



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№1 (38) 2019

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Мोजаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (38) 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Авласевич Н.Т., Ляликов А.М.** Голографическая интерферометрия динамических периодических структур в реальном времени 7
- Андреев В.В., Максименко Н.В., Дерюжкова О.М.** Уравнения движения бесспиновой частицы в электромагнитном поле с учетом дипольных поляризуемостей 13
- Гиргель С.С.** Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом 16
- Навныко В.Н., Аманова М.А., Макаревич А.В., Юдицкий В.В.** Влияние оптической активности и поглощения на встречное двухволновое взаимодействие в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ 21

МАТЕМАТИКА

- Бородич Р.В.** О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих \mathfrak{F} -корадикал 26
- Гальмак А.М.** О не n -полуабелевости полиадических группоидов специального вида 31
- Гундина М.А.** Определение начального направления развития трещины в момент страгивания 40
- Зеленая А.С.** Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле 45
- Каморников С.Ф., Шеметкова О.Л.** Об одной характеристике обобщенной подгруппы Фраттини конечной разрешимой группы 50
- Миротин А.Р., Ковалёва И.С.** Преобразование Маркова – Стильеса мер и системы с дискретным временем 56
- Монахов В.С., Ходанович Д.А.** О разрешимости конечной группы с парой несопряженных подгрупп примарных индексов Π 61
- Ружицкая Е.А., Карасёва Г.Л.** Применение задачи быстрогодействия для осуществления заданного движения динамической системы 65
- Трофимук А.А., Зубей Е.В.** О перестановочности силовой подгруппы с подгруппами Шмидта нечетного порядка 69
- Чжан Б., Чэнь Ян, Мартынов И.П.** Первые интегралы и рациональные решения дифференциальных уравнений с подвижной особой линией 72

ИНФОРМАТИКА

- Куручкин А.В., Садов В.С., Демиденко О.М.** Оптимизация процесса принятия решений в медицинских экспертных системах на базе нечеткой логики с использованием исторических данных 78
- Можаровский В.В., Кузьменков Д.С., Голубева Е.А.** Реализация решения задач вязкоупругости для трубы из функционально-градиентного материала 85
- Чечет П.Л., Ворув А.В., Левчук Е.А.** Постановка имитационных экспериментов по сравнению стратегий управления лифтами в многоэтажном здании 91

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 12.03.19. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,63. Уч.-изд. л. 10,12. Тираж 100 экз. Заказ № 103.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2019
© Проблемы физики, математики и техники, 2019
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2019

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 1 (38) 2019

CONTENTS

PHYSICS

- Avlasevich N.T., Lyalikov A.M.** Holographic interferometry of dynamic periodic structures in real time 7
- Andreev V.V., Maksimenko N.V., Deryuzhkova O.M.** Speenless particle motion equations in the electromagnetic field considering dipole polarizability 13
- Girgel S.S.** Circular 3D Kummer – Gauss beams with the continuous angular index 16
- Naunyka V.N., Amanova M.A., Makarevich A.V., Yudzitski U.V.** Effect of optical activity and absorption on contradirectional two-wave interaction in $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ crystal 21

MATHEMATICS

- Borodich R.V.** On intersection of abnormal subgroups that don't contain a \mathfrak{F} -residual 26
- Gal'mak A.M.** On non- n -semiabelianism polyadic groupoids of special class 31
- Hundzina M.A.** Determination of the initial direction of cracks growth at the moment of movement 40
- Zelenaya A.S.** Cylindrical bending of elastoplastic rectangular three-layer plate with compressible filler in temperature field 45
- Kamornikov S.F., Shemetkova O.L.** On some characterization of general Frattini subgroup of finite soluble group 50
- Mirotin A.R., Kovaliova I.S.** The Markov – Stieltjes transform of measures and discrete time systems 56
- Monakhov V.S., Khadanovich D.A.** On the solvability of a finite group with a pair of non-conjugate subgroups of primary indices II 61
- Ruzhitskaya E.A., Karaseva G.L.** Application of the problem of speed for realizing of a given motion of a dynamic system 65
- Trofimuk A.A., Zubei E.V.** On the permutability of a Sylow subgroup with Schmidt subgroups of odd order 69
- Zhang B., Chen Y., Martynov I.P.** The first integrals and rational solutions of differential equations with a moving singular line 72

INFORMATION SCIENCE

- Kurachkin A.V., Sadau V.S., Demidenko O.M.** Optimizing the decision-making process in fuzzy logic medical expert systems using historical data 78
- Mozharovsky V.V., Kuzmenkov D.S., Golubeva E.A.** Realization of the solution of viscoelasticity' problems for a pipe from a functional gradient material 85
- Chechat P.L., Varuyeu A.V., Liauchuk A.A.** Design of simulation experiments for comparing elevators control strategies in a high-rise building 91

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- **Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.4

ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Н.Т. Авласевич, А.М. Ляликов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

HOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY OF DYNAMIC PERIODIC STRUCTURES IN REAL TIME

N.T. Avlasevich, A.M. Lyalikov

Y. Kupala Grodno State University

Предложен способ записи и последующего восстановления голограммы пропускающей периодической структуры световыми волнами, дифрагированными непосредственно на исследуемой структуре. Показано, что использование такой опорной голограммы позволяет восстанавливать интерференционные картины, отображающие поведение параметров структуры во времени. Представлены экспериментальные результаты опробования предложенного метода при исследовании динамики двумерных периодических структур в реальном времени.

Ключевые слова: динамическая периодическая структура, световая волна, голограмма, голографическая интерферометрия, визуализация дефекта, интерференционная картина.

A method of recording and subsequent restoration of a hologram of transmissive periodic structures by light waves diffracted directly on the structure under study is proposed. It is shown that the use of such a reference hologram allows reconstructing the interference patterns that reflect the behavior of the structure parameters in time. The experimental results of testing the proposed method in the study of the dynamics of two-dimensional periodic structures in real time are presented.

Keywords: dynamic periodic structure, light wave, hologram, holographic interferometry, visualization of defect, interference pattern.

Введение

В последнее время отмечается особый интерес к созданию и исследованию объектов, характеризующихся перестраиваемой периодической структурой. Параметры структуры таких объектов изменяются не только в пространстве, но и во времени. Наиболее яркими примерами являются фотоиндуцированные доменные структуры, электрически управляемые жидкокристаллические элементы, динамические магнитные кристаллы и т. п. [1]–[3]. В настоящее время ведутся исследования не только по разработке технологий изготовления таких структурированных объектов, но и по изучению механизмов взаимодействия оптического излучения с такими структурами.

К основным задачам измерительного контроля структурированных объектов можно отнести как изучение поведения самих структур в пространстве и во времени, так визуализацию дефектов таких структур. Ранее были разработаны и предложены способы визуализации макроскопических дефектов периодических структур, проявляющихся как в искривлении поверхности, так и в отклонении их от периодичности. Для стационарных периодических структур данные способы основаны на формировании муаровых или интерференционных картин при использовании световых волн, дифрагированных на периодических структурах исследуемого объекта либо

его снимка [4]–[7]. В работе [8] рассмотрен способ визуализации макродефектов пропускающей динамической периодической структуры при использовании некогерентного освещения. Данный способ прост в реализации и основан на регистрации в различные моменты времени серии снимков динамической периодической структуры и последующем формировании муаровой картины, наблюдаемой на фоне матового экрана, при совмещении выбранной пары снимков. Для реализации способа был использован некогерентный источник света. Применение пространственно некогерентного освещения при формировании изображений имеет ряд преимуществ, связанных со сравнительно низким спекл шумом. В методах голографической интерферометрии обычно для записи голограмм используются лазерные источники света с высокой степенью временной и пространственной когерентности. Однако записать голограмму таким источником света проблематично. Оптические схемы записи голограмм с источниками света, имеющими низкую пространственную когерентность, должны обеспечивать точное совмещение объектного и опорного световых пучков в плоскости формирования интерференционной структуры. Данное условие выполнимо только для фазовых объектов при формировании голограмм сфокусированного изображения [8] или для перезаписи голограмм фазовых объектов или снимков структурированных объектов [10]–[12].

В данной работе предлагается формировать интерференционные картины, отображающие пространственное поведение периодической структуры объекта во времени, с применением записи и последующим восстановлением опорной голограммы периодической структуры световыми волнами, дифрагированными непосредственно на исследуемой структуре. При этом следует отметить, что выбранная оптическая схема устройства для реализации данного способа голографической интерферометрии динамических периодических структур не требует высокой степени пространственной и временной когерентности источника света, используемого для записи опорной голограммы и формирования интерференционной картины.

1 Оптическая схема экспериментальной установки

На рисунке 1.1 приведена оптическая схема экспериментальной установки для реализации способа голографической интерферометрии при исследовании динамики поведения периодической структуры.

Данная экспериментальная установка использовалась для записи опорной голограммы и формирования интерференционных картин, отображающих динамику периодической структуры в реальном времени. Экспериментальная установка включает в себя осветительную систему, образованную лазерным источником света LS и телескопическую оптическую систему L_1 и L_2 . Осветительная система предназначена для формирования широкого коллимированного пучка света, освещающего исследуемую периодическую структуру O. На выходе исследуемой структуры установлена оптическая система пространственной фильтрации, образованная парой объективов L_3 и L_4 и экраном SF₁. Экран установлен в задней фокальной плоскости объектива L_3 . Передняя фокальная плоскость объектива L_4 совмещена с задней фокальной плоскостью объектива L_3 .

В этом случае в плоскости регистратора опорной голограммы H, оптически сопряженной объективами L_3 и L_4 , с исследуемой периодической структурой O, формировалось действительное изображение с увеличением, определяемым отношением фокусных расстояний объективов L_3 и L_4 . В нашем случае в качестве объективов использовались линзовые склейки с одинаковыми фокусными расстояниями 180 мм. Экран SF₁ изготавливался из алюминиевой фольги и посредством отверстий позволял выделять определенные световые волны, испытывающие дифракцию на исследуемой периодической структуре O. Вышерассмотренная часть экспериментальной установки использовалась для формирования и записи опорной голограммы H. Следует отметить, что выбранная схема записи опорной голограммы не требует высокой степени пространственной и временной когерентности источника света, используемого для записи голограммы и формирования интерференционной картины. Построение данной схемы записи аналогично системам оптической обработки оптически сопряженных голограмм, в которых возможно использование источников света с низкой степенью пространственно-временной когерентности [9], [10].

На выходе голограммы H устанавливалась приемная система, включающая оптическую систему пространственной фильтрации, образованную объективом L_5 и экраном SF₂, и систему регистрации интерференционных картин. Экран SF₂ был изготовлен из алюминиевой фольги и установлен в задней фокальной плоскости объектива L_5 . Оптическая система пространственной фильтрации была предназначена для выделения посредством отверстия в экране SF₂ пары световых волн, образующих интерференционную картину. Интерференционная картина регистрировалась и обрабатывалась посредством цифровой камеры CCD, подключенной к персональному компьютеру PC.

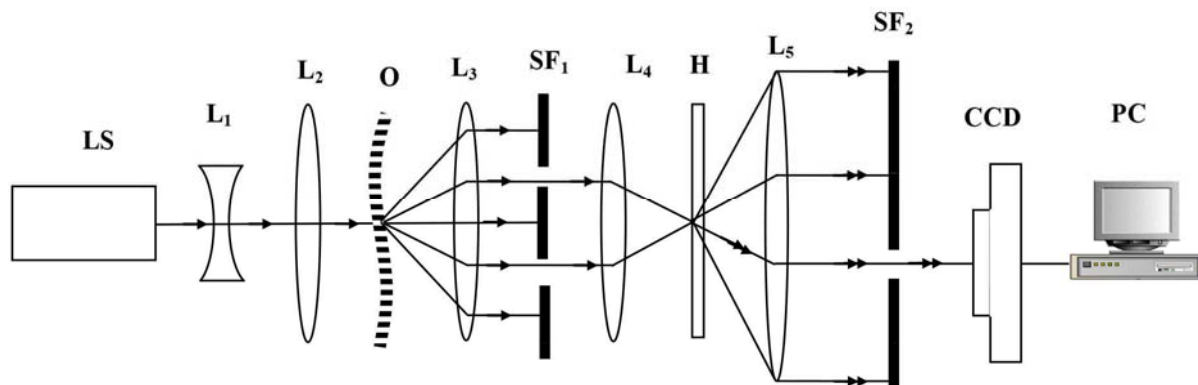


Рисунок 1.1 – Оптическая схема экспериментальной установки: LS – лазерный источник света; L_1 – рассеивающая линза, L_2 , L_3 , L_4 , L_5 – объективы; O – исследуемая периодическая структура, SF₁, SF₂ – экраны; H – опорная голограмма; CCD – цифровая фотокамера; PC – персональный компьютер

2 Описание объекта исследования

В качестве объекта исследования рассмотрим динамический амплитудный транспарант в виде двумерной пропускающей периодической структуры, представляющей собой крестообразную сетку. Такой объект по математическому описанию коэффициента пропускания подобен дифракционному элементу [13], с тем отличием, что период его структуры и форма поверхности дополнительно зависят от времени. Для упрощения описания объекта представим, что периодическая структура состоит из системы наложенных друг на друга двух бесконечно тонких элементарных решеток с периодами T_1 и T_2 , причем штрихи решеток ориентированы соответственно параллельно осям y и x системы координат x, y, z . Периодическая структура совмещена с плоскостью xy , а ось z совмещена с главной оптической осью устройства. Для данного случая амплитудный коэффициент пропускания такого объекта можно представить в виде ряда по аналогии [13], [14] с учетом зависимости от времени функций $\varphi_1(x, y, t)$, $\varphi_2(x, y, t)$, описывающих отклонения периодов первой и второй периодических структур от T_1 и T_2 , а также зон поверхности структуры от плоскости:

$$\begin{aligned} \tau(x, y, t) = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tau_{n,m} \exp i \left[\frac{2\pi n x}{T_1} + n\varphi_1(x, y, t) \right] \times \\ & \times \exp i \left[\frac{2\pi m y}{T_2} + m\varphi_2(x, y, t) \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\tau_{n,m}$ – коэффициенты, n и m принимают значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3 Запись опорной голограммы

При освещении периодической структуры O (рисунок 1.1) плоской волной с амплитудой a и длиной волны λ распределение комплексных амплитуд $A_\Sigma(x, y, t)$ световых волн на выходе структуры O определится из произведения $a\tau(x, y, t)$. Распределение комплексных амплитуд $A_\Sigma(x, y, t)$ представляет собой сумму волн, дифрагированных как на первой (индекс $m = 0$) элементарной структуре и второй (индекс $n = 0$), так и, испытавших дифракцию одновременно на двух структурах (индексы $n \neq 0$ и $m \neq 0$ одновременно):

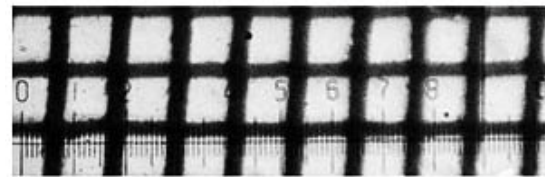
$$A_\Sigma(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{n,m}(x, y, t), \quad (3.1)$$

где $A_{n,m}(x, y, t)$ следует из выражения (2.1):

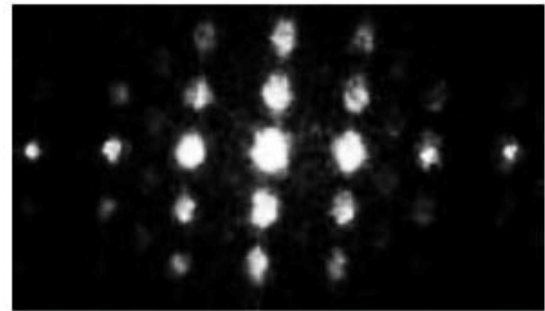
$$\begin{aligned} A_{n,m}(x, y, t) = & a_{n,m} \exp i \left[2\pi \xi_n x + n\varphi_1(x, y, t) \right] \times \\ & \times \exp i \left[2\pi \eta_m y + m\varphi_2(x, y, t) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $a_{n,m}$ – действительные амплитуды дифрагированных волн, индексом « n » отмечены параметры волн, дифрагированных на первой элементарной решетке, а индексом « m » – на второй элементарной решетке, $\xi_n = n \cos \alpha_1 / \lambda$, $\cos \alpha_1$ – направляющий косинус световой волны, распространяющейся в первом порядке дифракции, причем $\cos \alpha_1 = \lambda / T_1$. Аналогичным образом определяется пространственная частота η_m для волн, дифрагированных на второй элементарной решетке.

На рисунке 3.1 представлены фотографии увеличенного участка исследуемой двумерной периодической структуры (рисунок 3.1, а) и дифракционного спектра (рисунок 3.1, б), наблюдаемого в задней фокальной плоскости объектива L_3 (рисунок 1.1) на экране SF_1 , при освещении периодической структуры плоской волной. В качестве объекта исследований был выбран амплитудный транспарант в виде двумерной крестообразной решетки. Периоды штрихов данной решетки соответственно для вертикальных и горизонтальных штрихов $T_1 = 125$ мкм и $T_2 = 140$ мкм.



а)



б)

Рисунок 3.1 – Фотографии увеличенного участка исследуемой двумерной периодической структуры (а) и ее дифракционного спектра (б)

Рассмотрим запись голограммы исследуемой структуры, используя пару дифрагированных волн на первой элементарной периодической структуре. Дифрагированные волны формируют в плоскости непрозрачного экрана SF_1 (рисунок 1.1), установленного в задней фокальной плоскости объектива L_3 , систему дифракционных максимумов (рисунок 3.1, б), лежащих на горизонтальной прямой, проходящей через центральный (наиболее яркий) максимум. Экран SF_1 (рисунок 1.1) выполняет функцию фильтрующей маски, выделяющей посредством отверстий в

непрозрачном экране пару дифрагированных световых волн, записывающих голограмму Н, в плоскости, оптически сопряженной с периодической структурой О объективами L_3 и L_4 . Для записи голограммы может быть использована пара волн $A_{p,0}(x, y, t)$ и $A_{k,0}(x, y, t)$, где $p \neq k$, которая и выделяется посредством прокалывания иглой отверстий в алюминиевой фольге экрана SF_1 . На рисунке 3.2 представлена схема положения дифракционных максимумов для рассматриваемой периодической структуры с обозначением спектральных компонент, соответствующих дифрагированным волнам.

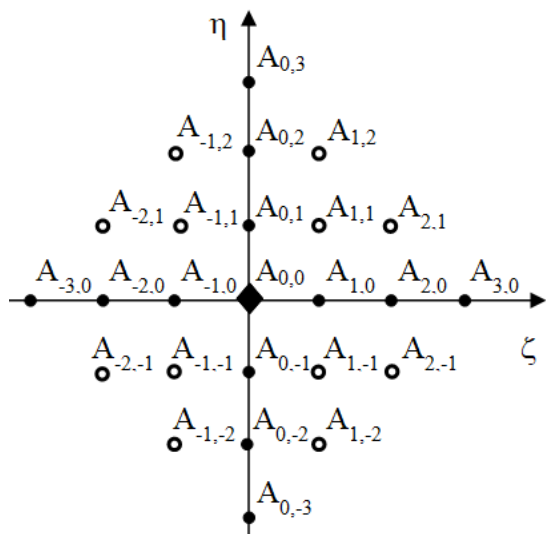


Рисунок 3.2 – Схема положения дифракционных максимумов для крестообразной периодической структуры:

- ◆ – центральны (нулевой) порядок дифракции;
- – максимумы волн, испытавших дифракцию на одной структуре;
- – максимумы волн, испытавших дифракцию на двух структурах

Комплексные амплитуды этих волн с учетом (3.2), а также aberrаций $\varepsilon_p(x, y)$ и $\varepsilon_k(x, y)$, искажающих волновые фронты вследствие прохождения волнами различных участков объектов L_3 и L_4 , можно записать в виде:

$$A_{p,0}(x, y, t) = a_{p,0} \exp i \left[2\pi \xi_p x + \varepsilon_p(x, y) + p\varphi_1(x, y, t) \right], \quad (3.3)$$

$$A_{k,0}(x, y, t) = a_{k,0} \exp i \left[2\pi \xi_k x + \varepsilon_k(x, y) + k\varphi_1(x, y, t) \right]. \quad (3.4)$$

Распределение интенсивности в интерференционной картине, формирующей, голограмму в момент времени t_1

$$I_H(x, y, t_1) = a_{p,0}^2 + a_{k,0}^2 + 2a_{p,0}a_{k,0} \cos \left[2\pi (\xi_p - \xi_k) x + \Phi(x, y, t_1) \right], \quad (3.5)$$

где

$$\Phi(x, y, t_1) = \Delta\varepsilon_{p,k}(x, y) + (p - k)\varphi_1(x, y, t_1),$$

$$\text{а } \Delta\varepsilon_{p,k}(x, y) = \varepsilon_p(x, y) - \varepsilon_k(x, y).$$

Опорную голограмму целесообразно записывать на классический светочувствительный материал [15], а цифровую обработку применять на стадии формирования интерференционных картин с использованием такой опорной голограммы. В этом случае, при выделении волн, дифрагированных в ± 1 -е порядки дифракции, и при соблюдении линейных условий регистрации и обработки голограммы, амплитудный коэффициент пропускания опорной голограммы в момент времени t_1 можно представить в следующем виде [9], [10]:

$$\tau_H(x, y, t_1) = \tau_0 + \cos [4\pi \xi_1 x + \Phi(x, y, t_1)], \quad (3.6)$$

где τ_0 – постоянный коэффициент. В этом случае фаза $\Phi(x, y, t_1)$ определится из (3.5) как

$$\Phi(x, y, t_1) = \Delta\varepsilon_{+1}(x, y) - \Delta\varepsilon_{-1}(x, y) + 2\varphi_1(x, y, t_1). \quad (3.7)$$

Если запись опорной голограммы производить в более высоких комплексно-сопряженных порядках дифракции света на исследуемой структуре, например $\pm k$ -ых, то амплитудный коэффициент пропускания примет следующий вид:

$$\tau_H(x, y, t_1) = \tau_0 + \cos [2k\pi \xi_1 x + \Phi(x, y, t_1)], \quad (3.8)$$

а фаза $\Phi(x, y, t_1)$ будет определена как

$$\Phi(x, y, t_1) = \Delta\varepsilon_{+k}(x, y) - \Delta\varepsilon_{-k}(x, y) + 2k\varphi_1(x, y, t_1). \quad (3.9)$$

Очевидно, что при записи опорной голограммы волнами более высокого порядка дифракции происходит соответственное уменьшение периода голографических полос опорной голограммы. Если при записи опорной голограммы использовать световые волны ± 1 -ых порядков дифракции, то период голографических полос опорной голограммы равен $1/\xi_1$, а при использовании волн $\pm k$ -ых порядков дифракции, в соответствие с (3.8) уменьшиться в $2k$ раз, однако полезная информация, определяемая функцией $\varphi_1(x, y, t_1)$ будет усилена в $2k$ раз.

4 Восстановление интерференционной картины в реальном времени

После химической обработки голограмма вида (3.6) устанавливается в устройство (рисунок 1.1) в прежнее положение Н. Контроль точности установки голограммы производится по муаровой картине, наблюдаемой на голограмме при освещении ее световыми волнами, участвующими при записи [10]. Для получения интерференционной картины, визуализирующей динамику поведения разности фаз $\varphi_1(x, y, t) - \varphi_1(x, y, t_1)$ в реальном времени, геометрия освещения опорной

голограммы (3.6) аналогична, т. е. такая, как и при записи. В этом случае, с учетом (3.3), (3.4), амплитуды световых волн, освещающих голограмму, имеют вид:

$$A_{+1,0}(x, y, t) = a_{+1,0} \exp i [2\pi \xi_1 x + \varepsilon_{+1}(x, y) + \varphi_1(x, y, t)], \quad (4.1)$$

$$A_{-1,0}(x, y, t) = a_{-1,0} \exp i [-2\pi \xi_1 x + \varepsilon_{-1}(x, y) - \varphi_1(x, y, t)]. \quad (4.2)$$

Распределение комплексных амплитуд $B_{\Sigma}(x, y, t)$ дифрагированных световых волн на выходе голограммы Н определится как

$$B_{\Sigma}(x, y, t) = [A_{+1,0}(x, y, t) + A_{-1,0}(x, y, t)] \tau_H(x, y, t_1). \quad (4.3)$$

В этом случае, с учетом (3.6), (3.7) и (4.1), (4.2), можно показать, что интерференционная картина образуется при наложении пары световых волн, распространяющихся в одном направлении: одной из прямошедших голограмму Н (рисунок 1.1) волн $A_{+1,0}(x, y, t)$ или $A_{-1,0}(x, y, t)$ и волны, дифрагированной на опорной голограмме в +1-ый или -1-ый порядок. Например, пара световых волн

$$B_{0,0}(x, y, t) = b_{0,0} \exp i [2\pi \xi_1 x + \varepsilon_{+1}(x, y) + \varphi_1(x, y, t)], \quad (4.4)$$

$$B_{-1,0}(x, y, t) = b_{-1,0} \exp i [2\pi \xi_1 x + \varepsilon_{+1}(x, y) - \varphi_1(x, y, t) + 2\varphi_1(x, y, t_1)], \quad (4.5)$$

где и $b_{-1,0} b_{-1,0}$ – действительные амплитуды волн.

Волны вида (4.4) и (4.5) распространяются в одном направлении и выделяются отверстием в экране SF₂ (рисунок 1.1), установленном в задней фокальной плоскости объектива L₅, и в плоскости, оптически сопряженной с голограммой Н, формируют интерференционную картину в полосах бесконечной ширины. Распределение интенсивности света в картине

$$I(x, y, t) = b_{0,0}^2 + b_{-1,0}^2 + 2b_{0,0}b_{-1,0} \cos \{2[\varphi_1(x, y, t) - \varphi_1(x, y, t_1)]\}. \quad (4.6)$$

Данная картина регистрируется цифровой камерой CCD.

Очевидно, что если использовать при записи опорной голограммы световые волны, дифрагированные на исследуемой динамической структуре в более высокие порядки, чем ±1-ые, то чувствительность отображения разности фаз $\varphi_1(x, y, t) - \varphi_1(x, y, t_1)$ можно увеличить в 2k раз.

Например, если при записи опорной голограммы используется одна из волн, дифрагированных в k-ый порядок, и эта же волна, прямо прошедшая опорную голограмму, участвует в формировании интерференционной картины, то комплексные амплитуды световых волн, формирующих интерференционную картину, примут вид:

$$B_{0,0}(x, y, t) = b_{0,0} \exp i [2\pi k \xi_1 x + \varepsilon_{+k}(x, y) + k\varphi_1(x, y, t)], \quad (4.7)$$

$$B_{-1,0}(x, y, t) = b_{-1,0} \exp i [2\pi k \xi_1 x + \varepsilon_{+k}(x, y) - k\varphi_1(x, y, t) + 2k\varphi_1(x, y, t_1)]. \quad (4.8)$$

Распределение интенсивности света в такой картине, в отличие от (4.6), примет вид:

$$I(x, y, t) = b_{0,0}^2 + b_{-1,0}^2 + 2b_{0,0}b_{-1,0} \cos \{2k[\varphi_1(x, y, t) - \varphi_1(x, y, t_1)]\}. \quad (4.9)$$

Из выражения (4.9) следует, что чувствительность измерений при определении разности функций $\varphi_1(x, y, t) - \varphi_1(x, y, t_1)$ пропорциональна номеру порядка дифракции волны и регулируется на стадии записи голограммы от 1 до 2k. Данная закономерность в формировании интерференционных картин при реализации способа голографической интерферометрии реального времени характерна только для периодических структур и отличает ее от интерферометрии фазовых объектов.

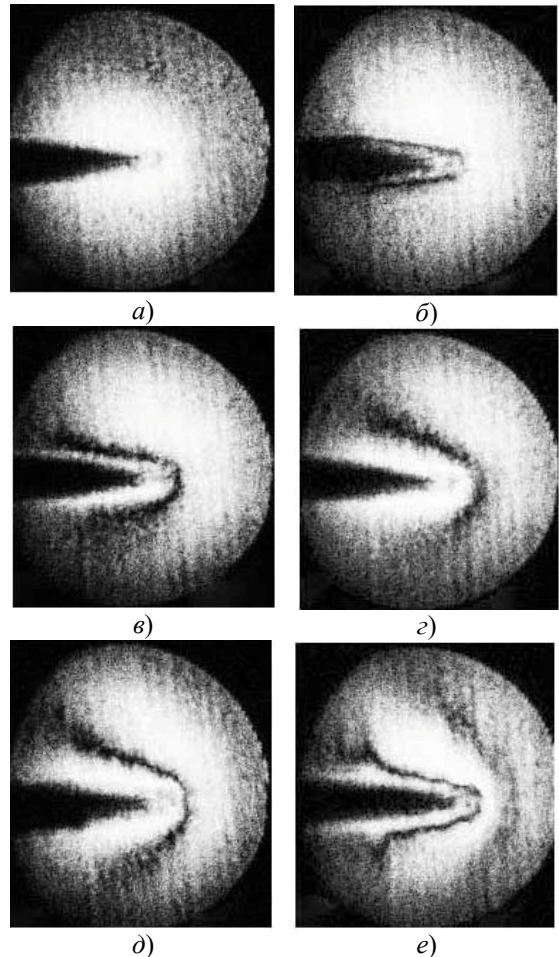


Рисунок 5.1 – Интерференционные картины, отображающие разность функций

$$\varphi(x, y, t) - \varphi(x, y, t_1):$$

a) – до начала контакта стержня с поверхностью структуры и по истечению времени после контакта б) – 2 с, в) – 4 с, г) – 6 с, д) – 10 с, е) – 16 с

5 Эксперимент

При опробовании метода голографической интерферометрии динамических периодических структур в качестве объекта была использована двумерная периодическая структура, представляющая собой крестообразную сетку (рисунок 3.1, а). Опорная голограмма была записана с использованием волн, дифрагированных на исследуемой периодической структуре (вертикальная составляющая) в ± 1 -ые порядки. На рисунке 5.1 представлена серия интерференционных картин в полосах бесконечной ширины, отображающих динамику разности функций $\varphi_1(x, y, t) - \varphi_1(x, y, t_1)$ с двукратным повышением чувствительности при нарастающей деформации поверхности исследуемой двумерной периодической структуры. Деформация поверхности была вызвана поступательным перемещением острого стержня, контактирующего с поверхностью структуры. Для расшифровки интерферограмм и получения количественной информации о величине дефектов можно использовать способы цифровой обработки интерферограмм с соответствующим программным обеспечением [16].

Заключение

Предложен способ формирования интерференционных картин, отображающих пространственное поведение периодической структуры объекта во времени, с применением записи и последующим восстановлением опорной голограммы периодической структуры световыми волнами, дифрагированными непосредственно на исследуемой структуре. Проведен анализ чувствительности измерений данного метода голографической интерферометрии динамических периодических структур от условий реализации записи и восстановления интерференционных картин. Показана возможность регулирования чувствительности измерений в зависимости от номеров порядков дифракции волн, используемых при записи опорной голограммы и формировании интерференционной картины. Отмечено, что данная закономерность в формировании интерференционных картин при реализации метода голографической интерферометрии реального времени характерна только для периодических структур и отличает ее от интерферометрии фазовых объектов. Представлены экспериментальные результаты метода при исследовании динамики двумерных периодических структур в реальном времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Устинова, И.А. Динамический магнетный кристалл на основе феррит-сегнеэлектрической слоистой структуры / И.А. Устинова, А.А. Никитин, А.Б. Устинов // Журнал технической физики. – 2016. – Т. 86, № 3. – С. 155–158.

2. Электрически управляемые волноводные жидкокристаллические элементы / О.С. Кабанова [и др.] // Письма в Журнал технической физики. – 2014. – Т. 40, № 14. – С. 30–35.

3. Перестраиваемый акустический резонатор на периодических доменных структурах / А.В. Голенищев-Кутузов [и др.] // Письма в Журнал технической физики. – 2012. – Т. 38, № 18. – С. 1–6.

4. Ляликов, А.М. Использование систем оптической диагностики фазовых объектов для дефектоскопии периодических структур / А.М. Ляликов, М.Ю. Серенко // Оптический журнал. – 2000. – Т. 67, № 6. – С. 111–114.

5. Грошенко, Н.А. Оптические вихри в поле рассеяния магнитных доменных голограмм / Н.А. Грошенко, О.С. Макалиш, А.В. Воляр // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68, № 12. – С. 54–58.

6. Авласевич, Н.Т. Визуализация дефектов отдельной компоненты составного дифракционного оптического элемента / Н.Т. Авласевич, А.М. Ляликов // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 7–12.

7. Авласевич, Н.Т. Методика визуализации дефекта отдельной компоненты составного дифракционного оптического элемента / Н.Т. Авласевич, А.М. Ляликов // VII Междунар. конфер. по фотонике и информационной оптике: сб. науч. тр. / НИЯУ «МИФИ»; редкол.: Ю.В. Гуляев [и др.]. – М., 2018. – С. 578–579.

8. Ляликов, А.М. Визуализация макродефектов динамических периодических структур на основе муарового эффекта / А.М. Ляликов, Н.Т. Авласевич // Веснік ГрДУ. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка. – 2018. – Т. 8, № 3. – С. 55–62.

9. Голографическая интерферометрия фазовых объектов / А.К. Бекетова [и др.]; под ред. Г.И. Мишина. – Л.: Наука, 1979. – 232 с.

10. Ляликов, А.М. Высокочувствительная голографическая интерферометрия фазовых объектов: монография / А.М. Ляликов. – Гродно: ГрГУ, 2010. – 215 с.

11. Ляликов, А.М. Повышение чувствительности измерений при сравнении топограмм поверхностей / А.М. Ляликов // Оптика и спектроскопия. – 1994. – Т. 77, № 6. – С. 959–963.

12. Ляликов, А.М. Визуализация макроскопических дефектов поверхности объекта с периодической структурой / А.М. Ляликов // Оптический журнал. – 1995. – № 1. – С. 28–31.

13. Бобров, С.Т. Оптика дифракционных элементов и систем / С.Т. Бобров, Г.И. Грейсхух, Ю.С. Туркевич. – Л.: Машиностроение, Ленинградское отделение, 1986. – 223 с.

14. Кольер, Р. Оптическая голография / Р. Кольер, К. Беркхарт, Л. Лин. – М.: Мир, 1973. – 686 с.

15. Барачевский, В.А. Современное состояние разработки светочувствительных сред для голографии (обзор) / В.А. Барачевский // Оптика и спектроскопия. – 2018. – Т. 12, В. 3. – С. 371–399.

16. Malacara, D. Interferogram Analysis for Optical Testing / D. Malacara, M. Servín, Z. Malacara // Taylor & Francis Group. – 2005. – 568 p.

Поступила в редакцию 03.01.19.

УДК 539.12

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ БЕССПИНОВОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ДИПОЛЬНЫХ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ

В.В. Андреев, Н.В. Максименко, О.М. Дерюжкова

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SPINLESS PARTICLE MOTION EQUATIONS IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD CONSIDERING DIPOLE POLARIZABILITY

V.V. Andreev, N.V. Maksimenko, O.M. Deryuzhkova

F. Scorina Gomel State University

С помощью релятивистских уравнений Лагранжа – Эйлера получены уравнения движения заряженной структурной частицы спина 0 в электромагнитном поле. Лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля со структурной бесспиновой частицей содержит дипольные поляризуемости, которые согласуются с поляризуемостями, входящими в амплитуду комптоновского рассеяния на бесспиновой частице. Данный лагранжиан и амплитуда получены опираясь на калибровочно-инвариантный подход и решения электродинамических уравнений методом функции Грина.

Ключевые слова: заряженная структурная бесспиновая частица, дипольные поляризуемости, лагранжиан, амплитуда комптоновского рассеяния.

Using the relativistic Lagrange – Euler equations, the equations of motion for a charged structural particle of a spin 0 in the electromagnetic field are obtained. The Lagrangian of the electromagnetic field interaction with a structural spinless particle contains dipole polarizabilities that are consistent with polarizabilities which are included in the amplitude of Compton scattering on a spinless particle. This Lagrangian and the amplitude are obtained based on the gauge-invariant approach and on the solution of electrodynamic equations using the Green function method.

Keywords: charged structural spinless particle, dipole polarizabilities, Lagrangian, amplitude of Compton scattering.

Введение

Интерпретация экспериментальных данных о поляризуемостях структурных частиц, которые можно извлечь из различных электродинамических процессов, проводится только на основе последовательного ковариантного определения вклада поляризуемостей в амплитуды и сечения этих процессов. С целью изучения механизмов электромагнитных взаимодействий адронов, а также для всестороннего анализа их свойств и характеристик, проявляющихся при данных взаимодействиях, активно используются эффективные лагранжианы взаимодействия, полученные в рамках теоретико-полевых подходов и согласующиеся с низкоэнергетическими теоремами [1], [2]. При этом важно правильно интерпретировать физический смысл констант, возникающих при разложении амплитуды комптоновского рассеяния по энергии фотонов. Эффективный лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля со структурной бесспиновой частицей, содержащий дипольные поляризуемости, которые соответствуют поляризуемостям, входящим в амплитуду комптоновского рассеяния, позволяет получить уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле с учетом этих поляризуемостей.

1 Уравнения движения структурной заряженной бесспиновой частицы в электромагнитном поле

Чтобы получить уравнения движения заряженной структурной частицы спина 0 в электромагнитном поле используем релятивистские уравнения Лагранжа – Эйлера. При этом лагранжиан будет содержать электрическую α и магнитную β поляризуемости структурной частицы. Чтобы согласовать поляризуемости α и β с поляризуемостями, которые входят в амплитуду комптоновского рассеяния на бесспиновой частице, выполним вычисления этой амплитуды. На основании принципа соответствия с релятивистской классической электродинамикой, определим лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля со структурной бесспиновой частицей с учетом дипольных поляризуемостей следующим образом [3]:

$$L = -\frac{1}{4}F^2 + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2(\phi^* \phi) + L_I^{(e)} + L_I^{(\alpha)}, \quad (1.1)$$

где $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ – векторный потенциал электромагнитного поля, $\mu = 0, 1, 2, 3$, ∂_μ – 4-мерная производная, $\phi = \phi(x)$ – волновая функция бесспиновой частицы, $\phi^* = \phi^*(x)$ –

комплексно сопряженная волновая функция, m – масса структурной бесспиновой частицы. В уравнении (1.1) члены, отвечающие за вклады от взаимодействия заряда бесспиновой частицы с электромагнитным полем $L_I^{(e)}$ и вклады от учета дипольных поляризуемостей, связанных с электрическими и магнитными дипольными моментами адронов $L_I^{(a)}$, определены следующим образом [4]: $L_I^{(e)} = j_\mu A^\mu + e^2 A^2 (\varphi^* \varphi)$, где j_μ – сохраняющийся ток, $j_\mu A^\mu = -ieA_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + ieA^\mu \partial_\mu \varphi^* \varphi$, e – элементарный заряд;

$$L_I^{(a)} = \frac{2\pi}{m} \left[\partial_\mu \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^* \partial_\mu \varphi \right] \times \left[(\alpha + \beta) F^{\rho\mu} F_{\rho\nu} - \frac{\beta}{2} \delta_\nu^\mu F^2 \right]. \quad (1.2)$$

В этом уравнении α и β – электрическая и магнитная поляризуемости структурной бесспиновой частицы, δ_ν^ρ – дельта-символ Кронекера. Тогда полный лагранжиан имеет вид:

$$L = -\frac{1}{4} F^2 + \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 (\varphi^* \varphi) - ieA_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + ieA^\mu \partial_\mu \varphi^* \varphi + e^2 A^2 (\varphi^* \varphi) + \frac{2\pi}{m} \left[\partial_\mu \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^* \partial_\mu \varphi \right] \times \left[(\alpha + \beta) F^{\rho\mu} F_{\rho\nu} - \frac{\beta}{2} \delta_\nu^\mu F^2 \right]. \quad (1.3)$$

Используя выражение для лагранжиана (1.3), получим уравнения движения структурной заряженной бесспиновой частицы в электромагнитном поле. Запишем релятивистские уравнения Лагранжа – Эйлера для волновой функции φ бесспиновой частицы, комплексно сопряженной волновой функции φ^* и векторного потенциала электромагнитного поля A_μ :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi^*} = 0, \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0.$$

Вычисляя частные производные ∂_μ от лагранжиана (1.3) по φ , φ^* и A_μ получим три уравнения движения в виде:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi + ie \partial_\mu A^\mu \varphi + ie A_\mu \partial^\mu \varphi - e^2 A^2 \varphi + 2 \partial_\mu K_\nu^\mu \partial^\nu \varphi = 0, \quad (1.4)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^* + m^2 \varphi^* - ie \partial_\mu A^\mu \varphi^* - ie A_\mu \partial^\mu \varphi^* - e^2 A^2 \varphi^* + 2 \partial_\mu K_\nu^\mu \partial^\nu \varphi^* = 0, \quad (1.5)$$

где в уравнениях (1.4) и (1.5) использовано обозначение:

$$K_\nu^\mu = \frac{2\pi}{m} \left\{ (\alpha + \beta) F^{\rho\mu} F_{\rho\nu} - \frac{\beta}{2} \delta_\nu^\mu F^2 \right\},$$

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} + ie \varphi^* \partial^\nu \varphi - ie \partial^\nu \varphi^* \varphi - 2e^2 A^\nu \varphi^* \varphi + \partial_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (1.6)$$

В уравнении (1.6) введено обозначение в слагаемом, отвечающее за учет дипольных поляризуемостей:

$$G^{\mu\nu} = \frac{2\pi}{m} \left\{ (\alpha + \beta) (\theta^{\nu\rho} F_\rho^\mu - \theta^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \theta_\sigma^\nu F^{\mu\sigma} - \theta_\sigma^\mu F^{\nu\sigma}) - \frac{\beta}{2} 4\theta_\sigma^\sigma F^{\mu\nu} \right\}.$$

Уравнения (1.4)–(1.6) можно представить в виде, удобном для интерпретации, а именно:

$$\square \varphi + m^2 \varphi = -\partial_\mu \pi_I^\mu(\varphi) - ie A_\mu \partial^\mu \varphi + e^2 A^2 \varphi, \quad (1.7)$$

$$\text{где } \pi_I^\mu(\varphi) = ie A^\mu \varphi + \frac{4\pi}{m} K_\nu^\mu \partial^\nu \varphi;$$

$$\square \varphi^* + m^2 \varphi^* = -\partial_\mu \pi_I^\mu(\varphi^*) + ie A^\mu \partial_\mu \varphi^* + e^2 A^2 \varphi^*, \quad (1.8)$$

$$\text{где } \pi_I^\mu(\varphi^*) = -ie A^\mu \varphi^* + \frac{4\pi}{m} K_\nu^\mu \partial^\nu \varphi^*;$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu - \partial_\mu G^{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

$$\text{где } j^\nu = ie (\varphi^* \partial^\nu \varphi - \partial^\nu \varphi^* \varphi) - 2e^2 A^\nu \varphi^* \varphi.$$

В уравнениях (1.7) и (1.8) правая часть отвечает за взаимодействие заряженной структурной частицы спина 0 с электромагнитным полем с учетом вкладов дипольных поляризуемостей. Эти уравнения переходят в уравнения Клейна – Гордона – Фока, т. е. уравнения движения свободной заряженной частицы относительно φ и φ^* , если положить правую часть выражений равной нулю.

