порядок [6]; ρ – плотность кристалла.

Выражения (1.7), (1.8) описывают все типы взаимодействия циркулярно поляризованных мод, представленных на рисунке 0.1. При дифракции на УЗ модах Лэмба, распространяющихся вдоль кристаллографических осей второго порядка $p_{\varphi\phi}^{\pm} = [(p_{11} \cos^2 \varphi_{1\pm} - p_{12} \sin^2 \varphi_{1\pm}) \pm p_{12}]$, где верхний знак плюс соответствует изотропной дифракции, а нижний знак (минус) – анизотропной (p_{11}, p_{12} – фотоупругие постоянные [16]).

На рисунке 2.1 представлены зависимости интегралов перекрытия $g_n \equiv g_{\pm,\pm}$ (1.5) от параметра $q_n = |q - q_0| / q_0$ для дифракции бесселевого светового пучка нулевого порядка (*a*) и первого порядка (*b*).

Из рисунка 2.1, *a* следует, что интегралы перекрытия основной моды бесселевого светового пучка ($m = 0$) достигают максимального значения при выполнении условия поперечного фазового синхронизма, то есть при $q_n = 0$. При этом интегралы перекрытия для анизотропной дифракции (кривая 2) выше, чем для изотропной дифракции (кривая 1). Интегралы перекрытия для всех возможных типов анизотропной и изотропной дифракции одинаковы.

В случае азимутально-неоднородных БСП с азимутальным числом $m = 1$ (рисунок 2.1, *b*), интегралы перекрытия всех возможных типов АО преобразования отличаются по величине. При малых значениях $q_n \sim 0,01$ наибольшее значение принимает интеграл перекрытия $g_{-,+}$. В широкой области максимального значения интегралов перекрытия $0,05 \leq q_n \leq 0,07$ наибольшее значение принимает интеграл перекрытия $g_{-,+}$.

При точном поперечном синхронизме ($q_n = 0$) максимальное значение интеграла перекрытия не достигается.

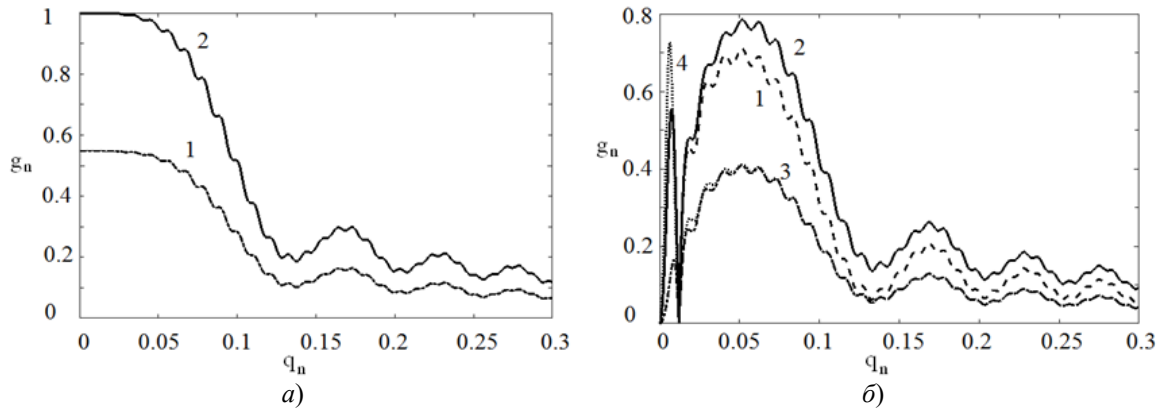


Рисунок 2.1 – Зависимость интеграла перекрытия g_n от параметра $q_n = |q - q_0| / q_0$ для дифракции БСП нулевого порядка (а) и первого порядка (б); а) изотропная дифракция (кривая 1), анизотропная дифракция (кривая 2) для $m = 0$; б) дифракция правополяризованной волны в левополяризованную (кривая 1), левополяризованной в правополяризованную (кривая 2), правополяризованной в правополяризованную (кривая 3), левополяризованной в левополяризованную (кривая 4) для $m = 1$ (кристалл $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$, $\gamma_2 = 0,5^\circ$, $\delta = 3,9 \cdot 10^{-5}$, $R_H = 5$ мм)

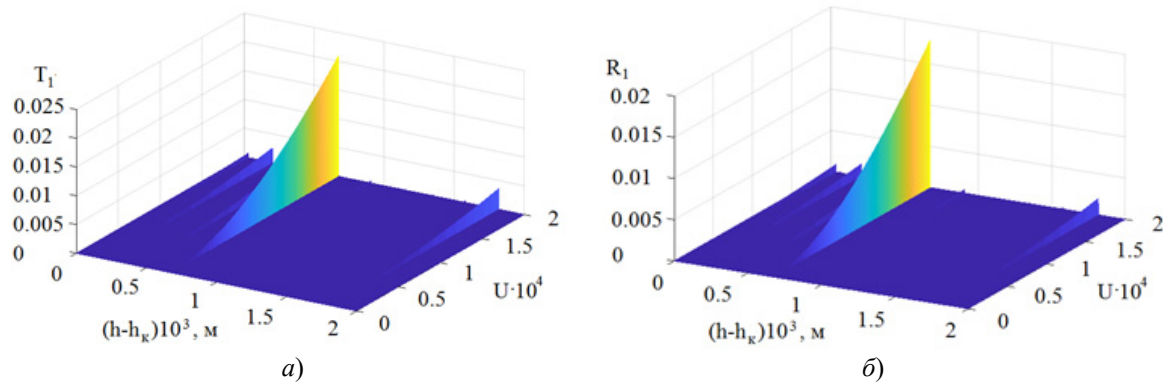


Рисунок 2.2 – Зависимость коэффициента пропускания T_{1+} (а) и коэффициента отражения R_{1+} (б) от амплитуды деформации УЗ волны U и толщине слоя h для антисимметричных мод Лэмба ($v_{21} = 2885$ м/с, $h_{21} = 0,0016$ мм, $f = 900$ МГц; $m = 0$, $q_n = 0$, $g_n = 1$; структура: воздух – $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ – воздух)

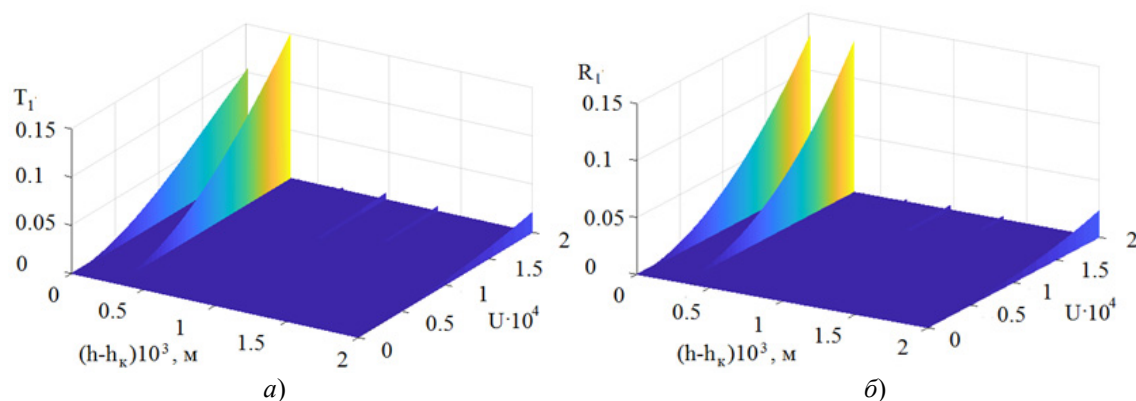


Рисунок 2.3 – Зависимость коэффициента пропускания T_{1+} (а) и коэффициента отражения R_{1+} (б) от амплитуды деформации УЗ волны U и толщины слоя h для симметричных мод Лэмба ($v_{21} = 2888$ м/с, $h_{21} = 0,0019$ мм (б), $f = 900$ МГц; $m = 0$, $q_n = 0$, $g_n = 1$; структура: воздух – $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ – воздух)

Зависимости коэффициентов пропускания T_{1+} (а) и отражения R_{1+} (б) дифрагированной волны первого порядка для дифракции на двадцать первой антисимметричной моде Лэмба,

возбуждаемой в пластинке из кристалла германата висмута, от толщины пластинки h и амплитуды деформации УЗ волны U представлены на рисунке 2.2.

Из рисунка следует, что коэффициент пропускания T_{1+} и отражения R_{1+} достигает максимального значения лишь в узком интервале толщин пластины $\Delta h \sim 0,01$ мм. При увеличении амплитуды деформации U коэффициент пропускания возрастает, достигая максимального значения. Расчеты проводились для толщины пластинки, начиная с критической толщины h_k для каждой из мод Лэмба. Резонансный характер коэффициента пропускания объясняется тем, что в поперечном сечении пластины формируется квазистоячая УЗ волна, образуемая наложением продольных УЗ составляющих волны Лэмба [6]. Максимальное значение коэффициента отражения на 0,5% ниже, чем коэффициента пропускания.

На рисунке 2.3 представлена зависимость коэффициента пропускания T_{1+} (а) и отражения R_{1+} (б) дифрагированной волны первого порядка для двадцать первой симметричной моды Лэмба, возбуждаемой в пластине из германата висмута, от ее толщины h и амплитуды деформации УЗ волны U .

Как следует из рисунка, зависимость коэффициента пропускания T_{1+} от толщины слоя h также имеет резонансный характер; максимальное значение T_{1+} достигается в узком интервале толщины пластинки $\Delta h \sim 0,01$ мм. При расчетах полагалось, что толщина пластинки увеличивается, начиная от толщины отсечки h_k соответствующей симметричной моды Лэмба. Резонансное поведение коэффициента пропускания объясняется формированием квазистоячей УЗ волны в поперечном сечении пластинки при наложении сдвиговых УЗ составляющих симметричной волны Лэмба. Максимальные значения коэффициентов отражения и пропускания примерно одинаковы по величине.

Заключение

Значения коэффициентов отражения и пропускания дифрагированных волн определяются величинами интегралов перекрытия и эффективной фотоупругой постоянной для изотропной и анизотропной дифракции ($p_{эф}^+ > p_{эф}^-$). Акустооптический метод позволяет осуществить диагностику ультразвуковых волн Лэмба высоких порядков в режиме дифракции Брэгга. Наибольший интерес для АО диагностики представляет нулевая мода БСП при условии изотропной дифракции циркулярно поляризованных волн при точном поперечном фазовом синхронизме дифрагированных пучков ($q_n = 0$). Эффективное применение азимутально-неоднородных БСП первого порядка достигается при отсутствии поперечного синхронизма для $q_n \sim 0,055$ и при дифракции лево-циркулярно поляризованной волны в право-циркулярно поляризованную.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sunita, J. Thin film layered structure for acousto-optic devices / J. Sunita, M. Abhai // J. Appl. Phys. – 1992. – Vol. 25. – P. 1116–1121.
2. Яковкин, Н.Б. Дифракция света на акустических волнах / Н.Б. Яковкин, Р.В. Петров. – Новосибирск, 1979. – 194 с.
3. Kong, J.A. Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media / J.A. Kong // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – Vol. 67, № 6. – P. 825 – 829.
4. Кулак, Г.В. Дифракция света на ультразвуке в условиях френелевского отражения / Г.В. Кулак // Опт. и спектр. – 1994. – Т. 76, № 6. – С. 1027–1029.
5. Кулак, Г.В. Дифракция света ультразвуковых волнах Лява / Г.В. Кулак, Т.В. Николаенко, П.И. Ропот // Опт. и спектр. – 2008. – Т. 104, № 3. – С. 508–512.
6. Виктор, И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Виктор. – М.: Наука, 1966. – 167 с.
7. Золотова, О.П. Распространение волн Лэмба и SH-волн в пластинке пьезоэлектрического кубического кристалла / О.П. Золотова, С.И. Бурков, Б.П. Сорокин // Журн. сиб. Фед. Унта. Сер. Мат. Физ. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 185–204.
8. Анисимкин, В.И. Анизотропия основных характеристик волн Лэмба в пьезоэлектрическом кристалле (001)-Bi₁₂SiO₂₀ / В.И. Анисимкин // Акуст. журн. – 2016. – Т. 62, № 2. – С. 163–166.
9. Diodati, P. Lamb wave reflection at the plate edges / P. Diodati, G. Tassi, A. Alippi // Appl. Phys. Lett. – 1985. – Vol. 47, № 6. – P. 573–575.
10. Белый, В.Н. Дифракция света на ультразвуке в гиротропных кубических кристаллах в режиме Рамана – Ната / В.Н. Белый, Г.В. Кулак, В.В. Шепелевич // Опт. и спектр. – 1988. – Т. 65, В. 3. – С. 636–640.
11. Белый, В.Н. Дифракция света на ультразвуке в гиротропных кубических кристаллах в режиме Брэгга / В.Н. Белый, Г.В. Кулак // ЖПС. – 1991. – Т. 54, № 5. – С. 803–808.
12. Durnin, J. Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberly // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58, № 15. – P. 1499–1501.
13. Peculiarities of Acoustooptic Transformation of Bessel Light Beams in gyrotronic Crystals / V.N. Belyi, N.S. Kazak P.A. Khilo, E.S. Petrova, N.A. Khilo // Universal Journal of Physics and Application. – 2015. – Vol. 9, № 5. – P. 220–224.
14. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск: Наука и техника, 1976. – 453 с.
15. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. Наука, 1971. – 576 с.
16. Яри, А. Оптические волны в кристаллах / А. Яри, П. Юх. – М.: Мир, 1987. – 616 с.

Поступила в редакцию 04.03.19.

УДК 539.12

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ, КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ С МИНИМАЛЬНЫМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ $j = 0$ В МОДЕЛЯХ ЛОБАЧЕВСКОГО И РИМАНА

Е.М. Овсиюк, А.Д. Коральков

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

RELATIVISTIC PARTICLE WITH SPIN 1 IN PRESENCE OF COULOMB FIELD, QUANTUM STATES WITH MINIMAL ANGULAR MOMENTUM $j = 0$ IN LOBACHEVSKY AND RIEMANN MODELS

E.M. Ovsyuk, A.D. Koral'kov

I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University

Ранее были исследованы нерелятивистские уравнения для векторной частицы во внешнем кулоновском поле в пространствах Лобачевского и Римана, при этом использовалось модифицированное уравнение Даффина – Кеммера, что позволило в нерелятивистском приближении получить три несвязанных уравнения для отдельных радиальных функций и найти три серии уровней энергии. Однако состояния с минимальным значением $j = 0$ полного углового момента при этом не рассматривались. В настоящей работе исследованы состояния с $j = 0$, при этом для упрощения математической задачи нет необходимости переходить к нерелятивистскому приближению. В обеих пространственных моделях применяются обычное и модифицированное уравнения Даффина – Кеммера, построены решения уравнений в гипергеометрических функциях и в трансцендентных общих функциях Гойна. В каждой из пространственных моделей эти решения соответствуют незначительно различающимся спектрам. Можно предположить, что аналогичное свойство имеет место и для больших значений полного момента j , даже если известны решения только модифицированного нерелятивистского уравнения Даффина – Кеммера.

Ключевые слова: частица со спином 1, уравнение Даффина – Кеммера, кулоновский потенциал, минимальные значения полного углового момента, уравнение Гойна, точное решение, энергетический спектр.

Previously, the nonrelativistic problems of a vector particle in the Coulomb field on the background of Lobachevsky and Riemann space models were studied, when a modified Duffin – Kemmer equation was applied with additional spin-orbital interaction, which permitted to get three independent second order differential equations in nonrelativistic Pauli-like approximation and obtain three series of energies levels. However, the states with minimal value for quantum number of total angular momentum $j = 0$ were not considered, in the present paper these states are investigated. Conventional and modified Duffin – Kemmer equations provide us with solutions in hypergeometric and transcendental general Heun functions, even without transition to the nonrelativistic limit. These equations lead to slightly different energy spectra. Because the difference between two energy spectra at $j = 0$ turn out to be insignificant, we may expect similar property for states with larger values of j , even though solutions for conventional equation in Pauli approximation are not known.

Keywords: particle with spin 1, Duffin – Kemmer equation, Coulomb potential, minimal values of total angular momentum, Heun equation, exact solution, energy spectrum.

Введение

В работах [1], [2] был выполнен анализ поведения нерелятивистской квантово-механической частицы со спином 1 в присутствии кулоновского потенциала на фоне геометрии пространства Лобачевского. Анализ релятивистской задачи для векторной частицы со спином 1 в кулоновском поле представляет значительно более сложную проблему даже в плоском пространстве [3], [4]. В [1], [2] использовалось модифицированное уравнение Даффина – Кеммера с дополнительно введенным специальным членом спин-орбитального взаимодействия, это позволило задачу в нерелятивистском пределе привести к анализу трех отдельных уравнений 2-го порядка, после чего было найдено три серии уровней энергии. Однако особый случай минимального значения квантового числа $j = 0$ в [1], [2] не рассматривался. В настоящей работе этот пробел

восполнен. Анализ этого случая интересен также и потому, что здесь оба варианта уравнения Даффина – Кеммера, обычное и модифицированное, приводят к уравнениям 2-го порядка, которые могут быть решены соответственно в гипергеометрических функциях и трансцендентных функциях Гойна, приводя к немного различающимся спектрам энергии.

Исходное (немодифицированное) уравнение Даффина – Кеммера для частицы со спином 1 в сферической тетраде пространства Лобачевского

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

имеет вид [5]

$$\left[i\beta^0 \partial_t + i \left(\beta^3 \partial_r + \frac{\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}}{\tanh r} \right) + \frac{1}{\sinh r} \Sigma_{\theta, \phi}^k - M \right] \Phi^0 = 0, \quad (0.1)$$

$$\Sigma_{0,\phi}^k = i\beta^1 \partial_0 + \beta^2 \frac{i\partial_\phi + ij^{12} \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Запишем (0.1) в краткой форме так:

$$\hat{W}_0 \Phi^0 = 0,$$

оно отличается от модифицированного уравнения Даффина – Кеммера

$$\left[i\beta^0 \partial_t + i \left(\beta^3 \partial_r + \frac{\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}}{\sinh r} \right) + \frac{1}{\sinh r} \Sigma_{0,\phi}^k - M \right] \Phi = 0. \quad (0.2)$$

Переход от (0.1) к (0.2) можно осуществить [2], добавив в исходное уравнение (0.1) дополнительный член взаимодействия

$$[\hat{W}_0 + \Delta(r)] \Phi = 0, \quad \hat{W}_0 \Rightarrow \hat{W}, \quad \Phi^0 \Rightarrow \Phi,$$

где добавка задается равенством

$$\Delta(r) = i \frac{1 - \cosh r}{\sinh r} (\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}).$$

Дополнительный член взаимодействия $\Delta(r)$ в уравнении введен в базисе сферической тетрады. В обычном представлении уравнения в базисе декартовой тетрады выражение для Δ^{Cart} можно записать следующим образом [2]:

$$\Delta^{Cart} = \frac{1 - \cosh r}{\sinh r} [\vec{n}(\vec{\beta} \times \vec{S})].$$

Полученная форма оператора Δ^{Cart} позволяет рассматривать модификацию уравнения как учет дополнительного спин-орбитального взаимодействия частицы с геометрической структурой пространства.

1 Случай минимального $j = 0$, немодифицированное уравнение

Общая подстановка для волновой функции векторной частицы в состояниях с $j = 1, 2, 3, \dots$ имеет вид [5]

$$\Phi_{\epsilon jm} = e^{-i\epsilon t} [f_1(r) D_0, f_2(r) D_{-1}, f_3(r) D_0, f_4(r) D_{+1}, f_5(r) D_{-1}, f_6(r) D_0, f_7(r) D_{+1}, f_8(r) D_{-1}, f_9(r) D_0, f_{10}(r) D_{+1}],$$

где используется безразмерный параметр энергии $\epsilon = \rho E / c\hbar$, ρ – радиус кривизны пространства Лобачевского.

При этом после разделения переменных получаем систему из 10 радиальных уравнений [1] (пусть $v = \sqrt{j(j+1)}/2$; кулоновский потенциал учтем позже)

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\tanh r}\right) f_6 - v \frac{1}{\sinh r} (f_5 + f_7) - m f_1 &= 0, \\ i\epsilon f_5 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\tanh r}\right) f_8 + iv \frac{1}{\sinh r} f_9 - m f_2 &= 0, \\ i\epsilon f_6 + iv \frac{1}{\sinh r} (-f_8 + f_{10}) - m f_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$i\epsilon f_7 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\tanh r}\right) f_{10} - iv \frac{1}{\sinh r} f_9 - m f_4 = 0,$$

$$-i\epsilon f_2 + v \frac{1}{\sinh r} f_1 - m f_5 = 0,$$

$$-i\epsilon f_3 - \frac{d}{dr} f_1 - m f_6 = 0,$$

$$-i\epsilon f_4 + v \frac{1}{\sinh r} f_1 - m f_7 = 0,$$

$$-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\tanh r}\right) f_2 - iv \frac{1}{\sinh r} f_3 - m f_8 = 0,$$

$$iv \frac{1}{\sinh r} (f_2 - f_4) - m f_9 = 0,$$

$$i\Phi \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\tanh r}\right) f_4 + iv \frac{1}{\sinh r} f_3 - m f_{10} = 0.$$

В системе уравнений используется безразмерная радиальная переменная r , получаемая делением обычной координаты на радиус кривизны. Случай минимального значения $j = 0$ следует рассматривать отдельно. Для таких состояний нужно использовать с самого начала более простую подстановку для волновой функции, в которой некоторые радиальные функции должны обращаться в нуль:

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_4 = 0, f_5 = 0, f_7 = 0, f_8 = 0, f_{10} = 0;$$

соответственно имеем более простую систему уравнений

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\tanh r}\right) f_6 - m f_1 = 0, \quad i\epsilon f_6 - m f_3 = 0,$$

$$-i\epsilon f_3 - \frac{d}{dr} f_1 - m f_6 = 0, \quad f_9 = 0.$$

Учтем внешнее кулоновское поле

$$\alpha = e^2 / (c\hbar) = 1/137,$$

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\tanh r}\right) f_6 = m f_1, \quad i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{\tanh r}\right) f_6 = m f_3,$$

$$-i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{\tanh r}\right) f_3 - \frac{d}{dr} f_1 = m f_6. \quad (1.1)$$

Исключая функции f_1 и f_3 , получим

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\tanh r} \frac{d}{dr} + \right. \\ &\left. + \left(\epsilon + \frac{\alpha}{\tanh r} \right)^2 - m^2 - \frac{2}{\sinh^2 r} \right\} f_6 = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Перейдем в (1.2) к новой переменной

$$x = 1 - e^{-2r},$$

уравнение примет вид

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{d^2 f_6}{dx^2} + (2-2x) \frac{df_6}{dx} + \left[\frac{-2+\alpha^2}{x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{(\alpha+\epsilon)^2 - m^2}{1-x} + \frac{1}{4} m^2 - \frac{1}{4} (\alpha-\epsilon)^2 \right] f_6 = 0. \end{aligned}$$

Выполним подстановку $f_6 = x^A (1-x)^B F_6$:

$$x(1-x)\frac{d^2 F_6}{dx^2} + [2+2A-(2A+2B+2)x]\frac{dF_6}{dx} + \left[-(A+B+1)(A+B) + \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}(\alpha-\varepsilon)^2 + \frac{A^2-2+\alpha^2+A}{x} + \frac{1}{4}\frac{4B(-B+1)+m^2-(\varepsilon+\alpha)^2}{x-1} \right] F_6 = 0.$$

При

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9-4\alpha^2} < 0, \\ A &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9-4\alpha^2} > 0, \\ B &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+m^2-(\varepsilon+\alpha)^2} < 0, \\ B &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+m^2-(\varepsilon+\alpha)^2} > 0 \end{aligned}$$

уравнение упрощается

$$x(1-x)\frac{d^2 F_6}{dx^2} + [2+2A-(2A+2B+2)x]\frac{dF_6}{dx} + \left[-(A+B+1)(A+B) + \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}(\alpha-\varepsilon)^2 \right] F_6 = 0$$

и является уравнением гипергеометрического типа с параметрами

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} + A + B + \frac{1}{2}\sqrt{m^2-(\alpha-\varepsilon)^2+1}, \\ b &= \frac{1}{2} + A + B - \frac{1}{2}\sqrt{m^2-(\alpha-\varepsilon)^2+1}, \\ c &= 2+2A. \end{aligned}$$

Решения, конечные в точках $r=0$ ($x=0$), $r=\infty$ ($x=1$), строятся при $A>0$, $B>0$. Соответственно, имеем следующие параметры гипергеометрических функций:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9-4\alpha^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+m^2-(\varepsilon+\alpha)^2} + \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{m^2-(\alpha-\varepsilon)^2+1}, \\ b &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9-4\alpha^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+m^2-(\varepsilon+\alpha)^2} - \\ &- \frac{1}{2}\sqrt{m^2-(\alpha-\varepsilon)^2+1}. \end{aligned}$$

Оборвать гипергеометрический ряд до полинома можно, наложив требование $b = -n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9-4\alpha^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+m^2-(\varepsilon+\alpha)^2} - \\ - \frac{1}{2}\sqrt{m^2-(\alpha-\varepsilon)^2+1} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

тогда получаем

$$N = 2 \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{9-4\alpha^2}}{2} \right) = 2\nu,$$

$$N = \sqrt{1+m^2-(\alpha-\varepsilon)^2} - \sqrt{1+m^2-(\varepsilon+\alpha)^2},$$

или

$$4\varepsilon^2(N^2+4\alpha^2) - 4N^2 - 4m^2N^2 + 4\alpha^2N^2 + N^4 = 0.$$

Отсюда находим формулу для спектра энергий

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{v^2}}} \sqrt{1-\frac{\alpha^2+v^2+1}{m^2}}, \\ \nu &= n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{9-4\alpha^2}}{2}. \end{aligned}$$

Отмечаем, что структура этой формулы для энергий похожа на формулы для энергий в случае уравнения Клейна – Фока в пространстве Лобачевского. Кроме того, отмечаем, что здесь также выполняется важное свойство спектра в пространстве Лобачевского: число уровней конечно. Соответствующее ограничение следует из неравенства

$$1 - \frac{\alpha^2 + v^2 + 1}{m^2} > 0. \quad (1.3)$$

Чтобы в (1.3) перейти к обычным единицам, достаточно учесть смысл безразмерного параметра m :

$$m = \frac{Mc\rho}{\hbar}, \quad \frac{\hbar^2}{M^2c^2\rho^2}(\alpha^2 + v^2 + 1) < 1,$$

напоминаем, что ρ – радиус кривизны пространства Лобачевского (величина с размерностью метра).

2 Случай $j = 0$, модифицированное уравнение

При использовании модифицированного уравнения Даффина – Кеммера вместо (1.1) для состояний с $j = 0$ имеем несколько другую систему:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sinh r}\right)f_6 &= mf_1, \\ i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tanh r}\right)f_6 &= mf_3, \\ -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tanh r}\right)f_3 - \frac{d}{dr}f_1 &= mf_6. \end{aligned}$$

Исключив функции f_1 и f_3 , получим

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sinh r} \frac{d}{dr} + \right. \\ \left. + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tanh r} \right)^2 - m^2 - 2 \frac{\cosh r}{\sinh^2 r} \right\} f_6 = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Использованная выше переменная x здесь не годится, поскольку в уравнении остается квадратный корень. Преобразуем уравнение (2.1) к переменной

$$z = \tanh \frac{r}{2}, \quad z \in [0, 1),$$

в результате получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f_6}{dz^2} + \left[\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right] \frac{df_6}{dz} + \\ & + \left[\frac{4\epsilon\alpha}{z} + \frac{-2 + \alpha^2}{z^2} + \frac{-m^2 + \alpha^2 + \epsilon^2 - 2\epsilon\alpha}{(z+1)^2} + \right. \\ & + \frac{-m^2 + \alpha^2 + \epsilon^2 - 2\epsilon\alpha - 2}{z+1} + \\ & + \frac{m^2 - \alpha^2 - \epsilon^2 - 2\epsilon\alpha + 2}{z-1} + \\ & \left. + \frac{-m^2 + \alpha^2 + \epsilon^2 + 2\epsilon\alpha}{(z-1)^2} \right] f_6 = 0. \end{aligned}$$

Выполним подстановку $f_6 = z^A (z-1)^B (z+1)^C F_6$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F_6}{dz^2} + \left[\frac{2+2A}{z} + \frac{1+2B}{z-1} + \frac{1+2C}{z+1} \right] \frac{dF_6}{dz} + \\ & + \left[\frac{-2AB+2AC+2C-2B+4\epsilon\alpha}{z} + \frac{\alpha^2 + A + A^2 - 2}{z^2} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{-2\epsilon^2 - 2\alpha^2 + 2m^2 + 4AB - 4\epsilon\alpha}{z-1} + \right. \\ & + \frac{5B+2A+C+2BC+4}{z-1} \Big) + \\ & + \frac{2\epsilon\alpha + \epsilon^2 + B^2 + \alpha^2 - m^2}{(z-1)^2} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{-2m^2 + 2\alpha^2 + 2\epsilon^2 - 4\epsilon\alpha}{z+1} + \right. \\ & + \frac{-4AC - 5C - 2A - B - 2BC - 4}{z+1} \Big) + \\ & \left. + \frac{-m^2 + \alpha^2 + \epsilon^2 - 2\epsilon\alpha + C^2}{(z+1)^2} \right] F_6 = 0. \end{aligned}$$

При

$$A = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2}, \quad B = \pm \sqrt{m^2 - (\alpha + \epsilon)^2},$$

$$C = \pm \sqrt{m^2 - (\alpha - \epsilon)^2}$$

уравнение упрощается

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F_6}{dz^2} + \left[\frac{2+2A}{z} + \frac{1+2B}{z-1} + \frac{1+2C}{z+1} \right] \frac{dF_6}{dz} + \\ & + \frac{1}{z(z-1)(z+1)} \left\{ \left[(2B+2C+2)A + (3+2C)B + \right. \right. \\ & + 4 - 2\epsilon^2 + 2m^2 - 2\alpha^2 + 3C \Big] z + \\ & \left. + (-2C+2B)A - 4\epsilon\alpha + 2B - 2C \right\} F_6 = 0, \end{aligned}$$

оно может быть отождествлено с общим уравнением Гойна [6]–[8]

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 H}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{a+b-\gamma-\delta+1}{z-p} \right) \frac{dH}{dz} + \\ & + \frac{(abz-q)}{z(z-1)(z-p)} H = 0 \end{aligned}$$

с параметрами

$$\begin{aligned} a &= A+B+C + \frac{3}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{4A^2 + 4A + 4B^2 + 4C^2 - 7 + 8\alpha^2 + 8\epsilon^2 - 8m^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= A+B+C + \frac{3}{2} - \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{4A^2 + 4A + 4B^2 + 4C^2 - 7 + 8\alpha^2 + 8\epsilon^2 - 8m^2}, \end{aligned}$$

$$\gamma = 2+2A, \quad \delta = 1+2B,$$

$$q = -(-2C+2B)A + 4\epsilon\alpha - 2B + 2C.$$

Для получения решений, отвечающих связанным состояниям, используем положительные параметры A и B :

$$r \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0), \quad z^A \rightarrow 0,$$

$$A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} > 0,$$

$$r \rightarrow +\infty \quad (z \rightarrow +1), \quad (z-1)^B \rightarrow 0,$$

$$B = +\sqrt{m^2 - (\alpha + \epsilon)^2} > 0,$$

$$A+B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} + \sqrt{m^2 - (\alpha + \epsilon)^2} > 0.$$

Пусть $C = \pm \sqrt{m^2 - (\alpha - \epsilon)^2}$, при этом для параметров a и b имеем выражения

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} + \sqrt{m^2 - (\alpha + \epsilon)^2} \pm \\ & \pm \sqrt{m^2 - (\alpha - \epsilon)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-4\alpha^2}, \\ b &= 1 + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} + \sqrt{m^2 - (\alpha + \epsilon)^2} \pm \\ & \pm \sqrt{m^2 - (\alpha - \epsilon)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4\alpha^2}. \end{aligned}$$

Для получения правила квантования потребуем $a = -n$ (это условие выделяет так называемые трансцендентные функции Гойна [6]–[8]) и выбираем нижний знак в определении параметра C :

$$1 + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-4\alpha^2} +$$

$$+ \sqrt{m^2 - (\alpha + \epsilon)^2} - \sqrt{m^2 - (\alpha - \epsilon)^2} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда с использованием обозначения

$$N = n+1 + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-4\alpha^2}$$

получаем правило квантования

$$N = \sqrt{m^2 - (\alpha - \epsilon)^2} - \sqrt{m^2 - (\alpha + \epsilon)^2}.$$

Таким образом, находим формулу для уровней энергий при $j = 0$:

$$\epsilon = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{N^2}}} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{N^2}{4m^2}}.$$

Отмечаем, что она незначительно, но отличается от полученной выше формулы при использовании немодифицированного уравнения.

3 Задача в сферическом пространстве Римана, случай $j = 0$

Рассмотрим сначала описание на основе немодифицированного уравнения Даффина – Кеммера. Для состояний с $j = 0$ имеем систему уравнений (сразу учитываем внешнее кулоновское поле)

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\tan r}\right)f_6 &= mf_1, \quad i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tan r}\right)f_6 = mf_3, \\ -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tan r}\right)f_3 - \frac{d}{dr}f_1 &= mf_6. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Исключая в системе (3.1) функции f_1 и f_3 , получим

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\tan r} \frac{d}{dr} + \right. \\ &\left. + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tan r}\right)^2 - m^2 - \frac{2}{\sin^2 r} \right\} f_6 = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Перейдем в (3.2) к переменной $x = 1 - e^{-2ir}$, она пробегает окружность единичного радиуса на комплексной плоскости с центром в точке $(+1, 0)$. Уравнение примет вид

$$\begin{aligned} (1-x)x \frac{d^2 f_6}{dx^2} + (-2x+2) \frac{df_6}{dx} + \\ + \left[\frac{-2+\alpha^2}{x} + \frac{1}{4} \frac{(\alpha-i\varepsilon)^2 + m^2}{1-x} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} m^2 - \frac{1}{4} (\alpha+i\varepsilon)^2 \right] f_6 = 0. \end{aligned}$$

Выполним подстановку $f_6 = x^A (1-x)^B F_6$:

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{d^2 F_6}{dx^2} + [2+2A - (2A+2B+2)x] \frac{dF_6}{dx} + \\ + \left[-(A+B+1)(A+B) - \frac{1}{4} m^2 - \frac{1}{4} (\alpha+i\varepsilon)^2 + \right. \\ + \frac{A^2 - 2 + \alpha^2 + A}{x} + \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{4B(-B+1) - m^2 - (\alpha-i\varepsilon)^2}{x-1} \right] F_6 = 0. \end{aligned}$$

При

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} < 0, \\ A &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} > 0, \\ B &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-m^2 - (\alpha-i\varepsilon)^2}, \\ B &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-m^2 - (\alpha-i\varepsilon)^2} \end{aligned}$$

уравнение упрощается

$$x(1-x) \frac{d^2 F_6}{dx^2} + [2+2A - (2A+2B+2)x] \frac{dF_6}{dx} +$$

$$+ \left[-(A+B+1)(A+B) - \frac{1}{4} m^2 - \frac{1}{4} (\alpha+i\varepsilon)^2 \right] F_6 = 0;$$

это уравнение гипергеометрического типа с параметрами

$$a = \frac{1}{2} + A + B + \frac{1}{2} \sqrt{-m^2 - (\alpha+i\varepsilon)^2 + 1},$$

$$b = \frac{1}{2} + A + B - \frac{1}{2} \sqrt{-m^2 - (\alpha+i\varepsilon)^2 + 1}, \quad c = 2 + 2A.$$

Учтем поведение выделенных множителей около особых точек

$$r \rightarrow \delta r, \quad x^A = (1 - e^{-2i\delta r})^A = (2i\delta r)^A \Rightarrow$$

$$A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2};$$

$$r \rightarrow (\pi - \delta r), \quad x^A = (1 - e^{+2i\delta r})^A = (-2i\delta r)^A \Rightarrow$$

$$A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2};$$

$$r \rightarrow \delta r, \quad (1-x)^B = (e^{-2i\delta r})^B \rightarrow 1,$$

$$\text{пусть } B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-m^2 - (\alpha-i\varepsilon)^2};$$

$$r \rightarrow (\pi - \delta r), \quad (1-x)^B = (e^{+2i\delta r})^B \rightarrow 1,$$

$$\text{пусть } B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-m^2 - (\alpha-i\varepsilon)^2}.$$

Соответственно, имеем следующие параметры гипергеометрических функций, пригодные для описания связанных состояний:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-m^2 - (\alpha-i\varepsilon)^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{-m^2 - (\alpha+i\varepsilon)^2 + 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-m^2 - (\alpha-i\varepsilon)^2} - \\ &- \frac{1}{2} \sqrt{-m^2 - (\alpha+i\varepsilon)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Оборвать ряд до полинома можно, наложив требование $b = -n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-m^2 - (\alpha-i\varepsilon)^2} - \\ - \frac{1}{2} \sqrt{-m^2 - (\alpha+i\varepsilon)^2 + 1} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$N = n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{9-4\alpha^2}}{2},$$

$$N = \frac{1}{2} \sqrt{-m^2 - (\alpha+i\varepsilon)^2 + 1} + \frac{1}{2} \sqrt{1-m^2 - (\alpha-i\varepsilon)^2},$$

$$\text{или } \varepsilon^2 (N^2 + \alpha^2) = N^2 (N^2 - 1 + m^2 + \alpha^2).$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{N^2 (N^2 - 1 + m^2 + \alpha^2)}{N^2 + \alpha^2}} = \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{N^2}}} \sqrt{1 + \frac{\alpha - 1 + N^2}{N^2}}. \end{aligned}$$

При использовании модифицированного уравнения Даффина – Кеммера вместо (3.1) имеем систему:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)f_6 &= mf_1, \quad i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tan r}\right)f_6 = mf_3, \\ -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tan r}\right)f_3 - \frac{d}{dr}f_1 &= mf_6. \end{aligned}$$

Исключив в ней функции f_1 и f_3 , получим

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \right. \\ \left. + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tan r}\right)^2 - m^2 - 2 \frac{\cos r}{\sin^2 r} \right\} f_6 = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Использованная выше переменная x не годится для анализа уравнения (3.3). Будем использовать переменную

$$z = i \tan \frac{r}{2}, \quad z \in [0, +i\infty).$$

Тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_6}{dz^2} + \left[\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right] \frac{df_6}{dz} + \\ + \left[-\frac{4i\varepsilon\alpha}{z} + \frac{-2+\alpha^2}{z^2} + \frac{m^2+\alpha^2-\varepsilon^2+2i\varepsilon\alpha-2}{z+1} + \right. \\ + \frac{m^2+\alpha^2-\varepsilon^2+2i\varepsilon\alpha}{(z+1)^2} + \\ + \frac{-m^2-\alpha^2+\varepsilon^2+2i\varepsilon\alpha+2}{z-1} + \\ \left. + \frac{m^2+\alpha^2-\varepsilon^2-2i\varepsilon\alpha}{(z-1)^2} \right] f_6 = 0. \end{aligned}$$

Выполним подстановку $f_6 = z^A (z-1)^B (z+1)^C F_6$, в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_6}{dz^2} + \left[\frac{2+2A}{z} + \frac{1+2B}{z-1} + \frac{1+2C}{z+1} \right] \frac{dF_6}{dz} + \\ + \left[\frac{2C-2B-2AB+2AC-4i\varepsilon\alpha}{z} + \right. \\ + \frac{-2+\alpha^2+A+A^2}{z^2} + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{-2\alpha^2+2\varepsilon^2-2m^2+C+2A}{z-1} + \right. \\ + \frac{5B+4AB+2BC+4+4i\varepsilon\alpha}{z-1} + \\ + \frac{\alpha^2-\varepsilon^2+m^2+B^2-2i\varepsilon\alpha}{(z-1)^2} + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{-5C-B-2A+2\alpha^2-2\varepsilon^2}{z+1} + \right. \\ \left. \left. + \frac{2m^2-2BC-4AC-4+4i\varepsilon\alpha}{z+1} \right) \right] F_6 = 0. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{\alpha^2-\varepsilon^2+m^2+C^2+2i\varepsilon\alpha}{(z+1)^2} \right] F_6 = 0.$$

При

$$A = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2},$$

$$B = \pm \sqrt{-m^2-(\alpha-i\varepsilon)^2}, \quad C = \pm \sqrt{-m^2-(\alpha+i\varepsilon)^2}$$

уравнение упрощается

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_6}{dz^2} + \left[\frac{2+2A}{z} + \frac{1+2B}{z-1} + \frac{1+2C}{z+1} \right] \frac{dF_6}{dz} + \\ + \frac{1}{z(z+1)(z-1)} \left[((2C+2B+2)A + (3+2C)B + \right. \\ + 4-2\alpha^2+2\varepsilon^2+3C-2m^2)z + \\ \left. + (2B-2C)A + 4i\varepsilon\alpha - 2C + 2B \right] F_6 = 0 \end{aligned}$$

и может быть отождествлено с общим уравнением Гойна [6]–[8]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{a+b-\gamma-\delta+1}{z-p} \right) \frac{dH}{dz} + \\ + \frac{(abz-q)}{z(z-1)(z-p)} H = 0 \end{aligned}$$

с параметрами

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{2} + A + B + C + \\ &+ \sqrt{4A^2 + 4A + 4B^2 + 4C^2 - 7 + 8\alpha^2 - 8\varepsilon^2 + 8m^2}, \\ b &= \frac{3}{2} + A + B + C - \\ &- \sqrt{4A^2 + 4A + 4B^2 + 4C^2 - 7 + 8\alpha^2 - 8\varepsilon^2 + 8m^2}, \\ \gamma &= 2 + 2A, \quad \delta = 1 + 2B, \\ q &= -(2B-2C)A - 4i\varepsilon\alpha + 2C - 2B. \end{aligned}$$

Используем следующие параметры A, B, C :

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0, \quad z^A \rightarrow 0, \\ A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} > 0, \\ r \rightarrow +\infty, \quad z \rightarrow +1, \quad (z-1)^B \rightarrow 0, \\ B = -\sqrt{-m^2-(\alpha-i\varepsilon)^2}, \\ C = -\sqrt{-m^2-(\alpha+i\varepsilon)^2}, \end{aligned}$$

при этом для параметров a и b имеем выражения

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} - \sqrt{-m^2-(\alpha-i\varepsilon)^2} - \\ &- \sqrt{-m^2-(\alpha+i\varepsilon)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-4\alpha^2}, \\ b &= 1 + \frac{1}{2} \sqrt{9-4\alpha^2} - \sqrt{-m^2-(\alpha-i\varepsilon)^2} - \\ &- \sqrt{-m^2-(\alpha+i\varepsilon)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4\alpha^2}. \end{aligned}$$

Для получения правила квантования выполним ограничение к трансцендентным функциям Гойна [6]–[8], для этого требуем $a = -n$,

$$1 + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\alpha^2} - \sqrt{-m^2 - (\alpha - i\varepsilon)^2} - \\ - \sqrt{-m^2 - (\alpha + i\varepsilon)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\alpha^2} = -n, \\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\alpha^2} - \sqrt{-m^2 - (\alpha - i\varepsilon)^2} - \\ - \sqrt{-m^2 - (\alpha + i\varepsilon)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\alpha^2} = -n,$$

отсюда с использованием обозначения

$$N = n + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\alpha^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\alpha^2}$$

получаем правило квантования

$$N = \sqrt{-m^2 - (\alpha - i\varepsilon)^2} + \sqrt{-m^2 - (\alpha + i\varepsilon)^2},$$

или

$$-\varepsilon^2 (N^2 + 4\alpha^2) + m^2 N^2 + \alpha^2 N^2 + 1/4 N^4 = 0.$$

В итоге получаем формулу для уровней энергии

$$\varepsilon = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{N^2}}} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 + N^2/4}{m^2}}.$$

Отмечаем, что в сферическом пространстве спектры энергий, полученные на основе анализа обычного и модифицированного уравнений Даффина – Кеммера, также различаются незначительно.

Заключение

Поскольку различия в двух спектрах энергии для состояний с $j = 0$ при использовании обычного уравнения и модифицированного оказываются незначительными, то можно заключить, что спектры энергии для состояний с $j = 1, 2, \dots$, найденные в работах [1], [2], на основе использования модифицированного уравнения Даффина – Кеммера и соответственно трансцендентных функций Гойна, близки к спектрам энергии, которые должны возникать для состояний с $j = 1, 2, \dots$ при использовании обычного уравнения Даффина – Кеммера, хотя решения этого уравнения для частицы в кулоновском поле не известны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Spin 1 particle in the magnetic monopole potential for Minkowski and Lobachevsky spaces: non-relativistic approximation* / O.V. Veko, K.V. Kazmerchuk, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, A.M. Ishkhan-yan, V.M. Red'kov // NPCS. – 2015. – Vol. 18, № 2. – P. 243–258.

2. *Квантовая механика в космологических моделях де Ситтера* / О.В. Веко, К.В. Дашук, В.В. Кисель, Е.М. Овсюк, В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2016. – 515 с.

3. *Об описании связанных состояний для частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле* / Е.М. Овсюк, О.В. Веко, Я.А. Войнова, А.Д. Коральков, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 21–33.

4. *On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field* / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Balkan Society of Geometers Proceedings. – 2018. – Vol. 25. – P. 59–78.

5. *Редьков, В.М.* Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.

6. *Heun, K.* Zur Theorie der Riemann'schen Functionen Zweiter Ordnung mit Verzweigungspunkten / K. Heun // Math. Ann. – 1989. – Bd. 33. – S. 161–179.

7. *Ronveaux, A.* Heun's differential equation / A. Ronveaux. – Oxford: Oxford University Press, 1995.

8. *Slavyanov, S.Yu.* Special functions. A unified theory based on singularities / S.Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford University Press, 2000.

Исследование выполнено при финансовой поддержке БРФФИ в рамках проекта № F18Y-009.

Поступила в редакцию 26.02.19.

РАЗРАБОТКА ДВУХСТОРОННЕГО НЕОТРАЖАЮЩЕГО ПОГЛОТИТЕЛЯ МИКРОВОЛН НА ОСНОВЕ МЕТАМАТЕРИАЛОВ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ОМЕГА-ЭЛЕМЕНТАМИ

И.В. Семченко¹, С.А. Хахомов¹, А.Л. Самофалов¹, И.А. Фаняев¹,
И.С. Михалко¹, Я. Сонг², Ш. Фан², Дж. Ванг³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Нанкинский университет науки и технологий, Нанкин

³Университет Цзяннань, Уси

THE DEVELOPMENT OF A DOUBLE-SIDED NONREFLECTING MICROWAVES ABSORBER BASED ON THE METAMATERIALS WITH RECTANGULAR OMEGA ELEMENTS

I.V. Semchenko¹, S.A. Khakhomov¹, A.L. Samofalov¹, I.A. Faniayeu¹,
I.S. Mikhalka¹, Y. Song², S. Fan², J. Wang³

¹F. Scorina Gomel State University

²Nanjing University of Science and Technology, Nanjing

³Jiangnan University, Wuxi

Целью статьи является выявление закономерностей взаимодействия микроволн с метаматериалами, состоящими из прямоугольных омега-элементов, а также разработка одностороннего и двустороннего «идеального» поглотителя микроволн на основе таких структур.

Ключевые слова: омега-элемент, метаматериал, поглотитель, микроволновый диапазон, отражение, поглощение.

The paper aims to identify the interaction patterns of the microwaves with the metamaterials, consisting of rectangular omega elements, as well as to develop a one-sided and double-sided “ideal” microwave absorber based on such structures.

Keywords: omega-element, metamaterial, absorber, microwave range, reflection, absorption.

Introduction

The theory and means of implementing electromagnetic radiation absorbers have a long history. There are a large number of such devices, especially in the microwave range [1]–[11]. However, most of these devices have the absorbent structure on a reflective metal surface, since the most common purpose of creating such devices is to reduce the wave reflection from metal surfaces.

Electrically thin absorbers, the thickness of which is much smaller than the wavelength, can be implemented in various ways, but only some of them have been studied recently. One of the ways is to combine two thin layers of metamaterials with contrasting characteristics [4]. Another way is to combine a thin conducting sheet with an array of resonant open rings, which produces the necessary magnetic response [5], as well as multilayer absorbing structures with a metal substrate [6], [7]. The paper considers the simplest option – a single-layer absorber. This choice allows us to call the thickness of the absorber extremely thin, as the layer thickness cannot be less than the thickness of one layer of the particles constituting the metamaterial. This paper deals with the implementation of a single-layer metamaterial that would completely absorb the

incident electromagnetic waves in the THz frequency range. In doing so, this metamaterial would be low reflective not only at the resonant frequency, but also in a wider frequency range.

The conditions for the complete absorption of a normally incident plane wave by an infinite periodic array of electric and magnetic dipoles are known from antenna theory [7]. It is of interest to consider the absorption coefficient for both normal and oblique incidence of waves on the absorber. Traditional absorbers, consisting of at least two layers, have certain thickness. As a result, the resonant frequency of the array shifts when the incidence angle deviates from the normal. This is because the effective thickness of the absorbing layer varies for the waves falling at different angles. However, this type of absorber is an extremely thin layer, so a heavy change in the resonant frequency is expected not to be observed when the angle of wave incidence changes. A change in the angle of incidence will nevertheless influence the interaction of waves in the structure and, consequently, the absorption efficiency.

It is known that for a single uniaxial omega resonator, formed of a conductive material, while approximating electrically small dimensions, the

following relation is true for individual polarizabilities [1]:

$$\alpha_{ee}^{co}\alpha_{mm}^{co} = -\alpha_{em}^{cr}\alpha_{me}^{cr} = -(\alpha_{em}^{cr})^2. \quad (0.1)$$

Here, the subscripts ee , mm , em , me denote the dielectric, magnetic, electromagnetic and magneto-electric polarizabilities of the particle; the superscripts co and cr refer to the covariant and contravariant components of tensor polarizabilities. This relation is a condition for the polarizability balance or a kind of restriction on the electromagnetic properties of a wire omega particle. On the other hand, it is also a condition for obtaining zero reflection from the electromagnetic material, i.e. when electric and magnetic dipoles are simultaneously induced in the resonator at the same resonant frequency. Therefore, it is necessary to find the polarizability of a single Ω -particle and make sure that its properties satisfy the balance conditions (0.1).

1 Simulation

Using the analytical approach described in [2], it is possible to determine the desired polarizability components of an electrically small conductor of arbitrary shape. This approach is based on the determination of scattered fields upon excitation by a plane linearly polarized incident wave at various directions of its propagation and polarization azimuths. The use of this approach and computer simulation, based on the finite element method, made it possible to determine the scattered fields and, consequently, the desired components of the polarizability tensors of the omega resonator.

Figure 1.1 shows the Ω -resonator with structural parameters and its polarizabilities for the microwave frequency range. A balance of polarizabilities has been achieved by changing the structural parameters of the omega element. As can be seen, this Ω -resonator is balanced and exhibits resonance properties near the frequency of 3 GHz, as the induced electric and magnetic dipole moments are equally significant and make the same contribution to the radiation of an electromagnetic wave. It should be noted that the dielectric, magnetic, electromagnetic and magnetolectric polarizabilities are also approximately equal to each other with a high degree of accuracy. The polarizabilities α_{ee}^{xx} and

α_{mm}^{yy} are normalized to the η_0 and $\frac{1}{\eta_0}$ coefficients,

which allows us to obtain the same dimensions for all polarizabilities. Hence, this Ω -resonator with balanced polarizabilities fully satisfies the condition for the absence of microwave reflection.

Figure 1.2 shows a unit cell of a metasurface based on balanced Ω -resonators, which were developed using computer simulation. The arrangement of the resonators is chosen in such a way as to compensate for the omega-coupling (electromagnetic and magnetolectric couplings), as required by the

condition for complete absorption [3]. The unit cell of the proposed absorber consists of 16 omega-resonators. It includes four Ω -resonator blocks, as shown in Figure 1.2. The blocks containing four resonators, the ends of which are oriented in one direction, are staggered in the unit cell. This design uses nichrome Ω -resonators, which provides the required level of dissipative losses. The inter-element distance and the array period are indicated as $2s$ and P ($P = 4s$), respectively.

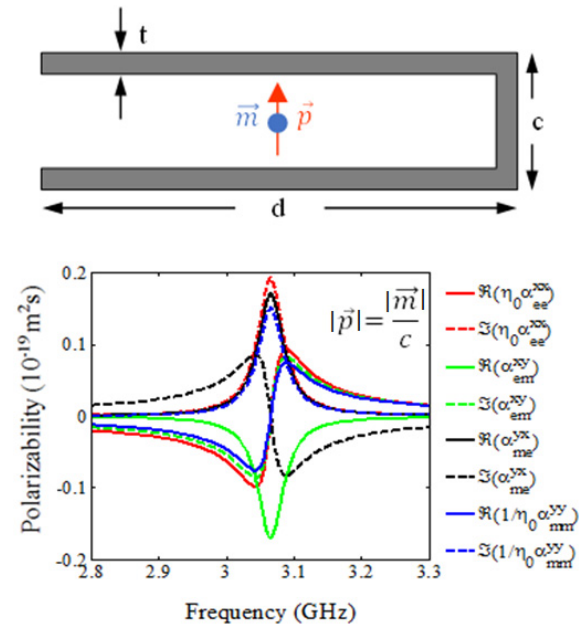


Figure 1.1 – A schematic illustration of the Ω -resonator with the structural parameters: $c = 3$ mm, $d = 23.25$ mm, $t = 0.2$ mm and frequency dependence of the main components of the normalized polarizability tensors of a single Ω -resonator in the microwave range

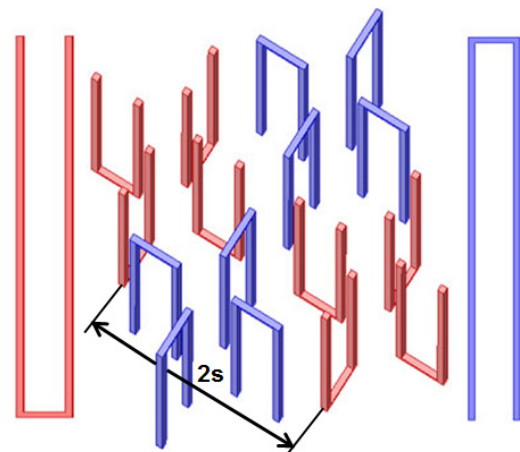


Figure 1.2 – A schematic illustration of the metamaterial unit cell based on balanced Ω -resonators with the opposite direction of the ends

To determine the electromagnetic properties of the proposed structure, the reflectivity (R), transmission (T) and absorption (A) coefficients of the

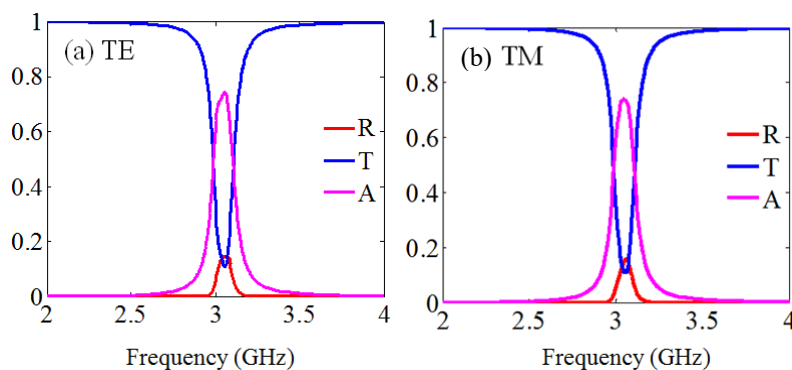


Figure 1.3 – The reflectivity, transmission and absorption coefficients of the metamaterial based on the Ω -resonators with optimized structural parameters; $c = 3$ mm, $d = 23.25$ mm, $t = 0.2$ mm and $P = 4s = 40$ mm for the normal incidence of TE (a) and TM (b) waves

absorber were simulated on the basis of balanced Ω -resonators depending on the frequency at a different array period ($P = 4s$), different diameter values of the conductor, different polarization of the incident wave (TE and TM) and different angles of incidence.

The analysis of the results allows obtaining the optimal parameters of the metamaterial with the use of Ω -resonators. Figure 1.3 (a) and (b) show the reflectivity, transmission and absorption coefficients of the metamaterial based on the Ω -resonators with optimized structural parameters for incident TE and TM waves. The spectra are shown to be almost independent of the incident wave polarization. The absorption coefficient reaches a maximum value of 78% at a resonant frequency of 3.08 GHz, while the reflection coefficient does not exceed 12% in the frequency range from 2 to 4 GHz. It is also shown that the wave passes completely through the metamaterial outside the resonant frequency band. Therefore, the proposed metamaterial on the basis of balanced Ω -resonators exhibits weak reflective properties in the entire frequency range under study and, at the same time, demonstrates effective resonant absorption.

The analysis of the metamaterial absorbing properties with an oblique incidence of the microwave waves has also been carried out, which is especially important for many applications of the absorbers. The reflectivity coefficient of the absorber for TE and TM polarizations does not exceed 10% with an oblique incidence up to 20° . The reflection coefficient increases with a further increase in the angle of incidence.

The analysis of the properties of various materials has been done to obtain an absorbing low reflective metamaterial in the microwave range. These materials are suitable for use as a medium for the placement and mechanical support of a two-dimensional periodic array of the conductive elements. The literature suggests using polystyrene and fluoroplastic as materials that are radiotransparent in the microwave range. Therefore the simulation with these polymeric materials has been carried out.

When an electromagnetic wave enters a medium with a relative dielectric permittivity ϵ , a certain decrease in the resonant frequency is observed. The maximum absorption in the microwave range is observed at this frequency. This is due to a decrease in the wavelength of the incident electromagnetic radiation during the transition from air to medium with a refractive index n : $\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, where λ_0

is the vacuum wavelength, ϵ , μ are relative dielectric permittivity and magnetic permeability of the medium. Accordingly, to obtain the resonance properties of our metamaterial at a frequency of 3 GHz ($\lambda_0 = 10$ cm) it is necessary to adjust the parameters of a rectangular omega-element taking into account the dielectric permittivity and magnetic permeability of the medium. On maintaining the height and width ratio of a balanced rectangular omega-resonator and using the main resonance condition with consideration for the wavelength reduction in the polymer filler of the metamaterial, we obtain

$$L' = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{\epsilon\mu}},$$

where L' is the length of the nichrome wire to make a balanced omega-resonator considering the dielectric filler.

The parameters value of the balanced rectangular omega-resonators for various polymer materials are given in Table 1.1.

Table 1.1 – The parameters value of the balanced rectangular omega-resonators

№	Polymer material	ϵ	L' , mm	Width (c), mm	Height (b), mm
1	Fluoroplastic	2,1	34,5	2,11	16,17
2	Polyethylene	2,25	33,3	2,04	15,65
3	Polyamide	4,3	24,1	1,48	11,34

Figures 1.4–1.6 show the frequency dependence of the absorption coefficients for the metamaterial immersed in a polymer material at different inter-element distance and an array period for normal wave incidence.

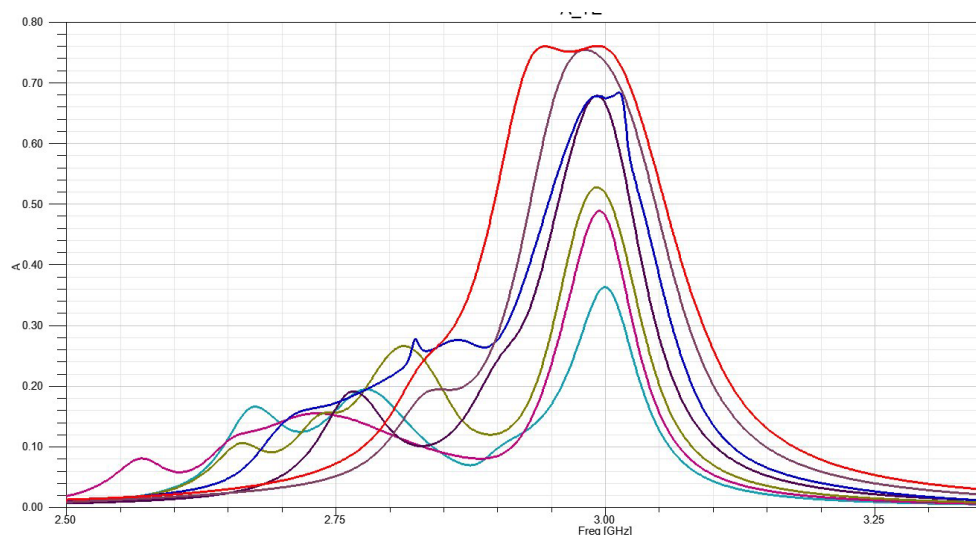


Figure 1.4 – Frequency dependence of the absorption coefficient for the metamaterial immersed in a fluoroplastic at different inter-element distance and an array period for normal wave incidence

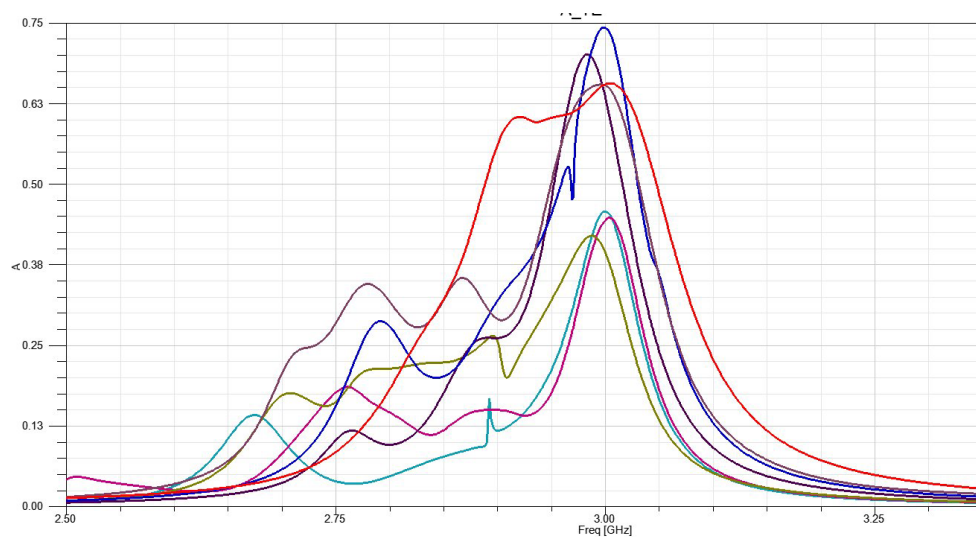


Figure 1.5 – Frequency dependence of the absorption coefficient for the metamaterial immersed in polyethylene at different inter-element distance and an array period for normal wave incidence

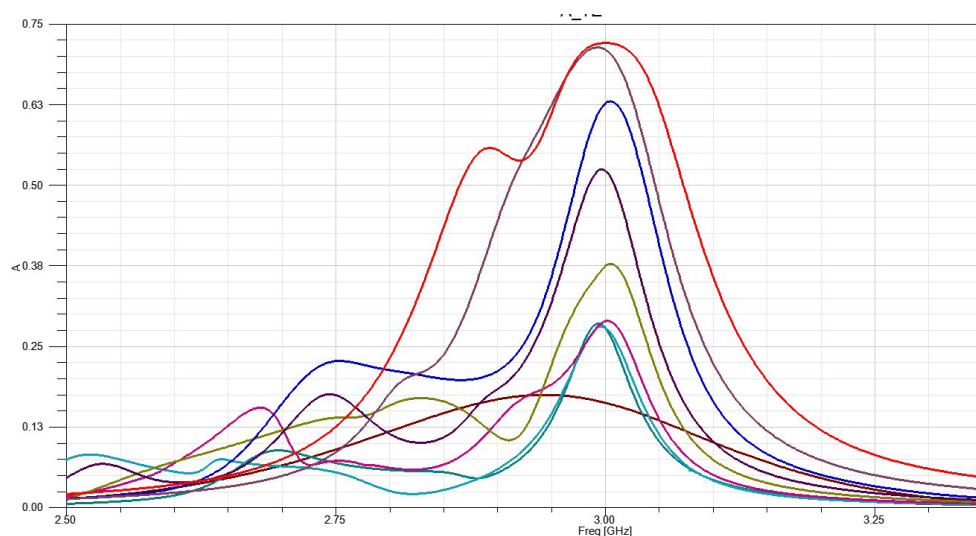


Figure 1.6 – Frequency dependence of the absorption coefficient for the metamaterial immersed in polyamide at different inter-element distance and an array period for normal wave incidence

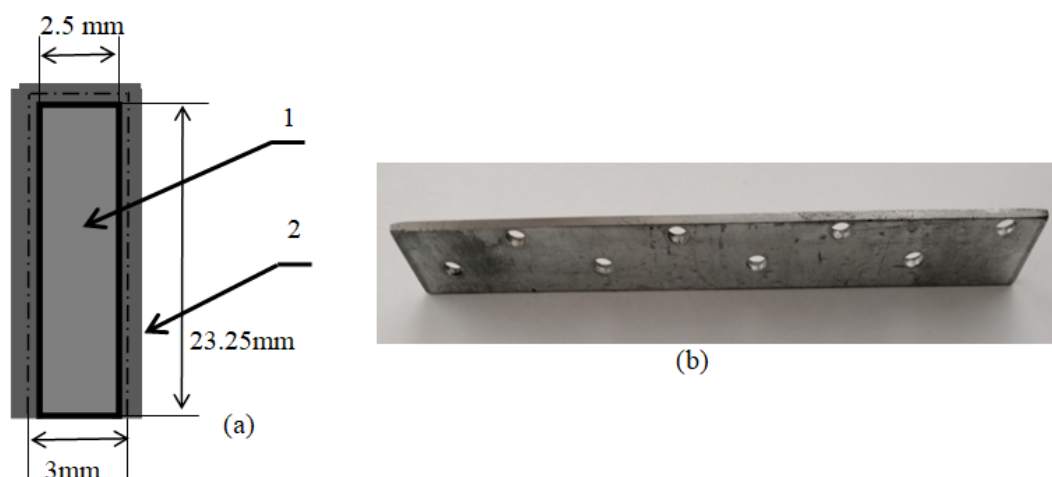


Figure 2.1 – The drawing (a) and the template photo (b) for producing rectangular omega-elements with calculated parameters (1– cross-section of the template, 2– cross-section of the wire)

Based on the analyses of the graphs it is evident that the maximum absorption (75%) at the resonance frequency occurs in the metamaterial immersed in the fluoroplastic at $s = 6$ and 7 mm, but the reflectivity coefficient takes on quite high values in the range of 12–15%. At $s = 8$ and 9 mm the absorption coefficient decreases to 68%, but the reflection also decreases to 3–5%.

Consequently, the optimal structure for fluoroplastic is a structure with an inter-element distance $2s = 16$ mm and an array period of $P = 4s = 32$ mm.

Based on the analyses of the graphs it is obvious that the maximum absorption (70–74%) at the resonant frequency occurs in the metamaterial immersed in polyethylene at $s = 8$ and 9 mm; the reflection coefficient does not exceed 3.5%. Consequently, the optimal structure for polyethylene is a structure with an inter-element distance $2s = 16$ mm and an array period of $P = 4s = 32$ mm.

Based on the analyses of the graphs it is clear that the absorption is maximum (72%) at the resonance frequency at $s = 4$ and 5 mm, but the reflection coefficient takes on fairly high values, 18% and 8% respectively. At $s = 6$ mm the absorption coefficient decreases to 63%, but the reflection also decreases to 2%. Therefore, the optimal structure for the metamaterial immersed in polyamide is a structure with an inter-element distance of $2s = 12$ mm and an array period of $P = 4s = 24$ mm.

2 Experiment

The technology for producing such elements has been developed to obtain a more accurate correspondence of rectangular omega-elements to the calculated parameters. The idea of this technology is that a 0.5 mm diameter nichrome wire bends along the contour of a pre-produced template (Figure 2.1). And in doing so the axial length of the wire corresponds to the half-wave resonance condition, and all axial dimensions (length, width) of the element (Figure 2.1, a) correspond to theoretically found

balanced parameters. This manufacturing process ensures the mutual identity of the rectangular omega-elements and the accuracy to the given sizes.

1024 rectangular omega elements with calculated parameters for 64 cells of the metamaterial have been manufactured to produce a test sample.

PENOPLEX, extruded polystyrene foam (synthetic heat-insulating material), was taken as the basis for producing a two-dimensional lattice sample, as it has all the necessary requirements, i.e. radio transparency, lightness, strength and accessibility. A foam sheet with a size of 0.5 by 0.5 m and with a thickness of 20 mm was drawn in accordance with the arrangement of rectangular omega-elements.

Figure 2.2 shows the photo of the metamaterial test sample on the basis of balanced omega-resonators.

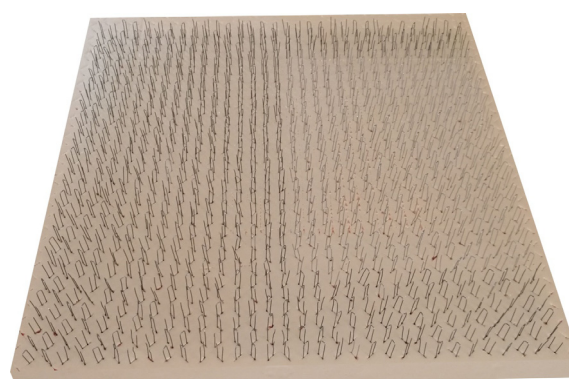
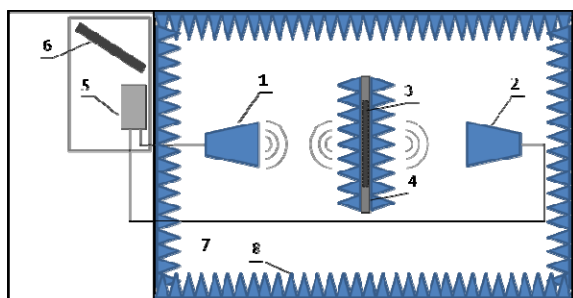


Figure 2.2 – The photo of the metamaterial test sample

The experimental studies were carried out in a modern anechoic chamber, which has the shape of a rectangular parallelepiped with a size of 4.5 m $\times$ 7.4 m $\times$ 3.1 m. This is the most common shape of anechoic chambers, since it is best to fit into the configuration of the building. Figure 2.3 shows the layout of the experiment and anechoic chamber.



1, 2 – transmitting and receiving antennas P6-23A;
3 – a test sample; 4 – a protective screen coated with an absorber with a window for fixing the experimental sample;
5 – vector circuit analyzer AKIP-6602;
6 – computers for receiving and processing a signal from a vector analyzer;
7 – an anechoic chamber;
8 – electromagnetic wave absorber “TORA”

Figure 2.3 – The layout of the experiment and anechoic chamber

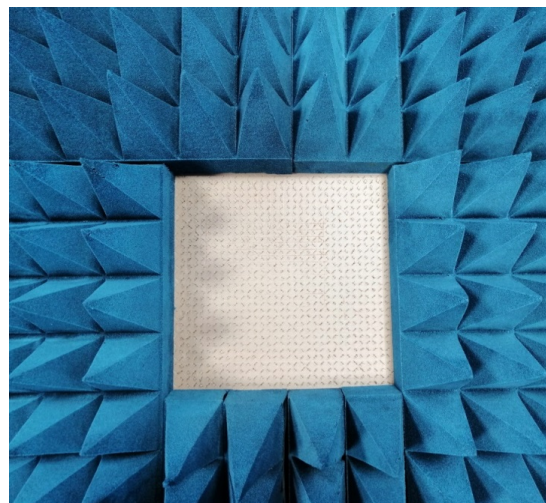


Figure 2.4 – The test sample fixed in the window of the protective screen and surrounded by the absorber

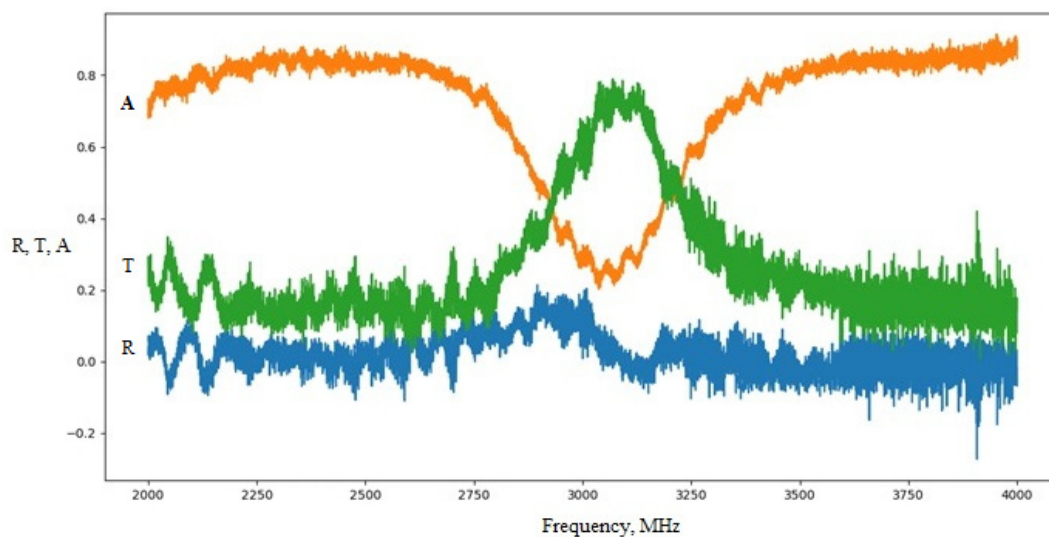


Figure 2.5 – The graphs of the amplitude frequency dependence of the reflectivity, transmission and absorption coefficients

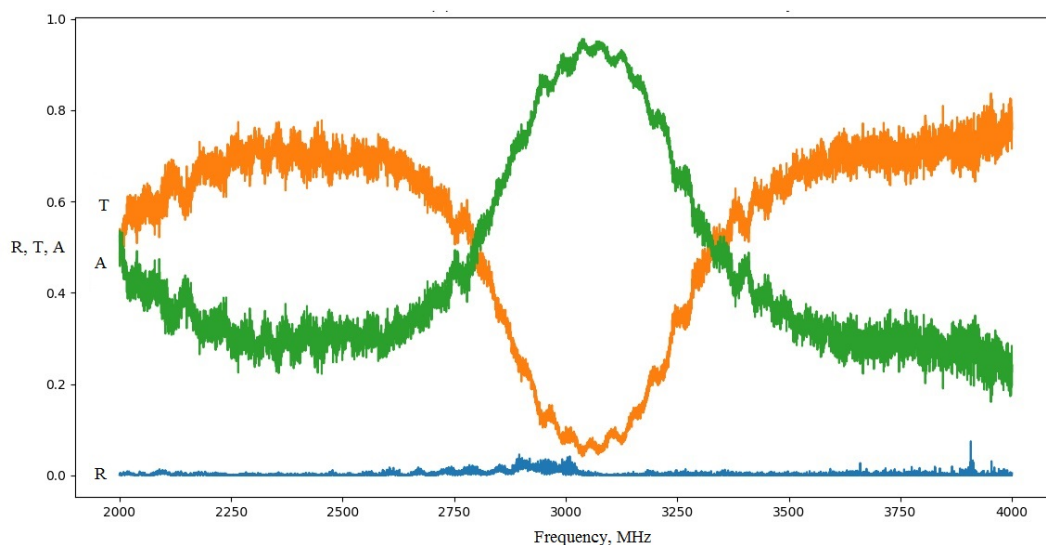


Figure 2.6 – The graphs of the power frequency dependence of the reflectivity, transmission and absorption coefficients

The measurements were carried out at a normal incidence of an electromagnetic wave on the metamaterial sample in the frequency range from 2 to 4 GHz. The test sample was fixed in the window of the protective screen (Figure 2.4) and surrounded by the absorber.

The parameters S_{11} , S_{21} , S_{12} , S_{22} were measured with a sample, without a sample (background measurement) and with a metal sheet (for normalizing the reflected signal) in the frequency range from 2 to 4 GHz.

Figures 2.5–2.6 present the measurement data in the form of graphs of the frequency dependence of the reflectivity, transmission and absorption coefficients.

The graphs in figures 2.5–2.6 show that the produced test sample exhibits high absorption properties near the resonant frequency of 3 GHz. In this case, the sample demonstrates a reflection coefficient close to zero not only near the resonant frequency, but also in a wide frequency range. This property makes it possible to call the resulting metamaterial “transparent” outside the absorption band. The reason for this property of the samples is the balance of the dielectric dipole moment and the magnetic moment of each rectangular element and the optimality of its parameters.

Summary

It can be concluded that such a unique property as zero reflection in a wide frequency range in combination with frequency-selective absorption provides exciting opportunities in various applications, thus making it possible to create perfect electrically thin electromagnetic radiation filters with an arbitrary frequency. The use of absorbers, transparent off resonance, allows the development of various complex multi-frequency filters, combining them into parallel stack metamaterials that resonate at different frequencies. The neighboring metamaterials will not interfere with each other's work, and the total thickness of such a multilayer structure will still be of one wavelength order or even less. Another interesting opportunity to implement the proposed absorbers is to develop new types of “invisible” bolometers and sensors. When using a multilayer absorber, it becomes possible to create a single bolometer, which simultaneously measures the power of the incident radiation of various spectral lines. Moreover, the narrow-band response of the proposed absorbers makes them perfect candidates for implementing in bolometric arrays in astronomy at millimeter wavelengths. Due to the transparency properties, these absorbers can be successfully used for visibility reduction technologies, especially for non-metallic objects. Unlike conventional metal absorbers, they do not increase the scattering cross-section of the radar of a hidden object outside the absorption band.

REFERENCES

1. *Electromagnetics of bi-anisotropic materials* / A. Serdyukov, I. Semchenko, S. Tertyakov, A. Sihvola // Theory and Application. – Gordon and Breach Science Publishers, 2001.
2. *Determining polarizability tensors for an arbitrary small electromagnetic scatterer* / V.S. Asadchy, I.A. Faniayeu, Y. Ra'di, S.A. Tertyakov // Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications. – 2014. – Vol. 12, № 4. – P. 298–304.
3. *Ra'di, Y. Total absorption of electromagnetic waves in ultimately thin layers* / Y. Ra'di, V.S. Asadchy, S.A. Tertyakov // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2013. – Vol. 61, № 9. – P. 4606–4614.
4. *High-efficiency dielectric Huygens' surfaces* / M. Decker, I. Staude, M. Falkner, J. Dominguez, D.N. Neshev, I. Brener, T. Pertsch, Y.S. Kivshar // Advanced Optical Materials. – 2015. – Vol. 3, № 6. – P. 813–820.
5. *Introducing dipole-like resonance into magnetic resonance to realize simultaneous drop in transmission and reflection at terahertz frequency* / X.Li. Hu, Q. Feng, X. Chen, X. Luo // Journal of Applied Physics. – 2010. – Vol. 108, № 5. – P. 053103.
6. *A metamaterial absorber for the terahertz regime: Design, fabrication and characterization* / H. Tao, N.I. Landy, C.M. Bingham, X. Zhang, R.D. Averitt, W.J. Padilla // Optics Express. – 2008. – Vol. 16, № 10. – P. 7181–7188.
7. *Decoupling crossover in asymmetric broadside coupled split-ring resonators at terahertz frequencies* / R. Keiser, A.C. Strikwerda, K. Fan, V. Young, X. Zhang, R.D. Averitt // Physical Review B. – 2013. – Vol. 88, № 2. – P. 024101.
8. *Design, theory, and measurement of a polarization-insensitive absorber for terahertz imaging* / N. Landy, C. Bingham, T. Tyler, N. Jokerst, D. Smith, W. Padilla // Physical Review B. – 2009. – Vol. 79, № 12. – P. 125104.
9. *Design of miniaturized narrowband absorbers based on resonant-magnetic inclusions* / F. Bilotti, A. Toscano, K.B. Alici, E. Ozbay, L. Vegni // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 2011. – Vol. 53, № 1. – P. 63–72.
10. *Broadband Reflectionless Metasheets: Frequency-Selective Transmission and Perfect Absorption* / V.S. Asadchy, I.A. Faniayeu, Y. Ra'di, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, S.A. Tertyakov // Phys. Rev. X. – 2015. – Vol. 5. – № 3. – P. 031005-1–031005-10.
11. *The equilibrium state of bifilar helix as element of metamaterials* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov, Qian Songsong // Japanese Journal of Applied Physics Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 4. – P. 011112-1–011112-6.

This study was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, project F18KI-028, d/d 25.01.2018.

Поступила в редакцию 14.06.19.

УДК 524.82

**МАССИВНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ
В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ.
II. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ГРАВИТАЦИОННАЯ ИЗМЕНЧИВОСТЬ
ИНЕРТНОЙ МАССЫ**

М.А. Сердюкова, А.Н. Сердюков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

**A MASSIVE GRAVITATIONAL FIELD IN FLAT SPACETIME.
II. CONSERVATION LAWS AND GRAVITATIONAL VARIABILITY
OF THE INERTIAL MASS**

M.A. Serdyukova, A.N. Serdyukov

F. Scorina Gomel State University

Построен канонический тензор энергии-импульса и сформулированы законы сохранения энергии и импульса линейного массивного бесспинового поля, адаптированного в качестве калибровочно-инвариантной модели гравитации в рамках специальной теории относительности. Показано, что общее требование положительной определенности плотности энергии любой физической реальности в случае гравитационного поля предопределяет его скалярную природу и далеко идущую гравитационную изменчивость инертной массы частиц материи.

Ключевые слова: массивная скалярная гравитация, энергия гравитационного поля, гравитационная изменчивость массы.

For a linear massive spinless field adapted as a gauge-invariant model of gravity in the framework of the special theory of relativity, a canonical energy-momentum tensor is constructed and the laws of conservation of energy and momentum are formulated. It is shown that the general requirement of a positive definiteness of the energy density of any physical reality in the case of an attractive field determines its scalar nature and far-reaching gravitational variability of the inertial mass of matter particles.

Keywords: spinless massive gravity, gravitational energy, variable mass.

Introduction

By all the criteria of the modern Standard Model of particle physics, the depressing fact of the absence of ten special relativistic integrals of motion in the general theory of relativity is the worst thing that should have happened with a physical theory in order to abandon it without hesitation as a model of one of the four existing fundamental interactions. Each time, referring to general relativity and fitting Riemannian geometry to physical reality, we must not forget that on the other side of the scale there is the outstanding achievement of a higher physical and philosophical resonance, obtained almost simultaneously with the advent of the general theory of relativity. This is 100-year-old Emmy Noether's brilliant theorem on the nature of conservation laws. This theorem is the exciting result, which explains the origin of conservation of energy, momentum, angular momentum, and center-of-mass velocity for the matter and physical fields from the undistorted symmetry of the Minkowski space-time. The principles of conservation that nature obeys, which, thanks to Emmy Noether, have become a theorem, are an outstanding achievement of physical science, and they cannot be sacrificed even for the fascinating Einstein's idea of a strong equivalence, which

creates the Riemannian curvature of spacetime and makes it one of the physical fields capable of spectacularly interpreting the four well-known tests.

On the other hand, although the approximation of a weak gravitational field within general relativity allows us to distinguish it as a tensor field against the background of the flat Minkowski metric and to formulate the law of conservation of energy, nevertheless this well-known trick does not resolve all the energy problems associated with gravitation. Postulating gravity in such an approach as a classical tensor field of the second rank, we immediately encounter the insoluble problem of the lack of positive definiteness of the energy density of this field.

Our consideration of the law of energy conservation has shown that among the force fields of various tensor dimensions, which could have attractive properties, only one, simplest of them, the field of zero rank, can satisfy the necessary general physical requirement for the field energy density to be positively defined. This means that in the classical field-theoretical approach to the problem of constructing a dynamic theory of gravity, in which all ten special-relativistic integrals of motion are present, definitely only a scalar field can be considered as a candidate to represent the gravitational field.

1 The law of energy-momentum conservation of massive spin-zero gravitational field

Continuing, begun in [1], the adaptation of the canonical scalar massive field as a possible model of gravity for its further use in solving existing problems of dark mass and dark energy in cosmology, in this article we formulate the law of energy-momentum conservation, which is a stumbling block for the general theory of relativity.

For a system of interacting scalar field and massive particles, we form the action invariant with respect to the Lorentz group. Obeying the principle of simplicity we use the expression quadratic in the field as the Lagrangian density for a system of interacting classical particles and a massive scalar field,

$$\mathcal{L}_{field} = -\frac{c^4}{2\pi G_N} \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{c^2 m_g^2}{\hbar^2} \phi^2 \right), \quad (1.1)$$

and the spatial density of the Lagrangian of gravitationally interacting classical particles (dustlike matter) coupled to this field, is given by the expression

$$\mathcal{L}_p = -c^2 \sum_a m_a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \phi^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (1.2)$$

In the case of the real classical scalar field ϕ described by the Lagrangian density (1.1), the canonical energy-momentum tensor

$$T_\nu^\mu = \mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi \quad (1.3)$$

leads immediately to the expression

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{\pi G_N} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi + \kappa^2 \phi^2) \eta_{\mu\nu} \right). \quad (1.4)$$

As we see, this tensor is symmetric, as it should be for the spin-zero field. Using the definition

$$g_\mu = -2c^2 \frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi \quad (1.5)$$

of the strength vector in terms of the field variable $\phi(x)$ and its derivatives with respect to four-dimensional coordinates, we can represent the energy-momentum tensor (1.4) in the form [2]

$$T_{\mu\nu} = \frac{\phi^2}{4\pi G_N} \left(g_\mu g_\nu - \frac{1}{2} (g_\sigma g^\sigma + 4c^4 \kappa^2) \eta_{\mu\nu} \right). \quad (1.6)$$

The densities of energy, energy flux, momentum, and momentum flux of the field appear in this formalism in the usual way as the following components of the energy-momentum tensor:

$$W = T_{00} = T^{00}, \quad S_i = -c T_{0i} = c T^{0i}, \\ G_i = -c^{-1} T_{i0} = c^{-1} T^{i0},$$

and $\sigma_{ij} = T_{ij} = T^{ij}$ respectively.

Thus, from (1.6), using the notation $g^\mu = (Q, \mathbf{g})$, we obtain all four dynamical characteristics of the field listed above:

$$W = \frac{\phi^2}{8\pi G_N} (\mathbf{g}^2 + Q^2 + 4c^4 \kappa^2), \quad (1.7)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c\phi^2}{4\pi G_N} Q\mathbf{g}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{G} = \frac{\phi^2}{4\pi G_N c} Q\mathbf{g}, \quad (1.9)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\phi^2}{4\pi G_N} (g_i g_j + Q^2 \delta_{ij}) - W \delta_{ij}. \quad (1.10)$$

Now we return to the equation of motion of a test particle in the field, expressed in the four-dimensional form (equation (1.5) in the previous paper [1]):

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m\phi^2 g^\mu. \quad (1.11)$$

We recall that in this formula $u^\mu = c^{-1} dx^\mu / d\tau$ is the four-velocity of a particle, $d\tau = c^{-1} ds = \sqrt{1 - (v/c)^2} dt$ is its proper time. The four-vector $p^\mu = cm\phi^2 u^\mu$, represented in components as

$$p^\mu = \left(\frac{1}{c} \mathcal{E}, \mathbf{p} \right), \quad (1.12)$$

consists of the canonical expressions $\mathbf{p} = \partial L_p / \partial \mathbf{v}$ and $\mathcal{E} = \mathbf{v} \partial L_p / \partial \mathbf{v} - L_p$ for momentum and energy of a separate particle, if we keep in mind its Lagrange function

$$L_p = \int \mathcal{L}_p dV = -c^2 m\phi^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.13)$$

As can be seen from the equation (1.11) represented in unpacked three-dimensional form, these are the same field-dependent expressions that were first introduced by Nordström in [3]:

$$\mathcal{E} = \frac{c^2 m\phi^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\phi^2 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (1.15)$$

Presented in these formulas the energy content factor ϕ^2 is the same that has already appeared in formula

$$\tilde{m} = m\phi^2 \quad (1.16)$$

in [1] for the inertial and gravitational masses of a particle. It is important to note as a significant achievement of a theory that this factor presents also in (1.7)–(1.10) for the densities and fluxes of the corresponding physical quantities of the field itself. Thereby the numerical values of all these physical quantities are multiplied by the same conversion factor κ^2 under the gauge transformation $\phi \rightarrow \phi' = \kappa\phi$, just as in the case where the adopted unit of mass is replaced by another one.

We emphasize the fact that in other numerous scalar relativistic models of the gravitational field, motivated by different reasons, this is not the case. Particularly, in Nordström's theory presented in [4], the mass of a particle, its energy and momentum

depend on the gravitational field, as in (1.14)–(1.16), by the factor ϕ^2 (denoted by Nordström as $e^{g\Phi/c^2}$), whereas the densities of energy and energy flux of the field itself are proportional to ϕ^4 (for details of analysis, see in [5]).

From the exact expression (1.14), it is useful to get an approximate formula for estimating the small changes in the energy content of nonrelativistic particles moving in a weak gravitational field. Setting in (1.14) $\phi^2 = e^{\Phi/c^2}$ and taking the traditional convenient gauge condition $\Phi = 0$ for the gravitational potential at infinity, we arrive at the known expression (see formula (87.10) in [6])

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\Phi \quad (1.17)$$

for the energy of particle (1.14) in the non-relativistic and weak-field approximation, linear in small quantities v^2/c^2 and Φ/c^2 .

It is straightforward to verify that in empty space in the absence of gravitating masses, the expression (1.6) obtained as the energy-momentum tensor of the field satisfies the continuity equation

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0. \quad (1.18)$$

This equation expresses in a differential form the conservation of energy and momentum of a free gravitational field, which in the case under consideration is a closed physical system.

In the presence of massive particles, the total four-divergence of the energy-momentum tensor of the field is no longer equal to zero due to the energy and momentum exchange between the field and matter. Using (1.5) and the field equations (3.4) and (3.5) of our previous paper [1], it can be shown immediately from (1.6) that, instead of (1.18), in this case

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = -\sum_a m_a \phi^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) g_\mu. \quad (1.19)$$

Of course, for the closed system consisting of the gravitational field and the massive particles gravitationally interacting with each other, the full energy and momentum are strictly conserved. In fact, integrating equation (1.19) over a certain volume V bounded by a closed smooth surface Σ with the aid of equation (1.11) for the four-vector (1.12) and using the Gauss theorem, we obtain the balanced equation for the energy and momentum in the integral form

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{(V)} p^\mu + \frac{1}{c} \iiint_V T^{\mu 0} dV \right) = - \oint_\Sigma T^{\mu i} df_i, \quad (1.20)$$

where $d\mathbf{f} = (df_i)$ is an infinitesimal normal vector of the the closed surface Σ directed outward of the chosen volume V . The summation in (1.20) extends over all the particles contained in this volume. This equation expresses the law of conservation of total energy and momentum of the field and matter in the integral form.

Setting in (1.20) the index μ equal to zero and using the formulas (1.14), (1.7), and (1.8), we find the equation expressed the conservation law of total energy of the particles and field:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_{(V)} \frac{c^2 m \phi^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \iiint_V \frac{\phi^2}{8\pi G_N} (g^2 + Q^2 + 4c^4 \kappa^2) dV \right] = \\ = - \oint_\Sigma \frac{c \phi^2}{4\pi G_N} Q \mathbf{g} \cdot d\mathbf{f}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

This equation asserts that the rate of change of the total energy of particles given by formula (1.14) and of the field with the positive density defined by (1.7) in a certain volume V is exactly equal to the amount of energy passing per unit time with the field energy flux of density (1.8) into the surrounding space or back through the closed surface Σ bounding this volume.

Along with (1.21), choosing the spatial components of (1.20) and omitting the indexes, we obtain the separate three-dimensional vector equation

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{(V)} \frac{m \phi^2 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \iiint_V \frac{\phi^2 Q \mathbf{g}}{4\pi G_N c} dV \right) = - \oint_\Sigma \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{f}, \quad (1.22)$$

which expresses the momentum conservation of particles and field. The three-dimensional tensor of second rank $\boldsymbol{\sigma}$ on the right-hand side of this equation represents the momentum flux density of the field; its components are defined by (1.10).

Analysis of the integral relation (1.22) reveals that, if we use the perturbed Lagrangian (1.13), the generalized momentum $\partial L / \partial \mathbf{v}$, canonically conjugate to $\mathbf{r}$ coincides with (1.15) and participates in the conservation law as a momentum of a particle in a gravitational field. Whereas it is well known that in classical mechanics of a charged particle in an electromagnetic field, the unperturbed Lagrangian of a free particle should be used for this purpose. For this reason, after obtaining formulas (1.14) and (1.15) for the energy and momentum of a particle using in their canonical definition (1.3) the Lagrange function (1.13), some doubts can still arise against the actual physical meaning of these quantities.

The proved theorems of conservation of energy and momentum in the form of equations (1.21) and (1.22), containing expressions (1.14) and (1.15), demonstrate the groundlessness of such doubts. Precisely the covariant form (1.20) of these equations enables us to associate $T^{\mu 0}$ with p^μ and gives the final arguments to identify with confidence the corresponding components of tensor (1.6) as densities of energy, energy flux, momentum, and momentum flux of the field listed in (1.7)–(1.10).

Let us turn for the moment to the post-Newtonian equation of a static gravitational field (equation (3.6) in [1]). As we have already noted in [1], this equation in the case of massless field, that is in the form

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \frac{1}{2c^2} \mathbf{g}^2 - 4\pi G_N \varrho, \quad (1.23)$$

was proposed by Brillouin [7] and Hooft [8]. In this connection we note that the appearance in it of the nonlinear term quadratic in field $\mathbf{g}$ was motivated by these authors by the necessity to include the field energy into the source of the field itself. This was done in [7], [8] “by hand”, using the negative *pseudo-energy density*

$$W^{\text{pseudo}} = -\frac{\mathbf{g}^2}{8\pi G_N} \quad (1.24)$$

principally different of positive expression (1.7). In different dynamical theories of gravitation, including general relativity, this expression is indeed widely known and currently accepted as the energy density of static gravitational field in Newtonian approximation. Indeed, formula (1.24) is derived by many authors. It can be found, for example, in books [7], [8], which were already quoted, and also in [6], [9], [10], [11].

In this connection we note that, although the post-Newtonian equation (1.23) (similarly to the covariant four-dimensional equation (3.4) in [1]) represents the field $\mathbf{g}$ as a self-acting one, as it should, our starting equation (3.2) in [1] for the main scalar field variable ϕ has the canonical form; that is, it is essentially linear and homogeneous, as required by gauge symmetry.

Returning now to the equation (1.13) in [1], we see that if a particle moves in static external field $\phi(\mathbf{r})$, which is characterized by the vector strength $\mathbf{g} \neq 0$, while its scalar strength $Q = 0$, then the energy (1.14) of this particle is conserved.

In turn, as can be seen from (1.12) in [1], if the field variable ϕ depends only on time, so that $\mathbf{g} = 0$, the particle momentum (1.15) is conserved despite the presence of field Q in this case. Although field strength Q causes, according to (1.21) in [1], a change in the velocity of a moving particle, its momentum in the presence of this field is conserved. From formula (1.15) of the present paper, it follows that this is possible simultaneously with a suitable balanced change in the variable inertial mass $\tilde{m} = m\phi^2$ of a particle.

We make now one remark relating to the expressions for the densities of the field energy and momentum and of their fluxes in formulas (1.7)–(1.10) and in (1.21), (1.22). From these formulas, it may seem at first sight that if ϕ vanishes at some instant of time or within a finite region of space, then the total energy and momentum of particles and fields together with fluxes of the field energy and momentum vanish simultaneously. However, this is not the case, as can be seen by comparing the formulas (1.4) and (1.6). We recall that the factor ϕ^2 arises in energy-momentum tensor (1.6) and

naturally in expressions (1.7) and (1.8) as a result of the replacement in (1.4) of the ordinary gradient $\partial_\mu \phi$ by logarithmic derivatives of ϕ that are hidden in the observables g_μ .

As for the expressions (1.14) and (1.15) of the energy and momentum of a moving particle, these quantities do not vanish also when $\phi \rightarrow 0$. This can be easily proved by writing down the Hamiltonian of the particle

$$\mathcal{H} = v_i \frac{\partial L_p}{\partial v_i} - L_p = c\sqrt{p^2 + c^2 m^2 \phi^4}, \quad (1.25)$$

which corresponds to the Lagrangian (1.13) and reproduces the equation of motion (1.12) in [1] as the canonical Hamilton equation

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}.$$

From (1.25) it follows that if $\phi \rightarrow 0$, then the relation between the energy and momentum of the particle takes the form $\mathcal{E} = cp$, that is, as in the case of a massless particle moving with the light velocity.

2 Gravitational variability of the inertial mass

Our consideration of the law of energy conservation in the previous section shows that the logic of the scalar field approach to the problem of gravity within the framework of the special theory of relativity that we follow here allows us to specify the initial concepts of inertial mass and mass, understood as a gravitational charge, which were introduced in the construction of the Lagrangian (1.2). The results already obtained in previous sections make it possible to establish a clear connection between these two fundamental physical concepts and, therefore, to better understand the physical essence hidden in them.

In order to clearly trace the connection between the parameter m identified by (1.13) as the gravitational charge of a particle and its inertial properties, resulting from the adopted Lagrangian (1.1) [accounting (1.2)], we first turn to the general definition of the inertial mass as such in the case of a moving particle. Very reasonable arguments in favor of the special-relativistic definition of this physical quantity as the magnitude (in sense of pseudo-Euclidean Minkowski metric) of momentum-energy four-vector are given by Taylor and Wheeler in [12] (Section 12). But even earlier, such a Poincaré-invariant definition of inertial mass as a measure of the rest energy of a relativistic particle, given by the expression

$$\frac{1}{c} \sqrt{-p_\mu p^\mu} = \frac{1}{c^2} \sqrt{\mathcal{E}^2 - c^2 p^2},$$

was used by Herman Weil [13] (pp. 407–408), and then was especially convincingly and persistently advocated by Lev Okun' [14], [15].

Two previously obtained formulas (1.14) and (1.15) for the energy and momentum enable us to calculate this quantity. The expression found in this

way is already known to us: it coincides with (1.16), so that

$$\tilde{m} = \frac{1}{c} \sqrt{-p_\mu p^\mu},$$

as it should. Using, as before, the definition $\phi^2 = e^{\Phi/c^2}$ of potential Φ , we write it again in the original form

$$\tilde{m} = m e^{\Phi/c^2} \quad (2.1)$$

obtained for the first time by Hunnar Nordström in his “first” theory of gravitation (see [3], formula (1.5)) and also in the “second” one ([4], formula (53)).

The orthodox (non-metric) field-theoretical approach to gravity, presented here, shows that the gravitational variability of the inertial mass with necessity is predetermined by the very scalar nature of the field coupled to it, independently of the specific type and form of field equations. This fact is caused already by the special form of the gravitational analogue of the Poynting vector. It is easy to see that energy flow vector, as the only possible three-dimensional vector quadratic form in the components of the strength four-vector

$$g^\mu = (Q, \mathbf{g}) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, -\nabla \Phi \right), \quad (2.2)$$

must be proportional, as in (1.8), to the product $Q\mathbf{g}$. We write it again in the form

$$\mathbf{S} = \frac{ce^{\Phi/c^2}}{4\pi G_N} Q\mathbf{g}. \quad (2.3)$$

This means that the flow of gravitational energy arises only in the presence of two fields of strengths, $\mathbf{g}$ and Q , simultaneously. But in all cases, the field energy is transferred exclusively along or against the strength field $\mathbf{g}$.

Consequently, in space where a gravitating substance is present, an external gravitational field with a time-varying potential Φ_{ext} and, therefore, with non-zero strength Q_{ext} initiates the redistribution of field energy in space. The transfer of the energy around each individual body occurs along or opposite the direction of its proper convergent field $\mathbf{g}_{prop}$, that is, into or out the body, depending on the sign of the scalar strength Q_{ext} of the external field. It is worth recalling that the described gravitational mechanism of changing the inertial mass of a gravitating body was known still to Nordström over a hundred years ago and was presented in his pioneer work [3].

If the gravitational potential Φ_{ext} increases, that is, if the time component $Q_{ext} = c^{-1} \partial \Phi_{ext} / \partial t$ of the four-vector strength g^μ of the field in (2.2) is positive, then the induced energy flux, according to (1.8), will be convergent, just as the strength $\mathbf{g}_{prop}$ of the field produced by the body. Thus, in this case, because of the energy inflow of the gravitational

field from the surrounding space, there is an increase in the energy $\mathcal{E} = \tilde{m}c^2$ stored in the body in the form of its inertial mass $\tilde{m}$. On the contrary, an external field with negative strength Q_{ext} (that is, with a decreasing potential Φ_{ext}) will provoke the process of evacuation of energy accumulated in the body into the surrounding space and its transformation in the form of the energy of gravitational field. The actual inertial mass $\tilde{m}$ of the body, determined by formula (2.1), will decrease in this case. Of course, the same applies to the inertial mass of the atoms that make up the body, and in general to all massive elementary particles.

A similar mechanism of mass change due to energy transfer works in the absence of the field Q_{ext} if the massive gravitating particle moves in an external static field $\mathbf{g}_{ext}$ produced by another massive body at rest. In this case, the nonzero field Q , which provokes, according to (2.3), the transfer of the field energy, appears in the rest frame of the moving particle. This fact can be easily verified by going to this reference frame.

As an example, let us consider the case when a test body (particle) moves uniformly with a certain velocity $\mathbf{v}$ in the external static gravitational field $\mathbf{g}_{ext}$ produced by some other massive body, for example, by the earth. Suppose that in the rest frame of the earth (the daily rotation is neglected), this body at the point x^μ of its own world line has a velocity $\mathbf{v}$ directed upward, opposite the field strength $\mathbf{g}_{ext}$. Now we choose in the reference frame associated with the earth the three-dimensional coordinate system in which the x^3 -axis is directed along the velocity of the particle. So, in the frame chosen in this way, $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ and the strength four-vector in the indicated world point x^μ is

$$g^\mu_{ext} = (0, \mathbf{g}_{ext}) = (0, 0, 0, -g_{ext}).$$

Then, as a result of the Lorentz transformations, the set of transformed components of this four-vector

$$g'^\mu_{ext} = (Q'_{ext}, \mathbf{g}'_{ext})$$

in the rest frame of the particle at the same world point is

$$g'^\mu_{ext} = \left(\frac{(v/c)g_{ext}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, 0, 0, \frac{-g_{ext}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right).$$

As expected, the nonvanishing scalar strength of the gravitational field

$$Q'_{ext} = \frac{(v/c)g_{ext}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (2.4)$$

appeared among them as the time component.

The formula (2.4) thus obtained determines the positive scalar strength Q'_{ext} of the external field, which together with the vector self-field $\mathbf{g}_{proper}$ of the particle forms a convergent flow of gravitational energy (1.8):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi G_N} \frac{v \mathbf{g}_{ext} e^{\Phi_{tot}/c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \mathbf{g}_{proper},$$

that increases the particle rest energy and, consequently, its inertial mass as it moves opposite the external field $\mathbf{g}_{ext}$. On the contrary, the motion of a particle along $\mathbf{g}_{ext}$ leads to the appearance of a scalar field strength Q'_{ext} in its rest frame, similar to (2.4), but negative. Accordingly, this field will provoke an outflow of energy accumulated in the particle and a corresponding decrease in its inertial mass.

There exists the essential difference between the geometric patterns of energy transfer arising in two similar cases: around a massive particle in a *scalar* gravitational field, where the density of energy flux $\mathbf{S}$ is proportional to $Q\mathbf{g}$, and around a charged particle in a *vector* electromagnetic field, where $\mathbf{S}$ is proportional to $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. The additional electromagnetic energy flows associated with the proper electric field of a charged particle, which arise when it appears in an external electromagnetic field, are strictly orthogonal to the radial direction of the Coulomb field of this particle. For this reason, there never arise radial convergent or divergent flows of electromagnetic energy that could change the rest energy of a charged particle. As a result, unlike the scalar model of gravitation, in the Maxwell – Lorentz electrodynamics, the proper energies of particles and hence their inertial masses remain inviolable.

The above elementary reasoning shows that the variability of the inertial mass (mass defect) of isolated material particles is absent in electrodynamics and inherent in scalar theories of the gravitational field. It is easy to understand that this difference in the features of mass with respect of these two types of fields is due to the difference in their tensor dimensions (tensor ranks). In other words, this difference is due the vector nature of the electromagnetic field and the scalar nature (adopted in our study) of the gravitational field. [Note, by the way, that the scalar-tensor theory of gravitation proposed in [16], which parametrizes the hypothetical evolution of the gravitational constant by means of an auxiliary scalar field minimally coupled to matter, also leads for the same reason to the correctional variability of the inertial mass on a cosmological time scale.]

Thus, we have found answers to the fundamental questions arising in the scalar model of gravity, *how* and *why* the actual inertial mass of particles (1.16) or, equivalently, (2.1) changes as they are at rest in a gravitational field that varies with time, or if they move in an external gravitational field. We stated also that there is a big difference between the gravitational variability of the rest energy of any massive particles (macroscopic bodies, atoms, nuclei, and even elementary particles), on the one hand, and the usual small defect of mass associated with other fundamental interactions: electromagnetic, weak,

and strong, which manifests itself, for example, in the decay of unstable particles, as well as in nuclear and chemical transformations, on the other hand. We see that in the first case the inertial mass of elementary particles can be changed up to zero when the logarithmic potential of external gravitational field varying in time or space goes through zero.

In connection with the unexpectedly discovered progress in understanding the variability of the inertial mass, we recall that Vladimir Fock in [17] (Section 34) formulated the problem: why does the rest energy of elementary particles in all processes except annihilation “behave passively”, so that even its small part never turns into other types of energy, in particular, in “active” kinetic form? Since the special theory of relativity neither in itself nor with the help of general relativity can explain the special stability of the prevailing part of the rest energy of matter, Fock actually leaves the problem unanswered, stating that the cause of the inviolability of the energy stored in the mass of elementary particles is of a quantum nature.

Leaving aside the Fock's hypothesis about the quantum nature of the inertial mass, in all other respects he is undoubtedly right. The rest energy of particles participating in electromagnetic interaction is inviolable, and the inclusion of Einstein's theory of gravitation does not make the understanding of the problem raised by Fock more profound. Whereas, having overcome Einstein's “taboo” and turned to the scalar special relativistic theory of gravitation, we can meaningfully discuss the dynamics of the formation of the inertial mass of elementary particles, hidden in the phenomenology of $\mathcal{E} = mc^2$, with the participation of gravitational interaction.

3 Special-relativistic effect of the gravitational shift of atomic spectra

According to the general expression (1.14), the energy of atom in n -th stationary state located at rest in gravitational field with potential Φ is

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^0 e^{\Phi/c^2}.$$

Here $\mathcal{E}_n^0$ is the rest energy of this or another identical atom in the same quantum state removed far from gravitating matter, where we choose the gauge condition $\Phi = 0$. Therefore, the frequency of the photon emitted by the atom changes with a change of potential as

$$\omega_{nm}(\Phi) = \frac{\mathcal{E}_n^0 - \mathcal{E}_m^0}{\hbar} e^{\Phi/c^2}.$$

From this formula it follows that the wavelength

$$\lambda_{nm}(\Phi) = \frac{2\pi c}{\omega_{nm}(\Phi)} = \frac{2\pi c \hbar}{\mathcal{E}_n^0 - \mathcal{E}_m^0} e^{-\Phi/c^2} \quad (3.1)$$

increases with decreasing potential. Introducing the usual “redshift” parameter equal to the fractional

increase in the radiated wavelength when the potential decreases by an amount $\Delta\Phi$:

$$z = \frac{\lambda_{nm}(\Phi - \Delta\Phi) - \lambda_{nm}(\Phi)}{\lambda_{nm}(\Phi)},$$

we get from (3.1) the rigorously valid relation regardless of the value of $\Delta\Phi$:

$$z = e^{\Delta\Phi/c^2} - 1. \quad (3.2)$$

In cases of a weak field or small potential variations, when $|\Delta\Phi|/c^2 \ll 1$, we can easily deduce from (3.2) the well-known approximate formula

$$z \approx \frac{\Delta\Phi}{c^2}. \quad (3.3)$$

A detailed analysis of the classical phenomenon of a decrease of the characteristic frequencies of atoms and nuclei placed in a static gravitational field on the basis of a formula that coincides with our approximate formula (3.3) is given in a methodological article [18] by Okun', Selivanov, and Telegdi. As in our article, the decrease in the frequency of a photon or gamma-quantum emitted by atom or nucleus in a static gravitational field is considered in [18] as a result of a "blue shift" of these sources, that is, due to increase in their rest energy with height; at the same time, it is assumed that the frequency of the propagating electromagnetic radiation is unaffected by the presence of a gravitational field.

The special-relativistic "blue shift" of mass-energy (2.1) in the gravitational field has been known thanks to Nordström [3] for more than a hundred years. But unfortunately, in the literature there is sometimes an erroneous statement that the gravitational redshift cannot be explained within the special theory of relativity. A characteristic examples of this are the books [19] and [20] by Norbert Straumann. In the first of them a brave verdict "*The Gravitational Red Shift is not Consistent with Special Relativity*" author has made as the title of the relevant section. But we just saw a completely opposite conclusion, therefore, the author's pseudo-arguments given to prove the quoted statement, as well as the pseudo-proof itself, we leave without comment.

We are grateful to N.V. Maksimenko and Yu.P. Vybyli for the fruitful discussions, careful reading of the manuscript, and helpful comments.

REFERENCES

1. Serdyukova, M.A. A Massive Gravitational Field in Flat Spacetime. I. Gauge Invariance and Field Equations / M.A. Serdyukova, A.N. Serdyukov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2019. – № 2 (39). – P. 45–53.
2. Serdyukova, M.A. The Law of Energy-Momentum Conservation of Massive Spinzero Gravitational Field / M.A. Serdyukova // Problems of Interaction of Radiation with Matter. Proceedings of the V International Scientific Conference Dedicated to Academician B. V. Bokut (Gomel, November

14–16, 2018). – Part 1. – Gomel: F. Skorina Gomel State University, 2018. – P. 193–199.

3. Nordström, G. Relativitätsprinzip und Gravitation / G. Nordström // Phys. Z. – 1912. – № 13. – S. 1126–1129.

4. Nordström, G. Träge und schwere Masse in der Relativitätsmechanik / G. Nordström // Ann. Phys. (Leipzig). – 1913. – № 40. – S. 856–878.

5. Serdyukov, A.N. A minimal relativistic model of gravitation within standard restrictions of the classical theory of fields / A.N. Serdyukov // Phys. of Part. and Nucl. Lett. – 2009. – № 6. – P. 190–201.

6. Landau, L.D. The Classical theory of fields. Volume 2 of Course of Theoretical Physics / L.D. Landau, E.M. Lifshitz // Oxford: Butterworth-Heinemann. – 1987. – 428 p.

7. Brillouin, L. Relativity Reexamined / L. Brillouin. – New York: Academic Press. – 1970. – 111 p.

8. 't Hooft, G. Introduction to General Relativity / G. 't Hooft. – Utrecht, Netherlands: Utrecht University, 2012. – 71 p.

9. Weyl, H. Raum – Zeit – Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie / H. Weyl. – Berlin: Springer, 1923. – 338 p.

10. Wald, R.M. General Relativity / R.M. Wald. – Chicago: Univ. Chicago Press, 1984. – 491 p.

11. Mitskevich, N.V. The Physical Fields in General Relativity / N.V. Mitskevich. – Moscow: Nauka, 1969. – 326 p.

12. Taylor, E.F. Spacetime Physics / E.F. Taylor, J.A. Wheeler. – 2nd ed. – New York: Freeman, 1992. – 208 p.

13. Weyl, H. Space – Time – Matter / H. Weyl. – London: Methuen & Co, 1922. – 495 p.

14. Okun', L.B. Energy and Mass in Relativity Theory / L.B. Okun'. – New Jersey: World Scientific, 2009. – 311 p.

15. Okun', L.B. Mass versus relativistic and rest masses / L.B. Okun'. – Am. J. Phys. – 2009. – Vol. 77, № 5. – P. 430–431.

16. Brans, C. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation / C. Brans, R.H. Dicke // Phys. Rev. – 1961. – № 124. – P. 925–935.

17. Fock, V. The Theory of Space, Time, and Gravitation / V. Fock. – London: Pergamon, 1964. – 448 p.

18. Okun', L.B. Gravitation, photons, clocks / L.B. Okun', K.G. Selivanov, V.L. Telegdi // Physics – Uspekhi. – 1999. – Vol. 42, № 10. – P. 1045–1050.

19. Straumann, N. General Relativity and Relativistic Astrophysics. – Berlin: Springer. – 1984. – 459 p.

20. Straumann, N. General Relativity With Applications to Astrophysics. – Berlin: Springer 2004. – 674 p.

Поступила в редакцию 03.06.19.

УДК 524.82

МАССИВНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ. III. ГРАВИТАЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА

М.А. Сердюкова

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

A MASSIVE GRAVITATIONAL FIELD IN FLAT SPACETIME. III. GRAVITATIONAL DEPENDENCE OF RADIOACTIVE DECAY

M.A. Serdyukova

F. Scorina Gomel State University

Показано, что изменение инертной массы нестабильных частиц (и атомных ядер) в скалярном гравитационном поле, возникающее в результате передачи полю части энергии покоя частиц, или, наоборот, при увеличении их энергии покоя за счет аккреции полевой энергии, сопровождается изменением темпов радиоактивного распада. Приложение скалярной теории гравитации к однородной вселенной предсказывает вековое ускорение темпов распада нестабильных ядер и частиц в современную эпоху. В космологическом масштабе времени этот процесс подтверждается наблюдаемым $(1+z)$ -растяжением кривых блеска послесвечения сверхновых типа Ia, которое вызвано жестким гамма-излучением от распадающихся нестабильных нуклидов ^{56}Ni and ^{56}Co , созданных при взрыве аккрецирующих белых карликов.

Ключевые слова: массивная скалярная гравитация, переменная масса, радиоактивный распад.

It is shown that a change in the inertial mass of unstable particles (and atomic nuclei) in a scalar gravitational field that occurs as a result of the transfer of part of the rest energy of particles to the field, or, conversely, when their rest energy increases due to accretion of field energy, is accompanied by a change in the rate of radioactive decay. The application of the scalar theory of gravity to the homogeneous universe predicts the secular acceleration of the rate of decay of unstable nuclei and particles in the current era. On a cosmological time scale, this process is confirmed by the observed $(1+z)$ -stretching of the light curves of supernovae type Ia afterglow caused by the hard gamma-radiation from the decaying unstable ^{56}Ni and ^{56}Co nuclides created by the explosion of accreting white dwarfs.

Keywords: spinless massive gravity, variable mass, radioactive decay.

Introduction

Along with the gravitational shift of the atomic and nuclear spectra of electromagnetic radiation, discussed in a previous article [1], the variability of the rest energy of massive particles in a gravitational field predicted by the scalar special-relativistic theory of gravity leads to another quantum-mechanical effect. This phenomenon manifests itself in the form of a small change in the rate of radioactive decay of unstable nuclei and elementary particles under the influence of local gravitational fields created by the condensed matter of stars, the sun, and the earth.

On the other hand, the application of the proposed scalar gauge-invariant theory of gravity to all the mass in the entire universe predicts the existence of a slowly varying in time collective cosmic gravitational field. The theory predicts also that this background field, which also changes the mass of particles, should affect intranuclear processes, and this effect of gravity should manifest itself, in particular, in the form of secular acceleration or deceleration in large time scales of the rate of radioactive decay. Small deviations in the physics of nuclear processes that gradually took place in the past era, being monotonously accumulating in time, should have

significantly increased on a cosmological time scale and should be clearly visible now against the background of well-studied similar nuclear transformations in the current time. The cosmological manifestation of this phenomenon was detected twenty years ago by observing the “dilation of light curves” in the afterglow of the explosion products of accreting white dwarfs as this cosmic event recedes from the observer. It is established by astronomical observations that this afterglow arises at the expense of energy of hard radiation from decaying β -unstable nuclei ^{56}Ni and ^{56}Co created in the fusion process from carbon and oxygen during the explosion, which was identified as a Type Ia supernova.

The use of this type supernovae as cosmic “standard candles” [2]–[5] has shown that the time of their accessible to observation bright glow increases with increasing distance and, consequently, with an increase in the time interval separating our time from these cosmic events of the long past. Specifically, it was measured that the time intervals of the afterglow after SN Ia explosion increase with distance or, in other words, the light curves of a distant supernova with a high cosmological redshift

z are stretched by the factor $(1+z)$ compared to similar curves in neighboring supernovae of this type.

A theoretical description of this phenomenon in the framework of a conformally flat model of the universe with a background gravitational field with cyclic dynamics was proposed in my earlier publication [6]. Later, when we turn to cosmological problems without going beyond the framework of the accepted gauge-invariant model of gravity, we will also return to a more detailed discussion of the problem of cosmological acceleration at present epoch of the rates of radioactive decay of both rapidly decaying and long-lived isotopes under the influence of a background gravitational field.

1 The effect of gravitation on the rate of radioactive decay

If the quantum-mechanical system such as atom, atomic nucleus, or other real massive structural object is placed in the external gravitational field, simultaneously with the gravitational change of its rest energy [1], [7], [8]

$$\mathcal{E} = c^2 m e^{\Phi/c^2}, \quad (1.1)$$

the change in the natural width $\Delta \mathcal{E}$ of its energy levels should also occur when the gravitational potential Φ changes. This change must be, of course, in the same proportion as in (1.1), that is, with the same Nordström's energy content factor

$$\phi^2 = e^{\Phi/c^2}.$$

Therefore from the law (1.1) of mass–energy transformation in a gravitational field and the quantum mechanical uncertainty relation between the width $\Delta \mathcal{E}$ of energy levels and the lifetime $\Delta \tau$ of excited states,

$$\Delta \tau \cdot \Delta E \sim \hbar,$$

it follows that the lifetime of a system in bounded state depends on the potential in such a way that

$$\Delta \tau \cdot e^{\Phi/c^2} = \text{const.} \quad (1.2)$$

Noting the obvious fact that the lifetime $\Delta \tau$ with respect to the radioactive decay of a particular type of radionuclide (or other unstable particles, such as, for example, neutrons) is proportional to their half-life $T^{(1/2)}$, we conclude from the connection (1.2), that the half-life of unstable particles in a gravitational field varies with the field potential Φ according to the relation

$$T^{(1/2)}(\Phi) = T_0^{(1/2)} e^{-\Phi/c^2}. \quad (1.3)$$

Obviously, the value of the half-life of the considered unstable particle locator in the space region, where for the gravitational potential we choose the gauge condition $\Phi = 0$, should be taken in (1.3) as the constant $T_0^{(1/2)}$.