2 Амплитуда комптоновского рассеяния на структурной бесспиновой частице с учетом поляризуемостей

Вычислим амплитуду комптоновского рассеяния на скалярной частице в релятивистски-инвариантной форме с учетом поляризуемостей для проверки правильности выбранного лагранжиана (1.2). Из низкоэнергетической теоремы следует, что амплитуда комптоновского рассеяния в области низких энергий определяется борновской частью, а также вкладом поляризуемостей и среднеквадратичного радиуса частицы. Воспользуемся определением S -матричного элемента согласно работам [5], [6]. Его можно определить, используя правую часть уравнений (1.7) или (1.8) с помощью функции Грина и асимптотических условий. Тогда для S -матричного элемента, учитывающего поляризуемость структурной частицы, получим:

$$S_{fi} = i \frac{2\pi}{m} \int d^4x \left[\partial_\rho \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^* \partial_\rho \varphi \right] \times \left[\alpha F^{\mu\rho} F_{\mu\nu} + \beta \tilde{F}^{\mu\rho} \tilde{F}_{\mu\nu} \right], \quad (2.1)$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ – дуальный тензор электромагнитного поля, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ – 4-мерный тензор Леви – Чивиты. Если в выражении (2.1) воспользоваться соотношением $\tilde{F}^{\mu\rho} \tilde{F}_{\mu\nu} = \left(F^{\mu\rho} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\rho} F^2 \right)$, то амплитуду можно представить в виде:

$$S_{fi} = i \frac{2\pi}{m} \int d^4x \left[\partial_{\rho} \varphi^* \partial^{\nu} \varphi + \partial^{\nu} \varphi^* \partial_{\rho} \varphi \right] \times \left[(\alpha + \beta) F^{\mu\rho} F_{\mu\nu} - \frac{\beta}{2} \delta_{\nu}^{\rho} F^2 \right]. \quad (2.2)$$

В импульсном представлении амплитуда (2.2) определяется следующим образом:

$$S_{fi} = \frac{(-i)(2\pi)^4 \delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^6 \sqrt{16\omega_1\omega_2 E_1 E_2}} M, \quad (2.3)$$

где ω – частота излучения, k_1, p_1 и k_2, p_2 – импульсы падающего и рассеянного фотонов и скалярной частицы в начальном и конечном состоянии соответственно, $\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)$ – дельта-функция Дирака, позволяющая учесть закон сохранения 4-мерных импульсов в процессе комптоновского рассеяния. В выражении (2.3) введена матрица M , которая представляет собой два слагаемых:

$$M = M_1 + M_2, \quad (2.4)$$

$$M_1 = e^2 \left[\frac{(e^{\lambda_2} (2p_2 + k_2))(e^{\lambda_1} (2p_1 + k_1))}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} + \frac{(e^{\lambda_1} (2p_2 - k_1))(e^{\lambda_2} (2p_1 - k_2))}{(p_1 + k_1)^2 - m^2} - 2(e^{\lambda_2} e^{\lambda_1}) \right],$$

$$M_2 = -\frac{2\pi}{m} (p_{2\nu} p_1^{\mu} + p_2^{\mu} p_{1\nu}) \times \left[(\alpha + \beta) (F_{\mu\rho}^{(2)} F_{(1)}^{\rho\nu} + F_{\mu\rho}^{(1)} F_{(2)}^{\rho\nu}) - \beta \delta_{\rho}^{\nu} F_{(2)}^{\mu\rho} F_{\mu\nu}^{(1)} \right],$$

где e^{λ_1} и e^{λ_2} – векторы поляризации падающего и рассеянного фотонов соответственно, через которые определяются тензоры энергии электромагнитного поля: $F_{(1)}^{\mu\nu} = k_1^{\mu} e^{(\lambda_1)\nu} - k_1^{\nu} e^{(\lambda_1)\mu}$, $F_{(2)}^{\mu\nu} = k_2^{\mu} e^{(\lambda_2)\nu} - k_2^{\nu} e^{(\lambda_2)\mu}$. Выражение M_1 дает борновскую часть амплитуды рассеяния, а M_2 определяет релятивистский вклад поляризуемостей в амплитуду.

Соотношение (2.4) представляет собой калибровочно-инвариантное выражение для амплитуды комптоновского рассеяния на структурной частице спина 0 с учетом поляризуемостей. Данная амплитуда удовлетворяет условию перекрестной симметрии.

Если перейти в систему покоя мишени, то для рассеяния фотона на произвольный угол на любой бесспиновой частице амплитуда (2.3) с учетом (2.4) примет вид:

$$S_{fi} = \frac{(-i)\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^2 \sqrt{16\omega_1\omega_2 E_1 E_2}} \times \left\{ -2e^2 \left(\bar{e}^{(\lambda_2)} \bar{e}^{(\lambda_1)} \right) + 8\pi m \omega_1 \omega_2 \left(\alpha \left(\bar{e}^{(\lambda_2)} \bar{e}^{(\lambda_1)} \right) + \beta \left(\left[\bar{k}_2 \bar{e}^{(\lambda_2)} \right] \left[\bar{k}_1 \bar{e}^{(\lambda_1)} \right] \right) \right) \right\}.$$

Заключение

Лагранжиан (1.2) с дипольными поляризуемостями согласуется с аналогичными структурами, установленными в работах [7]–[9] в низкоэнергетическом пределе. Этот лагранжиан и амплитуда комптоновского рассеяния на бесспиновой частице с учетом ее дипольных поляризуемостей получены с использованием принципа калибровочной инвариантности и решения электродинамических уравнений методом функции Грина. С помощью релятивистских уравнений Лагранжа – Эйлера получены уравнения движения структурной заряженной бесспиновой частицы в электромагнитном поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paz, G. An introduction to NRQED / G. Paz // [Electronic resource]. – Mode of access: <http://hep-ph/1503.07216>. – Date of access: 24.03.2015.
2. The NRQED lagrangian at order $1/M^4$ / R.J. Hill, G. Lee, G. Paz, M.P. Solon // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 87, № 5. – P. 053017–1–13.
3. Anandan, J.S. Classical and quantum interaction of the dipole / J.S. Anandan // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 1354–1357.
4. Максименко, Н.В. Ковариантный калибровочно-инвариантный формализм Лагранжа с учетом поляризуемостей частиц / Н.В. Максименко, О.М. Дерюжкова // Весці НАН Беларусі, Серыя фіз.-мат. навук. – М.: «Беларуская навука». – 2011. – № 2. – С. 27–30.
5. Богуш, А.А. Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск: Наука и техника, 1968. – 387 с.
6. Богуш, А.А. Введение в калибровочную полевою теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш. – Минск: Наука и техника, 1987. – 359 с.
7. Петрунькин, В.А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов / В.А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т. 12. – С. 692–753.
8. Максименко, Н.В. Низкоэнергетическое разложение амплитуды комптоновского рассеяния на адроне и одновременные коммутаторы токов / Н.В. Максименко, С.Г. Шульга // Ядерная физика. – 1990. – Т. 52, вып. 2 (8). – С. 524–534.
9. Feinberg, G. General Theory of the van der Waals interaction: a model-independent approach / G. Feinberg, J. Sucher // Phys. Rev. A2. – 1970. – P. 2395–2415.

Поступила в редакцию 09.02.19.

ЦИРКУЛЯРНЫЕ 3D СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА – ГАУССА С НЕПРЕРЫВНЫМ УГЛОВЫМ ИНДЕКСОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

CIRCULAR 3D KUMMER – GAUSS BEAMS WITH THE CONTINUOUS ANGULAR INDEX

S.S. Girdel

F. Scorina Gomel State University

Предложены и анализируются аналитические выражения в замкнутой форме для циркулярных 3D пучков Куммера – Гаусса (сК-Г) с непрерывным угловым индексом m . Сформулированы физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков. Выполнено графическое моделирование пучков сК-Г и показано, что непрерывные значения углового индекса m и комплексные значения свободного параметра v являются физически приемлемыми.

Ключевые слова: параксиальные пучки, циркулярные пучки, пучки Куммера – Гаусса.

Analytical expressions in the closed shape for circular 3D Kummer – Gauss beams (сК-Г) with the continuous angular coefficient m are offered and analyzed. Physical restrictions on possible values of the free parameters of such beams are formulated. Pictorial modeling of beams сК-Г is fulfilled and shown that the continuous values of an angular coefficient m and complex values of the free parameter v are physically possible.

Keywords: paraxial beams, circular beams, Kummer – Gaussian beams.

Введение

В настоящее время наблюдается всплеск интереса к поиску новых решений для оптических полей. Наибольший интерес представляют узконаправленные (пучковые) решения, реализуемые экспериментально [1]–[3]. Такие пучки часто можно считать параксиальными. К ним относятся гауссовы пучки [1], Лапласа – Гаусса [4], Бесселя – Гаусса [5] и многие другие [6]–[8]. В работах [9]–[11] нами были введены пучки Бесселя и Бесселя – Гаусса непрерывного порядка.

В данной работе этот подход распространяется на другие решения параболического уравнения в цилиндрической системе координат. Получены выражения, описывающие циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом и обсуждаются физические приемлемые значения их свободных параметров.

1 Циркулярные 3D пучки Куммера – Гаусса

Для монохроматических волн вида $f(\mathbf{r}, t) = \psi \exp(-i\omega t)$ скалярное параболическое уравнение, описывающее амплитуду ψ параксиальных световых пучков, имеет вид [2]

$$(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 2ik\partial_z)\psi = 0, \quad (1.1)$$

где $k = k_0 n$, $k_0 = \omega/c$. В настоящей работе использованный нами подход [9]–[11] обобщается на 3D циркулярные пучки с цилиндрической симметрией. Целесообразно предварительно

перейти к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Y = y/x_0, \quad Z = z/z_0. \quad (1.2)$$

Здесь x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OY соответственно.

Теперь параболическое уравнение (1.1) в цилиндрической системе координат (R, φ, Z) , где безразмерный радиус $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, приобретает известную форму (после дополнительного перехода $Z \rightarrow Q$):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4i \frac{\partial}{\partial Q} \right] \psi(R, \varphi, Q), \quad (1.3)$$

где Q – введенный безразмерный комплексный параметр пучка: $Q = Z - Q_0$, причем $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$. Здесь и далее штрихами помечаем вещественные и мнимые части различных величин.

Фундаментальным решением уравнения (1.3) является гауссиан [2]

$$G(R, Z) = \frac{1}{Q} \exp\left(i \frac{R^2}{Q}\right), \quad (1.4)$$

При $Q''_0 > 0$ данное решение удовлетворяет физическим принципам: $G(R, Z) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ и квадратично интегрируемо. Гауссиан $G(R, Z)$ является [1] 3D основной гауссовой модой. Полное поле светового пучка при этом имеет вид $E = E_0 G \exp(kz - \omega t)$.

Чтобы найти более общее решение уравнения (1.3) через функцию Куммера, выполним замену переменных $R = R_1 \sqrt{-iQ}$ в (1.3). Тогда получим:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R_1^2} + \left(\frac{1}{R_1} - 2R_1 \right) \frac{\partial}{\partial R_1} + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4Q \frac{\partial}{\partial Q} \right] \psi_1(R_1, \varphi, Q) = 0. \quad (1.5)$$

Чтобы разделить здесь переменные, введем подстановку $\psi(R_1, \varphi, Q) = f_1(R_1) f_2(\varphi) f_3(Q)$. Получаем систему 3-х уравнений:

$$\frac{2Q}{f_3} \frac{df_3}{dQ} = m + 2\nu, \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (1.8)$$

$$\left[\frac{d^2}{dR_1^2} + \left(\frac{1}{R_1} - 2R_1 \right) \frac{d}{dR_1} + 2(m + 2\nu) - \frac{m^2}{R_1^2} \right] f_1 = 0. \quad (1.9)$$

Здесь $(m + 2\nu)$ и $(-m^2)$ – две постоянные разделения. Решение для f_3 : $f_3 = Q^{\nu+m/2}$. Решение для функции f_2 : $f_2 = \cos m\varphi + ib \sin m\varphi$, где b – азимутальный параметр модуляции, $b \in [0; 1]$. В уравнении (1.9) одно из независимых решений можно представить в форме

$$f_1 = (R_1^2)^{m/2} M(-\nu, m + 1; R_1^2).$$

Второе независимое решение получается заменой $m \rightarrow (-m)$ и, как далее будет показано, не удовлетворяет физическим требованиям. Теперь можно записать решения для функции ψ , поскольку $\psi = f_1 f_2 f_3$. Получаем:

$$\psi = (R_1^2)^{m/2} M(-\nu, m + 1; R_1^2) \times (\cos m\varphi + ib \sin m\varphi) Q^{m/2+\nu}. \quad (1.10)$$

Для получения гауссовоподобных решений на (1.10) подействуем обобщенным преобразованием Аппеля [12] в форме

$$\psi(R, \varphi, Q) \rightarrow G \psi \left(\frac{iR}{Q}, \varphi, Q^{-2} \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{P} \right)^{-1} \right).$$

Здесь G – 3D гауссиан и введен второй комплексный параметр пучка $P = Z - P_0$, где комплексная константа $P_0 = P'_0 + iP''_0$. Получаем, с точностью до постоянной,

$$\psi = G \left(\frac{P}{Q} \right)^\nu \left(\frac{R}{Q} \right)^m M(-\nu, m + 1; R_2^2) e^{im\varphi}, \quad (1.11)$$

где $R_2^2 = iR^2 \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right)$. Итак, выражение (1.11)

характеризует гауссовоподобные 3D пучки, обладающие цилиндрической (или циркулярной) симметрией. Эти пучки зависят от переменных (R, φ, Z) и четырех свободных параметров

(m, ν, P_0, Q_0) . Бэндрес [6] называет пучки (1.11) циркулярными пучками.

2 Условия физической реализуемости циркулярных 3D пучков Куммера – Гаусса

Мы выяснили, что при заданных значениях переменных и параметров всегда существует формальное решение для амплитуд 3D рассматриваемых световых пучков. Однако не все эти решения соответствуют физически реализуемым пучкам с переносимой конечной мощностью. Сначала обсудим ограничения на параметр m . Обычно полагают, что $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Однако это справедливо только для связанных состояний, как, например, в квантовой механике. У нас пучок движется в свободном пространстве, поэтому угловой индекс m может быть непрерывным. Действительно, при $R \rightarrow 0$ функция Куммера $M(-\nu, m + 1; R_2^2) \rightarrow 1 - \frac{\nu}{m+1} iR^2 \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right) + \dots$

Отсюда можно взять в (1.11) $m \geq 0$.

В работе Валдрона [13] получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя, у которых угловой индекс (порядок) m не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений: $m \geq 0$. Согласно интерпретации Оверфельт [14] в таких случаях непрерывный индекс m связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волны Бесселя. Поэтому фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной 2π . Пучки, обладающие таким свойством, называются фракционными [15]–[19]. Поэтому обсуждаемые нами циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом $m \geq 0$ являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт.

Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности. Амплитуда такого пучка должна быть ограниченной при всех R . Более того, при $|R| > 0$ амплитуда ψ должна стремиться к нулю и быть квадратично интегрируемой (КИ), т. е.

интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dXdY$ должен сходиться. Чтобы

гауссов пучок был физически реализуем, как известно, достаточно одного простого ограничения $Q''_0 > 0$.

Проведем анализ условий КИ для циркулярных 3D световых пучков Куммера – Гаусса. Для этого исследуем поведение функций ψ при $R \rightarrow \infty$. Асимптотическое поведение конфлюэнтной гипергеометрической функции $M(a, b, \Phi)$ при $|\Phi| \rightarrow \infty$ описывается формулой [20]–[22]

$$M(a, b, \Phi) = \frac{\exp(-i\pi a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \Phi^{-a} + \frac{\exp(\Phi) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a)} \Phi^{a-b}, \quad (2.1)$$

где Γ – гамма-функция и $a \neq 0, -1, -3, \dots$. Рассмотрим условие КИ функции ψ при $R \rightarrow \infty$. Получаем, опуская несущественные множители, не зависящие от R , что асимптотически

$$\psi \propto \frac{\exp(iR^2/Q) R^{2\nu+m}}{\Gamma(m+1-\nu)} + \frac{\exp(iR^2/P) R^{-2\nu-m-2}}{\Gamma(-\nu)}$$

и исследуем условия КИ функций (1.1), следуя методике [9]. Для удобства полученные результаты представлены в таблице 2.1.

В последних статьях Бэндрэса [7], [8] за условия КИ принимаются только условия ($Q_0'' > 0$, $P_0'' > 0$) и не рассматриваются возможные случаи $Q_2'' \rightarrow \pm\infty$, $P_0'' \rightarrow \pm\infty$, которые важны и поэтому нами дополнительно анализируются. В настоящем сообщении заново проанализированы и уточнены (по сравнению с работами [6]–[8], [23]) условия физической реализуемости 3D циркулярных пучков Куммера – Гаусса непрерывного углового индекса m , которые обладают конечной

переносимой мощностью и являются устойчивыми.

3 Графическое моделирование картин интенсивности 3D циркулярных пучков сK - G непрерывного углового индекса m

На рисунках 3.1 и 3.2 представлены результаты графического моделирования картин интенсивности пучков сK - G непрерывного углового индекса m , где взят азимутальный параметр модуляции $b=1$. Поскольку тогда график интенсивности пучка не зависит от азимута, на рисунках изображены только сечения пучка вдоль оси z . Во всех случаях свободные параметры $P_0' = Q_0' = 0$ и $m = 0.2$. Картины интенсивности в поперечных сечениях пучка представляют собой концентрические кольца разной интенсивности. Рисунок 3.1 иллюстрирует различные случаи варианта 2 из таблицы 2.1. Видно, что при $\nu = 1$ при увеличении z радиус наиболее яркого кольца уменьшается, а при $\nu = 2$ – наоборот, возрастает. Случаи a и b рисунка 3.2 полностью подтверждают выводы варианта 3 таблицы 2.1, а случаи c и d рисунка 3.2 соответствуют выводам варианта 4.4 таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – Условия КИ для 3D циркулярных световых пучков Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом m

№	Ограничения на параметры Q_0''	Ограничения на параметры P_0''	Ограничения на индекс $\nu = \nu' + i\nu''$ ($m \geq 0, \mathbb{N} = 1, 2, \dots$)	Предел $ \psi $ при $ x \rightarrow \infty$	Выполнение условий КИ
1	$Q_0'' > 0$	$P_0'' > 0$	нет	$ \psi \rightarrow 0$	да
2	$Q_0'' > 0$	$P_0'' < 0$	$\mathbb{N} - 1$	$ \psi \rightarrow 0$	да
3	$Q_0'' < 0$	$P_0'' > 0$	$-m - \mathbb{N}$	$ \psi \rightarrow 0$	да
4.1	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' < -\left(1 + \frac{m}{2}\right)$	$ \psi \rightarrow \infty$	нет
4.2	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' = -\left(1 + \frac{m}{2}\right)$	$ \psi \rightarrow const$	нет
4.3	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' < -\left[1 + \frac{m}{2}, \frac{1+m}{2}\right]$	$ \psi \rightarrow 0$	нет
4.4	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' > -\frac{1+m}{2}$	$ \psi \rightarrow 0$	да
5.1	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' > -\frac{m}{2}$	$ \psi \rightarrow \infty$	нет
5.2	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' = -\frac{m}{2}$	$ \psi \rightarrow const$	нет
5.3	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' < \left[\frac{1+m}{2}, -\frac{m}{2}\right)$	$ \psi \rightarrow 0$	нет
5.4	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' < -\frac{1+m}{2}$	$ \psi \rightarrow 0$	да

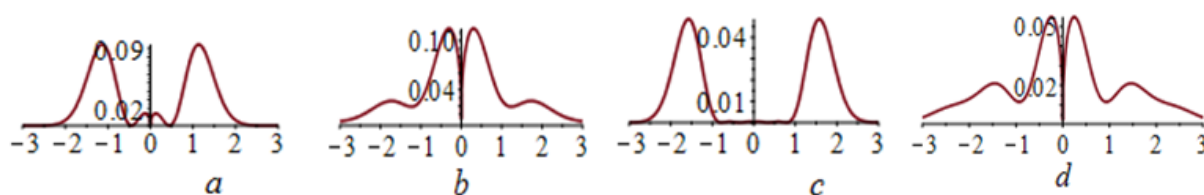


Рисунок 3.1 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка: вариант $a - Z = 0; \nu = 1$; вариант $b - Z = 1; \nu = 1$; вариант $c - Z = 1; \nu = 2$; вариант $d - Z = 0; \nu = 2$.

Во всех случаях $Q_0'' = -1; P_0'' = 0.2$

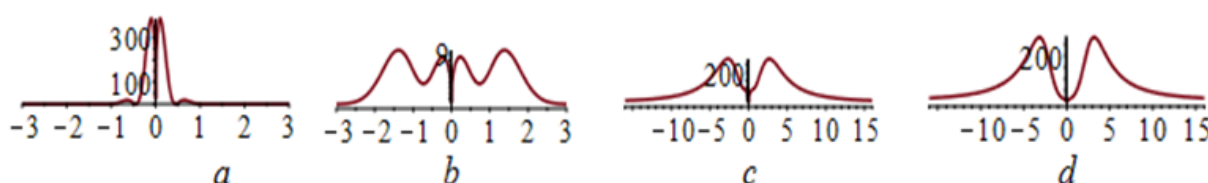


Рисунок 3.2 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка:

вариант $a - Z = 0; Q_0'' = -1; P_0'' = 0.2; \nu = -2.2$; вариант $b - Z = 0.5; Q_0'' = -1; P_0'' = 0.2; \nu = -2.2$;

вариант $c - Z = 0; Q_0'' = 1; P_0'' \rightarrow -\infty; \nu = -0.5 - 2i$; вариант $d - Z = 0.5; Q_0'' = 1; P_0'' \rightarrow -\infty; \nu = -0.5 - 2i$

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие новые типы пучков – 3D циркулярные световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом m . Они характеризуются тремя свободными параметрами: тремя вещественными непрерывными – (Q_0'', P_0'', m) и комплексным параметром ν . Частными случаями введенных здесь пучков являются известные циркулярные пучки и пучки Лагерра – Гаусса [6]–[8] с дискретными целочисленными индексами ν .

Найдены условия физической реализуемости новых типов пучков во всем пространстве, которые подтверждены графическим моделированием их амплитуд.

Одновременный переход от дискретных значений m к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям ν сильно расширяет класс известных в настоящее время пучков с цилиндрической симметрией. Варьирование новых свободных параметров таких пучков несомненно расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М.: Наука, 1990. – 264 с.
2. Киселев, А.П. Новые структуры парааксиальных гауссовых пучков / А. П. Киселев // Опт. и спектр. – 2004. – Т. 96, № 4. – С. 533–535.
3. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 142 с.
4. Bandres, M.A. Vector Helmholtz – Gauss and vector Laplace – Gauss beams / M.A. Bandres,

J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2157.

5. Gori, F. Bessel-Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Opt. Commun. – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.

6. Bandres, M.A. Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.

7. Bandres, M.A. Higher-order moments and overlaps of rotationally symmetric beams / M.A. Bandres, D. Lopez-Mago, J.C. Gutierrez-Vega // J. Opt. – 2010. – Vol. 12. – P. 015706.

8. Lopez-Mago, D. Propagation of Whittaker-Gaussian Beams / D. Lopez-Mago, M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Proc. of SPIE. – 2011. – Vol. 7430, 743013. – P. 1–8.

9. Гиргель, С.С. Бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 13–16.

10. Гиргель, С.С. Обобщенные асимметричные волновые пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 10–14.

11. Гиргель, С.С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

12. Миллер, У. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 342 с.

13. Waldron, R.A. A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R.A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. XI, Pt. 4. – P. 438–461.

14. Overfelt, P.L. Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev. A. – 1992. – Vol. 46, № 6. – P. 3516–3522.

15. *Berry, M.V.* Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics*. – 2003. – № 6. – P. 259–268.
16. *Tao, S.H.* Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / S.H. Tao, W.M. Lee, X. Yuan // *Applied Optics*. – 2004. – Vol. 43, № 1. – P. 122–126.
17. *Gutierrez-Vega, J.C.* Fractionalization of optical beams: I. Planar Analysis / J.C. Gutierrez-Vega // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32, № 11. – P. 1521–1523.
18. *Gutierrez-Vega, J.C.* Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre – Gaussian modes / J.C. Gutierrez-Vega // *Optics Express*. – 2007. – Vol. 15, № 10. – P. 6300–6313.
19. *Gutierrez-Vega, J.C.* Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / J.C. Gutierrez-Vega, C. Lopez-Mariscal // *J. Opt. A. Pure Appl. Opt.* – 2008. – P. 10015009.
20. *Флюгге, З.* Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.
21. *Справочник по специальным функциям* / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
22. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
23. *Vallone, G.* On the properties of Circular-Beams: normalization, Laguerre – Gauss expansion and free-space divergence апрель / G. Vallone // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40, № 8. – P. 1717–1720.

Поступила в редакцию 27.09.18.

УДК 535.4

ВЛИЯНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ И ПОГЛОЩЕНИЯ НА ВСТРЕЧНОЕ ДВУХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В КРИСТАЛЛЕ $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$

В.Н. Навныко¹, М.А. Аманова¹, А.В. Макаревич¹, В.В. Юдицкий²

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

²Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

EFFECT OF OPTICAL ACTIVITY AND ABSORPTION ON CONTRADIRECTIONAL TWO-WAVE INTERACTION IN $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ CRYSTAL

V.N. Naunyka¹, M.A. Amanova¹, A.V. Makarevich¹, U.V. Yudzitski²

¹I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

²Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Исследована зависимость относительной интенсивности предметной световой волны от входных азимутов линейной поляризации опорной и предметной волн при их одновременной дифракции на фазовой отражательной голографической решетке, сформированной в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$. Показано, что вследствие совместного влияния оптической активности и поглощения кристалла изменяются азимуты поляризации световых волн, при которых достигаются наибольшие значения относительной интенсивности предметной волны. Установлено правило определения входных азимутов, для которых при встречном двухволновом взаимодействии на фазовой отражательной голограмме в оптически активном поглощающем кристалле достигается наибольшее усиление предметной волны.

Ключевые слова: отражательная голограмма, двухволновое взаимодействие, относительная интенсивность предметной волны, азимут поляризации, оптическая активность, поглощение.

The dependence of relative intensity of the subject light wave on azimuths of polarization of the pump and subject waves at mutual diffraction by reflection holographic grating formed in $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ crystal is investigated. It is shown that combined effect of optical activity and absorption leads to changing of azimuths of polarization of the light waves for which maximal values of relative intensity of the subject wave are achieved. The rule of how to choose the input azimuths of polarization for achieving maximal gain of the subject wave by contradirectional two-wave interaction by reflection holographic grating in optical active crystal is established.

Keywords: reflection hologram, two-wave interaction, relative intensity of the subject wave, azimuth of polarization, optical activity, absorption.

Введение

Физические принципы записи и считывания объемных голографических решеток впервые были описаны Ю.Н. Денисюком [1]. Закономерности дифракции световых волн на объемных голограммах в изотропных поглощающих средах детально проанализировал Н. Kogelnik в [2]. В этой работе на основе теории связанных волн получены аналитические выражения для нахождения дифракционной эффективности голограмм различных типов (фазовая, амплитудная, смешанная), а также получены формулы для расчета угловой и спектральной чувствительности объемных голограмм. Обобщение теории связанных волн на случай дифракции световой волны произвольной поляризации на фазовой голограмме в анизотропной среде произведено в [3]. В этой работе проанализированы особенности дифракции света на фазовых голограммах различного типа, которые формируются при двухволновом взаимодействии в анизотропной среде. В [4] рассмотрена задача о дифракции произвольно поляризованных световых волн на фазовых объемных голограммах в оптически анизотропных

фоторефрактивных кристаллах при произвольной ориентации оптической оси.

В.В. Шепелевичем в [5], [6] с использованием теории связанных волн выявлены особенности дифракционных процессов на объемных фазовых пропускающих голографических решетках в кубических оптически активных фоторефрактивных пьезокристаллах произвольного среза. Получены аналитические выражения для нахождения векторов напряженностей электрических полей, интенсивностей и поляризационных характеристик опорной и предметной световых волн, а также дифракционной эффективности пропускающей голограммы, сформированной в кристалле произвольного среза. Определены условия эффективного усиления и восстановления предметной волны с использованием световой волны эллиптической поляризации. В работе [7] представлен обзор научных публикаций, в которых описаны результаты изучения свойств фазовых объемных голограмм, сформированных в кубических гиротропных фоторефрактивных пьезокристаллах.

Авторами статей [8]–[10] проанализированы закономерности дифракции, обусловленные

влиянием оптической активности на свойства отражательных голограмм, записанных в фоторефрактивных кристаллах класса симметрии 23. В ряде публикаций (см., напр., [11], [12]) исследованы особенности двухволнового взаимодействия и дифракции на отражательных голограммах в оптически активном фоторефрактивном кристалле с учетом фотоупругого и обратного пьезоэлектрического эффекта. Детальный обзор опубликованных работ, в которых изучались свойства объемных отражательных голограмм, записанных в оптически активных фоторефрактивных пьезокристаллах, содержится в [13].

В [14] теоретически обосновано, что совместное действие оптической активности и поглощения может обусловить увеличение максимальных значений относительной интенсивности предметной волны при встречном двухволновом взаимодействии на отражательной голограмме в фоторефрактивном кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ среза (001). Однако в этой работе не изучена проблема выбора оптимальных азимутов поляризации световых волн, при которых достигается эффективное усиление предметной волны.

Цель настоящей работы, являющейся логическим продолжением [14], состоит в исследовании зависимости относительной интенсивности предметной волны от входных азимутов линейной поляризации опорной и предметной волн при их одновременной дифракции на отражательной голограмме в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (ВТО). В статье устанавливаются условия, при которых эффективное усиление предметной волны достигается посредством оптимального выбора входных азимутов линейной поляризации предметной и опорной световых волн, а также производится анализ влияния оптической активности и поглощения кристалла на относительную интенсивность предметной волны.

1 Теоретическая модель

Рассмотрим фоторефрактивный кристалл ВТО с записанной в нем фазовой объемной отражательной голографической решеткой, которой соответствуют волновой вектор \vec{K} и пространственный период Λ (рисунок 1.1). Предположим, что на кристалл падают две линейно поляризованные монохроматические световые волны: опорная \vec{R} и предметная \vec{S} .

На рисунке 1.1 единичные векторы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ образуют ортонормированный базис рабочей системы координат, используемый для задания ориентации кристалла относительно голографического стола. Единичные векторы $(\vec{a}_R, \vec{b}_R, \vec{n}_R)$ и $(\vec{a}_S, \vec{b}_S, \vec{n}_S)$ являются ортонормированными базисами, относительно которых задаются направления распространения и параметры поляризации опорной и предметной волн. Векторы \vec{e}_1 , \vec{a}_R и \vec{a}_S параллельны друг другу, а векторы \vec{n}_R и \vec{n}_S совпадают по направлению с волновыми векторами опорной и предметной волн. Векторы $\vec{n}_R, \vec{b}_R, \vec{n}_S, \vec{b}_S, \vec{e}_2$ и \vec{e}_3 лежат в одной плоскости. В кристаллографической системе координат направления единичных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ определяются следующим образом: $\vec{e}_1 \parallel [100]$, $\vec{e}_2 \parallel [010]$, $\vec{e}_3 \parallel [001]$.

Символами \vec{R} и \vec{S} соответственно обозначены векторы напряженностей электрических полей опорной и предметной волн, лежащие в плоскостях, определяемых парами векторов (\vec{a}_R, \vec{b}_R) и (\vec{a}_S, \vec{b}_S) . Параметры Ψ_R и Ψ_S – азимуты поляризации опорной и предметной волн, определяемые угловым расстоянием между векторами \vec{a}_R и \vec{R} , \vec{a}_S и \vec{S} соответственно. Параметры φ_R и φ_S используются для задания углов Брэгга; их значения равны угловым расстояниям между векторами \vec{e}_1 и \vec{n}_R , $(-\vec{e}_1)$ и \vec{n}_S соответственно.

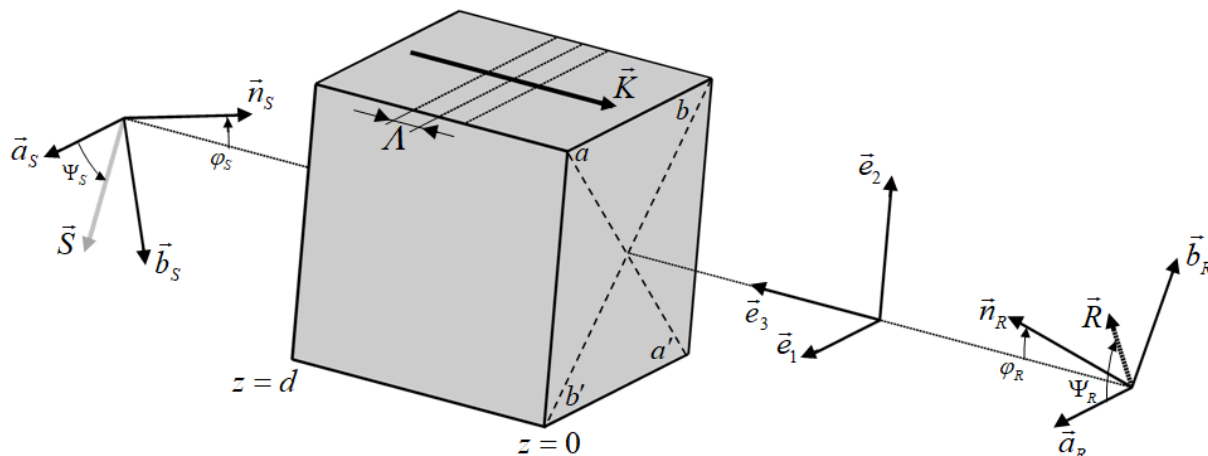


Рисунок 1.1 – Схема встречного двухволнового взаимодействия на отражательной голографической решетке, сформированной в кристалле ВТО среза (001)

Решение задачи об одновременной дифракции опорной и предметной волн на отражательной голографической решетке, сформированной в оптически активном поглощающем фоторефрактивном пьезокристалле ВТО, получено с применением уравнений связанных волн [14]. При теоретических расчетах использованы параметры кристалла ВТО, заимствованные в [15]. Напряженность электрического поля E_{sc} разделенных зарядов отражательной голографической решетки в кристалле принята равной 0,6 кВ/см. При численном решении уравнений связанных волн углы φ_R и φ_S взяты равными 5° , отношение интенсивностей предметной и опорной волн – $1/10$, длина волны – $\lambda = 633$ нм, толщина кристалла – $d = 14$ мм. При численном решении уравнений связанных волн учитывались изменения энергетических и поляризационных характеристик волн при френелевских отражениях на гранях кристалла.

3 Полученные результаты и их обсуждение

На рисунке 3.1 представлены зависимости относительной интенсивности γ предметной волны от азимутов поляризации Ψ_S и Ψ_R на входе в кристалл ВТО среза (001) толщиной 14 мм.

На рисунке 3.1 градация тонов используется для характеристики величины относительной интенсивности γ : при увеличении относительной интенсивности γ с изменением азимутов Ψ_S и Ψ_R плотность окраски в точках графиков зависимости $\gamma(\Psi_S, \Psi_R)$ изменяется от светлого тона до темного тона. Зависимость $\gamma(\Psi_S, \Psi_R)$, иллюстрированная на рисунке 3.1 а), рассчитана с учетом электрооптического эффекта и оптической активности кристалла. На рисунке 3.1 б) представлен график зависимости $\gamma(\Psi_S, \Psi_R)$, при

расчете которой дополнительно принят во внимание коэффициент поглощения кристалла. Светлым сплошным и штриховым линиям на рисунке 3.1 соответствуют геометрические места точек, в которых достигаются наибольшие значения относительной интенсивности γ на графиках зависимости $\gamma(\Psi_S, \Psi_R)$.

Как видно на рисунке 3.1 а), относительная интенсивность предметной волны является постоянной величиной, если азимуты поляризации опорной и предметной волн находятся в линейной зависимости. Наибольшее значение относительной интенсивности достигается при выполнении поляризационного условия $\Psi_R = \Psi_S - 90^\circ$, где вычитаемое представляет угол поворота плоскости поляризации световых волн при распространении внутри кристалла. Для кристалла произвольной толщины поляризационное условие может быть записано в виде $\Psi_R = \Psi_S - \rho d$, где ρ – удельное вращение кристалла, d – толщина кристаллического слоя.

В работе [10] указано, что при встречном двухволновом взаимодействии на отражательной голографической решетке в оптически активном кристалле оптимальным является случай, когда при распространении опорной и предметной волн внутри кристалла векторы \vec{R} и \vec{S} остаются сонаправленными друг другу ($\vec{R} \uparrow \uparrow \vec{S}$). В общем случае при выполнении поляризационного условия $\Psi_R = \Psi_S - 90^\circ$ наибольшее значение относительной интенсивности может быть достигнуто при взаимной ориентации векторов \vec{R} и \vec{S} , отличной от $\vec{R} \uparrow \uparrow \vec{S}$. Например, наибольшее значение относительной интенсивности достигается при азимутах $\Psi_S = 90^\circ$ и $\Psi_S = 270^\circ$, при которых опорная и предметная волны находятся в

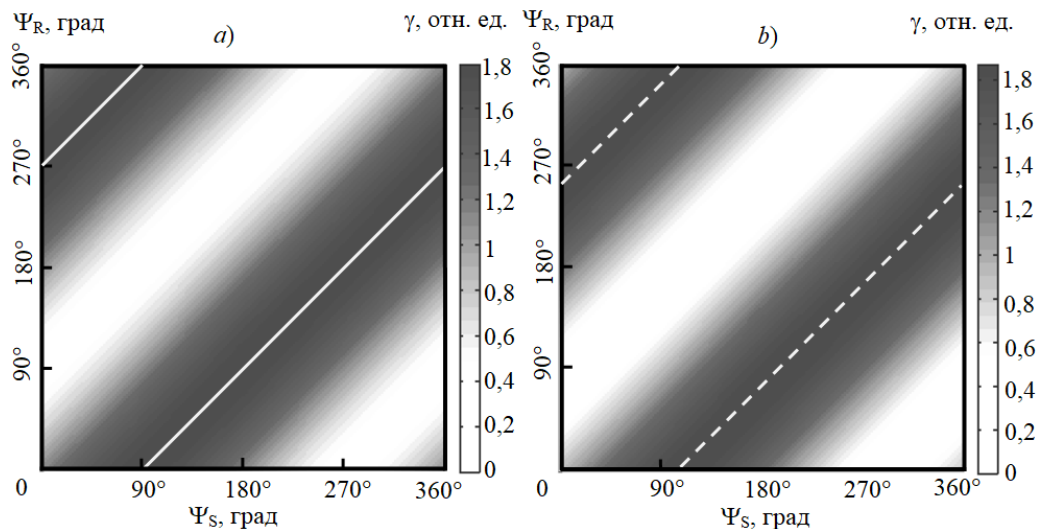


Рисунок 3.1 – Графики зависимости $\gamma(\Psi_S, \Psi_R)$, рассчитанные без учета (а) и с учетом (б) коэффициента поглощения кристалла

противофазе ($\vec{R} \uparrow \downarrow \vec{S}$) при любом значении z из интервала $0 < z \leq d$. Наибольшее значение относительной интенсивности достигается также и в случае, когда при распространении опорной и предметной волн в кристалле векторы \vec{R} и \vec{S} перпендикулярны друг другу ($\Psi_S = 135^\circ$, $\Psi_S = 315^\circ$).

Для объяснения полученных закономерностей рассмотрим особенности дифракции света на отражательной голографической решетке в кристалле ВТО среза (001). При дифракции опорной волны на решетке формируется дифрагированная волна с вектором напряженности электрического поля \vec{R}^d . Волновая нормаль дифрагированной волны совпадает по направлению с единичным вектором \vec{n}_S . Предметная и дифрагированная волны в кристалле распадаются на две волны, линейно поляризованные вдоль изображенных на рисунке 1.1 направлений aa' и bb' ($\vec{R}^d = \vec{R}_{aa}^d + \vec{R}_{bb}^d$ и $\vec{S} = \vec{S}_{aa} + \vec{S}_{bb}$) и распространяющиеся без изменения состояния поляризации. При распространении предметной и дифрагированной волн в кристалле оптическая активность обуславливает изменение амплитуд векторов \vec{R}_{aa}^d , \vec{R}_{bb}^d , \vec{S}_{aa} и \vec{S}_{bb} .

Волны с векторами \vec{R}_{bb}^d и \vec{S}_{bb} синфазны, так как влияние пространственного сдвига отражательной голографической решетки относительно интерференционной картины на четверть периода нивелируется из-за набега фазы, возникающего при дифракции опорной волны на голограмме. В этом случае амплитуды указанных волн суммируются при $\vec{R}_{bb}^d \uparrow \uparrow \vec{S}_{bb}$ и вычитаются при $\vec{R}_{bb}^d \uparrow \downarrow \vec{S}_{bb}$. Волны с векторами \vec{R}_{aa}^d и \vec{S}_{aa} находятся в противофазе, так как набег фазы при дифракции опорной волны на голограмме суммируется с тем сдвигом фазы, который обусловлен

пространственным сдвигом голографической решетки. Поэтому амплитуды волн суммируются при $\vec{R}_{aa}^d \uparrow \downarrow \vec{S}_{aa}$ и вычитаются при $\vec{R}_{aa}^d \uparrow \uparrow \vec{S}_{aa}$. При выборе азимутов поляризации опорной и предметной волн в соответствии с поляризационным условием $\Psi_R = \Psi_S - 90^\circ$ достигается одновременное выполнение следующих условий: $\vec{R}_{bb}^d \uparrow \uparrow \vec{S}_{bb}$ и $\vec{R}_{aa}^d \uparrow \downarrow \vec{S}_{aa}$. В результате амплитуды предметной и дифрагированной волн суммируются, чем обусловлено достижение наибольшего значения относительной интенсивности предметной волны.

При учете поглощения имеет место увеличение наибольшего значения относительной интенсивности и одинаковое изменение азимутов поляризаций опорной и предметной волн на некоторую постоянную величину Δ ($\Delta \approx 17^\circ$). Указанное смещение можно заметить, если сравнить расположение светлых сплошных и штриховых линий относительно осей координат на рисунках 3.1 а) и 3.1 б). При наличии поглощения поляризационное условие с учетом смещения Δ может быть представлено в виде $\Psi_R = \Psi_S - 107^\circ$. Для кристалла произвольной толщины поляризационное соотношение приводится к виду $\Psi_R = \Psi_S - (\rho d + \Delta)$.