So, taking into account the above arguments, the usual law of radioactive decay

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

where

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T^{(1/2)}},$$

in the presence of a static (or stationary) gravitational field, whose potential is constant in time, should be rewritten in the form:

$$N_\Phi(t) = N_0 \exp \left(-\frac{\ln 2 \cdot e^{\Phi/c^2}}{T_0^{(1/2)}} t \right). \quad (1.4)$$

We will be interested next in the ratio of the numbers $N_A(t)$ and $N_B(t)$ of unstable particles that survived at time t in every of two initially identical their amounts, which were located in different regions of field, A and B , with different constant values Φ_A and Φ_B of potential. From (1.4) it is easy to see that

$$\frac{N_A(t)}{N_B(t)} = \exp \left[\frac{\ln 2}{T_0^{(1/2)}} \left(e^{\Phi_B/c^2} - e^{\Phi_A/c^2} \right) t \right].$$

For a weak field in the linear approximation with respect to the small parameter Φ/c^2 , from this we obtain

$$\frac{N_A(t)}{N_B(t)} \approx \exp \left(-\frac{\ln 2}{T_0^{(1/2)}} \cdot \frac{\Phi_{AB}}{c^2} t \right),$$

where $\Phi_{AB} = \Phi_A - \Phi_B$. If the decay time t is comparable to the half-life $T_0^{(1/2)}$, which, of course, is implied, the last formula is further simplified:

$$\frac{N_A(t)}{N_B(t)} \approx 1 - \frac{\ln 2}{T_0^{(1/2)}} \cdot \frac{\Phi_{AB}}{c^2} t. \quad (1.5)$$

2 Gravitational variability of the decay rate of ^{238}U on the Earth

Now, on the basis of this formula we estimate the order of magnitude of the ratio of non-decayed fractions for long-lived ^{238}U isotopes that were located in the center of the Earth and on its surface for the entire time after completion of its formation as a planet. For this purpose, we use the well-known solution of the Poisson equation for the potential of the Newtonian theory of gravitation (see, for example, [9])

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{G_N M}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) & \text{for } r \leq R, \\ -\frac{G_N M}{r} & \text{for } r \geq R, \end{cases} \quad (2.1)$$

which determines the field of a massive homogeneous spherical body of mass M and radius R both inside it and in the entire surrounding space under the gauge condition $\Phi = 0$ at infinity. Assuming next $M = M_\oplus$, $R = R_\oplus$, and bearing in mind that the acceleration of gravity on the surface of the planet

$$g = \frac{G_N M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2},$$

we find from formula (2.1) the expressions for the potential in center of the Earth ($r = 0$):

$$\Phi_A = \Phi_{\text{center}} = -\frac{3}{2} g R_{\oplus},$$

and on its surface ($r = R$):

$$\Phi_B = \Phi_{\text{surface}} = -g R_{\oplus}.$$

From this it follows

$$\Delta\Phi_{AB} = -\frac{1}{2} g R_{\oplus}.$$

Now from (1.5) we find the final formula for calculating the relative content of undecayed unstable isotopes of a certain kind in similar geological rocks in the center and on the surface of the Earth (or another planet) after a long period of time t elapsed after their formation:

$$\frac{N_{\text{center}}(t)}{N_{\text{surface}}(t)} = 1 + \frac{\ln 2 R_{\oplus} g t}{2 c^2 T_0^{(1/2)}}.$$

In carrying out a numerical calculation on the example of uranium-238 isotopes, which half-life is equal $T^{(1/2)} = 4.468 \cdot 10^9$ years [10], we note additionally that the approximate age of the Earth is estimated at 4.5 billion years, and remember also that

$$R_{\oplus} \approx 6.371 \times 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.8 \text{ ms}^{-2}, \quad \text{and} \quad c = 10^8 \text{ ms}^{-1}.$$

As a result, we have

$$\frac{N_{\text{center}}(t)}{N_{\text{surface}}(t)} \approx 1 + 2.4 \times 10^{-10}.$$

As calculations show, due to the extreme smallness of the dimensionless relative magnitude of the gravitational field on the Earth's surface,

$$\frac{\Phi}{c^2} = \frac{R_{\oplus} g_{\text{surface}}}{c^2} \approx 7 \cdot 10^{-10},$$

the ratio of the concentration of long-lived isotopes on its surface and in the center during the Earth's existence can very small differs from unity.

But if radioactive decay had to be used as a clockwork, then the deviation from unity calculated in (1.5) is two orders of magnitude greater than that which allowed Richard Feynman in [15] to state that "the center of the earth should be a day or two younger than the surface".

REFERENCES

1. Serdyukova, M.A. A Massive Gravitational Field in Flat Spacetime. II. Conservation Laws and Gravitational Variability of the Inertial Mass / M.A. Serdyukova, A.N. Serdyukov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2019. – № 3 (40). – P. 33–39.

2. Time dilation in the light curve of the distant Type Ia Supernova SN 1995K / B. Leibundgut [et al.] // Astrophys. J. Lett. – 1966. – № 466. – L21–L44.

3. Perlmutter, S. Discovery of a Supernova explosion at half the age of the universe / S. Perlmutter // Nature. – 1988. – № 391. – P. 51–54.

4. Timescale stretch parameterization of Type Ia Supernova B-band light curves / G. Goldhaber [et al.] // Astrophys. J. – 2001. – № 558. – P. 359–368.

5. Time dilation in Type Ia Supernova spectra at high redshift / S. Blondin [et al.] // Astrophys. J. – 2008. – Vol. 682. – P. 724–736.

6. Serdyukova, M.A. The Law of Radioactive decay in a cyclic non-expanding universe / M.A. Serdyukova // Topical Issues of Physics and Technology. Materials of the V Republican scientific conference of students, undergraduates and graduate students (Gomel, April 21, 2016). – Part 2. – Gomel: F. Skorina Gomel State University, 2016. – P. 80–83.

7. Nordström, G. Relativitäts prinzip und Gravitation / G. Nordström // Phys. Z. – 1912. – № 13. – S. 1126–1129.

8. Nordström, G. Träge und schwere Masse in der Relativitätsmechanik / G. Nordström // Ann. Phys. (Leipzig). – 1913. – № 40. – S. 856–878.

9. Serdyukov, A.N. Gauge Theory of Scalar gravitational Field / A.N. Serdyukov. – Gomel: Gomel State Universe, 2005. – 257 p.

10. The NUBASE evaluation of nuclear and decay properties / G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, A.H. Wapstra // Nuclear Physics. A. – 2003. – Vol. 729. – P. 3–128.

11. Serdyukova, M.A. A Massive Gravitational Field in Flat Spacetime. I. Gauge Invariance and Field Equations / M.A. Serdyukova, A.N. Serdyukov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2019. – № 2 (39). – P. 45–53.

12. Gamov, G. Expanding Universe and the origin of elements / G. Gamov // Phys. Rev. – 1946. – Vol. 70. – P. 572–573.

13. Alpher, R.A. The origin of the chemical Elements / R.A. Alpher, H. Bethe, G. Gamov // Phys. Rev. – 1948. – Vol. 73. – P. 803–804.

14. Alpher, R.A. A neutron-capture theory of the formation and relative abundance of the elements / R.A. Alpher // Phys. Rev. – 1948. – Vol. 74. P. 1577–1589.

15. Feynman Lectures on Gravitation / R.P. Feynman [et al.]. – Reading, Pennsylvania: Addison-Wesley, 1995. – 232 p.

Поступила в редакцию 03.06.19.

УДК 535.181

РАСЧЁТ ЭФФЕКТИВНОСТИ БИСТАБИЛЬНОГО ТОНКОПЛЁНОЧНОГО ОТРАЖАТЕЛЯ

Е.В. Тимощенко¹, Ю.В. Юревич²

¹Могилёвский государственный университет им. А.А. Кулешова

²Могилёвский государственный университет продовольствия

ESTIMATION OF THE BISTABLE THIN-FILM REFLECTOR EFFICIENCY

E.V. Timoschenko¹, Yu.V. Yurevich²

¹Mogilev State A. Kuleshov University

²Mogilev State University of Food Technologies

Проведена расчётная оценка гистерезисных свойств отражения тонкого слоя на основе плотной резонансной среды на шкале мощности и линейной частотной отстройке внешнего сигнала. Определена роль подобного компактного резонансного отражателя в качестве модулятора добротности резонатора в лазерной схеме.

Ключевые слова: резонансное отражение, плотная резонансная среда, тонкие оптические плёнки, диполь-дипольное взаимодействие, квазирезонансная поляризация.

The analytical evaluation of the hysteresis reflection properties of a thin layer on the basis of a dense resonant medium on the power scale and the linear frequency detuning of the external signal is carried out. The role of such a resonant reflector as a Q-factor (compact modulator) of the resonator in the laser circuit is determined.

Keywords: resonant reflection, thin optical films, dense resonant medium, dipole-dipolar interaction, quasi-resonance polarization.

Введение

Из основных функциональных элементов устройств управления светом, широко востребованных в фотонике, нанооптике, опто- и микроэлектронике, особый интерес привлечён к планарным структурам из тонких плёнок, изготовленным на основе активных сред с нелинейностью в области оптического резонанса. Внедрение резонансных слоёв при высокой плотности образующих их активных центров в структуру схемы оптического устройства может без нарушения его компактности обусловить изменение реакции всей системы на излучение [1]. Свойствами плотных резонансных сред обладают исследуемые ныне полупроводниковые наноструктуры [2]. В этих объектах нелинейный отклик на когерентное излучение особо выражен в спектральной области, соответствующей экситонным переходам [3], [4]. В отражении света тонким слоем активной среды в условиях оптического резонанса может быть существенным дополнительный к френелеву отражению (преломлению) нелинейный компонент. Эту переменную составляющую отклика, выражаемую резонансной поверхностной поляризацией, именуют сверхизлучательной [5] именно ввиду того, что в условиях однородного поля в особо тонком слое высвечивание элементарных излучателей (атомов, ионов, экситонов), естественным образом, происходит сфазированно. Фазировка активных центров, образующих среду, в ходе их

высвечивания и составляет суть когерентного оптического эффекта сверхизлучения. В плотной резонансной среде динамическая роль сверхизлучательного компонента в нелинейном отклике возрастает из-за взаимного влияния ближних полей диполей, вызывающего сдвиг резонансной линии [6]. Существенным оказывается также смещение резонансной частоты из-за влияния поглощения в квазирезонансных переходах (в расчётных оценках его учитывают различием поляризуемости активных центров в основном и возбуждённом состояниях [7]).

В настоящей работе изучена зависимость от материальных параметров бистабильных свойств отражения планарной плёнки плотной резонансной среды с учётом возникающих по мере насыщения поглощения взаимосвязанных нелинейных фазовых эффектов.

1 Расчётные соотношения

В основу модели расчёта резонансного отражения плёнок нередко полагают приближение сверхтонкого слоя [8]. Этому подходу будем в дальнейшем придерживаться: длина волны внешнего и действующего в слое светового поля значительно меньше толщины плёнки, действующее на активные центры поле при этом условии однородно.

Бистабильность представляет собой особый эффект, крайнее выражение нелинейности отклика оптической системы, который проявляется в

возможности двух её стабильных состояний при одном и том же значении светового поля внешнего сигнала. В возникновении бистабильности, кроме нелинейности, нужна положительная обратная связь, поэтому кроме активной среды в схеме необходимо внешнее зеркало. Бистабильность в оптическом слое с резонансным откликом называют внутренней [6], поскольку её наблюдение возможно без зеркала. Обратная связь возникает за счёт действия взаимосвязанных нелинейных эффектов, следствия которых в определении стабильных состояний отражения или пропускания слоя могут усиливать или компенсировать друг друга. С бистабильностью связан оптический гистерезис, область которого на шкале уровня возбуждения обозначена резкими переключениями состояний.

Нелинейная реакция среды на плосковолновое однородное световое поле, выражаемая вероятностными переменными резонансной поляризованности $\rho(t)$ и разности населённостей $n(t)$, описывается квантовомеханическими уравнениями двухуровневой матрицы плотности. Образованные соотношениями для поля и материальными уравнениями согласованная динамическая модель взаимодействия при постоянном уровне возбуждения внешним полем $E_R(t) = E_0$ характеризуется равновесными состояниями. Количество этих состояний определяется нелинейными соотношениями, связывающими стационарные значения переменных с уровнем возбуждения и материальными параметрами.

В работе [9] авторами получен конкретный вид этих соотношений для плотной резонансной среды, в пределах ширины спектральной линии и с учётом смещения частоты резонанса рассчитаны дисперсионные зависимости характеристик равновесных состояний. Расчёты обнаруживают возможность бистабильности равновесных состояний на шкалах зависимости от уровня возбуждения и частотной отстройки от резонанса. Соответственно, в области бистабильности можно ожидать гистерезисное переключение нелинейного пропускания или отражения слоя. В приведенных далее уточнённых расчётах аналогично выводам [7] рассматривается представление комплексной поверхностной поляризованности с учётом обобщённой двухуровневой схемы:

$$P(t) = Nl \left[i\mu\rho(t) - 2\pi \Delta\alpha\varepsilon_0 (1 - n(t))(t) \right]. \quad (1.1)$$

Здесь $E(t)$ – квазистационарная амплитуда напряжённости действующего на активные центры светового поля, μ – средняя величина дипольного момента активных центров, $\Delta\alpha$ – разность их поляризуемостей в основном и возбуждённом состояниях, Nl – плотность центров (l – толщина слоя, которая считается значительно меньшей по отношению к длине волны). Обобщение схемы в форме (1.1) даёт возможность при определении

условий бистабильности равновесных состояний характеризовать взаимодействие эффектов насыщения поглощения и нелинейного сдвига резонансной частоты диполей ω_0 из-за влияния их ближних полей в присутствии дрейфа частоты действующего поля ω в сторону соседних с основным резонансов поглощения.

Аналогично работам [9], [10] формулируются следующие соотношения для нормированных величин уровня возбуждения $e_0 = \mu E_0 \sqrt{T_1 T_2} / \hbar$ (то есть, соответствующих интенсивности насыщения резонансного поглощения) и частотной отстройки $\Delta\omega = (\omega - \omega_0)T_2$, определяющих стационарную разность населённости n_s и амплитудный нелинейный коэффициент отражения слоя $r(n_s)$:

$$\begin{aligned} \frac{1-n_s}{n_s} \left[1 + \beta^2 (1-n_s)^2 \right] &= \frac{e_0^2}{(1 + \kappa n_s)^2 + \Delta^2}, \\ \Delta &= \Delta\omega + \gamma \kappa n_s - \beta(1-n_s), \\ r(n_s) &= r_0 + \frac{2\kappa n_s}{(\eta + 1) \left[1 + \beta^2 (1-n_s)^2 \right]} \times \\ &\times \frac{1 + (1+n_s)\Delta^2 + \kappa n_s}{(1 + \Delta^2 + \kappa n_s)^2 + (\kappa n_s \Delta)^2}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\kappa = \mu^2 \omega T_2 N l / \hbar c \varepsilon_0$ – параметр резонансной нелинейности поглощения приповерхностного слоя, которым также характеризуют его резонансный (в отсутствие насыщения) показатель поглощения; $\beta = 2\pi \Delta\alpha \varepsilon_0 \hbar / \mu^2 T_2$ – параметр резонансной нелинейности рефракции, обусловленной влиянием квазирезонансной поляризации, T_1 и T_2 – времена продольной и поперечной (фазовой) релаксации, γ – нормировочный коэффициент в локальной поправке Лоренца к действующему полю, пропорциональный отношению длины волны внешнего поля и толщины l , r_0 – френелев коэффициент отражения, определяемый η – нерезонансным показателем преломления слоя.

2 Расчёт гистерезисных характеристик резонансного отражения

Вычисления зависимости r от величины нормированной мощности e_0^2 (не имеющей размерности) на основе решений (1.2) удобно проводить параметрическим расчётом – значения вероятностной переменной n_s лежат в пределах (0, 1). На рисунке 2.1 приведены типичные бистабильные кривые зависимости: на фрагменте а) демонстрируется возникновение гистерезисного изгиба по мере изменения параметра κ , на фрагменте б) указано направление гистерезисных скачков («кинков») и обозначены характерные размеры гистерезисной петли. Гистерезис при бистабильной (неоднозначной) зависимости отражения от уровня мощности должен проявляться при циклическом изменении e_0^2 .

Изменение нормированной интенсивности возбуждения при расчёте характеристики $r(e_0^2)$ предполагалось адиабатическим, то есть e_0^2 изменялось настолько медленно, что в каждый момент времени ансамбль диполей, образующих тонкий слой, достигал равновесного (стационарного) состояния.

Расчёты показывают, что точки поворота гистерезисных зависимостей $r(e_0^2)$ и $n_s(e_0^2)$ на шкале уровня возбуждения совпадают. Поэтому положение точек поворота e_{0cr}^2 и e_{0m}^2 (рисунок 2.1, б) определяется элементарным анализом на экстремумы функции $e_0^2(n_s)$, выражаемой явно первым из соотношений (1.2). Может быть образовано соответствующее уравнение относительно n_s , и нетрудно показать, что величины экстремумов e_{0cr}^2 и e_{0m}^2 , а также критическое

значение $r_1 = r(e_{0cr}^2)$ и максимальное значение резонансного отражения $r = r(e_{0m}^2)$, определяются его неотрицательными корнями:

$$n_{s1,2} = \frac{A+B}{2} \pm \sqrt{\frac{(A-B)^2}{4} - B^2},$$

$$A = 0.5 - \frac{\kappa - CD}{\kappa^2 + C^2}, \quad (2.1)$$

$$B = \sqrt{\frac{1 + D^2}{\kappa^2 + C^2 - 2(\kappa - CD)}},$$

где $C = \kappa\gamma + \beta$, $D = \Delta\omega + \beta$.

Выражения (2.1) дают возможность расчётной оценки с применением соотношений (1.2) таких характеристик бистабильного отражения как пороговая мощность его проявления (e_{0cr}^2), относительная величина «кинка» отражения при гистерезисном переключении

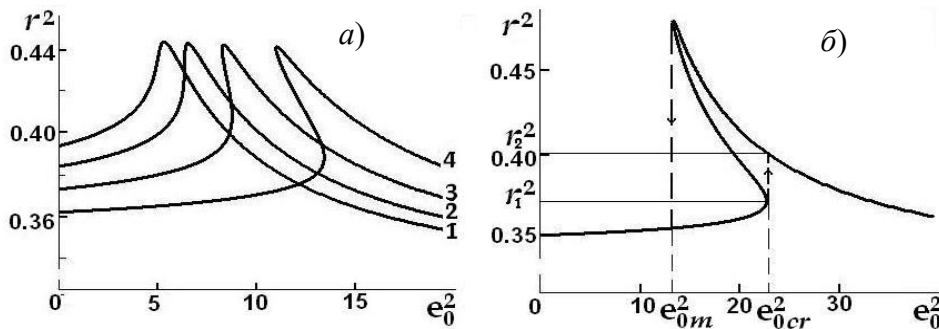


Рисунок 2.1 – Зависимость резонансного отражения от интенсивности (в относительных единицах):
 $\kappa = 1.3$ (кривая 1), 1.5 (2), 1.8 (3), 2.2 (4), $\Delta\omega = -0.5$ (a),
 $\kappa = 2.5$, $\Delta\omega = -1.0$ (б); $\beta = 0.25$, $\gamma = 3.17$

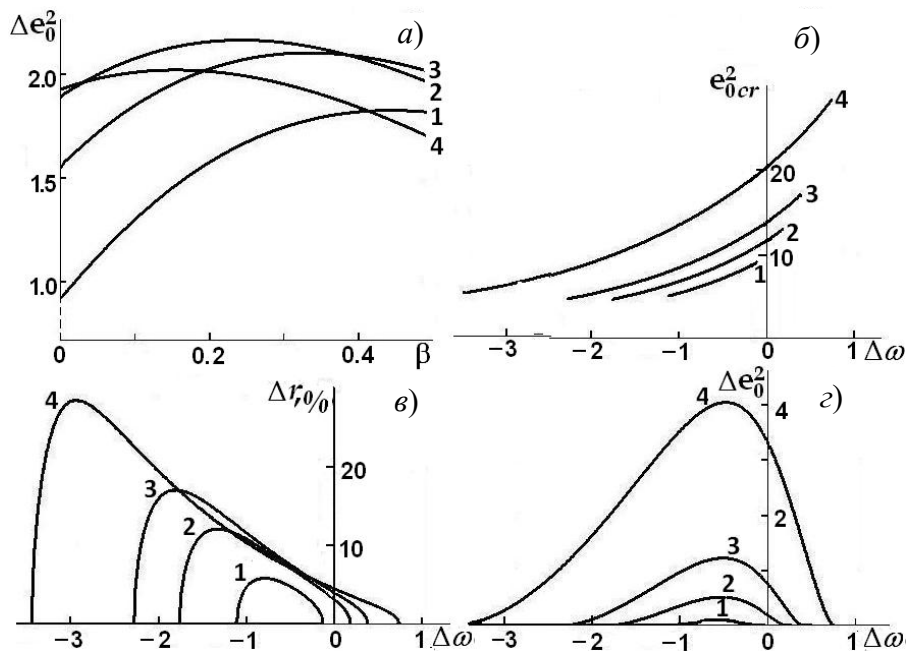


Рисунок 2.2 – Дисперсионные зависимости характеристик гистерезисного отражения тонкого слоя:
 $\kappa = 2.0$, $\Delta\omega = 0$ (кривая 1), -0.25 (2), -0.5 (3), -0.8 (4) (a);
 $\kappa = 1.6$ (1), 1.8 (2), 2.0 (3), 2.5 (4), $\beta = 0.25$ (б – д); $\gamma = 3.17$

$(\Delta r = (r_2 / r_1)^2 - 1)$, а также размер области гистерезиса на шкале мощности ($\Delta \epsilon_0^2 = \epsilon_{0cr}^2 - \epsilon_{0m}^2$). Масштаб явлений примерно соответствует известным из литературы (например, по результатам работ [2]–[4]) параметрам слоёв полупроводниковых квантоворазмерных структур при условии их субмикронной толщины. Этими значениями, в основном, определяется в модельных расчётах диапазон изменения коэффициентов (1.2), (2.1). Значения насыщающей мощности могут иметь порядок не менее 10^3 Вт/см² в диапазоне длин волн $\sim (1.25 \dots 1.30) \cdot 10^{-6}$ м.

Зависимости на рисунке 2.2, а) указывают на значимость эффекта, обусловленного автомодуляционным смещением частоты светового поля, – от его присутствия существенно зависит ширина гистерезиса.

Кривые на рисунке 2.2, б) характеризуют зависимость пороговой мощности от линейной отстройки частоты: проявление гистерезиса имеет более низкий порог по мощности на частотах, близких к центру резонансной линии поглощения, смещённому в длинноволновую область спектра из-за диполь-дипольного взаимодействия. В этой же области, судя по ходу кривых на рисунке 2.2, в), бóльшим оказывается гистерезисный скачок отражения. Гистерезис сильно зависит от показателя поглощения, хотя положение частоты, которой определяется оптимум ширины гистерезисной петли, от этого параметра зависит слабо (рисунок 2.2, з).

3 Резонансный отражатель в схеме обратной связи лазера

Гистерезисное переключение в схеме обратной связи генерирующего устройства способно без применения в его схеме внешних модулирующих элементов перевести лазерную систему в режим автоколебаний. Поэтому важным представляется анализ следствий бистабильности отражателя в качестве пассивного элемента в лазерах, способных излучать в переходных режимах. На начальном этапе свечения динамика когерентного излучения таких лазеров в силу особого сочетания релаксационных параметров среды и технических характеристик устройства определённо обладает осцилляторной структурой.

Приближённый анализ нелинейности, приводящей к бистабильности, для условий резонансного отражения в схеме обратной связи представляется удобным на основе системы кинетических уравнений лазера, аналогичной использованной, например, в [11]. В балансной модели, считающейся классической, рассматривается модель лазера, излучающего в нестационарном режиме, в усреднении поля вынужденного излучения и инверсии по длине активной среды [12]. Лазерная кинетика определяется балансом этих величин, характеризующихся разными временами релаксации. Рассматриваемая ниже

модифицированная динамическая модель характеризуется, однако, тремя степенями свободы: дополнительно учитывается скорость энергообмена поля генерации и активных центров в применяемом в качестве нелинейного отражателя тонком резонансно поглощающем слое (время τ нормировано по времени продольной релаксации основного перехода T_1 в двухуровневой схеме усиления):

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= \frac{1}{\tau_r} \left[y - 1 - \frac{1}{v} \ln \frac{1}{r_0 r(n)} \right] U, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \alpha - y(1 + U), \\ \frac{dn}{d\tau} &= \frac{1-n}{\tau_1} - \frac{n}{1+\beta^2(1-n)^2} \frac{\sigma U}{(1+\kappa n)^2 + \Delta^2}, \\ \Delta &= \Delta\omega + \gamma \kappa n - \beta(1-n), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где U – мощность излучения, нормированная по интенсивности насыщения усиления; y – инверсная заселённость, нормированная по пороговому уровню инверсии v ; n – мгновенное значение разности населённостей в отражающем слое; определяемое насыщением и обратимостью, обусловленной спонтанными процессами, $r(n)$ – эффективный коэффициент отражения, его мгновенные значения определяются соответствующей зависимостью из схемы расчёта (1.2); τ_r – время жизни фотона в резонаторе (все временные и частотные параметры в соотношениях (1.2), используемые в системе (3.1), нормированы по времени T_1); α – уровень (скорость) накачки; σ – отношение сечений перехода в каналах резонансного поглощения и вынужденного излучения.

Физическая ситуация, описываемая нелинейной системой дифференциальных уравнений (3.1), соответствует лазеру с резонатором, одно из зеркал которого представляет собой нелинейный тонкоплёночный отражатель. В отклике его среды на излучение в отличие от работы [11] учтены конечность времени релаксации и обратимость разности населённостей, а также отличие вероятности поглощательного перехода от вероятности вынужденного излучения в канале генерации. Дополнительная модуляция потерь в резонаторе в соответствии с традиционным подходом (согласно приёму, известному, например, из [12]) определена логарифмическим компонентом в правой части уравнения для нормированной мощности. Уровень накачки в ходе генерации поддерживается неизменным.

Представляет интерес расчётная оценка нетривиальных равновесных состояний модели (3.1) в зависимости от уровня накачки. Соответствующие величины определяются из сингулярных пределов системы (3.1). В результате образуется система нелинейных алгебраических уравнений относительно стационарных значений U_s , y_s и n_s :

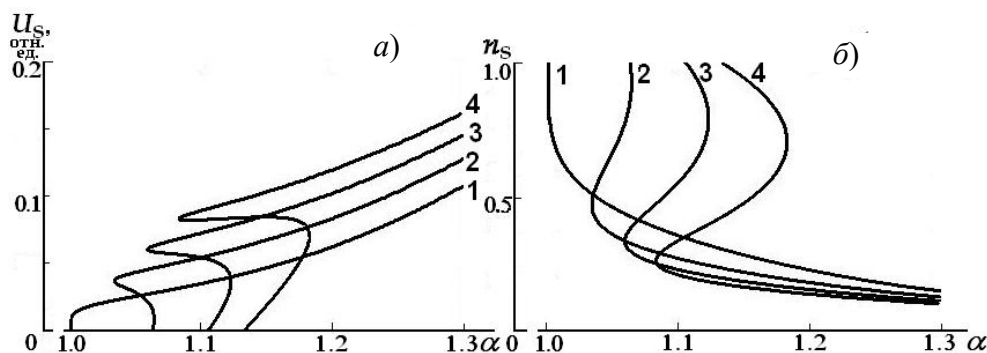


Рисунок 3.1 – Зависимость нормированной стационарной мощности (а, в относительных единицах) и стационарной разности населённости (б) от уровня накачки:

$\kappa = 1.3$ (кривая 1), 1.5 (2), 1.8 (3), 2.2 (4), $\Delta\omega = -1.0$ (б);

$\beta = 0.25$, $\gamma = 3.17$, $\sigma\tau_1 = 25$, $\eta = 3.6$, $\nu = 1.0$

$$\alpha = (1 + y_s)U_s, \quad y_s = 1 + \frac{1}{\nu} \ln \frac{1}{r_0 r(n_s)}, \quad (3.2)$$

$$U_s = \frac{1 - n_s}{\sigma n_s \tau_1} \left[1 + \beta^2 (1 - n_s)^2 \right] \left[(1 + \kappa n_s)^2 + \Delta^2 \right],$$

где стационарные зависимости отражения $r(n_s)$ и фазовой отстройки $\Delta(n_s)$ определяются выражениями схемы (1.2).

Уровень накачки α является постоянным в ходе излучения, но это тот параметр реальной схемы лазера, от которого зависят выходная мощность и временная развёртка генерации, в большинстве устройств его относительно просто можно перенастраивать, изменяя от одного включения до другого. Именно поэтому важен расчёт стационарных характеристик схемы от этого параметра. Кроме того, расчёт $U_s(\alpha)$ с применением соотношений (3.2) представляет в нормированной форме приближённую оценку зависимости стационарной мощности генерации лазера от уровня накачки (в усреднении переменных по длине резонатора).

Вычисление зависимостей $U_s(\alpha)$ и $n_s(\alpha)$ на основе (3.2) также несложно провести параметрически. Как заметно из вариантов рисунка 3.1, а), б), бистабильность (в данном случае характерный S-образный изгиб кривых) проявляется выше определённых пороговых значений ненасыщенного поглощения κ . Зависимости $U_s(\alpha)$ и $n_s(\alpha)$, в сущности, представляют собой сильно деформированный резонанс, ориентированный по вертикали (кривые 2–4). Области гистерезиса, которые можно различить аналогично тому, как это сделано на рисунке 2.1, б), на обеих зависимостях совпадают. Пороговый уровень α , необходимый для выхода системы в генерацию (обязательно $\alpha > 1$), с увеличением показателя поглощения κ должен нарастать. Из расчётов, приведенных на рисунке 3.1, а) следует, что лазер с резонансным отражателем представляет собой бистабильное устройство. В динамическом

аспекте это просто означает, что при определённом уровне накачки возможен скачок стационарной мощности. Резко падает разность населённости (рисунок 3.1, б, кривые 2–4), то есть крайне динамично просветляется отражатель – происходит переключение ветвей характеристик. При нарастании уровня накачки лазерная система находится на нижней ветви до тех пор, пока её стационарная мощность не достигнет критической точки, в которой происходит «бросок» на верхнюю ветвь. Эти обе ветви S-образной характеристики являются устойчивыми. Промежуточная ветвь (с «реверсом хода» зависимости) не проявляется в адиабатическом режиме – она неустойчива и способна внести вклад в динамику энергообмена среды и поля в импульсном режиме. Такой режим, как правило, и реализуется на переходном этапе развития вынужденного излучения в резонаторе. Известно, что динамическая система, обладающая подобным свойством гистерезисного переключения своего состояния при относительно плавном изменении переменных или уровня внешнего возбуждения, характеризуется внутренней неустойчивостью [2], [6], [11]. Оказывается возможным развитие автоколебательного процесса, то есть перехода к регулярным самоподдерживающимся пульсациям без применения особых, усложняющих схему и синхронизированных с накачкой внешних устройств.

Отметим, что точное определение условий достижения таких режимов в рамках качественного анализа поведения системы (3.1) в окрестности особых точек фазового пространства модели, выражаемых (3.2), а также численное моделирование динамики излучения, представляет отдельную задачу, к разрешению которой авторы намерены обратиться позже.

Заключение

Результатами работы показано, что резонансный отражатель на основе тонкого слоя плотной резонансной среды, благодаря своим

нелинейным свойствам, может представлять бистабильный переключатель в оптической динамической системе. Для материальных параметров полупроводниковых квантоворазмерных структур определена область его гистерезисных свойств. В условиях нелинейной фазовой перестройки поля и отклика среды отражателя размер гистерезисной петли в значительной мере определяется начальной частотной отстройкой излучения и центра линии поглощения. Использование подобного отражателя в качестве компактного модулятора добротности лазера (приближённые расчётные оценки проведены для параметров инжекционных лазеров) даёт перспективу достижения практически интересного режима излучения в виде серии регулярных импульсов с относительно невысокой средней мощностью. Характеристиками режима в этом случае можно управлять только уровнем тока накачки, миниатюрность и надёжность устройства при этом, естественно, не нарушаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Танин, Л.В. Резонансные, голографические и спекл-оптические исследования фазовых, диффузных и зеркальных объектов: автореф. дисс. на соиск. уч. степени доктора физ.-мат. наук: 01.04.05 / Минск, БГУ. – 2014. – 64 с.
2. Каплан, А.Е. Поведение локальных полей в нанорешётках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, «магические» числа и оптическая бистабильность / А.Е. Каплан, С.Н. Волков // УФН. – 2009. – Т. 179, вып. 5. – С. 539–547.
3. Rabi oscillations in the excitonic ground-state transition of InGaAs quantum dots / P. Borri [et al.] // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 66. – P. 081306–(1–4).
4. Cavigli, L. Optical bistability and laserlike emission in a semiconductor microcavity / L. Cavigli, M. Gurioli // Phys. Rev. B. – 2005. – Vol. 71, № 3. – P. 035317.
5. Гадомский, О.Н. Эхо-спектроскопия поверхности / О.Н. Гадомский, Р.А. Власов. – Мн.: Наука і тэхніка, 1990. – 216 с.
6. Маликов, Р.Ф. Оптическая бистабильность и гистерезис тонкого слоя резонансных излучателей: взаимное влияние неоднородного уширения линии поглощения и локального поля Лоренца / Р.Ф. Маликов, В.А. Малышев // Опт. и спектр. – 2017. – Т. 122, № 6. – С. 1000–1009.
7. Апанасевич, П.А. Основы теории взаимодействия света с веществом / П.А. Апанасевич. – Мн.: Наука і тэхніка, 1977. – 496 с.
8. Юдсон, В.И. Нелинейная резонансная оптика тонких плёнок: метод обратной задачи / В.И. Юдсон, В.И. Рупасов // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 93. – С. 494–501.
9. Тимощенко, Е.В. Резонансное отражение света тонким слоем плотной нелинейной среды / Е.В. Тимощенко, Ю.В. Юревич, В.А. Юревич // ЖТФ. – 2013. – Т. 83, вып. 2. – С. 103–106.
10. Тимощенко, Е.В. Нелинейная восприимчивость тонкой плёнки плотной резонансной среды / Ю.В. Юревич, Е.В. Тимощенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 27–31.
11. Борисов, В.И. Динамика излучения импульсного лазера с пассивным модулятором на основе тонкой плёнки резонансной среды / В.И. Борисов, Е.В. Тимощенко, Ю.В. Юревич // Вестник Белорусско – Российского университета. – 2014. – Вып. 3 (48). – С. 120–126.
12. Ханин, Я.И. Основы динамики лазеров / Я.И. Ханин – М.: Наука, 1999. – 368 с.

Поступила в редакцию 08.07.19.

УДК 621.396

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ БИФИЛЯРНОЙ СПИРАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

Ц. Чжао¹, Я. Сонг¹, Л. Ван¹, И.В. Семченко², А.Л. Самофалов²

¹Нанкинский университет науки и технологий, Нанкин

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

DESIGN OF A MULTI-LAYER STRUCTURE OF A BIFILAR HELICAL ANTENNA

J. Zhao¹, Y. Song¹, L. Wang¹, I.V. Semchenko², A.L. Samofalov²

¹Nanjing University of Science and Technology, Nanjing

²F. Scorina Gomel State University

Основываясь на опыте проектирования традиционной спиральной антенны и многослойной печатной платы, в данной статье предлагается многослойная бифилярная спиральная антенна на печатной плате, работающая в диапазоне С. Антенна состоит из нескольких симметричных металлических дуг, которые распределены по разным слоям и соединяются сквозными отверстиями. Результаты показывают, что антенна имеет низкопрофильное излучение с круговой поляризацией и лучшее согласование импедансов, обеспечивая новое решение для проектирования структуры многослойной антенны.

Ключевые слова: низкий профиль, бифилярная спиральная антенна, многослойная печатная плата, круговая поляризация.

Based on the design experience of traditional helical antenna and multi-layer PCB structure, a multi-layer PCB bifilar helical antenna that works in C band is proposed in this paper. The antenna is composed of several symmetrical metal arcs, which are distributed on different layers and connected by plated via-holes. Meanwhile, the design and the simulation results are given in the paper. The results show that the antenna has low profile, circularly polarized radiation and better impedance matching, providing a novel solution for the design of multi-layer structure antenna.

Keywords: low profile, bifilar helical antenna, multi-layer PCB, circular polarization.

Introduction

As a common circularly polarized antenna, helical antenna can suppress the multipath reflection, avoid the polarization mismatch, and support a flexible alignment for the receiving and transmitting antennas. It also has high gain and wide bandwidth. So the helical antenna is very needed for airborne and space tracking applications [1].

However, common axial mode helical antenna often requires more than 3 turns of helical coils and pitch angles between 12° and 14°, which leads to the large axial sizes. So it is not suitable for surface-mounted and space-constrained application [2]. To reduce the size of the helical antenna, some scholars have found that a helical antenna with a small number of turns and a small pitch angle is also capable of radiating circularly polarized waves [3]. However, short helical antenna is still of three-dimensional structure and requires high precision in machining.

Multilayer structures are commonly used in the design of metamaterials. Such structures have a low profile, and are easier to be implemented using the printed circuit board technology. Some scholars have combined the printed circuit board technology with helical antennas to make planar helical antennas by using printed strips that are straight-edge connected by plated through holes [4]. The antenna has a simple structure, a low profile and excellent CP performance with end-fire radiation.

According to the theory of helical antennas, the gain of a single-arm helical antenna is 2 dB lower than that of a bifilar helical antenna [5]. In this paper, a new bifilar helix antenna operating at 5.2 GHz based on multi-layer PCB technology is described. The radiation pattern and circular polarization performance are optimized. The proposed antenna emits mainly along the axis of the helix, in contrast to the previously considered bifilar helical antenna [6], [7]. The radiation from the former antenna is directed mainly perpendicular to the axis of the helix. The thickness of the antenna is only 7.2 mm and the design reduces the height and volume compared with traditional helix antenna. Also, the structure is simple and low cost. It can be easily fabricated using the printed circuit board technology.

1 Antenna structure

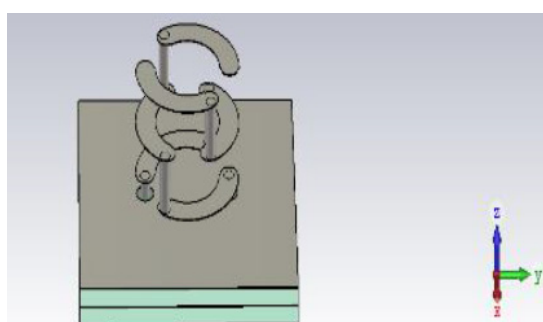
The antenna model was built in Computer Simulation Technology (CST) Microwave Studio and the simulation was completed.

The configuration of the proposed planar multi-layer bifilar helical antenna is shown in Figure 1.1. The dielectric plate of the antenna part is hidden to make the antenna structure more intuitive to see.

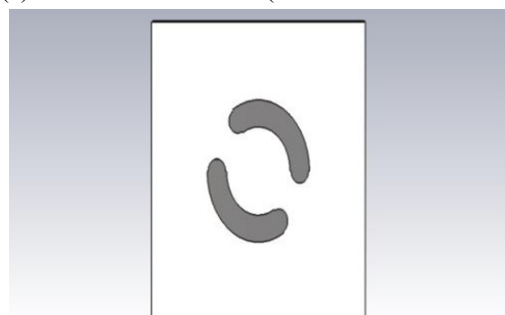
The material used in the system is FR-4, the dielectric constant is 4.4. The substrate size is 20 mm × 20 mm.

In Figure 1.1, the antenna is composed of several symmetrical metal arcs, which are distributed on

different layers and connected by plated via-holes. The circular arcs and columnar through holes are used to generate horizontal and vertical electric fields, respectively. In order to ensure the connection of the upper and lower metal arms, pads are added around the two via holes of the metal arm. The antenna is fed at the bottom using a differential port feed. Separation of the feeding arm and the helical arm of the antenna with the metal plate, not only realizes the differential feeding of the ports required by the helical antenna, but also avoids mutual interference between the helical portion of the antenna and the lower feeding network.



(a) 3D antenna structure (media board is hidden)



(b) Helical arms on each layers.

Figure 1.1 – Antenna model in CST Microwave Studio

Traditional helical antenna usually needs to consider parameters such as the number of turns N , the radius of the helix R , the pitch of the helix S , the cutting angle of the helix α , the height from the ground H , and the width of the line W . Therefore, similar parameters should be considered.

In this design, the radiation of the bifilar helical antenna can be considered as the synthesis of the radiation fields of multiple arcs and the radiation fields of multiple short dipoles.

The short dipole's radiation field has only a vertical component:

$$E_{\theta} = j \frac{60\pi I}{r} \sin \theta \cdot \frac{S}{\lambda}.$$

The radiation field of the arcs has only the horizontal component:

$$E_{\phi} = \frac{120\pi^2 I}{r} \sin \theta \cdot \frac{A}{\lambda^2}.$$

A is the area of the small rings. D is the diameter of the rings $A = \pi D^2 / 4$.

When $|E_{\theta}| = |E_{\phi}|$, a circularly polarized wave is generated. At this time, the following relationship should be satisfied between the parameters of the helical antenna: $\pi D = \sqrt{2S\lambda}$.

If the radiated wave propagates along the helix axis, that is the OZ axis, then this wave is created only by circular arcs. Vertical holes do not contribute to the radiated wave in this case. Then the circular polarization of the radiated wave can be obtained under the condition, which is often used for helical antennas:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}} \approx S + \pi D.$$

This formula means that the wavelength is approximately equal to the length of the helix turn. In this case, the wavelength is calculated taking into account the dielectric constant of the material surrounding the helix.

In this design, the thickness of the PCB board is fixed, so the parameter S is fixed, and the diameter of the arcs can be calculated. A multi-layer structure helical antenna operating in the C-band is designed. The relevant parameters are shown in Table 1.1.

Table 1.1 – The parameters of the antenna

R	Radius of helix	4.262 mm
$H1$	Pitch	3.6 mm
W	Helical arm width	2 mm
$H2$	Height from the ground	1.2 mm
α	helical arm curvature	120°
R_s	radius of pads	0.9 mm
R_{via}	radius of via-holes	0.5 mm
N	Number of helix	1

2 Simulated performance and parameter study

Simulated performance

The S -parameters and radiation directivity obtained from the time-domain analysis using Computer Simulation Technology (CST) Microwave Studio are shown in Figure 2.1. As can be seen, the impedance bandwidth for $|S_{11}| \leq -10$ dB is from 4.9 GHz to 5.5 GHz.

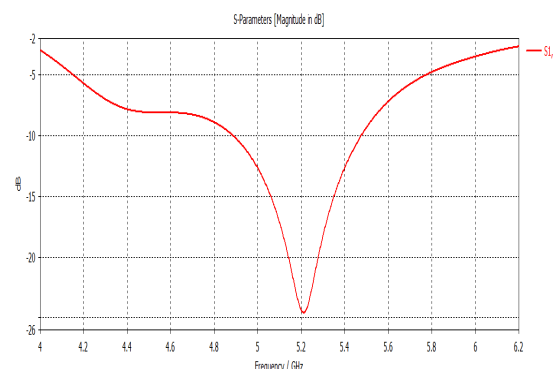
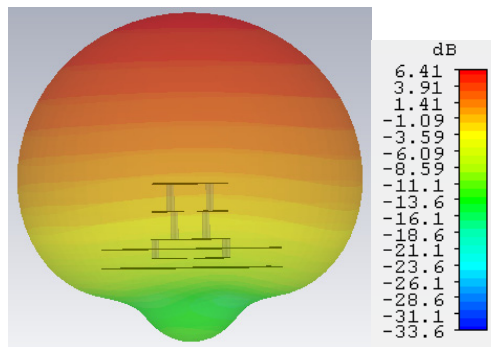
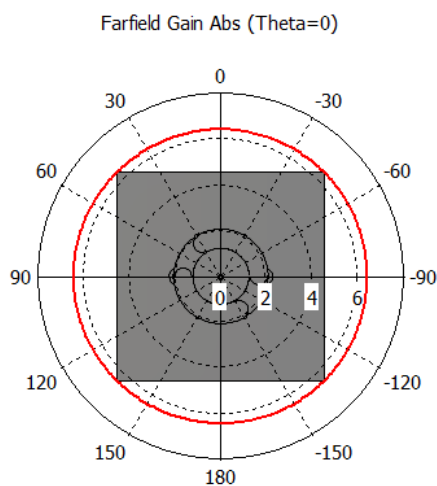


Figure 2.1 – S11-parameter



(a) 3D radiation pattern at 5.2 GHz



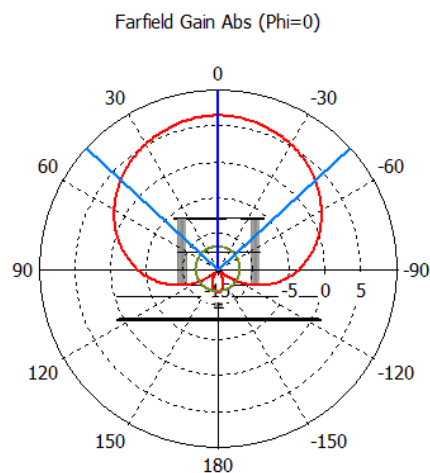
Phi / Degree vs. dB

— farfield (f=5.2) [1]

Frequency = 5.2 GHz

Main lobe magnitude = 6.41 dB

(b) YOZ direction



Theta / Degree vs. dB

— farfield (f=5.2) [1]

Frequency = 5.2 GHz

Main lobe magnitude = 6.41 dB

Main lobe direction = 0.0 deg.

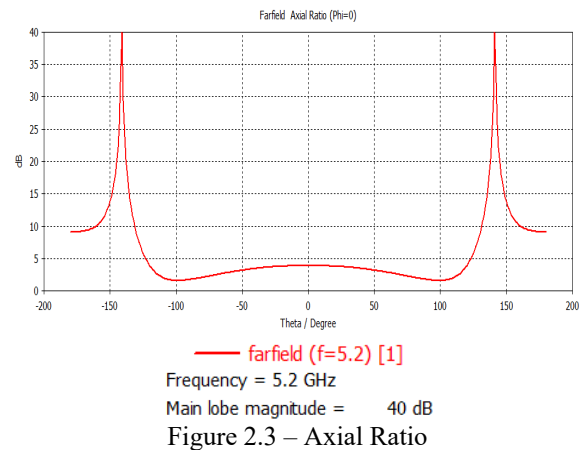
Angular width (3 dB) = 94.6 deg.

Side lobe level = -18.2 dB

(c) XOZ direction

Figure 2.2 – Radiation pattern of the antenna at 5.2 GHz

It can be seen in Figure 2.2 that the antenna has good omnidirectional radiation characteristics at a resonant frequency of 5.2 GHz with a gain of approximately 6.5 dB. As it is shown in Figure 2.3, the axial ratio at 5.2 GHz of the antenna is less than 5 dB. The results are: the designed antenna has good circular polarization and can achieve similar radiation characteristics of the traditional helical antenna.



As is shown in Figure 2.4, the electric currents along the spiral arm and the through hole are almost equal. According to the introduction in Chapter 2, circularly polarized radiation can be realized.

However, the through holes between each layer are relatively small compared with the helical arms, so the electric field in the horizontal direction is stronger than the vertical direction, which makes the axial ratio of the planar helical structure worse than the traditional helical structure.

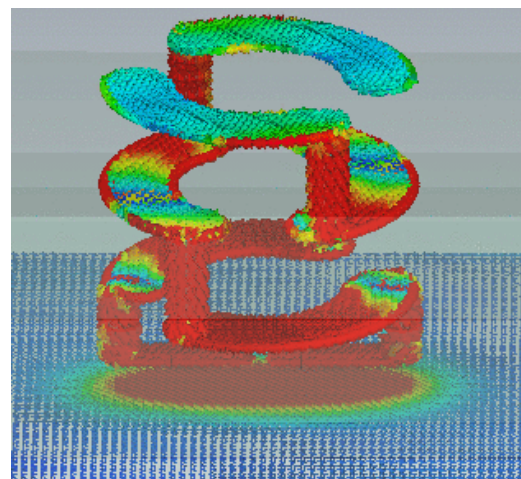


Figure 2.4 – Surface current at 5.2GHz

Parametric study

Because the number of PCB antenna layers should not be too large, the design is similar to a short spiral unit.

The traditional helix antenna has some important parameters, such as: the helical diameter, pitch, pitch angle, number of turns and axial length.

The multi-layer bifilar helix antenna has the similar parameters.

A parametric study is conducted in order to examine the effects of the key parameters on the radiation performance and it helps to optimize the performance of the antenna.

Helical diameter. In the design of helical antenna, the resonant frequency is closely related to the helical diameter. A parametric sweep analysis of the effect of changes in the diameter of the designed helical antenna on the resonant frequency of the entire antenna system is shown in Figure 2.5.

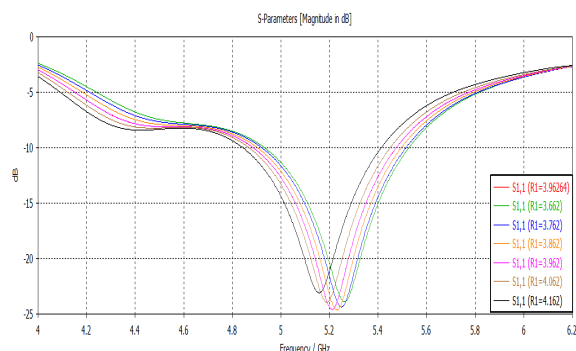


Figure 2.5 – Effect of spiral diameter on resonant frequency

It can be seen from the results that as the diameter of the helical antenna increases, the resonant frequency of the antenna gradually decreases, which is consistent with the theory of the classical helical antenna. This shows that the designed planar helical antenna has similar properties to the traditional helical antenna.

Size of the ground.

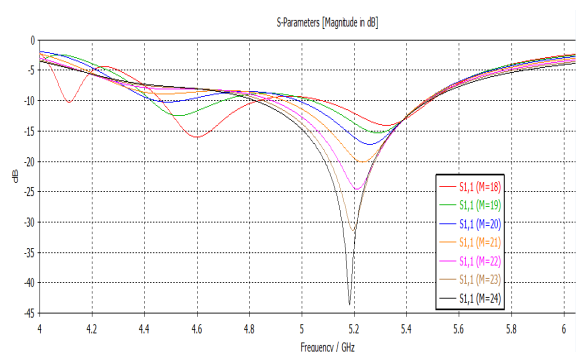


Figure 2.6 – Effect of size of the ground on resonant frequency

It can be seen that as the floor changes, the resonant frequency is almost constant, but the S-parameter increases and the gain of the antenna is reduced to about 2dB.

Conclusion

In this paper, a multi-layer structure helical antenna is realized by symmetrical metal arcs connected by plated through holes. According to the designed antenna structure and the principle of circular polarization, the relevant parameters of the antenna that works in C-band are calculated. To simulate the antenna we use CST Microwave Studio. The simulation results show that the designed antenna can realize circularly polarized radiation from 4.9 GHz to 5.5 GHz, and analyze the influence of key parameters on the performance of the antenna. The results show that the designed antenna has similar characteristics to the traditional helical antenna. In addition, the proposed planar helical antenna is fabricated using an FR4 dielectric substrate, so it has a low profile, high stability and low cost, and can be easily extended to an array configuration. Besides, quadrifilar helix antenna requires the feeding phases to be 0° , 90° , 180° , 270° . So the bifilar helical is easier to implement.

REFERENCES

1. *Wheeler, H.A. A Helical Antenna for Circular Polarization* / H.A. Wheeler // Proceedings of the Ire. – 1947. – Vol. 35, № 12. – P. 1484–1488.
2. *Extremely Low-Profile Helix Radiating a Circularly Polarized Wave* / H. Nakano, H. Takeda, T. Honma [et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1991. – Vol. 39, № 6. – P. 754–757.
3. *Low-profile helical array antenna fed from a radial waveguide* / H. Nakano, H. Takeda, Y. Kitamura [et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1992. – Vol. 40, № 3. – P. 279–284.
4. *Chen, Z. Planar Helical Antenna of Circular Polarization* / Z. Chen, Z. Shen // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2015. – Vol. 63, № 10. – P. 1–1.
5. *Amin, M. Side-fed bifilar helix antenna* / M. Amin, R. Cahill // IEEE Microwave and Wireless Components Letters. – 2005. – Vol. 15, № 12. – P. 913–915.
6. *Experimental studies of the directional antenna based on helical elements* / S.D. Barsukov, A.P. Balmakou, I.V. Semchenko [et al.] // St. Petersburg National Research University of Information Technologies. – 2014. – P. 16–20.
7. *All-directional bifilar helical antenna of circular polarization* / S.D. Barsukov [et al.] // Journal Antennas. Publishing house Radiotekhnika. – 2017. – № 3. – P. 43–48.

Поступила в редакцию 17.06.19.

УДК 517.9

РАЦИОНАЛЬНЫЕ МНЕМОФУНКЦИИ НА ОКРУЖНОСТИ

А.Б. Антоневиц, Т.Г. Шагова

Белорусский государственный университет, Минск

RATIONAL MNEMOFUNCTIONS ON CIRCLE

A.B. Antonevich, T.R. Shahava

Belarusian State University, Minsk

Рассматривается способ вложения пространства распределений на окружности в алгебру мнемифункций, порожденный аналитическим представлением распределений. Выделена подалгебра мнемифункций на окружности, порожденная рациональными мнемифункциями. Приведено полное описание этой подалгебры: выделены образующие, сформулировано в явном виде правило умножения распределений в ней.

Ключевые слова: мнемифункция, аналитическое представление распределения, алгебра рациональных мнемифункций.

The method of embedding of the space of distributions on the circle into the algebra of mnemofunctions was considered in this paper. The subalgebra of mnemofunctions, generated by rational mnemofunctions, was detached. A complete description of this subalgebra was given. Its generators were singled out, the multiplication rule of distributions in this subalgebra was formulated explicitly.

Keywords: mnemofunction, analytical representation of distribution, algebra of rational mnemofunctions.

Введение

Общий подход к решению проблемы умножения обобщенных функций (распределений) заключается в построении по заданному пространству обобщенных функций E дифференциальной алгебры G , которую называют алгеброй типа Коломбо, или алгеброй мнемифункций, и вложения $R: E \rightarrow G$. В работе [1] в качестве модельного примера была построена алгебра $G(\mathbb{S}^1)$ мнемифункций на окружности, так как для этой алгебры удастся получить более наглядные ответы на вопросы о ее структуре, правилах умножения и др. В работе [2] были рассмотрены различные способы вложения пространства периодических обобщенных функций в алгебру мнемифункций и исследован вопрос о дополнительных свойствах таких вложений.

В данной работе, которая является продолжением работ [1], [2], рассматривается способ аппроксимации распределений, порожденный их аналитическим представлением, так как с ряда точек зрения он является наиболее естественным. Получено явное описание правила умножения для элементов подалгебры мнемифункций на окружности, порожденной рациональными функциями.

1 Предварительные сведения

Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, где $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, определяется как сопряженное к пространству $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, т. е. состоит из непрерывных линейных функционалов на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Каждая функция φ из $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k z^k,$$

сходящийся в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, где коэффициенты Фурье находятся по формуле

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(z) z^{-k} |dz| = \langle \varphi, z^{-k} \rangle,$$

причем последовательность φ_k убывает быстрее любой степени $\frac{1}{|k|}$.

Каждая обобщенная функция f разлагается в ряд Фурье

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k, \quad C_k = \langle f, z^{-k} \rangle, \quad (1.1)$$

причем последовательность коэффициентов Фурье C_k возрастает не быстрее некоторой степени $|k|$.

Топология в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ задается счетной системой норм $p_m(\varphi) = \sum_k (1 + |k|)^m |\varphi_k|$.

Алгебра мнемифункций на окружности $G(\mathbb{S}^1)$ строится следующим образом.

Сначала рассматривается множество $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, состоящее из всех семейств $\{f_\varepsilon\}$ бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{S}^1$, зависящих от малого положительного параметра ε , таких, что для каждого $\{f_\varepsilon\}$ существуют числа μ и ν , при которых имеет место оценка

$$p_m(f_\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{\mu m + \nu}}. \quad (1.2)$$

Далее рассматривается подмножество в $\widehat{G}(\mathbb{S}^1)$, состоящее из семейств, быстро стремящихся к нулю:

$$J(\mathbb{S}^1) = \{g_\varepsilon : \forall p \text{ и } m \exists C : p_m(g_\varepsilon) \leq C\varepsilon^p\}.$$

$\widehat{G}(\mathbb{S}^1)$ является дифференциальной алгеброй, а $J(\mathbb{S}^1)$ есть идеал в ней, следовательно, определена фактор-алгебра

$$G(\mathbb{S}^1) = \widehat{G}(\mathbb{S}^1) / J(\mathbb{S}^1),$$

которая называется *алгеброй мнемифункций на окружности*. Элемент алгебры $[f_\varepsilon]$ – класс эквивалентности, содержащий семейство $f_\varepsilon \in \widehat{G}(\mathbb{S}^1)$, – называется мнемифункцией. В алгебре $G(\mathbb{S}^1)$ содержится подалгебра мнемочисел $\mathbb{C}^*$, порожденная постоянными, т.е. семействами $w(\varepsilon)$, не зависящими от z .

Связь мнемифункций с распределениями устанавливается следующим образом. Говорят, что мнемифункция *ассоциирована с распределением* f , если семейство f_ε сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ к f . В общем случае информацию о мнемифункции дает анализ асимптотического поведения величин $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle$, для которых часто в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ существует асимптотическое разложение вида

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \sum_{k=k_0}^{\infty} \langle u_k, \varphi \rangle \varepsilon^k, \quad u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1), \quad (1.3)$$

где равенство (1.3) означает асимптотическую сходимость, т.е. для любого N и любого $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$

$$\sum_{k=k_0}^N \langle u_k, \varphi \rangle \varepsilon^k - \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = o(\varepsilon^N).$$

Способом аппроксимации R называется такой линейный оператор

$$R : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \rightarrow G(\mathbb{S}^1),$$

при котором для каждого распределения f его образ $R(f) = \{f_\varepsilon\}$ ассоциирован с f . Способ аппроксимации порождает вложение пространства распределений в алгебру мнемифункций $G(\mathbb{S}^1)$ и позволяет задать произведение произвольных распределений как элемент алгебры $G(\mathbb{S}^1)$ по формуле

$$f \otimes_R g := R(f)R(g) \in G(\mathbb{S}^1). \quad (1.4)$$

Если произведение $R(f)R(g)$ ассоциировано с некоторым распределением h , то полагаем это распределение h произведением fg , порожденным заданным способом аппроксимации R . В общем случае информацию о поведении произведения $R(f)R(g)$ дает его асимптотическое разложение (1.3).

2 Аналитическое представление распределений

Рассмотрим способ аппроксимации распределений, часто используемый в анализе, основанный на известном аналитическом представлении распределений [3].

На пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определим два оператора

$$(P^+ f)(z) := f^+(z) = \sum_0^{\infty} C_k z^k, \quad (2.1)$$

$$(P^- f)(z) := f^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} C_k z^k. \quad (2.2)$$

Из оценки коэффициентов C_k следует, что для любого $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ ряд (2.1) сходится в круге $|z| < 1$, его сумма $f^+(z)$ является аналитической функцией, а ряд (2.2) сходится при $|z| > 1$, и его сумма $f^-(z)$ является функцией, аналитической при $|z| > 1$ и стремящейся к нулю на бесконечности. Пара функций (f^+, f^-) , удовлетворяющая этим условиям, называется *аналитическим представлением распределения* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$.

Посредством отображения

$$f \rightarrow (P^+ f, P^- f) = (f^+, f^-)$$

аналитическое представление порождает вложение пространства распределений в пространство кусочно аналитических функций $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$, т.е. пар (f^+, f^-) , где функция f^+ является аналитической при $|z| < 1$, а функция f^- стремится к нулю на бесконечности и аналитична при $|z| > 1$. При этом аналитические функции $f^\pm(z)$ таковы, что при их разложении в степенной ряд коэффициенты растут не быстрее некоторой степени k . Это свойство эквивалентно тому, что функции $f^\pm(z)$ имеют рост не выше степенного при $|z| \rightarrow 1$, т.е. имеют место оценки вида

$$|f(z)| \leq \frac{C}{\|z| - 1\|^m}.$$

Аналитическое представление обобщенной функции порождает естественную аппроксимацию распределения f гладкими функциями с помощью значений аналитического представления на окружностях радиуса $1 - \varepsilon$ и радиуса $\frac{1}{1 - \varepsilon}$:

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(f) = f_\varepsilon(z) &= f^+((1 - \varepsilon)z) + f^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (1 - \varepsilon)^{|k|} z^k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поскольку функции $f_\varepsilon(z)$ удовлетворяют оценкам вида (1.2), формула (2.3) задает инвариантное вложение пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру

мнемифункций $G(\mathbb{S}^1)$, и произведение определяется с помощью формулы (1.4).