На рисунке 3.2 представлены сечения распределений $\gamma(\Psi_S, \Psi_R)$ плоскостями, перпендикулярными плоскости рисунка 3.1 и проходящими через точки с координатами (Ψ_S, Ψ_R) : $(0, 360^\circ)$ и $(360^\circ, 0)$. Кривые 3 и 4 соответствуют сечениям распределений $\gamma(\Psi_S, \Psi_R)$, изображенных на рисунках 3.1 а) и 3.1 б) соответственно. На рисунке 3.2 дополнительно изображены аналогичные сечения распределений $\gamma(\Psi_S, \Psi_R)$, рассчитанных с учетом электрооптического эффекта

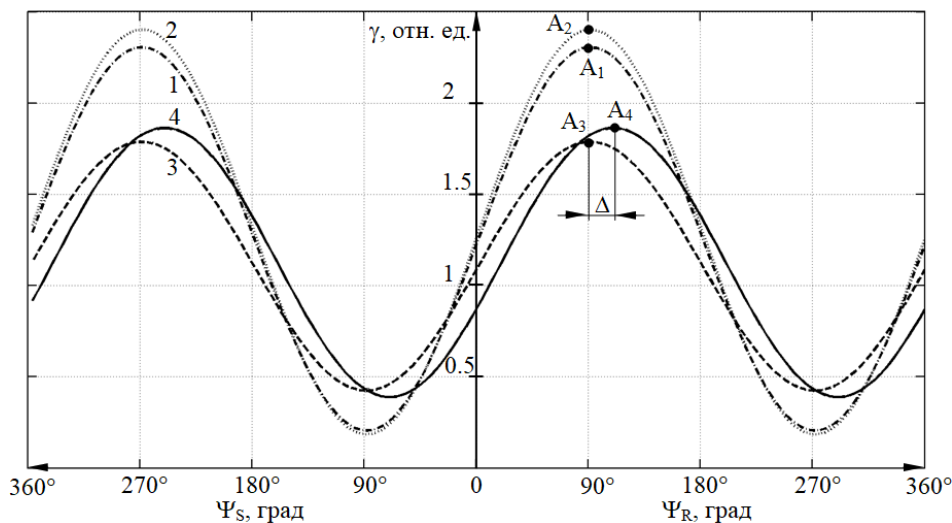


Рисунок 3.2 – Графики зависимости относительной интенсивности предметной волны от азимутов поляризации опорной и предметной волн

(кривая 1), а также с учетом электрооптического эффекта и поглощения (кривая 2). При анализе рисунка 3.2 следует учитывать, что вправо от оси ординат каждому значению Ψ_R по оси абсцисс соответствуют значения Ψ_S : $\Psi_R = 0 \rightarrow \Psi_S = 360^\circ$, $\Psi_R = 90^\circ \rightarrow \Psi_S = 270^\circ$ и т. д. Аналогичным образом влево от оси ординат каждому Ψ_S по оси абсцисс ставятся в соответствие значения Ψ_R : $\Psi_S = 0 \rightarrow \Psi_R = 360^\circ$, $\Psi_S = 90^\circ \rightarrow \Psi_R = 270^\circ$.

Как видно при анализе рисунка 3.2, наличие оптической активности или поглощения (каждого явления в отдельности) в сочетании с электрооптическим эффектом обуславливает только количественные изменения наибольшего значения относительной интенсивности: при наличии поглощения наибольшее значение относительной интенсивности увеличивается ($A_1 \rightarrow A_2$), при наличии оптической активности – уменьшается ($A_1 \rightarrow A_3$). При одновременном учете электрооптического эффекта, оптической активности и поглощения имеет место как уменьшение наибольшего значения относительной интенсивности ($A_1 \rightarrow A_4$), так и одинаковое изменение азимутов поляризаций опорной и предметной волн на некоторую постоянную величину Δ .

Заключение

Таким образом, изучены закономерности дифракции света при встречном двухволновом взаимодействии на отражательной голографической решетке в слое толщиной 14 мм из оптически активного поглощающего фоторефрактивного кристалла ВТО среза (001). Показано, что совместное влияние оптической активности и поглощения кристалла обуславливает изменение значений азимуты поляризации опорной и предметной волн, при которых достигается наибольшая относительная интенсивность предметной волны. Полученные данные совместно с результатами, изложенными в работе [14], могут быть использованы для оптимизации эффективности усиления предметной волны при встречном двухволновом взаимодействии на отражательной голографической решетке в кристалле ВТО среза (001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисюк, Ю.Н. Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения / Ю.Н. Денисюк // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 144, № 6. – С. 1275–1278.
2. Kogelnik, H. Coupled wave theory for thick hologram grating / H. Kogelnik // Bell Syst. Tech. J. – 1969. – Vol. 48, № 9. – P. 2909–2947.
3. Сердюк, В.М. Дифракция плоской электромагнитной волны произвольной поляризации на фазовой голограмме в приближении теории

связанных волн / В.М. Сердюк, А.П. Хапалюк // ЖТФ. – 1981. – Т. 51, № 12. – С. 2537–2540.

4. Сердюк, В.М. Дифракция света на фазовых голограммах в фоторефрактивных сегнетоэлектрических кристаллах / В.М. Сердюк, А.П. Хапалюк // Квант. электр. – 1986. – Т. 13, № 1. – С. 147–158.

5. Шепелевич, В.В. Взаимная трансформация электромагнитных волн на голографических решетках в кубических гиротропных фоторефрактивных кристаллах произвольного среза / В.В. Шепелевич // Опт. и спектр. – 1990. – Т. 69, № 2. – С. 467–469.

6. Шепелевич, В.В. Дифракция и двухволновое взаимодействие в кубических гиротропных пьезокристаллах произвольного среза. Общие соотношения / В.В. Шепелевич // Оптика и спектроскопия. – 1997. – Т. 83, № 1. – С. 172–176.

7. Шепелевич, В.В. Запись и считывание голограмм в кубических гиротропных фоторефрактивных пьезокристаллах (Обзор) / В.В. Шепелевич // ЖПС. – 2011. – Т. 78, № 4. – С. 493–515.

8. Kukhtarev, N.V. Influence of the optical activity on hologram formation in photorefractive crystals / N.V. Kukhtarev, G.E. Dvoglennko, V.N. Starkov // Appl. Phys. A. – 1984. – Vol. 33. – P. 227–230.

9. Foote, P.D. Influence of optical activity on two beam coupling constants in photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ / P.D. Foote, T.G. Hall // Opt. Commun. – 1986. – Vol. 57. – P. 201–206.

10. Mallick, S. Polarization properties of self-diffraction in sillenite crystals: reflection volume gratings / S. Mallick, M. Miteva, L. Nikolova // J. Opt. Soc. Am. B. – 1997. – Vol. 14, № 5. – P. 1179–1186.

11. Векторное двухволновое взаимодействие на отражательных голографических решетках в кубических гиротропных фоторефрактивных кристаллах / А.М. Плесовских [и др.] // Квантовая электроника. – 2005. – Т. 35, № 2. – С. 163–168.

12. Shepelevich, V.V. Effect of optical activity and crystal symmetry on maximal diffraction efficiency of reflection holograms in cubic photorefractive piezocrystals / V.V. Shepelevich, V.N. Naunya // Appl. Phys. B. – 2009. – Vol. 95, № 3. – P. 459–467.

13. Динамические голограммы Денисюка в кубических фоторефрактивных кристаллах / С.М. Шандаров [и др.] // Квантовая электроника. – 2008. – Т. 38, № 11. – С. 105–1069.

14. Навныко, В.Н. Влияние поглощения на энергетические характеристики отражательных голограмм в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ / В.Н. Навныко, М.А. Аманова, В.В. Шепелевич // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 105–110.

15. Energy exchange optimization in (110)-cut ВТО crystal by choice of interacting waves polarization / А.Е. Zagorskiy [et al.] // Opt. Mat. – 2001. – Vol. 18. – P. 131–133.

Поступила в редакцию 29.01.19.

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ АБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП, НЕ СОДЕРЖАЩИХ \mathfrak{F} -КОРАДИКАЛ

Р.В. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON INTERSECTION OF ABNORMAL SUBGROUPS THAT DON'T CONTAIN A \mathfrak{F} -RESIDUAL

R.V. Borodich

F. Scorina Gomel State University

Исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер максимальных A -допустимых Θ -подгрупп, не содержащих \mathfrak{F} -корадикал. Установлено влияние соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини на строение самой группы.

Ключевые слова: конечная группа, абнормальная подгруппа, \mathfrak{F} -корадикал.

The structure of a subgroup equal to the intersection of maximal A -admissible Θ -subgroups not containing the \mathfrak{F} -residual is investigated. The influence of the corresponding generalized subgroup Frattini on the structure of the group itself is determined.

Keywords: finite group, abnormal subgroup, \mathfrak{F} -residual.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В исследовании конечных групп одним из важных направлений является исследование свойств пересечений некоторых систем максимальных подгрупп и изучение влияния этих свойств на строение самой группы. Одной из классических подгрупп этого направления является подгруппа Фраттини [1]. В дальнейшем это направление развивалось в работах таких авторов, как В. Гашоц [2], В. Дескинс [3] и многих других (см. монографии [4]–[6]).

Данная работа посвящена развитию указанных направлений в группах с операторами.

1 Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$; *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Класс групп называют нормально наследственным (S_n -замкнутым), если вместе с каждой своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G .

Класс групп \mathfrak{F} называется формацией, если выполняются следующие условия:

- 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;
- 2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то

$$G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Образование f класса \mathfrak{G} всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

- 1) $f(G)$ – формация;
- 2) $f(G) \subseteq f(G^\phi) \cap f(\text{Ker } \phi)$ для любого гомоморфизма ϕ группы G ;
- 3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p -группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G .

Формацию \mathfrak{F} называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда через G^δ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется \mathfrak{F} -нормальной (\mathfrak{F} -абнормальной), если G^δ содержится (не содержится) в M .

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G , сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \rightarrow \text{Aut}(G)$, где $\text{Aut}(G)$ – автоморфное отображение группы G в себя. Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A -допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных абнормальных A -допустимых подгрупп. Если таких подгрупп в группе G нет, то положим $\Delta(G, A) = G$.

Заметим, что максимальная A -допустимая подгруппа M либо целиком содержит \mathfrak{F} -корадикал группы G , либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A -допустимых подгрупп A -допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A -допустима, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация и группа G имеет группу операторов A . Через $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных абнормальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих \mathfrak{F} -корадикал группы G . Если в группе G все максимальные абнормальные A -допустимые подгруппы содержат \mathfrak{F} -корадикал группы G , то положим $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) = G$.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A -допустимой относительно некоторой группы операторов A , а так же не всякая максимальная A -допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [7].

Пример. Пусть Q – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G = [Q]Z_3$, Z_3 – группа операторов для Q . В группе Q подгруппа K порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов Z_3 , но не является максимальной подгруппой группы Q .

Существует точный неприводимый Z_7 -модуль V над полем F_5 . Пусть $G = [[V]Z_7] \times Q$, где Q – группа кватернионов 8-го порядка, Z_3 – группа операторов группы G . На подгруппе $[[V]Z_7]$ группа операторов Z_3 действует тождественно. Рассмотрим $\Gamma = [G]Z_3$. Подгруппа $\Delta(\Gamma) \cap G = K$, а подгруппа $\Delta(G) = Q$. Следовательно,

$$\Delta(\Gamma) \cap G \subset \Delta(G, A).$$

Этот пример показывает, что задача о исследовании свойств подгруппы $\Delta(G, A)$ не сводится к рассмотрению строения подгруппы $\Delta(\Gamma)$.

2 Вспомогательные результаты

Лемма 2.1 [10, С. 38]. Если $H \triangleleft G$,

$(|H|, |G:H|) = 1$, то существует $K \subseteq G$, $G = HK$, $H \cap K = 1$ и все такие подгруппы сопряжены между собой.

Теорема 2.2 [8, С. 49]. Для любой группы G и любой ступенчатой формации \mathfrak{F} имеет место равенство $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G))$.

Лемма 2.3 [4, С. 96]. Пусть \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация. Тогда каждая \mathfrak{F} -гиперцентральная нормальная подгруппа любой группы принадлежит \mathfrak{F} .

Лемма 2.4. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – ступенчатая формация, K – некоторая нормальная подгруппа группы G . Пусть каждая максимальная абнормальная A -допустимая подгруппа группы G , не содержащая K , содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta(G, A)$;
- 2) $K / K \cap \Delta(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A))$.

Доказательство. Очевидно, что пересечение $K \cap G^{\mathfrak{F}}$ содержится во всех максимальных абнормальных A -допустимых подгруппах, как содержащих $G^{\mathfrak{F}}$, так и не содержащих $G^{\mathfrak{F}}$, а следовательно, оно входит в $\Delta(G, A)$.

Пусть R/S – главный фактор группы G , причём $R \subseteq K$, $S \supseteq K \cap \Delta(G, A)$. Так как

$$R \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq S,$$

то имеем G -изоморфизм:

$$RG^{\mathfrak{F}} / SG^{\mathfrak{F}}R / (R \cap SG^{\mathfrak{F}}) = R / S(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R / S.$$

Так как $G / SG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $RG^{\mathfrak{F}} / SG^{\mathfrak{F}}$ \mathfrak{F} -централен в $G / SG^{\mathfrak{F}}$, а значит и в G . Но тогда R/S \mathfrak{F} -централен в G . \square

Лемма 2.5 [9, С. 45]. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной группе подгруппа $\Phi_{\Theta}(G, A)$ нильпотентна.

Лемма 2.6 [4, С. 179]. Если подгруппа H пронормальна в G , то подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G .

Лемма 2.7 [4, С. 38]. Пусть f – локальный экран формации \mathfrak{F} . Группа G тогда и только тогда принадлежит \mathfrak{F} , когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.

Теорема 2.8 [4, С. 41]. Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Формация \mathfrak{F} S -замкнута (S_n -замкнута) тогда и только тогда, когда для любого простого p формация $f(p)$ S -замкнута (соответственно S_n -замкнута).

Лемма 2.11. Пусть группа G имеет группу операторов A . Тогда $\Delta_{\Delta}^f(G) \subseteq D_{\Delta}^f(G, A)$.

Доказательство. Предположим, что $\Delta_{\Delta}^f(G) \not\subseteq D_{\Delta}^f(G, A)$. Тогда существует максимальная абнормальная A -допустимая подгруппа M не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, такая, что $M \not\subseteq \Delta_{\Delta}^f(G)$. Так как $\Delta_{\Delta}^f(G)$ является характеристической подгруппой, то $M\Delta_{\Delta}^f(G) = G$. Так как M – максимальная абнормальная A -допустимая подгруппа, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, то она содержится в некоторой абнормальной \mathfrak{F} -абнормальной максимальной подгруппе K группы G . Тогда получаем, что $G = M\Delta_{\Delta}^f(G) = K\Delta_{\Delta}^f(G) = K$. Полученное противоречие и доказывает лемму. \square

Лемма 2.12 [4, С. 78]. Пусть H – нильпотентная нормальная подгруппа группы G . Если $H \neq 1$ и $H \cap \Phi(G) = 1$, то H дополняема в G и равна прямому произведению некоторого числа минимальных подгрупп группы G .

Лемма 2.13 [9, С. 78]. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной группе подгруппа $\Phi_{\Theta}(G, A)$ нильпотентна.

Лемма 2.14 [11, С. 26]. Пусть группа G имеет группу операторов A . Если K – A -допустимая подгруппа группы G , то $N_G(K)$ является A -допустимой подгруппой группы G .

Лемма 2.15. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $K \subseteq N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, N и K – A -допустимые подгруппы группы G и $K \subseteq \Delta(G, A)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если N/K π -замкнута, то и N π -замкнута;
- 2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_{π} -подгруппу H/K . Так как $K \subseteq \Delta(G, A)$, то по лемме 2.5 K нильпотентна. Нетрудно заметить, что S_{π} -подгруппа R из K является S_{π} -подгруппой в H . По лемме 2.1 H содержит S_{π} -подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H . По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учётом того, что $H = SR$, получаем, $G = N_G(S)R$. Так как S есть S_{π} -подгруппа в N , а подгруппа N A -допустима, то S A -допустима. Тогда по лемме 2.14 подгруппа $N_G(S)$ A -допустима и по лемме 2.6 является абнормальной подгруппой группы G . Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A -допустимой подгруппе M из G . Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Delta(G, A) \subseteq M$, то $G = M$.

Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G .

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$. \square

3 Основной результат

Теорема 3.1. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$.

Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Delta(G, A)$, $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Так как N/D является ω -группой, то по лемме 2.15 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – S_{ω} -подгруппа из N . Так как $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$, то $N/D = N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap \Delta(G, A)$. Пусть $p \in \omega$. Так как $N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя леммы 2.15 и 2.7, получаем

$$(N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1) = N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1 = N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 2.7 подгруппа N_1 входит в \mathfrak{F} . \square

Следствие 3.1.1. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, содержащая \mathfrak{N} и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда \mathfrak{F} – формация нильпотентных групп, получаем следующее

Следствие 3.1.2. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{N}$, то $N \in \mathfrak{N}$.

Если положить $A = 1$, то получаем

Следствие 3.1.3. Пусть \mathfrak{F} – некоторая локальная формация, N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 3.1.4. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, содержащая \mathfrak{N} . Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Теорема 3.2. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – локальная формация. Тогда

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)).$$

Доказательство. Так как подгруппа Фраттини фактор-группы $G/\Delta(G, A)$ единична, то, применяя лемму 2.11 и теорему 2.2, получаем

$$\begin{aligned} D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) &\supseteq \Delta_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)\Delta(G, A) / \Delta(G, A) \supseteq \\ &\supseteq \Delta^{\mathfrak{F}}\Delta(G, A) / \Delta(G, A) \supseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)) = \\ &= Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Delta(G, A)). \end{aligned}$$

Обратное включение выполняется ввиду леммы 2.4. \square

Согласно леммы 2.3 получаем следующее

Следствие 3.2.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – нормально наследственная локальная формация. Тогда

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

Следствие 3.2.2. Пусть \mathfrak{F} – нормально наследственная локальная формация. Тогда

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta(G) \in \mathfrak{F}.$$

Теорема 3.3. Пусть \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) &= A \times B, \text{ где } A \in \mathfrak{F}, B \subseteq \Delta(G, A), \\ \pi(B) \cap \pi(F) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно теореме 3.2 $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A)$ является \mathfrak{F} -гиперцентром в $G/\Delta(G, A)$. По следствию 3.2.1

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

Остаётся применить теорему 3.1. \square

Следствие 3.3.1. Пусть \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$ для любой группы G .

Если положить $A = 1$, то $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ и из теоремы 3.3 получаем результат М.В. Селькина из [5].

Теорема 3.4. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда подгруппа $D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G, A)$ нильпотентна и

$$D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G, A) / \Delta(G, A) = Z(G / \Delta(G, A)).$$

Доказательство. Из следствия 3.3.1 вытекает нильпотентность подгруппы $D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G, A)$. По теореме 3.2 $D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G, A) / \Delta(G, A)$ является гиперцентром в $G/\Delta(G, A)$. Так как подгруппа Фраттини группы $G/\Delta(G, A)$ единична, то по лемме

2.12 гиперцентр группы $G/\Delta(G, A)$ совпадает с центром. \square

В случае, когда группа операторов единична, то из теоремы 3.4 получаем известный результат В. Гашюца из [2].

Теорема 3.5. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – формация. Если в группе G существуют максимальные абнормальные A -допустимые подгруппы, не содержащие \mathfrak{F} -корадикал и не принадлежащие \mathfrak{F} , тогда пересечение всех таких подгрупп совпадает с $D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$.

Доказательство. Обозначим через D пересечение всех максимальных абнормальных A -допустимых подгрупп, не содержащих \mathfrak{F} -корадикал и не принадлежащих \mathfrak{F} . Очевидно, что $D \supseteq D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \supseteq \Delta(G, A)$. Если $D \subseteq \Delta(G, A)$, то утверждение теоремы верно. Пусть D не входит в $\Delta(G, A)$. Тогда $G = MD$, где M – некоторая максимальная абнормальная A -допустимая подгруппа группы G . Если $M \in \mathfrak{F}$, то $G/D \in \mathfrak{F}$. Откуда следует, что D содержится только в тех максимальных абнормальных A -допустимых подгруппах, которые содержат $G^{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Поэтому M не входит в \mathfrak{F} и является максимальной абнормальной A -допустимой подгруппой, содержащей $G^{\mathfrak{F}}$. Итак, всякая максимальная абнормальная A -допустимая подгруппа, не содержащая D , содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $D \subseteq D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. \square

Теорема 3.6. Пусть \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G . Предположим, что $\Delta(G, A) \neq 1$. Тогда для $G/\Delta(G, A)$ теорема верна и

$$N/\Delta(G, A) = N_1/\Delta(G, A) \times N_2/\Delta(G, A).$$

Остаётся показать, что $N_1 \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(N_1)$. Так как $N_1/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 2.15 и лемму 2.7, получаем

$$\begin{aligned} (N_1 / \Delta(G, A)) / F_p(N_1 / \Delta(G, A)) &= \\ = N_1 / \Delta(G, A) / F_p(N_1) / \Delta(G, A) &\simeq \\ \simeq N_1 / F_p(N_1) \in f(p). \end{aligned}$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 2.7 подгруппа N_1 входит в \mathfrak{F} .

В результате индуктивных рассуждений можно считать, что $\pi(N_1) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $N_2=1$. Поэтому необходимо доказать, что $N=N_1 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $K=N \cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Каждая максимальная A -допустимая Δ -подгруппа, не содержащая K , содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, ввиду леммы 2.4 имеем

$$K / K \cap \Delta(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / K \cap \Delta(G, A)).$$

Если $K \cap \Delta(G, A) \neq 1$, то по индукции

$$N / K \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F},$$

а значит, согласно теореме 3.1 $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $K \cap \Delta(G, A) = 1$. Тогда подгруппа K \mathfrak{F} -гиперцентральна в группе G . Докажем, что K \mathfrak{F} -гиперцентральна и в подгруппе N . Пусть L/S – G -главный pd -фактор группы K . Тогда $G/C \in f(p)$, где $C=C_G(L/S)$, f – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Так как по теореме 2.8 формация $f(p)$ является нормально наследственной, то

$$NC / CN / C_N(L/S) \in f(p).$$

Следовательно, подгруппа N f -стабилизирует G -главный ряд подгруппы K . Это означает, что $K \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(N)$. Отсюда и из $N/K \in \mathfrak{F}$ вытекает, что $N \in \mathfrak{F}$. \square

Следствие 3.6.1. Пусть \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N / N \cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Если \mathfrak{F} совпадает с формацией \mathfrak{N} всех нильпотентных групп, то получаем

Следствие 3.6.2. Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N / N \cap D_{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G, A) \in \mathfrak{N}$, то $N \in \mathfrak{N}$.

Если группа операторов единична, то получаем

Следствие 3.6.3. Пусть \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N / N \cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(F) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 3.6.4. Пусть \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N / N \cap D_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Необходимо отметить, что условие нормальной наследственности локальной формации в теореме 3.6 является существенным и его отбросить нельзя. Действительно, если положить $A=1$ и формация \mathfrak{F} не является нормально наследственной, то в ней найдётся такая группа G , у которой некоторая нормальная подгруппа N не входит в \mathfrak{F} . Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $D^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Поэтому $N / N \cap D^{\mathfrak{F}}(G) = N / N \in \mathfrak{F}$. Но отсюда не следует, что $N \in \mathfrak{F}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.
3. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // III. J. Math. – 1961. – Vol. 5, № 2. – P. 306–313.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
5. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
6. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
7. Бородич, Р.В. Об \mathfrak{F} -достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.
8. Бородич, Р.В. О пересечении \mathfrak{F} -абнормальных максимальных θ -подгрупп / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич // Весці НАН Беларусі. Серыя физ.-мат. навук. – 2007. – № 3. – С. 47–52.
9. Бородич, Р.В. О пересечении A -допустимых θ -подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (31). – С. 44–47.
10. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
11. Gorenshstein, D. Finite groups / D. Gorenshstein. – New York: Harper and Row, 1968. – 572 p.

Поступила в редакцию 06.02.19.

УДК 512.548

О НЕ n -ПОЛУАБЕЛЕВОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия

ON NON- n -SEMIABELIANISM POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL CLASS

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies

Изучается перестановочность элементов в полиадических группоидах с полиадической операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$ и n -арной операции η . Основным результатом статьи является теорема, в которой сформулированы достаточные условия не n -полуабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, где $l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$. Приведены многочисленные следствия из этой теоремы. В частности установлено, что если подстановка σ удовлетворяет условиям $\sigma^{n-1} \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$, n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ имеет не менее двух элементов, то полиадический группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является не n -полуабелевой полиадической группой.

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арный группоид, абелевость, полуабелевость, нейтральная последовательность.

The permutability of the elements in polyadic groupoids with polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is defined on Cartesian power of A^k n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ and n -ary operation η are considered. The main result of the article is the theorem in which sufficient conditions of non- n -semiabelianism of l -ary ($l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$) groupoid $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ are formulated. Numerous consequences of this theorem are given. In particular, it was found that if substitution σ satisfies the conditions $\sigma^{n-1} \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$, n -ary group $\langle A, \eta \rangle$ has no less than two elements, then polyadic groupoid $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ is a non- n -semiabelian polyadic group.

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, abelianism, semiabelianism, neutral sequence.

Введение

Полиадическими группоидами специального вида мы называем l -арные группоиды $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [1, определение 1.1] следующим образом.

Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \\ &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = (0.1) \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \\ &\eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \\ &\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}) \dots))). \end{aligned} \quad (0.2)$$

В работе [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -ой декартовой степени A^k группоида A была определена l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$, которая является частным случаем l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, так как совпадает с ней при $n = 2$. Заметим, что ранее в книге [3] l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ была определена на k -ой декартовой степени полугруппы. В свою очередь, частными случаями

l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил и изучал в [4]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Частным случаем l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является и n -арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], которая совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, (12 \dots n-1), n-1}$.

Статья посвящена нахождению достаточных условий при которых l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

1 Предварительные сведения, используемые результаты

При изучении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ полезна следующая

Теорема 1.1 [1, теорема 1.1]. Если

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}), \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= (y_1, \dots, y_k), \end{aligned}$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -я компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \\ &\eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1)\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ &\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots \end{aligned}$$

$$\dots \eta x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \quad (1.1)$$

Замечание 1.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (1.1) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_1 x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_1 x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \quad (1.2)$$

Если η – бинарная операция, обозначаемая символом \circ , то бинарная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с бинарной операцией $\overset{\sigma}{\circ}$, а l -арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[]_{s+1,\sigma,k}$ из [2]. При этом равенства (0.1), (0.2) и (1.1) принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_2 &= (x_{11}, \dots, x_{1k}) \overset{\sigma}{\circ} (x_{21}, \dots, x_{2k}) = \\ &= (x_{11}x_{2\sigma(1)}, \dots, x_{1k}x_{2\sigma(k)}), \\ &[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_k]_{l,\sigma,k} = \\ &= \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)), \\ y_j &= (x_1(x_{2\sigma(j)}(\dots (x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \dots))))). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для сокращения записей в правой части равенства (1.3) символ операции $\overset{\sigma}{\circ}$ не указан.

Для ассоциативной бинарной операции η равенства (1.2) и (1.3) принимают вид

$$y_j = x_1 x_{2\sigma(j)} \dots x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} = x_1 x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

где снова символ операции $\overset{\sigma}{\circ}$ не указан. Именно последним равенством в [3, определении 3.1.4] была определена l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ на k -ой декартовой степени полугруппы A .

Следующие теоремы показывают, что свойства «быть полиадической полугруппой», «быть полиадической группой» переносятся с n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$, если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Для соответствующего переноса свойства «быть полиадической квазигруппой» условие $\sigma^l = \sigma$ не обязательно.

Теорема 1.2 [1, теорема 2.1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.

Теорема 1.3 [5, теорема 4.1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная группа.

Теорема 1.4 [5, теорема 3.1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная квазигруппа.

Напомним, что последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют: *нейтральной* в нём, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1}x] = [xe_1 \dots e_{n-1}] = x;$$

левой нейтральной в нём, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1}x] = x;$$

правой нейтральной в нём, если для любого $x \in A$ верно

$$[xe_1 \dots e_{n-1}] = x.$$

Нейтральные последовательности впервые были определены Э. Постом в [4] для n -арных групп.

Если в n -арном группоиде $\langle A, \eta \rangle$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$\eta(x_1 x_2 \dots x_n) = \eta(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}),$$

то n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ и n -арную операцию η называют *абелевыми*.

n -Арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, в котором выполняется тождество

$$\eta(xx_1 \dots x_{n-2}y) = \eta(yx_1 \dots x_{n-2}x),$$

называют *полуабелевым*. *Полуабелевой* в этом случае называют и саму n -арную операцию η .

Абелевы и полуабелевы n -арные операции впервые появились у В. Дёрнте [6] при изучении n -арных групп.

При $n = 2$ понятия абелевости и полуабелевости совпадают, так как в этом случае указанные выше тождества принимают вид $xu = ux$.

Ещё одним обобщением абелевых группоидов являются n -полуабелевы l -арные группоиды.

Пусть $l = s(n - 1) + 1, s \geq 1$. l -Арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ называется n -полуабелевым, если в нём для любых $t = 0, 1, \dots, s - 1$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta(x_1 \dots x_{t(n-1)} x_{t(n-1)+1} x_{t(n-1)+2} \dots x_{(t+1)(n-1)} \\ x_{(t+1)(n-1)+1} x_{(t+1)(n-1)+2} \dots x_{s(n-1)+1}) = \\ = \eta(x_1 \dots x_{t(n-1)} x_{(t+1)(n-1)+1} x_{t(n-1)+2} \dots \\ \dots x_{(t+1)(n-1)} x_{t(n-1)+1} x_{(t+1)(n-1)+2} \dots x_{s(n-1)+1}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

В частности, при $t = 0$ тождество (1.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \eta(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n x_{n+1} \dots x_{s(n-1)+1}) = \\ = \eta(x_n x_2 \dots x_{n-1} x_1 x_{n+1} \dots x_{s(n-1)+1}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Поэтому l -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ не является n -полуабелевым, если в нём не выполняется последнее тождество.

Если положить

$$\alpha_i = x_{(i-1)(n-1)+2} \dots x_{i(n-1)}, i = 1, \dots, s,$$

то тождество (1.4) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} [x_1 \alpha_1 x_n \dots x_{(t-1)(n-1)+1} \alpha_t x_{t(n-1)+1} \alpha_{t+1} x_{(t+1)(n-1)+1} \alpha_{t+2} \dots \alpha_s x_l] = \\ = [x_1 \alpha_1 x_n \dots x_{(t-1)(n-1)+1} \alpha_t x_{(t+1)(n-1)+1} \alpha_{t+1} x_{t(n-1)+1} \alpha_{t+2} \dots \alpha_s x_l]. \end{aligned}$$

Замечание 1.2. Понятно, что 2-полуабелевы l -арные группоиды – это в точности абелевы l -арные группоиды. Ясно также, что l -полуабелевые l -арные группоиды – это в точности полуабелевы l -арные группоиды.

n -Полуабелевые полиадически операции впервые появились у Э. Поста [4] при изучении полиадических групп.

Полиадический группоид, не являющийся n -полуабелевым, будем называть также *не n -полуабелевым*.

2 Неравенства в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$

Прежде чем сформулировать признаки не n -полуабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, докажем некоторые неравенства, которые справедливы в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 2.1. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что $a \neq e_{n-1}$,

$$\eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \tag{2.1}$$

$$\eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}. \tag{2.2}$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_{n-1}, \dots, a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = a, a_{j+1} = e_{n-1}, \dots, a_k = e_{n-1}), \tag{2.3}$$

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_k), \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \dots, e_2}_k), \dots, \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \dots, e_{n-1}}_k).$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_s) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2} \mathbf{a} e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}). \tag{2.4}$$

Доказательство. Заметим, что выбор $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ с условием $\sigma^{n-1}(j) \neq j$ возможен, так как подстановка $\sigma^{n-1}(j)$ не является тождественной. Положим

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_s) = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2} \mathbf{a} e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}) = (z_1, z_2, \dots, z_k).$$

Тогда, согласно теореме 1.1,

$$y_j = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})))}_{s-2}).$$

Применяя к полученному равенству $s - 1$ раз равенство (2.2), получим

$$y_j = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})))}_{s-3}).$$

...
 $= \eta(ae_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})) = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} e_{n-1})$,
 то есть

$$y_j = \eta(ae_1 \dots e_{n-2} e_{n-1}).$$

Из этого равенства и из равенства (2.1) вытекает $y_j = a$.

Согласно теореме 1.1,

$$z_j = \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(a_{\sigma^{n-1}(j)} e_1 \dots e_{n-2}))$$

$$\underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})))}_{s-3} =$$

$$\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})).$$

Кроме того, из (2.3), ввиду $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, следует $a_{\sigma^{n-1}(j)} = e_{n-1}$. Таким образом,

$$z_j = \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})))}_{s-3}).$$

Применяя к полученному равенству s раз равенство (2.2), получим $z_j = e_{n-1}$. А так как

$$y_j = a, z_j = e_{n-1}, a \neq e_{n-1},$$

то $y_j \neq z_j$, откуда следует, что доказываемое неравенство (2.4) из формулировки теоремы верно. \square

Сформулируем следствие из теоремы 2.1 для $n = 3$.

Следствие 2.1. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^2 не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, e_2 , что

$$a \neq e_2, \eta(ae_1 e_2) = a, \eta(e_2 e_1 e_2) = e_2.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^2(j) \neq j$, положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_2, a_j = a, a_{j+1} = \dots = a_k = e_2), \tag{2.5}$$

и определим элементы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 так же, как в теореме 2.1. Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} e_1 e_2 \dots e_1 e_2}_s) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{a} e_1 e_2 \dots e_1 e_2}_{s-1}). \tag{2.6}$$

Если в теореме 2.1 положить $a = e_1$, то верна

Теорема 2.2. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что $e_1 \neq e_{n-1}$,

$$\eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1,$$

$$\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = e_1, a_{j+1} = \dots = a_k = e_{n-1}) \tag{2.7}$$

и определим элементы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ так же, как в теореме 2.1. Тогда верно неравенство (2.4).

Полагая в теореме 2.2 $n = 3$, получим

Следствие 2.2. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^2 не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами e_1, e_2 , что

$$e_1 \neq e_2, \eta(e_1 e_1 e_2) = e_1, \eta(e_2 e_1 e_2) = e_2.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^2(j) \neq j$, положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_2, a_j = e_1, a_{j+1} = \dots = a_k = e_2) \tag{2.8}$$

и определим элементы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ так же, как в теореме 2.1. Тогда верно неравенство (2.6).

Случай нейтральных последовательностей. Так как для правой нейтральной (нейтральной) последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$ n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ верны равенства (2.1) и (2.2), то теореме 2.1 соответствует следующая

Теорема 2.3. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$. Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e_{n-1}$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} , $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ так же, как в теореме 2.1. Тогда верно неравенство (2.4).

Сформулируем следствие из теоремы 2.3 для $n = 3$.

Следствие 2.3. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^2 не является тождественной, неоднородный тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 e_2$. Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e_2$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^2(j) \neq j$, и определим элемент \mathbf{a} с помощью (2.5), а элементы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 – так же, как в теореме 2.1. Тогда верно неравенство (2.6).

Следующая теорема вытекает из теоремы 2.3, если в ней положить $a = e_1$.

Теорема 2.4. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_{n-1}$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и определим элемент \mathbf{a} с помощью (2.7), а элементы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ – так же, как в теореме 2.1. Тогда верно неравенство (2.4).

Следующее следствие может быть получено из теоремы 2.4, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 2.4. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^2 не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 e_2$, что $e_1 \neq e_2$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^2(j) \neq j$, и определим элемент \mathbf{a} с помощью (2.8), а элементы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 – так же, как в теореме 2.1. Тогда верно неравенство (2.6).

Случай идемпотентов. Если в теореме 2.1 все e_1, \dots, e_{n-1} совпадают с некоторым идемпотентом e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, то верно равенство (2.2). Поэтому справедлива

Теорема 2.5. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементом a и идемпотентом e , что

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a. \quad (2.9)$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e, a_j = a, a_{j+1} = \dots = a_k = e), \mathbf{e} = (\underbrace{e, \dots, e}_k). \quad (2.10)$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} e \dots e}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{e \dots e}_{n-1} \mathbf{a} e \underbrace{e \dots e}_{(s-1)(n-1)}). \quad (2.11)$$

Сформулируем следствие из теоремы 2.5 для $n = 3$.

Следствие 2.5. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^2 не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементом a и идемпотентом e , что $a \neq e, \eta(aee) = a$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^2(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} с помощью (2.10). Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} e \dots e}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{eee e \dots e}_{2(s-1)}). \quad (2.12)$$

Случай единиц. Если неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e , то для любого его элемента a , отличного от e , выполняется условие (2.9) из теоремы 2.5. Поэтому справедлива

Теорема 2.6. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} с помощью (2.10). Тогда верно неравенство (2.11).

Сформулируем следствие из теоремы 2.6 для $n = 3$.

Следствие 2.6. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^2 не является тождественной, неоднородный тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^2(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} с помощью (2.10). Тогда верно неравенство (2.12).

Если η – бинарная операция ($n = 2$), то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$. Поэтому из теоремы 2.1 или из теоремы 2.5 вытекает

Следствие 2.7. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает элементом a и идемпотентом e такими, что

$$a \neq e, \eta(ae) = a.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} с помощью (2.10). Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a} e \dots e}_s]_{s+1, \sigma, k} \neq [\mathbf{e} \mathbf{a} e \dots e]_{s+1, \sigma, k}.$$

Замечание 2.1. Так как в группоидах правая нейтральная последовательность является правой единицей, а всякая правая единица группоида является его идемпотентом, то следствия из теорем 2.3 и 2.6 для $n = 2$ содержатся в следствии 2.7.

3 Не n -полуабелевость l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$

Неравенство (2.4) означает, что в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество вида (1.5). Поэтому для каждого результата предыдущего раздела можно сформулировать признак не n -полуабелевости соответствующего полиадического группоида.

Например, теоремам 2.1–2.6 соответствуют следующие признаки.

Теорема 3.1. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что $a \neq e_{n-1}$, и верны равенства (2.1) и (2.2). Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Теорема 3.2. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что $e_1 \neq e_{n-1}$,

$$\eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Теорема 3.3. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Замечание 3.1. Теорема 3.3 доказана в [7, теорема 3.1] для n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, являющегося n -арной полугруппой.

Теорема 3.4. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_{n-1}$. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Теорема 3.5. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементом a и идемпотентом e , что верно (2.9). Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Теорема 3.6. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей). Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Так как согласно замечанию 1.2, 2-полуабелевость l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ совпадает с его абелевостью, то из теоремы 3.1 при $n = 2$ вытекает следующее следствие. Оно же вытекает и из следствия 2.7.

Следствие 3.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает элементом a и идемпотентом e такими, что

$$a \neq e, \eta(ae) = a.$$

Тогда $(s+1)$ -арный группоид $\langle A^k, [\]_{s+1, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Замечание 3.2. Если в теоремах 3.1–3.6 n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ заменить n -арной полугруппой $\langle A, \eta \rangle$ и потребовать дополнительно, чтобы подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяла условию $\sigma^l = \sigma$, то получим новые признаки не n -полуабелевости, в которых, согласно теореме 1.2, вместо l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ будет фигурировать l -арная полугруппа $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Таким образом, теоремам 3.1–3.6 соответствуют следующие теоремы.

Теорема 3.7. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, подстановка σ^{l-1} является тождественной, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что $a \neq e_{n-1}$, и верны равенства (2.1) и (2.2). Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Теорема 3.8. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, подстановка σ^{l-1} является тождественной, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что $e_1 \neq e_{n-1}$,

$$\eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Теорема 3.9. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, подстановка σ^{l-1} является тождественной, неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Теорема 3.10. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, подстановка σ^{l-1} является тождественной, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_{n-1}$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Теорема 3.11. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, подстановка σ^{l-1} является тождественной, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементом a и идемпотентом e , что верно (2.9).

Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Теорема 3.12. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, подстановка σ^{-1} является тождественной, неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей). Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Следующее следствие вытекает как из теоремы 3.1, так и из следствия 3.1.

Следствие 3.2. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа A обладает элементом a и идемпотентом e такими, что

$$a \neq e, \eta(ae) = a.$$

Тогда $\langle A^k, [\]_{s+1, \sigma, k} \rangle$ – неабелева $(s+1)$ -арная полугруппа.

Случай $s = n$. Представляет интерес следующая

Теорема 3.13. Пусть для нетождественной подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^n является тождественной, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что $a \neq e_{n-1}$,

$$\eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда $\langle A^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Доказательство. Так как по условию теоремы для нетождественной подстановки σ подстановка σ^n является тождественной подстановкой, то σ^{n-1} – нетождественная подстановка, при этом подстановка $\sigma^{n(n-1)}$ – тождественная. Поэтому, полагая в теореме 3.1

$$s = n, l = n(n-1) + 1,$$

и применяя теорему 1.2, получим не n -полуабелевость l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$, где $l = n(n-1) + 1$. \square

Следующее следствие, вытекает из теоремы 3.13, если в ней положить σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , $n = k$. В этом случае $s = n = k \geq 2$, $l = k(k-1) + 1$.

Следствие 3.3. Пусть σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , k -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{k-1} , что $a \neq e_{k-1}$,

$$\eta(ae_1 \dots e_{k-1}) = a, \eta(e_{k-1}e_1 \dots e_{k-1}) = e_{k-1}.$$

Тогда $\langle A^k, \eta_{k, \sigma, k} \rangle$ – не k -полуабелева l -арная полугруппа, где $l = k(k-1) + 1$.

Полагая в следствии 3.3 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 3.4. Пусть k -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{k-1} , что $a \neq e_{k-1}$,

$$\eta(ae_1 \dots e_{k-1}) = a, \eta(e_{k-1}e_1 \dots e_{k-1}) = e_{k-1}.$$

Тогда $\langle A^k, \eta_{k, (12 \dots k), k} \rangle$ – не k -полуабелева l -арная полугруппа, где $l = k(k-1) + 1$.

Полагая в следствиях 3.3 и 3.4 $k = 3$, получим ещё два следствия.

Следствие 3.5. Пусть σ – цикл длины 3 из S_3 , тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, e_2 , что

$$a \neq e_2, \eta(ae_1e_2) = a, \eta(e_2e_1e_2) = e_2.$$

Тогда $\langle A^3, \eta_{3, \sigma, 3} \rangle$ – не 3-полуабелева 7-арная полугруппа.

Следствие 3.6. Пусть тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, e_2 , что

$$a \neq e_2, \eta(ae_1e_2) = a, \eta(e_2e_1e_2) = e_2.$$

Тогда $\langle A^3, \eta_{3, (123), 3} \rangle$ – не 3-полуабелева 7-арная полугруппа.

Теорема 3.13 и следствия 3.3 и 3.4 позволяют сформулировать следующие три утверждения.

Теорема 3.14. Пусть для нетождественной подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^n является тождественной, неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда $\langle A^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Следствие 3.7. Пусть σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , неоднородная k -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда $\langle A^k, \eta_{k, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа не являющаяся k -полуабелевой, где $l = k(k-1) + 1$.

Следствие 3.8. Пусть неоднородная k -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда $\langle A^k, \eta_{k, (12 \dots k), k} \rangle$ – не k -полуабелева l -арная полугруппа, где $l = k(k-1) + 1$.

Случай левой нейтральной последовательности. В связи с теоремой 3.3 возникает вопрос: можно ли в ней правую нейтральную последовательность заменить левой нейтральной последовательностью? Покажем, что ответ на поставленный вопрос будет утвердительным, если в теореме 3.3 n -арный группоид заменить n -арной полугруппой.

Теорема 3.15. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Доказательство. Так как подстановка σ^{n-1} не является тождественной, то

$$\sigma^{(s-1)(n-1)} \neq \sigma^{s(n-1)}.$$

Поэтому существует $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ с условием

$$\sigma^{(s-1)(n-1)}(j) \neq \sigma^{s(n-1)}(j).$$

Зафиксируем в $\langle A, \eta \rangle$ левую нейтральную (нейтральную) последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ и элемент $a \neq e_1$.

Пусть e_1, e_2, \dots, e_{n-1} – те же, что и в теореме 2.1, и положим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{\sigma^{s(n-1)(j)-1}}, \underbrace{a, e_1, \dots, e_1}_{k-\sigma^{s(n-1)(j)}}) = \\ &= (a_1, \dots, a_{\sigma^{s(n-1)(j)-1}}, a_{\sigma^{s(n-1)(j)}}, a_{\sigma^{s(n-1)(j)+1}}, \dots, a_k), \\ \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} e_1 e_2 \dots e_{n-1} \mathbf{a}) &= \\ &= (y_1, y_2, \dots, y_k), \\ \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} \mathbf{a} e_2 \dots e_{n-1} e_1) &= \\ &= (z_1, z_2, \dots, z_k). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1} e_1 e_2 \dots e_{n-1} a_{\sigma^{s(n-1)(j)}}), \\ z_j &= \eta(e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1} a_{\sigma^{s(n-1)(j)}} e_2 \dots e_{n-1} e_1), \end{aligned}$$

Так как $e_1 \dots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$, то

$$y_j = a_{\sigma^{s(n-1)(j)}} = a.$$

А так как

$$\sigma^{(s-1)(n-1)(j)} \neq \sigma^{s(n-1)(j)},$$

то

$$a_{\sigma^{(s-1)(n-1)(j)}} = e_1,$$

откуда

$$z_j = \eta(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} e_1 e_2 \dots e_{n-1} e_1).$$

Снова, используя левую нейтральность последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$, получаем $z_j = e_1$. Из $y_j = a, z_j = e_1, a \neq e_1$ следует $y_j \neq z_j$, откуда

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} e_1 e_2 \dots e_{n-1} \mathbf{a}) &\neq \\ \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} \mathbf{a} e_2 \dots e_{n-1} e_1). \end{aligned}$$

Следовательно, l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым. \square

Следующая теорема, вытекающая из теоремы 3.15, является двойственной для теоремы 3.6, если в ней $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа.

Теорема 3.16. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой единицей (единицей). Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Теоремы 3.15, 3.16 и теорема 1.2 позволяют сформулировать следующие две теоремы.

Теорема 3.17. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, подстановка σ^{l-1} является тождественной, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Теорема 3.18. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, подстановка σ^{l-1} является тождественной,

неодноэлементная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой единицей (единицей). Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Случай n -арной группы. Так как в любой n -арной группе имеются нейтральные последовательности, то теоремы 1.3 и 3.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.19. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, подстановка σ^{l-1} является тождественной, $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная группа.

Теоремы 1.4 и 3.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.20. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – не n -полуабелева l -арная квазигруппа.

Полагая в теоремах 3.19 и 3.20 $n = 2$, получим два следствия.

Следствие 3.9. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle A, \eta \rangle$ – неединичная группа. Тогда $\langle A^k, [\]_{s+1, \sigma, k} \rangle$ – неабелева $(s+1)$ -арная группа.

Следствие 3.10. Пусть σ – нетождественная подстановка из S_k , $\langle A, \eta \rangle$ – неединичная группа. Тогда $\langle A^k, [\]_{s+1, \sigma, k} \rangle$ – неабелева $(s+1)$ -арная квазигруппа.

Замечание 3.3. Результаты о не n -полуабелевых l -арных полугруппах и l -арных группах имеются в [8]. В частности, в этой работе сформулированы признаки полуабелевости, но не n -полуабелевости l -арных полугрупп и l -арных групп.

4 Перестановочность элементов и тотальная неассоциативность

Напомним, что n -арная операция η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называется тотально неассоциативной [9], если в $\langle A, \eta \rangle$ для любых $i \neq j$, где $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, не выполняются тождества

$$\begin{aligned} \eta(x_1 \dots x_{i-1} \eta(x_i \dots x_{j+n-1}) x_{j+n} \dots x_{2n-1}) &= \\ = \eta(x_1 \dots x_{j-1} \eta(x_j \dots x_{j+n-1}) x_{j+n} \dots x_{2n-1}). \end{aligned}$$

Тотально неассоциативным в этом случае называется и n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$.

Нам понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 4.1 [9, теорема 5.1]. Если неодноэлементная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицей, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной.

Теорема 4.2 [9, теорема 3.1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – тотально неассоциативная l -арная квазигруппа.

Согласно теореме 3.6, если неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицей, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, то l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым. С другой стороны, согласно теореме 4.1, если $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с единицей, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной. Таким образом, верна

Теорема 4.3. Пусть неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицей, подстановка σ из S_k удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Следствие 4.1. Пусть неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицей, подстановка σ из S_k порядка $d \geq 2$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$,
 $l = s(n-1) + 1 \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \dots; r = 2, \dots, d\}$.
 Тогда l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Следствие 4.2. Пусть неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицей, цикл σ из S_k длины k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$,

$l = s(n-1) + 1 \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \dots; r = 2, \dots, k\}$.
 Тогда l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Следствие 4.3. Пусть неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицей, цикл $(12 \dots k)$ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, t, r и l такие же как в следствии 4.2. Тогда l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Полагая в следствии 4.1 $d = 2$, получим

Следствие 4.4. Пусть неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицей, подстановка σ из S_k порядка 2 удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, $l = s(n-1) + 1$ – чётное. Тогда l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Следствие 4.5. Пусть неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицей, транспозиция σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, $l = s(n-1) + 1$ – чётное. Тогда l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Полагая в теореме 4.3 и во всех следствиях из неё $n = 2$, получим следующие результаты.

Теорема 4.4. Пусть неоднородная полугруппа A обладает единицей, нетождественная подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Следствие 4.6. Пусть неоднородная полугруппа A обладает единицей, σ – нетождественная подстановка из S_k порядка d ,

$$l = s + 1 \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \dots; r = 2, \dots, d\}.$$

Тогда l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Следствие 4.7. Пусть неоднородная полугруппа A обладает единицей, σ – цикл из S_k длины k ,

$$l = s + 1 \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \dots; r = 2, \dots, k\}.$$

Тогда l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Следствие 4.8. Пусть неоднородная полугруппа A обладает единицей, t, r и l такие же как в следствии 4.7. Тогда l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, []_{l, (12 \dots k), k} \rangle$ не является абелевым.

Следствие 4.9. Пусть неоднородная полугруппа A обладает единицей, σ – подстановка из S_k порядка 2, $l = s + 1$ – чётное. Тогда l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Следствие 4.10. Пусть неоднородная полугруппа A обладает единицей, σ – транспозиция из S_k , $l = s + 1$ – чётное. Тогда l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной, а l -арный группоид $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Теоремы 3.20 и 4.2 позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 4.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная группа, подстановка σ из S_k удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – тотально неассоциативная l -арная квазигруппа, не являющаяся n -полуабелевой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.
2. Гальмак, А.М. Об операции $[]_{l, \sigma, k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.
3. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

4. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

5. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

6. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

7. Гальмак, А.М. О не n -полуабелевых полиадических группоидах специального вида /

А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 2. – С. 55–61.

8. Гальмак, А.М. О перестановочности элементов полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 70–75.

9. Гальмак, А.М. О тотальной неассоциативности полиадических операций / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 2. – С. 4–14.

Поступила в редакцию 20.09.18.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ В МОМЕНТ СТРАГИВАНИЯ

М.А. Гундина

Белорусский национальный технический университет, Минск

DETERMINATION OF THE INITIAL DIRECTION OF CRACKS GROWTH AT THE MOMENT OF MOVEMENT

M.A. Hundzina

Belarusian National Technical University, Minsk

Рассматривается методика нахождения начального направления развития прямолинейной трещины в пластине упруго-материала с нагрузкой, приложенной на границах пластины в условиях плоской деформации. В работе приводятся аналитические представления для компонентов тензора напряжений. Описана постановка задачи и последовательность шагов для нахождения значения угла, при котором начинается докритический рост трещины. Полученные теоретические зависимости по определению характеристик предельного состояния конструкции позволяют сделать мотивированный выбор геометрических параметров с учетом прочностных свойств материала.

Ключевые слова: трещина, начальное направление роста трещины, интенсивность напряжений, прочность материала.

A technique for determining the initial direction of the growth of a straight crack in a plate of elastic material with a load, applied at the boundaries of the plate in the plane strain conditions, is considered. In the paper analytical representations for the stress tensor components are given. The formulation of the problem and the sequence of steps for finding the value of the angle, at which subcritical crack growth begins, are described. The obtained theoretical dependences by definition of the characteristics of the limiting state of the construction allow making a motivated choice of geometric parameters with the strength properties of the material.

Keywords: crack, initial direction of crack growth, stress intensity, material strength.

Введение

В современной механике разрушения среди актуальных направлений исследований можно выделить следующие: получение оценки прочности конструкции и определение момента ее разрушения, прогнозирование первоначального направления развития трещины, влияние возникающих в окрестности ее вершины эффектов на процессы деформирования.

Одним из важных аспектов оценки трещиностойкости материала является нахождение количественных характеристик распространения трещины, которая развивается под действием приложенных нагрузок, в частности, определение траектории ее распространения и определение первоначального направления роста.

Критерии осреднения напряжений являются эффективными в задачах механики разрушения для анализа напряженно-деформированного состояния упругих материалов. В работе В.В. Новожилова [1] рассмотрены основные положения линейных и нелинейных подходов, кроме этого, сформулированы соответствующие критерии разрушения.

Монографии В.А. Левина, Е.М. Морозова, Ю.Г. Матвиенко, В.З. Партона [2], [3] посвящены применению критерия прочности (критерии наибольшего главного напряжения, касательного,

октаэдрического напряжения) в зависимости от типа используемых материалов, что позволяет провести дальнейший анализ условий эксплуатации конструкций. Л.В. Степанова, С.А. Бронников, О.Н. Белова в статье «Оценка направления роста трещины в условиях смешанного нагружения» подробно описывают методику определения первоначального направления развития произвольно ориентированной трещины с помощью обобщенных критериев, которые используются в современной механике разрушения для моделирования, выполненного численными методами [4].

В ряде работ отечественных и зарубежных ученых анализируется постановка критерия осредненных напряжений вблизи вершины трещины для нахождения начального направления страгивающейся трещины при смешанных условиях нагружения, а также статистическая обработка соответствующих экспериментальных данных задачи [5], [6].

Локальный критерий максимального тангенциального напряжения, который является одним из универсальных критериев, описан в работах Ю.Г. Матвиенко [7].

1 Нахождение начального направления развития трещины

Рассмотрим локальный критерий начального направления роста трещины на основе принципа

критерия максимальных осредненных напряжений в зоне процесса разрушения в окрестности конца трещины.

Вспользуемся выражениями для тангенциальных напряжений [8] для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии пластины, содержащей прямолинейную трещину. Эти выражения необходимы для определения начального направления распространения трещины при нагружении смешанного типа.

С целью исследования основных закономерностей деформирования пластины в окрестности вершины трещины при растягивающей нагрузке используем аналитическое решение упругой задачи. Построим математическую модель для задачи о растяжении пластины, ослабленной прямолинейной трещиной [9].

Бесконечную плоскость заменим квадратом достаточно большого размера. Его размеры будем выбирать так, чтобы была возможной замена бесконечной области конечной, а начало системы координат направим в точку пересечения его диагоналей. Известно, что при удалении от края прямолинейной центральной трещины на величину, равную половине длины трещины, концентрация напряжений быстро уменьшается. В задачах теории упругости и пластичности учитывается факт: если ширина пластины превышает на порядок длину трещины, то разница в решениях по наиболее чувствительному компоненту тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, представленному в полярной системе, не превысит 6% [10].

Объектом данного численно-аналитического исследования служила пластина высотой 200 мм, длиной 200 мм с центральной прямолинейной трещиной длиной $a = 20$ мм.

Плоский образец представляем в виде пластины как приближение пространственного образца с малой толщиной. Его ширина сечения W образца удовлетворяет следующему соотношению:

$$a \geq 0,6W,$$

в данном случае W можно взять равным 10 мм.

Зададим на границе рассматриваемого квадрата напряжения, соответствующие одноосному растяжению пластины в -70 МПа.

Связь между полярной и декартовой системами координат осуществляется по следующим формулам:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\theta = \operatorname{sgn} x_2 \arccos \frac{x_1}{r},$$

$$r_1(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2},$$

$$\theta_1(x_1, x_2) = \operatorname{sgn} x_2 \arccos \frac{x_1}{r_1(x_1, x_2)},$$

$$r_2(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 + 2a)^2 + x_2^2},$$

$$\theta_2(x_1, x_2) = \operatorname{sgn} x_2 \arccos \frac{x_1}{r_2(x_1, x_2)},$$

где (x_1, x_2) , (r, θ) – координаты текущей точки в декартовой и полярной системе координат соответственно.

На рисунке 1.1 представлены основные числовые параметры углов, напряжений и расстояний до текущей точки, которые используются при решении задачи в окрестности вершины трещины.

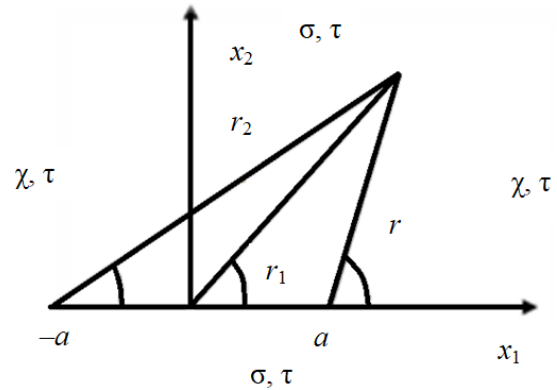


Рисунок 1.1 – Система координат в окрестности вершины трещины

На рисунке 1.1 можно выделить следующие обозначения углов: θ_1 – это угол между r_1 и осью абсцисс; θ_2 – это угол между r_2 и осью Ox ; θ – это угол между r и осью абсцисс, σ, τ, χ – напряжения, приложенные к границам пластины.

Тогда компоненты тензора напряжений выражаются формулами [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{K_I}{\sqrt{a r r_2}} \left(r_1 \cos \left(\theta_1 - \frac{\theta + \theta_2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{r_1 a^2}{r r_2} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \right) + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{a r r_2}} \left(2 r_1 \sin \left(\theta_1 - \frac{\theta + \theta_2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{r_1 a^2}{r r_2} \sin \theta_1 \cos \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \right) + \chi - \sigma, \\ \sigma_{22} = & \frac{K_I}{\sqrt{a r r_2}} \left(r_1 \cos \left(\theta_1 - \frac{\theta + \theta_2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{r_1 a^2}{r r_2} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \right) + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{a r r_2}} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \Big), \\ \sigma_{12} = & \frac{K_I}{\sqrt{a r r_2}} \sin \theta_1 \cos \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{a r r_2}} \left(r_1 \cos \left(\theta_1 - \frac{\theta + \theta_2}{2} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{r_1 a^2}{r r_2} \sin \theta_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + \theta_2) \right),$$

где коэффициенты интенсивности выражаются через значения напряжения следующим образом:

$$K_I = \sigma \sqrt{a}, \quad K_{II} = \tau \sqrt{a}.$$

Тогда выразим компоненты тензора напряжений в полярной системе по формулам:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta,$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos \theta.$$

Формулы связи декартовой системы координат и полярной системы представлены следующими соотношениями:

$$x_1 = r \cos \theta + a, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Учитывая предыдущие соотношения, выразим компонент тензора напряжений σ_{11} в зависимости от параметров углов, исходных напряжений на границе и расстояний до текущей точки:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \chi - \sigma + (r_1(x_1, x_2) \cdot r \cdot r_2(x_1, x_2) \times \\ & \times (K_1 \cos(0,5(\theta - 2\theta_1(x_1, x_2) + \theta_2(x_1, x_2))) + \\ & + 2K_2 \sin(\theta_1(x_1, x_2) + 0,5(-\theta - \theta_2(x_1, x_2)))) - \\ & - a^2 \sin(\theta_1(x_1, x_2)) \cdot K_2 \cdot \cos(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2))) + \\ & + K_1 \sin(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2)))))) / (a r^2 \cdot r_2(x_1, x_2)^2). \end{aligned}$$

Компонент тензора напряжений σ_{22} , учитывая значения коэффициентов интенсивности, примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & (K_2 r \cdot r_2(x_1, x_2) \cdot \sin(\theta_1(x_1, x_2)) \times \\ & \times \sin(1,5 \cdot (\theta + \theta_2(x_1, x_2))) + \\ & + K_1 \cdot r_1(x_1, x_2) \cdot (r \cdot \cos(0,5(\theta - 2\theta_1(x_1, x_2) + \\ & + \theta_2(x_1, x_2))) \cdot r_2(x_1, x_2) - a^2 \cdot \sin(\theta_1(x_1, x_2)) \times \\ & \times \sin(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2)))))) / (a r^2 \cdot r_2(x_1, x_2)^2). \end{aligned}$$

Компонент тензора напряжений σ_{12} примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & (K_1 r \cdot \cos(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2))) \cdot r_2(x_1, x_2) \times \\ & \times \sin(\theta_1(x_1, x_2)) + K_2 \cdot r_1(x_1, x_2) \times \\ & \times (r \cdot \cos(0,5(\theta - 2\theta_1(x_1, x_2) + \theta_2(x_1, x_2))) \times \\ & \times r_2(x_1, x_2) - a^2 \cdot \sin(\theta_1(x_1, x_2)) \times \\ & \times \sin(1,5(\theta + \theta_2(x_1, x_2)))))) / (a r^2 \cdot r_2(x_1, x_2)^2). \end{aligned}$$

Тогда можно оценить размеры области предразрушения вблизи вершины страгивающейся трещины по следующей формуле:

$$d = \frac{2 K_{Ic}^2}{\pi \sigma_0^2},$$

где величина σ_0 – это предельные локальные напряжения, действующие в зоне предразрушения, коэффициент K_{Ic} – вязкость разрушения;

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_{\theta\theta}(r) dr.$$

Согласно критерию максимальных осредненных тангенциальных напряжений, первоначальный рост трещины совершается в том направлении, где достигается наибольшее значение компонента тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$. Запишем критерий в следующем виде [1]:

$$\sigma_{\theta\theta,0} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta,00} < 0.$$

2 Результаты расчетов

На рисунках 2.1, 2.2 представлены графики компонента тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ для трещины в случае нормального отрыва.

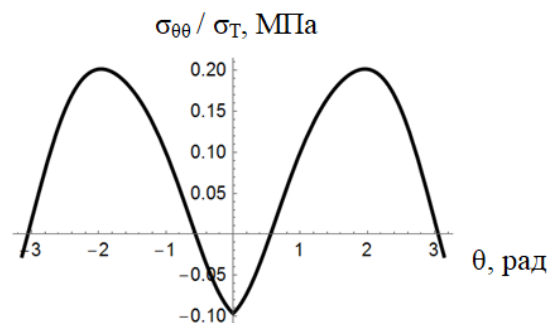


Рисунок 2.1 – Распределение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на расстоянии от вершины трещины, составляющем 20% от ее длины, при исходном напряжении 1,6 МПа (материал мрамор)

Проанализировав полученный график, можно сделать вывод о наличии двух локальных максимумов функции $\sigma_{\theta\theta}$, которые достигаются при значениях углов $\theta = \pm 1,96$ (рад). Предположительно в одном из этих направлений начнется первоначальный рост трещины.

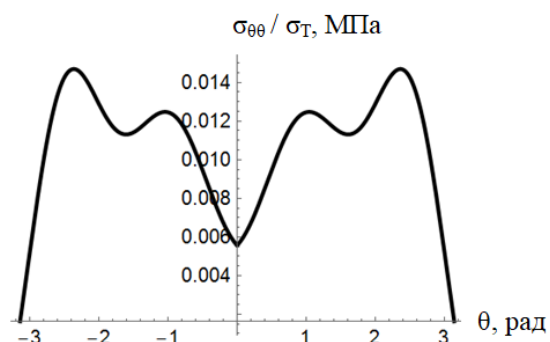


Рисунок 2.2 – Распределение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на расстоянии от вершины трещины, составляющем 50% от ее длины, при исходной нагрузке 1,6 МПа (материал мрамор)

На рисунке 2.2 видно, что подрастание привело к перераспределению напряжений в привершинной области и изменению направления дальнейшего роста трещины. Локальный максимум достигается при $\theta = \pm 2,36$ рад. Знак угла

выбирается с учетом предыдущих подрастаний трещины.

Построим зависимость направления развития трещины от расстояния до вершины трещины (рисунок 2.3).

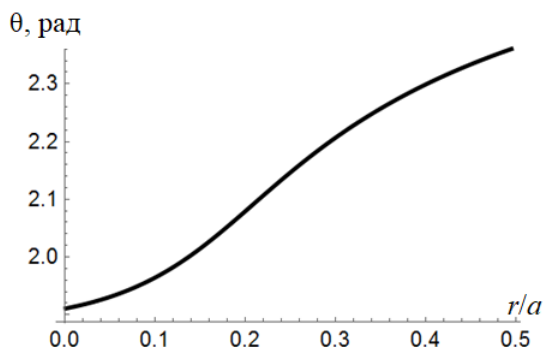


Рисунок 2.3 – Зависимость значения угла, при котором достигается максимальное значение напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, в зависимости от расстояния до вершины трещины

Проанализировав полученный график, можно сделать вывод, что в непосредственной окрестности вершины трещины первоначальное направление ее дальнейшего развития совпадает с осью, на которой расположена прямолинейная трещина $\theta \approx 0$, что согласуется с известными результатами [11]. Также требует учета тот факт, что при малейшем продвижении трещины происходит перераспределение напряжений в окрестности ее вершины и значение угла требуется пересчитывать.

Запишем зависимость интенсивности напряжений в полярной системе координат (при условии плоской деформации) в зависимости от угла θ :

$$T(\theta) = \sqrt{\frac{3}{4}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 3\sigma_{r\theta}^2}.$$

График данной функции представлен на рисунке 2.4 для расстояния от вершины трещины, составляющем 20% ее длины, при исходном напряжении 1,6 МПа (материал мрамор).

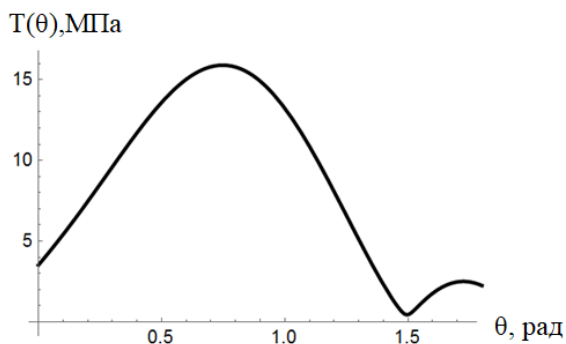


Рисунок 2.4 – Кривая интенсивности напряжений

По графику видно, что интенсивность напряжений принимает максимальное значение не при $\theta = 0$, а при значении $\theta = \pi/4$. Этот же

результат наблюдается для композиционных материалов с металлической матрицей, полученный в условиях эксперимента [12].

Зависимость от угла θ среднего напряжения для случая плоской деформации в полярной системе координат может быть найдена следующим образом:

$$\sigma_{cp}(\theta) = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2}.$$

Зависимость максимального напряжения в полярной системе координат от угла θ :

$$\sigma_{max}(\theta) = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}.$$

На рисунке 2.5 представлен график для расстояния от вершины трещины, составляющем 20% ее длины, при исходном напряжении 1,6 МПа (материал мрамор).

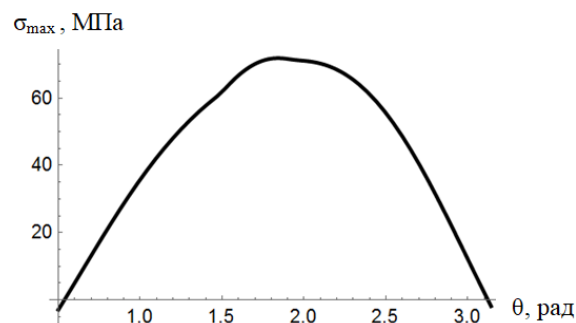


Рисунок 2.5 – Кривая максимального напряжения

Проанализировав график, можно сделать вывод, что наибольшее значение функции σ_{max} достигается при $\theta = 1,96$ (рад), что согласуется с найденным первоначальным направлением роста трещины, описанным выше.

Полученные результаты позволяют дополнить анализ напряженно-деформированного состояния в привершинной окрестности и анализ прочности материала в условии плоской деформации.

Описанный в работе подход основан на предположении о том, что критическое состояние материала наступает тогда, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии. В рассмотренной задаче наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает максимального значения при θ , таком же, какое соответствует наибольшему значению кривой максимального напряжения, представленной на рисунке 2.5.

Заключение

В работе приведена методика определения первоначального направления развития прямолинейной трещины в пластине для случая плоской деформации. Рассматривается случай нормального отрыва. Значения радиальных углов

начального роста трещины найдены с помощью критерия максимального тангенциального напряжения.

На основании проведенного исследования нагружения пластины с прямолинейной центральной трещиной можно заключить, что моделирование и прогнозирование ее первоначального направления роста позволяет дополнить комплексный анализ основных характеристик процесса разрушения твердого тела, содержащего дефект. Перспективным направлением дальнейшего исследования является учет влияния перераспределения напряженного деформированного состояния в окрестности вершины трещины в упругом, упругопластическом материале и его влияние на методику нахождения направления дальнейшего подрастания трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов, В.В.* К основам теории равновесных трещин в хрупких телах // В.В. Новожилов. – ПММ, 1969. – Т. 33, № 5. – С. 797–812.
2. *Левин, В.А.* Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В.А. Левин, Е.М. Морозов, Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2004. – 408 с.
3. *Партон, В.З.* Упругопластическая механика разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, 1985. – 503 с.
4. *Степанова, Л.В.* Оценка направления роста трещины в условиях смешанного нагружения (нормальный отрыв и поперечный сдвиг) / Л.В. Степанова, С.А. Бронников, О.Н. Белова // Вестник ПНИПУ. – 2017. – № 4. – С. 189–213.
5. *Матвиенко, Ю.Г.* Моделирование кинетики развития трещин в поверхностных слоях материала / Ю.Г. Матвиенко // Заводская лаборатория. – 2017. – Т. 83, № 1. – С. 65–71.
6. *Berto, F.* A review of the local strain energy density approach to V-notches / F. Berto, M.R. Ayatollahi // Physical mesomechanics. – 2017. – Vol. 20, № 2. – P. 14–27.
7. *Matvienko, Y.G.* Two basic approaches in a search of the crack propagation angle / Y.G. Matvienko, E.M. Morozov // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 2017. – Vol. 40, № 8. – P. 1191–1200.
8. *Ayatollahi, M.R.* On the Use of Brazilian Disc Specimen for calculating Mixed Mode I-II Fracture Toughness of Rock Materials / M.R. Ayatollahi, M.R.M. Aliha // Engineering Fracture Mechanics. – 2008. – Vol. 75, № 16. – P. 4631–4641.
9. *Гундина, М.А.* Локальный критерий начального направления роста трещины / М.А. Гундина // VI Машеровские чтения: материалы МНПК 27–28 сентября 2012 г., Витебск, 2012. – С. 58–59.
10. *Timoshenko, S.P.* Theory of Elasticity / S.P. Timoshenko, J.N. Goodier. – NY: McGraw-Hill. – 1970. – P. 100–209.
11. *Астафьев, В.И.* Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. – Самара: Самарский университет, 2001. – 562 с.
12. *Sun, C.T.* Fatigue crack growth and retardation due to overloads in metal-matrix composites / C.T. Sun, J.F. Doyle, S. Rizzi // Fatigue Crack Growth in Boron-Aluminum Metal-Matrix Composites. – 1986. – 122 p.

Поступила в редакцию 08.10.18.

УДК 539.3

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

А.С. Зеленая

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

CYLINDRICAL BENDING OF ELASTOPLASTIC RECTANGULAR THREE-LAYER PLATE WITH COMPRESSIBLE FILLER IN TEMPERATURE FIELD

A.S. Zelenaya

Belarusian State University of Transport, Gomel

Исследован цилиндрический изгиб несимметричных по толщине упругопластических трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем при действии термосиловых нагрузок. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом наполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Получена система уравнений равновесия и ее аналитическое решение в перемещениях. Проведена численная реализация решения для трехслойной металлополимерной пластины.

Ключевые слова: термопластичность, трехслойная прямоугольная пластина, цилиндрический изгиб.

Cylindrical bending of asymmetrical in thickness elastic-thermoplastic three-layer plates with a compressible filler under the action of loads and temperature was investigated. The kinematic hypotheses are based on the hypothesis of a broken line: the Kirchhoff hypotheses are accepted for the outer layers, the deformed normal remains rectilinear in a rigid compressible filler. A system of equilibrium equations and its analytical solution in displacements are obtained. Numerical realization of solutions for a three-layer metal-polymer plate is carried out.

Keywords: thermoplasticity, three-layered rectangular plate, cylindrical bending.

Введение

Постепенное повышение требований по прочности и весу, которые предъявляются к современным конструкциям, способствуют широкому распространению многослойных конструкций, частным случаем которых являются трехслойные элементы конструкций. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции удовлетворяют этим требованиям с точки зрения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. В связи с этим возникает необходимость разработки новых и уточнения уже существующих методов их расчета.

В работах [1]–[3] рассмотрены колебания стержней, пластин и оболочек под действием различных нагрузок. Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками исследовано в статье [4]. В [5] рассмотрен термоупругий изгиб упругой кольцевой трехслойной пластины на упругом основании. Упругопластический изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем рассмотрен в [6].

Здесь рассматривается цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем под действием термосиловых нагрузок, получены

уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, проведен численный анализ решения.

1 Постановка краевой задачи

Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого наполнителя. Постановка задачи дается в прямоугольной системе координат, связанной со срединной плоскостью наполнителя (рисунок 1.1). Предполагается пластину вытянутой вдоль оси x .

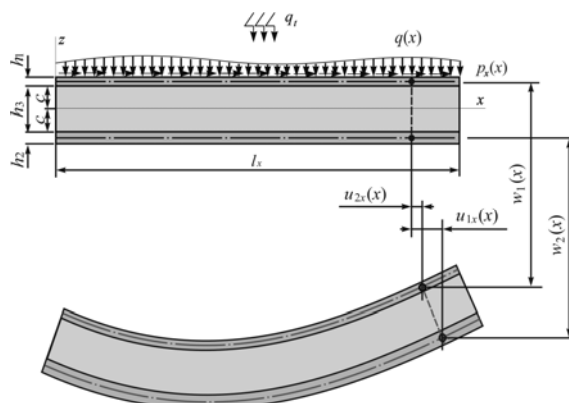


Рисунок 1.1 – Расчетная схема пластины

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком наполнителе

справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Допустим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешние распределенные нагрузки $q(x)$, $p_x(x)$ и тепловой поток интенсивностью q_t , направленный перпендикулярно первому несущему слою.

Ранее в [7] были получены уравнения равновесия в усилиях упругопластической пластины. Полагая в этой системе уравнений равновесия параметры с нижним индексом u и производные по u равными нулю, получим уравнения равновесия в усилиях, описывающих цилиндрический изгиб рассматриваемой пластины:

$$\begin{aligned} H_{1x}^0 - P_{1x}^0 &= p_x + H_{1x}^\omega - P_{1x}^\omega, \\ H_{1x}^0 + P_{2x}^0 &= H_{1x}^\omega + P_{2x}^\omega, \\ S_{1x}^0 + H_2^0 - T_{1x}^0 &= \\ &= q + \frac{p_x h_1}{2} + \frac{p_y h_1}{2} + S_{1x}^\omega + H_2^\omega - T_{1x}^\omega, \\ S_{2x}^0 - H_2^0 - T_{2x}^0 &= S_{2x}^\omega - H_2^\omega - T_{2x}^\omega. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Краевая задача замыкается добавлением соответствующих граничных условий при $x = 0, l_x$:

$$\begin{aligned} P_{1x}^{0(n)} &= N_{rx}^{(1)} + P_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ P_{2x}^{0(n)} &= N_{rx}^{(2)} + P_{2x}^{\omega(n-1)}, \\ T_{1x}^{0(n)} - S_{1x}^{\omega(n)} &= Q_{rx}^{(1)} + (T_{1x}^{\omega(n-1)} - S_{1x}^{\omega(n-1)}), \\ T_{2x}^{0(n)} - S_{2x}^{\omega(n)} &= Q_{rx}^{(1)} + (T_{2x}^{\omega(n-1)} - S_{2x}^{\omega(n-1)}), \\ S_{1x}^{0(n)} &= M_{rx}^{(1)} + S_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ S_{2x}^{0(n)} &= M_{rx}^{(2)} + S_{2x}^{\omega(n-1)}. \end{aligned}$$

Здесь $N_{rx}^{(1)}$, $N_{rx}^{(2)}$, $Q_{rx}^{(1)}$, $Q_{rx}^{(2)}$, $M_{rx}^{(1)}$, $M_{rx}^{(2)}$ – заданные усилия на торце пластины в первом и во втором несущих слоях; индекс r принимает значения $0, l_x$.

Для термопластической пластины используем соотношения закона Гука в девiatorно-сферической форме, которые в температурном поле принимают вид

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \left(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)\right) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} \Delta T_k) \quad (1.2) \\ &(i, j = x, z, k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Здесь $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девiatorная и шаровая части тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девiatorная и шаровая части тензора деформаций; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации в k -м слое; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ –

функции пластичности Ильюшина в несущих слоях, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_r^{(k)} \omega^{(k)}(T_k)$ равны нулю; $\varepsilon_r^{(k)}(T_k)$ – предел текучести материала; $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, T_k)$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя, равная нулю при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}(T_k)$; $\varepsilon_s^{(3)}(T_k)$ – предел физической нелинейности заполнителя; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материалов слоев; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения; ΔT_k – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0 .

Подставим в уравнения равновесия (1.1) выражения линейных и нелинейных составляющих внутренних усилий через искомые функции u_{1x} , u_{1y} , u_{2x} , u_{2y} , w_1 , w_2 с применением (1.2). Учитываем, что температура изменяется только по толщине пластины $T_k = T_k(z)$ и поле стационарно. Получим уравнения равновесия в перемещениях при цилиндрическом изгибе прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.

Как и ранее в [6] для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений применим метод «упругих» решений Ильюшина [8]. Данный метод позволяет сводить краевую задачу последовательно на каждом шаге приближения к соответствующей линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

Получим уравнения равновесия в перемещениях при цилиндрическом изгибе упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле в итерационном виде:

$$\begin{aligned} a_1 u_{1x}^n - a_1 u_{2x}^n - a_4 u_{1x}^n \varepsilon_{xx} - a_5 u_{2x}^n \varepsilon_{xx} + a_2 w_1^n \varepsilon_x + \\ + a_3 w_2^n \varepsilon_x - 2a_6 w_1^n \varepsilon_{xxx} + a_7 w_2^n \varepsilon_{xxx} = p_x + p_\omega^{n-1}, \\ -a_1 u_{1x}^n + a_1 u_{2x}^n - a_5 u_{1x}^n \varepsilon_{xx} - a_9 u_{2x}^n \varepsilon_{xx} - a_{10} w_1^n \varepsilon_x - \\ - a_{17} w_2^n \varepsilon_x - a_6 w_1^n \varepsilon_{xxx} + 2a_7 w_2^n \varepsilon_{xxx} = s_\omega^{n-1}, \\ -a_2 u_{1x}^n \varepsilon_x + a_{10} u_{2x}^n \varepsilon_x + 2a_6 u_{1x}^n \varepsilon_{xxx} + \\ + a_6 u_{2x}^n \varepsilon_{xxx} + a_{11} w_1^n \varepsilon_{xx} - a_{12} w_2^n \varepsilon_{xx} + \\ + a_{15} w_1^n \varepsilon_{xxx} - a_{16} w_2^n \varepsilon_{xxx} + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = \\ = q + \frac{p_x h_1}{2} + q_\omega^{n-1}, \\ -a_3 u_{1x}^n \varepsilon_x + a_{17} u_{2x}^n \varepsilon_x - a_7 u_{1x}^n \varepsilon_{xxx} - \\ - 2a_7 u_{2x}^n \varepsilon_{xxx} - a_{12} w_1^n \varepsilon_{xx} + a_{14} w_2^n \varepsilon_{xx} - \\ - a_{16} w_1^n \varepsilon_{xxx} + a_{13} w_2^n \varepsilon_{xxx} - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{n-1}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где a_1, \dots, a_{28} – коэффициенты, учитывающие температурное изменение параметров упругости материалов по толщине пластины; n – номер приближения.

Следует отметить, что система (1.3) совпадает по виду с соответствующей системой уравнений равновесия трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем [9].

Слагаемые с индексом « ω » включают все нелинейные и температурные добавки.

$$\begin{aligned} P_{\omega}^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} - P_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ S_{\omega}^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} + P_{2x}^{\omega(n-1)}, \\ q_{\omega}^{n-1} &= S_{2x}^{\omega(n-1)} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ g_{\omega}^{n-1} &= S_{2x}^{\omega(n-1)} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

или через напряжения

$$\begin{aligned} P_{\omega}^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} - P_{1x}^{\omega(n-1)}, \\ &= \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} - \left[\frac{N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_{xx}^{(1)\omega(n-1)} \right], \\ &= \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} dz - \left[\frac{1}{2} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} z dz + \int_{h_1} \sigma_{xx}^{(1)\omega(n-1)} dz \right], \\ S_{\omega}^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} + P_{2x}^{\omega(n-1)}, \\ &= \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + \left[\frac{N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_{xx}^{(2)\omega(n-1)} \right], \\ &= \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} dz + \left[\frac{1}{2} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} z dz + \int_{h_2} \sigma_{xx}^{(2)\omega(n-1)} dz \right], \\ q_{\omega}^{n-1} &= S_{1x}^{\omega(n-1)} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)} + H_2^{\omega(n-1)} = \\ &= \left[\left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_{xx}^{(1)\omega(n-1)} - M_{xx}^{(1)\omega(n-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_1}{4} N_{xx}^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4c} M_{xx}^{(3)\omega(n-1)} \right] + \\ &\quad + \frac{N_{zz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} - \left[\left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} \right], \\ &\quad + \frac{N_{zz}^{(3)r(n-1)}}{2c} = \left[\left(c + \frac{h_1}{2} \right) \int_{h_1} \sigma_{xx}^{(1)\omega(n-1)} dz - \int_{h_1} \sigma_{xx}^{(1)\omega(n-1)} z dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_1}{4} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} dz + \frac{h_1}{4c} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} z dz \right] - \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{h_1}{4c} \right) \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} dz + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} z dz \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega(n-1)} dz + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)r(n-1)} dz, \\ g_{\omega}^{n-1} &= S_{2x}^{\omega(n-1)} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)} - H_2^{\omega(n-1)} = \\ &= \left[- \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_{xx}^{(2)\omega(n-1)} - M_{xx}^{(2)\omega(n-1)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad - \frac{h_2}{4} N_{xx}^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_2}{4c} M_{xx}^{(3)\omega(n-1)} \left. \right] - \frac{N_{zz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} - \\ &\quad - \left[\left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} \right] - \frac{N_{zz}^{(3)r(n-1)}}{2c} = \\ &= \left[- \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \int_{h_2} \sigma_{xx}^{(2)\omega(n-1)} dz - \int_{h_2} \sigma_{xx}^{(2)\omega(n-1)} z dz - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h_2}{4} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} dz + \frac{h_2}{4c} \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega(n-1)} z dz \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega(n-1)} dz - \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{h_2}{4c} \right) \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega(n-1)} z dz \right] - \frac{1}{2c} \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)r(n-1)} dz. \end{aligned}$$

Примем кинематические условия свободно-го опирания рассматриваемой термоупругопластической пластины по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия в перемещениях при $x = 0, l_x$ имеют вид ($k = 1, 2$):

$$u_{kx}^n = w_k^n = v_k^n = 0. \quad (1.5)$$

Решение системы дифференциальных уравнений предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям опирания на жесткие опоры (1.5):

$$\begin{aligned} u_{1x} &= \sum_{p=0}^{\infty} U_{1xp}^n \cos \frac{\pi p x}{l_x}, \\ u_{2x} &= \sum_{p=0}^{\infty} U_{2xp}^n \cos \frac{\pi p x}{l_x}, \\ w_1 &= \sum_{p=0}^{\infty} W_{1p}^n \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \\ w_2 &= \sum_{p=0}^{\infty} W_{2p}^n \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $U_{1xp}^n, U_{2xp}^n, W_{1p}^n, W_{2p}^n$ – неизвестные амплитуды перемещений на n -м шаге.

Поперечную и дополнительную «внешнюю» нагрузку (1.4) в слоях пластины представим в виде разложения в следующие тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{p=0}^{\infty} q_p \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \\ q_{pm} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} q(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx, \\ P_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p=0}^{\infty} P_{\omega p}^{n-1} \cos \frac{\pi p x}{l_x}, \\ P_{\omega p}^{n-1} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} P_{\omega}^{n-1}(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p=0}^{\infty} s_{\omega p}^{n-1} \cos \frac{\pi p x}{l_x}, \\
 s_{\omega p}^{n-1} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} s_{\omega}^{n-1}(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx, \\
 q_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p=0}^{\infty} q_{\omega p}^{n-1} \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \\
 q_{\omega p}^{n-1} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} q_{\omega}^{n-1}(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx, \\
 g_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p=0}^{\infty} g_{\omega p}^{n-1} \sin \frac{\pi p x}{l_x}, \\
 g_{\omega p}^{n-1} &= \frac{2}{l_x} \int_0^{l_x} g_{\omega}^{n-1}(x) \sin \frac{\pi p x}{l_x} dx. \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

После подстановки перемещений (1.6), нагрузок и дополнительных усилий (1.7) в систему (1.3) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений $U_{1xp}^n, U_{2xp}^n, W_{1p}^n, W_{2p}^n$:

$$\begin{aligned}
 b_1 U_{1xp}^n + b_2 U_{2xp}^n + b_3 W_{1p}^n + b_4 W_{2p}^n &= p_{\omega p}^{n-1}, \\
 b_2 U_{1xp}^n + b_5 U_{2xp}^n + b_6 W_{1p}^n + b_7 W_{2p}^n &= s_{\omega p}^{n-1}, \\
 b_3 U_{1xp}^n + b_8 U_{2xp}^n + b_8 W_{1p}^n + b_9 W_{2p}^n &= q_p + q_{\omega p}^{n-1}, \\
 b_4 U_{1xp}^n + b_7 U_{2xp}^n + b_9 W_{1p}^n + b_{10} W_{2p}^n &= g_{\omega p}^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты b_i выражаются через величины a_i и зависят от температуры, параметров p и m и вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= a_1 + a_4 \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^2, \quad b_2 = -a_1 + a_5 \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^2, \\
 b_3 &= a_2 \left(\frac{\pi p}{l_x} \right) + 2a_6 \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^3, \\
 b_4 &= a_3 \left(\frac{\pi p}{l_x} \right) - a_7 \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^3, \\
 b_5 &= a_1 + a_9 \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^2, \\
 b_6 &= -a_{10} \left(\frac{\pi p}{l_x} \right) + a_6 \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^3, \\
 b_7 &= -a_{17} \left(\frac{\pi p}{l_x} \right) - 2a_7 \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^3, \\
 b_8 &= a_8 - a_{11} \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^2 + a_{15} \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^4, \\
 b_9 &= -a_8 + a_{12} \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^2 - a_{16} \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^4, \\
 b_{10} &= a_8 - a_{14} \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^2 + a_{13} \left(\frac{\pi p}{l_x} \right)^4.
 \end{aligned}$$

2 Численные расчеты

Численные расчеты проводились для трехслойной пластины, пакет которой составлен из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, толщины слоев $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,2$ м. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью $q = -12$ МПа, размеры пластины $l_x = 1$ м. Нагрузка подбиралась таким образом, чтобы максимальные интенсивности деформаций не превышали трех пределов для несущих слоев и пяти пределов для заполнителя, следовательно, при данной нагрузке деформации остаются в рамках теории малых упругопластических деформаций.