Опишем произведение мнемифункций $R_a(f)R_a(g)$ более детально. Результат умножения распределений $(f^+, f^-) \times (g^+, g^-)$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} R_a(f)R_a(g) &= \\ &= \left[f^+((1-\varepsilon)z) + f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) \right] \times \\ &\times \left[g^+((1-\varepsilon)z) + g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) \right] = \\ &= f^+((1-\varepsilon)z)g^+((1-\varepsilon)z) + f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right)g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) + \\ &+ f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right)g^+((1-\varepsilon)z) + f^+((1-\varepsilon)z)g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} f((1-\varepsilon)z)g((1-\varepsilon)z) &= R((f, g), 0), \\ f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right)g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) &= R_a((0, f^-g^-)), \end{aligned}$$

и их сумма есть аппроксимирующее семейство для распределения с аналитическим представлением (f^+g^+, f^-g^-) . При фиксированном ε сумма двух последних слагаемых

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon(z) &:= f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right)g^+((1-\varepsilon)z) + \\ &+ f^+((1-\varepsilon)z)g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

есть функция, аналитическая в кольце

$$K_\varepsilon = \{z : 1-\varepsilon < |z| < \frac{1}{1-\varepsilon}\}.$$

Ее аналитическое представление задается с помощью применения операторов $P^\pm$.

Следующая теорема описывает правило умножения распределений в пространстве кусочно аналитических функций.

Теорема 2.1. В пространстве $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ результат умножения $(f^+, f^-) \times (g^+, g^-)$ может быть представлен в виде

$$R_a(f)R_a(g) = (h_\varepsilon^+(z), h_\varepsilon^-(z)), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} h_\varepsilon^+(z) &= R_a((f^+g^+, 0)) + P^+(\gamma_\varepsilon(z)), \\ h_\varepsilon^-(z) &= R_a((0, f^-g^-)) + P^-(\gamma_\varepsilon(z)). \end{aligned}$$

Заметим, что каждая из функций $h_\varepsilon^\pm(z)$ разлагается в ряд Лорана по степеням ε с конечной главной частью, в результате чего при рассматриваемом способе аппроксимации для любого произведения $f_\varepsilon(z)g_\varepsilon(z)$ существует асимптотическое разложение по степеням ε вида (1.3).

Следующее утверждение есть следствие из теоремы 2.1.

Теорема 2.2. В пространстве $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ произведение распределений $f = (f^+, 0)$ и $g = (g^+, 0)$ есть распределение с аналитическим представлением $(f^+g^+, 0)$, т. е. справедливо равенство

$$(f^+, 0) \times (g^+, 0) = (f^+g^+, 0). \quad (2.5)$$

Аналогично, произведение распределений $f = (0, f^-)$ и $g = (0, g^-)$ есть распределение с аналитическим представлением $(0, f^-g^-)$:

$$(0, f^-) \times (0, g^-) = (0, f^-g^-). \quad (2.6)$$

3 Алгебра рациональных мнемифункций на окружности

Распределение f будем называть *рациональным*, если при его аналитическом представлении функции $f^\pm$ являются рациональными. Пусть $\mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$ есть подпространство в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, состоящее из рациональных распределений. Обозначим через $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ наименьшую подалгебру в алгебре мнемифункций на окружности, содержащую мнемифункции вида $R_a(u)$, $u \in \mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$, и все обобщенные числа $\mathbb{C}^*$.

Выделение такой алгебры мотивируется двумя причинами. Во-первых, многие наиболее употребительные распределения являются рациональными, и в приложениях вопрос о придании смысла произведению возникает именно для таких произведений. В частности, распределения в примере Л. Шварца, который иллюстрирует невозможность корректного определения операции умножения распределений, являются рациональными.

Во-вторых, как будет показано ниже, правило умножения в алгебре $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ задается в явном виде, что позволяет получить более конкретные результаты, чем в общем случае по формуле (1.4) или по формуле (2.4).

Введем следующие обозначения. Рациональное распределение с аналитическим представлением $\left(\frac{1}{(z-\xi)^n}, 0\right)$, $|\xi| \geq 1$, будем обозначать $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, а через $\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$ — распределение с аналитическим представлением $\left(0, \frac{1}{(z-\eta)^m}\right)$, $|\eta| \leq 1$.

Будем обозначать z^{n+} аналитическое представление функции z^n , т. е. $(z^n, 0)$. Многочлен $p(z)$ имеет аналитическое представление $(p(z), 0)$ и его образ при вложении R_a есть семейство $p_\varepsilon(z) = p((1-\varepsilon)z)$.

Опишем правило умножения в алгебре $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$. Согласно теореме 2.2, произведение $(f^+, 0) \times (g^+, 0)$ определено для любых функций f^+ и g^+ , аналитических в области $|z| < 1$, и

находится по формуле (2.5). Также для любых функций f^- и g^- , аналитических в области $|z| > 1$, произведение $(0, f^-) \times (0, g^-)$ определено по формуле (2.6).

Поэтому для задания правила умножения в алгебре $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ достаточно найти произведение элементов вида $(f^+, 0) \times (0, g^-)$.

Рассмотрим сначала произведение простейших распределений $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^-}$.

Лемма 3.1. Если $|\xi| \geq 1$, $|\eta| \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z-\xi}, 0 \right) \times \left(0, \frac{1}{z-\eta} \right) = \\ = \left(\frac{C_1(r; \xi; \eta)}{z-\xi}, \frac{C_2(r; \xi; \eta)}{z-\eta} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $C_1(r; \xi; \eta) = \frac{r^2}{\xi - \eta r^2}$, $C_2(r; \xi; \eta) = \frac{1}{\eta r^2 - \xi}$, $r = 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Мнемофункции, соответствующие рассматриваемым распределениям, есть

$$R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) = \frac{1}{rz - \xi}, \quad R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) = \frac{1}{\frac{z}{r} - \eta}.$$

Их произведение есть семейство гладких функций на окружности

$$R_a \left(\frac{1}{(z-\xi)^+} \right) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) = \frac{1}{rz - \xi} \frac{1}{\frac{z}{r} - \eta}. \quad (3.2)$$

Согласно правилу умножения в пространстве кусочно-аналитических функций (теореме 2.1) при каждом ε для функции (3.2) нужно построить аналитическое представление, т. е. применить операторы $P^\pm$. Получаем

$$\frac{1}{rz - \xi} \frac{1}{\frac{z}{r} - \eta} = C_1(r; \xi; \eta) \frac{1}{rz - \xi} + C_2(r; \xi; \eta) \frac{1}{\frac{z}{r} - \eta}, \quad (3.3)$$

где

$$C_1(r; \xi; \eta) = \frac{r^2}{\xi - \eta r^2}; \quad C_2(r; \xi; \eta) = \frac{1}{\eta r^2 - \xi}$$

и коэффициенты связаны соотношением

$$C_1(r; \xi; \eta) = -r^2 C_2(r; \xi; \eta).$$

Правая часть равенства (3.3) есть аппроксимирующее семейство для (3.1), что и требовалось показать. $\square$

Отметим, что основное упрощение для рассмотренных функций заключается в том, что применение операторов $P^\pm$ равносильно разложению произведения конкретных рациональных функций на сумму элементарных дробей, что осуществляется с помощью простых вычислений.

Еще одним показательным примером произведения рациональных распределений является произведение распределений z^+ и $\frac{1}{(z-\eta)^-}$, которое не согласовано с умножением и находится по следующему правилу.

Лемма 3.2. Если $|\eta| \leq 1$, то

$$(z, 0) \times \left(0, \frac{1}{z-\eta} \right) = \left(r^2, \frac{\eta r^2}{z-\eta} \right); \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} (z^n, 0) \times \left(0, \frac{1}{z-\eta} \right) = \\ = \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k r^{2(n-k)} \eta^{n-1-k}, r^{2n} \eta^n \frac{1}{z-\eta} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство. Рассмотрим произведение аппроксимирующих семейств

$$R_a(z^+) R_a \left(\frac{1}{(z-\eta)^-} \right) = rz \frac{1}{\frac{z}{r} - \eta} = r^2 + \frac{\eta r^2}{\frac{z}{r} - \eta}.$$

Последнее равенство здесь соответствует применению операторов $P^\pm$.

При вычислении произведения $(z^n, 0) \times (0, \frac{1}{z-\eta})$ возникают другие выражения. Аппроксимирующее семейство для распределения $(z^n, 0)$ есть $r^n z^n$, поэтому при умножении аппроксимаций получаем семейство гладких функций

$$r^n z^n \times \frac{1}{\frac{z}{r} - \eta},$$

для которых нужно получить аналитическое представление, содержащее положительные и отрицательные компоненты. Здесь искомым результат можно получить с помощью процедуры деления многочленов с остатком:

$$r^n \times \frac{z^n}{\frac{z}{r} - \eta} = p_{n-1}(rz) + M \frac{1}{\frac{z}{r\eta} - 1},$$

где число $M = \eta^n r^{2n}$, а $p_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$ переменной z с коэффициентами, зависящими от r и от η . Эти коэффициенты могут быть найдены непосредственным делением или с помощью метода неопределенных коэффициентов. Наиболее просто требуемое выражение получается с помощью разложения в ряд Фурье. Если

$$\frac{1}{(z-\eta)^-} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \eta^{-k-1} z^k,$$

то

$$r^n z^n \times \frac{1}{\frac{z}{r} - \eta} = \sum_{k=0}^{n-1} (rz)^k r^{2(n-k)} \eta^{n-1-k} + r^{2n} \eta^n \frac{1}{\frac{z}{r\eta} - 1}.$$

Последнее выражение является аппроксимирующим семейством для распределения с аналитическим представлением (3.5). $\square$

Следует отметить, что в силу того, что существует предел правой части в равенстве (3.4) при $r \rightarrow 1$, произведение распределений z^+ и $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ ассоциировано с распределением, у которого аналитическое представление равно

$$\left(1, \frac{\eta}{z-\eta} \right) = 1 + \frac{\eta}{(z-\eta)^-}.$$

Также и произведение распределений z^{n+} и

$\frac{1}{(z-\eta)^-}$ является распределением с аналитическим представлением

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k \eta^{n-1-k}, \frac{\eta^n}{z-\eta} \right).$$

Следующая теорема дает полное описание алгебры рациональных мнемодифункций $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$.

Теорема 3.1. Алгебра рациональных мнемодифункций на окружности $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ состоит из элементов вида

$$\sum_{k=0}^m A_k^+(\varepsilon)(1-\varepsilon)^k z^k + \sum_{k=1}^{n^+} \sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{B_{kj}^+(\varepsilon)}{((1-\varepsilon)z - \xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^-} \sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{B_{kj}^-(\varepsilon)}{(\frac{z}{1-\varepsilon} - \eta_k)^j}, \quad (3.6)$$

где $|\xi_k| \geq 1$, $|\eta_k| \leq 1$, $A_k^+(\varepsilon), B_{kj}^+(\varepsilon), B_{kj}^-(\varepsilon) \in \mathbb{C}^*$. В этой алгебре элементы вида $\frac{1}{(z-\xi)^+}$, $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ и z^+ являются образующими. Закон умножения задается однозначно соотношениями (2.5), (2.6), (3.1), (3.4).

Доказательство. Так как над полем комплексных чисел только многочлен первой степени является неприводимым, то любую рациональную функцию можно представить в виде линейной комбинации элементарных дробей: если

$$Q(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)^{p_i},$$

то

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_0^m A_k z^k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \frac{B_{ij}}{(z - z_i)^j}, A_k, B_{ij} \in \mathbb{C}, z_i \in \mathbb{C}.$$

При аналитическом представлении рационального распределения $f = (f^+, f^-)$ функция f^+ является аналитической при $|z| < 1$, поэтому, если она рациональна, ее разложение на элементарные дроби имеет вид

$$f^+(z) = \sum_0^m A_k^+ z^k + \sum_{k=1}^{n^+} \sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{B_{kj}^+}{(z - \xi_k)^j}, \text{ где } |\xi_k| \geq 1. \quad (3.7)$$

Рациональная функция f^- является аналитической при $|z| > 1$ и стремится к нулю на бесконечности, поэтому ее разложение на элементарные дроби следующее:

$$f^-(z) = \sum_{k=1}^{n^-} \sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{B_{kj}^-}{(z - \eta_k)^j}, \text{ где } |\eta_k| \leq 1. \quad (3.8)$$

Таким образом, умножение аппроксимаций, порожденных аналитическими представлениями рациональных распределений, сводится к вычислению произведений (в указанном выше смысле) слагаемых в приведенных формулах (3.7) и (3.8), т. е. элементарных дробей и функции z^k .

Как было отмечено ранее, произведение положительных распределений определено, и при этом $(f^+, 0) \times (g^+, 0) = (f^+ g^+, 0)$.

Также

$$(0, f^-) \times (0, g^-) = (0, f^- g^-).$$

Поэтому для вычисления произведения рациональных мнемодифункций осталось определить правило, по которому происходит умножение положительных элементов на отрицательные. В рассматриваемом случае рациональных распределений это произведения вида $(f^+, 0) \times (0, g^-)$, где f^+ есть элементарная дробь или функция z^k , а g^- есть элементарная дробь.

Для случая, когда $f^+ = \frac{1}{z-\xi}$, $g^- = \frac{1}{z-\eta}$, такое произведение описано в лемме 3.1 и находится по формуле (3.1). Произведения элементарных дробей других степеней, когда $f^+ = \frac{1}{(z-\xi)^n}$, $g^- = \frac{1}{(z-\eta)^m}$, получаются с помощью рекуррентных соотношений через произведения первых степеней, т. е. с помощью равенства (3.1). Например, при $n = 1$, $m = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-\xi)^+} \frac{1}{(z-\eta)^{2-}} &= \left[\frac{1}{(z-\xi)^+} \frac{1}{(z-\eta)^-} \right] \frac{1}{(z-\eta)^-} = \\ &= \left(\frac{c_1(\varepsilon; \xi; \eta)}{z-\xi}, \frac{c_2(\varepsilon; \xi; \eta)}{z-\eta} \right) \times \left(0, \frac{1}{z-\eta} \right) = \\ &= \left(\frac{c_1^2(\varepsilon; \xi; \eta)}{z-\xi}, \frac{c_1(\varepsilon; \xi; \eta)c_2(\varepsilon; \xi; \eta)}{z-\eta} + \frac{c_2(\varepsilon; \xi; \eta)}{(z-\eta)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

А при $n = 2$, $m = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-\xi)^{2+}} \frac{1}{(z-\eta)^-} &= \\ &= \left(\frac{c_1(\varepsilon; \xi; \eta)}{z-\xi}, \frac{c_2(\varepsilon; \xi; \eta)}{z-\eta} \right) \times \left(\frac{1}{z-\xi}, 0 \right) = \\ &= \left(\frac{c_1(\varepsilon; \xi; \eta)}{(z-\xi)^2} + \frac{c_1(\varepsilon; \xi; \eta)c_2(\varepsilon; \xi; \eta)}{z-\xi}, \frac{c_2^2(\varepsilon; \xi; \eta)}{z-\eta} \right). \end{aligned}$$

Значит, равенство (3.1) задает правило умножения распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, $\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$ в алгебре $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$.

Правило умножения z^+ на $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ описано в

лемме 3.2 и находится через соотношение (3.4). Как было показано ранее, из него получаем формулу умножения на степень z^+ , соотношение (3.5), и формулы для умножения z на степени $\frac{1}{(z-\eta)^-}$, например,

$$\begin{aligned} z^+ \times \frac{1}{(z-\eta)^{2-}} &= \left[z^+ \frac{1}{(z-\eta)^-} \right] \frac{1}{(z-\eta)^-} = \\ &= \left(r^2, \frac{\eta r^2}{z-\eta} \right) \times \left(0, \frac{1}{z-\eta} \right) = \left(0, \frac{\eta r^2}{(z-\eta)^2} + \frac{r^2}{z-\eta} \right). \end{aligned}$$

Произведения других степеней определяются аналогично.

Таким образом, произведение элементов вида (3.6) представляется в таком же виде и, следовательно, множество таких элементов есть

алгебра $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$, а элементы вида $\frac{1}{(z-\xi)^+}$, $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ и z^+ являются образующими в ней. $\square$

4 Анализ некоторых произведений рациональных распределений

Рассмотрим произведение распределений $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ более детально и исследуем поведение произведений соответствующих мнемофункций, в частности, построим первые и вторые члены их асимптотических разложений. Здесь мы используем такие разложения не в слабом смысле, т. е. в пространстве распределений, а в алгебре мнемофункций. В качестве базисных элементов, по которым осуществляется разложение, будем рассматривать мнемофункции вида $R_a(u)$, $u \in \mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$.

I. Проанализируем сначала произведение $\frac{1}{(z-\xi)^+} \times \frac{1}{(z-\eta)^-}$, когда $\xi \neq \eta$ и $|\xi| \geq 1$, $|\eta| \leq 1$.

Если $\xi \neq \eta$, то существует конечный предел коэффициентов $C_1(r; \xi; \eta)$ и $C_2(r; \xi; \eta)$ при $r \rightarrow 1$, т. е. их разложения начинаются с конечного числа, а именно

$$C_1(r; \xi; \eta) = \frac{r^2}{\xi - \eta r^2} = \frac{1}{\xi - \eta} - \frac{2\xi}{(\xi - \eta)^2} \varepsilon + \dots;$$

$$C_2(r; \xi; \eta) = \frac{1}{\eta r^2 - \xi} = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{2\eta}{(\xi - \eta)^2} \varepsilon + \dots$$

Поэтому при условии, что $\xi \neq \eta$, мнемофункция вида (3.2) ассоциирована с распределением u_0 , имеющим аналитическое представление

$$u_0 = \left(\frac{1}{\xi - \eta} \frac{1}{z - \xi}, \frac{1}{\eta - \xi} \frac{1}{z - \eta} \right).$$

А второй член разложения в пространстве мнемофункций имеет вид $\varepsilon R_a(u_1)$, и аналитическое представление u_1 есть

$$u_1 = \left(-\frac{2\xi}{(\xi - \eta)^2} \frac{1}{z - \xi}, \frac{2\eta}{(\xi - \eta)^2} \frac{1}{z - \eta} \right).$$

Обратим внимание на случай, когда $\xi \neq \eta$, но при этом $|\xi| = 1$ и $|\eta| = 1$. Тогда оба распределения f и g имеют сингулярности на окружности, их произведение в смысле распределений не определено, но произведение в смысле мнемофункций ассоциировано с распределением u_0 . Это является подтверждением общепринятого мнения, что если множества точек сингулярности двух распределений не пересекаются, то их произведение можно определить достаточно естественным образом.

II. Качественно другую ситуацию имеем, если $\xi = \eta$, что возможно только, если $|\xi| = 1$ и $|\eta| = 1$. Покажем, что здесь главным членом асимптотического разложения произведения

является дельта-функция с бесконечно большим коэффициентом.

В силу того, что ряд Фурье дельта-функции есть $\delta_\xi = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi^{-k} z^k$, ее аналитическое представление равно

$$\delta_\xi = \left(-\frac{\xi}{z - \xi}, \frac{\xi}{z - \xi} \right).$$

Тогда δ_ξ выражается с помощью распределений $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ и $\frac{1}{(z-\xi)^-}$:

$$\delta_\xi = -\frac{\xi}{(z - \xi)^+} + \frac{\xi}{(z - \xi)^-}.$$

Если $\xi = \eta$, то произведение $\frac{1}{(z-\xi)^+} \times \frac{1}{(z-\xi)^-}$ имеет асимптотическое разложение, в котором главным членом является $-\frac{1}{2\xi^2\varepsilon} \delta_\xi$.

В рассматриваемом случае коэффициенты $c_1(r; \xi) = c_1(\varepsilon; \xi)$ и $c_2(r; \xi) = c_2(\varepsilon; \xi)$ являются бесконечно большими при $r \rightarrow 1$ и имеют следующее разложение по степеням ε :

$$c_1(\varepsilon; \xi) = \frac{(1-\varepsilon)^2}{\xi(1-(1-\varepsilon)^2)} = \frac{1}{2\xi\varepsilon} - \frac{3}{4\xi} + \frac{1}{8\xi}\varepsilon + \frac{3}{16\xi}\varepsilon^2 + \dots;$$

$$c_2(\varepsilon; \xi) = \frac{1}{\xi((1-\varepsilon)^2 - 1)} = -\frac{1}{2\xi\varepsilon} - \frac{1}{4\xi} - \frac{1}{8\xi}\varepsilon - \frac{1}{16\xi}\varepsilon^2 + \dots \quad (4.1)$$

Отсюда получаем асимптотическое разложение для произведения

$$\frac{1}{(z - \xi)^+} \frac{1}{(z - \xi)^-} = c_1(\varepsilon; \xi) \frac{1}{(z - \xi)^+} + c_2(\varepsilon; \xi) \frac{1}{(z - \xi)^-} \sim$$

$$\sim \frac{1}{2\xi\varepsilon} \frac{1}{(z - \xi)^+} - \frac{1}{2\xi\varepsilon} \frac{1}{(z - \xi)^-} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{2\xi^2\varepsilon} \delta_\xi + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (4.2)$$

То есть главным членом асимптотического разложения является дельта-функция с бесконечно большим коэффициентом.

В заключении раздела рассмотрим пример Л. Шварца и выясним, что представляет собой произведение $\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)$, $z-1$ и δ_1 . Напомним, что произведение этих распределений принимает разные значения при разной расстановке скобок, а именно

$$\left\{ \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \times (z-1) \right\} \times \delta_1 = 1 \times \delta_1 = \delta_1,$$

но при этом

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \times \{(z-1) \times \delta_1\} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \times 0 = 0.$$

А при перестановке порядка сомножителей получаем выражение, которое не определено

$$\left\{ \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \times \delta_1 \right\} \times (z-1).$$

Утверждение. При умножении, заданном с помощью аналитического представления, произведение

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \times (z-1) \times \delta_1$$

ассоциировано с $\frac{1}{2}\delta_1$ и первые члены его асимптотического разложения имеют вид

$$\frac{1}{2}\delta_1 - \varepsilon \frac{1}{(z-1)^-} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{(z-1)^{2-}} + o(\varepsilon).$$

Доказательство. Так как разложение δ_1 в ряд Фурье

$$\delta_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^k,$$

то δ_1 можно представить в виде

$$\delta_1 = -\frac{1}{(z-1)^+} + \frac{1}{(z-1)^-}.$$

Аналогично для $\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)$

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} z^k,$$

тогда

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(z-1)^+} + \frac{1}{(z-1)^-} \right).$$

Пусть полиномы вкладываются в алгебру рациональных мнемифункций через аналитическое представление. Тогда

$$z-1 \rightarrow (z-1)^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((1-\varepsilon)z-1) = \lim_{r \rightarrow 1} (rz-1).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^+ \delta_1 &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} - \frac{1}{rz-1} \right) - \\ &- \varepsilon \left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} + \frac{1}{2\left(\frac{z}{r}-1\right)^2} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} + \frac{1}{\left(\frac{z}{r}-1\right)^2} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2}\delta_1 - \varepsilon \frac{1}{(z-1)^-} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{(z-1)^{2-}} + o(\varepsilon). \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. Многочлены можно вложить в алгебру мнемифункций другим способом, поставив с соответствием $p(z)$ стационарное семейство – мнемифункцию $p_\varepsilon(z) = p(z)$. При таком вложении получаем произведение, которое отличается от описанного выше младшими членами:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)(z-1)\delta_1 &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} - \frac{1}{rz-1} \right) - \\ &- \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} + \frac{1}{\left(\frac{z}{r}-1\right)^2} + \frac{1}{rz-1} + \frac{1}{(rz-1)^2} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2}\delta_1 - i\varepsilon \mathcal{P}'\left(\frac{1}{z-1}\right) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

5 Произведения рациональных распределений, ассоциированные с распределениями

В общем случае произведение распределений f и g , порожденное заданным вложением, есть мнемифункция. В литературе особо выделяются пары f и g , произведения которых конечны, т. е. ассоциированы с некоторым распределением u , так как тогда можно считать, что $f \times g = u$. В общем случае вряд ли можно получить явное описание таких пар распределений. Покажем, что для пар рациональных распределений могут быть описаны все случаи, когда их произведение конечно.

Как уже отмечалось, произведение рациональных распределений есть линейная комбинация произведений элементарных рациональных мнемифункций вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, $\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$ и z^{n+} . Согласно полученным выше утверждениям, каждое произведение $R_a(f)R_a(g)$ представляется в виде линейной комбинации элементарных рациональных мнемифункций с коэффициентами, зависящими от ε . При этом, если в соответствующее выражение для произведения входят члены вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}} \times \frac{1}{(z-\xi)^{m-}}$, возникают слагаемые с бесконечно большими коэффициентами, которые не ассоциированы с распределениями. Определим условия, когда произведение рациональных распределений, содержащее такие слагаемые, конечно.

Теорема 5.1. Пусть $f = (f^+, f^-)$, $g = (g^+, g^-)$, где

$$f^\pm = \frac{A_1^\pm}{z-1} + \frac{A_2^\pm}{(z-1)^2}; \quad g^\pm = \frac{B_1^\pm}{z-1} + \frac{B_2^\pm}{(z-1)^2}.$$

Если $f^\pm \neq 0$, то произведение распределений f и g ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для коэффициентов выполнены соотношения

$$B_j^+ = tA_j^+, \quad B_j^- = -tA_j^-, \quad j=1,2. \quad (5.1)$$

Если $f^+ = 0$ ($f^- = 0$), то произведение конечно только, если $g^+ = 0$ ($g^- = 0$).

Доказательство. Пусть $f = (f^+, f^-)$, $g = (g^+, g^-)$.

Распишем произведение fg :

$$\begin{aligned} (f^+ + f^-) \times (g^+ + g^-) &= \\ &= f^+ g^+ + f^- g^- + f^+ g^- + g^+ f^-. \end{aligned}$$

Как было показано ранее, первые два слагаемые ассоциированы с некоторым распределением, а бесконечно большие слагаемые вносят произведения вида $\frac{1}{(z-1)^{n+}} \frac{1}{(z-1)^{m-}}$, поэтому надо рассмотреть только сумму двух последних слагаемых. Имеем

$$f^+ g^- + g^+ f^- = \frac{A_2^+ B_2^- + A_2^- B_2^+}{(z-1)^{2+} (z-1)^{2-}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{A_2^+ B_1^- + A_1^- B_2^+}{(z-1)^{2+} (z-1)^-} + \\
 & + \frac{A_1^+ B_2^- + A_2^- B_1^+}{(z-1)^+ (z-1)^{2-}} + \frac{A_1^+ B_1^- + A_1^- B_1^+}{(z-1)^+ (z-1)^-} = \\
 & = (A_2^+ B_2^- + A_2^- B_2^+) \left(\frac{c_1^2(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}} + \frac{2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^-} + \frac{c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}} \right) + \\
 & \quad + \left[c_2(\varepsilon)(A_2^+ B_1^- + A_1^- B_2^+) + \right. \\
 & \quad \left. + c_1(\varepsilon)(A_1^+ B_2^- + A_2^- B_1^+) \right] \left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-} \right) + \\
 & \quad + (A_1^+ B_1^- + A_1^- B_1^+) \left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-} \right) + \\
 & \quad + (A_2^+ B_1^- + A_1^- B_2^+) \frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}} + (A_1^+ B_2^- + A_2^- B_1^+) \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}}.
 \end{aligned}$$

Так как коэффициенты $c_1(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$ и $c_2(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$, то $\frac{1}{\varepsilon}$ в наибольшей степени внесут в разложение произведения $2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)$ и $2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)$. Так как эти множители стоят при линейно независимых выражениях $\frac{1}{(z-1)^+}$ и $\frac{1}{(z-1)^-}$, то слагаемые, растущие, как $\frac{1}{\varepsilon}$, исчезают только тогда, когда $A_2^+ B_2^- + A_2^- B_2^+ = 0$. Среди оставшихся слагаемых имеем только одно, содержащее $\frac{1}{(z-1)^{2+}}$ с коэффициентом $c_1(\varepsilon)(A_2^+ B_1^- + A_1^- B_2^+)$, следовательно, это слагаемое исчезает только если $A_2^+ B_1^- + A_1^- B_2^+ = 0$. Аналогично получаем, что $A_1^+ B_2^- + A_2^- B_1^+ = 0$. При выполнении этих условий остается одно слагаемое

$$(A_1^+ B_1^- + A_1^- B_1^+) \left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-} \right),$$

для обращения которого в нуль необходимо, чтобы $A_1^+ B_1^- + A_1^- B_1^+ = 0$. Следовательно, для того, чтобы произведение мнемодифференциалов $R_a(f)R_a(g)$ было ассоциировано с распределением, необходимо, чтобы $f^+ g^- + g^+ f^-$ обращалось в нуль. Определим условия, когда это выполняется. Обозначим $x = \frac{1}{(z-1)^+}$, $y = \frac{1}{(z-1)^-}$. Тогда

$$f^+ g^- + g^+ f^- = (A_1^+ x + A_2^+ x^2)(B_1^- y + B_2^- y^2) + (A_1^- y + A_2^- y^2)(B_1^+ x + B_2^+ x^2) = 0. \quad (5.2)$$

Если $f^+ = 0$, то из (5.2) следует, что $g^+ = 0$. Аналогично из $f^- = 0$ следует, что $g^- = 0$. В оставшихся случаях получаем, что

$$\frac{B_1^+ x + B_2^+ x^2}{A_1^+ x + A_2^+ x^2} = -\frac{B_1^- y + B_2^- y^2}{A_1^- y + A_2^- y^2} = t.$$

Следовательно, коэффициенты многочленов пропорциональны, а значит, выполняются соотношения (5.1). Достаточность утверждения теоремы очевидна, так как при выполнении (5.1) $f^+ g^- + g^+ f^-$ обращается в нуль, и значит, асимптотическое разложение произведения не содержит бесконечно больших членов. $\square$

В частном случае, когда коэффициенты при вторых степенях равны нулю, получаем только одно условие $A_1^+ B_1^- + A_1^- B_1^+ = 0$, т. е. это условие равносильно равенству нулю определителя матрицы коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} A_1^+ & -A_1^- \\ B_1^+ & B_1^- \end{vmatrix} = 0. \quad (5.3)$$

В книге [4] приведены только три примера конечных произведений. На окружности аналогами этих примеров будут произведения

$$\begin{aligned}
 & \left(\delta_1 + 2i\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \right) \left(\delta_1 - 2i\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \right), \\
 & \delta_1 \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right), \left(\delta_1 \pm 2\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Все эти произведения удовлетворяют условию (5.3), а значит, являются конечными, т. е. являются распределениями.

Опишем общий случай, когда произведение рациональных распределений является распределением. Ранее было показано, что произведение произвольного рационального распределения и многочлена является распределением, поэтому рассмотрим только распределения, аналитическое представление которых представляет собой правильные рациональные функции. Пусть рациональное распределение f имеет сингулярный носитель $S_f = \{\xi_k, |\xi_k| = 1\}$, а множество $S_g = \{\eta_k, |\eta_k| = 1\}$ есть сингулярный носитель рационального распределения g . Пусть множество $S = S_f \cap S_g = \{z_1, \dots, z_m\}$. Не ограничивая общности, считаем, что кратность n_k одинакова для точек z_k , $1 \leq k \leq m$. Тогда $f = (f^+, f^-)$, где

$$f^+(z) = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^+}{(z-z_k)^j} + \sum_{\xi_k \in S_f \setminus S} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{C_{ij}^+}{(z-\xi_k)^j} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \frac{D_{kj}^+}{(z-v_k)^j}, \text{ где } |v_k| > 1.$$

$$f^-(z) = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^-}{(z-z_k)^j} + \sum_{\xi_k \in S_f \setminus S} \sum_{j=1}^{q_k} \frac{C_{ij}^-}{(z-\xi_k)^j} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \frac{D_{kj}^-}{(z-v_k)^j}, \text{ где } |v_k| < 1.$$

И распределение $g = (g^+, g^-)$, где

$$g^+(z) = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^+}{(z-z_k)^j} +$$

$$+ \sum_{\eta_k \in S_g^+} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\tilde{C}_{ij}^+}{(z - \eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^+} \sum_{j=1}^{l_k^+} \frac{\tilde{D}_{kj}^+}{(z - \mu_k)^j}, \text{ где } |\mu_k| > 1.$$

$$g^-(z) = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^-}{(z - z_k)^j} + \sum_{\eta_k \in S_g^-} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\tilde{C}_{ij}^-}{(z - \eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^-} \sum_{j=1}^{l_k^-} \frac{\tilde{D}_{kj}^-}{(z - \mu_k)^j}, \text{ где } |\mu_k| < 1.$$

Выделим слагаемые, при умножении которых могут появиться бесконечно большие коэффициенты:

$$f_{k,S}^\pm = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^\pm}{(z - z_k)^j}, \quad g_{k,S}^\pm = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^\pm}{(z - z_k)^j}. \quad (5.4)$$

Теорема 5.2. Произведение рациональных мнемодифункций $R_a(f)R_a(g)$ ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для каждого k , $1 \leq k \leq m$, при котором $f_{k,S}^\pm \neq 0$, существует число t_k , что для коэффициентов справедливы соотношения

$$B_{kj}^+ = t_k A_{kj}^+, \quad B_{kj}^- = -t_k A_{kj}^-. \quad (5.5)$$

Доказательство. Как было показано ранее, бесконечно большие мнемодифункции возникают при произведениях вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n^+}} \times \frac{1}{(z-\xi)^{m^-}}$. Поэтому бесконечно большие слагаемые в произведение вносят только выражения

$$\sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^+}{(z - z_k)^j} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^-}{(z - z_k)^j} + \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}^-}{(z - z_k)^j} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^+}{(z - z_k)^j}, \quad z_k \in S. \quad (5.6)$$

Заметим, что произведение мнемодифункций, порожденных (5.6), находится по тому же правилу, что и произведение многочленов

$$p_{n_k}^+(x) = \sum_{j=1}^{n_k} A_{kj}^+ x^j, \quad p_{n_k}^-(y) = \sum_{j=1}^{n_k} A_{kj}^- y^j, \\ q_{n_k}^+(x) = \sum_{j=1}^{n_k} B_{kj}^+ x^j, \quad q_{n_k}^-(y) = \sum_{j=1}^{n_k} B_{kj}^- y^j$$

в выражении

$$p_{n_k}^+(x)q_{n_k}^-(y) + p_{n_k}^-(y)q_{n_k}^+(x).$$

Очевидно, что если выражение (5.6) тождественно равно нулю, то бесконечно больших слагаемых в асимптотическом разложении произведения $R_a(f)R_a(g)$ нет. Обращение в нуль (5.6) равносильно выполнению

$$p_{n_k}^+(x)q_{n_k}^-(y) + p_{n_k}^-(y)q_{n_k}^+(x) = 0. \quad (5.7)$$

После разделения переменных в (5.7) получаем:

$$\frac{q_{n_k}^+(x)}{p_{n_k}^+(x)} = -\frac{q_{n_k}^-(y)}{p_{n_k}^-(y)} = t_k. \quad (5.8)$$

Из (5.8) следует, что

$$q_{n_k}^+(x) = t_k p_{n_k}^+(x), \quad q_{n_k}^-(y) = -t_k p_{n_k}^-(y).$$

Следовательно, коэффициенты многочленов пропорциональны, а значит, выполняются условия (5.5) и выражение (5.6) тождественно равно нулю.

Покажем, что если выражение (5.6) отлично от нуля, то оно содержит бесконечно большие слагаемые. Согласно (3.1), произведение xy имеет вид

$$xy = P_1(x, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) + Q_1(y, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)), \quad (5.9)$$

где $P_1(x, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) = c_1(\varepsilon)x$, а $Q_1(y, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) = c_2(\varepsilon)y$, и коэффициенты $c_1(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon)$ ведут себя как ε^{-1} . Для xy^2 имеем:

$$xy^2 = P_1(x, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) + Q_2(y, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)),$$

$$P_1(x, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) = c_1^2(\varepsilon)x,$$

$$Q_2(y, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) = c_1(\varepsilon)c_2(\varepsilon)y + c_2(\varepsilon)y^2.$$

Получили выражение, линейно независимое от (5.9), каждое слагаемое которого ведет себя как некоторая степень ε^{-1} . Рассмотрим произведение x^2y^2 :

$$x^2y^2 = P_2(x, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) + Q_2(y, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)),$$

$$P_2(x, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) = c_1^2(\varepsilon)x^2 + 2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)x,$$

$$Q_2(y, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) = 2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)y + c_2^2(\varepsilon)y^2.$$

И так далее. Следовательно, повышение степени одночлена приводит к появлению бесконечно больших слагаемых, которые линейно не зависят от предыдущих выражений. Поэтому если мы рассмотрим линейное отображение F пространства многочленов от двух переменных в пространство многочленов от четырех переменных, действующее на одночленах по правилу

$$F(x^n y^m) = P_n(x, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) + Q_m(y, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)),$$

то, исходя из вышесказанного, отображение F является инъективным и его ядро состоит только из нуля.

Применив отображение F к

$$p_{n_k}^+(x)q_{n_k}^-(y) + p_{n_k}^-(y)q_{n_k}^+(x) = \sum_{j,l=1}^{n_k} (A_{kj}^+ B_{kl}^- + A_{kl}^- B_{kj}^+) x^j y^l, \quad (5.10)$$

получим комбинацию линейно независимых многочленов от четырех переменных, где каждое слагаемое ведет себя как некоторая степень ε^{-1} :

$$\sum_{j,l=1}^{n_k} (A_{kj}^+ B_{kl}^- + A_{kl}^- B_{kj}^+) \times$$

$$\times (P_j(x, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon)) + Q_l(y, c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon))).$$

В силу того, что отображение F линейно и инъективно, его образ не содержит степени ε^{-1} тогда и только тогда, когда исходный многочлен (5.10) есть тождественный нуль, т. е. выполняется (5.7). Значит, для того, чтобы мнемодифункция $R_a(f)R_a(g)$ была ассоциирована с некоторым распределением, необходимо и достаточно, чтобы (5.6) тождественно равнялось нулю, а это равносильно выполнению (5.5). $\square$

Заключение

В данной работе исследовалась подалгебра мнемифункций на окружности, порожденная рациональными функциями. Получено явное описание структуры этой подалгебры: показано, что образующими в ней являются элементы вида $\frac{1}{(z-\xi)^+}$, $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ и z^+ , и выявлены соотношения, описывающие правило умножения образующих. Проведен анализ произведений рациональных распределений и описаны все случаи, когда произведение произвольных рациональных распределений является распределением, а не мнемифункцией, как в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневиц, А.Б. Алгебра мнемифункций на окружности / А.Б. Антоневиц, Т.Г. Шагова, Е.В. Шкадинская // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 55–62.
2. Антоневиц, А.Б. Вложение распределений в алгебру мнемифункций на окружности / А.Б. Антоневиц, Т.Г. Шагова // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 52–61.
3. Бремерман, Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
4. Антосик, П. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микунский, Р. Сикорский. – М.: Мир, 1976. – 311 с.

Поступила в редакцию 06.03.19.

О p -СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ON p -SUPERSOLUBILITY OF ONE CLASS FINITE GROUPS

I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina

Belarusian State University of Transport, Gomel

Доказано следующее: конечная группа G p -сверхразрешима тогда и только тогда, когда она имеет нормальную подгруппу N с p -сверхразрешимой фактор-группой G/N такой, что либо N — p' -группа, либо p делит $|N|$, и $|G : N_G(L)|$ является степенью числа p для любой циклической p -подгруппы L из N порядка p или порядка 4 (если $p = 2$ и в N силовская 2-подгруппа является неабелевой).

Ключевые слова: конечная группа, p -нильпотентная группа, p -сверхразрешимая группа.

The following is proved: A finite group G is p -supersoluble if and only if it has a normal subgroup N with p -supersoluble quotient G/N such that either N is p' -group or p divides $|N|$ and $|G : N_G(L)|$ equals to a power of p for any cyclic p -subgroup L of N of order p or order 4 (if $p = 2$ and a Sylow 2-subgroup of N is non-abelian).

Keywords: finite group, p -nilpotent group, p -supersoluble group.

Mathematics Subject Classification (2000): 20D10, 20D15.

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite. A group G is said to be p -supersoluble if every chief factor of G is either cyclic or is a p' -group. There are a large number of criteria supersolubility groups (see [1]). And at the same time p -supersolvable groups remain relatively poorly understood. In this note we prove the following result in this trend.

Theorem. Let G be a group and p a prime. Then G is p -supersoluble if and only if it has a normal subgroup N with p -supersoluble quotient G/N such that either N is p' -group or p divides $|N|$ and $|G : N_G(L)|$ equals to a power of p for any cyclic p -subgroup L of N of order p or order 4 (if $p = 2$ and a Sylow 2-subgroup of N is non-abelian).

Bercovich and Kazarin proved [2, Theorem 1] that if for any cyclic p -subgroup L of G of prime order or order 4, $|G : C_G(L)|$ equals to a power of p , then G is p -nilpotent. From our theorem we obtain the following similar result for the p -supersoluble groups.

Corollary 0.1 Let G be a group and p a prime divisor of $|G|$. If for any cyclic p -subgroup L of G of order p or order 4, $|G : N_G(L)|$ equals to a power of p , then G is p -supersoluble.

Corollary 0.2 (Ito, Gaschütz [3, IV, Theorem 5.7]). If every minimal subgroup of a group G is normal in G , then the commutator subgroup G' of G is 2-closed.

Corollary 0.3 (Buckley [4]). Let G be a group of odd order. If every minimal subgroup of G is normal in G , then G is supersoluble.

All unexplained notations and terminology are standard. The reader is referred to [5] or [6] if necessary.

1 Some lemmas

In order to prove the theorem we need the following lemmas.

Lemma 1.1 Let $L \leq G$ and p be a prime divisor of L . Suppose that L is p -closed and $|G : N_G(L)|$ is a power of p . Then the Sylow p -subgroup of L is contained in $O_p(G)$.

Proof. Let L_p be the Sylow p -subgroup of L , P a Sylow subgroup of G containing L_p . Since L_p is characteristic in L , $N_G(L) \leq N_G(L_p)$. Hence

$$(L_p)^G = (L_p)^{N_G(L_p)^P} = (L_p)^P \leq O_p(G). \quad \square$$

Lemma 1.2 [7, Theorem 2.4]. Let P be a p -group, α a p' -automorphism of P .

(1) If $[\alpha, \Omega_2(P)] = 1$, then $\alpha = 1$.

(2) If $[\alpha, \Omega_1(P)] = 1$ and either p is odd or P is abelian, then $\alpha = 1$.

Proof. We use, following [5], $\mathcal{A}(p-1)$ to denote the formation of all abelian groups of exponent dividing $p-1$. The symbol $Z_u(G)$ denotes the largest normal subgroup of a group G such that every chief factor of G below $Z_u(G)$ is cyclic. $\square$

Lemma 1.3 [8, Lemma 2.2]. Let E be a normal p -subgroup of a group G . If $E \leq Z_u(G)$, then

$$(G/C_G(E))^{\mathcal{A}(p-1)} \leq O_p(G/C_G(E)).$$

Lemma 1.4 Let P be a normal p -subgroup of a group G . Let D be a characteristic subgroup of a p -subgroup P such that every non-trivial p' -automorphism of P induces a non-trivial automorphism of D . Suppose that $D \leq Z_u(G)$. Then $P \leq Z_u(G)$.

Proof. Let $C = C_G(P)$, H/K any chief factor of G below P . Then

$$O_p(G/C_G(H/K)) = 1$$

by [1, Appendix C, Corollary 6.4]. Since $D \leq Z_u(G)$, then $(G/C_G(D))^{A(p-1)}$ is a p -group by Lemma 1.3. Hence $(G/C)^{A(p-1)}$ is a p -group. Thus

$$G/C_G(H/K) \in \mathcal{A}(p-1)$$

and so $|H/K| = p$ by [1, Chapter 1, Theorem 1.4].

Therefore $P \leq Z_u(G)$. $\square$

Lemma 1.5 Let G be a p -group of class at most 2. Suppose that $\exp(G/Z(G))$ divides p .

(1) If $p > 2$, then $\exp(\Sigma(G)) = p$.

(2) If G is a non-abelian 2-group, then $\exp(\Sigma(G)) = p$.

Proof. See page 3 in [2].

Lemma 1.6 Let P be a normal p -subgroup of a group G . Suppose that $|G : N_G(L)|$ equals to a power of p for any cyclic p -subgroup L of P of prime order or order 4 (if P is a non-abelian 2-group). Then $P \leq Z_u(G)$.

Proof. Suppose that this lemma is false and let G be a counterexample with $|G||P|$ minimal. Let $Z = Z_u(G)$. If P is not a non-abelian 2-group we use Ω to denote the subgroup $\Omega_1(P)$. Otherwise, $\Omega = \Omega_2(P)$. Let D be a Thompson critical subgroup of P .

(1) G has a normal subgroup $R \leq P$ such that P/R is a non-cyclic chief factor of G , $R \leq Z$ and $V \leq R$ for any normal subgroup $V \neq P$ of G contained in P .

Let P/R be a chief factor of G . Then the hypothesis holds for (G, R) . Therefore $R \leq Z$ by the choice of (G, P) and so P/R is not cyclic. Now let $V \neq P$ be any normal subgroup of G contained in P . Then $V \leq Z$. If $V \not\leq R$, then from the G -isomorphism

$$P/R = VR/R \cong V/V \cap R$$

we deduce $P \leq Z$, contrary to the choice of (G, P) . Hence $V \leq R$.

(2) $\Omega = P = D$.

Indeed, suppose that $\Omega < P$. Then, in view of (1), $\Omega \leq Z$. Hence $P \leq Z$ by Lemmas 1.3 and 1.4, which contradicts the choice of (G, P) . Hence $\Omega = P$. In view of Theorem 3.11 in [9, Chapter 5] we obtain similarly that $P = D$.

(3) The final contradiction.

Let L/R be any minimal subgroup of $P/R \cap Z(G_p/R)$, where G_p is a Sylow p -subgroup of G . Let $x \in P \setminus R$. Then $\langle x \rangle$ is either prime or 4 by Lemma 1.5. Hence $|G : N_G(\langle x \rangle)|$ is a power of p . Hence $L/R = \langle x \rangle R/R$ is normal in G/R , which contradicts (1). $\square$

Lemma 1.7 Let $L \leq N$ be subgroups of a group G , where N is normal in G . Then $|N : N_N(L)|$ divides $|G : N_G(L)|$.

Proof. This follows from

$$|N : N_N(L)| = |N : N_G(L) \cap N| =$$

$$= |NN_G(L) : N_G(L)|. \quad \square$$

Recall that a formation $\mathfrak{F}$ is a class of groups which is closed under taking homomorphic images and such that each group G has the smallest normal subgroup (denoted by $G^\mathfrak{F}$) whose quotient is in $\mathfrak{F}$. A formation $\mathfrak{F}$ is said to be saturated if $G \in \mathfrak{F}$ for any group G with $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. A group G is said to be a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group if $G \notin \mathfrak{F}$ but $H \in \mathfrak{F}$ for every proper subgroup H of G . In what follows we shall need the following result.

Lemma 1.8 [5, Chapter VI, Theorem 25.4]. Let $\mathfrak{F}$ be a saturated formation. Let G be a minimal non- $\mathfrak{F}$ -group such that $G^\mathfrak{F}$ is soluble.

(a) $P = G^\mathfrak{F}$ is a p -group for some prime p and P is of exponent p or of exponent 4 (if P is a non-abelian 2-group).

(b) $P/\Phi(P)$ is a chief factor of G and

$$(P/\Phi(P)) \times (G/C_G(P/\Phi(P))) \notin \mathfrak{F}.$$

Lemma 1.9 Let p be a prime and G a p -soluble group. Assume that $O_{p'}(G) = 1$. Then the following statements are equivalent.

(i) G is p -supersoluble;

(ii) G is supersoluble;

(iii) $G/O_p(G)$ is an abelian group of exponent dividing $p-1$.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii). Since G is p -supersoluble, for every chief p -factor H/K of G , we have $|H/K| = p$ and so $G/C_G(H/K)$ is an abelian group of exponent dividing $p-1$ (see [1, Chapter 1, Theorem 1.4]. Since $O_{p'}(G) = 1$, the intersection of the centralizers of all chief factors H/K of $|H/K| = p$ is $O_{p',p}(G) = O_p(G)$. Hence G is supersoluble by [1]. By using the same arguments, we also see that (ii) $\Rightarrow$ (iii) and (iii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

2 Proof of Theorem

We have only to prove that if a group G has a normal subgroup N with p -supersoluble quotient such that either N is p' -group or p divides $|N|$ and $|G : N_G(L)|$ equals to a power of p for any cyclic

p -subgroup L of N of order p or order 4 (if $p = 2$ and a Sylow 2-subgroup of N is non-abelian), then G is p -supersoluble. Suppose that this is false and let G be a counterexample with $|G| + |N|$ minimal. Then p divides $|N|$. Let P be Sylow p -subgroup of N .

(1) $O_p(G) = 1$.

Let $D = O_{p'}(G)$ and H/D a cyclic p -subgroup of ND/D of prime order p or order 4. Then in view of Schur-Zassenhaus Theorem, there is a cyclic subgroup H_0 of G such that $|H_0| = |H/D|$ and $H_0D = H$. Since $(|H_0|, |D|) = 1$ and $H_0 \leq ND$ we have $H_0 \leq N$. Hence $|G:N_G(H_0)|$ equals to a power of p by the hypothesis and so $|G/D:N_{G/D}(H/D)|$ equals to a power of p . Therefore the hypothesis holds for $(G/D, ND/D)$. If $D \neq 1$, then G/D is p -supersoluble by the choice of $|G| + |N|$, which implies the p -supersolubility of G . Thus $D = 1$.

(2) N is p -supersoluble.

Suppose that N is not p -supersoluble. Then p divides $|N|$. Moreover, $N = G$, otherwise N is p -supersoluble by Lemma 1.7 and the choice of G .

(a) For any subgroup H of G we have $O_p(H) \leq Z_u(H)$.

By Lemma 1.6, $O_p(G) \leq Z_u(G)$. Let $P = O_p(H)$ and H be a cyclic p -subgroup of H of prime order or order 4 (if $p = 2$ and a Sylow 2-subgroup of N is non-abelian). If P is not a non-abelian 2-group we use Ω to denote the subgroup $\Omega_1(P)$. Otherwise, $\Omega = \Omega_2(P)$. By Lemma 1.1, $H \leq O_p(G)$. Hence

$$\Omega \leq Z_u(G) \cap H \leq Z_u(H)$$

and so $P \leq Z_u(H)$ by Lemmas 1.2 and 1.4.

(b) G is not soluble.

Assume that G is soluble and let H be a minimal non- p -supersoluble subgroup of G . Let $\mathfrak{F}$ be the class of all p -supersoluble groups. Then $\mathfrak{F}$ is a saturated formation by [3, Chapter VI, Theorem 8.6]. Hence by Lemma 1.8, $P = H^{\mathfrak{F}}$ is a p -group and P is of exponent p or of exponent 4 (if P is a non-abelian 2-group). Moreover, $P/\Phi(P)$ is a non-cyclic chief factor of H . But from Claim (a) we deduce that $P \leq Z_u(H)$, so $|P/\Phi(P)| = p$. This contradiction shows that we have (b).

(c) $O^q(G) = G$ for all primes $q \neq p$.

Suppose that for some prime $q \neq p$ we have $O^q(G) \neq G$. The hypothesis is true for $(O^q(G), O^q(G))$ by Lemma 1.7, so $O^q(G)$ is p -supersoluble by the choice of $(G, N) = (G, G)$. Since $O_{p'}(O^q(G))$ a characteristic subgroup of $O^q(G)$, it is normal in G .

Hence in view of (1), $O_{p'}(O^q(G)) = 1$. Therefore $C_G(H/K)$ is supersoluble and $C_G(O^q(G))$ is an abelian group of exponent dividing $p-1$ by Lemma 1.9. Therefore by Claim (a),

$$O_p(O^q(G)) = O_p(G) \leq Z_u(G)$$

and so G is p -supersoluble. This contradiction shows that we have (c).

(d) $O_p(G) \leq Z_\infty(G)$.

In view of Lemma 1.1, $O_p(G) \neq 1$. Let H/K be any chief factor of G below $O_p(G)$. By Claim (a), $|H/K| = p$. Hence $G/C_G(H/K)$ a cyclic group of exponent dividing $p-1$. Suppose that $C_G(H/K) \neq G$. Then for some prime $q \neq p$ we have $O^q(G) \neq G$, which contradicts (c). Hence $C_G(H/K) = G$ for each chief factor H/K of G below $O_p(G)$.

The final contradiction for (2).

Let H be a minimal non- p -nilpotent subgroup of G . Then, by [3, Chapter IV, Theorem 5.4], $H = P \rtimes Q$ is a Schmidt subgroup of G , where P is a Sylow p -subgroup of H and Q is a Sylow q -subgroup of H for some prime $q \neq p$. Moreover, P is of exponent p or of exponent 4 (if P is a non-abelian 2-group). By Claim (a), $P \leq Z_u(H)$, so $|P| = p$. But then by Lemma 1.1 and (d),

$$P \leq Z_\infty(G) \cap H \leq Z_\infty(H),$$

so H is nilpotent. This contradiction completes the proof of (2).

(3) $O_p(N)$ is a Sylow p -subgroup of N and $O_p(N) \leq Z_u(G)$.

By (1), $O_p(N) = 1$, so N is supersoluble and $O_p(N)$ is a Sylow p -subgroup of N by Lemma 1.9. On the other hand, $O_p(N)$ is characteristic in N and hence it is normal in G . Finally, $O_p(N) \leq Z_u(G)$ by Lemma 1.6.

Final contradiction.

Every chief factor of G below of N either is cyclic or is a p' -group by Claim (3). Hence G is p -supersoluble since G/N is p -super-soluble by hypothesis, contrary to the choice of G . $\square$

REFERENCES

1. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Polygonal Publishing House, 1982. – 231 p.
2. Bercovich, Ya.G. Indices of elements and normal structure of finite groups / Ya.G. Bercovich, L.S. Kazarin // J. Algebra. – 2005. – Vol. 283, № 1. – P. 564–583.
3. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer – Verlag, 1967. – 808 p.

-
4. *Buckley, J.* Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // *Math. Z.* – 1970. – Vol. 15. – P. 15–17.
5. *Shemetkov, L.A.* Formations of algebraic systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow: Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1989. – 257 p.
6. *Doerk, K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 901 p.
7. *Gagen, T.M.* Topics in Finite Groups / T.M. Gagen. – Cambridge University Press, 1976. – 85 p.
8. *Skiba, A.N.* A characterization of the hypercyclically embedded subgroups of finite groups / A.N. Skiba // *Journal of Pure and Applied Algebra.* – 2011. – Vol. 215, № 3. – P. 257–261.
9. *Gorenstein, D.* Finite Groups / D. Gorenstein. – New York – Evanston – London: Harper & Row Publishers, 1968. – 519 p.

Поступила в редакцию 12.04.19.

УДК 517.9+537.86

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ОТРАЖЕНИЕМ ОТ НАГРУЗКИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.И. Кулыба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

RESEARCH OF THE VAN DER POL OSCILLATOR WITH DELAYED REFLECTION FROM LOAD AT VARIOUS TYPES OF RANDOM EFFECTS

S.P. Zhogal, S.I. Zhogal, A.I. Kulyba

F. Scorina Gomel State University

Исследованы одночастотные колебания в автоколебательной системе ван дер Поля с запаздываниями в цепи обратной связи и от отраженной нагрузки при одновременных аддитивных и мультипликативных случайных воздействиях.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, одночастотные колебания, запаздывание, осциллятор ван дер Поля, аддитивные случайные воздействия, мультипликативные случайные воздействия.

Single-frequency oscillations in a van der Pol self-oscillating system with delays in the feedback circuit and from the reflected load under simultaneous additive and multiplicative random influences are investigated.

Keywords: stochastic differential equations, single-frequency oscillations, delay, van der Pol oscillator, additive random effects, multiplicative random effects.

Введение

Исследование систем с запаздыванием является актуальной задачей и предметом исследований многих научных работ [1]–[7]. Такие системы могут служить математическими моделями реальных объектов и явлений механики, оптики, радиофизики, кибернетики.

Актуальной является задача исследования случайных колебаний в подобных системах при наличии силовых (аддитивных) и параметрических (мультипликативных) случайных воздействий [7], [8].

1 Постановка задачи

Исследуем флуктуации колебаний в автогенераторе ван дер Поля с учетом как запаздывания в цепи обратной связи генератора, так и запаздывания отраженного сигнала от удаленной нагрузки. В качестве математической модели такой автоколебательной системы можно рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \\ = \varepsilon \alpha \left[1 - \beta x^2(t) \right] \frac{dx(t - \tau_1)}{dt} + kx(t - \tau_2) + (1.1) \\ + \sqrt{\varepsilon} \left[C_1 \frac{dw_1(t)}{dt} + C_2 x(t - \tau_2) \frac{dw_2(t)}{dt} \right], \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, k, \omega_0, C_1, C_2, \tau_1, \tau_2$ – положительные постоянные, ε – малый положительный параметр, $w_1(t), w_2(t)$ – стохастически независимые винеровские процессы единичной интенсивности.

Здесь ω_0 – собственная частота колебаний системы, k – коэффициент отражения сигнала от нагрузки, τ_1 – запаздывание обратной связи, τ_2 – запаздывание отражения от удаленной нагрузки. Отметим, что (1.1) может служить простейшей математической моделью доплеровского автодина [2]. Исследуем случай одночастотных стохастических колебаний в системе (1.1).

2 Вывод условий устойчивости колебаний

Применяя к (1.1) метод усреднения в сочетании с аппаратом уравнений Колмогорова – Фоккера – Планка [7], [8], будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} x(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \\ \frac{dx(t)}{dt} = y(t) = -\omega_0 a(t) \sin[\omega_0 t + \theta(t)], \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $a(t), \theta(t)$ – медленно меняющиеся случайные функции.

Выражая $a(t), \theta(t)$ через $x(t), y(t)$, получаем

$$\begin{aligned} a(t) = \left[x^2(t) + \frac{1}{\omega_0^2} y^2(t) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \theta(t) = -\omega_0 t - \arctg \frac{y(t)}{\omega_0 x(t)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Применяя к выражениям (2.1) формулу Ито дифференцирования сложной случайной функции [7], усредняя нефлуктуационные члены в полученных стохастических дифференциальных

уравнениях и опуская запаздывания у медленно меняющихся переменных, получаем

$$\begin{aligned} da = & \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon \alpha a \cos(\omega_0 \tau_1) - \frac{1}{8} \varepsilon \alpha \beta a^3 \cos(\omega_0 \tau_1) - \right. \\ & - \frac{k}{2\omega_0} a \sin(\omega_0 \tau_2) + \frac{1}{4\omega_0^2 a} \left(\varepsilon C_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon C_2^2 a^2 \right) + \\ & + \frac{1}{16\omega_0^2} \varepsilon C_2^2 a \cos(2\omega_0 \tau_2) \left. \right\} dt - \\ & - \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\varepsilon} C_1 \sin(\omega_0 t + \theta) dw_1 - \\ & - \frac{1}{2\omega_0} \sqrt{\varepsilon} C_2 a_{\tau_2} \times [\sin(\omega_0 \tau_2 + \theta - \theta_{\tau_2}) + \\ & + \sin(2\omega_0 t - \omega_0 \tau_2 + \theta + \theta_{\tau_2})] dw_2, \\ d\theta = & \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon \alpha \sin(\omega_0 \tau_1) + \frac{3}{8} \varepsilon \alpha \beta a^2 \sin(\omega_0 \tau_1) - \right. \\ & - \frac{k}{2\omega_0} \cos(\omega_0 \tau_2) - \frac{1}{8\omega_0^2} \varepsilon C_2^2 \sin(2\omega_0 \tau_2) \left. \right\} dt - \\ & - \frac{1}{\omega_0 a} \sqrt{\varepsilon} C_1 \cos(\omega_0 t + \theta) dw_1 - \\ & - \frac{1}{2\omega_0 a} \sqrt{\varepsilon} C_2 a_{\tau_2} [\cos(\omega_0 \tau_2 + \theta - \theta_{\tau_2}) + \\ & + \cos(2\omega_0 t - \omega_0 \tau_2 + \theta + \theta_{\tau_2})] dw_2, \end{aligned}$$

где $a_{\tau_i} = a(t - \tau_i)$, $\theta_{\tau_i} = \theta(t - \tau_i)$, $i = 1, 2$.

Полученная система описывает двумерный марковский процесс, для которого можно построить уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка (КФП), в котором, согласно [7], проведем обычное усреднение. Полученное полностью усредненное уравнение КФП для системы (1.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(t, a, \theta) = & - \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \left[\frac{1}{8} \varepsilon \alpha a \cos(\omega_0 \tau_1) (4 - \beta a^2) - \right. \right. \\ & - \frac{k}{2\omega_0} a \sin(\omega_0 \tau_2) + \frac{1}{4\omega_0^2 a} \varepsilon C_1^2 + \frac{1}{8\omega_0^2} \varepsilon C_2^2 a + \\ & + \frac{1}{16\omega_0^2} \varepsilon C_2^2 a \cos(2\omega_0 \tau_2) \left. \right] p(t, a, \theta) \left. \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left[\frac{1}{2} \varepsilon \alpha \sin(\omega_0 \tau_1) - \frac{3}{8} \varepsilon \alpha \beta a^2 \sin(\omega_0 \tau_1) + \right. \right. \\ & + \frac{k}{2\omega_0} \cos(\omega_0 \tau_2) + \\ & + \frac{1}{8\omega_0^2} \varepsilon C_2^2 \sin(2\omega_0 \tau_2) \left. \right] p(t, a, \theta) \left. \right\} + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left\{ \left[\frac{1}{2\omega_0^2} C_1^2 + \frac{1}{4\omega_0^2} \times \right. \right. \\ & \times C_2^2 a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 \tau_2) \right) \left. \right] p(t, a, \theta) \left. \right\} + \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} \left\{ \frac{1}{8\omega_0^2} C_2^2 a \sin(2\omega_0 \tau_2) p(t, a, \theta) \right\} + \\ + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left\{ \left[\frac{1}{2\omega_0^2 a^2} C_1^2 + \right. \right. \\ + \frac{1}{4\omega_0^2} C_2^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 \tau_2) \right) \left. \right] p(t, a, \theta) \left. \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку в уравнении (2.2) коэффициенты не зависят от $\theta(t)$, можно составить уравнение КФП для плотности распределения амплитуды колебаний $a(t)$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(t, a) = & - \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \left[\frac{1}{8} \varepsilon \alpha a \cos(\omega_0 \tau_1) (4 - \beta a^2) - \right. \right. \\ & - \frac{k}{2\omega_0} a \sin(\omega_0 \tau_2) + \frac{1}{4\omega_0^2 a} \varepsilon C_1^2 + \frac{1}{8\omega_0^2} \varepsilon C_2^2 a + \\ & + \frac{1}{16\omega_0^2} \varepsilon C_2^2 a \cos(2\omega_0 \tau_2) \left. \right] p(t, a) \left. \right\} + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left\{ \left[\frac{1}{2\omega_0^2} C_1^2 + \right. \right. \\ & + \frac{1}{4\omega_0^2} C_2^2 a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 \tau_2) \right) \left. \right] p(t, a) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Исходя из уравнения (2.3), для стационарной плотности распределения амплитуды колебаний, используя формулу [9]

$$p_{cm}(a) = \frac{C}{K_{11}(a)} \exp \left\{ 2 \int \frac{K_1(a)}{K_{11}(a)} da \right\},$$

где

$$\begin{aligned} K_1(a) = & \frac{1}{8} \varepsilon \alpha a \cos(\omega_0 \tau_1) (4 - \beta a^2) - \\ & - \frac{k}{2\varepsilon \omega_0} a \sin(\omega_0 \tau_2) + \frac{1}{4\omega_0^2 a} C_1^2 + \\ & + \frac{1}{8\omega_0^2} C_2^2 a + \frac{1}{16\omega_0^2} C_2^2 a \cos(2\omega_0 \tau_2), \\ K_{11}(a) = & \frac{1}{2\omega_0^2} C_1^2 + \frac{1}{4\omega_0^2} C_2^2 a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 \tau_2) \right), \end{aligned}$$

C – постоянная нормировки, определяемая из равенства

$$\int_0^\infty p_{cm}(a) da = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} p_{cm}(a) = & \frac{8\omega_0^2 C a}{C_2^2 (2 - \cos(2\omega_0 \tau_2))} \times \\ & \times \exp \left\{ - \frac{\omega_0^2 \alpha \beta \cos(\omega_0 \tau_1)}{C_2^2 (2 - \cos(2\omega_0 \tau_2))} a^2 \right\} \times \\ & \times \left[\frac{4C_1^2}{C_2^2 (2 - \cos(2\omega_0 \tau_2))} + a^2 \right]^{z(C_1, C_2, \tau_1, \tau_2)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$z(C_1, C_2, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{C_2^2 (2 - \cos(2\omega_0 \tau_2))} \times \\ \times \left[4\omega_0 \left(\omega_0 \alpha \cos(\omega_0 \tau_1) - \frac{k}{\varepsilon} \sin(\omega_0 \tau_2) \right) - \right. \\ \left. - 2C_2^2 (1 - \cos(2\omega_0 \tau_2)) \right] + \\ + \frac{4C_1^2 \omega_0^2 \alpha \beta \cos(\omega_0 \tau_1)}{C_2^4 (2 - \cos(2\omega_0 \tau_2))^2}.$$

Анализируя выражение (2.4), получаем, что наиболее вероятными в системе (1.1) будут колебания с амплитудой

$$a^2 = \left[\frac{2}{\beta} - \frac{2k \sin(\omega_0 \tau_2)}{\varepsilon \omega_0 \alpha \beta \cos(\omega_0 \tau_1)} \right] - \\ - \frac{C_2^2 (2 - 3 \cos(2\omega_0 \tau_2))}{4\omega_0^2 \alpha \beta \cos(\omega_0 \tau_1)} + \\ + \left\{ \left[\left(\frac{2}{\beta} - \frac{2k \sin(\omega_0 \tau_2)}{\varepsilon \omega_0 \alpha \beta \cos(\omega_0 \tau_1)} \right) - \frac{C_2^2 (2 - 3 \cos(2\omega_0 \tau_2))}{4\omega_0^2 \alpha \beta \cos(\omega_0 \tau_1)} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{2C_1^2}{\omega_0^2 \alpha \beta \cos(\omega_0 \tau_1)} \right\}^{1/2}. \quad (2.5)$$

3 Анализ полученных результатов

Из анализа полученного для a^2 соотношения (2.5) получаем, что при $C_1 \equiv C_2 \equiv 0$ одночастотные колебания, возникающие в системе (1.1), соответствуют колебаниям в детерминированном случае, причем устойчивыми они будут лишь при выполнении условия

$$\frac{k \sin(\omega_0 \tau_2)}{\varepsilon \omega_0 \alpha \cos(\omega_0 \tau_1)} < 1, \quad (3.1)$$

т.е. при достаточно большой величине частоты ω_0 и параметра α , а также при малой величине параметра k возникающие в системе колебания будут устойчивыми. Рассматривая запаздывания τ_1 и τ_2 такими, что

$$0 \leq \omega_0 \tau_i < \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2$$

(что вполне соответствует условиям работы реальных систем), получаем, что аддитивные шумы приводят к возрастанию амплитуды колебаний, а случайные возмущения сигнала, отраженного от удаленной нагрузки, влияют на амплитуду колебаний следующим образом:

при $\cos(2\omega_0 \tau_2) > 2/3$ увеличивают амплитуду колебаний, при $\cos(2\omega_0 \tau_2) = 2/3$ не влияют на величину амплитуды колебаний, при

$$0 < \cos(2\omega_0 \tau_2) < 2/3$$

уменьшают амплитуду колебаний.

Следует также отметить, что, как вытекает из анализа соотношения (2.5), чем выше частота

колебаний ω_0 , тем меньше сказывается влияние шумов на работу системы. В работе [4], в которой исследуется автодинная система без учета шумов, показано, что с ростом коэффициента отражения k нарушается периодичность процессов в автодине. Полученное нами условие (3.1) устойчивости колебаний вполне согласуется с этим выводом, поскольку из него следует, что при достаточно больших значениях k одночастотные устойчивые колебания в системе (1.1) будут отсутствовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Time delay systems: theory, numerics, applications and experiments* / Eds T. Insperger, T. Earsal, G. Orosz. – Cham, Switzerland: Springer, 2017. – 362 p.
2. *Landa, P.S. Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems* / P.S. Landa. – Dordrecht: Springer, 2013. – 500 p.
3. Жогаль, С.П. О существовании и единственности решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–54.
4. Балакин, М.И. Мультистабильность и сложные колебательные режимы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки / М.И. Балакин, Н.М. Рыскин // Письма в ЖТФ. – 2019. – Т. 45, вып. 6. – С. 33–35.
5. Жогаль, С.П. О непрерывной в среднем квадратическом зависимости от начальных данных решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–55.
6. Коржик, Р.И. Влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осциллятора ван дер Поля / Р.И. Коржик, С.П. Жогаль // Известия гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 206–210.
7. Рубаник, В.П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. – Мн.: Изд-во «Университетское», 1985. – 143 с.
8. Ланда, П.С. Возбуждение хаотических и стохастических колебаний в различных системах / П.С. Ланда // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2010. – Т. 18, № 1. – С. 3–10.
9. Стратонович, Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р.Л. Стратонович. – М.: Сов. радио, 1961. – 558 с.

Поступила в редакцию 18.02.19.

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ σ -СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

С.Ф. Каморников¹, О.Л. Шеметкова²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва

ON PERMUTABILITY OF σ -SUBNORMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUP

S.F. Kamornikov¹, O.L. Shemetkova²

¹F. Scorina Gomel State University

²Plekhanov Russian University of Economics, Moscow

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. В работе исследуется проблема перестановочности σ -субнормальных подгрупп в конечной группе.

Ключевые слова: конечная группа, σ -группа, σ -субнормальная подгруппа, формация, корадикал.

Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be some partition of the set of all primes. In this paper the problem of permutability of σ -subnormal subgroups of finite group is established.

Keywords: finite group, σ -group, σ -subnormal subgroup, formation, residual.

Введение

Развивая теорему о перестановочности субнормальных подгрупп, одна из которых перфектна (т.е. совпадает со своим коммутантом), Х. Виландт [1] на основе развитой им теории операторов показал, что в конечной группе G субнормальные подгруппы H и K перестановочны, если имеет место равенство $(|H : H'|, |K : K'|) = 1$. Эквивалентная формулировка этого результата состоит в том, что $HK = KH$, если $\pi(H/H^{\mathfrak{N}}) \cap \pi(K/K^{\mathfrak{N}}) = \emptyset$, где $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп.

Отмеченный результат инициировал соответствующий вопрос для σ -субнормальных подгрупп конечной группы, поставленный А.Н. Скибой в [2] под номером 4.1 (см. также вопрос 7.6 из [3] и вопрос 6.7 из [4]):

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть H и K – σ -субнормальные подгруппы конечной группы G . Верно ли, что $HK = KH$, если

$$\pi(H/H^{\sigma}) \cap \pi(K/K^{\sigma}) = \emptyset?$$

В настоящей работе дается отрицательный ответ на данный вопрос и приводятся два критерия перестановочности σ -субнормальных подгрупп конечной группы. В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, эти критерии превращаются в известные признаки перестановочности субнормальных подгрупп, представленные Х. Виландтом в работе [5] и утверждающие, что субнормальные подгруппы H и K конечной группы

перестановочны тогда и только тогда, когда при любом гомоморфизме группы $\langle H, K \rangle$ в нильпотентную (примарную) группу образы подгрупп H и K перестановочны. В [6] показано, что условие конечности группы в теореме Виландта можно отбросить.

Главная цель данной работы – доказательство следующих двух теорем, которые редуцируют вопрос перестановочности σ -субнормальных подгрупп конечной группы к вопросу о перестановочности соответствующих образов этих подгрупп в σ -нильпотентных и σ -примарных группах.

Теорема 0.1. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть H и K – σ -субнормальные подгруппы конечной группы G . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $HK = KH$;
- 2) $\langle H, K \rangle = HK \langle H, K \rangle^{\sigma}$;
- 3) $H^{\varphi} K^{\varphi} = K^{\varphi} H^{\varphi}$ для любого гомоморфизма φ группы $\langle H, K \rangle$ в σ -нильпотентную группу.

Теорема 0.2. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть H и K – σ -субнормальные подгруппы конечной группы G . Тогда и только тогда $HK = KH$, когда $H^{\varphi} K^{\varphi} = K^{\varphi} H^{\varphi}$ для каждого гомоморфизма φ группы $\langle H, K \rangle$ в σ -примарную группу.

Теоремы 0.1 и 0.2, по сути, являются частными проявлениями общей схемы перестановочности $\mathfrak{F}$ -субнормальных (в смысле Кегеля) подгрупп, предложенной в [7] (см. также [8]).

1 Основные определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения стандартны и соответствуют [9]. Что касается терминологии теории σ -субнормальных подгрупп, то мы отсылаем читателя к [10].

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n ; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы G . Далее всегда $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Пусть

$$\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$$

и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Следуя [10], будем говорить, что группа G является:

- σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$;
- σ -нильпотентной (или σ -разложимой), если G является прямым произведением некоторых σ -примарных групп, т. е. группа G представима в виде прямого произведения своих σ_i -холловых подгрупп.

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ -нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга. Отсюда, в частности, следует, что в любой группе G существует наименьшая нормальная подгруппа, фактор-группа по которой σ -нильпотентна. Эта подгруппа обозначается $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и называется σ -нильпотентным корадикалом (или $\mathfrak{N}_\sigma$ -корадикалом) группы G .

Концепция σ -субнормальности, развивающая идею субнормальной подгруппы из [1], предложена А.Н. Скибой в работе [10]. Эта концепция базируется на следующем определении. Подгруппа H группы G называется σ -субнормальной, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо группа $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является σ -примарной. Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ -субнормальна в G для $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Другое понятие, обобщающее концепцию субнормальной подгруппы, предложено Кегелем [11]. Для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{F}$ -субнормальной в смысле Кегеля (или просто K - $\mathfrak{F}$ -субнормальной), если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Следующая лемма, доказательство которой осуществляется простой проверкой, устанавливает связь между σ -субнормальными и K - $\mathfrak{F}$ -субнормальными подгруппами группы G .

Лемма 1.1. Подгруппа H σ -субнормальна в G тогда и только тогда, когда она K - $\mathfrak{N}_\sigma$ -субнормальна в G .

Следуя [12], будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ обладает обобщенным свойством Виландта для корадикалов (или является GWP -формацией, the formation with generalised Wielandt property), если для любых двух K - $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп H и K каждой группы G выполняется равенство $\langle H, K \rangle^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}} \rangle$.

Серии GWP -формаций построены в [7]. В частности, из [7, теорема 2.1] следует, что для любого разбиения σ формация всех σ -нильпотентных групп является GWP -формацией.

В дальнейшем нам понадобятся следующие два результата, которые мы приведем в виде лемм.

Лемма 1.2 [7, теорема 3.1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – GWP -формация. Пусть H и K – K - $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы $J = \langle H, K \rangle$. Если все абелевы композиционные факторы подгруппы H принадлежат $\mathfrak{F}$, то следующие утверждения равносильны:

$$1) HK = KH;$$

$$2) J = HKJ^{\mathfrak{F}};$$

3) каждый гомоморфизм группы J в $\mathfrak{F}$ -группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.

Как отмечено в [12], любая GWP -формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, т. е. обладает тем свойством, что для любой группы G из $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому на основании теоремы Гашюца – Любезедер – Шмида [9, теорема IV.4.6] любая GWP -формация $\mathfrak{F}$ является локальной. В частности, для формации $\mathfrak{F}$ существует такое каноническое локальное определение f , что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Напомним определение локальной формации. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Тогда функция

$$f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией*.

Для формационной функции f главный фактор A/B группы G называется f -центральным (f -эксцентральным), если

$$G/C_G(A/B) \cong \text{Aut}(A/B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс групп $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп G таких, что либо $G=1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор A/B группы G является f -центральным. При этом говорят, что локальная формация $\mathfrak{F}$ *определяется с помощью формационной функции f* , а f – *локальное определение формации $\mathfrak{F}$* .

Пусть $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p -групп, f – формационная функция и $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда функция f называется:

- (а) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$;
- (в) *полной*, если $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$;
- (с) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в [9, теорема IV.3.7], для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная каноническая формационная функция f такая, что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением формации $\mathfrak{F}$* .

Лемма 1.3 [7, теорема 3.2]. Пусть f – каноническое локальное определение GWP-формации $\mathfrak{F}$. Пусть H и K – K - $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы $J = \langle H, K \rangle$, причем все абелевы композиционные факторы группы H принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $HK = KH$, когда для всех p из $\pi(\mathfrak{F})$ каждый гомоморфизм группы J в $f(p)$ -группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.

2 Доказательство теорем

Теорема 0.1 следует из леммы 1.2 и того факта, что для любого разбиения σ множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ формация $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ -нильпотентных групп является GWP-формацией.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$. Тогда из определения σ -нильпотентной группы следует, что $\mathfrak{N}_\sigma = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, где $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех σ_i -групп. Простая проверка показывает, что формация $\mathfrak{N}_\sigma$ определяется с помощью формационной функции f такой, что $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $p \in \sigma_i$. Более того, функция f является каноническим

локальным определением формации $\mathfrak{F}$. Если H и K – σ -субнормальные подгруппы группы $J = \langle H, K \rangle$, то из определения класса $\mathfrak{N}_\sigma$ следует, что все абелевы композиционные факторы группы H принадлежат $\mathfrak{N}_\sigma$. Отсюда ввиду леммы 1.3 $HK = KH$ тогда и только тогда, когда для любого простого числа p каждый гомоморфизм группы J в $f(p)$ -группу (т. е. в σ -примарную группу) переводит H и K в перестановочные подгруппы. Теорема 0.2 доказана. $\square$

3 Следствия и примеры

При $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ имеем

Следствие 3.1 [5]. Пусть H и K – субнормальные подгруппы группы G . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $HK = KH$;
- 2) $\langle H, K \rangle = HK \langle H, K \rangle^{\mathfrak{N}}$;
- 3) любой гомоморфизм группы $\langle H, K \rangle$ в нильпотентную группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.

Следствие 3.2 [5]. Пусть H и K – субнормальные подгруппы группы G . Тогда и только тогда $HK = KH$, когда каждый гомоморфизм группы $\langle H, K \rangle$ в примарную группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.

Теоремы 0.1 и 0.2 редуцируют вопрос перестановочности σ -субнормальных подгрупп конечной группы к соответствующему вопросу для σ -нильпотентных и σ -примарных групп. Таким образом, вопрос А.Н. Скибы о перестановочности σ -субнормальных подгрупп H и K с условием $\pi(H/H^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap \pi(K/K^{\mathfrak{N}_\sigma}) = \emptyset$ сводится к вопросу о перестановочности в σ -примарной группе G подгрупп H и K с условием $\pi(H) \cap \pi(K) = \emptyset$. Ввиду следующего результата, подчеркивающего уникальность разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, вопрос А.Н. Скибы имеет отрицательный ответ для всех разбиений, кроме разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Следствие 3.3. Для любого разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, отличного от разбиения $\{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, существует бипримарная группа, обладающая неперестановочными σ -субнормальными σ -нильпотентными подгруппами H и K с условием $\pi(H) \cap \pi(K) = \emptyset$.

Действительно, так как $\sigma \neq \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, то для некоторого $i \in I$ найдется такое множество σ_i , что $|\sigma_i| \geq 2$. Пусть p и q – различные простые числа из σ_i и G – регулярное сплетение групп A и B с условием $|A| = p$ и $|B| = q$. Пусть N – база сплетения G . Тогда $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_q$,

где $N_i \cong A$ для всех $i = 1, 2, \dots, q$. Очевидно, подгруппы N_1 и B группы G являются σ -субнормальными в G . Кроме того, они σ -нильпотентны и выполняется условие $\pi(N_1) \cap \pi(A) = \emptyset$. В то же время $N_1 B \neq B N_1$.

Приведем достаточное условие, при котором σ -субнормальные подгруппы H и K с условием $\pi(H/H^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap \pi(K/K^{\mathfrak{N}_\sigma}) = \emptyset$ являются перестановочными.

Следуя [13], для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ будем говорить, что натуральные числа m и n являются σ -копростыми, если для любого $i \in I$ всегда из $\pi(m) \cap \sigma_i \neq \emptyset$ следует $\pi(n) \cap \sigma_i = \emptyset$.

Отметим, что если числа $|H/H^{\mathfrak{N}_\sigma}|$ и $|K/K^{\mathfrak{N}_\sigma}|$ являются σ -копростыми, то выполняется условие $\pi(H/H^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap \pi(K/K^{\mathfrak{N}_\sigma}) = \emptyset$. Обратное утверждение неверно.

Следствие 3.4. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть H и K – σ -субнормальные подгруппы конечной группы G . Если порядки групп $H/H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и $K/K^{\mathfrak{N}_\sigma}$ являются σ -копростыми числами, то подгруппы H и K перестановочны.

Действительно, ввиду того, что порядки групп $H/H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и $K/K^{\mathfrak{N}_\sigma}$ являются σ -копростыми числами, для любого гомоморфизма φ подгруппы $\langle H, K \rangle$ в σ -примарную группу одна из подгрупп H^φ или K^φ является единичной. Поэтому для любого такого гомоморфизма φ выполняется равенство $H^\varphi K^\varphi = K^\varphi H^\varphi$. Отсюда на основании теоремы 0.2 подгруппы H и K являются перестановочными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wielandt, H. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – Vol. 45. – P. 209–244.
2. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
3. Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.
4. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.
5. Wielandt, H. Subnormale Untergruppen endlicher Gruppen / H. Wielandt. – Tübingen: Lecture Notes, 1971. – 180 p.
6. Brewster, D.C. A criterion for the permutability of subnormal subgroups / D.C. Brewster // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 1. – P. 85–87.
7. Каморников, С.Ф. Перестановочность подгрупп и $\mathfrak{F}$ -субнормальность / С.Ф. Каморников // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 1065–1080.
8. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Белорус. наука, 2003. – 256 с.
9. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
10. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.
11. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.
12. Ballester-Bolinches, A. On formations of finite groups with the generalised Wielandt property for residuals / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Perez-Calabuig // J. Algebra. – 2014. – Vol. 412. – P. 173–178.
13. Мурашко, В.И. Об одном обобщении теорем Бэра о гиперцентре и нильпотентном корадикале / В.И. Мурашко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 84–88.

Поступила в редакцию 10.05.19.

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ЗАДАННЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ

А.В. Лубочкин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE GIVEN MOTIONS REALIZATION OF DYNAMIC SYSTEMS BY BOUNDED OPTIMAL CONTROLS OF LINEAR-QUADRATIC PROBLEMS

A.V. Lubochkin

F. Scorina Gomel State University

В классе ограниченных управлений рассматривается задача осуществления заданных движений динамическими системами. Методами оптимального управления строится алгоритм работы регулятора, который в режиме реального времени вычисляет (генерирует) текущие значения ограниченных обратных связей, с помощью которых замкнутая система устойчиво осуществляет заданное движение. Для решения этой задачи предлагается использовать реализацию оптимальной обратной связи линейно-квадратичных задач с ограничениями. Результаты иллюстрируются на задаче синтеза динамических систем, осуществляющих предельные циклы.

Ключевые слова: динамическая система, задача осуществления заданных движений, ограниченная стабилизирующая обратная связь, вспомогательная задача оптимального управления, регулятор.

The problem of the given motions realization of dynamic systems in the bounded control class is considered. The regulator operation algorithm is constructing with optimal control methods. According to this algorithm, in real-time, the current values of limited feedbacks are calculated (generates), with the help of which the closed-loop system stably carries out a given movement. To solve the problem the feedback optimal control realization of linear-quadratic problem with restrictions is suggested. The results are illustrated on the problem of dynamic systems synthesis, realizing limited cycles.

Keywords: dynamic system, given motions realization problem, bounded stabilizing feedback, auxiliary optimal control problem, regulator.

Введение

Возникновение теории оптимального управления связано с необходимостью решать возникающие на практике (или в других разделах науки) задачи. Среди таких источников можно привести несколько задач классической теории автоматического регулирования [1]: задачи регулирования, стабилизации, демпфирования, осуществления заданных движений. Согласно [1], целью задачи слежения является осуществление процесса «... изменения по заданным условиям какой-нибудь величины в машинах, аппаратах или иных технических устройствах». Задача осуществления движений [2] является одной из основных задач теории следящих систем [3]. Основные методы устойчивого слежения базируются на классической теории устойчивости движения [4]. Однако применяемые методы не учитывали ограничения на управления (учет которых естественен на практике), а также не предъявляли никаких требований к качеству переходных процессов. Теория оптимального управления за прошедшее время прошла огромный путь. Естественно задать вопрос, что дают методы оптимального управления для решения классических задач теории регулирования, актуальность которых несомненна и в нынешнее время.

Использование теории оптимального управления [5] может существенно расширить возможности средств теории следящих систем. В ее рамках можно естественным образом учитывать ограничения на управления (они входят в состав современных постановок задач оптимального управления), не задавать структуру обратных связей (а получать ее как решение экстремальной задачи), не только устойчиво осуществлять движения, но и добиваться высокого качества переходных процессов. Долгое время применение методов оптимального управления к решению подобных задач сдерживалось отсутствием эффективных методов синтеза оптимальных систем.

В данной работе описывается метод осуществления заданных движений динамическими системами, основанный на применении методов оптимального управления и использует результаты, полученные по синтезу оптимальных систем для линейных [6], а также линейно-квадратичных [7]–[9] задач. Новый подход к проблеме конструирования оптимальных обратных связей опирается на разработанные ранее быстрые методы коррекции программных решений и бурное развитие вычислительной техники. Данную работу можно рассматривать как развитие идей работ [10]–[13], в которых указанные

методы оптимального управления были использованы для решения задач стабилизации и регулирования. Использованию с целью решения задачи осуществления заданных движений линейно-негладких задач посвящена работа [14].

1 Постановка задачи

Пусть поведение динамической системы с управлением на промежутке $t \geq 0$ описывается уравнением [14]

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

$$(x = x(t) \in R^n, \quad u = u(t) \in R, \quad t \geq 0;$$

$$\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n).$$

Будем считать, что доступные управления удовлетворяют неравенству

$$|u(t)| \leq L, \quad t \geq 0 \quad (0 < L < \infty).$$

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим движение на фазовой плоскости

$$x = x_f(t), \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

заданное кусочно-гладкой функцией $x_f(t)$, $t \geq 0$.

Говорят, что движение (1.2) допустимо (осуществимо), если существует такое доступное управление $u_f(t)$, $|u_f(t)| \leq L$, $t \geq 0$, что выполняется равенство

$$\dot{x}_f(t) = Ax_f(t) + bu_f(t), \quad t \geq 0.$$

Пусть $G \subset R^n$ – область фазового пространства системы (1.1), внутренность которой содержит движение (1.2): $x_f(t) \in \text{int } G$, $t \geq 0$.

Определение [14]. Функция

$$u = u(t, x), \quad x \in G, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

называется ограниченной дискретной обратной связью, осуществляющей движение (1.2) в области G , если выполняются условия:

$$1) \quad u(t, x_f(t)) = u_f(t), \quad t \geq 0;$$

$$2) \quad |u(t, x)| \leq L, \quad x \in G, \quad t \geq 0;$$

$$3) \quad \text{траектория замкнутой системы}$$

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x), \quad x(0) \in G, \quad (1.4)$$

представляет собой непрерывное решение уравнения (1.1) с дискретным управлением

$$u(t) = u(kv, x(kv)), \quad t \in [kv, (k+1)v], \quad (1.5)$$

$$k = 0, 1, \dots;$$

4) решение $x_f(t)$, $t \geq 0$, замкнутой системы (1.4) асимптотически устойчиво в G .

При этом с точки зрения практики при фактическом построении обратной связи естественно потребовать выполнения следующих свойств:

$$5) \quad \text{область притяжения } G \text{ достаточно большая};$$

$$6) \quad \text{переходные процессы } x(t) \rightarrow x_f(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

в замкнутой системе (1.4) являются в некотором смысле наилучшими (по отношению к выбранному критерию качества).

Синтез обратных связей (1.3), обладающих перечисленными свойствами, составляет суть задачи осуществления движения [14].

Очевидно, что таким образом определенная обратная связь может быть построена многими способами. Построение реализации в реальном времени обратной связи (1.3) в каждом конкретном процессе управления (осуществления движения), т. е. вдоль реализующейся в конкретном процессе траектории $x^*(t)$, $t \geq 0$, динамической системы, будем вести, используя позиционное решение вспомогательной (сопровождающей) задачи оптимального управления.

2 Сопровождающая задача оптимального управления

Выберем параметр метода θ , $0 < \theta < \infty$, и целое число $N > 1$. В классе дискретных управлений вида (1.5) с периодом квантования $v = \theta / N$:

$$u(t) = u(kv) = u_k, \quad t \in [\tau + kv, \tau + (k+1)v], \quad (2.1)$$

$$k = 0, N-1 \quad (\theta = Nv),$$

рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления

$$B_\theta(\tau, z) = \min_{\tau} \int_{\tau}^{\tau+\theta} (u(t) - u_f(t))^2 dt,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(\tau) = z,$$

$$x(\tau + \theta) = x_f(\tau + \theta), \quad \tau \geq 0, \quad (2.2)$$

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in T = [\tau, \tau + \theta],$$

где τ – текущий момент времени коррекции управления.

Решение задачи (2.2) можно строить в различных классах управлений. Известно [15], что предельным для нее является класс непрерывных кусочно-гладких функций. Здесь, учитывая принятые выше соглашения, эта задача рассматривается в классе дискретных управлений (2.1).

Допустимой (дискретной) программой $u(t|\tau, z)$, $t \in T$, задачи (2.2) называют такую дискретную функцию (2.1), которая вместе с соответствующей ей траекторией динамической системы удовлетворяет всем ограничениям задачи (2.2). Оптимальной (дискретной) программой $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T$, задачи (2.2) называют допустимую программу, которая доставляет минимум критерию качества задачи.

Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T$, – оптимальная (дискретная) программа задачи (2.2) для позиции (τ, z) , $G_0(\tau) \subset R^n$ – множество всех векторов $z \in R^n$, для которых задача (2.2) с фиксированным τ имеет решение.

Функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), \quad z \in G_0(\tau), \quad (2.3)$$

$$\tau = kv, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

называют оптимальным стартовым (дискретным) управлением типа обратной связи для задачи (2.2). В [11]–[13] (для задач стабилизации и регулирования линейных систем) описан алгоритм работы регуляторов, которые способны в режиме

реального времени строить реализацию

$$u^*(t) = u^0(t, x^*(t)), \quad t \geq 0,$$

дискретной обратной связи (2.3) для каждой реализующейся траектории $x^*(t)$, $t \geq 0$, динамической системы.

Построение функции (2.3) в замкнутой форме (за исключением тривиальных ситуаций) вряд ли возможно. Однако при решении практических задач оптимального синтеза можно обойтись без этого, если привлечь микропроцессоры (на использование которых, как и [11]–[13], ориентирована данная работа). В классе дискретных управлений (2.1) задача (2.2) эквивалентна следующей задаче квадратичного программирования (горизонт управления $[\tau, \tau + \theta]$, очевидно, можно заменить горизонтом $[0, \theta]$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} (u_j - u_f)^2 &\rightarrow \min, \\ F(\theta)z + \sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} F(\theta - t)b \, dt &= x_f(\theta), \quad \tau \geq 0, \\ |u_j| &\leq L, \quad j = \overline{0, N-1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$. И тогда для вычисления требуемых значений обратной связи (2.3), не зная явного выражения для нее, можно использовать метод коррекции близких задач (2.4) с помощью двойственного метода квадратичного программирования [16]. Очевидно, что в рассматриваемом случае (при использовании дискретной обратной связи) отпадает вопрос о существовании решения замкнутой системы.

В качестве дискретной реализации $u(t, x)$, $x \in G_\theta$, обратной связи (1.3), осуществляющей движение (1.2), и предлагается использовать реализацию $u^*(t)$, $t \geq 0$, обратной связи (2.3). Нетрудно показать, что обратная связь

$$u(t, x) = u^0(t, x), \quad x \in G_\theta(t), \quad (2.5)$$

решает задачу осуществления движений, т. е. удовлетворяет всем требованиям п. 1.

3 Свойства оптимальной обратной связи сопровождающей задачи оптимального управления

Очевидно, что

$$u^0(\tau, x_f(\tau)) = u_f(\tau, x_f(\tau)) = u_f(\tau),$$

т. е. $x_f(\tau)$, $\tau \geq 0$, – осуществимое движение:

$$x(\tau) \equiv x_f(\tau), \quad \tau \geq 0;$$

$$|u_f(\tau, x_f(\tau))| \leq L, \quad x_f(\tau) \in G_\theta(\tau), \quad \tau \geq 0.$$

По определению дискретной обратной связи, замкнутая система (1.4) с обратной связью

$$u(\tau, x(\tau)) = u^0(\tau, x_f(\tau)), \quad \tau \geq 0,$$

имеет решение при любом

$$x_f(\tau) \in G_\theta(\tau), \quad \tau \geq 0.$$

Используя метод функций Ляпунова, аналогично [13] нетрудно показать, что решение $x(t) = x_f(t)$, $t \geq 0$, системы (1.4) асимптотически устойчиво (при этом $B_\theta(\tau, z)$, $z \in G_\theta(\tau)$, $\tau > 0$, – функция Ляпунова). Очевидно, $B_\theta(\tau, x_f) = 0$; $B_\theta(\tau, z) > 0$ при $z \neq x_f$; $B_\theta(\tau, z)$, $z \in G_\theta(\tau)$, $\tau > 0$, – непрерывная функция, которая убывает (не возрастает) вдоль каждой траектории системы (1.4).

Таким образом, поскольку выполняются требования 1)–4) приведенного выше определения, обратная связь $u(t, x) = u^0(t, x)$, $x \in G_\theta(t)$, $t \geq 0$, является обратной связью, осуществляющей движение (1.2) в области G_θ .

Далее нетрудно показать, что с помощью выбора параметра θ множество G_θ можно построить почти совпадающим с областью G , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\theta < \infty$, что в ε -окрестности множества G_θ будут содержаться все состояния, из которых можно вдоль траекторий системы (1.1) попасть в точку на требуемой траектории $x = x_f(t)$, $t \geq 0$, с помощью управлений, ограниченных по модулю числом L .

Качество переходных процессов в замкнутой системе определяется следующим экстремальным свойством:

$$\int_0^\infty (u^*(t) - u_f(t))^2 \, dt \leq \int_0^\theta (u^0(t | 0, z^*) - u_f(t))^2 \, dt.$$

Последнее неравенство означает, что энергия, затрачиваемая на весь переходный процесс осуществления движения (на бесконечном промежутке времени) не превосходит минимальных затрат энергии на перевод системы (1.1) из состояния $x(0) = z^*$ в состояние $x_f(\theta)$ на заданной траектории за время θ (здесь $u^*(t)$, $t \geq 0$, – реализующееся в конкретном процессе управление, соответствующее начальному состоянию $x(0) = z^*$).

Таким образом, в некотором смысле выполняются также и требования 5) и 6).

4 Алгоритм работы регулятора

Пусть известны: начальное состояние $x_0 = x_0^*$ системы (1.1), движение $x_f(t)$, $t \geq 0$, и управление $u_f(t)$, $|u_f(t)| < l < \infty$, $t \geq 0$.

На начальном промежутке времени $[0, \nu]$ регулятор использует оптимальную (дискретную) программу $u^0(t | 0, x_0^*)$, $t \in T$, задачи (2.2) или, что то же самое, оптимальный план $(u_j^0(0, x_0^*), j = \overline{0, N-1})$ эквивалентной ей (в выбранном классе управлений) задачи (2.4), соответствующей позиции $(0, x_0^*)$. Эта задача может содержать лишь априорную информацию, и поэтому указанный оптимальный план может быть

построен заранее, до начала процесса управления в момент $\tau = 0$, не взирая на затраты машинного времени (полное решение). Строить решение задачи (2.4) можно разными методами. Здесь (с целью единообразия алгоритма) этот план предлагается строить с помощью двойственного метода квадратичного программирования [16], поскольку в дальнейшем именно этот метод применяется для коррекции решений близких задач (2.4). Управление

$$u^*(t) = u^0(t | 0, x_0^*) \equiv u^0(0 | 0, x_0^*) \equiv u_0^0(0, x_0^*) \equiv u^*(0), \\ t \in [0, v],$$

подается на вход системы (1.1):

$$u(\tau) = u^*(\tau), \quad \tau \in [0, v],$$

и порождает ее состояние $x^*(v) = x^*(v | 0, x_0^*)$.

Предположим, что для моментов $0, v, \dots, (s-1)v$ регулятором были вычислены значения обратной связи $u^*(0), u^*(v), \dots, u^*((s-1)v)$, где $u^*(kv) \equiv u_0^0(kv, x^*(kv))$, $k = \overline{0, s-1}$, и замкнутая система (1.4) оказалась в состоянии

$$x^*(\tau) = x^*(\tau | \tau-1, x^*(\tau-1)) \equiv x^*(\tau | 0, x_0^*), \quad \tau = sv.$$

Используя оптимальную программу сопровождающей задачи (2.2), а точнее оптимальный план эквивалентной ей в рассматриваемом случае задачи (2.4), для предыдущего момента $\tau - v = (s-1)v$, перед решением которой система находилась в состоянии $x^*(\tau - v) = x^*((s-1)v) = x^*((s-1)v | 0, x_0^*)$, с помощью двойственного метода [16] производится коррекция решения сопровождающей задачи для нового состояния $x^*(\tau)$. Указанный метод коррекции используется в силу того, что задача (2.4) для двух соседних моментов $\tau - v$ и τ отличается только начальными условиями $x^*(\tau - v)$ и $x^*(\tau)$, при этом это отличие тем меньше, чем меньше v , а среди всех известных методов решения задач квадратичного программирования именно двойственный метод является наиболее эффективным методом коррекции близких задач. Построив оптимальную программу $u^0(t | 0, x^*(sv))$, $t \in T$, задачи (2.2) – оптимальный план $(u_j^0(0, x^*(sv)), j = \overline{0, N-1})$ задачи (2.4) для позиции $(0, x^*(sv))$, получаем реализацию

$$u^*(t) \equiv u^0(0 | 0, x^*(sv)) \equiv u_0^0(0, x^*(sv)) \equiv u^*(sv), \\ t \in [0, v],$$

стартовой обратной связи, которая подается на вход системы (1.1) на промежутке времени $[sv, (s+1)v]$:

$$u(\tau) = u^*(\tau - sv), \quad \tau \in [sv, (s+1)v].$$

Если время коррекции решений задачи (2.4) при переходе от начального условия $z = x^*(\tau - v)$

к начальному условию $z = x^*(\tau)$, а, значит, и для вычисления реализации обратной связи $u^*(\tau)$, не превосходит времени v , то говорят о возможности решения задачи осуществления движения в режиме реального времени. Поскольку количество операций, которые выполняются на каждом шаге работы регулятора, можно оценить, то для каждой конкретной системы можно подобрать такие микропроцессорные устройства, с помощью которых можно реализовать регулятор в режиме реального времени. С другой стороны, для каждого микропроцессора можно указать порядок систем, для которых реализуем указанный режим.

5 Примеры

Пример 5.1. Рассмотрим систему управления [14]

$$\ddot{x} + x = u.$$

Введя обозначения $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, получим систему двух уравнений: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$, т. е. систему вида (1.1). Эта система при выключенном управлении: $u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, имеет периодические движения для любых начальных состояний. Однако эти решения не являются предельными циклами. Рассмотрим одно такое движение:

$$x^2(t) + \dot{x}^2(t) = 1, \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

и построим обратную связь (2.5), с которой замкнутая система

$$\ddot{x} + x = u(t, x) \quad (5.2)$$

имеет периодическое решение (5.1) в качестве асимптотически устойчивого предельного цикла.

Алгоритм работы регулятора программно реализован на языке С, работоспособность программы проверена на описанном примере. Были построены регуляторы для двух наборов параметров сопровождающей задачи (2.4):

$$1) \theta = 1, \quad v = 0.04, \quad L = 4;$$

$$2) \theta = 1, \quad v = 0.04, \quad L = 2;$$

$$u_f(t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

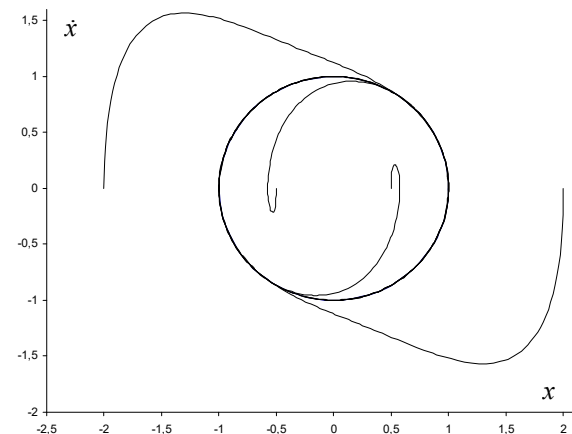


Рисунок 5.1 – Фазовые траектории замкнутой системы

Первый набор параметров был использован для следующих начальных условий динамической системы: $x_0 = (-2, 0)$, $x_0 = (2, 0)$, второй – для условий $x_0 = (-0.5, 0)$, $x_0 = (0.5, 0)$.

На рисунке 5.1 представлены фазовые траектории замкнутой системы (5.2) для указанных начальных состояний и соответствующих им параметров вспомогательной задачи.

Пример 5.2. Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - u, \quad (5.3)$$

которая при выключенном управлении имеет периодические движения, среди которых нет следующего движения [14]

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1. \quad (5.4)$$

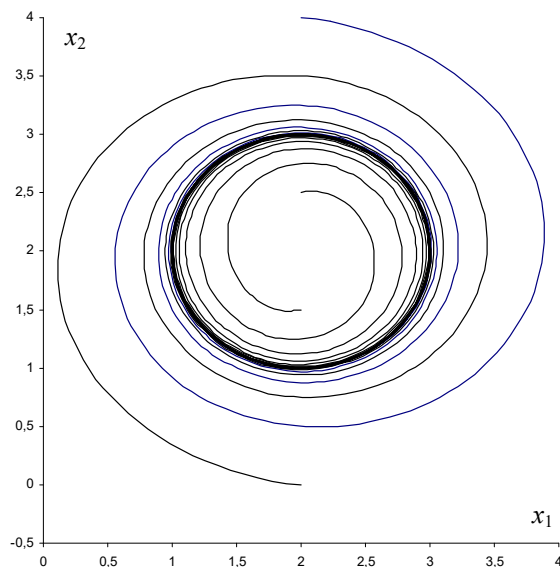


Рисунок 5.2 – Фазовые траектории для основного набора параметров

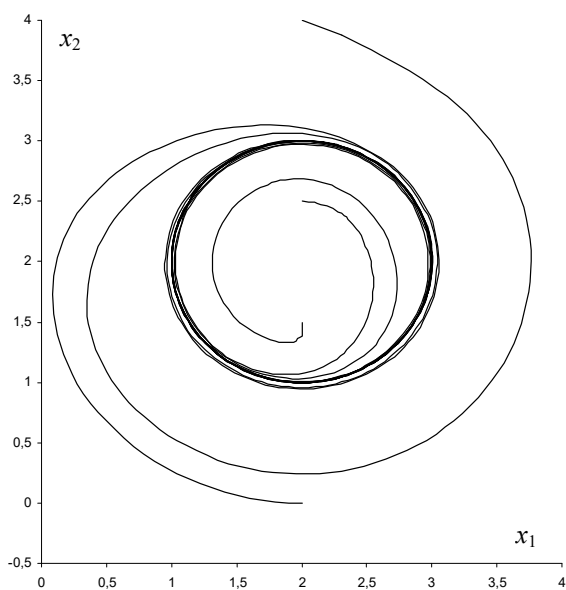


Рисунок 5.3 – Случай граничного значения управления

С помощью решения вспомогательной задачи (2.4) с параметрами: $\theta = 5$, $v = 0.2$, $L = 3$, и осуществляющим заданное движение управлением $u_f(t) \equiv -2$, $t \geq 0$, была построена обратная связь, после замыкания которой системы (5.3) движение (5.4) стало устойчивым предельным циклом. Фазовые траектории замкнутой системы при следующем наборе начальных значений: $x_0 = (2, 4)$, $x_0 = (2, 0)$, $x_0 = (2, 2.5)$, $x_0 = (2, 1.5)$, представлены на рисунке 5.2.

Эта же задача испытывалась также в случае, когда $u_f = -2$ является граничным значением в геометрических ограничениях сопровождающей задачи ($L = 2$). Результаты представлены на рисунке 5.3.

Заключение

В работе описан способ применения методов оптимального управления с привлечением современных средств вычислительной техники для решения одной из задач классической теории регулирования – задачи осуществления движений, которая более полвека назад (наряду с другими подобными задачами) послужила толчком к созданию теории оптимального управления. Построенные регуляторы способны в режиме реального времени вычислять текущие значения обратных связей, которые обеспечивают не только устойчивое осуществление движений, но и высокое качество переходных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман, М.А. Лекции по теории автоматического регулирования / М.А. Айзерман. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Физматгиз, 1958. – 520 с.
2. Барбашин, Е.А. Введение в теорию устойчивости / Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 1967. – 224 с.
3. Квасернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квасернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 656 с.
4. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
6. Габасов, Р. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – № 4. – С. 3–19.
7. Габасов, Р. Синтез регулятора для одной линейно-квадратичной задачи оптимального управления / Р. Габасов, А.В. Лубочкин // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 9. – С. 3–14.
8. Кириллова, Ф.М. Синтез оптимального управления в линейно-квадратичной задаче с

ограничениями / Ф.М. Кириллова, А.В. Лубочкин // Доклады РАН. – 1997. – Т. 356, № 6. – С. 736–739.

9. Лубочкин, А.В. Дискретная реализация позиционного решения в линейно-квадратичной задаче с ограничениями / А.В. Лубочкин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2003. – № 3 (18). – С. 32–37.

10. Габасов, Р. К методам стабилизации динамических систем / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 67–77.

11. Габасов, Р. Стабилизация линейных динамических систем оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач / Р. Габасов, А.В. Лубочкин // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, Вып. 4. – С. 556–565.

12. Лубочкин, А.В. Стабилизация линейных динамических систем с помощью позиционных решений линейно-квадратичных задач с ограничениями / А.В. Лубочкин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 4 (37). – С. 39–42.

13. Лубочкин, А.В. Решение классической задачи регулирования оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач / А.В. Лубочкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 40–46.

14. Габасов, Р. Синтез обратных связей для систем, осуществляющих заданные движения / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 8. – С. 26–39.

15. Лубочкин, А.В. Построение оптимального (по среднеквадратичной интенсивности управления) переходного процесса в линейной системе) / А.В. Лубочкин // Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Выпуклые задачи / Р. Габасов [и др.]. – Мн.: Университетское, 1987. – С. 218–222.

16. Ракецкий, В.М. Решение общей задачи выпуклого квадратичного программирования двойственным методом / В.М. Ракецкий // Программное обеспечение ЭВМ. – Мн.: Ин-т математики АН БССР, 1985. – Вып. 55. – С. 124–129.

Поступила в редакцию 20.03.19.

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Я.Т. Мегралиев, У.С. Ализаде

Бакинский государственный университет

ON THE PROBLEM OF IDENTIFYING A LINEAR SOURCE FOR THE THIRD-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITION

Ya.T. Mehraliev, U.S. Alizade

Baku State University

Исследована задача идентификации линейного источника для одного уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде с интегральным условием первого рода. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной в определенном смысле задаче. С помощью метода Фурье эквивалентная задача сводится к решению системы интегральных уравнений. С помощью метода сжатых отображений доказываются существование и единственность решения системы интегральных уравнений, которая также является единственным решением эквивалентной задачи. Пользуясь эквивалентностью, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения третьего порядка, метод Фурье, классическое решение.

The identification of a linear source for the third-order single equation that describes the propagation of longitudinal waves in a dispersive medium with an integral condition of the first kind is investigated. At first, the original problem reduces to an equivalent problem in a certain sense. Using the Fourier method, the equivalent problem is reduced to solving a system of integral equations. With the help of the method of compressed mappings, the existence and uniqueness of the solution of a system of integral equations, which is also the only solution to an equivalent problem, are proved. Using equivalence, it is possible to prove the existence and uniqueness of the classical solution of the original problem.

Keywords: inverse problem, third-order equations, Fourier method, classical solution.

Введение

Потребности практики часто приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциальных уравнений по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки. В последнее время обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений представляет собой активно развивающееся направление современной математики. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах (см., например [1]–[8]).

В последние годы возрос интерес к изучению волновых процессов в средах, характеризующихся наличием дисперсии и поглощения. Различные задачи для уравнения третьего порядка,

описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде исследовались в [9]–[11].

В данной работе, следуя [12], [13], доказаны существование и единственность решения обратной задачи для одного уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде с дополнительным интегральным условием первого рода.

1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения [11]

$$u_{ttt}(x, t) - u_{ttx}(x, t) + u_{tt}(x, t) - \alpha u_{tx}(x, t) = a(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (1.1)$$

в области $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$, обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad (1.2)$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.3)$$

интегральным условием

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.4)$$

и с дополнительным условием

$$u(0, t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.5)$$

где $\alpha(0 < \alpha < 1)$ – заданное число, $f(x, t)$, $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{0, 2}$), $h(t)$ – заданные функции, а $u(x, t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Определение. Классическим решением задачи (1.1)–(1.5) назовём пару функций $\{u(x, t), a(t)\}$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x, t)$ и ее производные $u_t(x, t)$, $u_{tt}(x, t)$, $u_{ttt}(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, $u_{xxx}(x, t)$ непрерывны в D_T ;

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$;

3) уравнения (1.1) и условия (1.2)–(1.5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1.1. Пусть $f(x, t) \in C(D_T)$,

$$\int_0^1 f(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$\varphi_0(x) \in C^1[0, 1]$, $\varphi_0(1) = 0$, $\varphi_i(x) \in C[0, 1]$ ($i = \overline{1, 2}$), $h(t) \in C^3[0, T]$, $h(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$) и выполняют-ся условия согласования

$$\int_0^1 \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = \overline{0, 2}),$$

$$\varphi_0(0) = h(0), \quad \varphi_1(0) = h'(0), \quad \varphi_2(0) = h''(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1.1)–(1.5) эквивалентна задаче определения функций $u(x, t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1.1)–(1.5), из соотношений (1.1)–(1.3),

$$u_x(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} h'''(t) + h''(t) - u_{xxx}(0, t) - \alpha u_{xx}(0, t) = \\ = a(t)h(t) + f(0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Доказательство. Пусть $\{u(x, t), a(t)\}$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.5). Интегрируя уравнение (1.1) по x от 0 до 1, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} \int_0^1 u(x, t) dx - u_{tx}(1, t) + u_{tx}(0, t) + \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx - \\ - \alpha(u_{xx}(1, t) - u_{xx}(0, t)) = \\ = a(t) \int_0^1 u(x, t) dx + \int_0^1 f(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Учитывая, что выполняются условия леммы $\int_0^1 f(x, t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$) и $\varphi_0(1) = 0$, с учётом (1.3), (1.4), находим:

$$u_{tx}(1, t) + \alpha u_{xx}(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$u_x(1, 0) = \varphi_0(1) = 0.$$

Отсюда легко приходим к выполнению (1.6).

Далее, считая $h(t) \in C^3[0, T]$ и дифференцируя (1.5), получаем:

$$\begin{aligned} u_t(0, t) = h'(t), \quad u_{tt}(0, t) = h''(t), \\ u_{ttt}(0, t) = h'''(t) \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя $x = 0$ в уравнение (1.1), находим:

$$\begin{aligned} u_{ttt}(0, t) - u_{xxx}(0, t) + u_{tt}(x, t) - \alpha u_{xx}(0, t) = \\ = a(t)u(0, t) + f(0, t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

А отсюда, с учётом (1.5) и (1.9), следует выполнение (1.7). Теперь предположим, что $\{u(x, t), a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7). Тогда из (1.8), с учётом (1.3), (1.6) и

$$\int_0^1 f(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

находим:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} \int_0^1 u(x, t) dx + \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx = \\ = a(t) \int_0^1 u(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В силу (1.2) и выполнения условия

$$\int_0^1 \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = \overline{0, 2}),$$

очевидно, что

$$\begin{cases} \int_0^1 u(x, t) dx = \int_0^1 \varphi_0(x) dx = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t) dx = \int_0^1 \varphi_1(x) dx = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx = \int_0^1 \varphi_2(x) dx = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Из (1.11), с учётом (1.12), легко приходим к выполнению (1.4).

Далее, из (1.7) и (1.10), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} (u(0, t) - h(t)) + \frac{d^2}{dt^2} (u(0, t) - h(t)) = \\ = a(t)(u(0, t) - h(t)) \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Так как

$$\varphi_0(0) = h(0), \quad \varphi_1(0) = h'(0), \quad \varphi_2(0) = h''(0),$$

имеем:

$$\begin{cases} u(0, 0) - h(0) = \varphi_0(0) - h(0) = 0, \\ u_t(0, 0) - h'(0) = \varphi_1(0) - h'(0) = 0, \\ u_{tt}(0, 0) - h''(0) = \varphi_2(0) - h''(0) = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Из (1.13), с учётом (1.14), ясно, что выполняется и условие (1.5). $\square$

2 Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x, t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) будем искать в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi), \quad (2.1)$$

где

$$u_k(t) = l_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots),$$

причём

$$l_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 2, & \text{при } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$u_k'''(t) + u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k'(t) + \alpha \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; u, a) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} u_k(0) &= \varphi_{0k}, \quad u_k'(0) = \varphi_{1k}, \\ u_k''(0) &= \varphi_{2k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)u_k(t),$$

$$f_k(t) = l_k \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\varphi_{ik} = l_k \int_0^1 \varphi_i(x) \cos \lambda_k x dx \quad (i = \overline{0, 2}; k = 0, 1, 2, \dots).$$

Решая задачу (2.2), (2.3), находим:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \varphi_{00} + t\varphi_{10} + (t-1+e^{-t})\varphi_{20} + \\ &+ \int_0^t F_0(\tau; u, a)(e^{-(t-\tau)} + t - \tau - 1)d\tau, \\ u_k(t) &= \frac{1}{b_k} \left\{ \left[(\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + \right. \right. \\ &+ \alpha_k e^{\gamma_k t} \left[(\alpha_k - 2\gamma_k) \cos \beta_k t + \right. \\ &+ \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k^2 - \beta_k^2 - \alpha_k \gamma_k) \sin \beta_k t \left. \right] \varphi_{0k} + \\ &+ \left[-2\gamma_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[2\gamma_k \cos \beta_k t + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{\beta_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \gamma_k^2) \sin \beta_k t \left. \right] \varphi_{1k} + \\ &+ \left. \left. \left[e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-\cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) \sin \beta_k t \right] \right] \varphi_{2k} + \right. \right. \\ &+ \int_0^t F_k(\tau; u, a) \left[e^{\alpha_k(t-\tau)} + \right. \\ &+ e^{\gamma_k(t-\tau)} \left[\frac{\gamma_k - \alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k(t-\tau) - \cos \beta_k(t-\tau) \right] d\tau \left. \right] \Big\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{где } \alpha_k = \alpha_{1k} + \beta_{1k} - \frac{1}{3}, \quad \beta_k = \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_{1k} - \beta_{1k}),$$

$$\gamma_k = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha_{1k} + \beta_{1k}), \quad b_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 - 2\alpha_k \gamma_k,$$

причем

$$\begin{aligned} \alpha_{1k} &= \left\{ -\frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right) + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{1}{4} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \beta_{1k} &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right) + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{1}{4} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

После подстановки выражений $u_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) в (2.1), для определения компоненты $u(x, t)$ решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), получаем:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi_{00} + t\varphi_{10} + (t-1+e^{-t})\varphi_{20} + \\ &+ \int_0^t F_0(\tau; u, a)(e^{-(t-\tau)} + t - \tau - 1)d\tau + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{b_k} \left\{ \left[(\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + \alpha_k e^{\gamma_k t} \left[(\alpha_k - 2\gamma_k) \cos \beta_k t + \right. \right. \right. \right. \\ &+ \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k^2 - \beta_k^2 - \alpha_k \gamma_k) \sin \beta_k t \left. \right] \varphi_{0k} + \\ &+ \left[-2\gamma_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[2\gamma_k \cos \beta_k t + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{\beta_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \gamma_k^2) \sin \beta_k t \left. \right] \varphi_{1k} + \\ &+ \left. \left. \left[e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-\cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) \sin \beta_k t \right] \right] \varphi_{2k} + \right. \right. \\ &+ \int_0^t F_k(\tau; u, a) \left[e^{\alpha_k(t-\tau)} + e^{\gamma_k(t-\tau)} \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{\gamma_k - \alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k(t-\tau) - \cos \beta_k(t-\tau) \right] d\tau \right] \Big\} \sin \lambda_k x. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Теперь, из (1.7), с учетом (2.1), имеем:

$$\begin{aligned} a(t) &= [h(t)]^{-1} \left[h'''(t) + h''(t) - \right. \\ &- f(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (u_k'(t) + \alpha u_k(t)) \left. \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.5), два раза получим:

$$\begin{aligned} u_k'(t) &= \frac{1}{b_k} \left\{ \left[\alpha_k (\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + \right. \right. \\ &+ \alpha_k (\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\gamma_k t} \left[-\cos \beta_k t + \right. \\ &+ \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) \sin \beta_k t \left. \right] \varphi_{0k} + \left[-2\alpha_k \gamma_k e^{\alpha_k t} + \right. \\ &+ e^{\gamma_k t} \left[(\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2) \cos \beta_k t + \right. \\ &+ \left. \left. \left[\frac{\gamma_k}{\beta_k} (\alpha_k^2 - \beta_k^2 - \gamma_k^2) \sin \beta_k t \right] \varphi_{1k} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left[\alpha_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-\alpha_k \cos \beta_k t + \right. \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\beta_k} (\beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{2k} + \\
 & + \int_0^t F_k(\tau; u, a) \left[\alpha_k e^{\alpha_k(t-\tau)} + \right. \\
 & + e^{\gamma_k(t-\tau)} \left[\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) + \beta_k \right) \sin \beta_k(t-\tau) - \right. \\
 & \left. \left. - \alpha_k \cos \beta_k(t-\tau) \right] d\tau \right\} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (2.10) \\
 & u''_k(t) = \frac{1}{b_k} \left\{ \left[\alpha_k^2 (\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + \right. \right. \\
 & + \alpha_k (\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\gamma_k t} \left[-\alpha_k \cos \beta_k t + \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k^2 + \beta_k^2 - \alpha_k \gamma_k) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{0k} + \left[-2\alpha_k^2 \gamma_k e^{\alpha_k t} + \right. \\
 & + e^{\gamma_k t} \left[2\alpha_k^2 \gamma_k \cos \beta_k t + \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} (\alpha_k^2 \gamma_k^2 - \alpha_k^2 \beta_k^2 - 2\beta_k^2 \gamma_k^2 - \gamma_k^4 - \beta_k^4) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{1k} + \\
 & + \left[\alpha_k^2 e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[(\beta_k^2 + \gamma_k^2 - 2\alpha_k \gamma_k) \cos \beta_k t + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k \beta_k^2 + \gamma_k^3 - \alpha_k \gamma_k^2 + \alpha_k \beta_k^2) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{2k} + \\
 & + \int_0^t F_k(\tau; u, a) \left[\alpha_k^2 e^{\alpha_k(t-\tau)} + \right. \\
 & + e^{\gamma_k(t-\tau)} \left[\frac{1}{\beta_k} (\gamma_k \beta_k^2 + \gamma_k^3 - \alpha_k \gamma_k^2 + \alpha_k \beta_k^2) \sin \beta_k(t-\tau) + \right. \\
 & + (\gamma_k^2 + \beta_k^2 - 2\alpha_k \gamma_k) \cos \beta_k t \Big] d\tau \Big\} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Далее, из (2.5) и (2.10), находим:

$$\begin{aligned}
 u'_k(t) + \alpha u_k(t) &= \frac{1}{b_k} \left\{ \left[(\alpha + \alpha_k) (\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + \right. \right. \\
 & + \alpha_k e^{\gamma_k t} \left[(\alpha \alpha_k - 2\alpha \gamma_k - \gamma_k^2 - \beta_k^2) \cos \beta_k t + \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} ((\gamma_k - \alpha_k) (\gamma_k^2 + \beta_k^2) + \\
 & + \alpha (\gamma_k^2 - \beta_k^2 - \alpha_k \gamma_k)) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{0k} + \\
 & + \left[-2(\alpha + \alpha_k) \gamma_k e^{\alpha_k t} + \right. \\
 & + e^{\gamma_k t} \left[(2\alpha \gamma_k + \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2) \cos \beta_k t + \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} (\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \alpha_k \gamma_k) + \\
 & + \gamma_k (\alpha_k^2 - \beta_k^2 - \gamma_k^2)) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{1k} + \\
 & + \left[(\alpha + \alpha_k) e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-(\alpha_k + \alpha) \cos \beta_k t + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} (\beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k + \alpha (\gamma_k - \alpha_k)) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{2k} + \\
 & + \int_0^t F_k(\tau; u, a) \left[(\alpha_k + \alpha) e^{\alpha_k(t-\tau)} + e^{\gamma_k(t-\tau)} \times \right. \\
 & \times \left[\frac{1}{\beta_k} (\beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k + \alpha (\gamma_k - \alpha_k)) \sin \beta_k(t-\tau) + \right. \\
 & \left. \left. - (\alpha_k + \alpha) \cos \beta_k(t-\tau) \right] d\tau \right\}. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma_k (\alpha_k^2 - \beta_k^2 - \gamma_k^2) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{1k} + \\
 & + \left[(\alpha + \alpha_k) e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-(\alpha_k + \alpha) \cos \beta_k t + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} (\beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k + \alpha (\gamma_k - \alpha_k)) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{2k} + \\
 & + \int_0^t F_k(\tau; u, a) \left[(\alpha_k + \alpha) e^{\alpha_k(t-\tau)} + e^{\gamma_k(t-\tau)} \times \right. \\
 & \times \left[\frac{1}{\beta_k} (\beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k + \alpha (\gamma_k - \alpha_k)) \sin \beta_k(t-\tau) + \right. \\
 & \left. \left. - (\alpha_k + \alpha) \cos \beta_k(t-\tau) \right] d\tau \right\} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) подставим выражение (2.12) в (2.9):

$$\begin{aligned}
 a(t) &= [h(t)]^{-1} \left[h'''(t) + h''(t) - f(0, t) + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{b_k} \left\{ \left[(\alpha + \alpha_k) (\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + \right. \right. \\
 & + \alpha_k e^{\gamma_k t} \left[(\alpha \alpha_k - 2\alpha \gamma_k - \gamma_k^2 - \beta_k^2) \cos \beta_k t + \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} ((\gamma_k - \alpha_k) (\gamma_k^2 + \beta_k^2) + \\
 & + \alpha (\gamma_k^2 - \beta_k^2 - \alpha_k \gamma_k)) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{0k} + \\
 & + \left[-2(\alpha + \alpha_k) \gamma_k e^{\alpha_k t} + \right. \\
 & + e^{\gamma_k t} \left[(2\alpha \gamma_k + \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2) \cos \beta_k t + \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} (\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \alpha_k \gamma_k) + \\
 & + \gamma_k (\alpha_k^2 - \beta_k^2 - \gamma_k^2)) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{1k} + \\
 & + \left[(\alpha + \alpha_k) e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-(\alpha_k + \alpha) \cos \beta_k t + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{\beta_k} (\beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k + \alpha (\gamma_k - \alpha_k)) \sin \beta_k t \Big] \Big] \varphi_{2k} + \\
 & + \int_0^t F_k(\tau; u, a) \left[(\alpha_k + \alpha) e^{\alpha_k(t-\tau)} + e^{\gamma_k(t-\tau)} \times \right. \\
 & \times \left[\frac{1}{\beta_k} (\beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k + \alpha (\gamma_k - \alpha_k)) \sin \beta_k(t-\tau) + \right. \\
 & \left. \left. - (\alpha_k + \alpha) \cos \beta_k(t-\tau) \right] d\tau \right\}. \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) свелось к решению системы (2.8), (2.13) относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) важную роль играет следующая

Лемма 2.1. Если $\{u(x, t), a(t)\}$ – любое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) то функции

$$u_k(t) = l_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots)$$

удовлетворяют системе, состоящей из уравнений (2.4), (2.5).