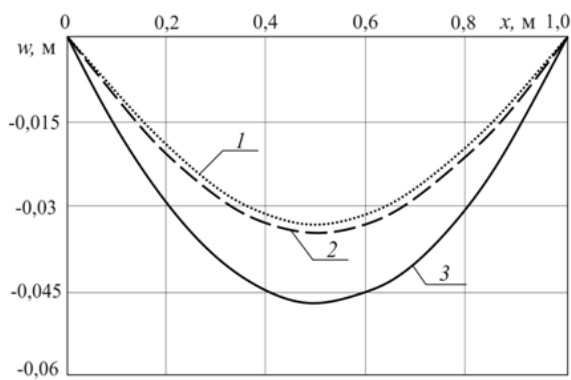
При определении влияния температуры на упругие характеристики материала несущих слоев принималась формула Белла. Принимаем, что для рассматриваемой пластины теплотой, ушедшей на нагревание внешнего металлического слоя, пренебрегаем, так как слой достаточно тонкий и обладает малой теплоемкостью. Температура этого слоя принимается равной температуре заполнителя в месте склейке, т. е. $T_1 = T_3(c, t)$. Вся теплота, воспринимаемая пластиной за время t , идет на нагревание заполнителя. Температура второго несущего слоя также не изменяется по толщине и принимается равной температуре заполнителя в месте их склейки $T_2 = T_3(-c, t)$. Численные исследования проводились при интенсивности теплового потока $q_t = 5000$ Дж/(м²·с).

Рассмотрим влияние температуры на прогибы и продольные перемещения в несущих слоях, которые представлены на рисунке 2.1 а), б). Здесь и далее 1 – упругая пластина, 2 – термоупругая, 3 – термоупругопластическая.

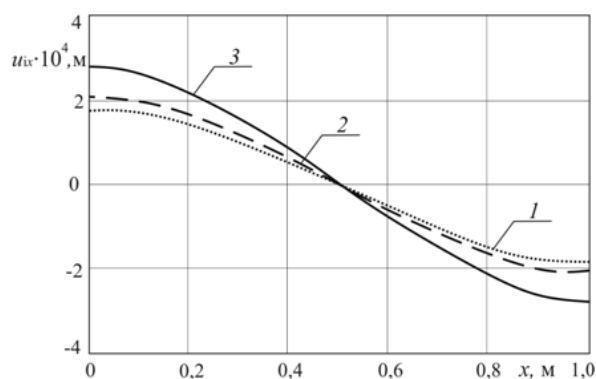
Отличие цилиндрического прогиба первого слоя упругой пластины от термоупругой составляет 5,7%. Отличие прогиба термопластической пластины от упругой – 31%, от термоупругой – 27%. Следовательно, воздействие температуры приводит к увеличению прогиба.

Увеличение продольных перемещений аналогично, отличие упругих перемещений от термоупругих составляет 4,5%, для термоупругопластических перемещений – 27% по сравнению с упругими.

На рисунке 2.2 показано изменение относительной поперечной деформации ϵ_{zz} (график в процентах) вдоль оси x ($y = 0,5 l_y$). Кривая везде отрицательна, что указывает на обжатие заполнителя, максимум достигается посередине пластины. Отличие обжатия термоупругой пластины от упругой составляет 30%, термоупругопластической от упругой – 78%.



а)



б)

Рисунок 2.1 – Перемещения в пластине при изгибе

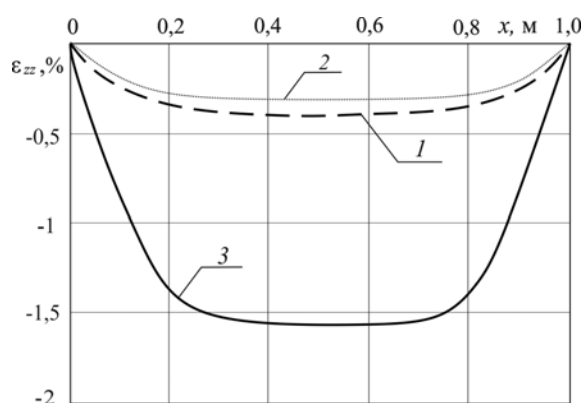


Рисунок 2.2 – Деформации обжатия в наполнителе

Заключение

Полученное в работе решение можно использовать для исследования цилиндрического изгиба термоупругопластической трёхслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем при действии температурных и силовых нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леоненко, Д.В. Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д.В. Леоненко // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.
2. Starovoitov, É.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / É.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, D.V. Leonenko // *Strength of materials*. – 2003. – Vol. 35, № 4. – P. 346–352.
3. Леоненко, Д.В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических

оболочек / Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

4. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

5. Starovoitov, É.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.

6. Леоненко, Д.В. Упругопластический изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Д.В. Леоненко, А.С. Зеленая // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб.* – Минск: БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 65–71.

7. Леоненко, Д.В. Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / Д.В. Леоненко, А.С. Зеленая // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2018. – № 2 (43). – С. 77–82.

8. Ильюшин, А.А. Упругопластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.

9. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании [монография] / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2006. – 379 с.

Поступила в редакцию 30.10.18.

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОЙ ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

С.Ф. Каморников¹, О.Л. Шеметкова²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва

ON SOME CHARACTERIZATION OF GENERAL FRATTINI SUBGROUP OF FINITE SOLUBLE GROUP

S.F. Kamornikov¹, O.L. Shemetkova²

¹F. Scorina Gomel State University

²Plekhanov Russian University of Economics, Moscow

Пусть G – конечная разрешимая группа, θ – регулярный подгрупповой m -функтор и $\Phi_\theta(G)$ – пересечение всех максимальных θ -подгрупп группы G . Пусть n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда. В статье доказано, что в G существуют $4n-3k$ максимальные θ -подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_\theta(G)$.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, максимальная подгруппа, θ -подгруппа Фраттини.

Let G be a finite soluble group, θ be a regular subgroup m -functor, and $\Phi_\theta(G)$ be the intersection of all maximal θ -subgroups of G . Let n be the length of a G -series of the group $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$, and k be the number of central G -chief factors of this series. We prove that in this case G contains $4n-3k$ maximal θ -subgroups whose intersection is $\Phi_\theta(G)$.

Keywords: finite soluble group, maximal subgroup, Frattini θ -subgroup.

Введение

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы и разрешимые подгрупповые m -функторы, т. е. m -функторы, определенные на классе \mathfrak{S} всех разрешимых конечных групп.

Согласно [1], подгрупповым m -функтором называется функция θ , которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G . При этом предполагается, что если $\theta(G) = \{M_1, \dots, M_n, G\}$, то $\theta(G^\alpha) = \{M_1^\alpha, \dots, M_n^\alpha, G^\alpha\}$ для любого изоморфизма $\alpha: G \rightarrow G^\alpha$.

Подгрупповой m -функтор θ называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

1) из $N \triangleleft G$ и $M \in \theta(G)$ следует

$$MN/N \in \theta(G/N);$$

2) из $M/N \in \theta(G/N)$ следует $M \in \theta(G)$.

Если θ – подгрупповой m -функтор, то через $\Phi_\theta(G)$ обозначается *обобщенная подгруппа Фраттини* (θ -подгруппа Фраттини) группы G , которая определяется как пересечение всех подгрупп, принадлежащих $\theta(G)$. Отметим, что если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит

все максимальные подгруппы из G , то $\Phi_\theta(G) = \Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G . Так как множество всех максимальных θ -подгрупп группы G автоморфно допустимо, то $\Phi_\theta(G)$ – характеристическая подгруппа группы G .

Из основного результата работы [2] следует, что для получения подгруппы $\Phi(G)$ разрешимой группы G можно ограничиться пересечением лишь некоторых $3n$ ее максимальных подгрупп, где n – число дополняемых факторов некоторого главного ряда группы G .

Другой подход, направленный на сокращение числа максимальных подгрупп, пересечение которых дает подгруппу Фраттини, предложен В.С. Монаховым в [3], где установлено, что для любой разрешимой группы G ее подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ совпадает с пересечением всех тех максимальных подгрупп M из G , для которых выполняется равенство $MF(G) = G$ (здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G , т. е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы G).

В [4] отмеченные подходы объединены: для группы G доказано, что если n – длина G -главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n-3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$.

В данной работе этот результат распространяется на все θ -подгруппы Фраттини группы G . Наша главная цель – доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть θ – регулярный подгрупповой t -функтор и G – конечная разрешимая группа, для которой $\Phi_\theta(G) \neq G$. Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n - 3k$ максимальные θ -подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_\theta(G)$.

Для некоторых регулярных подгрупповых функторов θ условие $\Phi_\theta(G) \neq G$ выполняется для любой неединичной группы G (это имеет место, например, для подгруппового функтора θ , выделяющего в каждой группе все ее максимальные подгруппы). Однако для большинства функторов θ условие $\Phi_\theta(G) \neq G$ ограничивает группу G . В частности, если θ – регулярный подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее абнормальные максимальные подгруппы, то условие $\Phi_\theta(G) \neq G$ равносильно тому, что группа G не является нильпотентной.

Как отмечено в [4], оценка числа максимальных подгрупп, приведенная в теореме, является точной. В то же время для ряда конкретных подгрупповых функторов θ и групп G со специальными свойствами (например, для S_4 -свободных групп) она может быть улучшена.

1 Основные определения и предварительные результаты

Используются определения и обозначения, принятые в [5]. Через $\text{Soc}(G)$ обозначается цокль группы G , т. е. подгруппа группы G , порожденная всеми ее минимальными нормальными подгруппами. Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G)$, то, очевидно, $\text{Soc}(G) = N_1 N_2 \dots N_n$ – произведение n минимальных нормальных подгрупп N_1, N_2, \dots, N_n группы G . Если, кроме того, $\Phi(G) = 1$, то ввиду леммы 7.9 из [6] подгруппа $\text{Soc}(G)$ дополняема в группе G и $\text{Soc}(G) = F(G) = N_1 N_2 \dots N_n$ – произведение n дополняемых минимальных нормальных подгрупп N_1, N_2, \dots, N_n группы G .

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой (см., например, [7]).

Лемма 1.1. Пусть θ – регулярный подгрупповой t -функтор. Тогда для любой группы G справедливы утверждения:

- 1) если $N \triangleleft G$ и $N \subseteq \Phi_\theta(G)$, то $\Phi_\theta(G/N) = \Phi_\theta(G)/N$;
- 2) $\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)) = 1$ и, в частности, $\Phi(G/\Phi_\theta(G)) = 1$.

Если H – подгруппа группы G и A/B – ее нормальная секция, то говорят, что:

- 1) H покрывает A/B , если $HB \supseteq A$;
- 2) H изолирует A/B , если $H \cap A \subseteq B$;
- 3) H является дополнением секции A/B , если $HA = G$ и $H \cap A = B$.

Лемма 1.2 [8, лемма 1]. Пусть θ – регулярный подгрупповой t -функтор. Если M и S – максимальные подгруппы группы G , дополняющие один и тот же главный фактор разрешимой группы G , то из $M \in \theta(G)$ всегда следует $S \in \theta(G)$.

Через $\text{Core}_G(H)$ далее обозначается ядро подгруппы H в группе G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в подгруппе H . Напомним, что группа G называется примитивной, если она обладает такой максимальной подгруппой M , что $\text{Core}_G(M) = 1$. В этом случае подгруппа M называется примитиватором группы G .

Лемма 1.3 [5, лемма A.15.4]. Если M – максимальная подгруппа группы G , то $G/\text{Core}_G(M)$ – примитивная группа.

Из [9] следует, что разрешимая группа G примитивна тогда и только тогда, когда она представима в виде полупрямого произведения $G = NM$ минимальной нормальной подгруппы N и максимальной подгруппой M , причем $C_G(N) = N$.

Доказательство теоремы базируется также на следующих двух леммах.

Лемма 1.4 [4, лемма 2.5]. Пусть G – примитивная группа и M – ее примитиватор. Тогда существуют такие элементы $x, y, z \in G$, для которых справедливо равенство

$$M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = 1.$$

Лемма 1.5 [4, лемма 2.6]. Если M – максимальная подгруппа группы G , то существуют такие элементы $x, y, z \in G$, для которых справедливо равенство

$$M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = \text{Core}_G(M).$$

2 Доказательство теоремы

Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Ввиду условия теоремы θ -подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G отлична от G , поэтому группа $G/\Phi_\theta(G)$ не единична и длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$ больше нуля.

Рассмотрим группу $G/\Phi_\theta(G)$ и ее подгруппу $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$. Так как ввиду леммы 1.1 справедливо равенство $\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)) = 1$, то

$$\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)) \simeq \text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)).$$

Отсюда, в частности, следует, что длина $G/\Phi_\theta(G)$ -главного ряда группы

$$\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)/\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)))$$

равна n и число центральных $G/\Phi_\theta(G)$ -главных факторов этого ряда равно k . Если $\Phi_\theta(G) \neq 1$, то $|G/\Phi_\theta(G)| < |G|$, а значит, ввиду выбора группы G существуют максимальные θ -подгруппы $M_1/\Phi_\theta(G), M_2/\Phi_\theta(G), \dots, M_{4n-3k}/\Phi_\theta(G)$ группы $G/\Phi_\theta(G)$, пересечение которых есть единичная подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G)$. Но тогда отсюда следует, что $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_{4n-3k} = \Phi_\theta(G)$. При этом из регулярности подгруппового m -функтора θ следует, что $M_i \in \theta(G)$ для всех $i = 1, 2, \dots, 4n - 3k$. Пришли к противоречию с выбором группы G .

Следовательно, $\Phi_\theta(G) = 1$. Тогда ввиду утверждения 2) леммы 1.1 справедливо равенство $\Phi(G) = 1$, а потому, как отмечено выше, $\text{Soc}(G) = F(G) = N_1 N_2 \dots N_n$ – произведение n дополняемых минимальных нормальных подгрупп N_1, N_2, \dots, N_n группы G . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что подгруппы N_1, N_2, \dots, N_k центральны, а подгруппы N_{k+1}, \dots, N_n не лежат в центре группы G .

Предположим, что для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ любая максимальная подгруппа группы G , дополняющая N_i , не принадлежит $\theta(G)$. Тогда любая максимальная подгруппа группы G , принадлежащая $\theta(G)$, содержит N_i . Отсюда следует, что $N_i \subseteq \Phi_\theta(G)$. Пришли к противоречию с тем, что $\Phi_\theta(G) = 1$. Значит, для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует максимальная подгруппа группы G , дополняющая N_i и принадлежащая $\theta(G)$. Тогда по лемме 1.2 любая максимальная подгруппа группы G , дополняющая N_i , принадлежит $\theta(G)$.

Как отмечено выше, подгруппа $\text{Soc}(G)$ дополняема в G . Пусть H – дополнение к $\text{Soc}(G)$ в G . Простая проверка показывает, что подгруппа $M_i = N_1 \dots N_{i-1} \dots N_{i+1} \dots N_n H$ максимальна в G и дополняет N_i в группе G . Поэтому $M_i \in \theta(G)$. Отметим еще, что максимальная подгруппа M_i дополняет главный фактор $N_1 N_2 \dots N_i / N_1 N_2 \dots N_{i-1}$.

Рассмотрим G -главный ряд $1 = N_0 \subset N_1 \subset N_1 N_2 \subset \dots \subset N_1 N_2 \dots N_n = F(G)$ и систему определенных выше максимальных подгрупп M_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Очевидно, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ подгруппа

$$F = \text{Core}_G(M_1) \cap \text{Core}_G(M_2) \cap \dots \cap \text{Core}_G(M_n)$$

изолирует каждый главный фактор

$$N_1 N_2 \dots N_i / N_1 N_2 \dots N_{i-1}.$$

Отсюда следует, что

$$F \cap F(G) = F \cap N_1 N_2 \dots N_n \subseteq \\ \subseteq F \cap N_1 N_2 \dots N_{n-1} \subseteq \dots \subseteq F \cap N_0 = 1.$$

Предположим, что $F \neq 1$ и N – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в F . Тогда $N \subseteq \text{Soc}(G) = F(G)$, а значит, $N \subseteq F \cap F(G)$. Пришли к противоречию с тем, что $F \cap F(G) = 1$. Таким образом, $F = 1$, а значит,

$$\text{Core}_G(M_1) \cap \text{Core}_G(M_2) \cap \dots \cap \text{Core}_G(M_n) = \\ = 1 = \Phi_\theta(G).$$

Ввиду леммы 1.5 для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ существуют такие элементы $x_i, y_i, z_i \in G$, для которых справедливо равенство

$$M_i \cap M_i^{x_i} \cap M_i^{y_i} \cap M_i^{z_i} = \text{Core}_G(M_i).$$

Так как подгруппы N_1, N_2, \dots, N_k центральны в G , то максимальные подгруппы M_1, M_2, \dots, M_k нормальны в G . Поэтому $\text{Core}_G(M_1) = M_1, \text{Core}_G(M_2) = M_2, \dots, \text{Core}_G(M_k) = M_k$. Отсюда следует, что

$$\Phi_\theta(G) = \text{Core}_G(M_1) \cap \\ \cap \text{Core}_G(M_2) \cap \dots \cap \text{Core}_G(M_n) = \\ = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k \cap \\ \cap (M_{k+1} \cap M_{k+1}^{x_{k+1}} \cap M_{k+1}^{y_{k+1}} \cap M_{k+1}^{z_{k+1}}) \cap \dots \\ \cap (M_n \cap M_n^{x_n} \cap M_n^{y_n} \cap M_n^{z_n}),$$

т. е. θ -подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G представима в виде пересечения $4(n-k) + k = 4n - 3k$ максимальных подгрупп группы G . Снова пришли к противоречию с выбором группы G . \square

3 Следствия теоремы

Приведем сначала прямые следствия теоремы для конкретных регулярных подгрупповых m -функторов.

Если θ – подгрупповой m -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, то имеем

Следствие 3.1 [4, теорема 1.1]. Пусть G – разрешимая группа, n – длина G -главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда. Тогда в G существуют $4n - 3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$.

Если θ – подгрупповой m -функтор, выделяющий в каждой группе все ее абнормальные максимальные подгруппы, то $\Phi_\theta(G) = \Delta(G)$ – подгруппа Гашюца группы G [10]. Так как подгруппа $\Delta(G)$ нильпотентна, то $\Delta(G) \subseteq F(G)$. Кроме того, все G -главные факторы группы $F(G)/\Delta(G)$ являются эксцентральными. Поэтому имеем

Следствие 3.2. Пусть G – разрешимая нильпотентная группа и n – длина G -главного ряда группы $F(G)/\Delta(G)$. Тогда в G существуют $4n$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Delta(G)$.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация, т. е. класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Тогда каждая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой, факторгруппа по которой принадлежит формации \mathfrak{F} (эта подгруппа обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется \mathfrak{F} -корадикалом группы G). Максимальная подгруппа M группы G называется: 1) \mathfrak{F} -нормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$; 2) \mathfrak{F} -абнормальной, если $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Группа G называется \mathfrak{F} -совершенной, если справедливо равенство $G^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее \mathfrak{F} -абнормальные максимальные подгруппы и $\Phi_{\theta}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных подгрупп группы G (описание строения подгруппы $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ можно найти в [1], [6]).

Следствие 3.3. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация и G – разрешимая группа, не принадлежащая \mathfrak{F} . Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Delta^{\mathfrak{F}}(G))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n - 3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$.

Если N – нормальная подгруппа группы G , то полный прообраз подгруппы Фиттинга $F(G/N)$ будем обозначать через $F(G \bmod N)$, а полный прообраз подгруппы Фраттини $\Phi(G/N)$ – через $\Phi(G \bmod N)$.

Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее \mathfrak{F} -нормальные максимальные подгруппы и $\Phi_{\theta}(G)$ – пересечение всех \mathfrak{F} -нормальных максимальных подгрупп группы G . Как отмечено в [7], справедливо равенство $\Phi_{\theta}(G) = \Phi(G \bmod G^{\mathfrak{F}})$. Отсюда, с учетом следствия 3.1, имеем

Следствие 3.4. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация и G – разрешимая группа, которая не является \mathfrak{F} -совершенной. Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее \mathfrak{F} -нормальные максимальные подгруппы. Если n – длина G -главного ряда группы

$$F(G \bmod G^{\mathfrak{F}}) / \Phi(G \bmod G^{\mathfrak{F}}),$$

а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n - 3k$

максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_{\theta}(G)$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π , и $\Phi_{\theta}(G) = \Phi_{\pi}(G)$ – пересечение всех максимальных θ -подгрупп группы G . Простая проверка показывает, что подгрупповой t -функтор θ является регулярным. Кроме того, имеет место равенство

$$\Phi_{\theta}(G) = \Phi(G \bmod O_{\pi}(G)).$$

Следствие 3.5. Пусть π – некоторое множество простых чисел, θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π , и G – конечная разрешимая πd -группа. Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi(G \bmod O_{\pi}(G)))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n - 3k$ максимальные θ -подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_{\theta}(G)$.

В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p и θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на p , θ -подгруппа Фраттини $\Phi_{\theta}(G)$ группы G совпадает с введенной Дескинсом в [11] подгруппой $\Phi_p(G)$.

Следствие 3.6. Пусть p – некоторое простое число, θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на p , и G – конечная разрешимая pd -группа. Если n – длина G -главного ряда группы

$$\text{Soc}(G/\Phi(G \bmod O_p(G))),$$

а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n - 3k$ максимальные θ -подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_{\theta}(G)$.

Отметим, что другая характеристика подгруппы $\Phi(G \bmod O_p(G))$ в виде пересечения четырех p -префраттиниевых подгрупп приведена в работе [12].

Используем теперь теорему для оценки порядков групп G и $\Phi_{\theta}(G)$.

Следствие 3.7. Пусть θ – регулярный подгрупповой t -функтор и G – конечная разрешимая группа, для которой $\Phi_{\theta}(G) \neq G$. Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi_{\theta}(G))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то:

$$1) |\Phi_{\theta}(G)|^2 \geq \frac{|G|}{|\text{Soc}(G/\Phi_{\theta}(G))|} \times$$

$$\times \frac{1}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3};$$

$$2) |G| \leq |\Phi_\theta(G)|^2 \cdot |\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))| \times$$

$$\times |\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3.$$

Доказательство. Подгруппа $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$ представима в виде

$$\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) = (N_1/\Phi_\theta(G)) \cdot \dots \cdot (N_n/\Phi_\theta(G)),$$

где $N_1/\Phi_\theta(G), \dots, N_n/\Phi_\theta(G)$ – дополняемые минимальные нормальные подгруппы группы $G/\Phi_\theta(G)$, причем подгруппы $N_1/\Phi_\theta(G), \dots, N_k/\Phi_\theta(G)$ центральны в $G/\Phi_\theta(G)$, а подгруппы $N_{k+1}/\Phi_\theta(G), \dots, N_n/\Phi_\theta(G)$ не лежат в центре группы $G/\Phi_\theta(G)$. Ввиду теоремы существуют максимальные θ -подгруппы $M_1/\Phi_\theta(G), \dots, M_n/\Phi_\theta(G)$ группы $G/\Phi_\theta(G)$, дополняющие в $G/\Phi_\theta(G)$ соответственно подгруппы $N_1/\Phi_\theta(G), \dots, N_n/\Phi_\theta(G)$, и для каждого $i = k+1, \dots, n$ существуют такие элементы $x_i, y_i, z_i \in G$, что

$$\begin{aligned} \Phi_\theta(G) &= M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k \cap \\ &\cap (M_{k+1} \cap M_{k+1}^{x_{k+1}} \cap M_{k+1}^{y_{k+1}} \cap M_{k+1}^{z_{k+1}}) \cap \dots \\ &\cap (M_n \cap M_n^{x_n} \cap M_n^{y_n} \cap M_n^{z_n}). \end{aligned}$$

Пусть $\alpha: G \rightarrow G/\Phi_\theta(G)$ – естественный гомоморфизм. Используя элементарное равенство $|A \cdot B| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$, где A и B – подгруппы группы

G , для подгрупп $M_1, \dots, M_k, M_{k+1}, M_{k+1}^{x_{k+1}}, \dots, M_n^{z_n}$ последовательно получаем

$$\begin{aligned} |\alpha(G)| &\geq |\alpha(M_1) \cdot \alpha(M_2)| = \\ &= \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2)|} = \\ &= \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)|} \times \\ &\times \frac{|\alpha(M_3)|}{|(\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2)) \cdot \alpha(M_3)|} \geq \\ &\geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)| \cdot |\alpha(G)|}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\alpha(G)|^2 \geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)|}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} |\alpha(G)|^2 &\geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)|} = \\ &= \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3) \cap \alpha(M_4)|} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{|\alpha(M_3)| \cdot |\alpha(M_4)|}{|(\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)) \cdot \alpha(M_4)|} \geq \\ &\geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)| \cdot |\alpha(M_4)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3) \cap \alpha(M_4)| \cdot |\alpha(G)|}. \end{aligned}$$

Значит,

$$|\alpha(G)|^3 \geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)| \cdot |\alpha(M_4)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3) \cap \alpha(M_4)|}.$$

Продолжая процесс, получим окончательно

$$\begin{aligned} |\alpha(G)|^{k+4(n-k)-1} &\geq \\ &\geq \frac{\prod_{i=1}^k |\alpha(M_i)| \cdot \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j)|}{\left| \bigcap_{i=1}^k \alpha(M_i) \cap \bigcap_{j=k+1}^n (\alpha(M_j) \cap \alpha(M_j^{x_j}) \cap \alpha(M_j^{y_j}) \cap \alpha(M_j^{z_j})) \right|} \times \\ &\times \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{x_j})| \cdot \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{y_j})| \cdot \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{z_j})|. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} |\Phi_\theta(G)| &= \left| \bigcap_{i=1}^k \alpha(M_i) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^n (\alpha(M_j) \cap \right. \right. \\ &\left. \left. \cap \alpha(M_j^{x_j}) \cap \alpha(M_j^{y_j}) \cap \alpha(M_j^{z_j})) \right) \right|. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^k |\alpha(M_i)| \cdot \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j)| = \\ &= \prod_{i=1}^k |M_i/\Phi_\theta(G)| \cdot \prod_{j=k+1}^n |M_j/\Phi_\theta(G)| = \\ &= \prod_{i=1}^k |G/\Phi_\theta(G) : N_i/\Phi_\theta(G)| \times \\ &\times \prod_{j=k+1}^n |G/\Phi_\theta(G) : N_j/\Phi_\theta(G)| = \\ &= \frac{|G|^n}{|\Phi_\theta(G)|^n \cdot |\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))|}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\begin{aligned} \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{x_j})| &= \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{y_j})| = \\ &= \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{z_j})| = \frac{|G|^{n-k}}{|\Phi_\theta(G)|^{n-k}} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3}.$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} &\frac{|G|^{4n-3k-1}}{|\Phi_\theta(G)|^{4n-3k-1}} \geq \frac{|G|^{4n-3k}}{|\Phi_\theta(G)|^{4n-3k+1} \cdot |\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))|} \times \\ &\times \frac{1}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} |\Phi_\theta(G)|^2 &\geq \frac{|G|}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))|} \times \\ &\times \frac{1}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$|G| \leq |\Phi_0(G)|^2 \cdot |\text{Soc}(G/\Phi_0(G))| \times \\ \times |\text{Soc}(G/\Phi_0(G))/\text{Soc}(G/\Phi_0(G)) \cap Z(G/\Phi_0(G))|^3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Белорусская наука, 2003. – 256 с.
2. Kamornikov, S.F. Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups / S.F. Kamornikov // Int. J. Group Theory. – 2017. – Vol. 6, № 2. – P. 1–5.
3. Монахов, В.С. Замечание о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
4. Каморников, С.Ф. Об одной характеристике подгруппы Фраттини конечной разрешимой группы / С.Ф. Каморников // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, № 4. – С. 176–180.
5. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

7. Каморников, С.Ф. \mathfrak{X} -корона конечной разрешимой группы / С.Ф. Каморников, Л.А. Шеметков // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49, № 5. – С. 591–614.

8. Авдашкова, Л.П. Об одном свойстве подгрупп Фраттиниева типа / Л.П. Авдашкова, С.Ф. Каморников, О.Л. Шеметкова // Известия НАН Беларуси. Серия физ.-мат. наук. – 2014. – № 3. – С. 38–43.

9. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

10. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – P. 160–170.

11. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // Ill. J. Math. – 1961. – Vol. 5, № 2. – P. 306–313.

12. Каморников, С.Ф. О ядре p -префраттиниевой подгруппы конечной разрешимой группы / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 46–50.

Поступила в редакцию 02.01.19.

УДК 621.391:517

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАРКОВА – СТИЛТЬЕСА МЕР И СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А.Р. Миротин, И.С. Ковалёва

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE MARKOV – STIELTJES TRANSFORM OF MEASURES AND DISCRETE TIME SYSTEMS

A.R. Mirotin, I.S. Kovaliova

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается класс фильтров (систем) с дискретным временем, частотные характеристики которых являются функциями типа Маркова – Стильтеса. Анонсировано описание этих фильтров в терминах их системной функции и импульсной характеристики. В частности, отмечено, что этот класс содержит все фильтры с вполне монотонными импульсными характеристиками. Описаны свойства стационарности, каузальности, устойчивости и обратимости соответствующих систем.

Ключевые слова: преобразование Маркова – Стильтеса, фильтр, частотная характеристика, системная функция, стационарность, каузальность, устойчивая система, обратимая система

A class of discrete time filters (systems) with frequency characteristics that are functions of Markov – Stieltjes type is considered. The description of these filters in terms of their system functions and impulse responses is announced. In particular, it is noted that this class contains all filters with completely monotonic impulse responses. The properties of stationarity, causality, stability and reversibility of the corresponding systems are described.

Keywords: Markov – Stieltjes transform, filter, frequency characteristic, system function, stationary state, causality, stable system, invertible system.

Введение

В работе рассматривается класс фильтров (систем) с дискретным временем (ДВ систем) с частотной характеристикой, являющейся функцией типа Маркова – Стильтеса, то есть преобразованием Маркова – Стильтеса некоторой ограниченной меры. Анонсировано описание этих фильтров в терминах их частотной характеристики (или, что равносильно, системной функции), а также в терминах их импульсной характеристики. В частности, отмечено, что этот класс содержит все фильтры с вполне монотонными импульсными характеристиками. Обсуждаются свойства стационарности, каузальности, устойчивости и обратимости соответствующих систем. В последнем случае указан обратный оператор. Большая часть результатов приведена без доказательства. Отсутствующие доказательства предполагается опубликовать в последующих работах авторов. Отметим, что ранее авторами были исследованы свойства преобразования Маркова – Стильтеса функций в пространствах Харди $H^p(\mathbb{D})$ и Лебега $L^p(0,1)$ [1]–[4].

1 Свойства преобразования Маркова – Стильтеса мер

Всюду далее через $M^b([0,1], \mathbb{C})$ ($M^b([0,1], \mathbb{R})$) будем обозначать пространство всех ограниченных комплексных (соответственно, вещественных)

мер на $[0,1]$, а через $M_+^b([0,1])$ – его подпространство, состоящее из положительных мер. Функция распределения меры μ обозначается $\mu(t)$.

Определение 1.1 [5, глава 6]. Преобразованием Маркова – Стильтеса меры $\mu \in M^b([0,1], \mathbb{C})$ называется функция, задаваемая при $z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ соотношением

$$S\mu(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}. \quad (1.1)$$

При $z \in [1, +\infty)$ интеграл в правой части (1.1) понимается как предел

$$S\mu(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{[0,1] \cap \{|t-1/z| > \varepsilon\}} \frac{d\mu(t)}{1-tz}. \quad (1.2)$$

Теорема 1.1. Преобразование Маркова – Стильтеса меры $\mu \in M^b([0,1], \mathbb{C})$ голоморфно в области $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, а также существует п. в. на луче $[1, +\infty)$.

Следствие 1.1. Пусть $\mu \in M^b([0,1], \mathbb{C})$, $F = S\mu$. Тогда

- 1) $F \in H^p(\mathbb{D})$ при всех $p \in (0,1)$.
- 2) Пусть $p \in [1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Если

$$\int_0^1 d|\mu|(t) / (1-t)^{\varepsilon+1/q} < \infty$$

при некотором $\varepsilon \in (0, 1/p)$, то $F \in H^p(\mathbb{D})$.

3) Если $\int_0^1 d|\mu|(t)/(1-t) < \infty$, то F принадлежит диск-алгебре $A(\overline{\mathbb{D}})$. Если, к тому же, $\mu > 0$, то F не обращается в нуль на единичной окружности \mathbb{T} .

2 Описание преобразований Маркова – Стильеса мер

Этот раздел носит вспомогательный характер. В нем содержится описание функций, представимых в виде (1.1), для комплексных и положительных мер, которое нам понадобится ниже.

Лемма 2.1. Для функции $F(z)$ следующие утверждения равносильны:

1) Функция $F(z)$ аналитична в \mathbb{D} ,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

и существует положительная константа c такая, что для любых комплексных чисел λ_i и любого натурального m

$$\left| \sum_{k=0}^m \lambda_k a_k \right| \leq c \max \left\{ \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k \right| : t \in [0, 1] \right\}. \quad (2.1)$$

2) Существует мера $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$ такая, что $\|\mu\| \leq c$ и $F = S\mu$.

Напомним [6], что функция g относится к классу $R[a, b]$, если она голоморфна в открытой верхней полуплоскости, отображает эту полуплоскость в свое замыкание, а также голоморфна и положительна на $(-\infty, a)$ и голоморфна и отрицательна на (b, ∞) . При этом в силу [6, теорема П.6] эту функцию можно единственным образом представить в виде

$$g(z) = \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z},$$

где τ – ограниченная положительная регулярная борелевская мера, сосредоточенная на отрезке $[a, b]$ («представляющая мера»).

Лемма 2.2. Функция F имеет вид $S\mu$ для некоторой меры $\mu \in M_+^b([0, 1])$ если и только если выполнены следующие условия:

1) F голоморфна в $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ и положительна на интервале $(-\infty, 1)$,

2) функция $\zeta F(\zeta)$ отображает открытую нижнюю полуплоскость в свое замыкание.

3 Системы с моментными импульсными характеристиками

Далее мы пользуемся терминологией теории обработки сигналов, применяемой в [7, с. 153–159] и [8]. В частности, ниже *фильтр* Φ – это оператор $f \mapsto \Phi f$. Далее будет рассматриваться лишь случай дискретного времени (ДВ сигналы).

Фильтр Φ будем называть *стационарным*, если:

1) Φ – линейный ограниченный оператор в $\ell^2(\mathbb{Z})$;

2) Φ является инвариантным по времени, т. е. перестановочен со сдвигом:

$$\Phi(D^s f) = D^s(\Phi f)$$

для каждого момента s и каждого сигнала f , где $D^s f(n) = f(n-s)$ – оператор сдвига.

Фильтр Φ будем называть *каузальным*, если отсутствие входного сигнала до момента $s \in \mathbb{Z}$, т. е. $f(t) = 0$ для $t < s$, влечет отсутствие выходного сигнала: $(\Phi f)(t) = 0$ для $t < s$. Для инвариантного по времени фильтра это равносильно выполнению последнего условия при $s = 0$.

Фильтр Φ будем называть *устойчивым*, если он переводит ограниченные сигналы в ограниченные.

Фильтр Φ будем называть *обратимым*, если соответствующий ему линейный оператор имеет ограниченный обратный.

Последовательность $W = \Phi\delta_0$, где

$$\delta_n := (\delta_{kn})_{k \in \mathbb{Z}},$$

будем называть *импульсной характеристикой фильтра* Φ , её обратное (дискретное) преобразование Фурье $\varphi = \mathcal{F}^{-1}W$ – *частотной характеристикой фильтра* Φ , а норму $\|\varphi\|_{L^\infty}$ – его *амплитудным искажением* (через \mathcal{F} мы обозначаем преобразование Фурье на окружности \mathbb{T}).

Известно (лемма Винера), что каждый стационарный фильтр есть в точности оператор свертки с последовательностью W , т. е. имеет вид

$$\Phi_W f = f * W = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) W(n-k) \right)_{n \in \mathbb{Z}},$$

причем функция $\varphi = \mathcal{F}^{-1}W$ принадлежит $L^\infty(\mathbb{T})$. При этом для каузальности этого фильтра необходимо и достаточно выполнение условия $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$, т. е. условия $W(n) = 0$ при $n < 0$ (см., например, [7, леммы 7.2.1, 7.2.3]).

Ниже будет рассмотрен случай, когда импульсная характеристика $(W(n))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ есть последовательность

$$\left(\int_0^1 t^n d\mu(t) \right)_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

моментов некоторой меры μ (и, в частности, является вполне монотонной последовательностью). При этом возникают фильтры с частотной характеристикой $F(z)$ и системной функцией $F(1/z)$, где $F(z)$ – функция типа Маркова – Стильеса с представляющей мерой μ . Поскольку такие функции, как правило, допускают хорошие рациональные приближения (см., например, [9], [10]–[12]),

рассмотренные ниже фильтры могут хорошо аппроксимироваться фильтрами с рациональными системными функциями, которые хорошо изучены (см., например, [8], [13]).

Отметим, что для меры $\mu \in M^b([0,1], \mathbb{C})$ при $|z| < 1$

$$F(z) = S\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n, \text{ где } h(n) = \int_0^1 t^n d\mu(t).$$

Пусть $Dx(k) = x(k-1)$ – оператор сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$. Это унитарный оператор. Рассмотрим оператор

$$F(D) := \sum_{k=0}^{\infty} h(k)D^k,$$

определенный первоначально на финитных слева сигналах из $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Заметим, что на множестве плюс-сигналов (то есть на подпространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$) система $y = F(D)v$ допускает реализацию в виде следующей динамической системы:

$$\begin{cases} P_n(t) = tP_{n-1}(t) + v(n) \quad (n \in \mathbb{N}), P_0(t) = v(0), \\ y(n) = \int_0^1 P_n(t) d\mu(t). \end{cases}$$

Отметим, что уравнение состояния этой системы не зависит от меры μ , т. е. от фильтра.

Для формулировки и доказательства следующей теоремы (в части вычисления обратного оператора) необходимы некоторые сведения о функциональном исчислении, построенном в [14]–[16].

Мы будем говорить, что (вообще говоря, замкнутый плотно определенный) оператор A в банаховом пространстве X принадлежит классу $V_1(X)$, если $[0,1] \subset \rho(A)$ и для некоторого $M > 0$ выполняется неравенство

$$\|R(t, A)\| \leq \frac{M}{1-t}, \quad t \in [0,1).$$

Далее нам понадобится следующая

Лемма 3.1. Унитарные операторы в гильбертовом пространстве H принадлежат классу $V_1(H)$.

Доказательство. В силу спектральной теоремы для унитарного оператора U в H имеем при $t \in [0,1)$

$$\|(I-U)^{-1}x\|^2 = \int_{\{|\lambda|=1\}} \left| \frac{1}{t-\lambda} \right|^2 d\langle E(\lambda)x, x \rangle \leq \frac{1}{(1-t)^2} \|x\|^2,$$

где $E(\lambda)$ – спектральное разложение оператора U , $x \in H$, угловые скобки обозначают скалярное произведение в H (см., например, [17, следствие X.2.8 (II)]). Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Будем говорить также, что функция g принадлежит классу R_1 , если она принадлежит

классу $R[0,1]$ (см. определение этого класса в разделе 2) и непрерывна в точке 1. Если g есть функция класса R_1 с представляющей мерой μ , $A \in V_1(X)$, то оператор $g(A)$ определяется формулой

$$g(A) = \int_0^1 R(t, A) d\mu(t).$$

Возникающее функциональное исчисление будем называть R_1 -исчислением.

Положим $\mathcal{Q}_1 = \{\varphi \mid \varphi = 1/g, g \in R_1\}$. Известно [16], что функция φ класса \mathcal{Q}_1 имеет вид $\varphi(z) = \alpha + \beta z - f(z)$, где $f \in R_1$. В этом случае, при $A \in V_1(X)$, оператор $\varphi(A)$ с областью определения $D(A)$ определяется формулой $\varphi(A) = \alpha + \beta A - f(A)$, в которой $f(A)$ понимается в смысле R_1 -исчисления. Возникающее функциональное исчисление будем называть \mathcal{Q}_1 -исчислением.

В [16] было показано (теорема обращения), что для любой функции $g \in R_1$ и любого $A \in V_1(X)$ оператор $g(A)$ имеет левый обратный, задаваемый формулой

$$g(A)^{-1} = \varphi(A),$$

где $\varphi = 1/g$ и правая часть понимается в смысле \mathcal{Q}_1 -исчисления. При этом с точки зрения применений этой теоремы важно отметить, что коэффициенты α и β , фигурирующие в представлении $\varphi(z) = \alpha + \beta z - f(z)$ функции $\varphi = 1/g$, могут быть вычислены по формулам

$$\beta = -\frac{1}{\mu([a,b])}, \quad \alpha = \frac{1}{\mu([a,b])^2} \int_a^b t d\mu(t),$$

где μ – представляющая мера функции g , а представляющая мера функции f может быть найдена, например, с помощью формулы обращения для преобразования Стилтеса [18] (см. [16]).

Теорема 3.2. Пусть $F(z) = S\mu(z)$. Если

$$\int_0^1 \frac{d|\mu|(t)}{1-t} < \infty, \tag{3.1}$$

то оператор $F(D)$ однозначно продолжается до стационарного, каузального и устойчивого фильтра с частотной характеристикой F и амплитудным искажением $\|F\|_{H^{\infty}}$; при этом $\|F(D)\| = \|h\|_{\ell^1}$ и

$$F(D) = \int_0^1 (I - tD)^{-1} d\mu(t), \tag{3.2}$$

где интеграл Бохнера сходится по норме оператора.

При $\mu \geq 0$ условие (3.1) является также и необходимым для наличия у оператора $F(D)$

стационарного и каузального продолжения. Кроме того, в этом случае фильтр $F(D)$ обратим, и его обратный имеет вид

$$F(D)^{-1} = -\left(\frac{1}{F_1}\right)(D^{-1})D,$$

где F_1 есть функция из R_1 с представляющей мерой μ , а $(1/F_1)(D^{-1})$ понимается в смысле Q_1 -исчисления.

Преыдушая теорема показывает, что фильтры вида $F(D)$ с положительной представляющей мерой обладают хорошими свойствами. Следующая теорема описывает эти фильтры в терминах их частотной характеристики (или, что равносильно, системной функции), а также в терминах их импульсной характеристики.

Следуя [13], Z -преобразование

$$\tilde{H}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(n)z^{-n}$$

будем называть *системной функцией* стационарного фильтра $\Phi = \Phi_W$.

Пусть $\Delta := I - D^{-1}$. Рассмотрим итерированные разностные операторы

$$\Delta^n W(k) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j W(j+k) \quad (k, n \in \mathbb{Z}_+).$$

Теорема 3.3. Пусть Φ есть стационарный и каузальный фильтр с системной функцией \tilde{H} и импульсной характеристикой W . Следующие утверждения равносильны:

- 1) Φ имеет вид $F(D)$, где $F = S\mu$, $\mu \in M_+^b([0, 1])$;
- 2) функция $\tilde{H}(1/z)$ удовлетворяет условиям леммы 2.2;
- 3) $\Delta^n W(k) \geq 0$ ($k, n \in \mathbb{Z}_+$), т. е. последовательность W вполне монотонна.

При этом $F(z) = \tilde{H}(1/z)$, а W – последовательность моментов меры μ .

Теорема 3.4. Стационарный и каузальный фильтр Φ с системной функцией \tilde{H} имеет вид $F(D)$, где $F = S\mu$, $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$, тогда и только тогда, когда функция $\tilde{H}(1/z)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. При этом $F(z) = \tilde{H}(1/z)$.

Доказательство. Мы используем обозначения, введенные выше.