Доказательство. Пусть $\{u(x, t), a(t)\}$ – любое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7). Тогда, умножив обе части уравнения (1.1) на функцию $l_k \cos \lambda_k x$ ($k = 0, 1, \dots$), интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} & l_k \int_0^1 u_t(x, t) \cos \lambda_k x dx = \\ & = \frac{d}{dt} \left(l_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = u'_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots), \\ & l_k \int_0^1 u_{tt}(x, t) \cos \lambda_k x dx = u''_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots), \\ & l_k \int_0^1 u_{ttt}(x, t) \cos \lambda_k x dx = u'''_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots), \\ & l_k \int_0^1 u_{xx}(x, t) \cos \lambda_k x dx = \\ & = -\lambda_k^2 \left(l_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots), \\ & l_k \int_0^1 u_{xxx}(x, t) \cos \lambda_k x dx = \\ & = -\lambda_k^2 \frac{d}{dt} \left(l_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u'_k(t) \\ & \quad (k = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (2.2).

Аналогично, умножив обе части условия (1.2) на функцию $l_k \cos \lambda_k x$ ($k = 0, 1, \dots$) и интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1, получаем, что выполняется условие (2.3).

Таким образом, $u_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) являются решением задачи (2.2), (2.3). А отсюда, непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) удовлетворяют на $[0, T]$ системе (2.4), (2.5). $\square$

Очевидно, что если

$$u_k(t) = l_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots)$$

являются решением системы (2.4), (2.5), то пара

$\{u(x, t), a(t)\}$ функций

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x$$

и $a(t)$ является решением системы (2.8), (2.13).

Из леммы 2.1 следует, что имеет место следующее

Следствие. Пусть решение системы (2.8), (2.13) единственное. Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) имеет решение, то оно единственно.

С целью исследования задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) рассмотрим следующие пространства.

Обозначим через $B_{2,T}^3$ [11] совокупность всех функций вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi),$$

рассматриваемых в D_T , где каждая из функций $u_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) непрерывна на $[0, T]$ и

$$J(u) = \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = J(u).$$

Известно [14], что $B_{2,T}^3$ является банаховым пространством.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(u, a) &= \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \cos \lambda_k x, \\ \Phi_2(u, a) &= \tilde{a}(t), \end{aligned}$$

а $\tilde{u}_0(t)$, $\tilde{u}_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) и $\tilde{a}_0(t)$ равны соответственно правым частям (2.4), (2.5) и (2.13).

Примем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_{2k} &= -\frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right]^2 + \frac{1}{27} \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3} \right)^3}, \quad (2.14) \\ \beta_{2k} &= -\frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right]^2 + \frac{1}{27} \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3} \right)^3}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Тогда соотношения (2.6) и (2.7), соответственно, примут вид:

$$\alpha_{1k} = \sqrt[3]{\alpha_{2k}}, \quad \beta_{1k} = -\sqrt[3]{\beta_{2k}}.$$

Отсюда, с учётом (2.14) и (2.15), получаем:

$$|\alpha_{1k} + \beta_{1k}| = \left| \sqrt[3]{\alpha_{2k}} - \sqrt[3]{\beta_{2k}} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{\alpha_{2k} - \beta_{2k}}{\sqrt[3]{\alpha_{2k}^2} + \sqrt[3]{\alpha_{2k}\beta_{2k}} + \sqrt[3]{\beta_{2k}^2}} \right| \leq \\
 &\leq \frac{\left| \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right|}{\frac{1}{3} \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3} \right)} \leq \frac{\left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \lambda_k^2} + \frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \lambda_k^2} \leq \frac{9\alpha}{2} + \frac{11}{6}, \\
 &\sqrt[3]{\beta_{2k}} < \alpha_{1k} - \beta_{1k} = \sqrt[3]{\alpha_{2k}} + \sqrt[3]{\beta_{2k}} < 2\sqrt[3]{\beta_{2k}}, \\
 &\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{27} \lambda_k^6} < \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\beta_{2k}} < \frac{\sqrt{3}}{2} (\alpha_{1k} - \beta_{1k}) = \\
 &= \beta_k < \sqrt{3} \sqrt[3]{\beta_{2k}}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
 |\alpha_k| &\leq \left| \alpha_{1k} + \beta_{1k} - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{9\alpha}{2} + \frac{13}{6} \equiv \varepsilon_1, \\
 |\gamma_k| &= \left| -\frac{1}{3} - \frac{\alpha_{1k} + \beta_{1k}}{2} \right| \leq \frac{9\alpha}{4} + \frac{5}{4} \equiv \varepsilon_2, \\
 \varepsilon_3 \lambda_k &\equiv \frac{1}{2} \lambda_k < \beta_k < \\
 &< \sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{27} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\alpha - \frac{1}{27} \right)^2 + \frac{1}{27} \lambda_k}} \equiv \varepsilon_4 \lambda_k, \\
 b_k &= (\alpha_k - \gamma_k)^2 + \beta_k^2 > \beta_k^2 > \varepsilon_3^2 \lambda_k^2.
 \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, находим

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]} &\leq |\varphi_{00}| + T|\varphi_{10}| + (T+2)|\varphi_{00}| + \\
 &+ (T+2)\sqrt{T} \left(\int_0^T |f_0(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 &+ (T+2)T \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]} \\
 &\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \rho_0(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 |\varphi_{0k}| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^2 |\varphi_{1k}| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 &+ \rho_2(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k |\varphi_{2k}| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 &+ \rho_2(T) \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k |f_k(\tau)| \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 &+ \rho_2(T) T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\
 &\leq \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left\{ \| h'''(t) + h''(t) - f(0,t) \|_{C[0,T]} + \right. \\
 &+ \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\rho_3(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 |\varphi_{0k}| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \right. \\
 &+ \rho_4(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 |\varphi_{1k}| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_5(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^2 |\varphi_{2k}| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 &+ \left. \left. \rho_5(T) \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^2 |f_k(\tau)| \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right\}
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$+ \rho_5(T) T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg\}, \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho_0(T) &= \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_3^2} \left\{ \left(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 \right) e^{\varepsilon_1 T} + \right. \\
 &+ \left. \varepsilon_1 e^{\varepsilon_2 T} \left[\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3} \left(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \right] \right\}, \\
 \rho_1(T) &= \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_3^2} \left\{ 2\varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[2\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3} \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 \right) \right] \right\}, \\
 \rho_2(T) &= \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_3^2} \left\{ e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right) \right] \right\}, \\
 \rho_3(T) &= \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ \left(\alpha + \varepsilon_1 \right) \left(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 \right) e^{\varepsilon_1 T} + \right. \\
 &+ e^{\varepsilon_2 T} \left[\varepsilon_1 \left(\alpha \varepsilon_1 + 2\alpha \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \left(\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right) \left(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 \right) + \alpha \left(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \right) \right] \right\}, \\
 \rho_4(T) &= \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ 2\varepsilon_2 \left(\alpha + \varepsilon_1 \right) e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. 2\alpha \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3} \left(\varepsilon_2 \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 \right) + \alpha \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \right) \right] \right\}, \\
 \rho_5(T) &= \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ \left(\alpha + \varepsilon_1 \right) e^{\varepsilon_1 T} + \right. \\
 &+ e^{\varepsilon_2 T} \left[\alpha + \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \left(\alpha \varepsilon_2 + \alpha \varepsilon_1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_0(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi_0'''(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi_0'(0) = \varphi_0'(1) = 0$.
2. $\varphi_1(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi_1'''(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi_1'(0) = \varphi_1'(1) = 0$.
3. $\varphi_2(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi_2''(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi_2'(0) = \varphi_2'(1) = 0$.
4. $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$, $f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
5. $h(t) \in C^3[0,T]$, $h(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).

Тогда, из (2.16)–(2.18) получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A_1(T) + B_1(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.19)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.20)$$

где

$$A_1(T) = \|\varphi_0(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + (T+2) \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)} + (T+2) \sqrt{T} \|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \\
 & + \rho_0(T) \|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_1(T) \|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
 & + \rho_2(T) \|\varphi_2'(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_2(T) \sqrt{T} \|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \\
 & B_1(T) = \rho_2(T)T + (T+2)T, \\
 & A_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) + h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \right. \\
 & + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\rho_3(T) \|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_4(T) \|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\
 & + \left. \rho_5(T) \|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_5(T) \sqrt{T} \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right\}, \\
 & B_2(T) = \rho_5(T) \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} T.
 \end{aligned}$$

Из неравенств (2.19), (2.20) заключаем:

$$\begin{aligned}
 & \|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\
 & \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A(T) &= A_1(T) + A_2(T), \\
 B(T) &= B_1(T) + B_2(T).
 \end{aligned}$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия 1–5 и $(A(T) + 2)^2 B(T) < 1$. (2.22)

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) имеет в шаре

$$K = K_R \left(\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2 \right)$$

пространства E_T^3 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (2.23)$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u, a)$ ($i = 1, 2$) оператора $\Phi(u, a)$ определены правыми частями уравнений (2.8), (2.13).

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^3 . Аналогично (2.21) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.24)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \leq \quad (2.25)$$

$$\leq B(T) R \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \right).$$

Тогда из оценок (2.24) и (2.25), с учетом (2.22), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением уравнения (2.23), т. е. $\{u, a\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (2.8), (2.13).

Функция $u(x, t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x, t)$ и $u_{xx}(x, t)$ в D_T .

Теперь из (2.10) и (2.11) ясно, что

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_k'(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 & \leq \rho_6(T) \|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_7(T) \|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
 & + \rho_8(T) \|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
 & + \rho_8(T) \sqrt{T} \|f_{xx}(x,t) + a(t)u_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \\
 & \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k \|u_k''(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 & \leq \rho_9(T) \|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_{10}(T) \|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
 & + \rho_{11}(T) \|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
 & + \rho_{11}(T) \sqrt{T} \|f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},
 \end{aligned}$$

где

$$\rho_6(T) = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2)}{\varepsilon_3^2} \left\{ e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] \right\},$$

$$\rho_7(T) = \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2) \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right) \right\},$$

$$\rho_8(T) = \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ \varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) \right] \right\},$$

$$\rho_9(T) = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2)}{\varepsilon_3^2} \times$$

$$\times \left\{ \varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) \right] \right\},$$

$$\rho_{10}(T) = \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ 2\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \times \right.$$

$$\left. \times \left[2\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_4^2 + 2\varepsilon_2^2 \varepsilon_4^2 + \varepsilon_2^4 + \varepsilon_4^4) \right] \right\},$$

$$\rho_{11}(T) = \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ \varepsilon_1^2 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\varepsilon_2 \varepsilon_4^2 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_4^2) \right] \right\}.$$

Отсюда следует, что $u_i(x, t)$, $u_{ix}(x, t)$, $u_{tix}(x, t)$ и $u_{it}(x, t)$ непрерывны в D_T .

Далее из (2.2) нетрудно увидеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k \|u_k'''(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k \|u_k''(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_k'(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+ \\ 2\|f_x(x,t)+a(t)u_x(x,t)\|_{C[0,T]}\|_{L_2(0,1)}.$$

Из последнего соотношения ясно, что $u_{iii}(x,t)$ непрерывна в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) в шаре $K = K_R$. В силу следствия леммы 2.1, это решение единственно в шаре $K = K_R$. $\square$

С помощью леммы 1.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

Теорема 2.2. Пусть выполняются все условия теоремы 2.1 и

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$\int_0^1 \varphi_i(x)dx = 0 \quad (i = \overline{0,2}),$$

$$\varphi_0(0) = h(0), \quad \varphi_1(0) = h'(0), \quad \varphi_2(0) = h''(0).$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) имеет в шаре

$$K = K_R \left(\|z\|_{E_T^{\frac{3}{2}}} \leq R = A(T) + 2 \right)$$

из E_T^3 единственное классическое решение.

Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной обратной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с краевыми условиями Неймана. С помощью этих фактов доказано существование и единственность классического решения одной обратной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с интегральным условием первого рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Доклады Академии наук СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
2. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.Т. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
3. Eskin, G. Inverse problems for general second order hyperbolic equations with time-dependent coefficients / G. Eskin // Bulletin of Mathematical Sciences – 2017. – Vol. 7, № 2. – P. 247–307.
4. Jiang, D.J. Inverse source problem for the hyperbolic equation with a time-dependent principal part / D.J. Jiang, Y.K. Liu, M. Yamamoto // Journal

of Differential Equations. – 2017. – Vol. 262, № 1. – P. 653–681.

5. Nakamura, G. On the identification of a coefficient function in a nonlinear wave equation / G. Nakamura, M. Watanabe, B. Kaltenbacher // Inverse Problems. – 2009. – Vol. 25, № 3. – P. 035007.

6. Vabishchevich, P.N. Numerical solving the identification problem for the lower coefficient of parabolic equation / P.N. Vabishchevich, V.I. Vasil'ev // arXiv: 1304.5923v1[cs.NA] 22 April 2013.

7. Борухов, В.Т. Численное решение обратной задачи восстановления источника в параболическом уравнении / В.Т. Борухов, П.Н. Вабищевич // Математическое моделирование. – 1988. – Т. 19, № 11. – С. 92–100.

8. Мегралиев, Я.Т. О задаче идентификации линейного источника для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Тр. Ин-та матем. – 2013. – Т. 21, № 2. – С. 128–141.

9. Варламов, В.В. О фундаментальном решении одного уравнения, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде / В.В. Варламов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27, № 4. – С. 629–633.

10. Варламов, В.В. Об одной начально-краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка / В.В. Варламов // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 1455–1457.

11. Варламов, В.В. Асимптотическое поведение энергии для интегродифференциального уравнения, описывающего акустические волны в релаксирующей среде в среде с дисперсией / В.В. Варламов // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 317, № 5. – С. 792–797.

12. Мегралиев, Я.Т. Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Т. 32 (249), № 5. – С. 51–56.

13. Мегралиев, Я.Т. Об одной обратной краевой задаче для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Вестник Брянского государственного университета. – 2011. – № 4. – С. 22–28.

14. Худавердиев, К.И. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью / К.И. Худавердиев, А.А. Велиев. – Б.: Чашыюглы, 2010. – 162 с.

Поступила в редакцию 29.01.19.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ДВЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ

В.С. Монахов, А.А. Трофимук, Е.В. Зубей

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH RESTRICTIONS ON TWO MAXIMAL SUBGROUPS

V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk, E.V. Zubei

F. Scorina Gomel State University

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 – собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B . Если подгруппа A либо субнормальна в G , либо полунормальна в G , то A называется *полусубнормальной* в группе G . В настоящей работе доказана сверхразрешимость группы G при условии, что все силовские подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе G . Установлена нильпотентность второго коммутанта $(G')'$ группы G при условии, что все максимальные подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе G .

Ключевые слова: сверхразрешимая группа, полусубнормальная подгруппа, коммутант, силовская подгруппа, максимальная подгруппа.

A subgroup A of a group G is called *seminormal* in G , if there exists a subgroup B such that $G = AB$ and AB_1 is a proper subgroup of G for every proper subgroup B_1 of B . We introduce the new concept that unites subnormality and seminormality. A subgroup A of a group G is called *semisubnormal* in G , if either A is subnormal in G , or is seminormal in G . In this paper we proved the supersolubility of a group G under the condition that all Sylow subgroups of two non-conjugate maximal subgroups of G are semisubnormal in G . Also we obtained the nilpotency of the second derived subgroup $(G')'$ of a group G under the condition that all maximal subgroups of two non-conjugate maximal subgroups are semisubnormal in G .

Keywords: supersoluble groups, semisubnormal subgroup, derived subgroup, Sylow subgroup, maximal subgroup.

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group.

A subgroup A of a group G is called *seminormal* in G , if there exists a subgroup B such that $G = AB$ and $AB_1 = B_1A \neq G$ for every proper subgroup B_1 of B .

Groups with some seminormal subgroups were investigated in works of many authors, see, for example, [1]–[10]. In particular, the supersolubility of a group with seminormal Sylow subgroups was obtained in [7], [9]. In [6] the supersolubility of a group with seminormal 2-maximal subgroups was proved. In [10] first two authors obtained the sufficient conditions for the supersolubility of G under the condition that all Sylow subgroups or all maximal subgroups of two non-conjugate maximal subgroups of G are seminormal in G .

We introduce the new concept that unites subnormality and seminormality.

Definition. A subgroup A of a group G is called *semisubnormal* in G , if either A is subnormal in G , or is seminormal in G .

Let M and H be non-conjugate maximal subgroups of G . In the present paper we proved the supersolubility of a group G under the condition that all Sylow subgroups of M and H are semisubnormal in G . We also obtained the nilpotency of the second

derived subgroup $(G')'$ of a group G under the condition that all maximal subgroups of M and H are semisubnormal in G .

1 Preliminary results

We use the standard terminology of [11], [12]. Recall that $A^G = \langle A^g \mid g \in G \rangle$ is the subgroup generated by all subgroups of G that are conjugate to A . Denote by $\pi(G)$ the set of all prime divisors of order of G and by $|G : A|$ the index of subgroup A in G . We use $N \triangleleft G$ to denote a normal subgroup N of G . For maximal subgroup M of G we will use the following notation: $M < \cdot G$. We write $O_p(G)$ to denote the greatest normal p -subgroups of G . The semidirect product of a normal subgroup A and a subgroup B is written as follows: $A \rtimes B$. A subgroup U is called subnormal in G , if there exist the subgroups $U_0, U_1, \dots, U_s$ such that

$$U = U_0 \triangleleft U_1 \triangleleft \dots \triangleleft U_{s-1} \triangleleft U_s = G.$$

Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty formation. If G is a group then $G^{\mathfrak{F}}$ denotes the $\mathfrak{F}$ -residual of G , that is the intersection of all those normal subgroups N of G for which $G/N \in \mathfrak{F}$. We define $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \{G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}\}$ and call $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ the formation product of $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$, see [13, IV, 1.7]. As usually, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}$. A formation

$\mathfrak{F}$ is said to be saturated if $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ implies that $G \in \mathfrak{F}$. In this paper $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{A}$ denote the formations of all nilpotent, all supersoluble and all abelian groups respectively. The other definitions and terminology about formations could be referred to [11], [13], [14].

Lemma 1.1. (1) If H is a semisubnormal subgroup of G and $H \leq X \leq G$, then H is semisubnormal in X .

(2) If H is a semisubnormal subgroup of G and N is normal in G , then HN/N is semisubnormal in G/N .

(3) If H is a semisubnormal subgroup of G and Y is a non-empty set of elements from G , then

$$H^Y = \langle H^y \mid y \in Y \rangle$$

is semisubnormal in G . In particular, H^g is semisubnormal in G for any $g \in G$.

Proof. If H is subnormal in G , then the statements (1)–(3) are true, see [11, Lemma 2.41, Theorem 2.43]. If H is seminormal, then this statements was proved in [8, Lemma 2]. Thus the statements (1)–(3) are true.

Lemma 1.2. (1) Let p be the greatest in $\pi(G)$ and P be a Sylow p -subgroup of G . If P is semisubnormal in G , then P is normal in G .

(2) If any Sylow subgroup of G is semisubnormal in G , then G is supersoluble.

(3) Let H be a maximal subgroup of G . If H is semisubnormal in G , then the index of H in G is a prime.

(4) If every maximal subgroup of G is semisubnormal in G , then G is supersoluble.

(5) If the index of H in G is a prime, then H is semisubnormal in G .

Proof. (1) It is clear that if P is subnormal in G , then P is normal in G . If P is seminormal in G and p is greatest in $\pi(G)$, then by [7, Lemma 4], P is normal in G .

(2) Suppose that G has at least one subnormal Sylow subgroup P . Then P is normal in G and therefore is seminormal in G . Hence any Sylow subgroup of G is seminormal in G . By [7, Corollary 6], G is supersoluble.

(3) If H is subnormal in G , then H is normal in G and by [11, Lemma 3.17 (6)], $|G:H|$ is prime. Let H be a seminormal subgroup in G and K be a subgroup of G such that $HK = G$ and HK_1 is a proper subgroup of G for every proper subgroup K_1 of K . Let prime r divides the index $|G:H|$ and R be a Sylow r -subgroup of K . Then $HR = G$ and $G = H\langle x \rangle$ for $x \in R \setminus H$. We choose an element x such that its order is the smallest. Then $H\langle x^r \rangle = \langle x^r \rangle H = H$ and $|G:H| = r$.

(4) Let M be a maximal subgroup of G . By (3), the index of M in G is a prime. By [12, VI.9.2 (2)], G is supersoluble.

(5) Let $|G:H| = r$ and R be a Sylow r -subgroup of G . Then R is not contained in H and there exists an element $x \in R \setminus H$. Let $|x| = r^a$ and $|\langle x \rangle \cap H| = r^{a_1}$. It is obvious that $a > a_1$, hence

$$|\langle x \rangle H| = \frac{|\langle x \rangle||H|}{|\langle x \rangle \cap H|} = \frac{r^a \frac{|G|}{r}}{r^{a_1}} \geq |G|, \quad \langle x \rangle H = G.$$

Now x^r belongs to H and H is seminormal in G , and therefore is semisubnormal in G .

Lemma 1.3. (1) If A is a semisubnormal 2-nilpotent subgroup of G , then A^G is soluble.

(2) Let p be the smallest prime divisor of order of G . If A is semisubnormal in G and p does not divide the order of A , then p does not divide the order of A^G .

Proof. (1) If A is subnormal in G , then by [11, Theorem 5.31], A^G is soluble. If A is seminormal in G , then A^G is soluble by [8, Lemma 10].

(2) If A is a subnormal p' -subgroup of G , then by [11], A^G is a p' -subgroup. If A is a seminormal p' -subgroup of G , then A^G is a p' -subgroup by [8, Lemma 11].

Lemma 1.4 [15, Lemma 6]. Let G be a soluble group. Assume that $G \notin \mathfrak{U}$, but $G/K \in \mathfrak{U}$ for every non-trivial normal subgroup K of G . Then:

(1) G contains a unique minimal normal subgroup N , $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ for some $p \in \pi(G)$;

(2) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;

(3) G is primitive; $G = N \rtimes M$, where M is maximal in G with trivial core;

(4) N is an elementary abelian subgroup of order p^n , $n > 1$;

(5) if V is a subgroup G and $G = VN$, then $V = M^x$ for some $x \in G$.

Lemma 1.5. Let $\mathfrak{F}$ be a formation. Then $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{F}$ is a saturated formation.

Proof. According to [14], the product $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{F}$ is a local formation. Since saturated formation and local formation are equivalent concepts, $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{F}$ is a saturated formation.

Lemma 1.6. Let $\mathfrak{F}$ be a saturated formation and G be a group. Assume that $G \notin \mathfrak{F}$, but $G/N \in \mathfrak{F}$ for all non-trivial normal subgroups N of G . Then G is a primitive group.

Proof. Since $\mathfrak{F}$ is a saturated formation, it follows that $\Phi(G) = 1$ and G contains a unique minimal normal subgroup N . For some maximal subgroup M of G , we have $G = NM$, because $\Phi(G) = 1$. It is obvious that the core $M_G = 1$. Hence G is a primitive group.

Lemma 1.7 [11, Theorem 4.40–4.42]. Let G be a soluble primitive group and M is a primitivator of G . Then the following statements hold:

- (1) $\Phi(G) = 1$;
- (2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ and $F(G)$ is an elementary abelian subgroup of order p^n for some prime p and some positive integer n ;
- (3) G contains a unique minimal normal subgroup N and moreover, $N = F(G)$;
- (4) $G = F(G) \rtimes M$ and $O_p(M) = 1$.

Lemma 1.8 [18]. Let G be a minimal non-supersoluble group. Then the following holds:

- (1) G is soluble;
- (2) G contains a unique normal Sylow subgroup P and $P = G^u$;
- (3) $P/\Phi(P)$ is a minimal normal subgroup of $G/\Phi(P)$ such that $|P/\Phi(P)| > p$.

2 Supersolubility of a group with semisubnormal Sylow subgroups of two maximal subgroups

Lemma 2.1. Let M be a maximal subgroup of G . If all Sylow subgroups of M is semisubnormal in G , then $|G:M|$ is a prime, M and G/M_G is supersoluble. In particular, G is soluble.

Proof. First we prove that G is soluble. We use induction on the order of G . Let R be an arbitrary Sylow subgroup of M . By Lemma 1.1, R is semisubnormal in M . Because it is true for any Sylow subgroup of M , it follows that M is supersoluble by Lemma 1.2 (2). In particular, M is 2-nilpotent. Hence every subgroup of M is also 2-nilpotent. By Lemma 1.3 (1), R^G is soluble. If $MR^G = G$, then G soluble, since $G/R^G = MR^G/R^G \cong M/M \cap R^G$ is supersoluble. Let $R^G \leq M$. Hence G/R^G has a maximal subgroup M/R^G . Let S/R^G be a Sylow t -subgroup of M/R^G and T be a Sylow t -subgroup of S . By [11, Theorem 1.65], TR^G/R^G is a Sylow t -subgroup of S/R^G . Then $S = TR^G$ and T is a Sylow t -subgroup of M . By hypothesis, T is semisubnormal in G and by Lemma 1.1, $TR^G/R^G = S/R^G$ is semisubnormal in G/R^G . Then by induction, G/R^G is soluble, consequently G is soluble. So the solubility of G is proved.

We use induction on the order of G and prove that G/M_G is supersoluble. If $M_G \neq 1$, then M/M_G is a maximal subgroup of G/M_G . As in the previous indent it is easy to verify that the quotient G/M_G with maximal subgroup M/M_G satisfy all conditions of the lemma. By induction, $(G/M_G)/(M/M_G)_{G/M_G}$ is supersoluble. Since $(M/M_G)_{G/M_G} = 1$, it follows that G/M_G is supersoluble and $|G/M_G : M/M_G| = |G:M|$ is a prime.

Therefore we consider that $M_G = 1$. Now G is primitive and $G = N \rtimes M$, where N is a r -subgroup. Since M is supersoluble, it follows that $M = P \rtimes T$, where $P = M_p$ is a Sylow p -subgroup for the greatest $p \in \pi(M)$. Let $p = r$. Then $O_p(M) \neq 1$, a contradiction. Hence $p \neq r$ and P is a Sylow p -subgroup of G . Suppose that P is subnormal in G . Then $P \triangleleft G$, a contradiction. Consequently P is semisubnormal in G . Now G has a subgroup U such that $G = PU$. It is clear that $N \leq U$. Let x be an element of prime order that lies in N . Then $P\langle x \rangle \leq G$. If $p > r$, then $P \triangleleft P\langle x \rangle$. Thus $P \triangleleft \langle M, x \rangle = G$, a contradiction. If $p < r$, then N is a Sylow r -subgroup of G , since p is the greatest in $\pi(M)$. Now all Sylow subgroups of G is semisubnormal in G . By Lemma 1.2 (2), G is supersoluble. Hence $|G:M|$ is a prime. The lemma is proved. $\square$

Remark 2.1. Soluble groups containing a supersoluble subgroup of prime index were studied in [16], [17].

Theorem 2.1. Suppose that G has two non-conjugate maximal subgroups H and K . If all Sylow subgroups of H and of K are semisubnormal in G , then G is supersoluble.

Proof. We use induction on the order of G . By Lemma 2.1, G is soluble, H and K are supersoluble. Besides, quotients G/H_G and G/K_G are supersoluble. In particular, indices of subgroups H and K in G are primes. By Lemma 1.2 (5), subgroups H and K are semisubnormal in G .

Let N be an arbitrary non-trivial normal subgroup in G . If N is not contained in $H \cap K$, then N is either not contained in H , or N not contained in K . If N is not contained in H , then $HN = G$ and

$$G/N = HN/N \cong H/H \cap N$$

is supersoluble. Similarly, if N is not contained in K , then $KN = G$ and G/N is supersoluble. Let $N \leq H \cap K$. Then $G/N = (H/N)(K/N)$. Let $\bar{R}$ be a Sylow r -subgroup of H/N . Then H has a Sylow r -subgroup R such that $\bar{R} = RN/N$. By hypothesis, R is semisubnormal in G . By Lemma 1.1 (2), $\bar{R} = RN/N$ is semisubnormal in G/N . Similarly, every Sylow subgroup of K/N is semisubnormal in G/N . By induction, G/N is supersoluble.

So, in any case G/N is supersoluble. By Lemma 1.6, G is primitive and statements (1)–(5) of the Lemma 1.4 are true. In particular, $|N| = p^n > p$. If $N \not\leq H$, then $G = N \rtimes H$. Since H is semisubnormal in G , then by Lemma 1.2 (5), $|N| = |G:H|$ is a prime, a contradiction. Similarly, in the case when $N \not\leq K$. Hence we consider that $N \leq H \cap K$. Because H and K are supersoluble and $N = C_G(N)$,

we have p is the greatest in $\pi(H)$ and in $\pi(K)$, hence p is the greatest in $\pi(G)$. Since $O_p(G/N) = 1$ and G/N is supersoluble, p does not divide the order of G/N and N is a Sylow p -subgroup of G .

Let $N_1 \leq N$, $|N_1| = p$ and R be a Sylow r -subgroup of M . Since $M = G_{p'} = H_{p'}K_{p'}$, it follows that $R = H_rK_r$ for some Sylow r -subgroups H_r and K_r of H and of K respectively. By hypothesis, subgroups H_r and K_r are semisubnormal in G . If H_r is subnormal in G , then by [14, Corollary 7.7.2 (1)], $H_r \leq O_r(G) \leq O_{p'}(G) = 1$. Similarly, if K_r is subnormal in G , then $K_r \leq O_{p'}(G) = 1$. Consequently H_r and K_r are semisubnormal in G . Hence there exists a subgroup U such that $G = H_rU$ and H_r is permutable with any subgroup of U . Since $N \leq U$, we have H_r is permutable with N_1 . Similarly, K_r is permutable with N_1 . Hence R is permutable with N_1 . It is true for any $r \in \pi(M)$. Therefore M is permutable with N_1 . Now MN_1 is a subgroup of G and N_1 is normal in MN_1 . Since N is abelian, N_1 is normal in $NM = G$, a contradiction with $|N| > p$. The theorem is proved. $\square$

Example 2.1. The group $G = \text{PSL}(2, 5)$ has maximal subgroups $H = Z_3 \rtimes Z_2$ and $K = Z_5 \rtimes Z_2$. Maximal subgroups of Sylow subgroups of H and K are trivial, hence are semisubnormal in G , but G is not soluble. Therefore the semisubnormality of maximal subgroups of Sylow subgroups of H and K under the conditions of Theorem 2.1 is not sufficient condition for the solubility of G .

Corollary 2.1.1 [10, Theorem E]. Suppose that G has two non-conjugate maximal subgroups H and K . If all Sylow subgroups of H and of K are semisubnormal in G , then G is supersoluble.

3 On a group with semisubnormal maximal subgroups of two maximal subgroups

Lemma 3.1. Let M be a maximal subgroup of G . If all maximal subgroups of M are semisubnormal in G , then G is soluble.

Proof. We use induction on the order of G . Let K be a maximal subgroup of M . By hypothesis, K is semisubnormal in G and by Lemma 1.1 (1), K is semisubnormal in M . By Lemma 1.2 (4), M is supersoluble and consequently is 2-nilpotent. Then K is also 2-nilpotent and by Lemma 1.3, K^G is soluble. Since M is a maximal subgroup of G , then either $MK^G = G$, or $K^G \leq M$. If $MK^G = G$, then G is soluble. Let $K^G \leq M$. Then M/K^G is a maximal subgroup of G/K^G . Let $\bar{S}$ be a maximal subgroup of M/K^G . Then M has a maximal subgroup S such that $K^G \leq S$ and $\bar{S} = S/K^G$. By hypothesis, S is

semisubnormal in G . By Lemma 1.1, SK^G/K^G is semisubnormal in G/K^G . Since $K^G \leq S$, we have $S = SK^G$ and S/K^G is semisubnormal in G/K^G . By induction, G/K^G is soluble. Then G is soluble. The lemma is proved. $\square$

Example 3.1. In the condition of the Lemma 3.1, the index $|G:M|$ may not be a prime. For example, the group $G = A_4 = A \rtimes B$. The subgroup B has the order 3. Besides, B is maximal in G and all maximal subgroups of B are semisubnormal in G , but $|G:B| = 4$ is not a prime.

Example 3.2. The alternating group $G = A_4$ of degree 4 has two non-conjugate maximal subgroups $A = Z_3$ and $B = Z_2 \times Z_2$. It is clear that all maximal subgroups of A and of B are semisubnormal in G . But G is non-supersoluble.

Theorem 3.1. Let H and K are non-conjugate maximal subgroups of G . If all maximal subgroups of H and of K are semisubnormal in G , then the second derived subgroup $(G')'$ is nilpotent.

Proof. Note that the nilpotency of the second derived subgroup $(G')'$ is equivalent to $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$.

Assume that the claim is false and let G be a minimal counterexample. By Lemma 3.1, G is soluble. By Lemma 1.1 (1), every maximal subgroup of H is semisubnormal in H and by Lemma 1.2 (4), H is supersoluble. Similarly, K is supersoluble.

Let N be an arbitrary non-trivial normal subgroup in G . Then either $HN = G$, or $HN = H$. If $HN = G$, then

$$G/N = HN/N \cong H/H \cap N \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2.$$

If $HN = H$, then $N \leq H$. Similarly either $KN = G$ and $G/N \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$, or $N \leq K$. Let $N \leq H \cap K$. Then G/N has non-conjugate maximal subgroups H/N and K/N . If $\bar{S}$ is a maximal subgroup of H/N , then H has a maximal subgroup S such that $\bar{S} = S/N$. By hypothesis, S is semisubnormal in G and by Lemma 1.1 (2), $\bar{S} = S/N$ is semisubnormal in G/N . Similarly, if $\bar{T}$ is a maximal subgroup of K/N , then it is semisubnormal in G/N . Therefore for G/N with non-conjugate maximal subgroups H/N and K/N the conditions of the theorem are satisfied. By induction, $G/N \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$.

By Lemmas 1.5 and 1.6, G is primitive. Then for G we have Lemma 1.7. Hence $\Phi(G) = 1$ and G contains a unique minimal normal subgroup N such that $N = C_G(N)$.

Suppose that at least one of the subgroups H or K is normal in G . For example, let H be normal in G . Then $|G:H| = q$ and by [16, Theorem 1], $G = N \rtimes T$, where T has abelian subgroup of index q . Since $T \in \mathfrak{A}^2$, it follows that $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$, a contradiction.

Therefore in the future we assume that the subgroups H and K are non-normal. By [16, Theorem 2], $G = N \rtimes T$, where

$$T/C_T(N) \cong \bar{T} = \langle y \rangle \rtimes \langle t \rangle \rtimes \langle z \rangle$$

and $\langle z \rangle = Z(\bar{T})$. Since $N = C_G(N)$, we have $C_T(N) = 1$ and $T = \langle y \rangle \rtimes \langle x \rangle \rtimes \langle z \rangle$, because $\langle z \rangle = Z(T)$. Thus $T \in \mathfrak{A}^2$ and $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$, a contradiction. The theorem is proved. $\square$

Corollary 3.1.1. *If all 2-maximal subgroups of G are semisubnormal in G , then the derived subgroup G' is nilpotent.*

Proof. Note that the nilpotency of the derived subgroup G' is equivalent to $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$.

Assume that the claim is false and let G be a minimal counterexample. It is easy to show that G/N satisfies the hypothesis of the corollary, where N is an arbitrary non-trivial normal subgroup of G . By induction, $G/N \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$. Hence by Lemmas 1.5 and 1.6, G is primitive.

Let M be an arbitrary maximal subgroup of G . Then by Lemmas 1.1 (1) and 1.2 (4), M is supersoluble. Hence either G is supersoluble, or G is a minimal non-supersoluble group.

If G is supersoluble, then $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$ by [11, Theorem 4.52], a contradiction.

Let G be a minimal non-supersoluble group. By Lemmas 1.7 and 1.8, G is soluble, P is a unique minimal normal subgroup of G , $|P| > p$ and P is a Sylow p -subgroup of G such that $G = P \rtimes M$, where M is a maximal subgroup of G . Besides, M is a Hall p' -subgroup of G . Let P_1 be a subgroup of prime order p of P .

If M is abelian, then $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$, a contradiction. Therefore we assume that M is non-abelian. Hence M has maximal subgroups M_1 and M_2 such that $M = \langle M_1, M_2 \rangle$. If at least one of the subgroups M_1 or M_2 is subnormal in G , then $O_{p'}(G) \neq 1$, a contradiction. Thus M_1 and M_2 are seminormal in G . Hence there are the subgroups V_1 and V_2 such that

$$M_1 V_1 = M_2 V_2 = G, M_1 P_1 = P_1 M_1, M_2 P_1 = P_1 M_2,$$

because $P \leq V_1 \cap V_2$. Then $M_1 \leq N_G(P_1)$ and $M_2 \leq N_G(P_1)$. Therefore $P_1 \triangleleft G = P \langle M_1, M_2 \rangle$, a contradiction. The corollary is proved. $\square$

REFERENCES

1. Su, X. On semi-normal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, № 1. – P. 7–9.
2. Wang, P. C. Some sufficient conditions of a nilpotent group / P. C. Wang // Journal of Algebra. – 1992. – Vol. 148, № 2. – P. 289–295.

3. Foguel, T. On seminormal subgroups / T. Foguel // Journal of Algebra. – 1994. – Vol. 165. – P. 633–635.

4. Carocca, A. Some solvability criteria for finite groups / A. Carocca, H. Matos // Hokkaido Math. J. – 1997. – Vol. 26. – P. 157–161.

5. Podgornaya, V.V. Seminormal subgroups and supersolubility of finite groups / V.V. Podgornaya // Vesti Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk. – 2000. – Vol. 4, № 4. – P. 22–25 (Russian).

6. Podgornaya, V.V. Supersolubility of a finite group with seminormal second maximal subgroups / V.V. Podgornaya // Francisk Scorina Gomel State University proceedings. – 2008. – Vol. 47, № 2. – P. 154–156 (Russian).

7. Monakhov, V.S. Finite groups with a seminormal Hall subgroup / V.S. Monakhov // Math. Notes. – 2006. – Vol. 80, № 4. – P. 542–549.

8. Knyagina, V.N. Finite groups with seminormal Schmidt subgroups / V.N. Knyagina, V.S. Monakhov // Algebra and Logic. – 2007. – Vol. 46, № 4. – P. 244–249.

9. Guo, W. Finite groups with seminormal Sylow subgroups / W. Guo // Acta Mathematica Sinica. – 2008. – Vol. 24, 10. – P. 1751–1758.

10. Monakhov, V.S. Finite groups with two supersoluble subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22. – P. 297–312.

11. Monakhov, V. S. Introduction to the Theory of Finite groups and their Classes / V.S. Monakhov. – Minsk: Vyshejschaja shkola, 2006. – 207 p. (Russian).

12. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 796 p.

13. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 892 p.

14. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, 1978. – 272 p. (Russian).

15. Monakhov, V.S. On the supersoluble residual of a product of subnormal supersoluble subgroups / V.S. Monakhov, I.K. Chirik // Siberian Math. J. – 2017. – Vol. 58, № 2. – P. 271–280.

16. Kazarin, L.S. Finite solvable groups with supersolvable maximal subgroups / L.S. Kazarin, Yu.A. Korzyukov // Soviet Math. (Iz. VUZ). – 1980. – Vol. 24, № 5. – P. 23–29 (Russian).

17. Buzlanov, A.V. Finite soluble groups with given maximal subgroups / A.V. Buzlanov // Voprosy algebr. – 1993. – Vol. 6. – P. 35–45 (Russian).

18. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

Поступила в редакцию 29.05.19.

УДК 512.542

ОБОБЩЕННО РАНГОВЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМАЦИИ
КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.И. Мурашко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

GENERALIZED RANK COMPOSITION FORMATIONS OF FINITE GROUPS

V.I. Murashka

F. Scorina Gomel State University

В работе предложена конструкция композиционных формаций, включающая в себя в виде частных случаев формации квази- $\mathfrak{F}$ -групп, c -сверхразрешимых групп и ранговые формации. Описана структура групп из введенных формаций. В качестве частных случаев получен ряд результатов различных авторов. Также для предложенных формаций исследован вопрос Л.А. Шеметкова о пересечении $\mathfrak{F}$ -максимальных подгрупп и $\mathfrak{F}$ -гиперцентра.

Ключевые слова: конечная группа, c -сверхразрешимая группа, квазинильпотентная группа, квази- $\mathfrak{F}$ -группа, наследственная локальная формация, композиционная формация, $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа, $\mathfrak{F}$ -гиперцентр.

In this paper one construction of composition formations was introduced. This construction contains formations of quasi- $\mathfrak{F}$ -groups, c -supersoluble groups and groups defined by ranks of chief factors. The structure of groups from introduced formations was described. As corollaries some results of different authors were obtained. A question of L.A. Shemetkov about the intersection of $\mathfrak{F}$ -maximal subgroups and the $\mathfrak{F}$ -hypercenter was investigated for these formations.

Keywords: finite group, c -supersoluble group, quasipotent group, quasi- $\mathfrak{F}$ -group, hereditary local formation, composition formation, $\mathfrak{F}$ -maximal subgroup, $\mathfrak{F}$ -hypercenter.

AMS (2010): 20D25, 20F17, 20F19.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Через G , p и $\mathfrak{X}$ в данной работе обозначаются группа, простое число и класс групп соответственно.

Одним из важных направлений в современной теории групп является построение классов групп (формаций, классов Фиттинга, классов Шунка и т. д.) и изучение свойств всех групп в данном классе.

Напомним, что *формацией* называется класс групп $\mathfrak{X}$, обладающий следующими свойствами: (а) всякий гомоморфный образ $\mathfrak{X}$ -группы является $\mathfrak{X}$ -группой и (b) если G/M и G/N – $\mathfrak{X}$ -группы, то $G/(M \cap N) \in \mathfrak{X}$.

Одним из важнейших видов формаций являются локальные формации. Напомним, что функция вида $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется *формационной функцией* и формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной* [1], если

$$\mathfrak{F} = (G \mid G/C_G(\bar{H}) \in f(p) \text{ для любых } p \in \pi(\bar{H}))$$

и главного фактора $\bar{H}$ группы G для некоторой формационной функции f . В этом случае f называется *локальным экраном* формации $\mathfrak{F}$. По известной теореме Гашпоца – Любизедер – Шмида, формация является локальной

тогда и только тогда, когда она непуста и *насыщена*, т. е. из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$, где $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G . Классы всех единичных $\mathfrak{E}$, нильпотентных $\mathfrak{N}$, метанильпотентных $\mathfrak{N}^2$, сверхразрешимых $\mathfrak{U}$ и разрешимых $\mathfrak{S}$ групп являются примерами локальных формаций.

Наибольшее применение локальные формации находят в теории разрешимых групп. Отметим еще один интересный вид формаций разрешимых групп. Пусть $\bar{N}$ – главный фактор группы G . Тогда $\bar{N} = \bar{N}_1 \times \dots \times \bar{N}_n$, где $\bar{N}_i$ – изоморфные простые группы. Число $n = r(\bar{N}, G)$ называется *рангом* $\bar{N}$ в G . *Ранговой функцией* R [1, VII, определение 2.3] называется отображение, ставящее в соответствие каждому простому числу p множество $R(p)$ натуральных чисел. Со всякой ранговой функцией связан класс групп

$$\mathfrak{E}(R) = (G \in \mathfrak{S} \mid \text{для любого } p \in \mathbb{P} \text{ ранг всякого главного } p\text{-фактора } G \text{ лежит в } R(p)).$$

Отметим, что $\mathfrak{E}(R)$ – формация. Хайнекен [2] и Харман [3] описали все ранговые функции R для которых формация $\mathfrak{E}(R)$ локальна. Аналогичные вопросы для формаций неполной характеристики

изучались Хуппертом [4], Кохлером [5] и Харманом [3]. Хабрел и Хайнекен [6] описали все ранговые функции R , для которых $\mathfrak{E}(R)$ является формацией Фиттинга.

Функция вида $f: \mathbb{P} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется композиционным экраном. Напомним [7, с. 4], что формация $\mathfrak{F}$ называется *композиционной* или *Бэр-локальной*, если

$$\mathfrak{F} = (G \mid G/G_{\mathfrak{E}} \in f(0) \text{ и } G/C_G(\bar{H}) \in f(p))$$

для любого абелевого главного p -фактора $\bar{H}$ группы G

для некоторого композиционного экрана f . Формация является композиционной (Бэр-локальной) [1, IV, теорема 4.17] тогда и только тогда, когда она *разрешимо насыщена*, т. е. из $G/\Phi(G_{\mathfrak{E}}) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$, где $G_{\mathfrak{E}}$ – разрешимый радикал группы G .

Заметим, что локальная формация является композиционной. Обратное утверждение неверно. Примером нелокальной композиционной формации служит класс $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп, введенный Бендером [8].

Напомним, что главный фактор $\bar{H}$ группы G называется $\mathfrak{X}$ -*центральным* в G , если $\bar{H} \rtimes G/C_G(\bar{H}) \in \mathfrak{X}$ (см. [9, с. 127–128]), иначе он называется $\mathfrak{X}$ -*эксцентральным*. Через $Z_{\mathfrak{X}}(G)$ обозначается $\mathfrak{X}$ -*гиперцентр* группы G – наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что всякий её G -композиционный фактор $\mathfrak{X}$ -централен в G . Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, то $Z_{\mathfrak{N}}(G) = Z_{\infty}(G)$ – гиперцентр группы G . Отметим, что если $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, то из [7, 1, теорема 2.6] следует, что

$$\mathfrak{F} = (G \mid Z_{\mathfrak{F}}(G) = G).$$

Определение композиционной формации $\mathfrak{F}$ в общем случае дает мало информации о действии $\mathfrak{F}$ -группы G на ее неабелевых главных факторах. Ввиду этого, несколько семейств композиционных формаций были введены с помощью уточнения действия $\mathfrak{F}$ -группы на ее неабелевых главных факторах. Например, в [10], [11] Гуо и Скиба ввели класс $\mathfrak{F}^*$ всех квази- $\mathfrak{F}$ -групп для насыщенной формации $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F}^* = (G \mid \text{для любых } \mathfrak{F}\text{-эксцентрального}$$

главного фактора $\bar{H}$ и $x \in G$, x индуцирует внутренний автоморфизм на $\bar{H}$).

Если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ – нормально наследственная насыщенная формация, то $\mathfrak{F}^*$ – нормально наследственная разрешимо насыщенная формация по [10, теорема 2.6].

Еще одним примером нелокальной композиционной формации служит класс всех s -сверхразрешимых групп, введенный Ведерниковым в

[12]. Напомним, что группа называется s -сверхразрешимой (SC -группой в терминологии Робинсона [13]), если всякий ее главный фактор – простая группа. Согласно [14], группа G называется $\mathcal{I}c$ -сверхразрешимой, если всякий главный $\mathcal{I}$ -фактор группы G является простой группой, где $\mathcal{I}$ – некоторый класс простых групп. В [14] аналогичная идея была применена к некоторым другим классом групп. Произведения групп из получившихся классов изучались в [14], [15]. В работе [16] был введен класс $\mathfrak{F}_{ca}$ всех sa - $\mathfrak{F}$ -групп:

$$\mathfrak{F}_{ca} = (G \mid \text{абелевые главные факторы } G$$

$\mathfrak{F}$ -центральны, а остальные главные факторы – простые группы).

Класс $\mathfrak{F}_{ca}$ изучался в работах [16], [17], где $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, в частности, этот класс – композиционная формация.

Используются стандартные обозначения и терминология из [1], [7]. Напомним, что через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G для формации $\mathfrak{F}$; $\pi(G)$ – множество простых делителей $|G|$; $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \pi(G)$;

$$\mathfrak{N}_p \mathfrak{F} = (G \mid G/O_p(G) \in \mathfrak{F})$$

является формацией для формации $\mathfrak{F}$; $\tilde{F}(G)$ определяется из $\tilde{F}(G)/\Phi(G) = \text{Soc}(G/\Phi(G))$; $N \wr S_n$ – естественное сплетение группы N с симметрической группой S_n степени n . Через $E\mathfrak{F}$ будем обозначать класс групп, все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{F}$.

1 Конструкция обобщенно ранговых формаций

В данной работе мы обобщаем конструкции квази- $\mathfrak{F}$ -групп, sa - $\mathfrak{F}$ -групп, $\mathcal{I}c$ -сверхразрешимых групп и классов групп, определяемых ранговыми функциями, в смысле следующего определения.

Определение 1.1. (1) Обобщенная ранговая функция $\mathcal{R}$ – отображение, определенное на прямых произведениях изоморфных простых групп следующим образом:

(a) $\mathcal{R}$ ставит в соответствие каждой простой группе S пару $\mathcal{R}(S) = (A_{\mathcal{R}}(S), B_{\mathcal{R}}(S))$ возможно пустых непересекающихся множеств $A_{\mathcal{R}}(S)$ и $B_{\mathcal{R}}(S)$ натуральных чисел.

(b) Если N – прямое произведение простых изоморфных S групп, то $\mathcal{R}(N) = \mathcal{R}(S)$.

(2) Пусть $\bar{N}$ – главный фактор G . Будем говорить, что *обобщенный ранг* $\bar{N}$ в G лежит в $\mathcal{R}(\bar{N})$ (кратко $gr(\bar{N}, G) \in \mathcal{R}(\bar{N})$), если $r(\bar{N}, G) \in A_{\mathcal{R}}(\bar{N})$ или $r(\bar{N}, G) \in B_{\mathcal{R}}(\bar{N})$ и, если $x \in G$ фиксирует композиционный фактор $\bar{H}/\bar{K}$ в $\bar{N}$ (т. е.

$\bar{H}^x = \bar{H}$ и $\bar{K}^x = \bar{K}$), то x индуцирует внутренний автоморфизм на нем.

(3) С каждым обобщенно ранговой функцией $\mathcal{R}$ и классом групп $\mathfrak{X}$ мы связываем класс групп

$$\mathfrak{X}(\mathcal{R}) = (G \mid \bar{H} \notin \mathfrak{X} \text{ и}$$

$gr(\bar{H}, G) \in \mathcal{R}(\bar{H})$ для любого $\mathfrak{X}$ -эксцентрального главного фактора $\bar{H}$ группы G).

Пример 1.1. Многие из отмеченных выше формаций являются частными случаями этой конструкции:

1. Пусть $\mathfrak{E} = (1)$. Предположим, что $\mathcal{R}(H) = (\{1\}, \emptyset)$, если H абелева и $\mathcal{R}(H) = (\emptyset, \emptyset)$ в противном случае. Тогда $\mathfrak{E}(\mathcal{R}) = \mathfrak{U}$.

2. Если $\mathcal{R}(H) \equiv (\{1\}, \emptyset)$, то $\mathfrak{E}(\mathcal{R})$ – класс $\mathfrak{U}_c$ всех c -сверхразрешимых групп.

3. Пусть $\mathcal{I}$ – класс простых групп. Если $\mathcal{R}(H) = (\{1\}, \emptyset)$ для $H \in \mathcal{I}$ и $\mathcal{R}(H) = (\mathbb{N}, \emptyset)$ в противном случае, то $\mathfrak{E}(\mathcal{R})$ – класс всех $\mathcal{I}_c$ -сверхразрешимых групп.

4. Предположим, что $\mathcal{R}(H) = (A_{\mathcal{R}}(H), \emptyset)$, если H абелева и $\mathcal{R}(H) = (\emptyset, \emptyset)$ в противном случае. Тогда $\mathcal{R}$ – ранговая функция.

5. Пусть $\mathcal{R}(H) = (\emptyset, \{1\})$, если H абелева и $\mathcal{R}(H) = (\emptyset, \emptyset)$ в противном случае. Тогда $\mathfrak{E}(\mathcal{R}) = \mathfrak{N}$.

6. Если $\mathcal{R}(H) \equiv (\emptyset, \{1\})$, то $\mathfrak{E}(\mathcal{R}) = \mathfrak{N}^*$.

7. Предположим, что $\mathcal{R}(H) = (\emptyset, \{1\})$, если H абелева и $\mathcal{R}(H) = (\{1\}, \emptyset)$ в противном случае. Тогда $\mathfrak{E}(\mathcal{R}) = \mathfrak{N}_{ca}$.

8. Пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ – нормально наследственная насыщенная формация. Если $\mathcal{R}(H) \equiv (\emptyset, \{1\})$, то $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) = \mathfrak{F}^*$ (см. доказательства следствия 1.1.3).

9. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ – нормально наследственная насыщенная формация, $\mathcal{R}(H) = (\emptyset, \emptyset)$ для абелевых $H \notin \mathfrak{F}$ и $\mathcal{R}(H) = (\{1\}, \emptyset)$ для неабелевых H . Тогда $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) = \mathfrak{F}_{ca}$.

Напомним, что всякая непустая композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный композиционный экран F такой, что

$$F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$$

для всех простых p и $F(0) = \mathfrak{F}$ [7, 1, теорема 1.6]. В этом случае F называется максимальным внутренним композиционным экраном $\mathfrak{F}$.

Будем называть обобщенную ранговую функцию $\mathcal{R}$ (соответственно, сильно) наследственной, если для любой простой группы S выполняется:

(a) из $a \in A_{\mathcal{R}}(S)$ всегда следует, что $b \in A_{\mathcal{R}}(S)$ для любого натурального $b \mid a$ (соответственно, $b \leq a$);

(b) из $a \in B_{\mathcal{R}}(S)$ всегда следует, что $b \in A_{\mathcal{R}}(S) \cup B_{\mathcal{R}}(S)$ (соответственно, $b \in B_{\mathcal{R}}(S)$) для любого натурального $b \mid a$ (соответственно, $b \leq a$).

Теорема 1.1. Пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ – композиционная формация с максимальным внутренним композиционным экраном F и $\mathcal{R}$ – обобщенная ранговая функция. Тогда

(1) $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ – композиционная формация с максимальным внутренним композиционным экраном $F_{\mathcal{R}}$ таким, что $F_{\mathcal{R}}(0) = \mathfrak{F}(\mathcal{R})$ и $F_{\mathcal{R}}(p) = F(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

(2) Если $\mathfrak{F}$ нормально наследственна и $\mathcal{R}$ – наследственная обобщенная ранговая функция, то $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ также нормально наследственна.

Следствие 1.1.1 [18, теорема 1]. Класс $\mathfrak{U}_c$ – композиционная формация с максимальным внутренним композиционным экраном h таким, что $h(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{U}(p-1)$ для любого простого p и $h(0) = \mathfrak{U}_c$.

В работе [19] был введен класс $w\mathfrak{U}$ всех расширенно сверхразрешимых групп. Данный класс является наследственной насыщенной формацией разрешимых групп. Напомним [20], что группа называется расширенно c -сверхразрешимой, если её абелевы факторы $w\mathfrak{U}$ -центральны, а оставшиеся – простые группы.

Следствие 1.1.2 [20, теорема A]. Класс $\mathfrak{U}_{cw}$ всех расширенно c -сверхразрешимых групп – нормально наследственная композиционная формация с максимальным внутренним композиционным экраном h , таким, что

$$h(p) = \mathfrak{N}_p (G \mid G \in w\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}_p \mathcal{A}(p-1))$$

для любого простого p и $h(0) = \mathfrak{U}_{cw}$.

Следствие 1.1.3 [10, теорема 2.6]. Для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы, с максимальным внутренним локальным экраном F , формация $\mathfrak{F}^*$ является композиционной с максимальным внутренним композиционным экраном F^* , где $F^*(p) = F(p)$ для любого простого p и $F^*(0) = \mathfrak{F}^*$. Более того, если формация $\mathfrak{F}$ нормально наследственна, то $\mathfrak{F}^*$ также нормально наследственна.

При доказательстве теоремы 1.1 нам понадобятся следующие леммы:

Лемма 1.1. Пусть H/K и M/N – G -изоморфные главные факторы группы G .

(a) Тогда они имеют одинаковый обобщенный главный ранг.

(b) [7, 1, лемма 1.4]

$$H/K \rtimes G / C_G(H/K) \cong M/N \rtimes G / C_G(M/N).$$

Доказательство. Пусть $\alpha: H/K \rightarrow M/N$ – G -изоморфизм. Так как H/K и M/N –

изоморфные группы, то они имеют одинаковый ранг. Предположим, что $x \in G$ фиксирует композиционный фактор A/B группы H/K и индуцирует внутренний автоморфизм aB на нем. Заметим, что $\alpha(A/B)$ – композиционный фактор M/N . Из $\alpha(A/B)^x = \alpha(A/B^x) = \alpha(A/B)$ следует, что x фиксирует $\alpha(A/B)$ и достаточно легко проверить, что x индуцирует внутренний автоморфизм $\alpha(aB)$ на нем. Так как α^{-1} также является G -изоморфизмом, можно сделать вывод, что H/K и M/N имеют одинаковые обобщенные ранги. $\square$

Лемма 1.2 [7, 1, предложение 1.15]. Пусть $\bar{H}$ – главный фактор группы G .

(1) Если $\mathfrak{F}$ – композиционная формация и F – её максимальный внутренний композиционный экран, то $\bar{H}$ $\mathfrak{F}$ -централен тогда и только тогда, когда $G/C_G(\bar{H}) \in F(p)$ для всех $p \in \pi(\bar{H})$, в случае абелевого $\bar{H}$, и $G/C_G(\bar{H}) \in \mathfrak{F}$, когда $\bar{H}$ неабелевый.

(2) Если $\mathfrak{F}$ – локальная формация и F – её максимальный внутренний локальный экран, то $\bar{H}$ $\mathfrak{F}$ -централен тогда и только тогда, когда $G/C_G(\bar{H}) \in F(p)$ для всех $p \in \pi(\bar{H})$.

Следующая лемма следует из [7, 1, теорема 2.6].

Лемма 1.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация. Тогда $\mathfrak{F} = (G | G = Z_{\mathfrak{F}}(G))$.

Напомним, что через $C^p(G)$ обозначается пересечение всех централизаторов абелевых главных p -факторов G ($C^p(G) = G$ когда G не имеет таких факторов). Пусть f – композиционный экран композиционной формации $\mathfrak{F}$. Известно, что $\mathfrak{F} = (G | G/C_G \in f(0))$ и $G/C^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$ таких, что G имеет абелевый главный p -фактор).

Лемма 1.4 [21, X, 13.16 (a)]. Предположим, что $G = G_1 \times \dots \times G_n$, где всякая G_i – простая неабелева подгруппа группы G и $G_i \neq G_j$ для $i \neq j$. Тогда всякая субнормальная подгруппа H группы G – прямое произведение некоторых G_i .

Следующая лемма напрямую вытекает из предыдущей.

Лемма 1.5. Пусть нормальная подгруппа N группы G является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Тогда N – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G .

Доказательство теоремы 1.1. (1) Из (b) и (c) теорем об изоморфизмах [1] и леммы 1.1 следует, что $\mathfrak{X}(\mathcal{R})$ – формация для любого класса групп $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ – формация. Пусть

$$\mathfrak{H} = CLF(F_{\mathcal{R}}).$$

Предположим, что $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}(\mathcal{R}) \neq \emptyset$. Выберем группу G минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}(\mathcal{R})$. Так как $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ – формация, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G/N \in \mathfrak{F}(\mathcal{R})$.

Предположим, что N абелева. Тогда она является p -группой. Так как N $\mathfrak{H}$ -центральна в G по лемме 1.3, $G/C_G(N) \in F_{\mathcal{R}}(p)$ по лемме 1.2. Из $F_{\mathcal{R}}(p) = F(p)$ и леммы 1.2 следует, что N – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор G . Тогда $G \in \mathfrak{F}(\mathcal{R})$, противоречие.

Значит, N неабелева. Заметим, что $G_{\mathfrak{S}} \leq C_G(N)$ по [7, 1, предложение 1.5]. Тогда

$$G \simeq G/C_G(N) \in F_{\mathcal{R}}(0) = \mathfrak{F}(\mathcal{R}),$$

противоречие. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{R})$.

Предположим, что $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) \setminus \mathfrak{H} \neq \emptyset$. Выберем группу G минимального порядка из $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) \setminus \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ – формация, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G/N \in \mathfrak{H}$.

Если N абелева, то $G/C_G(N) \in F(p)$ для некоторого p по леммам 1.2 и 1.3. Из $F_{\mathcal{R}}(p) = F(p)$ и леммы 1.2 следует, что N $\mathfrak{H}$ -центральна в G . Итак, $G \in \mathfrak{H}$, противоречие.

Значит, N неабелева. Следовательно, $G_{\mathfrak{S}} = 1$. Тогда $G/G_{\mathfrak{S}} \simeq G \in \mathfrak{F}(\mathcal{R}) = F_{\mathcal{R}}(0)$. Заметим, что $N \leq C^p(G)$ для всех простых p . Поэтому $C^p(G)/N = C^p(G/N)$. Из $G/N \in \mathfrak{H}$ следует, что $G/C^p(G) \simeq (G/N)/C^p(G/N) \in F_{\mathcal{R}}(p)$ для любого p такого, что G имеет абелевый главный p -фактор. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$, противоречие. Значит, $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) \subseteq \mathfrak{H}$. Итак, $\mathfrak{F}(\mathcal{R}) = \mathfrak{H}$.

(2) Пусть F – максимальный композиционный экран формации $\mathfrak{F}$, G – $\mathfrak{F}$ -группа, $1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq N_n = N \trianglelefteq G$ – часть главного ряда группы G , находящаяся ниже N и H/K – главный фактор N такой, что $N_{i-1} \leq K \leq H \leq N_i$ для некоторого i .

Если $N_i/N_{i-1} \notin \mathfrak{F}$, то эта секция неабелева. Согласно лемме 1.5, N_i/N_{i-1} – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп N/N_{i-1} . Пусть группа L/N_{i-1} – одна из них и L_1/N_{i-1} – её простой прямой множитель. Заметим, что $r(N_i/N_{i-1}, G) = |G : N_G(L_1/N_{i-1})|$,

$$N_G(L_1/N_{i-1}) \cap N = N_N(L_1/N_{i-1})$$

и $|G : N_N(L_1/N_{i-1})|$ – делитель $|G : N_G(L_1/N_{i-1})|$ по [22, §1, лемма 1]. Значит, $r(L/N_{i-1}, N)$ делит $r(N_i/N_{i-1}, G)$ и любой композиционный фактор

группы L/N_{i-1} является и композиционным фактором N_i/N_{i-1} . Так как $\mathcal{R}$ – наследственная обобщенная ранговая функция,

$$gr(L/N_{i-1}, N) \in \mathcal{R}(L/N_{i-1})$$

для любого главного фактора L/N_{i-1} группы N между N_{i-1} и N_i .

Если фактор $N_i/N_{i-1} \in \mathfrak{F}$, то он $\mathfrak{F}$ -централен в G . Заметим, что $H/K \in \mathfrak{F}$.

Предположим, что N_i/N_{i-1} абелев. Тогда $G/C_G(N_i/N_{i-1}) \in F(p)$ для некоторого p по лемме 1.2. Заметим, что $F(p)$ – нормально наследственная формация по [1, IV, предложение 3.16]. Так как

$$NC_G(N_i/N_{i-1})/C_G(N_i/N_{i-1}) \trianglelefteq G/C_G(N_i/N_{i-1}),$$

понятно, что

$$\begin{aligned} NC_G(N_i/N_{i-1})/C_G(N_i/N_{i-1}) &\simeq \\ &\simeq N/C_N(N_i/N_{i-1}) \in F(p). \end{aligned}$$

Из $C_N(N_i/N_{i-1}) \leq C_N(H/K)$ следует, что $N/C_N(H/K)$ – фактор группа группы $N/C_N(N_i/N_{i-1})$. Значит, $N/C_N(H/K) \in F(p)$. Следовательно, H/K – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор N по лемме 1.2.

Предположим, что N_i/N_{i-1} неабелева. Тогда $G/C_G(N_i/N_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.2. Значит, $NC_G(N_i/N_{i-1})/C_G(N_i/N_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. Аналогично предыдущему абзацу, $N/C_N(H/K) \in \mathfrak{F}$. Тогда H/K – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор N по лемме 1.2.

Таким образом, всякий главный $\mathfrak{F}$ -фактор группы N $\mathfrak{F}$ -централен и $gr(\bar{H}, N) \in \mathcal{R}(\bar{H})$ для любого другого главного фактора $\bar{H}$ группы N по теореме Жордана – Гёльдера. Итак, $N \in \mathfrak{F}(\mathcal{R})$. $\square$

Доказательства следствий 1.1.1, 1.1.2 и 1.1.3. Напомним, что всякая локальная формация является композиционной. Известно, что если F – максимальный внутренний локальный экран локальной формации $\mathfrak{F}$, то D – максимальный внутренний композиционный экран $\mathfrak{F}$, где $D(0) = \mathfrak{F}$ и $F(p) = D(p)$ для всех простых p .

Пусть $\mathcal{R}(H) \equiv (\{1\}, \emptyset)$. Тогда $\mathcal{R}$ наследственна H . Напомним, что классы всех сверхразрешимых и расширенно сверхразрешимых групп являются наследственными локальными формациями с максимальными внутренними локальными экранами $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$ и

$$D(p) = \mathfrak{N}_p(G | G \in w\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1))$$

[20, лемма 3.2] для любого простого p соответственно. Заметим, что $\mathfrak{U}_c = \mathfrak{U}(\mathcal{R})$ and $\mathfrak{U}_{cw} = w\mathfrak{U}(\mathcal{R})$. Ввиду этого, следствия 1.1.1 и 1.1.2 напрямую вытекают из теоремы 1.1.

Пусть $\mathcal{R}(H) \equiv (\emptyset, \{1\})$ и $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация. Отметим, что $\mathcal{R}$ наследственна H . Пусть $\bar{H} \in \mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -эксцентральный главный фактор $\mathfrak{F}^*$ -группы G . Заметим, что $r(\bar{H}, G) = 1$ и $\bar{H} \rtimes G/C_G(\bar{H})$ – фактор-группа группы $\bar{H} \times \bar{H} \in \mathfrak{F}$. Итак, $\bar{H}$ $\mathfrak{F}$ -централен в G , противоречие. Значит, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}(\mathcal{R})$. Ввиду вышеизложенного, следствие 1.1.3 напрямую вытекает из теоремы 1.1. $\square$

2 Структура $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ -группы

Целью этого раздела является получение характеристик $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ -групп.

Определение 2.1. Пусть $Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, n)$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что $\bar{H} \notin \mathfrak{F}$, $r(\bar{H}, G) > n$ и $gr(\bar{H}, G) \in \mathcal{R}(\bar{H})$ для любого её G -композиционного $\mathfrak{F}$ -эксцентрального в G фактора $\bar{H}$.

Пусть C – множество и $\mathcal{R}$ – обобщенная ранговая функция. Будем говорить, что $\mathcal{R}(\bar{H}) \subseteq C$, если $A_{\mathcal{R}}(\bar{H}) \cup B_{\mathcal{R}}(\bar{H}) \subseteq C$. Под $\mathcal{R}(\bar{H}) \cap C$ будем подразумевать

$$(A_{\mathcal{R}}(\bar{H}) \cap C, B_{\mathcal{R}}(\bar{H}) \cap C).$$

Замечание 2.1. (1) Пусть N и M – нормальные подгруппы группы G . Согласно п. (b) теорем об изоморфизмах [1] всякий G -композиционный фактор NM G -изоморфен некоторому G -композиционному фактору группы N или группы M . Следовательно, $Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, n)$ существует в любой группе по лемме 1.1.

(2) Очевидно, что $G \in \mathfrak{F}(\mathcal{R})$ тогда и только тогда, когда $G = Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, 0)$.

(3) Если $\mathcal{R}(S) \subseteq [0, 1]$ для любой простой группы S , то $Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, n) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ для $n > 1$.

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, содержащая все нильпотентные группы, которая наряду со всякой своей группой содержит и все ее композиционные факторы. Если $\mathcal{R}$ – обобщенная ранговая функция, то следующие утверждения эквивалентны:

(1) G – $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ -группа.

(2) Если $Z = Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, 4)$, то

$$gr(N/Z, G) \in \mathcal{R}(N/Z) \cap [1, 4]$$

для любой минимальной нормальной подгруппы N/Z группы G/Z и $(G/Z)/\text{Soc}(G/Z)$ – разрешимая $\mathfrak{F}$ -группа.

(3) Верны следующие утверждения:

(a) $G^{\mathfrak{F}} = G^{E\mathfrak{F}}$.

(b) Если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq G^{\mathfrak{F}}$, то

$$(G^{\mathfrak{F}}/N)_{E\mathfrak{F}} = Z(G^{\mathfrak{F}}/N).$$

(с) Пусть n – наименьшее число, такое, что найдётся простая не- $\mathfrak{F}$ -секция в S_{n+1} и $T = G^{\mathfrak{F}} \cap Z(G, \mathcal{R}, \mathfrak{F}, n)$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}/T \leq \text{Soc}(G/T)$ и $N/T \notin \mathfrak{F}$, $r(N/T, G) \leq n$ и

$$\text{gr}(N/T, G) \in \mathcal{R}(N/T)$$

для любой минимальной нормальной подгруппы N/T группы G/T из $G^{\mathfrak{F}}/T$.

Напомним [7, с. 13], что группа называется полупростой, если она или единична, или является прямым произведением простых неабелевых групп.

Следствие 2.1.1 [21, X, теорема 13.6]. Группа G квазинильпотентна тогда и только тогда, когда $G/Z_{\infty}(G)$ полупроста.

Следствие 2.1.2 [10, теорема 2.8]. Пусть $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Группа G является квази- $\mathfrak{F}$ -группой тогда и только тогда, когда $G/Z_{\mathfrak{F}}(G)$ полупроста.

Следствие 2.1.3 [17, теорема А]. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация разрешимых групп, содержащая все нильпотентные группы. Тогда и только тогда $G \in \mathfrak{F}_{\text{ca}}$, когда $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{E}}$, $Z(G^{\mathfrak{F}}) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ и $G^{\mathfrak{F}}/Z(G^{\mathfrak{F}})$ – прямое произведение G -допустимых простых неабелевых групп.

Следствие 2.1.4 [13, предложение 2.4]. Группа G является s -сверхразрешимой тогда и только тогда, когда найдётся совершенная нормальная подгруппа D такая, что G/D сверхразрешима, $D/Z(D)$ – прямое произведение G -допустимых простых неабелевых групп и $Z(D)$ сверхразрешимо вложена в G .

Следствие 2.1.5 [20, теорема В]. Группа G является расширенно s -сверхразрешимой тогда и только тогда, когда

$$G^{w\mathfrak{M}} = G^{\mathfrak{E}}, \quad Z(G^{w\mathfrak{M}}) \leq Z_{w\mathfrak{M}}(G)$$

и $G^{w\mathfrak{M}}/Z(G^{w\mathfrak{M}})$ – прямое произведение G -допустимых простых неабелевых групп.

3 О пересечении $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ -максимальных подгрупп

Напомним [1, с. 288], что подгруппа U группы G называется $\mathfrak{X}$ -максимальной в G , если (а) $U \in \mathfrak{X}$, и (б) из $U \leq V \leq G$ и $V \in \mathfrak{X}$ следует, что $U = V$. Пересечение всех $\mathfrak{X}$ -максимальных подгрупп группы G обозначается через $\text{Int}_{\mathfrak{X}}(G)$.

Заметим, что пересечение максимальных абелевых подгрупп группы G совпадает с центром G . Согласно Бэру [22], пересечение максимальных нильпотентных подгрупп G совпадает с гиперцентром G . В [23, пример 5.17] показано, что пересечение максимальных сверхразрешимых подгрупп может не совпадать со

сверхразрешимым гиперцентром. В 1995 году на Гомельском алгебраическом семинаре Л.А. Шеметков задал вопрос: «Для каких нормально наследственных разрешимо насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ равенство $\text{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G »?

Отвечая на вопрос Л.А. Шеметкова А.Н. Скиба [23] (в разрешимом случае Дж. Бейдлеман и Г. Хайнекен [24]) описал все наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$, для которых равенство $\text{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G . Автор исследовал этот вопрос для формаций квази- $\mathfrak{F}$ -групп [25]. В этом разделе этот вопрос будет исследован для $\mathfrak{F}(\mathcal{R})$ -групп.

Теорема 3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, m – натуральное число, такое, что $\mathfrak{G}_{\{q \in \mathbb{P} | q \leq m\}} \subseteq \mathfrak{F}$, $\mathcal{R}$ – сильно наследственная обобщенная ранговая функция, такая, что $\mathcal{R}(N) \subseteq [0, m]$ для любой простой группы N . Следующие условия эквивалентны:

(1) $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G и

$$\bigcup_{n=1}^m (\text{Out}(G) \wr S_n \mid G \notin \mathfrak{F} \text{ – простая группа и } n \in A_{\mathcal{R}}(G)) \subseteq \mathfrak{F}.$$

(2) $Z_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G)$ верно для любой группы G .

Следствие 3.1.1 [25, теорема 1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда и только тогда $\text{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G , когда $\text{Int}_{\mathfrak{F}^*}(G) = Z_{\mathfrak{F}^*}(G)$ верно для любой группы G .

Следствие 3.1.2. Пусть $\mathcal{R}$ – сильно наследственная обобщенная ранговая функция. Тогда и только тогда $Z_{\mathfrak{M}(\mathcal{R})}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{M}(\mathcal{R})}(G)$ верно для любой группы G , когда для любой простой неабелевой группы N выполняется:

(1) $\mathcal{R}(N) \subseteq [0, 2]$;

(2) если $1 \in A_{\mathcal{R}}(N)$, то $\text{Out}(N)$ нильпотентна;

(3) если $2 \in A_{\mathcal{R}}(N)$, то $\text{Out}(N)$ является

2-группой.

Пример 3.1. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – классы групп, абелевы главные факторы которых центральны, а неабелевы – произвольны и прямые произведения не более 2 знакопеременных групп соответственно. Тогда равенства $Z_{\mathfrak{M}^*}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{M}^*}(G)$ и $Z_{\mathfrak{F}_2}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{F}_2}(G)$ верны для любой группы G и найдутся группы G_1 и G_2 такие, что

$$Z_{\mathfrak{M}_{\text{ca}}}(G_1) \neq \text{Int}_{\mathfrak{M}_{\text{ca}}}(G_1) \text{ и } Z_{\mathfrak{F}_1}(G_2) \neq \text{Int}_{\mathfrak{F}_1}(G_2).$$

Важно отметить, что если

$$Z_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G)$$

верно для любой группы G , то $\mathcal{R}$ ограничена:

Теорема 3.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\mathcal{R}$ – сильно наследственная обобщенная ранговая функция.

(1) Предположим, что

$$Z_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G)$$

верно для любой группы G . Пусть

$$C_1 = \min_{G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \text{ и } F(G) = \bar{F}(G)} \max \{|M| - 1 \mid M -$$

максимальная подгруппа $G\}$.

Тогда $\mathcal{R}(S) \subseteq [0, C_1]$ для любой простой группы $S \notin \mathfrak{F}$.

(2) Пусть

$$C_2 = \max \{m \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{G}_{\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq m\}} \subseteq \mathfrak{F}\}.$$

Если $\mathcal{R}(S) \subseteq [0, C_2]$ для любой простой группы $S \notin \mathfrak{F}$, то $\text{gr}(\bar{H}, G) \in \mathcal{R}(\bar{H})$ для любого G -композиционного фактора $\bar{H} \notin \mathfrak{F}$ ниже $\text{Int}_{\mathfrak{F}(\mathcal{R})}(G)$.

Автор выражает признательность доктору физико-математических наук А.Ф. Васильеву за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Heineken, H. Group classes defined by chief factor ranks / H. Heineken // Boll. Un. Mat. Ital. B. – 1979. – Vol. 16. – P. 754–764.
3. Harman, D. Characterizations of some classes of finite soluble groups. Ph. D. thesis, University of Warwick, 1981.
4. Huppert, B. Zur Gaschiitzschen Theorie der Formationen / B. Huppert // Math. Ann. – 1966. – Vol. 164. – P. 133–141.
5. Kohler, J. Finite groups with all maximal subgroups of prime or prime square index / J. Kohler // Canad. J. Math. – 1964. – Vol. 16. – P. 435–442.
6. Haberl, K.L. Fitting classes defined by chief factor ranks / K.L. Haberl, H. Heineken // J. London Math. Soc. – 1984. – Vol. 29. – P. 34–40.
7. Guo, W. Structure theory for canonical classes of finite groups / W. Guo. – Heidelberg – New-York – Dordrecht – London: Springer, 2015. – 359 p.
8. Bender, H. On groups with abelian Sylow 2-subgroups / H. Bender // Math. Z. – 1970. – Bd. 117. – P. 164–176.
9. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
10. Guo, W. On finite quasi- $\mathfrak{F}$ -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.
11. Guo, W. On some classes of finite quasi- $\mathfrak{F}$ -groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.

12. Ведерников, В.А. О некоторых классах конечных групп / В.А. Ведерников // ДАН БССР. – 1988. – Т. 32, № 10. – С. 872–875.

13. Robinson, D.J.S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–159.

14. Васильев, А.Ф. О конечных группах с заданным нормальным строением / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, Е.Н. Мысловец // Сиб. электрон. матем. изв. – 2016. – Т. 13. – С. 897–910.

15. Мысловец, Е.Н. J-конструкции композиционных формаций и произведения конечных групп / Е.Н. Мысловец // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 68–73.

16. Мысловец, Е.Н. О конечных са-F-группах / Е.Н. Мысловец // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 64–68.

17. Мысловец, Е.Н. Конечные обобщенно с-сверхразрешимые группы и их взаимно перестановочные произведения / Е.Н. Мысловец, А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 45–53.

18. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 11. – С. 10–14.

19. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

20. Васильев, А.Ф. Конечные расширенно с-сверхразрешимые группы и их взаимно перестановочные произведения / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, Е.Н. Мысловец // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 3. – С. 603–616.

21. Huppert, B. Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1982. – 454 p.

22. Baer, R. Group elements of prime power index / R. Baer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 75. – P. 20–47.

23. Skiba, A.N. On the $\mathfrak{F}$ -hypercentre and the intersection of all $\mathfrak{F}$ -maximal subgroups of a finite group / A.N. Skiba // J. Pure Appl. Algebra. – 2012. – Vol. 216. – P. 789–799.

24. Beidleman, J.C. A note on intersections of maximal $\mathfrak{F}$ -subgroups / J.C. Beidleman, H. Heineken // J. Algebra. – 2011. – Vol. 333. – P. 120–127.

25. Murashka, V.I. On the $\mathfrak{F}$ -hypercenter and the intersection of $\mathfrak{F}$ -maximal subgroups of a finite group / V.I. Murashka // J. Group Theory. – 2018. – Vol. 21, № 3. – P. 463–473.

Поступила в редакцию 30.04.19.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ ПЕРВОГО РОДА

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, А.А. Драпеза

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF TYPE I HERMITE – PADÉ POLYNOMIALS

A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko, A.A. Drapeza

F. Scorina Gomel State University

В работе введены новые понятия: вполне нормальный индекс и вполне совершенная система функций. С помощью этих понятий сформулирован и доказан критерий единственности, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде 1-го рода для произвольной системы степенных рядов. Полученные результаты дополняют и обобщают хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита – Паде.

Ключевые слова: многочлены Эрмита – Паде, нормальный индекс, совершенная система, определитель Адамара, определитель Ганкеля.

New concepts are introduced in the work. They are quite normal index and a quite perfect system of functions. Using these concepts, a uniqueness criterion was formulated and proved, explicit determinant representations of type I Hermite – Padé polynomials for an arbitrary system of power series were obtained. The results obtained complement and generalize the well-known result in the theory of Hermite – Padé approximations.

Keywords: Hermite-Padé polynomials, normal index, perfect system, Hadamard determinant, Hankel determinant.

1 Постановка задачи

Пусть $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ – набор k степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}}, j = 1, 2, \dots, k \quad (1.1)$$

с комплексными коэффициентами. Множество k -мерных мультииндексов (индексов), т. е. упорядоченных k натуральных чисел $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, обозначим $\mathbb{N}^k$. Порядок индекса $n = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ – это сумма $|n| := n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Рассмотрим следующую задачу Эрмита – Паде [1; гл. 4, §3]:

Задача ЭП. Для заданного мультииндекса $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ найти такие не равные тождественно нулю одновременно многочлены $A_1 = A_n^1, \dots, A_k = A_n^k$, что $\deg A_1 \leq n_1 - 1, \dots, \deg A_k \leq n_k - 1$ и для некоторого многочлена $B = B_n$,

$$L_n(z) := \sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z) - B(z) = \frac{c_n}{z^{|n|}} + \dots \quad (1.2)$$

Многочлен $B(z) = B_n(z)$ является полиномиальной частью ряда $\sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z)$.

Хорошо известно [1]–[3], что решение поставленной задачи существует, но не единственное. В частности, многочлены A_j и B находятся с точностью до мультипликативного множителя: если пара (A, B) , где $A = (A_1, \dots, A_k)$, удовлетворяет

необходимым условиям, то умножая многочлены A_j и B на любое отличное от нуля комплексное число λ , получим новую пару $(\lambda A, \lambda B)$, удовлетворяющую поставленным условиям. Эта неединственность может быть и более существенной. Действительно, рассмотрим

Пример 1.1. Пусть $k = 2, n = (2, 2)$, a

$$f_1(z) = -f_2(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \dots$$

Тогда $A_1(z) = (a + bz)$,

$$A_2(z) = a + 2b - 2d + dz, B(z) = b - d,$$

где a, b, d любые действительные числа.

Определение 1.1. Если пара (A, B) , где $A = (A_1, \dots, A_k)$, является решением задачи Эрмита – Паде с индексом $n \in \mathbb{N}^k$, то многочлены $A_1, A_2, \dots, A_k$ называют многочленами Эрмита – Паде 1-го рода для системы f формальных степенных рядов (1.1).

Центральным в теории таких многочленов являются понятия нормального индекса n и совершенной системы f .

Определение 1.2. Индекс $n \in \mathbb{N}^k$ называется нормальным для f , если для любого решения задачи Эрмита – Паде с этим индексом $\deg A_j = n_j - 1, j = 1, 2, \dots, k$.

Определение 1.3. Система f называется совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{N}^k$ являются нормальными для f .

Нормальность индекса n является достаточным условием того, что все решения задачи Эрмита – Паде (A, B) с этим индексом находятся с точностью до мультипликативного множителя (подробнее см. [1]– [3]). В этом случае говорят, что задача Эрмита – Паде имеет единственное решение. Следующий пример показывает, что уже при $k=1$ нормальность индекса n не является необходимым условием единственности решения задачи Эрмита – Паде.

Пример 1.2. Пусть $k=1$, $n=3$, a

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{8}{z^4} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \dots$$

Тогда все решения задачи ЭП имеют вид $(\lambda A_1, \lambda B)$, где λ – произвольное комплексное число, отличное от нуля, а $A_1(z) = z-2$, $B(z) = 1$. При этом индекс $n=3$ не является нормальным, поскольку $\deg A_1 = 1$.

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n \in \mathbb{N}^k$ и систему f , определенную равенствами (1.1), при которых решение задачи Эрмита – Паде с этим индексом является единственным.

2 Основные определения

Решение поставленной задачи будет получено нами в терминах теории линейных алгебраических уравнений. Соответствующая система линейных уравнений, равносильная равенству (1.2), определяется непосредственно коэффициентами степенных рядов (1.1).

Введем необходимые обозначения. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{N}^k$ и для каждого $j=1, 2, \dots, k$ рассмотрим матрицы-столбцы порядка $(|n|-1) \times 1$

$$F_i^j = (f_{i-1}^j \ f_i^j \ \dots \ f_{|n|+i-3}^j)^T, \quad i=1, 2, \dots, n_j,$$

и матрицы порядка $(|n|-1) \times |n_j|$

$$F^j = [F_1^j \ F_2^j \ \dots \ F_{n_j}^j],$$

где C^T является матрицей, транспонированной к матрице C . Далее рассмотрим матрицу порядка $(|n|-1) \times |n|$

$$F_n = [F^1 \ F^2 \ \dots \ F^k]$$

и функциональные матрицы-строки порядка $1 \times |n|$

$$E_1(z) = (1 \ z \ \dots \ z^{n_1-1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0),$$

$$E_2(z) = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ z \ \dots \ z^{n_2-1} \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0),$$

...

$$E_k(z) = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1 \ z \ \dots \ z^{n_k-1}),$$

$$E(z) = E_1(z) + \dots + E_k(z) =$$

$$= (1 \ z \ \dots \ z^{n_1-1} \ 1 \ z \ \dots \ z^{n_2-1} \ \dots \ 1 \ z \ \dots \ z^{n_k-1}).$$

Обозначим через $G_j(z)$ матрицу-строку, которая при $n_j > 1$ получается в результате замены

в матрице $E_j(z)$ ненулевых элементов: 1 заменяем на 0, z заменяем на f_0^j , z^2 заменяем на $f_0^j z + f_1^j$ и т.д., наконец, z^{n_j-1} заменяем на $\sum_{i=0}^{n_j-2} f_i^j z^{n_j-i-2}$ (при $n_j=1$ в $E_j(z)$ единственный ненулевой элемент 1 заменяем на 0). Матрицу-строку $G(z)$ определим равенством

$$G(z) = G_1(z) + \dots + G_k(z).$$

Если в матрице F_n порядка $(|n|-1) \times |n|$ добавить в качестве последней строки строку $E_j(z)$, то получим квадратную матрицу. Обозначим определитель этой матрицы через $A_j(z)$. Тогда при $j=1, 2, \dots, k$

$$A_j(z) = \quad (2.1)$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & \dots & f_{n_1-1}^1 & \dots & f_0^j & f_1^j & \dots & f_{n_j-1}^j & \dots & f_0^k & \dots & f_{n_k-1}^k \\ f_1^1 & \dots & f_{n_1}^1 & \dots & f_1^j & f_2^j & \dots & f_{n_j}^j & \dots & f_1^k & \dots & f_{n_k}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \dots & f_{|n|-2}^j & f_{|n|-1}^j & \dots & f_{|n|+n_j-3}^j & \dots & f_{|n|-2}^k & \dots & f_{|n|+n_k-3}^k \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & z & \dots & z^{n_j-1} & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Если в определении (2.1) последнюю строку $E_j(z)$ заменить строкой $G(z)$ получим новый определитель. Его обозначим через $B(z)$. И наконец, если последнюю строку определителя (2.1) заменить матрицей-строкой

$$F_i^n =$$

$$= (f_{|n|+i-2}^1 \ f_{|n|+i-1}^1 \ \dots \ f_{|n|+n_1+i-3}^1 \ \dots \ f_{|n|+i-2}^k \ f_{|n|+i-1}^k \ \dots \ f_{|n|+n_k+i-3}^k),$$

то полученный определитель обозначим через $d_{n,i}$.

Определение 2.1. Индекс $n \in \mathbb{N}^k$ назовем вполне нормальным для f , если ранг матрицы F_n равен $|n|-1$.

В примере 1.1 индекс $n=(2,2)$ не является нормальным и не является вполне нормальным, а в примере 1.2 индекс $n=3$ не является нормальным, но является вполне нормальным относительно рассматриваемых в этих примерах систем функций.

Определение 2.2. Систему f назовем вполне совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{N}^k$ являются вполне нормальными для f .

Далее будет показано, что любая совершенная система f является и вполне совершенной системой. Пример 1.2 показывает, что обратное утверждение может быть неверным.

3 Критерий единственности. Детерминантные представления

Сформулируем и докажем основную теорему данной работы.

Теорема 3.1. Для того, чтобы для фиксированного индекса $n \in \mathbb{N}^k$ задача Эрмита – Паде имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным для f , т. е. $\text{rang} F_n = |n| - 1$.

В случае, если индекс n является вполне нормальным, при определенном выборе мультипликативного множителя для решений (A, B) задачи Эрмита – Паде справедливы следующие детерминантные представления:

$$A_j(z) = \det [F_n \ E_j(z)]^T := \begin{bmatrix} F_n \\ E_j(z) \end{bmatrix}, \quad j = 1 \dots k, \quad (3.1)$$

$$B(z) = \det [F_n \ G(z)]^T := \begin{bmatrix} F_n \\ G(z) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{|n|+i-1}}. \quad (3.3)$$

В развернутом виде многочлены $A_j(z)$ представлены равенствами (2.1).

Доказательство. Пусть

$$A_j(z) = b_0^j + b_1^j z + \dots + b_{n_j-1}^j z^{n_j-1}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $b_0^j, b_1^j, \dots, b_{n_j-1}^j$ запишем в матричной форме систему линейных уравнений, равносильную условию (1.2):

$$F_n \times b^T = \Theta^T, \quad (3.4)$$

где b – матрица-строка порядка $1 \times |n|$,

$$b = (b_0^1 \ b_1^1 \ \dots \ b_{n_1-1}^1 \ \dots \ b_0^k \ b_1^k \ \dots \ b_{n_k-1}^k),$$

а Θ – матрица-строка порядка $1 \times |n|$, все элементы которой равны нулю.

Поскольку система (3.4) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что система (3.4) имеет ненулевое решение. Кроме того, множество всех линейно независимых решений системы (3.4) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\text{rang} F_n = |n| - 1$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Число λ , вообще говоря, является комплексным, но если коэффициенты рядов (1.1) действительные числа, то решения системы (3.4) также действительные числа. Таким образом первая часть теоремы 3.1 доказана.

Докажем теперь равенства (3.1)–(3.4). Без ограничения общности будем считать, что все ряды (1.1) не являются формальными, т. е. их суммы являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки $z = \infty$ (если хотя бы один из рядов (1.1) является формальным, то формальным будет и ряд в (3.3)).

Так как $\text{rang} F_n = |n| - 1$, то при некотором $p \in \{1, 2, \dots, |n|\}$ определитель, полученный из матрицы F_n , вычеркиванием в ней p -го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p = |n|$. Тогда систему (3.4) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} f_0^1 & \dots & f_{n_1-1}^1 & \dots & f_0^k & \dots & f_{n_k-2}^k \\ f_1^1 & \dots & f_{n_1}^1 & \dots & f_1^k & \dots & f_{n_k-1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \dots & f_{|n|-2}^k & \dots & f_{n+n_k-4}^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_0^1 \\ \dots \\ b_{n_1-1}^1 \\ \dots \\ b_0^k \\ \dots \\ b_{n_k-2}^k \end{pmatrix} = -b_{n_k-1} \begin{pmatrix} f_{n_k-1}^k \\ f_{n_k}^k \\ \dots \\ f_{|n|+n_k-4}^k \\ f_{|n|+n_k-3}^k \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Обозначим главный определитель этой системы через $H_n^{n_k}$. Тогда по предположению $H_n^{n_k} \neq 0$. Если бы $b_{n_k-1} = 0$, то система (3.5) имела бы единственное нулевое решение. Тогда бы и система (3.4) имела только нулевое решение. Поэтому $b_{n_k-1} \neq 0$. Учитывая, что мы ищем решение с точностью до мультипликативного множителя, можем считать, что $b_{n_k-1} = 1$. Решаем далее систему (3.5) по правилу Крамера, получим решение, которое символически можно записать в виде:

$$\det [F_n \ E(z)]^T = A_1(z) + \dots + A_k(z), \quad (3.6)$$

где $A_j(z)$ определяются равенствами (3.1), которые в развернутом виде представлены соотношениями (2.1). В случае, если бы вместо номера $p = |n|$ вычеркивали столбец матрицы F_n с другим номером, рассуждая аналогичным образом, также пришли бы к символической записи решения в виде (3.6). Докажем, что $A_j(z)$, определенные равенствами (2.1) и (3.1), и являются искомыми многочленами.

Разложив определитель в (2.1) по элементам последней строки, нетрудно заметить, что $A_j(z)$ – многочлен и $\deg A_j(z) \leq n_j - 1$. Остается доказать, что при заданном с помощью равенства (3.2) многочлене $B(z)$ (в развернутом виде равенство (3.2) можно получить, если в (2.1) последнюю строку заменить матрицей-строкой $G(z)$), многочлены $A_j(z)$ удовлетворяют условию (3.3). Для этого заметим, что для таких многочленов

$$\sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{n_1-1}^1 & \dots & f_0^k & f_1^k & \dots & f_{n_k-1}^k \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_{n_1}^1 & \dots & f_1^k & f_2^k & \dots & f_{n_k}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \dots & f_{|n|-2}^k & f_{|n|-1}^k & \dots & f_{|n|+n_1-3}^k \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^1}{z^{i+1}} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^1}{z^i} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^1}{z^{i-n_1+2}} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^k}{z^{i+1}} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^k}{z^i} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^k}{z^{i-n_k+2}} \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе из последней строки вычтем: первую строку, умноженную на z^{-1} , вторую строку, умноженную на z^{-2} , и так далее вплоть до предпоследней строки, умноженной на $z^{-|n|+1}$. В результате в правой части предыдущего равенства получим определитель, у которого последний элемент каждого столбца состоит из многочлена относительно переменной z и ряд с лакунами по степеням z^{-1} . Сохраняя в последней строке этого определителя в каждом столбце только полиномиальную часть, придем к определителю

$$B(z) = \det[F_n \quad G(z)]^T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_n(z) &= \sum_{j=1}^k A_j(z) f_j(z) - B(z) = \\ &= \begin{vmatrix} f_0^1 & \dots & f_{n_1-1}^1 & \dots & f_0^k & \dots & f_{n_k-1}^k \\ f_1^1 & \dots & f_{n_1}^1 & \dots & f_1^k & \dots & f_{n_k}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{|n|-2}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \dots & f_{|n|-2}^k & \dots & f_{|n|+n_1-3}^k \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+i-2}^1}{z^{|n|+i-1}} & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+i-3}^1}{z^{|n|+i-1}} & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+i-2}^k}{z^{|n|+i-1}} & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{|n|+i-3}^k}{z^{|n|+i-1}} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}}{z^{|n|+i-1}}. \end{aligned}$$

При преобразованиях воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей.

4 Замечания и некоторые следствия

Из равенств (3.1)–(3.3) следует, что компонента n_j заданного вполне нормального индекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ определяет число коэффициентов ряда $f_j(z)$, которое учитывается при построении многочленов $A_j(z)$, $B(z)$ и функции $L_n(z)$.

Легко заметить, что теорема 3.1 справедлива и при условии, что $n_j = 0$. В этом случае нужно лишь считать, что матрица F_n и определители в (3.1)–(3.3) не содержат столбцов с коэффициентами ряда $f_j(z)$, т. е. формальный ряд $f_j(z)$ не участвует в построении решения задачи ЭП, а вектор b не содержит неизвестных коэффициентов, определяющих многочлен $A_j(z)$, при этом

порядок мультииндекса $|n|$ определяется только оставшимися ненулевыми компонентами.

В частности, если $n_2 = n_3 = \dots = n_k = 0$, то $n = (n_1, 0, \dots, 0)$ и тогда $|n| = n_1$. Если отождествить n_1 с n , то получим фактически одномерный случай, когда $k = 1$ (в построениях учитываются только коэффициенты функции $f(z) := f_1(z)$). В таком случае, например, равенство (3.1) примет вид

$$A_1(z) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{n-1} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-2} & f_{n-1} & \dots & f_{2n-2} \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} \end{vmatrix},$$

и нормальность индекса n равносильна тому, что определитель Ганкеля (это утверждение известно [1; гл. 2, §3, утверждение 3.2]).

$$H_n = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{n-2} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-2} & f_{n-1} & \dots & f_{2n-3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В общем случае нормальность индекса $n = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ равносильна условию

$$\prod_{j=1}^k H_n^j \neq 0,$$

где H_n^j является определителем матрицы F_n , если в ней выбросить столбец F_n^j .

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.
2. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function / H. Stahl / Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14 – P. 193–220.
3. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 17.04.19.

ПРОСТЫЕ НЕАБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С ПРОНОРМАЛЬНЫМИ ВТОРЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Тютянов

Международный университет МИТСО, Гомель

SIMPLE NON-ABELIAN GROUPS WITH SECOND MAXIMAL PRONORMAL SUBGROUPS

V.N. Tyutyaynov

International University MITSO, Gomel

В.И. Зенков поставил в Коуровскую тетрадь проблему 19.109: верно ли, что в конечной простой неабелевой группе G все максимальные подгруппы холловы тогда и только тогда, когда любая вторая максимальная подгруппа группы G является пронормальной в G ? В настоящей работе показано, что данная проблема решается отрицательно.

Ключевые слова: конечная группа, вторая максимальная подгруппа, пронормальная подгруппа.

V.I. Zenkov put in the Kourovskaya notebook the following problem 19.109: is it true that in a non-abelian finite simple group G all maximal subgroups are Hall subgroups if and only if every second maximal subgroup is pronormal in G ? This paper shows that this problem is solved negatively.

Keywords: finite group, second maximal subgroup, pronormal subgroup.

Введение

Пусть G – конечная простая неабелева группа. В.И. Зенков поставил в Коуровскую тетрадь [1] проблему 19.109: *верно ли, что любая максимальная подгруппа в группе G холлова тогда и только тогда, когда любая вторая максимальная подгруппа группы G является пронормальной в G ?*

В работе показывается, что данная проблема решается отрицательно.

Приведем следующие хорошо известные определения.

Определение 0.1. Пусть G – конечная группа и H – подгруппа в G . Подгруппа H называется пронормальной в группе G , если для всякого $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в порождении $\langle H, H^g \rangle$.

Определение 0.2. Если подгруппа H является максимальной в некоторой максимальной подгруппе группы G , то H называется второй максимальной подгруппой.

Строение конечной группы существенно зависит от строения ее вторых максимальных подгрупп и способа их вложения в группу. Хуперт в [2] показал, что если в конечной группе G все вторые максимальные подгруппы нормальны в G , то G является сверхразрешимой группой. Судзуки [3] и Янко [4] доказали, что если в неразрешимой группе все вторые максимальные подгруппы нильпотентны, то она изоморфна $PSL_2(5)$ или $SL_2(5)$. Разрешимый случай был изучен В.А. Белоноговым [5]. В.С. Монахов и В.Н. Княгина [6] установили, что если всякая вторая максимальная подгруппа группы G является

$\mathbb{P}$ -субнормальной в G , то любая собственная подгруппа в G сверхразрешима.

В работе [7] показано, что имеются в точности три простых неабелевых группы, в которых все максимальные подгруппы холловы: $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$. Непростые группы с холловыми максимальными подгруппами хорошо изучены в [8], [9].

Ранее автор установил следующий результат, анонсированный в [1].

Теорема 0.3. Пусть $G \cong SL_2(2^{11})$, тогда любая вторая максимальная подгруппа группы G является пронормальной в G .

Так как группа $SL_2(2^{11})$ имеет максимальные подгруппы, не являющиеся холловыми, то проблема В.И. Зенкова решается отрицательно.

Контрпример, указанный в теореме 0.3, не является единственным. Серия таких контрпримеров приводится в следующей теореме.

Теорема 0.4. Пусть $G \cong SL_2(2^p)$, где $11 < p$ – простое число. Если $2^p - 1$ не является простым числом Ферма, то любая вторая максимальная подгруппа группы G будет пронормальной в G .

Мы приведем полное доказательство обоих, указанных выше результатов.

1 Вспомогательные результаты

Все группы предполагаются конечными. Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [10] и [11]. $[A]B$ – полупрямое произведение групп A и B , где A нормальна в $[A]B$ и $A \cap B = 1$. Если m и n – натуральные

числа, то (m, n) – их наибольший общий делитель. Z_p^n – прямое произведение n сомножителей, каждый из которых изоморфен группе Z_p . Пусть π – некоторое множество различных простых делителей порядка группы G . Будем говорить, что группа G обладает свойством D_π (является D_π -группой), если она содержит холлову π -подгруппу, все холловы π -подгруппы сопряжены в G и любая π -подгруппа содержится в некоторой холловой π -подгруппе группы G . Множество всех холловых π -подгрупп группы G обозначается $Hall_\pi(G)$. Через A_n и S_n будем обозначать знакопеременную и симметрическую группы подстановок соответственно.

Приведем вспомогательные результаты, которые будут использоваться при доказательстве теоремы 0.3 и теоремы 0.4.

Лемма 1.1 [11, теорема II.8.27]. *Группа $PSL(2, p^f)$ обладает только следующими подгруппами:*

- (1) *Элементарная абелева p -группа.*
- (2) *Циклическая группа порядка z , где z делит $\frac{p^f \pm 1}{k}$ и $k = (p^f - 1, 2)$.*
- (3) *Диэдр порядка $2z$, где z как в (2).*
- (4) *Знакопеременная группа A_4 для $p > 2$ или $p = 2$ и $f \equiv 0 \pmod{5}$.*
- (5) *Симметрическая группа S_4 для $p^{2f} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$.*
- (6) *Знакопеременная группа A_5 для $p = 5$ или $p^{2f} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$.*
- (7) *Полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^m с циклической группой порядка t , где t делит $p^m - 1$ и t делит $p^f - 1$.*
- (8) *Группы $PSL(2, p^m)$ когда t делит f и $PGL(2, p^m)$ когда $2t$ делит f .*

Лемма 1.2. *Пусть m – нечетное натуральное число. Тогда $(2^m \pm 1, 5) = 1$.*

Доказательство. Имеют место следующие сравнения: $2^1 \equiv 2 \pmod{5}$, $2^3 \equiv 3 \pmod{5}$, $2^5 \equiv 2 \pmod{5}$, $2^7 \equiv 3 \pmod{5}$, $2^9 \equiv 2 \pmod{5}$, $2^{11} \equiv 3 \pmod{5}$. Таким образом, при $m \leq 11$ имеем, что $2^m \equiv 2, 3 \pmod{5}$.

Пусть для некоторого нечетного $k > 11$ имеет место сравнение $2^k \equiv 2, 3 \pmod{5}$. Возможны случаи:

1. $2^k \equiv 2 \pmod{5}$. Тогда $2^{k+2} = 4 \cdot 2^k = 4(5t + 2) = 5(4t + 1) + 3 \equiv 3 \pmod{5}$.
2. $2^k \equiv 3 \pmod{5}$. Тогда $2^{k+2} = 4 \cdot 2^k = 4(5t + 3) = 10(2t + 1) + 2 \equiv 2 \pmod{5}$.

По индукции заключаем, что $2^m \equiv 2, 3 \pmod{5}$.

Отсюда легко следует, что $(2^m \pm 1, 5) = 1$ для всякого нечетного натурального числа m .

2 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 0.3.

Пусть $G \cong SL_2(2^{11})$, тогда

$$|G| = 2^{11}(2^{11} - 1)(2^{11} + 1) = 2^{11} \cdot 2047 \cdot 2029 = 2^{11} \cdot (23 \cdot 89) \cdot (3 \cdot 683) = 2^{11} \cdot 3 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 683.$$

Максимальные подгруппы в G это в точности подгруппы: $2^{11} : 2047$, $2047 : 2$ и $2049 : 2$. Всюду далее M – некоторая максимальная подгруппа в G , H – вторая максимальная подгруппа в G . Отметим, что если $\langle H, H^g \rangle = G$, то H и H^g сопряжены в их порождении. Поэтому будем считать, что $\langle H, H^g \rangle$ – собственная подгруппа в группе G .

Последовательно рассмотрим все случаи.

1. $M \cong 2^{11} : 2047$. Тогда максимальные подгруппы из M содержатся в списке: $H \in \{2047, 2^{11} : 23, 2^{11} : 89\}$. Пусть $H \cong 2047$. Так как $H \in Hall_{\{23, 89\}}(G)$ и является нильпотентной, то по теореме Виландта [12] G обладает свойством $D_{\{23, 89\}}$. Следовательно, H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Пусть $H \cong 2^{11} : 23$. Из строения максимальных подгрупп группы G следует, что $\langle H, H^g \rangle \leq M$. Так как M содержит единственную подгруппу порядка $2^{11} \cdot 23$, то $H = H^g$ и H сопряжена с H^g в порождении $\langle H, H^g \rangle = H$. Случай $H \cong 2^{11} : 89$ рассматривается также, как случай $H \cong 2^{11} : 23$.

2. $M \cong 2047 : 2$. Тогда $H \in \{2047, 23 : 2, 89 : 2\}$. Случай $H \cong 2047$ был рассмотрен. Пусть $H \cong 23 : 2$. Поскольку $2^{11} : 2047$ – группа Фробениуса [13, теорема 2.8.2], то $\langle H, H^g \rangle \leq M$. Положим, что $H = \langle a \rangle \langle \tau \rangle$, где $|a| = 23$, $|\tau| = 2$ и $\langle a \rangle$ нормальна в M . Тогда $H^g = \langle [a] \rangle \langle \mu \rangle$, где μ – некоторая инволюция из M . Так как все инволюции в диэдре M сопряжены, то найдется $m \in M$ такой, что $\langle \tau \rangle^m = \langle \mu \rangle$. Поэтому H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Случай $H \cong 89 : 2$ рассматривается так же, как $H \cong 23 : 2$.

3. $M \cong 2049 : 2$. Максимальные подгруппы из M содержатся в списке: $H \in \{2049, 3 : 2, 683 : 2\}$. Повторяя рассуждения пункта 2, показывается, что подгруппа H – пронормальна в группе G . Теорема 0.3 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 0.4.

Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы 2, тогда $|G| = 2^p(2^p - 1)(2^p + 1)$. По лемме 1.1

максимальными подгруппами в группе G могут быть сопряженные со следующими подгруппами: подгруппа Бореля $[U]H \cong [Z_2^p]Z_{\{2^p-1\}}$, диэдр $[H] \langle \tau \rangle \cong [Z_{\{2^p-1\}}]Z_2$, диэдр $[R] \langle \tau \rangle \cong [Z_{\{2^p+1\}}]Z_2$, $L \cong A_5$, $F \cong S_4$, $P \cong A_4$.

По лемме 1.2 ($|G|, 5) = 1$, поэтому группа G не может содержать подгрупп, изоморфных A_5 . Силовая 2-подгруппа у S_4 является диэдральной порядка 8. Поскольку силовая 2-подгруппа в G элементарная абелева, то G не может содержать подгрупп, изоморфных S_4 . Группа A_4 является нормализатором своей силовой 2-подгруппы, изоморфной Z_2^2 . Так как силовая 2-подгруппа в G изоморфна Z_2^p , где $p > 11$, то подгруппа $P \cong A_4$ не максимальна в G .

Таким образом, максимальные подгруппы в G с точностью до сопряженности это подгруппы $[U]H$, $[H] \langle \tau \rangle$, $[R] \langle \tau \rangle$. Всюду далее M – некоторая максимальная подгруппа в G , T – вторая максимальная подгруппа в G . Отметим, что если $\langle T, T^g \rangle = G$, то T и T^g сопряжены в их порождении. Поэтому будем считать, что $\langle T, T^g \rangle$ – собственная подгруппа в группе G .

Рассмотрим все случаи.

1. $M = [U]H$. Максимальные подгруппы из M содержатся в следующем списке

$$T \in \{H; [U]H_i, \text{ где } H_i < \cdot H\}.$$

Пусть $T = H$. Так как $(2^p - 1, 2^p + 1) = 1$, то T – холлова циклическая подгруппа в группе G . По теореме Виландта [12] группа G обладает свойством $D_{\{2^p-1\}}$. Поэтому T и T^g сопряжены в любом порождении $\langle T, T^g \rangle$.

Рассмотрим случай $T = [U]H_i$. Из строения максимальных подгрупп группы G следует, что $\langle T, T^g \rangle \leq M$. Так как T единственная в M подгруппа порядка $|U||H_i|$, то $T = T^g$ и T сопряжена с T^g в порождении $\langle T, T^g \rangle = T$.

2. $M = [H] \langle \tau \rangle$. Максимальные подгруппы из M содержатся в списке:

$$T \in \{H; [H_i] \langle \tau \rangle, \text{ где } H_i < \cdot H\}.$$

Отметим, что так как $2^p - 1$ не простое число, то $H_i \neq 1$ и, в частности, $\langle \tau \rangle$ не максимальна в M . Случай $T = H$ был рассмотрен. Поэтому $T = [H_i] \langle \tau \rangle$. Согласно [13] $[U]H$ – группа Фробениуса, следовательно, $\langle T, T^g \rangle \leq M$. Из строения M заключаем, что $T^g = [H_i] \langle \mu \rangle$, где μ некоторая инволюция из M . Все инволюции в диэдре M сопряжены, а значит найдется элемент $m \in M$ для которого $\langle \tau \rangle^m = \langle \mu \rangle$. Поэтому T и T^g сопряжены в $\langle T, T^g \rangle$.

3. $M = [R] \langle \tau \rangle$. Максимальные подгруппы из M содержатся в списке:

$$T \in \{R; [R_i] \langle \tau \rangle, \text{ где } R_i < \cdot R\}.$$

Так как $2^p + 1$ не является простым числом Ферма, то $R_i \neq 1$. Дословное повторение рассуждений пункта 2 показывают, что T пронормальна в G . Теорема 0.4 доказана. $\square$

Вопрос. Хорошо известно, что имеется достаточно много чисел вида $2^p - 1$, где p – простое число, не являющимися простыми числами Мерсенна. Автору не известно конечно ли множество таких чисел. Соответственно, конечна или бесконечна серия простых неабелевых групп в теореме 0.4?

ЛИТЕРАТУРА

1. *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory* // Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences. – Novosibirsk, 2018.
2. Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – B. 60. – S. 409–434.
3. Suzuki, M. The nonexistence of certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8. – P. 686–695.
4. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – B. 79. – S. 422–424.
5. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, №1. – С. 21–32.
6. Monakhov, V.S. Finite groups with P-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniagina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 60, № 2. – P. 307–322.
7. Тихоненко, Т.В. Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами / Т.В. Тихоненко, В.Н. Тютянов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – С. 198–206.
8. Monakhov, V.S. Finite π -solvable groups whose maximal subgroups have the Hall property / V.S. Monakhov // Math. Notes. – 2008. – Vol. 84, № 3. – P. 363–366.
9. Maslova, N.V. Finite groups whose maximal subgroups have the Hall property / N.V. Maslova, D.O. Revin // Siberian Advances Math. – 2013. – Vol. 23, № 3. – P. 196–209.
10. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.]. – London: Clarendon Press, 1985. – 252 p.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 s.
12. Wielandt, H. Zum Satz von Sylow / H. Wielandt // II Math. Z. – 1959. – B. 71. – S. 461–462.
13. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein – New York.: Harper and Row, 1968. – 527 p.

Поступила в редакцию 12.04.19.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ СЕКЦИЯМИ

Б. Ху¹, Ц. Хуан¹, А.Н. Скиба²¹Цзянсунский педагогический университет, Сюйчжоу²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH GIVEN LOCAL SECTIONS

B. Hu¹, J. Huang¹, A.N. Skiba²¹Jiangsu Normal University, Xuzhou²F. Scorina Gomel State University

Группа называется *примарной*, если она является конечной p -группой для некоторого простого числа p . Если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т. е. $P = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, то мы говорим, что конечная группа G является: σ -*примарной*, если она является σ_i -группой для некоторого i ; σ -*нильпотентной*, если $G = G_1 \times \dots \times G_n$ для некоторых σ -примарных групп $G_1, \dots, G_n$. Если $N = N_G(A)$ для некоторой примарной неединичной подгруппы A из G , то мы говорим, что N/A_G – *локальная секция группы* G . В данной работе изучается конечная группа G при условии, что все собственные локальные секции из G принадлежат насыщенной наследственной формации $\mathfrak{F}$, также устанавливается нормальная структура G в случае, когда все локальные секции из G являются σ -нильпотентными.

Ключевые слова: конечная группа, наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{F}$ -гиперцентр, локальная секция, σ -нильпотентная группа.

A group is called *primary* if it is a finite p -group for some prime p . If $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is some partition of $\mathbb{P}$, that is, $P = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$, then we say that a finite group G is: σ -*primary* if it is a σ_i -group for some i ; σ -*nilpotent* if $G = G_1 \times \dots \times G_n$ for some σ -primary groups $G_1, \dots, G_n$. If $N = N_G(A)$ for some primary non-identity subgroup A of G , then we say that N/A_G is a *local section of* G . In this paper, we study a finite group G under hypothesis that all proper local sections of G belong to a saturated hereditary formation $\mathfrak{F}$, and we determine the normal structure of G in the case when all local sections of G are σ -nilpotent.

Keywords: finite group, hereditary saturated formation, $\mathfrak{F}$ -hypercentre, local section, σ -nilpotent group.

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, $\mathbb{P}$ is the set of all primes, $p \in \pi \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n ; as usual, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the order of G . If $K \trianglelefteq H \leq G$, then H/K is called a *section* of G .

A group is called *primary* if it is a p -group for some prime p . If $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is some partition of $\mathbb{P}$, that is, $P = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$, then we say, following [1], that a group is: σ -*primary* if it is a σ_i -group for some i ; σ -*soluble* if every its chief factor is σ -primary. Observe that a group is primary (respectively soluble) if and only if it is σ -primary (respectively σ -soluble) where $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$.

Definition. (i) If A is a non-identity primary subgroup of G , then $N_G(A)$ is a *local subgroup* of

G and $N_G(A)/A_G = N_{G/A_G}(A/A_G)$ is a *local section* of G . Moreover, if $N_G(A) \neq G$, then we say that $N_G(A)/A_G$ is a *proper local section* of G .

(ii) If A is a non-identity σ -primary subgroup of G , then we say that $N_G(A)$ is a σ -*local subgroup* of G and $N_G(A)/A_G$ is a σ -*local section* (a *proper σ -local section* if $N_G(A) \neq G$) of G .

Example. (i) The group G is said to be σ -*nilpotent* or σ -*decomposable* (Shemetkov [2]) if $G = G_1 \times \dots \times G_n$ for some σ -primary groups $G_1, \dots, G_n$. It can be proved (see Corollary 1.9 below) that G is σ -nilpotent if and only if every σ -local subgroup of G is σ -nilpotent.

(ii) In the group $A = C_p \rtimes \text{Aut}(C_p)$, where $|C_p|$ is an odd prime, each local section is nilpotent. This group is not σ -nilpotent, where $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$. The only non-nilpotent local section of $GL(2, 3)$ is $GL(2, 3)/Z(GL(2, 3))$.

The σ -nilpotent groups have been proved to be very useful in the formation theory (see, for example, the papers [3], [4] and the books [2, Chapter IV], [5, Chapter 6]). In the recent years, the σ -nilpotent and σ -soluble groups have been found new and to some extent unexpected applications in the theories of permutable and generalized subnormal subgroups (see, in particular, the recent papers [1], [6]–[9]).

In this paper, we study G under hypothesis that all (proper) local sections of G belong to a hereditary local formation $\mathfrak{F}$ containing all nilpotent groups, and we determine the normal structure of G in the case when all local sections of G are σ -nilpotent.

1 The main results

Recall the following

Definition 1.1. The group G is called $\mathfrak{F}$ -critical [10, p. 517] provided G does not belong to $\mathfrak{F}$ but every proper subgroup of G belongs to $\mathfrak{F}$. A Schmidt group is an $\mathfrak{N}$ -critical group, where $\mathfrak{N}$ is the class of all nilpotent groups.

We need also some other concepts of the formation theory.

Let $\mathfrak{F}$ be a class of groups containing all identity groups. Then $G^{\mathfrak{F}}$ denotes the $\mathfrak{F}$ -residual of G , that is, the intersection of all normal subgroups N of G with $G/N \in \mathfrak{F}$. The class $\mathfrak{F}$ is said to be: *hereditary* if $H \in \mathfrak{F}$ whenever $H \leq G \in \mathfrak{F}$; *saturated* if $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G^{\mathfrak{F}} \leq \Phi(G)$; a *formation* if every homomorphic image of $G/G^{\mathfrak{F}}$ belongs to $\mathfrak{F}$ for any group G .

Note that if $\mathfrak{F}$ is a saturated formation, then $G \in \mathfrak{F}$ if and only if every chief factor H/K of G is $\mathfrak{F}$ -central in G [11, Theorem 17.14], that is, $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. Moreover, every group G has the largest normal subgroup $Z_{\mathfrak{F}}(G)$, the $\mathfrak{F}$ -hypercentre of G , with the property that every chief factor of G below $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ is $\mathfrak{F}$ -central in G . In the case when $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\sigma}$ is the class of all σ -nilpotent groups, we write $Z_{\sigma}(G)$ instead of $Z_{\mathfrak{N}_{\sigma}}(G)$.

Our basis result is the following

Theorem 1.2 (See Theorem A in [12]). Suppose that $G \notin \mathfrak{F}$, where $\mathfrak{F}$ is a hereditary saturated formation containing all nilpotent groups.

(i) If the $\mathfrak{F}$ -residual of every $\mathfrak{F}$ -critical section of G is σ -soluble and all proper σ -local sections of G belong to $\mathfrak{F}$, then $G^{\mathfrak{F}}$ is σ -nilpotent.