Необходимость. Пусть стационарный и каузальный фильтр Φ с системной функцией \tilde{H} имеет вид $F(D)$, где $F = S\mu$, $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$. Тогда по лемме Винера $\Phi f = W * f$. С другой стороны, как было отмечено выше, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n$, где $h(n) = \int_0^1 t^n d\mu(t)$. Далее

мы считаем, что $h(n) = 0$ при $n < 0$. При этом

$$\Phi f(n) = F(D)f(n) := \sum_{n=0}^{\infty} h(n)f(n-k) = h * f(n).$$

Значит, $W = h$, а потому

$$\tilde{H}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} W(n)\zeta^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\left(\frac{1}{\zeta}\right)^n = F\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Таким образом, $\tilde{H}(1/z) = F(z) = S\mu$, и функция $\tilde{H}(1/z)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1.

Достаточность. Пусть стационарный каузальный фильтр Φ таков, что $\tilde{H}(1/z)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Тогда $\tilde{H}(1/z) = S\mu(z)$, где $\mu \in M^b([0, 1], \mathbb{C})$, $z \in D$. Отсюда в силу определения \tilde{H} следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} W(n)\left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n.$$

Поэтому $W = h$, что при всех f влечет равенство $\Phi f = W * f = h * f = F(D)f$. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалева, И.С. Теорема о свертке для преобразования Маркова – Стильеса / И.С. Ковалева, А.Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 66–70.
2. Mirotin, A.R. The Markov – Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces / A.R. Mirotin, I.S. Kovalyova // Integral Transforms and Special Functions. – 2016. – Vol. 27, № 12. – P. 995–1007.
3. Mirotin, A.R. Corrigendum to our paper “The Markov-Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces” / A.R. Mirotin, I.S. Kovalyova // Integral Transforms and Special Functions. – 2017. – Vol. 28, № 5. – P. 421–422.
4. Ковалева, И.С. Обобщенный оператор Маркова – Стильеса в пространствах Харди и Лебега / И.С. Ковалева, А.Р. Миротин // Труды института математики. – 2017. – Т. 25, № 1. – С. 39–50.
5. Миротин, А.Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А.Р. Миротин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.
6. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1973. – 552 с.
7. Nikolski, N.K. Operators, Functions and System: in 2 Vol. / N.K. Nikolski; translated by A. Hartman. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2002. – Vol. 1: Hardy, Hankel, and Toeplitz. – 461 p. – (Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 92).
8. Сиберт, У.М. Цепи и сигналы системы: в 2 частях. Ч. 2. / У.М. Сиберт; пер. с англ.; под ред. И.С. Рыжака. – М.: Мир, 1988.

9. Вячеславов, Н.С. Рациональные приближения функций типа Маркова – Стилтеса в пространствах Харди H^p , $0 < p \leq \infty$ / Н.С. Вячеславов, Е.П. Мочалина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2008. – № 4. – С. 3–13.
10. Andersson, J.-E. Rational approximation to function like x^α in integral norms / J.-E. Andersson // Analysis Math. – 1988. – Vol. 14, № 1. – P. 11–25.
11. Andersson, J.-E. Best rational approximation to Markov functions / J.-E. Andersson // J. of Approximation Theory. – 1994. – Vol. 76, № 2. – P. 219–232.
12. Пекарский, А.А. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова / А.А. Пекарский // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7. – С. 121–132.
13. Papoulis, A. Signal analysis / A. Papoulis. – NY: McGraw Hill, 1977. – 431 p.
14. Миротин, А.Р. О некоторых свойствах функционального исчисления замкнутых операторов в банаховом пространстве / А.Р. Миротин, А.А. Атвиновский // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 63–67.
15. Атвиновский, А.А. Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 5. – С. 3–16.
16. Атвиновский, А.А. Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 55–60.
17. Данфорд, Н. Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – М.: Мир, 1966. – 1063 с.
18. Widder, D.V. The Laplace transform / D.V. Widder. – N.J.: Princeton Univ. Press, 1946. – 412 p.
19. Ахиезер, Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н.И. Ахиезер. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 310 с.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь, № 20160825, а также при поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь для студентов и аспирантов, № 20180641.

Поступила в редакцию 05.11.18.

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ПАРОЙ НЕСОПРЯЖЕННЫХ ПОДГРУПП ПРИМАРНЫХ ИНДЕКСОВ II

В.С. Монахов, Д.А. Ходанович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE SOLVABILITY OF A FINITE GROUP WITH A PAIR OF NON-CONJUGATE SUBGROUPS OF PRIMARY INDICES II

V.S. Monakhov, D.A. Khadanovich

F. Scorina Gomel State University

Доказана разрешимость конечной группы G с двумя несопряженными максимальными подгруппами A и B , которые удовлетворяют следующим требованиям: подгруппы A и B имеют примарные индексы в G ; все собственные подгруппы в A и в B 2-нильпотентны. Кроме того, если G S_4 -свободна и индексы подгрупп A и B взаимно просты, то 2-нильпотентность подгрупп A и B можно заменить на их разрешимость.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, 2-нильпотентная подгруппа, несопряженные подгруппы, примарный индекс.

The solvability of a finite group G with two non-conjugate maximal subgroups A and B that satisfy the following requirements has been proved: subgroups A and B have primary indices in G ; all proper subgroups of A and B are 2-nilpotent. In addition, if G is S_4 -free and the indices of the subgroups A and B are coprime, then the 2-nilpotency of the subgroups A and B can be replaced by their solvability.

Keywords: finite group, solvable group, maximal subgroup, 2-nilpotent subgroup, non-conjugate subgroups, primary index.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые терминология и обозначения стандартны и соответствуют [1]–[2].

Ранее авторы [3] установили разрешимость группы G с двумя несопряженными максимальными подгруппами A и B , которые удовлетворяют следующим требованиям: (1) подгруппы A и B имеют примарные индексы в G ; (2) все собственные подгруппы в A и в B сверхразрешимы. При доказательстве не использовалась классификация конечных простых групп. Но каждая сверхразрешимая группа 2-нильпотентна.

В настоящей работе требование (2) ослаблено до следующего ограничения: (2') все собственные подгруппы в A и в B 2-нильпотентны. Доказательство разрешимости группы G с двумя несопряженными максимальными подгруппами A и B , которые удовлетворяют требованиям (1) и (2'), использует результаты, основанные на классификации конечных простых групп. Кроме того, если индексы подгрупп A и B взаимно просты, то ограничение (2') можно заменить на разрешимость подгрупп A и B при условии, что G S_4 -свободна.

1 Используемые обозначения и результаты

Напомним, что запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной в AB подгруппой A . Будут использоваться вспомогательные

результаты, перечисленные в предыдущей работе авторов [3], а также следующие известные утверждения.

Лемма 1.1 [2, IV.5.4]. Если в группе G каждая собственная подгруппа p -нильпотентна, то либо G p -нильпотентна, либо G является p -замкнутой группой Шмидта.

Лемма 1.2 [4]. Если группа $G=AB$, где подгруппы A и B 2-разложимы с модулярными силовскими 2-подгруппами, то группа G разрешима.

Лемма 1.3 [5]. Пусть H – подгруппа группы G и $|G:H|=p^a$, где p – нечетное простое число. Если подгруппа H 2-нильпотентна, то группа G разрешима.

Лемма 1.4 [6, теорема A]. Предположим, что в группе G существует π -холлова подгруппа. Если $2 \notin \pi$, то любые две π -холловы подгруппы сопряжены.

2 Достаточное условие разрешимости группы с парой несопряженных максимальных подгрупп

Теорема 2.1. Пусть A и B – несопряженные максимальные подгруппы в группе G . Предположим, что выполняются следующие требования:

(1) A и B имеют примарные индексы в G ;

(2) все собственные подгруппы в A и в B 2-нильпотентны.

Тогда группа G разрешима.

Доказательство. Предположим, что группа неразрешима и пусть G – контрпример

минимального порядка. Согласно лемме 1.1 подгруппы A и B либо 2-нильпотентны, либо являются 2-замкнутыми группами Шмидта четного порядка. Пусть

$$|G : A| = p^a, |G : B| = q^b, p \geq q,$$

тогда $G = AP = BQ$, где P и Q – силовские p - и q -подгруппы группы G .

Предположим, что $q > 2$. Если подгруппа B 2-нильпотентна, то $G = BQ$ разрешима по лемме 1.3, противоречие. Поэтому $B = [B_2]R$ – 2-замкнутая группа Шмидта четного порядка и B_2 – силовская 2-подгруппа группы G . Аналогично, $A = [A_2]T$ – 2-замкнутая группа Шмидта четного порядка и A_2 – силовская 2-подгруппа группы G . Поскольку группа G не 2-замкнута и подгруппы A, B максимальны, то

$$A = N_G(A_2), B = N_G(B_2), A = B^g, g \in G,$$

противоречие. Следовательно, $q = 2$.

Предположим, что $p > q = 2$. Если подгруппа A 2-нильпотентна, то $G = AP$ разрешима по лемме 1.3, противоречие. Поэтому $A = [A_2]T$ – 2-замкнутая группа Шмидта четного порядка, $A = N_G(A_2)$ и A_2 – силовская 2-подгруппа группы G . Согласно [7, следствие 3.5.1] $|T| = 3$ или 7. Из [3, лемма 2.2] следует, что $A_2 \in \{E_4, E_8, Q\}$, где Q – группа кватернионов порядка 8, а E_n – элементарная абелева группа порядка n . Поэтому все подгруппы из A_2 нормальны в A_2 . Согласно [8, теорема 3.5] группа $G = BQ = B_2A_2$ разрешима, противоречие. Поэтому предположение неверно и $p = q = 2$.

Теперь P и Q – силовские 2-подгруппы группы G . Если A – 2-замкнутая группа Шмидта четного порядка, то из равенства $G = AP$ следует, что группа G бипримарна и по теореме Бернсайда разрешима, противоречие. Поэтому A – 2-нильпотентная группа. Аналогично, B – 2-нильпотентная группа. Пусть $A = [A_2]A_2$, $B = [B_2]B_2$. Если A_2 нормальна в G , то G/A_2 будет 2-группой и G разрешимой, противоречие. Поэтому $N_G(A_2) = A$. Аналогично, $N_G(B_2) = B$. Так как A_2 и B_2 – 2'-холловы подгруппы группы G , то по лемме 1.4 они сопряжены. Но тогда и их нормализаторы сопряжены, т. е. подгруппы A и B сопряжены. Противоречие с условием. \square

Следствие 2.1.1. Пусть A и B – несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы группы G . Если индексы подгрупп A и B в группе G примарны, то группа G разрешима и индекс по крайней мере одной из подгрупп A или B есть простое число.

Доказательство. Каждая сверхразрешимая группа 2-нильпотентна [2, VI.9.1]. Поэтому

применима теорема 2.1 и группа G разрешима. Если индексы обеих подгрупп не простые числа, то A и B являются подгруппами Гашноца, поэтому они сопряжены в G , [1, теорема 5.29], противоречие с условием.

Замечание 2.1. Классу всех групп с 2-нильпотентными собственными подгруппами принадлежат следующие группы: группы нечетного порядка; сверхразрешимые группы; минимальные несверхразрешимые группы; 2-замкнутые группы Шмидта. Если в доказанной теореме подгруппа A и подгруппа B изоморфны любой из перечисленных групп, то получим новые признаки разрешимости группы. Результат [9, теорема 4.1] также охватывается доказанной теоремой.

Замечание 2.2. В простой группе $PSL(2, 31)$ есть две максимальные 2-нильпотентные подгруппы порядков 2^3 и $31 \cdot 5 \cdot 3$. Их индексы равны $31 \cdot 5 \cdot 3$ и 2^3 . Поэтому в теореме требование примарности индексов даже одной из подгрупп A или B отбросить нельзя.

Замечание 2.3. В простой группе $PSL(2, 7)$ есть две максимальные подгруппы примарных индексов: симметрическая группа S_4 степени 4 и подгруппа порядка 21. В S_4 имеется не 2-нильпотентная собственная подгруппа, изоморфная знакопеременной группе A_4 степени 4. Поэтому в теореме требование 2-нильпотентности собственных подгрупп даже в одной из подгрупп A или B отбросить нельзя.

3 Группы с разрешимой холловой подгруппой примарного индекса

Если в группе G имеется разрешимая максимальная подгруппа примарного индекса, то в G существует разрешимая холлова подгруппа примарного индекса. Строение таких простых групп можно извлечь, например, из работ [10]–[12].

Нам понадобятся факторизации группы $PSL(2, q)$, которые получены в [13], они выписаны также в [14, теорема 0.8]. Приведем формулировку этого результата, следуя [15, лемма 7]. Будут использоваться следующие обозначения: Z_m , E_m и D_m – циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка m .

Лемма 3.1. Простая группа $PSL(2, p^n)$ обладает только следующими нетривиальными факторизациями:

$$(1) PSL(2, 2^n) = AB, \quad A \cong [E_{2^n}]Z_{2^n-1},$$

$$B \cong D_{2(2^n+1)} \text{ или } B \cong Z_{2^n+1}.$$

(2) Если $p > 2$ и $(p^n - 1)/2$ – нечетное число, то $PSL(2, p^n) = AB$, $A \cong [E_{p^n}]Z_{(p^n-1)/2}$, $B \cong D_{p^n+1}$.

(3) $PSL(2, 7) = AB$, либо $A \cong [Z_7]Z_3$, $B \cong D_8$ или $B \cong S_4$, либо $A \cong Z_7$, $B \cong S_4$.

(4) $PSL(2,9) = AB$, либо $A \cong [E_9]Z_4$, $B \cong A_5$,
либо $A \cong A_4$, $B \cong A_5$.

(5) $PSL(2,11) = AB$, либо $A \cong [Z_{11}]Z_5$,
 $B \cong D_{12}, A_4, A_5$, либо $A \cong Z_{11}$, $B \cong A_5$.

(6) $PSL(2,19) = AB$, $A \cong [Z_{19}]Z_9$, $B \cong D_{20}$
или $B \cong A_5$.

(7) $PSL(2,29) = AB$, либо $A \cong [Z_{29}]Z_{14}$,
 $B \cong A_5$, либо $A \cong [Z_{29}]Z_7$, $B \cong A_5$.

(8) $PSL(2,59) = AB$, $A \cong [Z_{59}]Z_{29}$, $B \cong D_{60}$
или $B \cong A_5$.

Других факторизаций с точностью до изоморфных сомножителей группа $PSL(2, p^n)$ не имеет.

Лемма 3.2. Если p – простое число и $2^n + 1 = p^m$ для некоторых натуральных чисел n и m , то $p^m = 9$ или $m = 1$.

Доказательство. Если $m = 2t$ – четное, то

$$2^n = p^m - 1 = (p^t - 1)(p^t + 1),$$

$$p^t - 1 = 2, p^t = 3, m = 2, p^m = 9.$$

Если $m = 2t + 1$ – нечетное, то

$$2^n = p^m - 1 = (p - 1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + p + 1),$$

$$p - 1 = 2^{n_1},$$

$p = 1 + 2^{n_1}$ – простое число Ферма. Поскольку

$$2^{n-n_1} = p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + p + 1 - \text{нечетное число,}$$

то $m = 1$.

Теорема 3.1. Пусть в простой группе G существует разрешимая p' -холлова подгруппа H , $p \in \pi(G)$ и P – силовская p -подгруппа из G . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если $p = 2$, то $G \cong PSL(2, r)$,

$$H \cong [Z_r]Z_{\frac{r-1}{2}}, P \cong D_{2r}, \text{ где } r = 2^n - 1 \geq 7;$$

(2) если $p = 3$, то $G \cong PSL(2, 2^3)$,

$$H \cong [E_8]Z_7, P \cong Z_9;$$

(3) если $p = 5$, то $G \cong A_5$, $H \cong A_4$, $P \cong Z_5$;

(4) если $p = 7$, то $G \cong PSL(2, 7)$, $H \cong S_4$,
 $P \cong Z_7$;

(5) если $p = 17$, то $G \cong PSL(2, 2^4)$,

$$H \cong [E_{2^4}]Z_{15}, P \cong Z_{17} \text{ или } G \cong PSL(3, 3),$$

$$H \cong [E_9]GL(2, 3), P \cong Z_{17};$$

(6) если $p > 7$, $p \neq 17$, то $p = 2^n + 1$ – простое число Ферма и $G \cong PSL(2, 2^n)$, $H \cong [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$,
 $P \cong Z_p$.

Доказательство. Согласно [10, теорема 1.1] простая группа $G = HP$ с разрешимыми подгруппами H и P взаимно простых порядков изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, 2^n)$, $n \geq 2$;

$PSL(2, q)$, $q \equiv -1 \pmod{4}$; $PSL(3, 3)$; M_{11} . Из [11, следствие 5.6] и леммы 3.1 получаем утверждения (1)–(3). Пусть теперь $p \geq 7$.

Группа $PSL(2, 2^n)$, $n \geq 2$, согласно лемме 3.1 допускает единственную факторизацию с сомножителями взаимно простых порядков:

$$PSL(2, 2^n) = ([E_{2^n}]Z_{2^n-1})Z_{2^n+1},$$

поэтому $2^n + 1 = p^m$, где p^m – порядок силовой p -подгруппы группы G . Поскольку $p \geq 7$, то, согласно лемме 3.2, $m = 1$ и p – простое число Ферма. При $p \neq 17$ соответствующие факторизации выписаны в (6). Для $p = 17$ группа $PSL(2, 2^4) = ([E_{2^4}]Z_{15})Z_{17}$ записана в (5).

Группа $PSL(2, q)$, $q \equiv -1 \pmod{4}$, при $q \geq 61$ допускает, согласно лемме 3.1, единственную факторизацию с сомножителями взаимно простых порядков:

$$PSL(2, q) = ([E_q]Z_{\frac{q-1}{2}})Z_{q+1},$$

поэтому $q + 1 = 2^s$, $p = 2$ и этот случай записан в (1). При $q < 61$ только $PSL(2, 7) = S_4 Z_7$ удовлетворяет условиям, что записано в (4).

Известно [16, теорема 2], [17], что $PSL(3, 3) = ([E_9]GL(2, 3))Z_{17}$, поэтому $p = 17$, это записано в (5).

Если $G = M_{11}$, то $H \cong M_{10}$ [12, теорема 1 (d)]. Но $(M_{10})' \cong A_6$, поэтому H неразрешима и группа M_{11} исключается. \square

Следствие 3.1.1. Пусть p – нечетное простое число и p не является числом Ферма. Если в группе G существует 2-замкнутая p' -холлова подгруппа, то G разрешима.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . Пусть P – силовская p -подгруппа, H – p' -холлова подгруппа группы G . Тогда $G = PH$ и по условию $H = [Q]K$ – 2-замкнута, где Q – силовская 2-подгруппа, $K = \{2, p\}'$ -холлова подгруппа группы G . Пусть N – минимальная нормальная в G подгруппа. Так как $(|P|, |H|) = 1$, по [16, лемма 1] $N = (N \cap P)(N \cap H)$, подгруппа N удовлетворяет условиям доказываемого следствия. Если $N < G$, то по индукции N разрешима. Так как фактор-группа G/N тоже удовлетворяет условиям доказываемого следствия, то G/N разрешима по индукции. Значит, G разрешима. Теперь считаем, что $G = N$ – простая группа. Поскольку p' -холлова подгруппа H разрешима, то применима теорема 3.1, по которой p – простое число Ферма. Противоречие. \square

Следствие 3.1.2. Если в S_4 -свободной группе G существуют 2'-холлова подгруппа, то G разрешима.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы. Поскольку условия следствия наследуют подгруппы и фактор-группы, то можно считать, что G – простая группа. Согласно теореме 3.1 группа G изоморфна $PSL(2, r)$, где $r=2^n-1$ – простое число Мерсенна. Так как $r^2-1=(2^n-1)^2-1=2^{2n}-2^{n+1}+1-1=2^{n+1}(2^{n-1}-1)$ делится на 16, то в G есть подгруппа S_4 , [2, II.8.27 (5)]. Противоречие. \square

Теорема 3.2. Пусть G – группа, $p, q \in \pi(G)$, $p > q$. Предположим, что в G существуют разрешимые p' -холлова и q' -холлова подгруппы. Тогда группа G разрешима в каждом из следующих случаев:

- (1) $\{p, q\} \neq \{7, 2\}$,
- (2) группа G S_4 -свободна.

Доказательство. Пусть P и Q – силовские p - и q -подгруппы группы G . Тогда $G = G_p P = G_q Q$ и по условию подгруппы G_p и G_q разрешимы. Пусть N – минимальная нормальная в G подгруппа. Если $p \notin \pi(N)$, то $N \leq G_p$ и N разрешима. Аналогично, если $q \notin \pi(N)$, то $N \leq G_q$ и N разрешима. Пусть $p, q \in \pi(N)$. Тогда

$$N \cap G_p = N_p \neq 1, N \cap G_q = N_q \neq 1,$$

N_p и N_q – разрешимые p' - и q' -холловы подгруппы группы N . Если $N=G$, то G – простая группа и согласно [12]

$$G = PSL(2, 7), \{p, q\} = \{7, 2\}, G_7 = S_4.$$

Но это исключается условиями. Поэтому допущение неверно и $N < G$. Теперь к N применима индукция, по которой подгруппа N разрешима. Значит, N является r -подгруппой для некоторого $r \in \pi(G)$.

Переходим к фактор-группе G/N . Если $N = P$, то $G = G_p P = G_p N$ разрешима. Поэтому $N \neq P$. Аналогично, $N \neq Q$. Следовательно,

$$PN/N \neq 1 \neq QN/N, p, q \in \pi(G/N).$$

Теперь к фактор-группе G/N применима индукция, по которой G/N разрешима. Поэтому G разрешима. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 796 p.

3. Монахов, В.С. О разрешимости конечной группы с парой несопряженных подгрупп примарных индексов / В.С. Монахов, Д.А. Ходанович // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 57–59.

4. Монахов, В.С. К двум теоремам Ведерникова / В.С. Монахов // ДАН БССР. – 1971. – Т. 15, № 10. – С. 877–880.

5. Carocca, A. Some solvability criteria for finite groups / A. Carocca, H. Matos // Hokkaido Math. J. – 1997. – Vol. 26, № 1. – P. 157–161.

6. Gross, F. Conjugacy of odd order Hall Subgroups / F. Gross // Bull. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 19, № 4. – P. 311–319.

7. Княгина, В.Н. О произведении B -группы и примарной группы / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 52–57.

8. Монахов, В.С. Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп / В.С. Монахов // В сб.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1978. – С. 50–63.

9. Miscellaneous results on supersolvable groups / K. Corradi, P.Z. Hermann, L. Hethelyi, E. Nortvath // London Mathematical Society. Lecture Note Series 387. Groups St Andrews 2009 in Bath: Vol. 1. – P. 198–212.

10. Fisman, E. On the product of two finite solvable groups / E. Fisman // J. Algebra. – 1983. – Vol. 80. – P. 517–536.

11. Arad, Z. On finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 86. – P. 522–548.

12. Guralnick, R.M. Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81. – P. 304–311.

13. Ito, N. On the factorisations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$ / N. Ito // Acta scient. math. – 1953. – № 15. – P. 79–84.

14. Монахов, В.С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов // В кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 70–100.

15. Монахов, В.С. О перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта из некоторого ее добавления / В.С. Монахов, Е.В. Зубей // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 145–154.

16. Монахов, В.С. Произведение бипримарной и 2-разложимой групп / В.С. Монахов // Матем. зам. – 1978. – Т. 23, вып. 5. – С. 641–649.

17. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985.

Поступила в редакцию 27.12.18.

УДК 517.977

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Е.А. Ружицкая, Г.Л. Карасёва

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

APPLICATION OF THE PROBLEM OF SPEED FOR REALIZING OF A GIVEN MOTION OF A DYNAMIC SYSTEM

E.A. Ruzhitskaya, G.L. Karaseva

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается задача осуществления заданного движения динамической системы. С использованием методов оптимального управления вычисляются значения оптимальной обратной связи с помощью решения специальной вспомогательной задачи оптимального управления – задачи быстрогодействия. Результаты иллюстрируются на примере динамической системы второго порядка, осуществляющей предельный цикл.

Ключевые слова: стабилизация, оптимальная обратная связь, динамическая система, задача быстрогодействия, задача оптимального управления, задача осуществления движений.

The problem of the given motions realization by dynamic systems is investigated. Using the optimal control methods current values of limited optimal feedbacks are calculated with the help of solution of special auxiliary optimal control problems – speed problems. The results are illustrated by the example of the second order dynamical system, realizing a limited cycle.

Keywords: stabilization, optimal feedback, dynamic system, speed problem, optimal control problem, problem of realizing given motions.

Введение

Проблема построения обратных связей, обеспечивающих заданные свойства переходных процессов, является центральной в математической теории управления [1]. Одной из основных задач теории управления является задача стабилизации, поскольку устойчивое поведение системы – одно из ее важнейших свойств [2]. Стабилизация динамических систем изучается с момента возникновения теории регулирования [3] и была исследована в работах [4], [5].

Как правило, при решении задачи стабилизации накладываются дополнительные ограничения на переходные процессы. Одним из таких ограничений является требование наибо́льшего устойчивого поведения системы.

В работе Р. Габасова и др. [6] решена задача осуществления заданных движений динамических систем. При этом для построения обратных связей были использованы две вспомогательные задачи оптимального управления: задача минимизации интенсивности управления и задача минимизации расхода топлива.

В работе [7] задача стабилизации динамической системы решалась с использованием вспомогательной задачи – задачи быстрогодействия.

В настоящей работе для решения задачи осуществления заданного движения динамической системы в качестве вспомогательной задачи оптимального управления используется задача быстрогодействия.

Работа продолжает исследования [8]–[11], в которых описаны методы реализации оптимального управления типа обратной связи с использованием теории оптимального управления. При этом структура обратной связи не задается в явном, формульном виде. Ее значения вычисляются с помощью решения специальной вспомогательной задачи оптимального управления.

1 Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему с управлением, поведение которой при $t \geq 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.1)$$

где $x = x(t)$ – n -вектор состояния системы в момент t , $u = u(t)$ – значение скалярного ограниченного управляющего воздействия $|u(t)| \leq L$, $t \geq 0$, $\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n$.

Рассмотрим движение на фазовой плоскости

$$x = x_f(t), \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

заданное кусочно-гладкой функцией $x_f(t)$, $t \geq 0$.

Движение (1.2) допустимо (осуществимо), если существует такое доступное управление $u_f(t)$, $|u_f(t)| \leq L$, $t \geq 0$, что

$$\dot{x}_f = Ax_f(t) + bu_f(t), \quad t \geq 0.$$

Пусть $G \subset R^n$ – область фазового пространства системы (1.1), внутренность которой содержит движение (1.2): $x_f(t) \in \text{int } G$, $t \geq 0$.

Функция $u = u(t, x), x \in G, t \geq 0,$ (1.3)

называется *ограниченной обратной связью, осуществляющей движение* (1.2), если

1) $u(t, x_f(t)) = u_f(t), t \geq 0;$

2) $|u(t, x)| \leq L, x \in G, t \geq 0;$

3) замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x), x(0) \in G \quad (1.4)$$

имеет решение $x(t), t \geq 0;$

4) решение $x = x_f(t), t \geq 0,$ системы (1.4)

асимптотически устойчиво.

При построении обратной связи необходимо, чтобы переходный процесс

$$x(t) \rightarrow x_f(t), t \rightarrow \infty,$$

обладал хорошими в определенном смысле характеристиками.

Построение обратных связей (1.3), обладающих указанными свойствами, является основной задачей осуществления движения [6].

Сделаем замену переменных

$$y(t) = x(t) - x_f(t),$$

$$v(t) = u(t) - u_f(t), t \geq 0.$$

Их поведение подчиняется уравнению

$$\dot{y} = Ay + bv \quad (1.5)$$

и неравенствам

$$-L - u_f(t) \leq v(t) \leq L - u_f(t), t \geq 0.$$

Таким образом, задача устойчивого осуществления движения (1.2) системой (1.1) с постоянным ограничением на управление сводится к задаче стабилизации тривиального решения $y(t) = 0, t \geq 0,$ системы (1.5) управления с переменными ограничениями [6].

Обратная связь (1.3), $t = 0, h, 2h, \dots$ называется дискретной (с периодом квантования $h > 0$), если порождаемая ей траектория замкнутой системы (1.4) с начальным условием $x(0) = x_0$ строится по следующему правилу

$$\dot{x} = Ax + bu(t), x(0) = x_0,$$

$$u(t) = u(kh, x(kh)), t \in [kh, (k+1)h], k = 0, 1, 2, \dots$$

При малых $h > 0$ качество переходных процессов в системах, замкнутых непрерывной и дискретной обратными связями, практически одно и то же. Для построения обратной связи, решающей задачу осуществления движения, будут использоваться методы оптимального управления. В качестве вспомогательной (сопровождающей) задачи оптимального управления выберем задачу быстрогодействия.

2 Сопровождающая задача оптимального управления

Выберем натуральное число $N (N > n)$, вещественные числа $h > 0, L > 0$. Положим $t^* = Nh$.

Кусочно-постоянную функцию

$$u(t), t \geq 0,$$

$$u(t) = u_j, t \in [(j-1)h, jh], j = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющую ограничению

$$|u(t)| \leq L, t \geq 0,$$

будем называть *доступным управлением*.

Пусть $\tau = kh$ – произвольный момент времени. В классе доступных управлений рассмотрим следующую задачу оптимального быстрогодействия

$$t^* \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$\dot{x} = Ax + bu, x(\tau) = z, \quad (2.2)$$

$$x(\tau + t^*) = x_f(\tau + t^*), \quad (2.3)$$

$$|u(t) - u_f(t)| \leq L, t \in T = [\tau, \tau + t^*], \tau \geq 0, \quad (2.4)$$

где τ – текущий момент времени.

Доступное управление

$$u(t | \tau, z), t \geq 0$$

назовем *допустимым*, если оно удовлетворяет ограничению (2.4), порождает такую траекторию $x(t), t \geq 0,$ системы (2.2), которая за конечное время $t^* = t^*(u)$ попадает на заданное движение (2.3).

Допустимое управление

$$u^0(t | \tau, z), t \in [0, t^*(u^0)],$$

будем называть *оптимальным по быстрдействию программным управлением, осуществляющим заданное движение* со временем быстрогодействия $t^{*0} = t^*(u^0)$ для состояния (τ, z) , если:

1) t^{*0} – наименьшее время из возможных $t^* = t^*(u)$ для допустимых управлений;

$$2) \max_{t \in [0, t^{*0}]} |u^0(t)| = \min_{u^*} \max_{t \in [0, t^{*0}]} |u^*(t)|,$$

где минимум берется по всем допустимым управлениям $u^*(t), t \in [0, t^*(u^*)]$, для которых время $t^*(u^*)$ совпадает со временем оптимального быстрогодействия t^{*0} .

Обозначим $G(\tau)$ – множество векторов $z \in R^n$, для которых задача (2.1)–(2.4) с фиксированным τ имеет решение.

Функция

$$u^0(\tau, z) = u^0(0 | \tau, z), \quad (2.5)$$

$$z \in G(\tau), \tau = kh, k = 0, 1, 2, \dots$$

называется *оптимальным (стартовым) по быстрдействию управлением типа обратной связи, осуществляющим заданное движение* (1.2).

Согласно работам [8]–[11], будем вычислять нужные значения функции (2.5) по ходу каждого процесса управления.

В качестве обратной связи (1.3), решающей задачу осуществления движения, возьмем функцию (2.5):

$$u(t, x) = u^0(t, x), x \in G(\tau), t \geq 0. \quad (2.6)$$

3 Алгоритм построения обратной связи

Пусть известны: начальное состояние $z = x_0^*$ системы (2.2), движение $x_f(t), t \geq 0$, и управление $|u_f(t)| < L < \infty, t \geq 0$.

Оптимальное управление по принципу обратной связи осуществляется следующим образом.

До начала процесса функционирования системы в момент $\tau = 0$ при выбранных значениях N, h построим оптимальное по быстродействию программное управление $u^0(t | x_0^*), t \in T$, задачи (2.1)–(2.4), соответствующее начальному состоянию x_0^* и заданному движению $x_f(t), t \geq 0$. Для решения задачи (2.1)–(2.4) можно использовать двойственный метод линейного программирования [12], так как все элементы задачи (2.1)–(2.4) известны. Алгоритм решения задачи быстродействия описан в работах [13], [7]. В момент $\tau = 0$ управление $u^*(t) = u^0(0 | x_0^*), t \in [0, h[$ подается на вход системы (2.2) и приводит ее в момент h в состояние $x^*(h | x_0^*)$.

Пусть процесс управления осуществлен на промежутке $[0, \tau - h]$ и в момент $\tau = kh$ система (2.2), замкнутая обратной связью (2.6), оказалась в состоянии $x^*(\tau | x_0^*)$. Управление $u^0(t)$ на следующем промежутке времени $[\tau, \tau + h[$ вычисляется по формуле

$$u^*(t) = u^0(t | \tau, x^*(\tau)), t \in [\tau, \tau + h[.$$

Отсюда следует, что в каждом конкретном процессе управления динамической системой нужны значения обратной связи вдоль реализовавшейся траектории $x^*(t), t \geq 0$. При этом нужны значения $u^*(t), t \geq 0$ лишь по ходу конкретного процесса управления.

4 Пример

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + u, \\ \dot{y} &= -x + u, \end{aligned} \quad (4.1)$$

которая при $u = 0$ имеет периодические движения, среди которых нет заданного предельного цикла

$$(x^* - 2)^2 + (y^* - 2)^2 = 1. \quad (4.2)$$

С помощью решения вспомогательной задачи (2.1)–(2.4) при $h = 0.32, L = 2, u_f(t) = -2, t \geq 0$ (управление, осуществляющее заданное движение) была построена ограниченная оптимальная по быстродействию обратная связь, после замыкания которой заданное движение (4.2) стало асимптотически устойчивым предельным циклом. На рисунке 4.1 показана фазовая траектория (x, y) замкнутой системы для начального состояния $z = (2; 4)$. На рисунке 4.2 представлены реализовавшиеся значения оптимальной

обратной связи. При этом время, за которое система (4.1) попала на траекторию предельного цикла (4.2) составило $\tau = 12, 24$.

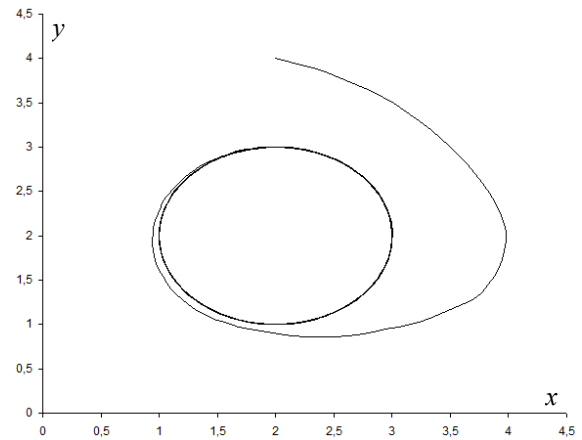


Рисунок 4.1 – Фазовая траектория замкнутой системы, полученная с помощью решения вспомогательной задачи быстродействия (2.1)–(2.4)

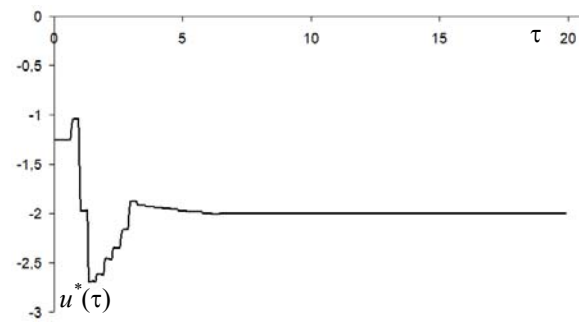


Рисунок 4.2 – Реализовавшиеся значения обратной связи, полученные с помощью решения вспомогательной задачи быстродействия (2.1)–(2.4)

В работе [6] построена оптимальная ограниченная обратная связь для системы (4.1), осуществляющая движение (4.2) с использованием сопровождающей задачи оптимального управления – задачи минимизации интенсивности управления:

$$\begin{aligned} \rho(\tau, z) &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= Ax + bu, x(\tau) = z, \\ x(\tau + \theta) &= x_f(\tau + \theta), \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$|u(t) - u_f(t)| \leq \rho, t \in T = [\tau, \tau + \theta].$$

На рисунке 4.3 показана фазовая траектория (x, y) замкнутой системы для начального состояния $z = (2; 4)$. На рисунке 4.4 представлены реализовавшиеся значения оптимальной обратной связи. При решении задачи (4.3) были выбраны следующие значения параметров сопровождающей задачи: $\theta = 8, h = 0.32, u_f(t) = -2, t \geq 0$. При этом время, за которое система (4.1)

попала на траекторию предельного цикла (4.2), составило $\tau = 48,72$.

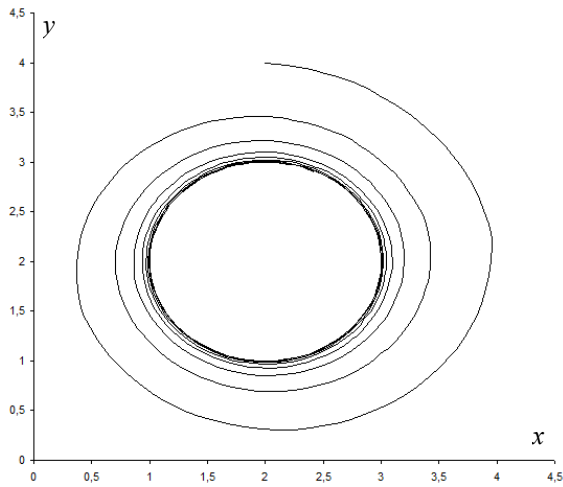


Рисунок 4.3 – Фазовая траектория замкнутой системы, полученная с помощью решения вспомогательной задачи (4.3)

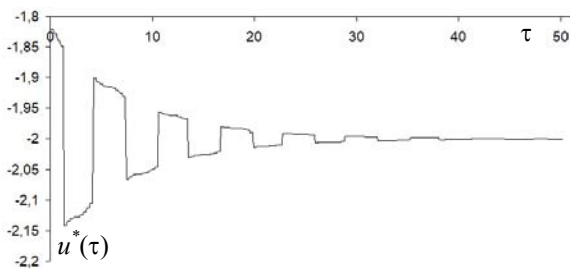


Рисунок 4.4 – Реализовавшиеся значения обратной связи, полученные с помощью решения вспомогательной задачи (4.3)

Заключение

Применение вспомогательной сопровождающей задачи оптимального управления – задачи быстрого действия, для построения оптимальных обратных связей, осуществляющих заданное движение, позволило почти в 4 раза сократить время, за которое система попала на траекторию предельного цикла (4.2) и стала осуществлять заданное периодическое движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов, Р. Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 320, № 6. – С. 1294–1299.
2. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Наука, 1966.

3. Айзерман, М.А. Лекции по теории автоматического регулирования / М.А. Айзерман. – М.: Физматгиз, 1958.

4. Габасов, Р. Решение классической задачи регулирования методами оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 6. – С. 18–29.

5. Gabasov, R. Stabilization of dynamical systems with the help of optimization methods / R. Gabasov, F.M. Kirillova, E.A. Ruzhitskaya // Nonsmooth and discontinuous problems of control and optimization. Proceedings volume from the IFAC Workshop, Chelyabinsk, Russia, 1998. – P. 35–41.

6. Габасов, Р. Синтез обратных связей для систем, осуществляющих заданные движения / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 8. – С. 26–39.

7. Ружицкая, Е.А. Стабилизация оптимальных по быстродействию систем / Е.А. Ружицкая // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 35–38.

8. Габасов, Р. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – № 4. – С. 3–19.

9. Gabasov, R. Real-time construction of optimal closable feedbacks / R. Gabasov, F.M. Kirillova // 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control. – San Francisco, CA, USA, June 30 – July 5. – San Francisco, CA, USA – 1996. – Vol. D. – P. 231–236.

10. Габасов, Р. Оптимальное управление в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Вторая международная конференция по проблемам управления (17–19 июня 2003 г.): Пленарные доклады. – М.: Институт проблем управления, 2003. – С. 20–47.

11. Габасов, Р. Оптимальное управление и наблюдение в реальном времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 3. – С. 90–111.

12. Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск: Университетское, 1984.

13. Габасов, Р. Синтез оптимальных по быстродействию систем в классе ограниченных непрерывных управлений с ограниченными производными / Р. Габасов, Е.А. Ружицкая // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1998. – № 4. – С. 75–81.

Поступила в редакцию 11.01.19.

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

А.А. Трофимук, Е.В. Зубей

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE PERMUTABILITY OF A SYLOW SUBGROUP WITH SCHMIDT SUBGROUPS OF ODD ORDER

A.A. Trofimuk, E.V. Zubei

F. Scorina Gomel State University

Группой Шмидта называется конечная нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. В работе устанавливаются неабелевы композиционные факторы группы, у которой некоторая силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, подгруппа Шмидта, силовская подгруппа, перестановочные подгруппы.

A finite non-nilpotent group G is called a Schmidt group if every proper subgroup of G is nilpotent. In this paper the non-abelian composition factors of a group in which a Sylow subgroup is permutable with Schmidt subgroups of odd order is determined.

Keywords: finite group, solvable group, Schmidt subgroup, Sylow subgroup, permutable subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют нильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Добавлением к подгруппе A в группе G называется подгруппа B такая, что $G = AB$.

Хорошо известно [1], что 2-нильпотентная группа Шмидта четного порядка сверхразрешима, а 2-замкнутая – несверхразрешима. Если в группе нет подгрупп Шмидта четного порядка, то группа 2-разложима, см. [2, теоремы 2.1, 2.4], поэтому разрешима.

Для групп Шмидта нечетного порядка аналогичные утверждения не выполняются. Например, любая $\{3, 5\}$ -группа Шмидта, как 3-нильпотентная, так и 3-замкнутая, несверхразрешима. Если в группе отсутствуют подгруппы Шмидта нечетного порядка, то группа может быть неразрешимой. В.Н. Тютянов, П.В. Бычков [3] установили, что неабелевы композиционные факторы группы, у которой нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, принадлежат множеству

$$\Omega = \{PSL(2, 2^n), n \geq 2; PSL(2, q), q = 2^k + 1;$$

$$PSU(4, 2) = PSp(4, 3);$$

$$PSp(4, 2^n), n \geq 2; Sz(2^{2n+1}), n \geq 1\}.$$

Группы, у которых силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта, исследовались в работах [4]–[7]. В работе [6] установлена r -разрешимость группы G для $r \geq 7$, у которой силовская r -подгруппа R перестановочна со всеми подгруппами Шмидта

из некоторого добавления к R в G . Для $r < 7$ перечислены все неабелевы композиционные факторы такой группы. В работе [7] доказана r -разрешимость группы G при условии, что нечетное r не является числом Ферма и силовская r -подгруппа R перестановочна с 2-нильпотентными (или 2-замкнутыми) подгруппами Шмидта четного порядка из некоторого добавления к R в G .

Вполне естественно изучить группы, у которых силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка. Доказана следующая

Теорема. Если некоторая силовская p -подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка из G , то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$ или группам из множества Ω .

1 Вспомогательные результаты

Используемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в [8], [9].

Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B . Через H^G обозначается наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H . Следуя [7], условимся называть $S_{\langle p, q \rangle}$ -группой группу Шмидта с нормальной силовской p -подгруппой и циклической силовской q -подгруппой.

Лемма 1.1 [3, следствие 2.1]. Пусть G – группа без подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат множеству Ω .

Лемма 1.2 [5]. Если простая группа G является произведением p -подгруппы P и подгруппы Шмидта S , то справедливо одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 2, G \cong PSL(2, 7), P \cong D_8, S \cong [Z_7]Z_3$;
- (2) $p = 3, G \cong SL(2, 8), P \cong Z_9, S \cong [E_{2^3}]Z_7$;
- (3) $p = 5, G \cong PSL(2, 5), P \cong Z_5, S \cong A_4 \cong [E_{2^2}]Z_3$.