(ii) If the $\mathfrak{F}$ -residual of every $\mathfrak{F}$ -critical section of G is soluble and all proper local sections of G belong to $\mathfrak{F}$, then $F(G) = G^{\mathfrak{F}}Z_{\mathfrak{F}}(G)$ and every minimal normal subgroup of G is abelian.

Let ϕ be some linear ordering on $\mathbb{P}$. The record $p\phi q$ means that p precedes q in ϕ and $p \neq q$.

Recall that a group G of order $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ is called ϕ -dispersed (Baer [13]) whenever $p_1 \phi p_2 \phi \dots \phi p_n$ and for every i there is a normal subgroup of G of order $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$.

It is well-known that if $\mathfrak{F}$ is either the class of all nilpotent groups $\mathfrak{N}$, or the class of all supersoluble groups $\mathfrak{U}$, or the class of all ϕ -dispersed groups, then $\mathfrak{F}$ is a hereditary saturated formation [10, p. 358–359] and every $\mathfrak{F}$ -critical group G is soluble [2, Chapter V] with nilpotent $G^{\mathfrak{F}}$ [10, Chapter VII, Theorem 6.18].

Hence we get from Theorem 1.2 the following results.

Corollary 1.3. Suppose that G is not supersoluble. If all proper local sections of G are supersoluble, then:

(i) $G/O_p(G)$ is p -nilpotent for all primes p with $(p-1, |G|) = 1$.

(ii) $F(G) = G^{\mathfrak{U}}Z_{\mathfrak{U}}(G)$.

Corollary 1.4 (Fedri, Tiberio [14]). If all proper local subgroups of G are supersoluble, then:

(i) $G/O_p(G)$ is p -nilpotent, where p is the smallest prime dividing $|G|$.

(ii) $G/F(G)$ is supersoluble.

Corollary 1.5 (Beidleman [15]). If all proper local subgroups of G are ϕ -dispersed, then $G/F(G)$ is ϕ -dispersed.

The class $\mathfrak{N}_{\sigma}$ of all σ -nilpotent groups is a hereditary saturated formation [1]. Moreover, $A^{\mathfrak{N}_{\sigma}}$ is nilpotent for every $\mathfrak{N}_{\sigma}$ -critical group A (see Lemma 3.1 in [12]), so we get from Theorem 1.2 the following

Corollary 1.6 (Zhang Chi, Skiba [16]). If all proper σ -local subgroups of G are σ -nilpotent, then $G/F(G)$ is σ -nilpotent.

Note that if $G^{\mathfrak{F}}$ is soluble, then $A^{\mathfrak{F}}$ is evidently soluble for every section $A = H/K$ of G . Hence we get from Theorem 1.2 also the following

Corollary 1.7 (Gorbachev [17]). Suppose that $G^{\mathfrak{F}}$ is soluble, where $\mathfrak{F}$ is a hereditary saturated formation containing all nilpotent groups. If $G \notin \mathfrak{F}$ but every proper local subgroup of G belongs to $\mathfrak{F}$, then $F(G) = G^{\mathfrak{F}}Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Examples shows that a group in which all local sections are σ -nilpotent can be non-nilpotent. Nevertheless, our next result shows that such groups have a structure close to the structure of σ -nilpotent groups.

Theorem 1.8 (See Theorem B in [12]). *If each local section of G is σ -nilpotent, then G is either of the following two types:*

- (a) G is σ -nilpotent.
- (b) $G = R \rtimes M$, where
 - (i) $R = C_G(R) = G^{\pi_\sigma}$ is the Sylow p -subgroup of G for some $p \in \sigma_i$ and M is a σ -nilpotent maximal subgroup of G .
 - (ii) $G = H_1 \rtimes H$, where H_1 is a normal Hall σ_i -subgroup of G , $H \leq M$ and either $R = H_1$ or H_1 is a Frobenius group with the kernel R and the complement $M \cap H_1$.
 - (iii) Every non-identity element of H acts irreducibly on R .

Conversely, if G is a group of type (a) or (b), then every σ -local section of G is σ -nilpotent.

Corollary 1.9. G is σ -nilpotent if and only if all σ -local subgroups of G are σ -nilpotent.

Corollary 1.10. All local sections of G are nilpotent if and only if G is either of the following two types:

- (i) G is nilpotent.
- (ii) $G = R \rtimes M$, where $R = C_G(R) = G^{\pi}$ is the Sylow p -subgroup of G , $p \in \pi(G)$, and M is a nilpotent maximal subgroup of G such that every non-identity element of M acts irreducibly on R .

A set $\mathcal{H}$ of subgroups of G is a complete Hall σ -set of G [9] if every member $\neq 1$ of $\mathcal{H}$ is a Hall σ_i -subgroup of G for some i and $\mathcal{H}$ contains exactly one Hall σ_i -subgroup of G for every $\sigma_i \in \sigma(G)$. If $AB = BA$ for all $A, B \in \mathcal{H}$, then $\mathcal{H}$ is said to be a σ -basis [9] of G .

We say that G is *special* if either G is nilpotent or G is non-nilpotent and for every Schmidt subgroup A of G we have $\Phi(A) = \Phi(F(A))$. Note that the group A in Example, where $p = 13$, is not special but all its subgroups of odd order are special.

Being based on Theorem 1.2, one can prove also the following

Theorem 1.11 (See Theorem C in [12]). *Suppose that G is not σ -nilpotent but every proper local section of G is σ -nilpotent. Then the following statements hold:*

- (a) $F(G) = G^{\pi_\sigma} Z_\sigma(G)$ and $F_\sigma(G)$ is a maximal σ -nilpotent subgroup of G . Hence every minimal normal subgroup of G is abelian and G possesses a σ -basis $\mathcal{H} = \{H_0, H_1, \dots, H_t\}$, where $H_i \trianglelefteq G$ for all $i \leq r$ and H_i is not normal in G for all $i > r$.

- (b) If H_i is special for all $i > r$, then $G / F_\sigma(G)$ is abelian. Moreover, if in addition, for each such an index i the subgroup $N_G(H_i)$ is σ -nilpotent, then $H_{r+1} \cdots H_t$ is σ -nilpotent and

$$F_\sigma(G) = (H_1 \times \cdots \times H_r) Z_\sigma(G).$$

In this theorem $F_\sigma(G)$ denotes the σ -Fitting subgroup of G [1], that is, the product of all normal σ -nilpotent subgroups of G .

Note that if all non-normal Sylow subgroups of any Schmidt subgroup of G have prime order, then G is special by Lemma 2.7 in [12]. Hence we get from Theorem 1.11 the following

Corollary 1.12 (Zhang Chi, Skiba [16]). *Suppose that G is not σ -nilpotent but every proper local subgroup of G is σ -nilpotent. If non-normal Sylow subgroups of any Schmidt subgroup A contained in a non-normal Hall σ_i -subgroup of G , $i = i(A)$, have prime order, then $G / F_\sigma(G)$ is abelian.*

The group G is called *semi-nilpotent* [18] if all proper local subgroups of G are nilpotent.

Note that in the case, when $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, $F_\sigma(G) = F(G)$ is the Fitting subgroup and $Z_\sigma(G) = Z_\infty(G)$ is the hypercentre of G . Therefore we get in this case from Theorem 1.11 the following known result.

Corollary 1.13 (See [18] or Theorem 7.6 in [19, Chapter 4]). *If G is semi-nilpotent and $F_0(G)$ denotes the product of its normal Sylow subgroups, then $G / F_0(G)$ is nilpotent and $G / F(G)$ is abelian.*

2 Final remarks

1. If $A \leq G$, then A / A_G is called the *cofactor* of A in G . In this paper, in fact, we follow the general idea of studying groups with restrictions on the cofactors of their subgroups (see, for example, the recent papers [20], [21]).

2. Theorem 1.11 allows to prove the following fact which covers one of the main results in [18], [16].

Theorem 2.1 (See Theorem 5.1 in [12]). *Suppose that G is not σ -nilpotent but every proper σ -local subgroup of G is σ -nilpotent. Then G has σ -basis $\{H_1, \dots, H_t\}$ such that for some $1 \leq r \leq t$ the subgroups $H_1, \dots, H_r$ are normal in G and H_i is not normal in G for all $i > r$. Moreover, if H_i is special for all $i > r$, then $G / F_\sigma(G)$ is cyclic.*

3. Theorems 1.2, 1.8 and 1.11 remain to be new for each specific partition σ of $\mathbb{P}$.

4. In the mathematical practice we often deal with the following three classical partitions of $\mathbb{P}$: $\sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, $\sigma^\pi = \{\pi, \pi'\}$ and

$$\sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \pi'\},$$

where $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$ (we use here the notations in [7]).

Note that G is: σ^π -soluble if and only if G is π -separable, that is, every chief factor of G is either a π -group or a π' -group; σ^π -nilpotent if and only

if G is π -decomposable, that is, $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$.

Therefore in the case when $\sigma = \sigma^\pi$ we get from Theorem 1.11 the following result.

Corollary 2.2. *Suppose that G is not π -decomposable but every proper local section of G is π -decomposable. Then the following statements hold:*

(i) G/V is π -decomposable, where

$$V = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$$

is a maximal π -decomposable subgroup of G . Hence G is π -separable, so G has a Hall π -subgroup H_1 and a Hall π' -subgroup H_2 .

(ii) $F(G) = DZ$, where D is the π -decomposable residual of G and Z is a normal subgroup of G such that $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ is either a π -group or a π' -group for every chief factor H/K of G below Z .

(iii) At least one of the normalizers $N_G(H_1)$ or $N_G(H_2)$, say, is not π -decomposable. Moreover, if $N_G(H_i)$ is π -decomposable for any i such that $N_G(H_i) \neq G$, then H_1 is normal in G and $N_G(H_2)$ is π -decomposable. In this case every element of G induces a π' -automorphism on every chief factor of G below $O_{\pi'}(G)$.

A special case of Corollary 2.2 was obtained in the paper [22].

5. In the case when $\sigma = \sigma^{1^n}$, Theorem 1.11 covers the main result in [23].

REFERENCES

1. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
2. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, 1978. – 272 p.
3. Ballester-Bolínches, A. On the lattice of $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups / A. Ballester-Bolínches, K. Doerk, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148. – P. 42–52.
4. Vasil'ev, A.F. On lattices of subgroups of finite groups / A.F. Vasil'ev, A.F. Kamornikov, V.N. Semenchuk // Infinite groups and related algebraic structures. – Kiev: Institut Matematiki AN Ukrainy, 1993. – P. 27–54.
5. Ballester-Bolínches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolínches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer-Verlag, 2006. – 385 p.
6. Kovaleva, V.A. A criterion for a finite group to be σ -soluble / V.A. Kovaleva // Commun. Algebra. – 2019. – Vol. 46. – P. 5410–5415.
7. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.

8. Beidleman, J.C. On τ_σ -quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.

9. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

10. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

11. Shemetkov, L.A. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow: Nauka, 1989. – 254 p.

12. Skiba, A.N. On generalized local subgroups of finite groups / A.N. Skiba, B. Hu, J. Huang // Preprint. – 2019. – 18 p.

13. Baer, R. The influence on a finite groups of certain types of its proper subgroups / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

14. Fedri, V. Sui gruppi finiti i sui sottogruppi locali propri sono supersolubili / V. Fedri, U. Tiberio // Boll. Unione Mat. Ital. – 1980. – Vol. 17, № 1. – P. 73–78.

15. Beidleman, J.C. The influence on a finite groups of certain types of its proper subgroups / J.C. Beidleman // Riv. Mat. Univ. Parma. – 1968. – Vol. 9, № 2. – P. 247–260.

16. Chi, Z. On semi- σ -nilpotent finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Journal of Algebra and Its Applications – 2019. – DOI: 10.1142/S0219498819502001.

17. Gorbachev, V.I. Local F -subgroups of finite groups / V.I. Gorbachev // Problems in Algebra. – 1986. – № 2. – P. 62–72.

18. Sah, Chih-Han. On a generalization of finite nilpotent groups / Chih-Han Sah // Math. Z. – 1957. – Vol. 68, № 1. – P. 189–204.

19. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic: Polygonal Publishing House, 1982. – 232 p.

20. Monakhov, V.S. On cofactors of subnormal subgroups / V.S. Monakhov, I.L. Sokhor // Journal of Algebra and Its Applications. – 2016. – Vol. 15, № 9. – DOI: 10.1142/S0219498816501693.

21. Monakhov, V.S. On Groups with Formational Subnormal Sylow Subgroups / V.S. Monakhov, I.L. Sokhor // J. Group Theory. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 273–287.

22. Adarchenko, N.M. On finite semi- p -decomposable groups / N.M. Adarchenko, I.G. Blisets, V.N. Rizhik // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – Vol. 34, № 1. – P. 41–44.

23. On finite semi- π -special groups / N.S. Kosenok, V.M. Selkin, V.N. Rizhik, V.N. Mitsik // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2019. – Vol. 39, № 2. – P. 88–91.

Поступила в редакцию 11.04.19.

УДК 681.3.06:624.131

WEB-СЕРВИС АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ И РАСЧЕТА ФУНДАМЕНТОВ

А.В. Глубоков, М.И. Жадан, Е.М. Березовская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

WEB SERVICE OF THE AUTOMATED DESIGN AND CALCULATION OF THE BASES

A.V. Glubokov, M.I. Zhadan, E.M. Berezovskaya

F. Scorina Gomel State University

Статья посвящена автоматизированному проектированию и расчету различных типов фундаментов мелкого заложения. Учитывается изменение под нагрузкой физико-механических характеристик грунтов оснований. Созданное приложение позволяет производить расчеты согласно нормам и правилам СНиП. Для написания web-сервиса использованы фреймворк Spring и архитектурный стиль программирования REST. Взаимодействие пользователя с web-сервисом реализовано через клиентское приложение на основе технологии JavaFX.

Ключевые слова: фундамент, грунт, слои, уровни, здания и сооружения, нагрузки, диагностика, отчет, проектирование.

The automated design and calculation of various types of the bases of a small depth are presented. The change under loading of physicomachanical characteristics of soil of the bases is considered. The created application allows making calculations, according to the norms and rules of Construction Norms and Regulations. For writing of web service the framework of Spring and architectural style of programming of REST are used. Interaction of the user with web service is realized through the client application on the basis of the JavaFX technology.

Keywords: base, soil, layers, levels, buildings and constructions, loadings, diagnostics, report, design.

Введение

Строительство любого объекта всегда начинается с устройства фундамента. Застройщикам важно не только определиться с типом фундамента, но и выполнить расчеты всех его технических характеристик, влияющих на разработку конструктивных решений, учитывая многообразие структуры и свойств грунтов Беларуси. В наши дни сфера строительства стала областью, где активно используются высокотехнологичные достижения. Сегодня выполнение проектных работ трудно представить без применения компьютеров: необходимо самое современное и специализированное программное обеспечение. Существует ограниченное число программ для упрощения этого процесса, да и те, которые существуют, распространяются по коммерческой лицензии и неоправданно дорого.

Целью рассматриваемого программного инструментария является разработка web-сервиса и клиентского приложения для автоматизированного проектирования и расчёта оснований и фундаментов в зависимости от типа грунта с интуитивно понятным и дружелюбным интерфейсом для пользователя. Преимуществом такого представления является тот факт, что клиенты не зависят от конкретной операционной системы и удовлетворяются требованиям надежности и целостности данных. При реализации web-сервиса использованы технологии REST [1], Spring Framework [2]. Для взаимодействия пользователя

с web-сервисом создано отдельное клиентское приложение на основе технологии JavaFX [3].

1 Проектирование и разработка приложения

Приложение ориентировано на инженеров проектировщиков, конструкторов проектных институтов, мастеров и производителей работ на строительных участках, работников экспертных служб. Оно охватывает максимально широкий спектр задач, просто в работе и требует минимум исходной информации, вводя недостающие данные из минимально необходимых, действуя при этом в запас прочности, но не более 5–10%. Приложение имеет целью решение конкретных производственных задач, встающих перед пользователями определенного выше круга. Оно решает эти задачи во всей широте возможных в реальных условиях конструкций и материалов [4], [5].

В приложении реализованы функции для проектирования отдельно стоящих фундаментов под колонны каркасных зданий на естественном основании, проектирование ленточных фундаментов под стены бескаркасных зданий на естественном основании. Благодаря этому можно надежно и быстро произвести комплексную оценку характеристик всех приемлемых вариантов основания для любых зданий и сооружений. Приложение позволяет учитывать свойства несущего грунта, его особенности в условиях планируемой эксплуатации; полученные характеристики

можно легко сопоставить с нагрузкой от проектируемых зданий. В настоящее время в приложении реализованы расчеты ТКП 45-5.01-254-2012 «Основания и фундаменты зданий и сооружений. Основные положения», ТКП 45-5.01-67-2007 «Фундаменты плитные. Правила проектирования». Имеется ряд востребованных расчетов, не входящих в СНиП.

Приложение позволяет определять размеры подошвы ленточных, столбчатых фундаментов. Жесткие фундаменты рассчитываются только на восприятие напряжений сжатия. Гибкие фундаменты работают на изгиб и дополнительно рассчитываются на восприятие растягивающих, поперечных усилий и на продавливание (срез) по СНБ 5.03.01. Размеры подошвы фундамента определяются в зависимости от нагрузок относительно его оси и характера эпюры контактных давлений [4]. Осадка фундамента определяется методом послойного суммирования с использованием расчетной схемы линейно-деформированного полупространства, ограниченного условной глубиной сжимаемой толщи [5].

Предлагаемый программный продукт позволяет решать «обратную задачу», т. е. проверить по заданию пользователя размеры и армирование плитной части фундамента. Автоматически проверяется давление на кровлю грунта слабого слоя, в случае его недопустимости производится увеличение размеров подошвы.

Для эффективной работы с программной системой необходимо подготовить предварительно ряд соответствующих проектных материалов: план и разрез здания, нагрузки, материалы инженерно-геологических изысканий на площадке строительства, варианты отметок подошвы фундаментов.

Исходные данные сведены в логические группы-таблицы: материалы, грунты и отметки, нагрузки, ограничения, задание для проверки.

2 Основные возможности web-сервиса

При запуске приложения пользователь увидит главное меню, изображенное на рисунке 2.1 [6].

В левом столбце содержатся необходимые справочные материалы для расчетов: предельные деформации оснований, расчетные сопротивления грунтов оснований, характеристики грунтов, коэффициенты условий работы. В правой части главного меню представлены расчеты для фундаментов: осадка фундамента и предельное давление при расчете деформаций.

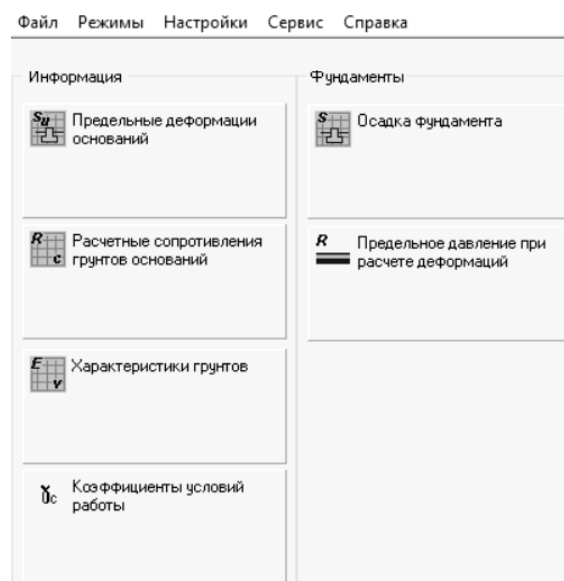


Рисунок 2.1 – Главное меню

Предельные деформации основания			
Сооружения	Относительная разность осадок (Ds/L)	Крен	Средняя (в скобках максимальная) осадка, см
1. Производственные и гражданские одноэтажные и многоэтажные здания с полным каркасом:			
железобетонным	0,002		(8)
стальным	0,004	-	(12)
2. Здания и сооружения, в конструкциях которых не возникают усилия от неравномерных осадок	0,006	-	(15)
3. Многоэтажные бескаркасные здания с несущими стенами из:			
крупных панелей	0,0016	0,005	10
крупных блоков или кирпичной кладки без армирования	0,0020	0,005	10
то же, с армированием, в том числе с устройством железобетонных поясов	0,0024	0,005	15
4. Сооружение элеваторов из железобетонных конструкций:			
рабочее здание и силосный корпус монолитной конструкции на одной фундаментной плите	-	0,003	40
то же, сборной конструкции	-	0,003	30
Примечания:			
1. Предельные значения относительного прогиба зданий, указанных в поз. 3, принимают равными 0,5(Ds/L)			
2. При определении относительной разности осадок (Ds/L) поз. 8 настоящего приложения за L принимают расстояние между осями блоков фундаментов в направлении горизонтальных нагрузок, а в опорах с оттяжками — расстояние между осями сжатого фундамента и анкера.			
3. Если основание сложено горизонтальными (с уклоном не более 0,1), выдержанными по толщине слоями грунтов, предельные значения максимальных и средних осадок допускается увеличивать на 20 %.			

Рисунок 2.2 – Предельная деформация основания

Крупнообломочные грунты		Пески	Глинистые (непросадочные) грунты	Глинистые просадочные грунты
Заторфованные пески		Элювиальные крупнообломочные грунты		Элювиальные пески
Элювиальные глинистые грунты		Насыпные грунты		Грунты обратной засыпки
Грунты	Коэффициент пористости e	Расчетное сопротивление R_0 , МПа, при показателе текучести IL , равном		
		$IL = 0$	$IL = 1$	
Супеси	0.5	0.3	0.25	
	0.7	0.25	0.2	
Суглинки	0.5	0.3	0.25	
	0.7	0.25	0.18	
	0.9	0.2	0.13	
	1.1	0.15	0.1	
Глины	0.6	0.5	0.3	
	0.8	0.3	0.2	
	1.1	0.25	0.15	
	1.25	0.2	0.1	

П р и м е ч а н и е — Приведенные значения R_0 относятся к элювиальным глинистым слабоструктурным грунтам, образованным при выветривании магматических пород. Для глинистых аргиллито-алевролитовых грунтов значения R_0 принимают с коэффициентом 0,9.

Рисунок 2.3 – Значения условного расчетного сопротивления грунтов

Пески четвертичных отложений		Глинистые нелёссовые грунты четвертичных отложений			
Пески	Характеристики грунтов	Характеристики грунтов при коэффициенте пористости e , равном			
		0,45	0,55	0,65	0,75
Гравелистые и крупные	удельное сцепление, кПа	2	1	–	–
	угол внутреннего трения, град	43	40	38	–
	модуль деформации, МПа	50	40	30	–
Средней крупности	удельное сцепление, кПа	3	2	1	–
	угол внутреннего трения, град	40	38	35	–
	модуль деформации, МПа	50	40	30	–
Мелкие	удельное сцепление, кПа	6	4	2	–
	угол внутреннего трения, град	38	36	32	28
	модуль деформации, МПа	48	38	28	18
Пылеватые	удельное сцепление, кПа	8	6	4	2
	угол внутреннего трения, град	36	34	30	26
	модуль деформации, МПа	39	28	18	11

Рисунок 2.4 – Характеристики грунтов

Для дальнейшей работы с приложением пользователь должен выбрать пункт из раздела «Информация» или «Фундаменты».

В разделе «Информация» содержится вся сопутствующая информация для расчётов и работы с программой. На рисунке 2.2 приведена информация о предельной деформации основания.

Здесь приведены предельные допустимые осадки оснований и фундаментов, относительная разность осадков, крен.

Имеется возможность получить информацию о значениях расчётного сопротивления и расчётного модуля деформации для разных видов грунтов, коэффициенты условий работы,

которые используются при определении расчетного сопротивления грунта (рисунок 2.3). К каждой таблице дано примечание, которое поясняет информацию, содержащуюся в таблице. Информация из этих таблиц используется для определения первоначальных размеров фундаментов.

На рисунке 2.4 показаны таблицы, в которых содержатся нормативные значения удельного сцепления, угла внутреннего трения и модуля деформации для различных видов грунтов. Для песчаных грунтов характеристики представлены для различного коэффициента пористости. Для глинистых грунтов характеристики представлены в зависимости от коэффициента пористости и показателя текучести грунта.

На рисунке 2.5 показана таблица коэффициентов условий работы. В данной таблице приведены коэффициенты работы основания и фундамента. Один коэффициент зависит от типа грунта, второй от типа грунта и конструктивной схемы здания. Эти данные используются при определении расчетного сопротивления грунта.

Имеется примечание к этой таблице, в нём содержатся правила определения второго коэффициента в зависимости от жесткой или гибкой конструктивной схемы, а также от соотношения длины здания к его высоте.

Коэффициенты условий работы			
Грунты	Коэффициент $Gc1$	Коэффициент $Gc2$ для сооружений с жесткой конструктивной схемой при отношении длины сооружения или его отсека к высоте L/H , равном	
		4 и более	1,5 и менее
Крупнообломочные с песчаным заполнителем и пески, кроме мелких и пылеватых	1.4	1.2	1.4
Пески мелкие	1.3	1.1	1.3
Пески пылеватые:			
маловлажные и влажные	1.25	1	1.2
насыщенные водой	1.1	1	1.2
Глинистые, а также крупнообломочные с глинистым заполнителем с показателем текучести грунта или заполнителя $IL \leq 0,25$	1.25	1	1.1
То же, при $0,25 < IL \leq 0,5$	1.2	1	1.1
То же, при $IL > 0,5$	1.1	1	1

Примечания:
 1. К сооружениям с жесткой конструктивной схемой относят сооружения, конструкции которых специально приспособлены к восприятию усилий от деформации оснований
 2. Для зданий с гибкой конструктивной схемой значение коэффициента $Gc2$ принимают равным единице.
 3. При промежуточных значениях L/H коэффициент $Gc2$ определяют интерполяцией.
 4. Для рыхлых песков $Gc1$ и $Gc2$ принимают равными единице.

Рисунок 2.5 – Коэффициенты условий работы

Общие данные

Нагрузки на пол

Грунты

Глубина заложения подошвы фундамента от уровня планировки, H 4 м

Глубина заложения подошвы фундамента относительно естественного рельефа, H_z 3 м

Предельная величина деформации фундамента 15 мм

☐ Наличие подвала

Рассматриваемый фундамент

Координаты центра		Размеры подошвы		Продольная сила
X	Y	A	B	
м	м	м	м	Т
0	0	5	6	356

☒ Колонна среднего ряда ☐ Колонна крайнего ряда

Соседние фундаменты

	Координаты центра		Размеры подошвы		Усилия
	X	Y	A	B	
	м	м	м	м	Т
1	0	11	5	6	231
2	0	-11	5	6	342

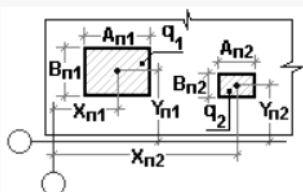
+ Добавить

X Удалить

Вычислить

Рисунок 2.6 – Осадка фундамента

Общие данные | **Нагрузки на пол** | Грунты



Нагрузки на прилегающие площади

	Координаты центра		Размеры в плане		Нагрузка
	X	Y	A	B	q
1	0	0	1.8	2.1	1

+ Добавить X Удалить

Рисунок 2.7 – Нагрузка на пол

Общие данные | **Нагрузки на пол** | Грунты

Коэффициент надежности по грунту: 1

Средний удельный вес грунта выше подошвы фундамента: 1.65 /³

Расчетные характеристики слоев грунта ниже подошвы фундамента (для расчета по деформациям)

	Толщина слоя	Удельный вес	Удельное сцепление	Угол внутреннего трения	Модуль деформации	Наличие воды	Коэффициент пористости	Коэффициенты условий работы		Цвет
								основания	фундамента	
1	1	1.8	0.1	28	20		0	1	1	
2	2	1.9	2	25	35		0	1	1	

Рисунок 2.8 – Грунты

Проверка для уровня подошвы удовлетворена		
Расчетное сопротивление грунта в уровне подошвы фундамента	23.1	Н/м ²
Среднее давление от нагрузок в уровне подошвы фундамента	19.8	Н/м ²
Осадка определена для основания в виде упругого полупространства		
Осадка основания	5	м
Просадка от нагрузки	0	м
Просадка от веса грунта	0	м
Сумма осадки и просадки	5	м
Глубина сжимаемой толщи	4.1	м
Винклеровский коэффициент постели	2.4	Н/м ³
Осадка больше допустимой		

Рисунок 2.9 – Результаты расчетов

В разделе «Фундаменты» содержится основной функционал программы. Здесь, при выборе соответствующего пункта, производится расчёт оснований плитных фундаментов по деформациям. Целью расчёта по деформациям оснований является ограничение абсолютных или относительных перемещений фундаментов проектируемых сооружений, такими пределами, при которых гарантируется их нормальная эксплуатация и долговечность. Расчёт оснований по деформации производится из условия совместной работы сооружения и основания. В результате расчёта определяется осадка фундамента, т. е. вертикальное смещение основания фундамента в результате уплотнения под действием внешних нагрузок, воздействий и собственного веса грунта, не сопровождающегося коренным изменением его структуры. На рисунке 2.6 показана форма заполнения основных данных для расчёта осадки фундамента. Указывается глубина заложения подошвы фундамента от уровня планировки, глубина заложения подошвы фундамента относительно естественного предела, его предельная деформация, наличие подвала.

Далее заполняются размеры подошвы фундамента и на вкладке «Нагрузка» указывается нагрузка, действующая на пол (рисунок 2.7).

На этой форме пользователь задаёт координаты центра приложения нагрузки, размеры действия нагрузки в плане и значение действующей нагрузки. При наличии нескольких нагрузок имеется возможность учитывать действия нескольких нагрузок при помощи добавления их в таблицу. Заполнение и изменение происходит так же, как и на вкладке «Общие данные».

На вкладке «Грунты» (рисунок 2.8) описываются последовательные слои грунтов, расположенные ниже подошвы фундамента. Указывается толщина слоя. Для каждого слоя вводятся характеристики. Есть возможность учета наличия грунтовых вод. После заполнения данных на всех вкладках переходят к расчёту (рисунок 2.9).

В разделе «Фундаменты» имеется возможность вычисления расчётного сопротивления грунта основания. Для этого необходимо задать размеры фундамента, объёмный вес грунта выше уровня подошвы, ниже уровня подошвы, удельное сцепление грунта, угол внутреннего трения,

Общие данные

Расчетные характеристики грунта

☒ Приняты по таблицам СНиП

☐ Определены непосредственным испытанием

Фундамент

Ширина подошвы фундамента b 1.5

Глубина заложения фундамента от уровня планировки d_1 1.8

Характеристики грунта

Расчетное значение удельного сцепления грунта, залегающего непосредственно под подошвой фундамента c_{II} 0.1 /²

Угол внутреннего трения ϕ_{II} 28

Толщина слоя грунта выше подошвы фундамента со стороны подвала h_s 0

Осредненное расчетное значение удельного веса грунтов, залегающих ниже подошвы фундамента γ_{II} 1.8 /³

Осредненное расчетное значение удельного веса грунтов, залегающих выше подошвы фундамента γ_{II} 1.6 /³

Коэффициенты условий работы

γ_{c1} 1 γ_{c2} 1.2

☐ Подвал

Глубина подвала d_s 0

Толщина конструкции пола подвала h_d 0

Расчетное значение удельного веса конструкции пола подвала γ_d 0 /³

Результат

Расчетное сопротивление грунта основания R /²

Вычислить

Рисунок 2.10 – Определение расчетного сопротивления грунта

удельный вес грунта, залегающий ниже подошвы фундамента. Задаются коэффициенты условия работы грунта. Имеется возможность определения расчетного сопротивления грунта основания с учётом подвала, где указывается его глубина, толщина конструкции пола и расчетное значение удельного веса конструкции пола подвала. Коэффициенты условия работы выбираются из таблиц, описанных в разделе «Информация» (рисунок 2.10).

Диагностика входных данных имеет несколько уровней. Основным является уровень ввода исходных данных. По каждому случаю нарушений выдается соответствующее сообщение.

Результаты расчета оформляются в представительский отчет, в формате HTML, со всеми эпюрами, шапками и картинками. Формирование отчетов полностью автоматическое.

Заключение

Разработано приложение для проектирования различных типов оснований и фундаментов мелкого заложения, учитывается изменение под нагрузкой физико-механических характеристик грунтов оснований. Приложение дает возможность проверить по заданию пользователя размеры плитной части фундамента, а также произвести расчёт фундаментов по деформации. В web-сервисе реализована возможность определения расчетного сопротивления грунта основания. Все расчеты выполнены согласно нормам и правилам СНиП. Для написания web-сервиса использованы технологии REST, Spring Framework. Взаимодействие пользователя с web-сервисом реализовано через клиентское приложение на основе технологии JavaFX. Приложение развернуто на

сервере предприятия ОАО «Гипроживмаш» [7] и используется в его производственном процессе для выполнения нужд предприятия в области расчётов оснований и фундаментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Webber, J. REST in Practice / J. Webber – Издательство: O'Reilly Media, 2010. – 448 с.
2. Mak, G. Spring Recipes: A problem-Solution Approach / G. Mak. – Издательство: Apress, Inc., 2010. – 571 с.
3. Машинин, Т. JavaFX 2.0. Разработка RIA-приложений / Т. Машинин. – Издательство: БХВ-Петербург, 2012. – 320 с.
4. Берлинов, М.В. Примеры расчёта оснований и фундаментов / М.В. Берлинов, Б.А. Ягулов. – М.: «Москва стройиздат», 1986. – 172 с.
5. Кальницкий, А.А. Расчет и конструирование железобетонных фундаментов гражданских и промышленных зданий и сооружений / А.А. Кальницкий, Л.М. Пешковский. – М.: «Высшая школа», 1974. – 256 с.
6. Глубоков, А.В. Проектирование и разработка web-сервиса по автоматизированному проектированию оснований и фундаментов / А.В. Глубоков, М.И. Жадан // Творчество молодых' 2017. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2017. – Ч. 1. – С. 204–207.
7. Левчук, Е.А. Анализ предложений и разработка рекомендаций по выбору хостинга для размещения сайтов организаций Белкоопсоюза / Е.А. Левчук // Проблемы и перспективы электронного бизнеса: сб. ст. межд. научно-практич. конф.; редкол.: С.Н. Лебедева [и др.]; под ред. А.Н. Семенюты. – 2017. – С. 83–86.

Поступила в редакцию 14.12.18.

УДК 004.9

СРЕДСТВА И ПРИМЕРЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ДЛЯ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В.Б. Таранчук

Белорусский государственный университет, Минск

TOOLS AND EXAMPLES OF INTELLIGENT DATA PROCESSING FOR GEOLOGICAL MODELS

V.B. Taranchuk

Belarusian State University, Minsk

Обсуждаются вопросы разработки, инструментального наполнения, использования интегрированного программного комплекса составителя цифровых геологических моделей. Отмечены возможности интерактивной графической визуализации и сравнения результатов. Представлены и обсуждаются результаты применения искусственных нейронных сетей в анализе и интерпретации геопространственных данных.

Ключевые слова: цифровая геологическая модель, система компьютерной алгебры *Mathematica*, интерактивная графическая визуализация, искусственные нейронные сети.

The problems of development, tool filling, and usages of the integrated program complex of the composer of digital geological models are considered. Possibilities of interactive graphics visualization and comparison of results are marked. The results of application of artificial neural networks in the analysis and interpretation of geospatial data are presented and discussed.

Keywords: digital geological model, Computer Algebra System *Mathematica*, interactive graphics visualization, artificial neural network.

Введение

Цифровые геологические, геоэкологические модели в настоящее время являются обязательной составляющей экспертизы во многих сферах деятельности. Геологическое моделирование представляет самостоятельное направление, включающее в себя развитие математических методов и алгоритмов; разработку компьютерных программ, обеспечивающих цикл построения моделей; создание баз данных, их наполнение и сопровождение. Основными этапами информационного обеспечения геологических моделей являются загрузка из различных источников и предварительная обработка данных, корреляция, создание цифровых кубов характеристик среды, интерактивный анализ данных, визуализация с помощью графики, картографирование.

Данные, используемые в геологических и геоэкологических моделях, являются представительной частью геоданных, которые интегрируют и обобщают информацию о процессах и явлениях на земной поверхности, включают классифицированные и интегрированные в единую систему группы данных [1]. Геоданные содержат пространственно-временные характеристики территории, предметов, построек. Существенно, что геоданные, как обобщение накопленной информации, включают сведения не только из области наук о Земле, но и из других, таких как транспорт, экономика, экология, управление, образование, анализ, искусственный интеллект.

Геоданные, и в частности геологические данные, дополняют и интегрируют другие данные, чем обеспечивают решение многих задач.

Технологические, системные, информационные особенности геоданных отмечены в [1]. Технологическая особенность геоданных состоит в том, что их не получают на основе непосредственных измерений, а они формируются в результате постобработки измеренной информации, могут иметь разную точность, храниться с использованием разных единиц измерений. Системная особенность заключается в том, что после их формирования геоданные представляют собой интегрированную в единый комплекс совокупность параметров и описаний разных типов и структур, отражают различные характеристики и свойства, описывают реально существующие пространственные отношения с учетом временного и тематического факторов. Информационная особенность обусловлена тем, что геоданные представляют собой новый информационный ресурс, при этом данные группируют по трём характеристикам: месту, времени, теме. Также особенностью является наличие (реализуемое автоматически) взаимовлияния графических и атрибутивных данных – изменение атрибутивных данных предполагает замену графической информации, уточнение пространственного положения, требует изменений координат, пространственных отношений. Отмеченное взаимовлияние обеспечивает надёжную основу для пространственного визуального анализа и управления.

Объемы геоданных (огромные массивы имеющейся и вновь собираемой информации) растут с очень большой скоростью. Имеет место информационный бум. Соответственно, естественным является применение технологий «больших данных» (конкретика для геоданных в [2]), в том числе автоматизированного интеллектуального анализа данных (ИАД). В [3] акцентируется одна из главных целей ИАД – обнаружение в «сырых» (первичных) массивах данных ранее неизвестных, нетривиальных, практически полезных и понятных интерпретации знаний; отмечена специфика геоданных. В формулировке автора [3] «интеллектуальный анализ данных не исключает человеческое участие в обработке и анализе, но значительно упрощает процесс поиска необходимых данных из сырых данных, делая его доступным для широкого круга аналитиков, не являющихся специалистами в статистике, математике или программировании. Человеческое участие выражается в когнитивных аспектах участия и применения информационных когнитивных моделей».

Практические реализации, программные системы и комплексы для формирования и организации геоданных – предмет отдельного рассмотрения. Средства интеллектуального анализа геоданных такие же, как для обычных данных. Основой являются теории, методы, алгоритмы прикладной статистики, баз данных, искусственного интеллекта, распознавания образов. Различных действующих и применяемых программных средств интеллектуального анализа данных много, например, в [3] выделены следующие классы систем ИАД: «Индустриальные системы, Предметно-ориентированные аналитические системы, Статистические пакеты, Искусственные нейронные сети, Пакеты, основанные на деревьях решений, Системы рассуждений на основе аналогичных случаев, Генетические алгоритмы, Эволюционное программирование». Разнообразие предлагаемых методик и программных средств обуславливает необходимость оценки качества геоданных, определения их основных характеристик. Критерии оценок качества геоданных обсуждаются в [4]; к обязательным относят: репрезентативность, содержательность, прагматизм, достаточность, точность, актуальность, устойчивость, сертификат безопасности, надежность.

В настоящей работе обсуждаются возможные варианты получения оценок, методические решения и соответствующие программные инструменты, которые позволяют подтвердить обоснованность интерпретаций, получить числовые значения погрешностей получаемых разными методами результатов интеллектуальной предобработки данных, включаемых и используемых в компьютерных геологических моделях.

1 Программная платформа

Представленные ниже результаты получены с использованием компьютерного комплекса «Генератор геологической модели залежи» – ГГМЗ [5], [6]. Назначение комплекса – тестирование, оценки точности настраиваемых геологических моделей на основе применения СКА, ГИС, «умных» методов адаптации моделей в процессе их эксплуатации, «самонастройки» моделей с учётом дополняемых данных фактического развития процессов. Платформа разработки комплекса – система компьютерной алгебры *Mathematica* [7], язык Wolfram Language [8], [9], геоинформационная система Golden Software Surfer [10]. При программировании в системе *Mathematica* модулей графики реализованы технические решения, описанные в [11]. Предусмотрены возможности, когда программный комплекс в конкретной конфигурации может эксплуатироваться после сборки и сохранения в формате вычисляемых документов CDF. Расчеты, работа пользователя с CDF версией приложения возможна на любом персональном компьютере. При просмотре CDF версии, размещенной на web-сервере, программа просмотра автоматически подгружается в виде плагина браузера. Автономная работа с ПК возможна после инсталляции свободно распространяемого компонента CDF Player. Варианты дополнительных настроек, обеспечивающих интерактивность CDF версии, изложены в [12], [13].

2 Компоненты комплекса ГГМЗ

В изложении ниже упомянуты компоненты, фактически являющиеся автономными программными модулями. Их также можно позиционировать, как составные части автоматизированного рабочего места специалиста, который в вычислительных экспериментах отрабатывает приемы адаптации используемых при построении геологических моделей цифровых полей. Следует отметить важное техническое решение – все этапы работы с модулями комплекса поддерживаются функциями импорта и экспорта результатов с несколькими вариантами настроек форматов. Это обеспечивает пользователя дополнительными возможностями выполнения аналогичных расчетов в разных (в том числе других) приложениях, сопоставления результатов.

В программном комплексе ГГМЗ реализованы следующие средства:

- инструменты и шаблоны для подготовки эталонной модели цифрового поля, отвечающего оговоренным свойствам («Конструктор цифрового поля»);
- средства и несколько вариантов модулей «искажения» эталонной модели;
- инструменты имитации «съема» данных, которые используются в практике моделирования («Генератор профиля наблюдения»);

– модули расчета, визуализации, сопоставления аппроксимирующих цифровых полей несколькими разными методами (компонент «Аппроксимация»);

– инструменты и модули адаптации («доводки») формируемой цифровой модели (компонент «Адаптация»).

Основная идея и цель разработки настоящего комплекса состоит в выборе метода обработки исходных данных путем сопоставления эталонного цифрового поля и восстановленного по «наблюдениям». Эталонное распределение для прямоугольной области формируется с использованием математических описаний, каждый эксперт при этом определяет и включает в модель типичные фрагменты. Затем инструментами комплекса выполняются «наблюдения», имитируется снятие замеров по эталонному распределению, причем геометрия точек замеров и их точность также определяются пользователем комплекса и примерно должны соответствовать исходным данным предметной области. Схема размещения точек с замерами не должна быть регулярной. В результате этого этапа пользователь получает набор данных «наблюдений», основными из которых являются координаты точки и значение в ней. Следующим этапом является выбор алгоритма обработки полученного набора («воспроизведения» цифрового поля) выполнением интерполяции и экстраполяции. Сопоставление результатов «воспроизведения» и эталона подскажут эксперту метод обработки, геометрию точек наблюдения.

3 Этапы подготовки типовой эталонной модели

Конструктор цифрового поля (КЦП). Программные модули этой группы обеспечивают в режиме интерактивной работы конструирование из типовых элементов с сопутствующей визуализацией математического описания (аналитической функции) модели поверхности, интерпретируемой, как рельеф - совокупность фрагментов разных форм поверхности. Возможности, шаги формирования подробно описаны и проиллюстрированы разными примерами в [5], [6]. Пользователем задаются границы области определения и ограничения поверхности по высоте. В комплекте (библиотеке) составных частей формируемой функции есть математические выражения (элементы), обеспечивающие воспроизведение участков поведения, характерных для рельефа местности. Пользователь на первом этапе формирования эталонной поверхности составляет кусочно-заданную функцию, базовый профиль – ленту заданной ширины и длины, имитирующую типы рельефа с элементами плато, склон, откос, обрыв. Составление средствами КЦП базового профиля из фрагментов возможно с переходом «фрагмент – добавленный фрагмент» непрерывным

образом, гладким переходом, скачком (имитация разлома). В случае непрерывного, гладкого переходов параметры склейки кусочно-заданной функции определяются автоматически программным модулем. Простейший вариант определения функции и задания базового профиля записан в выражении (3.1) [5]. В приведенном примере модель базовой поверхности является квазитрехмерной, уровень z (высота) не зависит от y (ширины ленты). Базовая поверхность (лента) составлена из 3-х типовых участков: плоский горизонтальный (плато), плоский быстрого возрастания уровня (откос), плоский медленного возрастания (пологий склон). Стыковка участков – непрерывно. Переход «плато – откос» осуществлен под заданным углом, переход «откос – пологий склон» осуществлен непрерывным и гладким. Следующий этап конструирования - использование инструментов программного модуля для дополнения базового профиля возмущениями, фрагментами типовых элементов рельефа. Библиотека шаблонов включает элементы, которые соответствуют возмущениям (участкам искажений базовой поверхности) разной геометрической формы. При подключении шаблонов предусмотрены возможности интерактивного задания их положения и размеров.

В основной комплект комплекса включены математически описываемые элементы, которые имитируют следующие формы рельефа: холм, насыпь, яма, выемка, траншея, канал, карьер, овраг, впадина. Аналитическое выражение для сформированной и рассматриваемой далее поверхности – (3.5) [5]. На рисунке 3.1 показаны два вида поверхности, с которой далее проводятся вычислительные эксперименты. Слева дан вид поверхности целиком, справа – с простым профильным разрезом по направлению $\{0,10\}$ – $\{100,20\}$. Рассмотрен конкретный профиль 2 (в [5] иллюстрирован одномерными графиками на рисунках 4.1 и 4.2).

4 Подготовка данных для численных экспериментов

Wolfram *Mathematica*, как система интеллектуальных вычислений, предоставляет пользователю не только средства математических преобразований, точных и приближенных вычислений, но и инструменты машинного обучения. Они могут быть использованы при интерпретации и обработке входных данных и результатов моделирования. Приведенные ниже результаты и примеры анализа данных с помощью нейронных сетей получены с использованием соответствующих функций, которые доступны в версии 11 *Mathematica* [7].

Рассмотрим средства и несколько вариантов применения модулей «искажения» эталонной модели, примеры предобработки, вывода графиков профилей с использованием инструментов

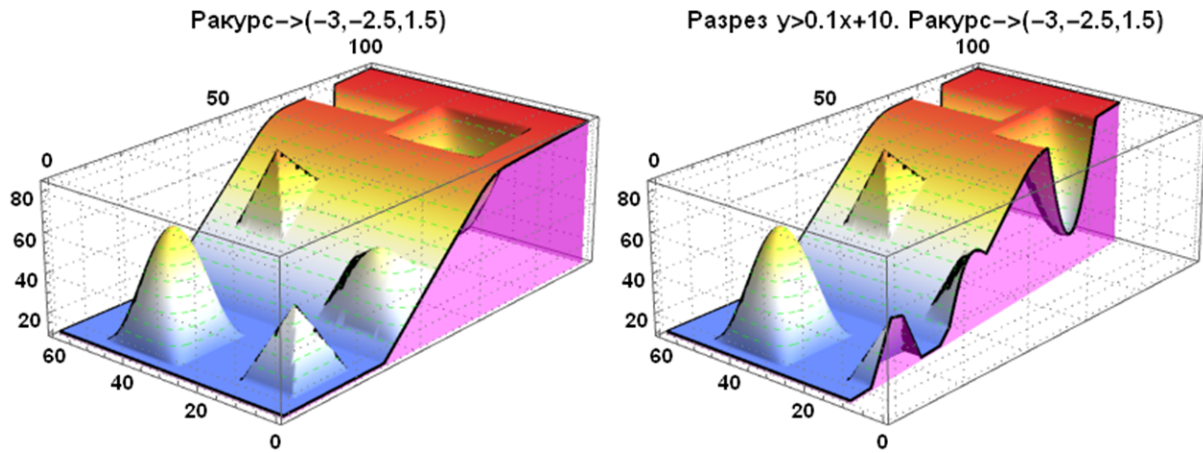


Рисунок 3.1 – Вид поверхности в полном варианте и с профильным разрезом

компонента комплекса «Генератор профиля наблюдений». Имитируем наблюдения и получим типичные наборы данных замеров. Иллюстрируем варианты применения инструментов ГГМЗ, в частности, модуля «искажения» эталонной модели для того, чтобы показать на примере профилей по эталонным поверхностям несколько методов имитации наблюдений и получения исходных данных средствами инструментов модуля «Генератор профиля наблюдений». Для этой цели используем рассчитанные из аналитических выражений на упомянутом профиле значения, но добавим «искажения», используя разные генераторы шума. Графики представлены на рисунке 4.1. На графиках сплошная синяя линия иллюстрирует аналитическую функцию распределения высоты поверхности на выбранном направлении разреза; кружочками отмечены значения в «узлах наблюдений» (если бы замеры были точными). Окружностями и ромбиками отмечены значения, которые имитируют замеры. На графике слева окружностями отмечены «данные наблюдений», когда исходные значения в узлах (обозначены кружочками) искажаются с использованием выборки, генерируемой функциями *Mathematica* `RandomVariate` (реализация случайной переменной) и `NormalDistribution[0,3]` (нормальное распределение со средним 0 и стандартным отклонением 3). На графике справа ромбиками

отмечены «данные наблюдений», когда исходные значения искажаются с использованием выборки, генерируемой функциями `RandomVariate` и `UniformDistribution[{-6,6}]` (равномерное статистическое распределение, дающее значения от -6 до 6).

Отдельно следует обратить внимание на специально подобранный для экспериментов профиль и задаваемые величины отклонений. Исходная функция имеет область изменения от 10 до, примерно, 80, при этом есть небольшие возмущения от базового уровня (ленты) вблизи $x=40$ и существенные отклонения от уровня ленты вблизи $x=10$ и $x=80$. Величины этих отклонений соразмерны величине изменения функции. Относительно шумов – есть незначительные и есть такие, которые можно классифицировать как «выбросы».

Данные с «искажениями» далее будем использовать для двух разных целей, соответственно будут применяться разные методы предобработки. Важно следующее – обсуждаемые ниже методы интеллектуального анализа «не знают» первоисточник, эталонную функцию. Задача эксперта – максимально воспроизвести (угадать) оригинал по имеющимся данным «замеров». Кстати, распределение, названное в тексте эталонным, может и не быть оригиналом.

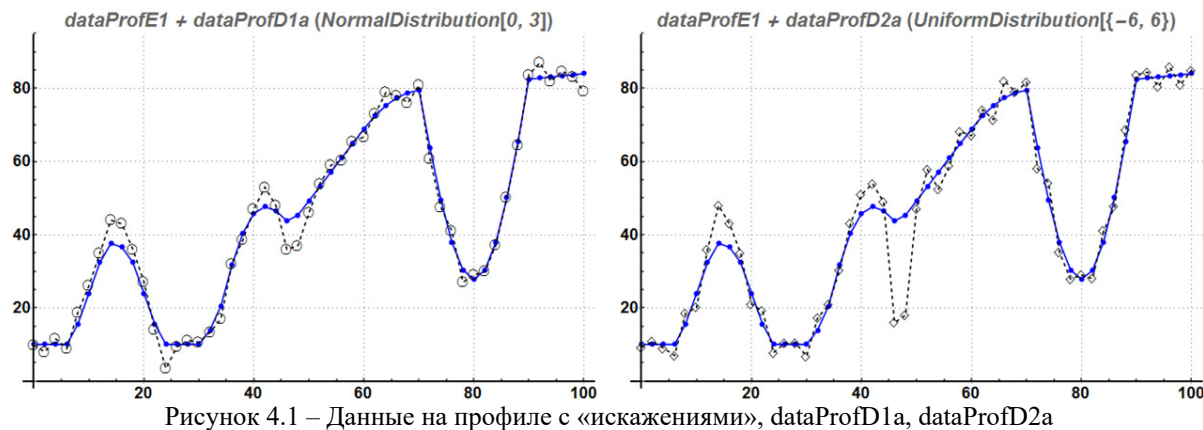


Рисунок 4.1 – Данные на профиле с «искажениями», dataProfD1a, dataProfD2a

5 Варианты интеллектуального анализа данных

Как отмечено выше, в настоящее время много методик и программных средств для интеллектуального анализа данных базируются на достижениях искусственных нейронных сетей. Рассмотрим несколько результатов, иллюстрации которых даны на рисунках 5.1, 5.2.

При решении задач математического моделирования исходные уравнения записываются в дифференциальной форме, поэтому и исходные данные (оснастка модели) должны быть непрерывными, более того, как правило, распределения должны быть гладкими функциями. Другими словами, распределение наблюдаемого параметра вдоль профиля надо передавать в исходные данные компьютерной теоретической модели в виде гладкой функции. Заметим, что и эталонные данные рисунка 4.1 требованию гладкости не отвечают, а данные с «искажениями» вовсе непригодны для численных моделей – такие исходные данные немедленно повлекут «болтанку» в решениях (вычислительная неустойчивость) и результаты будут непригодны.

Рассмотрим варианты предобработки данных, подразумевающая получение аппроксимирующей гладкой функции.

На рисунке 5.1 представлены результаты расчетов после обучения искусственной нейронной сети с использованием функции *Mathematica* методом ADAM [14]. В методе Adam программируется оптимизационный алгоритм, который сочетает в себе идею накопления движения и идею более слабого обновления весов для типичных признаков; реализуется метод стохастического градиентного спуска с использованием адаптивной скорости обучения, инвариантной к диагональному масштабированию градиентов. Ключевые конструкции кода, функции и опции системы *Mathematica* включают команды: `netA = NetChain[{vectLength, Tanh, vectLength, Tanh, 1}, "Input" -> "Scalar", "Output" -> "Scalar"]; netD1a = NetTrain[netA, dataProfD1a, Method -> "ADAM"]`. Полученное сглаженное приближение выводится

на рисунке 5.1 пунктирной красной линией, дополнительно в поле графика даны две вставки ситуационного плана (выкопировки), которые детализируют графики.

На рисунке 5.2 представлены результаты для dataProfD2a, полученные после обучения сети на основе функции NetTrain методом RMSProp – стохастический градиентный спуск с использованием адаптивной скорости обучения, полученной из экспоненциально сглаженного среднего значения градиента.

Следует отметить, что для обработки данных dataProfD1a также применялся метод "RMSProp". В рассмотренном примере ключевые конструкции кода были следующими: `netAr = NetChain[{vectLength, Tanh, vectLength, Tanh, 1}, "Input" -> "Scalar", "Output" -> "Scalar"]; netD1ar = NetTrain[netAr, dataProfD1a, Method -> "RMSProp"]`. В расчетах по этому методу было достаточно `vectLength = 10`, а полученные результаты аналогичны варианту рисунка 5.1.

На рисунке 5.2 представлены результаты, полученные при `net2Ar = NetChain[{vectLength, Tanh, vectLength, Tanh, 1}, "Input" -> "Scalar", "Output" -> "Scalar"]; netD2ar = NetTrain[net2Ar, dataProfD2a, Method -> "RMSProp"]`. Сглаженное приближение выводится штрихпунктирной линией малинового цвета.

Заключение

Описаны компоненты интегрированного программного комплекса составителя цифровых геологических моделей. Разработанный комплекс дает возможности манипулирования исходными данными, интеллектуального анализа, сопоставления интерпретаций и вариантов экспертов, получаемых разными способами результатов и эталонов. Обсуждаемые результаты, примеры обработки и визуализации пространственных данных, методы настройки инструментов искусственных нейронных сетей являются подтверждением широких возможностей рассматриваемой технологии интеллектуальной обработки данных. Но следует понимать, что работа по

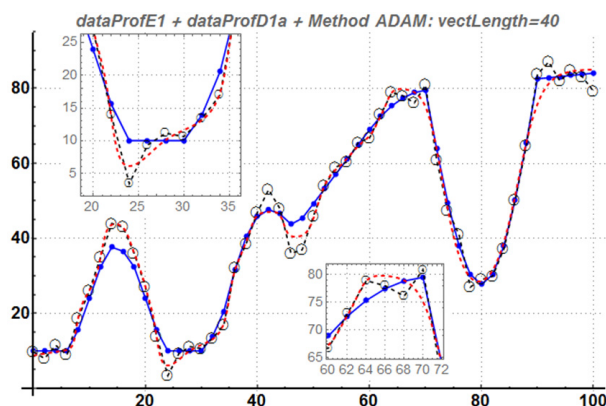


Рисунок 5.1 – Сглаживание dataProfD1a с применением нейронной сети

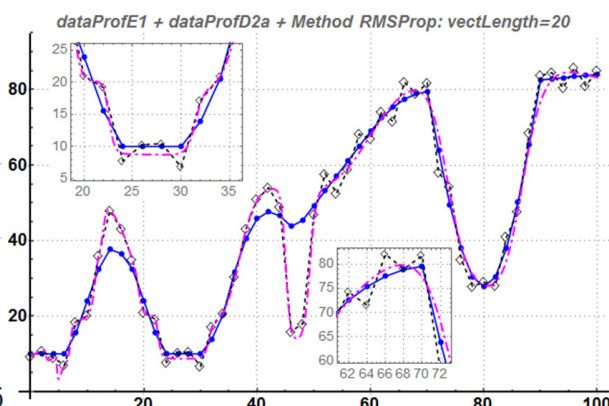


Рисунок 5.2 – Сглаживание dataProfD2a с применением нейронной сети

обучению сети – работа с черным ящиком, с повторяющимися результатами. Причем, всегда присутствует субъективность, все определяется опытом, когда принимается решение о необходимости наложить какие-то ограничения на функцию потерь. Поэтому отдельно в следующей статье будут приведены классические решения методами прикладной статистики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савиных, В.П. Геоданные как системный информационный ресурс / В.П. Савиных, В.Я. Цветков // Вестник Российской академии наук. – 2014. – Т. 84, № 9. – С. 826–829.
2. Tsvetkov, V.Ya. Big Data as Information Barrier / V.Ya. Tsvetkov, A.A. Lobanov // European Researcher. – 2014. – Vol. 78, № 7–1. – P. 1237–1242.
3. Шайтура, С.В. Интеллектуальный анализ данных геоданных / С.В. Шайтура // Перспективы науки и образования. – 2015. – № 6 (18). – С. 24–30.
4. Дышленко, С.Г. Анализ и разработка характеристик качества геоданных / С.Г. Дышленко // Перспективы науки и образования. – 2016. – № 2 (20). – С. 23–27.
5. Таранчук, В.Б. Программный комплекс адаптации геологических моделей. Концепция, решения, примеры реализации / В.Б. Таранчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 81–90.
6. Taranchuk, V.B. The integrated computer complex of an estimation and adapting of digital geological models / V.B. Taranchuk // Studia i Materiały. – 2017. – № 2 (14). – P. 73–86.
7. Wolfram Mathematica. Наиболее полная система для современных технических вычислений в мире [Электронный ресурс] / Wolfram

Computation Meets Knowledge. – Режим доступа: <http://www.wolfram.com/mathematica>. – Дата доступа: 9.03.2019.

8. Таранчук, В.Б. Введение в язык Wolfram: учеб. материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики спец. 1-31 03 04 «Информатика» / В.Б. Таранчук. – Минск: БГУ, 2015. – 51 с.

9. Таранчук, В.Б. Основы программирования на языке Wolfram: учеб. материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики спец. 1-31 03 04 «Информатика» / В.Б. Таранчук. – Минск: БГУ, 2015. – 49 с.

10. *Explore the depths of your data. Surfer* [Электронный ресурс] / Golden Software. – Режим доступа: <http://www.goldensoftware.com/products/surfer>. – Дата доступа: 9.03.2019.

11. Таранчук, В.Б. Особенности функционального программирования интерактивных графических приложений / В.Б. Таранчук // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, раздел Математика. – 2015. – № 6 (128). – С. 178–189.

12. Таранчук, В.Б. О создании интерактивных образовательных ресурсов с использованием технологий Wolfram / В.Б. Таранчук // Информатизация образования. – 2014. – № 1 (73). – С. 78–89.

13. Таранчук, В.Б. Об использовании системы Mathematica при подготовке и распространении интерактивных графических приложений / В.Б. Таранчук, В.А. Куликович // Весці БДПУ. Серія 3. – 2015. – № 2 (84). – С. 58–64.

14. *NetTrain (Experimental)* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://reference.wolfram.com/language/ref/NetTrain.html>. – Дата доступа: 9.03.2019.

Поступила в редакцию 10.03.19.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfint.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).