Здесь через D_m, Z_m, E_{p^l} обозначаются диэдральная, циклическая группы порядка m и элементарная абелева группа порядка p^l соответственно. Знакопеременная группа степени n обозначается через A_n .

Лемма 1.3 [5, лемма 3]. Если K и D – подгруппы группы G , подгруппа D нормальна в K и $K/D \cong S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:

- (1) L – p -замкнутая $\{p, q\}$ -подгруппа;
- (2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;
- (3) L содержит $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.

Лемма 1.4 [10, лемма 4]. Пусть подгруппа A группы G перестановочна с подгруппами B_1, B_2, \dots, B_n . Тогда A перестановочна с подгруппой $\langle B_1, B_2, \dots, B_n \rangle$, порожденной ими.

Лемма 1.5 [9]. Пусть A и B – подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^gA$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.

Лемма 1.6. Если некоторая силовская p -подгруппа P группы G перестановочна с каждой подгруппой Шмидта S из некоторого добавления B в G . Тогда P перестановочна с подгруппой S^g для любого $g \in G$.

Доказательство. По условию леммы $G = PB$ и $S \leq B$. Пусть $g = ba$ – произвольный элемент из группы G , где $b \in B, a \in P$. Так как $S^b \leq B$, то $PS^b = S^bP$ и

$$\begin{aligned} PS^g &= PS^{ba} = (PS^b)^a = \\ &= (S^bP)^a = S^{ba}P = S^gP. \quad \square \end{aligned}$$

2 Доказательство теоремы

Обозначим силовскую p -подгруппу группы G из условия теоремы через P . Предположим, что теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Пусть в G нет подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда группа G удовлетворяет условию теоремы и по лемме 1.1 её неабелевы композиционные факторы принадлежат множеству Ω . Противоречие.

Значит, в группе G существует хотя бы одна подгруппа Шмидта нечетного порядка. Пусть N – собственная неединичная нормальная подгруппа

группы G . Тогда PN/N – силовская p -подгруппа группы G/N . Если в G/N нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, то G/N удовлетворяет условию теоремы. Пусть K/N – произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка из G/N и L – минимальное добавление к подгруппе N в K . По лемме 1.3 L содержит подгруппу Шмидта S нечетного порядка и $L = (S)^L$. По условию P перестановочна с подгруппой S и подгруппой Шмидта нечетного порядка S^l для любого $l \in L$. Значит, P перестановочна с $S^L = L$ по лемме 1.4 и поэтому PN/N перестановочна с $LN/N = K/N$. Таким образом, все условия теоремы наследуют фактор-группы G/N . По индукции неабелевы композиционные факторы группы G/N принадлежат списку простых групп из заключения теоремы.

Предположим, что в N нет подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда по лемме 1.1 неабелевы композиционные факторы группы N принадлежат множеству Ω , противоречие с выбором группы G . Поэтому пусть S_1 – произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка из N . Тогда по условию $PS_1 = S_1P$. Так как $N \cap PS_1 = (N \cap P)S_1 = P_1S_1$, где P_1 – силовская p -подгруппа из N , то по индукции неабелевы композиционные факторы группы N изоморфны $PSL(2, 7)$ или группам из множества Ω . Опять противоречие с выбором группы G .

В дальнейшем считаем, что G – простая группа. Пусть T – произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка. Предположим, что $PT < G$. Тогда P перестановочна с подгруппой T^g для любого $g \in G$ и $P^G \neq G$, либо $T^G \neq G$ по лемме 1.5. Противоречие. Поэтому $PT = G$. По лемме 1.2 возможны только следующие варианты:

- 1) $p = 2, G \cong PSL(2, 7), P \cong D_8, S \cong [Z_7]Z_3$;
- 2) $p = 3, G \cong SL(2, 8), P \cong Z_9, S \cong [E_{2^3}]Z_7$;
- 3) $p = 5, G \cong PSL(2, 5), P \cong Z_5, S \cong A_4 \cong [E_{2^2}]Z_3$.

Как видно из факторизаций, только группа $PSL(2, 7)$ представима в виде произведения силовской подгруппы и подгруппы Шмидта нечетного порядка. Поэтому $G \cong PSL(2, 7)$. Противоречие. \square

Следствие 2.1.1. Пусть G – группа, у которой нет композиционных факторов из множества Ω . Если $p > 2$ и силовская p -подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка, то G разрешима.

Доказательство. Обозначим силовскую p -подгруппу группы G из условия следствия через P . Применим индукцию по порядку группы G . Из теоремы и леммы 1.1 следует, что в группе G существует хотя бы одна подгруппа Шмидта

нечетного порядка и в G все неабелевы композиционные факторы изоморфны $PSL(2, 7)$. Пусть N – собственная неединичная нормальная в G подгруппа. Из доказательства теоремы видно, что условия следствия наследуют все фактор-группы и собственные нормальные подгруппы. Тогда по индукции фактор-группа G/N и подгруппа N разрешимы. Значит, G разрешима.

Таким образом, в группе G нет собственных нормальных подгрупп и G – простая группа, изоморфная $PSL(2, 7)$. Группа G является произведением p -подгруппы P и подгруппы Шмидта нечетного порядка по лемме 1.5. Однако, из леммы 1.2 следует, что $p = 2$. Противоречие с условием. \square

Следствие 2.1.2. Пусть в группе G существует $2'$ -холлова подгруппа B . Если некоторая силовская 2 -подгруппа P группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B , то G либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$.

Доказательство. Если в группе B нет подгрупп Шмидта, то B нильпотентна. Тогда по теореме Виландта–Кегеля группа $G = PB$ разрешима. Поэтому в дальнейшем считаем, что подгруппа B ненильпотентна.

Применим индукцию по порядку группы G . Пусть N – собственная неединичная нормальная подгруппа группы G . Тогда PN/N – силовская 2 -подгруппа группы G/N и в группе G/N существует $2'$ -холлова подгруппа BN/N . Если в BN/N нет подгрупп Шмидта, то G/N удовлетворяет условиям следствия. Пусть K/N – подгруппа Шмидта из BN/N . По тождеству Дедкинда $K = K \cap BN = (K \cap B)N$ и $K \cap B$ – добавление к подгруппе N в K . Пусть $L \leq K \cap B$ – минимальное добавление к подгруппе N в K . По лемме 1.3 L содержит подгруппу Шмидта S нечетного порядка и $L = (S)^L$. Так как $S \leq L \leq B$, то по условию P перестановочна с подгруппой S . Тогда P перестановочна с подгруппой S^g для любого $g \in G$ по лемме 1.6. По лемме 1.4 P перестановочна с $S^L = L$. Поэтому PN/N перестановочна с $LN/N = K/N$. Таким образом, все условия следствия наследуют фактор-группы G/N . По индукции G/N либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G/N изоморфны $PSL(2, 7)$.

Так как N – нормальная подгруппа группы G , $G = PB$ и $(|P|, |B|) = 1$, то по [11] $N = (N \cap P)(N \cap B)$, где $P_1 = N \cap P$ – силовская 2 -подгруппа подгруппы N , а $B_1 = N \cap B$ – $2'$ -холлова подгруппа в N . Если в B_1 нет подгрупп Шмидта, то B_1 нильпотентна и по теореме Виландта–Кегеля группа N разрешима. Будем считать, что в B_1 есть подгруппы Шмидта. Из

доказательства теоремы следует, что силовская 2 -подгруппа P_1 группы N перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B_1 . По индукции либо N разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы N изоморфны $PSL(2, 7)$. Тогда группа G удовлетворяет заключению следствия.

В дальнейшем считаем, что G – простая группа. Пусть T – произвольная подгруппа Шмидта из B . Предположим, что $PT < G$. Тогда по лемме 1.6 P перестановочна с подгруппой T^g для любого $g \in G$ и $P^G \neq G$, либо $T^G \neq G$ по лемме 1.5. Противоречие. Поэтому $PT = G$. По лемме 1.2 $G \approx PSL(2, 7)$. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. зам. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.
2. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса-2001. – 2002, секция 1. – С. 81–90.
3. Тютянов, В.Н. Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка / В.Н. Тютянов, П.В. Бычков // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 84–86.
4. Беркович, Я.Г. О перестановочности подгрупп конечной группы / Я.Г. Беркович, Э.М. Пальчик // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8, № 4. – С. 741–753.
5. Княгина, В.Н. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 130–139.
6. Монахов, В.С. О композиционных факторах конечной группы с OS -полуноормальной силовской подгруппой / В.С. Монахов, Е.В. Зубей // Труды института математики НАН Беларуси. – 2018. – Т. 26:1. – С. 90–94.
7. Монахов, В.С. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта из некоторого ее добавления / В.С. Монахов, Е.В. Зубей // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 145–154.
8. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
9. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.
10. Княгина, В.Н. Конечные группы с полуноормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
11. Монахов, В.С. Произведение бипримарной и 2 -разложимой групп / В.С. Монахов // Матем. зам. – 1978. – Т. 23, № 5. – С. 641–649.

Поступила в редакцию 20.12.18.

**ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ**

Б. Чжан, Ян Чэнь, И.П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

**THE FIRST INTEGRALS AND RATIONAL SOLUTIONS
OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A MOVING SINGULAR LINE**

B. Zhang, Y. Chen, I.P. Martynov

Y. Kupala Grogno State University

Рассматриваются нелинейные автономные дифференциальные уравнения высших порядков с подвижной особой линией. Получены первые интегралы уравнений с подвижной особой линией; нелинейные дифференциальные уравнения, для которых общими решениями будут рациональные решения уравнений с подвижной особой линией. Показано, что рациональные решения уравнений с подвижной особой линией с помощью преобразований Беклунда переходят друг в друга. Получены нелинейные дифференциальные уравнения второй или третьей степени относительно старшей производной, для которых эти рациональные решения являются общими решениями.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, резонансы, рациональные решения, первые интегралы, преобразование Беклунда, подвижная особая линия.

The nonlinear autonomous higher-order differential equations with a moving singular line are studied. The first integrals of the Chazy equation and some other equations with a moving singular line are obtained. Nonlinear differential equations, for which general solutions are rational solutions of equations with a moving singular line are obtained. It is shown that with the help of Backlund transformations, rational solutions of equations with a movable singular line can be transformed into each other. Nonlinear differential equations of the second or third degree with respect to the highest derivative are obtained, for which these rational solutions are general solutions.

Keywords: differential equations, resonances, rational solutions, first integrals, Bäcklund transform, movable singular line.

Введение

Если для автономного дифференциального уравнения

$$P(y^{(n+1)}, y^{(n)}, \dots, y', y) = 0, \quad (0.1)$$

где P – полином по $y^{(n+1)}, \dots, y', y$, искать решение в виде ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} h_k (z - z_0)^{k-s}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (0.2)$$

то, подставляя (0.2) в (0.1), получим выражение вида

$$Q(h_0)(z - z_0)^{-p} + \dots + (R(k, h_0)h_k - M_k(h_0, h_1, \dots, h_{k-1})) \times (z - z_0)^{k-p} + \dots = 0,$$

где $p \geq n + s$, $Q(h_0)$ – многочлен от h_0 , $R(k, h_0)$ – многочлен от k степени $n + 1$ с коэффициентами, зависящими от h_0 , которые находим из уравнения $Q(h_0) = 0$. Число p будем называть весом доминантных слагаемых полинома P . Коэффициенты h_k ряда (0.2) будут найдены из рекуррентной формулы

$$R(k, h_0)h_k = M_k(h_0, h_1, \dots, h_{k-1}),$$

при условии $R(k, h_0) \neq 0$. Если же при $k = r$ выполнено

$$R(r, h_0) = 0, \quad (0.3)$$

то для однозначности решений уравнения (0.1) необходимо требовать выполнения условия

$$M_r(h_0, h_1, \dots, h_{r-1}) = 0, \quad (0.4)$$

которое будем называть резонансным условием, а уравнение (0.3) – резонансным уравнением. Корни уравнения (0.3) называем резонансами. Если выполнено резонансное условие (0.4), то коэффициент h_r остается произвольным. Согласно [1] уравнение (0.3) всегда имеет корень $r = -1$.

Наборы

$$(s; h_0; -1, r_1, r_2, \dots, r_n) \quad (0.5)$$

определяют резонансную структуру исследуемого уравнения. Из работ [1]–[3] следует, что для однозначности решений уравнения (0.1) необходимо, чтобы резонансы r_1, r_2, \dots, r_n были целыми и различными числами, не равными -1 . Представляют интерес уравнения, у которых среди чисел r_1, r_2, \dots, r_n есть отрицательные (напр., [2], [4], [5]). В работе [5] приведена формула для получения рациональных решений по отрицательным резонансам. Известно классическое уравнение Шази [6] с подвижной особой линией

$$w''' = 12ww'' - 18(w')^2, \quad (0.6)$$

для которого набор (0.5) будет таким

$$(1; -1; -1, -2, -3).$$

В [7] дано обобщение уравнения (0.6) на случай полиномиальных уравнений нечетного порядка $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, имеющего набор (0.5) вида

$$(1; -1; -1, -2, -3, \dots, -2n - 1).$$

При $n = 2$ такое уравнение появляется в работах [8], [9]. Запишем его так

$$y^{(5)} = 30yy^{(4)} - 300y'y''' + 300(y'')^2. \quad (0.7)$$

В [10], [11] получены уравнения с отрицательными нетривиальными (отличными от -1) резонансами. В [11] уравнения, имеющие только один набор с нетривиальными отрицательными резонансами, отнесены в отдельный раздел, при этом аналитические свойства решений уравнений не указаны. Вопросу исследования аналитических свойств решений таких уравнений посвящена работа [12].

В [13], [14, с. 18–19] появляется уравнение третьего порядка с подвижной особой линией, у которого все резонансы отрицательны. Используя масштабное преобразование ($y = \gamma w$, γ – постоянное) это уравнение и набор (0.5) для него запишем так:

$$y'y''' = (y'')^2 - 6y^2y'' + 8y(y')^2, \quad (0.8)$$

$$(2; -3; -1, -2, -3).$$

Запишем ещё два уравнения с подвижной особой линией, содержащиеся в [13], [16] соответственно

$$(y' - y^2)y''' = (y'')^2 - 7(y')^3 + 12y^2(y')^2 - 9y^4y', \quad (0.9)$$

$$\left(1; \frac{1}{3}; -1, 1, 3\right), \left(1; -\frac{2}{3}; -1, -2, -3\right);$$

$$(y' - y^2)y''' = (y'')^2 - 6(y')^3 + 8y^3y'' - 6y^2(y')^2 - 8y^6, \quad (0.10)$$

$$(1; 1; -1, -2, 3), \left(1; \frac{1}{2}; -1, 1, 2\right), \left(1; -\frac{1}{2}; -1, -2, -3\right).$$

В [15] получено уравнение с подвижной особой линией

$$u''' = \frac{(u'' - 2uu')^2}{u' - u^2} + 4uu'' - 2(u')^2. \quad (0.11)$$

Согласно [17, с. 333] уравнение

$$y''' = \frac{3(y'')^2}{2y'} - \frac{(y')^3}{2y(y-1)} \left(-\frac{3}{4y} + \frac{1}{y-1} + 1\right), \quad (0.12)$$

также имеет подвижную особую линию.

Преобразования Беклунда [13; 21, с. 15; 22, с. 180] для уравнений (0.11) и (0.12) даны в работе [15], а для уравнений (0.6) и (0.10), (0.6) и (0.11) приведены в работе [13].

Так как согласно [18] уравнения второго порядка, содержащие функции y, y', y'' рационально,

не имеют подвижных особых линий, то, как следует из работы [19], уравнения (0.11) и (0.12) не имеют первых интегралов вида $f(y, y', y'') = C$, где f – рациональные по y, y', y'' . Однако в [20, с. 12–13] получен первый интеграл уравнения (0.11) в виде

$$(u'' - 6uu' + 4u^3)^2 + 16(u' - u^2)^3 = C_1 \cdot (u' - u^2)^2 \exp\left(4 \int u \, dz\right), \quad (0.13)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

В [23] приведены классы нелинейных дифференциальных уравнений с отрицательными резонансами, общие решения которых являются рациональными функциями. В частности, если в (0.13) положить $C_1 = 0$, то получим одно из таких уравнений.

Заметим ещё, что дифференциальные выражения

$$a = w' - w^2, \quad b = w'' - 6ww' + 4w^3, \quad (0.14)$$

$$d = w''' - 12ww'' + 18(w')^2$$

при преобразовании переменных [24]

$$w = f'(t) \cdot \omega(\tau) + \varphi(t), \quad \tau = f(t), \quad f'' = 2f'\varphi, \quad \varphi' = \varphi^2 \quad (0.15)$$

умножаются соответственно на $(f'(t))^2, (f'(t))^3, (f'(t))^4$. Значит, уравнения (0.6) и (0.11) инвариантны при преобразовании переменных вида (0.15), так как уравнение (0.11) в обозначениях (0.14) можно записать так $ad = b^2 + 16a^3$.

В обозначениях (0.14) для уравнения (0.11) надо вместо w писать u .

В данной работе решаются задачи: получить первый интеграл уравнения (0.8); получить нелинейные дифференциальные уравнения, для которых общими решениями будут рациональные решения уравнений с подвижной особой линией (0.6)–(0.10).

1 Вспомогательные предложения

Имеет место

Лемма 1.1. Рациональному решению

$$w = -\frac{1}{z - z_0} - \frac{h}{(z - z_0)^2}, \quad \forall z_0, h \quad (1.1)$$

уравнения (0.6) отвечает рациональное решение

$$u = -\frac{1}{z - z_0} - \frac{h_1}{(z - z_0)^2}, \quad h_1 = 3h, \quad (1.2)$$

уравнения (0.11).

Доказательство. Согласно [19] для уравнений (0.6) и (0.11) имеют место преобразования Беклунда

$$6w = \frac{u'' - 2u^3}{u' - u^2}, \quad u^3 - 3u^2w + 3uw' - \frac{1}{2}w'' = 0. \quad (1.3)$$

Подставляя (1.1) и (1.2) в формулы (1.3), получим тождества. \square

Лемма 1.2. Для уравнений (0.6) и (0.8), (0.6) и (0.9) преобразования Беклунда имеют вид соответственно

$$y = -3w', \quad w = \frac{y'' - 6y^2}{12y'}; \quad (1.4)$$

$$w'' = 3yw', \quad y' + 6w' = 12yw - 3y^2. \quad (1.5)$$

Доказательство.

а) Из (1.4) имеем: $y' = -3w''$, $y'' = -3w'''$. Поэтому $w = \frac{3w''' + 54(w'')^2}{36w''}$, откуда получим (0.6).

С другой стороны

$$w' = \frac{y'' - 12yy'}{12y'} - \frac{(y'' - 6y^2)y''}{12(y')^2} \equiv -\frac{1}{3}y,$$

откуда получим (0.8).

б) Из (1.5) имеем:

$$\begin{aligned} w''' &= 3y'w' + 3yw'' = \\ &= 3w'(12yw - 3y^2 - 6w') + 3yw'' = \\ &= 36w'w'y + 3yw'' - 9y^2w' - 18(w')^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$w''' = 36w'w'y + \frac{w''}{3w'} + \frac{(w'')^2}{w'} - 9w' \frac{(w'')^2}{9(w')^2} - 18(w')^2,$$

откуда получим (0.6).

С другой стороны, получим

$$\begin{aligned} y'' + 6w'' &= 12y'w + 12yw' - 6yy', \quad \text{т. е.} \\ y'' + 6yw' &= 12y'w - 6yy', \end{aligned}$$

а значит $y'' + y(12yw - y' - 3y^2) = 12y'w - 6yy'$, откуда

$$12w = \frac{y'' + 5yy' - 3y^3}{y' - y^2}. \quad (1.6)$$

Дифференцируя (1.6) и используя второе равенство из (1.5), получим (0.9). \square

2 Первый интеграл уравнения (0.8)

Теорема 2.1. Уравнение (0.8) имеет первый интеграл вида

$$b + 2av = C \cdot v \exp\left(4 \int (w + v) dz\right), \quad (2.1)$$

где функция v такова, что

$$\begin{aligned} 2v &= \sqrt[3]{2b + 2\sqrt{b^2 + 16a^3}} + \\ &+ \sqrt[3]{2b - 2\sqrt{b^2 + 16a^3}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

функции a, b, w даны формулами

$$a = -\frac{1}{144(y')^2} \left((y'' - 6y^2)^2 + 48y(y')^2 \right),$$

$$b = \frac{1}{432(y')^3} \times$$

$$\times \left((y'' - 6y^2)^3 + 72y(y')^2 (y'' - 6y^2) - 144(y')^4 \right),$$

$$w = \frac{y'' - 6y^2}{12y'}.$$

C – произвольная постоянная.

Доказательство. Так как по формулам (1.4) имеем

$$w' = -\frac{1}{3}y, \quad w = \frac{y'' - 6y^2}{12y'},$$

то

$$\begin{aligned} a &= w' - w^2 = \\ &= -\frac{1}{144(y')^2} \left((y'' - 6y^2)^2 + 48y(y')^2 \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} b &= w'' - 6ww' + 4w^3 = -\frac{1}{3}y' + 2yw + 4w^3 = \\ &= \frac{1}{432(y')^3} \times \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\times \left((y'' - 6y^2)^3 + 72y(y')^2 (y'' - 6y^2) - 144(y')^4 \right).$$

Используя формулы (1.3) и полагая $v = u - w$, получим

$$v^3 + 3av - \frac{1}{2}b = 0, \quad (2.5)$$

$$v' = 2wv - 4a - 2v^2. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.5) для v получим (2.2). Кроме этого, будем использовать формулу

$$b = a' - 4wa.$$

С помощью логарифмического дифференцирования равенства (2.1) исключим постоянную C .

Тогда учитывая (2.5) и (2.6), получим

$$\begin{aligned} b' + 2a'v + 2av' - (b + 2av) \frac{v'}{v} - \\ - 4(b + 2av)(w + v) = \\ = b' + 2a'v - b \frac{v'}{v} - 4(b + 2av)(w + v) = \\ = b' + 2v(b + 4aw) - b \left(2w - \frac{4a}{v} - 2v \right) - \\ - 4(b + 2av)(w + v) = \\ = b' - 6wb + 4a \left(\frac{b}{v} - 2v^2 \right) = \\ = b' - 6wb + 24a^2 = 0. \end{aligned}$$

При этом будем иметь

$$\begin{aligned} b' &= \frac{(y'' - 6y^2)^2 + 24y(y')^2}{144(y')^3} (y''' - 12yy') - \\ &- \frac{1}{144(y')^4} \left[\left((y'' - 6y^2)^2 + 6y^2 (y'' - 6y^2) \right) \times \right. \\ &\times \left. \left((y'' - 6y^2)^2 + 24y(y')^2 \right) + 24(y')^4 (y'' + 6y^2) \right] = \\ &= F(y) \left(y'y''' - (y'')^2 + 6y^2y'' - 12y(y')^2 \right) - \\ &- \frac{1}{6} (y'' + 6y^2), \end{aligned}$$

где

$$F(y) = \frac{1}{144(y')^4} \left((y'' - 6y^2)^2 + 24y(y')^2 \right).$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} & 6wb - 24a^2 = \\ & = -\frac{1}{144(y')^4} \left[4y(y')^2 \left((y'' - 6y^2)^2 + 24y(y')^2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + 24(y')^4 (y'' + 6y^2) \right] = \\ & = -4y(y')^2 F(y) - \frac{1}{6}(y'' + 6y^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & b' - 6wb + 24a^2 = \\ & = F(y) \left(y'y''' - (y'')^2 + 6y^2 y'' - 12y(y')^2 \right) - \\ & - \frac{1}{6}(y'' + 6y^2) + 4y(y')^2 \cdot F(y) + \frac{1}{6}(y'' + 6y^2) = \\ & = F(y) \cdot \left(y'y''' - (y'')^2 + 6y^2 y'' - 8y(y')^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$F(y) \cdot \left(y'y''' - (y'')^2 + 6y^2 y'' - 8y(y')^2 \right) = 0.$$

Значит, для уравнения (0.8) интегрирующим множителем будет функция $F(y)$. \square

Замечание 2.1. Очевидно, что используя формулы (1.5) и (1.6), можно получить выражения для a и b , соответствующие уравнению (0.9), а затем построить первый интеграл вида (2.1). Аналогично для уравнения (0.10) для получения выражений для a и b можно использовать преобразование Беклунда, приведенные в [13]:

$$y = \frac{w'}{2w}, \quad 12w = \frac{y'' + 6yy' + 4y^3}{y' - y^2}.$$

3 Неполиномиальные дифференциальные уравнения, для которых рациональные решения уравнений (0.8)–(0.10) являются общими решениями

Имеет место следующая теорема

Теорема 3.1. Рациональные решения

$$\begin{aligned} & y = -\frac{3}{(z - z_0)^2} - \frac{6h}{(z - z_0)^3}, \\ & y = -\frac{2(z - z_0) + 6h}{3(z - z_0)^2 + 6h(z - z_0)}, \quad (3.1) \\ & y = -\frac{(z - z_0) + 2h}{2\left((z - z_0)^2 + h(z - z_0)\right)}, \quad \forall z_0, h \end{aligned}$$

соответственно уравнений (0.8)–(0.10), являются общими решениями дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} & 2(3yy'' - 6(y')^2 - 3y^3) = (y'' + 2y^2)^3, \\ & (y'' - 9yy' + 9y^3) = 4(3y^2 - 2y')^3, \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$(y'' - 12yy' + 16y^3)^2 = 36(2y^2 - y')^3.$$

Доказательство. Пусть в формулах (3.1) $t = z - z_0$. Тогда для первого уравнения из (3.2) получим:

$$y'' + 2y^2 = \frac{72h^2}{t^6}; \quad (3.3)$$

$$3yy'' - 6(y')^2 - 2y^3 = \frac{432h^3}{t^9}.$$

Для второго уравнения из (3.2) будем иметь:

$$2y' - 3y^2 = -\frac{4h^2}{(t^2 + 2ht)^2}; \quad (3.4)$$

$$y'' - 9yy' + 9y^3 = -\frac{16h^3}{(t^2 + 2ht)^3}.$$

Аналогично для третьего уравнения:

$$y' - 2y^2 = -\frac{h^2}{(t^2 + ht)^2}; \quad (3.5)$$

$$y'' - 12yy' + 16y^3 = -\frac{6h^3}{(t^2 + ht)^3}.$$

Подставляя выражения (3.3)–(3.5) в соответствующие уравнения из (3.2), получим тождества. \square

Теорема 3.2. Рациональное решение

$$y = -\frac{1}{z - z_0} - \frac{h_1}{(z - z_0)^2} - \frac{h_2}{(z - z_0)^3}, \quad (3.6)$$

$\forall h_1, h_2, z_0,$

уравнения (0.7) является общим для нелинейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & 2(y''' - 12yy'' + 18(y')^2)^3 = \\ & = \left[18(y' - y^2)(y''' - 12yy'' + 18(y')^2) - \right. \\ & \left. - 27(y'' - 6yy' + 4y^3)^2 - 432(y' - y^2)^3 \right]^2. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $t = z - z_0$. Тогда с учетом (3.6) получим:

$$y''' - 12yy'' + 18(y')^2 = \frac{18h_2^2}{t^8}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & 2(y' - y^2)(y''' - 12yy'' + 18(y')^2) - \\ & - 3(y'' - 6yy' + 4y^3)^2 - 48(y' - y^2)^3 = \quad (3.9) \\ & = -\frac{12h_2^3}{t^{12}}. \end{aligned}$$

Исключая $\frac{h_2}{t^4}$ из формул (3.8) и (3.9), получим (3.7). \square

Замечание 3.1. Если использовать обозначение (0.14) (заменяя w на y), то уравнение (3.7) можно записать в виде

$$2d^3 = \left(18ad - 27(b^2 + 16a^3) \right)^2.$$

Замечание 3.2. В [23] показано, что рациональное решение уравнения Шази (0.6) является общим решением уравнения

$$(w'' - 6ww' + 4w^3)^2 + 16(w' - w^2)^3 = 0,$$

при этом надо считать $y = -w$.

Заключение

В работе показано, что уравнение с подвижной особой линией (0.8) имеет первый интеграл вида (2.1), где v находим из уравнения третьей степени (2.2), а функции a, b для уравнения (0.8) получим из формул (2.3) и (2.4). Показано также, что рациональные решения уравнений с подвижной особой линией с помощью преобразований Беклунда переходят друг в друга. Кроме того получены нелинейные дифференциальные уравнения второй или третьей степени относительно старшей производной, для которых указанные выше рациональные решения являются общими решениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынов, И.П. О дифференциальных уравнениях с подвижными критическими особыми точками / И.П. Мартынов // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 10. – С. 1780–1791.
2. Ablowitz, M.J. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equation of P-type. I / M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21, № 4. – P. 715–721.
3. О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, О.Н. Парманчук, В.А. Пронько // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2008. – № 1 (64). – С. 8–16.
4. Fordy, A.P. Analysing negative resonances in the Painleve test / A.P. Fordy, A. Pickering // Physics Letters A. – 1991. – Vol. 160, № 4. – P. 347–354.
5. Здунек, А.Г. О рациональных решениях дифференциальных уравнений / А.Г. Здунек, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2000. – Т. 3, № 1. – С. 33–39.
6. Shazy, J. Sur les equation differentielles du troisieme ordre et d'ordre suprieur, dont l'integrale a ses points critiques fixes / J. Shazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 4. – P. 317–385.
7. Ванькова, Т.Н. Об одном обобщении уравнения Шази с подвижной особой линией / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1085–1094.
8. Clarkson, P.A. Symmetry and the Chazy equation / P.A. Clarkson, P.J. Olver // Journal of Differential Equations. – 1996. – Vol. 124, № 1. – P. 225–246.
9. Cosgrove, C.M. Higher-order Painleve equations in the polynomial class II. Bureau symbol P 1 // C.M. Cosgrove // Stud. Appl. Math. – 2006. – Vol. 116, № 4. – P. 321–413.
10. Muğan, U. Non-polynomial third order equations which pass the Painleve test / U. Muğan, F. Jrad // Zeitschrift für Naturforschung A. – 2004. – Vol. 59 a, № 3. – P. 163–180.
11. Jrad, F. Non-polynomial fourth order equations which pass the Painleve test / F. Jrad, U. Muğan // Zeitschrift für Naturforschung A. – 2005. – Vol. 60 a, № 6. – P. 387–400.
12. Чжан, Б. О рациональных решениях одного класса неполиномиальных дифференциальных уравнений четвертого порядка / Б. Чжан, И.П. Мартынов // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2018. – Т. 8, № 2. – С. 32–40.
13. Андреева, Т.К. Преобразования Беклунда между решениями уравнений третьего порядка / Т.К. Андреева, И.П. Мартынов // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2009. – Т. 87, № 3. – С. 37–46.
14. Ванькова, Т.Н. Об аналитических свойствах решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. Международ. науч. семинара, Минск, 10–14 сент. 2012 г. – Минск: ИМ НАНБ, 2012. – С. 80.
15. Мартынов, И.П. Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка / И.П. Мартынов // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 5. – С. 764–771.
16. Мартынов, И.П. Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве / И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 9. – С. 1640–1641.
17. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
18. Кондратеня, С.Г. К решению одной проблемы Пенлеве / С.Г. Кондратеня // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 2095–2098.
19. Чэнь, Ян. Об аналитических свойствах решений одной системы третьего порядка / Ян Чэнь, И.П. Мартынов // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2017. – Т. 7, № 3. – С. 26–32.

20. *Мартынов, И.П.* О дифференциальных уравнениях четвертого порядка с подвижной особой линией / И.П. Мартынов, Е.С. Петрович // Еругинские чтения – 2018: тез. докл. XVIII Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гродно, 15–18 мая 2018 г. – Часть 1. – Гродно: ГрГУ. – 2018. – 149 с.

21. *Цегельник, В.В.* Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа / В.В. Цегельник. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 224 с.

22. *Абловиц, М.* Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сегур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.

23. *Ванькова, Т.Н.* О дифференциальных уравнениях с отрицательными резонансами / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2008. – Т. 68, № 2. – С. 32–38.

24. *Мартынов, И.П.* О свойствах решений одного дифференциального уравнения третьего порядка / И.П. Мартынов // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 9. – С. 780–783.

Поступила в редакцию 25.10.18.

УДК 004.891

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В МЕДИЦИНСКИХ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМАХ НА БАЗЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСТОРИЧЕСКИХ ДАННЫХ

А.В. Курочкин¹, В.С. Садов¹, О.М. Демиденко²

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

OPTIMIZING THE DECISION-MAKING PROCESS IN FUZZY LOGIC MEDICAL EXPERT SYSTEMS USING HISTORICAL DATA

A.V. Kurachkin¹, V.S. Sadau¹, O.M. Demidenko²

¹Belarusian State University, Minsk

²F. Scorina Gomel State University

Наиболее популярными подходами к построению систем поддержки принятия решений являются системы нечеткого вывода и системы машинного обучения с учителем. При этом системы нечеткого вывода строятся только на формализации процесса принятия решения экспертом и не учитывают исторические данные, а системы машинного обучения выводят статистические зависимости только по набору исторических данных, и эти зависимости не поддаются формальному экспертному анализу. В работе рассматриваются возможные способы объединения этих подходов – построение и оптимизации медицинских систем нечеткого вывода на основании исторических данных.

Ключевые слова: экспертные системы, медицинские экспертные системы, нечеткая логика, машинное обучение.

Two of the most popular approaches to building decision support systems are fuzzy inference systems and supervised machine learning systems. However, fuzzy inference systems are based solely on expert decision-making process formalization and don't take historical data into account, while machine learning systems infer certain statistical dependencies based solely on historical data, and those dependencies are very hard to formally analyze reason about from an expert point of view. The possible ways of combining these two approaches – building and optimizing medical fuzzy inference systems based on historical data are considered.

Keywords: expert systems, medical expert systems, fuzzy logic, machine learning.

Введение

Активное развитие информационных технологий обусловило их внедрение в разнообразные сферы человеческой жизнедеятельности. Большой практический интерес в этом контексте представляет возможность использования интеллектуальных информационных систем в медицине. Медицинские системы обработки информации могут использоваться для упрощения диагностики, повышения эффективности проводимых диагностических, профилактических, терапевтических и других врачебных мероприятий, что позволяет своевременно и методологически более корректно оказывать медицинские услуги [1].

Большую роль во врачебной практике играют медицинские системы поддержки принятия решений и медицинские экспертные системы. В общем виде такие системы служат для повышения эффективности процесса принятия решения в контексте конкретной прикладной задачи на основании имеющихся у них знаний в формализованном виде и некоторого набора входных данных.

Структурная схема экспертной системы на базе правил представлена на рисунке 0.1.

В качестве входных данных для таких систем в медицине могут выступать результаты медицинских лабораторных исследований, данные

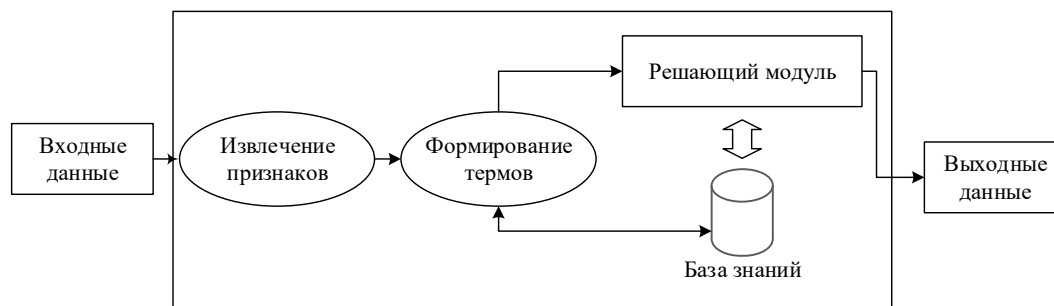


Рисунок 0.1 – Структурная схема экспертной системы

диагностических наблюдений, а также наличие или отсутствие симптоматических маркеров, отмеченных самим специалистом при проведении обследования или подготовке комплекса терапевтических мероприятий.

Непосредственно процесс принятия решения происходит в решающем модуле экспертной системы. Как правило, он основан на базе знаний – некоторой существующей формализации термов входных данных и экспертных знаний в виде, который является удобным для установления прямой взаимосвязи между входными параметрами системы и теми характеристиками, которые ей необходимо определить.

Выходные данные экспертной системы могут иметь различный вид, в зависимости от вида конкретной задачи. Как правило, системы поддержки принятия решений по набору входных данных производят набор бинарных значений по вопросам, заложенным в архитектуру системы, т.е. на конкретный вопрос в рамках модели принятия решений дается ответ «да» или «нет»; в некоторых случаях для ответа также может быть определена степень достоверности. Другие формализации параметров позволяют устанавливать взаимосвязь в виде функциональной зависимости и генерируют точечную или интервальную оценку некоторой неизвестной величины, для которых также может быть установлена степень достоверности или доверительный интервал. В контексте медицинских экспертных систем в качестве выходных данных могут рассматриваться вероятности наличия или отсутствия той или иной патологии или заболевания, временные прогнозы о течении диагностируемых заболеваний, рекомендации и параметры проведения терапевтических мероприятий и т. д.

Одним из наиболее распространенных подходов к формализации экспертных знаний и реализации решающего модуля экспертной системы являются системы нечеткого вывода [1], [2]. В их основе лежит теория нечеткой логики, которая подразумевает формулировку точечных значений и диапазонов входных параметров системы в терминах, понятных для эксперта, в виде термов – нечетких множеств для набора возможных значений входных и выходных переменных. На основании комбинации терминов стандартными логическими операциями конъюнкции и дизъюнкции, а также построения логических цепочек причина – следствие, формулируется набор правил системы. Система нечеткого вывода связывает конкретные значения входных параметров с их соответствующими терминами, на основании вида которых по сформулированным правилам определяются прогнозируемые значения выходных переменных.

Существенным недостатком решающих модулей на базе системы нечеткой логики является строгая привязка непосредственно процесса

принятия решений к виду и структуре формализованных термов и правил. На практике это означает, что принятие решений осуществляется только на основании формализации экспертных знаний и не подразумевает корректировки с использованием других источников, например, существующих исторических данных [1], [2]. Одним из известных подходов к решению этой проблемы является применение гибридных нейронечетких систем (ANFIS, Adaptive Neuro Fuzzy Inference System, адаптивная нейронечеткая система логического вывода), которые совмещают в себе возможности нейронных сетей к обучению системы и систем нечеткого вывода к формализации принятия решений по набору правил [3]. Тем не менее, как будет показано в работе, такие системы опираются преимущественно на оптимизацию внутренних параметров процесса принятия решения. В качестве альтернативы предлагается использовать нейросетевую адаптацию системы нечеткой логики с введением весовых коэффициентов для существующих правил, что позволяет в более удобной форме представлять подтверждения или опровержения для сформулированных экспертных знаний, тем самым обеспечивая формальную и прозрачную подстройку системы с течением времени.

1 Экспертные системы на базе нечеткого вывода

Экспертные системы и системы поддержки принятия решений на базе нечеткого вывода основываются на алгебраическом аппарате нечетких множеств. Нечеткое множество отличается от обычного, строгого множества тем, что элементы этого множества могут иметь больше чем 2 степени принадлежности этому множеству; чаще всего, в качестве множества принадлежностей используются вещественные числа из диапазона $[0; 1]$.

Аналогично с обычными, строгими множествами для нечетких множеств может быть определен набор стандартных алгебраических операций – объединение, пересечение, дополнение до универсума и т. д. При этом можно обеспечить выполнение условий булевой алгебры, наложив на конкретную реализацию этих операций определенные ограничения. Алгебра нечетких множеств с набором корректно реализованных операций позволяет использовать для описания элементарных высказываний алгебры логики высказываний не бинарные значения, а непосредственно нечеткие множества. При этом истинность этих высказываний также является нечетким множеством над полем возможных значений, которые могут принимать участвующие в высказывании величины.

Рассмотрим пример правил, которые оперируют нечеткими величинами, в контексте медицинской экспертной системы для определения

хориальности многоплодной беременности по результатам диагностических обследований [4]. Одно из правил в такой системе может быть сформулировано следующим образом:

ЕСЛИ (*видимость лямбда-признака в срок 11 недель* **высокая**)

И (*толщина межамниотической перегородки* – **средняя**)

ТО (*вероятность дихориальности* – **выше среднего**)

Данное правило является логической связью между входными и выходными параметрами решающего модуля. В этом правиле представлены 2 входные переменные – «видимость лямбда-признака в срок 11 недель» и «толщина межамниотической перегородки», а также одна выходная переменная – «вероятность дихориальности». Каждая из переменных имеет конечный набор возможных значений, называемых термами. Например, переменная «толщина межамниотической перегородки» имеет 5 возможных значений – «тонкая», «ниже среднего», «средняя», «выше среднего», «толстая». Конкретный набор значений переменных, участвующих в правилах, формулируется непосредственно экспертом в предметной области.

Приведенное правило является формализацией части экспертных знаний по принятию решения в рассматриваемой предметной области. Основное преимущество создания экспертных систем на базе таких правил состоит в том, что само правило и строящийся на нём процесс принятия решений является абсолютно прозрачным и понятным для специалиста в предметной области.

Подразумевается, что конкретные значения входных переменных, присутствующих в правилах, будут получены в результате обследования – например, толщина межамниотической перегородки может быть с точностью до миллиметра определена специалистом по результатам ультразвукового обследования. Для каждого из возможных значений переменных, присутствующих в правилах, определяются нечеткие множества над соответствующими строгими множествами, которые могут быть объективно измерены. Например, высказывание (*толщина межамниотической перегородки* – **средняя**) представляет собой нечеткое множество, определенное над полем возможных значений толщины межамниотической перегородки в миллиметрах. Задание нечеткого множества в таком виде позволяет для любого значения толщины определить истинность этого высказывания как принадлежность соответствующему нечеткому множеству. При этом аппарат нечетких множеств позволяет для некоторых граничных значений измерений оперировать «полумерами» – определять принадлежность в

соответствующих точках не однозначно, а с некоторой степенью достоверности. Само описание нечеткого множества также может быть получено с помощью эксперта и задается в виде параметрической функции принадлежности.

Для входных переменных, которые не могут быть формализованы и измерены в абсолютных величинах, можно вводить искусственные шкалы экспертных оценок. Например, видимость лямбда-признака может быть оценена экспертом при проведении обследования по искусственной дискретной шкале в баллах, от 1 до 10. Термы для соответствующей входной переменной могут быть определены на множестве этих экспертных оценок в баллах [2].

Система нечеткого вывода позволяет по совокупности входных переменных, нечетких множеств для термов и набору правил вывести соответствующие значения выходных переменных с использованием операций объединения и пересечения нечетких множеств в качестве реализаций соответствующих логических связок «И», «ИЛИ», «ЕСЛИ... ТО...». Наиболее популярным алгоритмом нечеткого вывода является алгоритм Такаги – Сугено – Канга – в рамках этого алгоритма по условиям в правилах и конкретным значениям принадлежности определяется нечеткое значение (от 0 до 1), по совокупности таких значений из разных условий строится нечеткое множество для выходных переменных, и, наконец, по виду нечеткого множества осуществляется дефаззификация – переход к конкретному значению [1], [2].

Существенным недостатком систем нечеткого вывода является отсутствие привязки к существующим статистическим характеристикам, присущим входным и выходным значениям переменных, участвующих в процессе принятия решения. Все зависимости устанавливаются исключительно эмпирически, только на основании опыта и знаний эксперта. Во многих случаях такая формализация является более удобной, т. к. небольшой объем имеющихся статистических и исторических данных не позволяет вывести присутствующие в данных статистические зависимости с точностью, достаточной для принятия на этих основаниях решений. С другой стороны, отсутствие связи с реальными данными означает, что на основании информации о подтверждении или опровержении тех или иных зависимостей, сформулированных экспертом, система не может подстраивать свои параметры динамически.

Альтернативным и более популярным на сегодняшний день подходом к построению систем принятия решений являются системы, опирающиеся только на статистические характеристики, присущие данным [3]. Такие экспертные системы работают на основе какого-либо метода машинного обучения с учителем.

2 Машинное обучение с учителем и нейронечеткие системы

Машинное обучение с учителем составляет группу методов установления зависимости между входными и выходными параметрами при помощи анализа достаточно большого количества существующих данных, для которых известны как входные критерии (признаки), так и значения, которые должны быть определены на выходе.

В машинном обучении с учителем подразумевается, что решаемая проблема может быть сведена к подбору параметров θ некоторой параметрической функции $f(\vec{x}, \theta): X \times \Theta \rightarrow Y$, отображающей пространство входных признаков X в пространство выходных признаков Y . Конкретный вид функции f и конфигурация присутствующих в ней параметров $\theta \in \Theta$ зависит от конкретного используемого метода машинного обучения с учителем.

Реализация целевой функции с фиксированным набором параметров называется моделью. Для поиска оптимального набора параметров вводится некоторая мера применимости конкретной модели в контексте решаемой задачи, обычно в виде функции стоимости, значение которой тем выше, чем хуже конкретная модель подходит для решения задачи. Подразумевается, что модель может служить достаточной аппроксимацией для реальной зависимости $\vec{y} = f(\vec{x})$, которая присуща набору данных в контексте решаемой задачи.

Как правило, в качестве функции стоимости используется постановка задачи по известному размеченному набору данных $\{\vec{x}_i, \vec{y}_i\}$, то есть по множеству данных, для которых известен набор входных параметров \vec{x}_i и соответствующих им выходных параметров \vec{y}_i . Наиболее популярной постановкой задачи по размеченному набору является формулировка в виде задачи о наименьших квадратах.

Таким образом, процесс обучения в машинном обучении с учителем сводится к выбору такой функции f и таких параметров модели θ , чтобы обеспечить минимум ошибки на известном размеченном наборе данных (обучающей выборке). Поиск минимума осуществляется, как правило, с использованием какого-либо итерационного метода локальной оптимизации, обычно основанного на численном вычислении производной первого и более высоких порядков функции стоимости.

Выбор модели должен обуславливаться не только видом решаемой задачи, но и необходимостью обобщения зависимостей в обучающей выборке. Например, одной из проблем в машинном обучении является переобучение – явление, когда из-за слишком близкой аппроксимации входных данных модель теряет возможность

обобщать и ведёт себя непредсказуемо для входных данных, которые отдалены от окрестности элементов обучающей выборки. Существует ряд приёмов по определению эффективности конкретной модели вне обучающей выборки, а также по предотвращению появления чрезмерно сложных моделей [2], [3], рассмотрение которых выходит за рамки данной работы.

Системы машинного обучения с учителем зачастую противопоставляются экспертным системам на базе нечеткого вывода. Если процесс принятия решений в системах нечеткого вывода является строгой формализацией реально существующих физических или эмпирических причинно-следственных связей, сформулированных экспертом, то принятие решений в системах машинного обучения с учителем осуществляется на основании причинно-следственных связей, определяемых исключительно в процессе обучения, для многих из которых может не существовать понятных для человека интерпретаций; таким образом, системы машинного обучения с учителем работают по принципу «черного ящика». С другой стороны, как уже упоминалось, само определение обучения в системах машинного обучения с учителем подразумевает определение взаимосвязей, присутствующих у реальных данных, в то время как экспертные системы на базе нечеткой логики не учитывают статистические характеристики реальных данных напрямую.

Комбинированный подход в виде адаптивной нейронечеткой системы логического вывода (ANFIS) подразумевает, что в качестве начального состояния модели в системе обучения с учителем используется система правил нечеткой логики, а задача алгоритма машинного обучения состоит в подборе оптимальных параметров функций принадлежности термов в соответствующих правилах. Таким образом, обученная нейронечеткая система осуществляет определение выходных параметров системы с использованием исходных правил системы нечеткого вывода, но регулируемые параметры, связывающие термы в этих правилах с реальными значениями, которые принимают параметры, выводятся в процессе обучения [3].

Преимущество построения процесса принятия решения на основании такой архитектуры состоит в том, что для принятия решения используются как экспертные правила, так и исторические данные. Тем не менее, основной недостаток такого подхода состоит в невозможности определить влияние того или иного правила на результат и сложности формализации полученных параметров функций принадлежности для уточнения базы правил и корректировки экспертной системы. Кроме того, сами параметры функций принадлежности, как правило, также имеют определенный методологический смысл в контексте тех правил, которые формулируются

экспертом. Нейронечеткая система подразумевает, что конкретные значения параметров функций принадлежности не влияют на корректность сформулированного правила. Тем не менее, существует ряд задач, в которых это условие не выполняется. Например, для задачи определения хориальности многоплодных беременностей те из правил, в которых используется формулировка (*толщина межамниотической перегородки – средняя*) подразумевают под этим термом конкретный диапазон значений в окрестности толщины в 2 мм, для которого, возможно, не до конца определены значения в удалении от этой границы. При этом при оптимизации такого правила на основании исторических данных в процессе обучения нейронечеткой системы может возникнуть ситуация, когда меньшую ошибку для некоторых данных вносит терм, в котором под средней толщиной подразумеваются значения, во многом отличающиеся от 2 мм. Таким образом, возникает определенное «сокрытие» реального процесса принятия решений, т. к. за понятным эксперту термом после обучения может скрываться совершенно другая привязка к реальным данным.

Для решения этой проблемы предлагается использовать оптимизацию набора правил не по функциям принадлежности термов, а с точки зрения корректности и весового коэффициента правила, а также с точки зрения выбора подмножества наиболее применимых правил по конкретным значениям входных данных.

3 Оптимизация процесса принятия решений и анализа правил в системах нечеткого вывода на основании исторических данных

Для оптимизации процесса принятия решений предлагается подход, состоящий из нескольких шагов; высокоуровневая блок-схема процедуры оптимизации представлена на рисунке 3.1.

На первом шаге экспертная система формулируется с точки зрения нечеткого вывода, как при построении обычных нечетких систем поддержки принятия решений – определяются входные и выходные переменные, для каждой из переменных определяется набор термов в виде нечетких множеств как функций принадлежности, корректных в контексте данной задачи, строится набор правил в виде «ЕСЛИ..., ТО...», связывающих входные и выходные переменные системы.

На втором шаге для каждого из правил вводится весовой коэффициент w_i , изначально принимающий значение 1. При активизации условий по алгоритму Такаги – Сугено – Канга значение принадлежности каждого условия умножается на соответствующий весовой коэффициент. Таким образом, система принятия решений становится параметрической, и в качестве регулируемых параметров выступает вектор весов правил \vec{w} .

На следующем шаге на основании набора исторических данных $\{\vec{x}_i, \vec{y}_i\}$ подбирается такой набор весов, который минимизирует ошибку системы нечеткого вывода $J(\vec{w})$, определяемую,

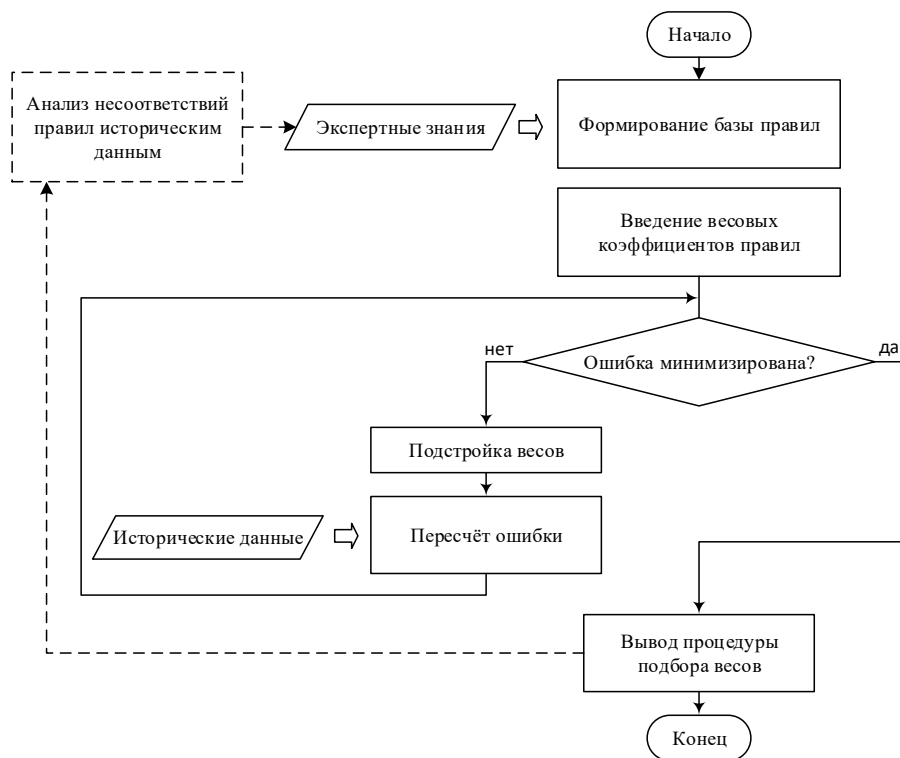


Рисунок 3.1 – Блок-схема подхода к оптимизации системы нечеткого вывода с использованием исторических данных на основании весовых коэффициентов правил

например, по методу наименьших квадратов, аналогично с системами машинного обучения с учителем. Поскольку, в отличие от моделей в машинном обучении с учителем, вычисление частных производных функции ошибки $J(\vec{w})$ в общем виде невозможно, для поиска минимума такой функции требуется использовать методы оптимизации, не использующие аппроксимации градиента. К таким методам относятся точечный перебор гиперпространства весов, а также генетические алгоритмы с использованием конкретного набора весов в качестве особи.

На выходе системы строится обычная система нечеткого вывода со взвешенными правилами. Проанализировав конкретные значения весов можно сделать вывод о корректности или некорректности тех или иных правил, включаемых в систему, для дальнейшей их доработки с экспертом. Кроме того, анализ непосредственно процесса обучения позволяет определить, какие именно элементы в выборке исторических данных подтверждают или опровергают те или иные правила системы. Достаточно часто опровержения каких-либо правил в системе нечеткого вывода могут указывать на особый характер тех исторических данных, которые привели к некорректному результату работы системы, т.е. анализ весовых коэффициентов может использоваться для решения обратной задачи поиска аномалий по индивидуальным правилам в обучающей выборке.

Использование фиксированного набора весовых коэффициентов для правил не всегда является корректным [4], [5]. В некоторых случаях требуется реализовать процесс принятия решения таким образом, чтобы из большого набора правил для конечного принятия решений выбиралось некоторое подмножество на основании входных данных. В этом случае задача оптимизации сводится не к нахождению непосредственно весовых коэффициентов, а в нахождении некоторой функции, связывающей входные данные и весовые коэффициенты таким образом, чтобы минимизировать ошибку. Для обучения такой системы можно использовать предельные случаи – т.е. веса, принимающие значения 0 и 1. Вектор таких весов будет соответствовать решению о том, что только те правила, для которых веса имеют значения 1, будут принимать участие в конечном решении, а остальные будут пропущены. Для обучения системы так же можно использовать обучение относительно гиперпараметров, т.е. обучение на основании данных другого обучения. Для этого можно применять генетические алгоритмы, однако в данном случае в качестве отдельной особи будет выступать набор правил, связывающих значения входных параметров с вектором весов, заданных в матричном виде. При обучении такой системы возникает проблема «комбинаторного взрыва» – количество всех

возможных комбинаций правил для каждого из элементов обучающей выборки является достаточно большим, и обучение таких систем является намного более вычислительно затратным.

Анализ функции выбора правил на основании входных данных позволяет также определить, какие из правил являются наиболее весомыми в контексте определения конечного результата. При помощи полученной модели можно подтвердить, что какое-либо из правил влияет на результат крайне незначительно или не влияет на него вообще. Полученные результаты могут использоваться непосредственно в доменной области самим экспертом для переоценки экспертного процесса принятия решений и для установления новых эмпирических зависимостей, которые могут в дальнейшем использоваться в практике.

Заключение

В работе рассмотрены и проанализированы подходы к построению экспертных систем на базе систем нечеткого вывода и с использованием методов машинного обучения с учителем, представлены их основные преимущества и недостатки. В качестве перспективного направления выделены алгоритмы оптимизации процесса принятия решений в системах нечеткой логики на основании исторических данных, подобно системам машинного обучения с учителем. Рассмотрены основные принципы построения нейронечетких систем и выделены их ключевые недостатки.

На основании проведенного анализа в работе предлагается принципиально новый подход к оптимизации набора правил системы нечеткого вывода на основании исторических данных, основанный на определении влияния тех или иных правил на конечный результат. Рассмотрена задача определения весовых коэффициентов для индивидуальных правил, а также подбора процедуры выбора подмножества правил по конкретным входным данным.

Разработанный подход может использоваться не только для оптимизации процесса принятия решения с использованием исторических данных, но и для переоценки экспертных знаний, поиска аномалий в исторических данных, подтверждению или опровержению тех или иных методологических приёмов, на основании которых строятся правила, а также установлению новых эмпирических зависимостей в предметных областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Korenevskiy, N.A.* Application of fuzzy logic for decision-making in medical expert systems / N.A. Korenevskiy // *Biomedical Engineering*. – 2015. – Vol. 49, № 1. – P. 46–49.

2. Jain, L. C. Fuzzy and neuro-fuzzy systems in medicine / L.C. Jain, A. Kandel, H.N.L. Teodorescu // CRC Press. – Boca Raton, Florida, USA, 2017. – 393 p.

3. Karaboga, D. Adaptive network based fuzzy inference system (ANFIS) training approaches: a comprehensive survey / D. Karaboga, E. Kaya // Artificial Intelligence Review. – 2018. – Vol. 49, № 1. – P. 1–31.

4. Прибушняя, О.В. Оценка плацентации при многоплодной беременности с использованием современных экспертных компьютерных программ / О.В. Прибушняя, А.В. Курочкин // Сборник научных трудов «Современные перинатальные

медицинские технологии в решении проблем демографической безопасности», 10 вып. – Минск, 2017. – С. 106–111.

5. Курочкин, А.В. Оптимизация параметров экспертной системы оценки хориальностимногоплодных беременностей на основе системы нечеткой логики по историческим данным / А.В. Курочкин, В.С. Садов // Материалы международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы современной науки», 26 сентября 2018 г. – Томск, 2018. – С. 13–17.

Поступила в редакцию 13.02.19.

УДК 539.3

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРУБЫ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, Е.А. Голубева

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

REALIZATION OF THE SOLUTION OF VISCOELASTICITY' PROBLEMS FOR A PIPE FROM A FUNCTIONAL GRADIENT MATERIAL

V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, E.A. Golubeva

F. Scorina Gomel State University

Определяется напряженно-деформированное состояние вязкоупругой трубы из неоднородных материалов под действием внутреннего давления. Представлены основные зависимости для расчета труб из неоднородных материалов. На основании полученных формул для нахождения деформаций создана компьютерная программа расчета деформаций в трубе, изменяющихся во времени. Приведена реализация расчетов напряженно-деформированного состояния в трубе и параметров ядер ползучести и релаксации.

Ключевые слова: вязкоупругость, труба, функционально-градиентный материал, деформации.

The stress-strain state of a viscoelastic tube made of inhomogeneous materials under the action of internal pressure is determined. The main dependences for the calculation of pipes made of heterogeneous materials are presented. On the basis of the received formulas for finding deformations the computer program of calculation of deformations in a pipe changing in time is created. The implementation of calculations of the stress-strain state in the pipe and the parameters of creep and relaxation nuclei is presented.

Keywords: viscoelasticity, pipe, functionally graded material, strain.

Введение

Бурное развитие современной техники и технологий создания новых материалов характеризуется комплексными исследованиями конструкций и материалов, эффективно работающими как в упругой, так и вязкоупругой областях при действии сложных нагрузок. Если упругие материалы определяются физическими соотношениями между напряжениями и деформациями, то в вязкоупругих материалах напряжения зависят от скоростей деформаций. Многие из новых материалов обладают механическими свойствами, которые нельзя описать с помощью упругих или вязких моделей механического поведения, и в силу этого становится очевидная необходимость построения более общей теории моделей, например, для функционально-градиентных материалов. В проблеме исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндрических тел из новых армированных полимеров можно выделить несколько важных аспектов:

– оценка влияния внешних воздействий (силовых, механических, влияния температурных полей и т. д.) при производстве и эксплуатации трубопроводных систем неоднородной структуры;

– использование в современных конструкциях новых композитов и армированных полимеров с учетом физико-механических характеристик материала, эксплуатационных условий функционирования исследуемых объектов;

– разработка современных систем оценки и диагностики, прогнозирования состояния систем трубопроводов на базе новых компьютерных технологий.

Следует отметить, что основные концепции теории вязкоупругости разработаны российскими учеными такими, как Ю. Работнов, А. Ильюшин, М. Колтунов и др., а также рядом зарубежных ученых. При этом решения задач теории вязкоупругости были заложены ранее в XX веке и продвинулись учеными СССР, используя разные математические модели, представления математического описания новых ядер релаксации и ползучести. В настоящее время стало широко использоваться представление указанных ядер с помощью сумм большого числа убывающих экспоненциальных функций, позволяющих описывать кривые ползучести и релаксации с погрешностью не более 1%. Наличие численных программ значительно облегчило идентификацию таких функций и, что важно, эти виды

представления ядер релаксации и ползучести стали входить в стандартные пакеты для решения задач линейной и нелинейной теорий вязкоупругости.

1 Постановка задачи исследований. Основные зависимости для расчета труб из неоднородных материалов

При исследовании напряженно-деформированного состояния задач вязкоупругости для трубы из функционально-градиентного материала (рисунок 1.1) используем методы расчета, представленные в работах [1], [2], в которых подробно показаны основные формулы для нахождения напряжений в зависимости от свойств материалов.

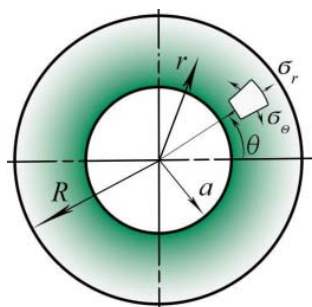


Рисунок 1.1 – Схема трубы из функционально-градиентного материала

Считаем, что материал трубы функционально-градиентный, и выполняется условие упругости для модуля Юнга [2]:

$$E(r) = E_0 r^{\bar{\beta}}, \quad -2 \leq \bar{\beta} \leq 2.$$

Напряжения σ_r и σ_θ удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

Общее решение примет вид:

$$u = \bar{A}r^{m_1} + Br^{m_2},$$

Постоянные \bar{A} , B_i определяются из граничных условий. Получим выражения для напряжений [2]:

$$\sigma_r = - \frac{P \left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (r^{m_1} - r^{m_2}) r^{\bar{\beta}-1}}{\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}},$$

$$\sigma_\theta = - \frac{P \left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (r^{m_1} - r^{m_2}) r^{\bar{\beta}}}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) (m_1(v-1) - v)(m_2(v-1) - v)},$$

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\bar{\beta} \pm \sqrt{4 + \bar{\beta}^2 - 4\bar{\beta}v^*} \right).$$

На основании полученных формул для нахождения деформаций и учитывая [2]–[6], создана

компьютерная программа расчета деформаций в трубе, изменяющихся во времени. При постановке и решении краевой задачи использовали теорию линейной вязкоупругости, дифференциальные уравнения в частных производных, численные решения краевой задачи. Функции, описывающие явления ползучести и релаксации, основанные на свойствах функции Миттаг – Леффлера, строятся по результатам экспериментов на ползучесть при постоянных напряжениях или, соответственно, на релаксацию при фиксированных деформациях. Для реализации расчета напряженно-деформированного состояния трубы использовали параметры различных ядер ползучести и релаксации, входящие в интегральные уравнения теории вязкоупругости с применением принципа Вольтера. Так, деформации и перемещение в вязкоупругой задаче [1], [2], [7] при действии внутреннего давления $p(t)$ по принципу Вольтера выражаются следующим образом:

$$\varepsilon_\theta(r,t) = - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (1+\nu)(1-2\nu)(r^{m_1-1} + r^{m_2-1})}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p,$$

$$\varepsilon_r(r,t) = - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (1+\nu)(1-2\nu)(m_1 r^{m_1-1} \omega_2 + m_2 r^{m_2-1} \omega_1)}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \times \tilde{E}_0^{-1} p,$$

$$u(r,t) = - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\bar{\beta}} (1+\nu)(1-2\nu)(r^{m_1} \omega_2 + r^{m_2} \omega_1)}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p,$$

$$\omega_1 = \nu + (1-\nu)m_1, \quad \omega_2 = \nu + (1-\nu)m_2,$$

здесь оператор $\tilde{E}_0^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) \cdot 1 d\tau \right]$ действует на функцию давления $p(t)$. Введены обозначения ε_θ , ε_r и u – деформации и перемещение, $K(t-\tau)$, $R(t-\tau)$ – функция влияния (ядро ползучести, ядро релаксации), E – модуль упругости, t – время наблюдения.

Ядра ползучести и релаксации связаны между собой интегральным соотношением, характеризуют основные механические свойства вязкоупругих материалов и входят в определяющие уравнения.

В данной работе использовали обобщенные ядра вида [7]:

$$R(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda\tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta^* \tau^\alpha; \alpha);$$

$$K(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda\tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta \tau^\alpha; \alpha),$$

в которые входит функция типа Миттаг – Леффлера

$$E_\rho(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция; μ – произвольный параметр, A^* , β , λ , α – реологические параметры.

Приведем основные аналитические зависимости, которые необходимы для дальнейших расчетов. Входящие в физические зависимости интегралы вычисляются через сумму гамма функций для случая $\sigma(t)$, $\varepsilon(t) = \text{const}$:

$$\tilde{R}(\tau) = \int_0^\tau R(s) ds = \frac{A^*}{\beta^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta^*}{\lambda^\alpha}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \lambda\tau)}{\Gamma(\alpha n)},$$

$$\tilde{K}(\tau) = \int_0^\tau K(s) ds = \frac{A^*}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\lambda^\alpha}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \lambda\tau)}{\Gamma(\alpha n)}.$$

При вычислении интегралов можно пользоваться конечной суммой до k -го члена. Из выше приведенных формул, учитывая $(\beta^* = \beta - A^*)$ при $\tau \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_0^\infty R(s) ds = \frac{A^*}{\beta^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta^*}{\lambda^\alpha}\right)^n = \frac{A^*}{\lambda^\alpha - \beta^*} = \frac{A^*}{\lambda^\alpha - (\beta - A^*)},$$

$$\int_0^\infty K(s) ds = \frac{A^*}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\lambda^\alpha}\right)^n = \frac{A^*}{\lambda^\alpha - \beta}.$$

Используя источник [2], рассмотрим различные случаи нагружения материала:

1. Нагрузка постоянная $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$, в этом случае закон деформирования можно выразить следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right].$$

Таблица 1.1 – Значения рассчитанных вязкоупругих компонентов, входящих в формулы для описания явлений ползучести и релаксации построенных на основе экспериментальных данных

t	$K(t)$	$\int_0^t K(t) dt$	$R(t)$	$\int_0^t R(t) dt$	$1 + \int_0^t K(t) dt$	$1 - \int_0^t R(t) dt$
0,001	20,867	0,2272	3,911	0,1855	1,2272	0,8145
0,01	2,7021	0,2819	1,6526	0,2204	1,2819	0,7796
0,1	0,3559	0,3535	0,1955	0,2619	1,3535	0,7381
1,0	0,0463	0,4478	0,0222	0,3103	1,4478	0,6897
5,0	$0,96 \cdot 10^{-2}$	0,5255	$0,41 \cdot 10^{-2}$	0,3456	1,5255	0,6544
10,0	$0,42 \cdot 10^{-2}$	0,5570	$0,17 \cdot 10^{-2}$	0,3587	1,5570	0,6413
18,0	$0,17 \cdot 10^{-2}$	0,5786	$0,65 \cdot 10^{-3}$	0,3672	1,5786	0,6328
30,0	$0,61 \cdot 10^{-3}$	0,5912	$0,22 \cdot 10^{-3}$	0,3719	1,5912	0,6281
70,0	$0,41 \cdot 10^{-4}$	0,5993	$0,14 \cdot 10^{-4}$	0,3748	1,5993	0,6252
100,0	$0,69 \cdot 10^{-5}$	0,5959	$0,22 \cdot 10^{-5}$	0,3750	1,5999	0,6250
200,0	$0,27 \cdot 10^{-7}$	0,6000	$0,79 \cdot 10^{-8}$	0,3750	1,6000	0,6250
300,0	$0,13 \cdot 10^{-9}$	0,6000	$0,36 \cdot 10^{-10}$	0,3750	1,6000	0,6250

Используя значение интеграла $\int_0^t K(\tau) d\tau$,

получаем

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \frac{A^*}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\lambda^\alpha}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \lambda t)}{\Gamma(\alpha n)} \right].$$

2. При времени $t \rightarrow \infty$ деформация асимптотически приближается к значению

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right] = \frac{P_0}{E_0} \left[1 + \frac{A^*}{\lambda^\alpha - \beta} \right],$$

где $A^* = A\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, α, β – параметры ядра.

Ядро $R(\tau)$ и резольвента $K(\tau)$ связаны соотношением

$$K(\tau) - R(\tau) = \int_0^\tau K(\tau-s)R(s) ds.$$

Значения параметров ядер определяются из эксперимента и задаются таблицей чисел, которые соответствуют фиксированным значениям времени. При проведении эксперимента определяются данные для построения кривых ползучести или релаксации. Для тестирования созданной компьютерной программы был произведен расчет параметров, входящих в описания основных соотношений вязкоупругости (таблица 1.1), и сравнивался с результатами расчета работы [6]; вычисление производилось для слабо сингулярного ядра Ржаницына – Колтунова при $\beta^* = 0$, $R(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}$ и резольвенты

$$K(t) = At^{-1} e^{-\beta t} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(A\Gamma(\alpha)t^\alpha)^i}{\Gamma(i\alpha)} \right]$$

для параметров ядра $\alpha = 0,075$, $\beta = 0,05$, $A = 0,0233$ (материал текстолит), сопоставление результатов расчета показало хорошее совпадение.

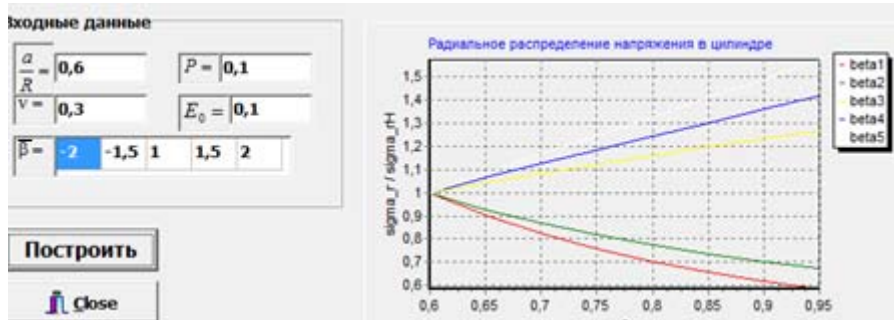


Рисунок 2.1– Результаты расчетов и графики распределения напряжения и перемещения в трубе

2 Программная реализация расчетов напряженно-деформированного состояния в трубе

Были рассмотрены различные примеры расчета напряжения, разработан алгоритм и создана программа в среде Delphi, которая реализует расчет напряженно-деформированного состояния в трубе из композитов для упругой задачи. На рисунке 2.1 изображено окно ввода исходных данных, рассчитанные коэффициенты \bar{A} и B , построенные программой графики распределения напряжения и перемещения в цилиндрической трубе. Тестирование программы осуществлялось в сравнении с результатами других исследователей, полученных при расчете напряжения и деформации в трубе из композиционных материалов.

На основании решения упругой задачи для неоднородной трубы было построено решение для вязкоупругого случая, в котором характеристики трубы изменяются во времени. Результаты расчета при решении вязкоупругой задачи также созданы в средах Delphi и Mathcad с использованием слабо сингулярного ядра Ржаницына – Колтунова при $\beta^* = 0$.

Разрабатывается методика определения осевого удлинения трубопроводов (труб) из композита с внутренним давлением при заданной температуре. Алгоритм включает использования различных ядер ползучести, в том числе и экспоненту. Деформация в осевом направлении состоит из мгновенной деформации и ползучести.

Для ортотропного тела с цилиндрической анизотропией уравнения упрощаются и принимают вид

$$\epsilon_r = a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z \gamma_{\theta z} = a_{44}\tau_{\theta z},$$

$$\epsilon_\theta = a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta + a_{23}\sigma_z \gamma_{rz} = a_{55}\tau_{rz},$$

$$\epsilon_z = a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_z \gamma_{r\theta} = a_{66}\tau_{r\theta}.$$

В других (технических) обозначениях уравнения записываются так:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} - \frac{\nu_{rz}}{E_z}\sigma_z, \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G_{\theta z}}\tau_{\theta z},$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r}\sigma_r + \frac{1}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{\theta z}}{E_z}\sigma_z, \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{rz}}\tau_{rz},$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{zr}}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta + \frac{1}{E_z}\sigma_z, \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}.$$

Здесь E_r, E_θ, E_z – модули Юнга для растяжения (сжатия) по направлениям r, θ, z (совпадающим с главными направлениями упругости); ν_{ij} – коэффициенты Пуассона, удовлетворяющие условиям:

$$\nu_{0r}E_0 = \nu_{r0}E_r, \nu_{zr}E_z = \nu_{rz}E_r, \nu_{z\theta}E_z = \nu_{\theta z}E_\theta;$$

G_{ij} – модули сдвига. Физический смысл ν_{ij} и G_{ij} такой же, как и соответствующим им, величинам в декартовых координатах:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, \gamma_{yz} = \frac{1}{G_1}\tau_{yz},$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, \gamma_{xz} = \frac{1}{G_1}\tau_{xz},$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_2}{E}\sigma_x - \frac{\nu_2}{E}\sigma_y + \frac{1}{E_1}\sigma_z, \gamma_{xy} = \frac{1}{G_1}\tau_{xy},$$

или в других обозначениях имеем деформацию в направлении армирования

$$\epsilon_{33} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}} - \frac{\nu_{12}}{E_{11}}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

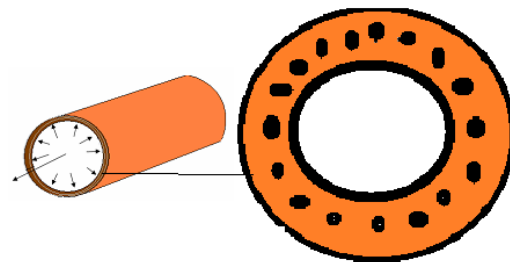


Рисунок 2.2 – Схема армированной трубы

Например, можно легко определить удлинение армированной трубы в вязкоупругом случае (рисунок 2.2). Составляющие напряжений, действующие на трубу: осевые, тангенциальные, радиальные

$$\sigma_3 = \frac{pd}{4h}, \sigma_2 = \frac{pd}{2h}, \sigma_1 = -p.$$

Действия интегральных операторов на 1

$$\varepsilon_{33}(t) = \frac{pd}{4h} \frac{1}{\tilde{E}_{33}}(\dots) - \frac{p}{\tilde{E}_{11}} \left(\frac{d}{2h} - 1 \right) \frac{v_{12}}{\tilde{E}_{11}}(\dots),$$

где введены обозначения $E_{33} = E_3$, $E_{11} = E_1$,

$$\tilde{E}_1^{-1} \cdot 1 = E_{10}^{-1} \left[1 + A_1 \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda \tau} \cdot 1 d\tau \right].$$

Если ядро принято в виде экспоненты, то можно получить замкнутую формулу для определения удлинения трубы.

3 Программная реализация расчета параметров ядер ползучести и релаксации

Определим параметры обобщенного ядра ползучести согласно [7]:

$$K(t) = A^* t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta t^\alpha, \alpha).$$

При постоянном напряжении $\sigma(t) = \sigma_0 = const$ уравнение ползучести будет иметь вид:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right]$$

или в пространстве преобразования Лапласа – Карсона

$$\bar{\varepsilon}(s) = \varepsilon_0 \left[1 + \bar{K}(s) \right],$$

здесь s – параметр преобразования, $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_0}$,

$\bar{K}(s)$, $\bar{\varepsilon}(s)$ – изображение ядра и функции деформации соответственно.

Следуя [7], изображение ядра

$$K(t) = A^* t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta t^\alpha)^n}{\Gamma[\alpha(1+n)]}$$

будет иметь вид:

$$K(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^* \beta^n}{(s + \lambda)^{(1+n)\alpha}} \\ \frac{A^*}{(s + \lambda)^\alpha - \beta} \text{ при } \frac{\beta}{(s + \lambda)^\alpha} < 1. \end{cases}$$

Применим преобразование Лапласа – Карсона к экспериментальным данным ползучести:

$$\varepsilon_s(s_k) = s_k \int_0^{t_n} \varepsilon_s(t) e^{-s_k t} dt + \int_{t_n}^{\infty} \varepsilon_s(t) e^{-s_k t} dt,$$

где $\varepsilon_s(t)$ – экспериментальная функция деформации.

При увеличении продолжительности опыта на ползучесть, выбирая значения параметра s_k ($k=1, 2, \dots$), второе слагаемое в формуле для $\varepsilon_s(s_k)$ можно сделать пренебрежимо малым. Тогда неизвестные параметры ядра вычисляются из условия минимума функции

$$\begin{aligned} & \varphi(A^*, \lambda, \alpha, \beta) = \\ & = \sum_{k=1}^n \left[\varepsilon_s(s_k) - \varepsilon_0 \left(1 + \frac{A^*}{(s_k + \lambda)^\alpha - \beta} \right) \right]^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем задачу оптимизации на безусловный минимум. Для отыскания минимума функции $\varphi(A^*, \lambda, \alpha, \beta)$ был использован метод Хука – Дживса [8]. Была разработана программа для определения параметров обобщенного ядра ползучести. Обработаны все возможные случаи ввода некорректных данных, реализована возможность записи и чтения из файла всех вводимых характеристик. На рисунке 3.1 представлено главное окно разработанной программы, в котором приведены значения искомых параметров обобщенного ядра ползучести, минимальное значение функции φ , количество итераций, подробная информация о ходе работы метода Хука – Дживса.

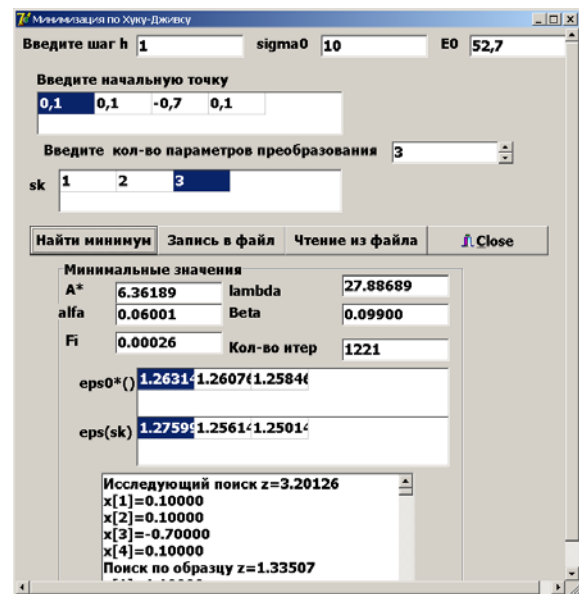


Рисунок 3.1 – Главное окно программы

Заключение

Разработана автоматизированная методика и создан программный модуль нахождения напряжений и деформаций труб из функционально-градиентных материалов с учетом вязкоупругих и реологических свойств материала. Построен алгоритм расчета параметров ядер ползучести и релаксации. Расчеты проводились с помощью разработанного программного модуля. Полученные результаты могут быть использованы в производстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Можаровский, В.В.* Методика розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих труб з урахуванням явищ повзучості і релаксації / В.В. Можаровський, Е.А. Голубева, Д.С. Кузьменков // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2017. – № 3. – С. 151–156.
2. *Tutuncu, N.* Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels / N. Tutuncu,

М. Ozturk // Composites Part B: Engineering. – 2001. – Vol. 32. – P. 683–686.

3. *Можаровский, В.В.* О контактном взаимодействии жесткого индентора с армированным резиновым слоем с учетом явлений вязкоупругости // Полимерные материалы и технологии. – 2017. – Т. 3, № 2. – С. 70–79.

4. *Можаровский, В.В.* Метод расчета характеристик контакта тел с ортотропным покрытием / В.В. Можаровский, М.Ю. Бокий // «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях»: материалы XX Республиканской научной конференции, Гомель, 20–22 марта 2017 г. – ГГУ им. Ф.Скорины. – Гомель, 2017. – С. 184.

5. *Mozharovsky, V.V.* Boundary element method in determining the stress-strain state of composite coating in tribological systems / V.V. Mozharovsky, N.A. Maryina, K.B. Ghazaryan // Ukrainian Conference in Applied Mathematics 28–30 September, 2017. – Ivan Franko National University of Lviv: Lviv, Ukraine. – С. 76–77.

6. *Огибалов, П.М.* Экспериментально-теоретические методы определения упруго-вязких характеристик стеклопластиков / П.М. Огибалов, М.А. Колтунов, И.М. Тюнеева // Сб. «Упругость и неупругость». – Московский университет, 1971. – Вып. 2. – С. 175–192.

7. *Можаровский, В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – М.: Наука, 1988. – 271 с.

8. *Можаровский, В.В.* Лабораторный практикум и методические указания по спецкурсу лекций «Оптимальное проектирование» для студентов математического факультета / В.В. Можаровский. – Гомель, 1996. – 56 с.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ – ГКН Арм., грант T17APM-034.

Поступила в редакцию 14.01.19.

УДК 004.94

ПОСТАНОВКА ИМИТАЦИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО СРАВНЕНИЮ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ ЛИФТАМИ В МНОГОЭТАЖНОМ ЗДАНИИ

П.Л. Чечет¹, А.В. Воруев¹, Е.А. Левчук²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель

DESIGN OF SIMULATION EXPERIMENTS FOR COMPARING ELEVATORS CONTROL STRATEGIES IN A HIGH-RISE BUILDING

P.L. Chechat¹, A.V. Varuyeu¹, A.A. Liauchuk²

¹F. Scorina Gomel State University

²Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel

Рассматривается постановка имитационных экспериментов для сравнения стратегий управления лифтами в многоэтажном здании. Параметрами модели являются алгоритмы управления, а не значения отдельных параметров. Предлагается шаблон проектирования симулятора, позволяющий как тривиально добавлять стратегии управления, так и создавать новые стратегии управления на основе уже разработанных.

Ключевые слова: стратегия управления лифтами, симулятор, имитационный эксперимент, сравнение альтернатив.

The design of simulation experiments for comparing elevators control strategies in a high-rise building is considered. Model parameters are control algorithms, not the values of individual parameters. A design pattern is proposed for the simulator that allows both trivially to add control strategies and create new control strategies based on already developed ones.

Keywords: elevators control strategy, simulator, simulation experiment, comparison of alternatives.

Введение

Системы управления лифтами являются программно-аппаратными комплексами. Они различаются по ряду признаков, например, типу командоаппарата и его расположению; количеству лифтов, управляемых по единой схеме; очередности обработки сигналов вызова и старта свободной кабины и т. п. При разработке системы управления лифтами обычно на первом этапе инженеры создают аппаратную базу, а затем занимаются отладкой алгоритмов [1]. В данной статье предлагается обратный подход. На первом этапе создается имитационная модель системы управления лифтами, позволяющая варьировать алгоритмическую часть системы. На следующем этапе инженеры-электронщики должны разработать аппаратную базу под один или несколько эффективных алгоритмов.

Несмотря на относительную доступность использования систем математического моделирования, в данном случае оправдана разработка программы имитационной модели, т. е. симулятора, на универсальном языке программирования. При всей своей сложности, такой подход обладает неоспоримыми преимуществами: более высокая эффективность работы симулятора, возможность использования современных библиотек для вычислений и конвертирования данных, использование возможностей многопоточного выполнения.

В данной статье рассматривается разработка и использование имитационной модели движения лифтов в многоэтажном здании на языке программирования Java. Одно из преимуществ приложения, работающего под управлением виртуальной машины Java, – это возможность работы с несколькими потоками. Виртуальная машина Java оптимизирована для многопроцессорных систем и может управлять большим количеством потоков.

1 Концептуальная модель

Объектом моделирования является многоэтажное здание с системой лифтов, предназначенных для перевозки людей. Здание имеет классическую структуру с входом на первом этаже, перемещение пассажиров между этажами осуществляется с использованием фиксированного числа взаимосвязанных лифтов. Алгоритм управления каждым лифтом имеет доступ к информации о состоянии всех лифтов в здании.

Поток посетителей для каждого этажа здания может быть задан с учётом того, что интервал времени между посетителями полагаем распределённым по закону Пуассона с параметром λ_{ij} , где i – номер исходного этажа, j – номер целевого этажа, а t – номер временного интервала. Это позволяет моделировать офисные здания, где в начале рабочего дня посетители приходят на первый этаж, в течение дня перемещаются

между этажами, а в конце дня покидают здание. Также существует возможность моделировать жилые здания, где посетители генерируются на всех этажах здания, моделируя таким образом движения жильцов, выходящих из своих квартир.

Количество этажей в здании, количество лифтов, скорость их перемещения и вместимость задаются параметрами программы имитационной модели. В зависимости от решаемой задачи это могут быть как параметры, так и переменные имитационной модели (варьируемые исследователем значения или значения, зависящие от свойств реального объекта моделирования).

2 Проектирование симулятора

Симулятор позволяет ставить имитационные эксперименты с моделью системы управления лифтами и обладает следующими функциональными возможностями обмена данными с корпоративной информационной системой [2]:

- загрузка настроек конфигурации для генерации начального состояния имитационной модели;
- загрузка входной информации для реализации имитационного эксперимента;
- предварительный просмотр конфигурации до запуска имитационного эксперимента;
- мониторинг откликов имитационной модели во время выполнения;
- вывод результатов в файл в необходимом формате;
- оперативный вывод результатов имитационного эксперимента, что позволяет исследователю принять решение о продолжении или об окончании имитационного эксперимента.

На рисунке 2.1 изображена развернутая диаграмма последовательностей событий во время работы с симулятором.

Настройка начальной конфигурации. Основной поток событий заключается в задании начальной конфигурации. Альтернативными событиями являются отмена ввода конфигурации

или ввод ошибочной конфигурации. Симулятор в этом случае предлагает исправить неправильную конфигурацию или завершает работу приложения с выдачей соответствующего сообщения об ошибке.

Последовательность мониторинга состояния имитационной модели. Основной поток событий заключается в том, что после подтверждения конфигурации симулятор допускает клиента к мониторингу откликов модели и пользователь может анализировать данные. Альтернативным событием является возможность отмены мониторинга откликов имитационной модели. В этом случае работа приложения завершается.

Последовательность получения результатов имитационного эксперимента. Основной поток событий заключается в том, что после мониторинга результатов клиенту необходимо получить, а после получения – сохранить результаты имитационного эксперимента. Альтернативным событием является ошибка обработки, что обычно бывает при ошибках прогона модели. Приложение в этом случае предложит перезапустить имитационный эксперимент.

Диаграмма потоков данных разработанного симулятора управления лифтами многоэтажного здания представлена на рисунке 2.2.

3 Компоненты симулятора

Симулятор включает в себя набор взаимодействующих компонентов.

1. Информационные классы – специальные классы, которые берут на себя роль хранения информации в зависимости от их объявления. В качестве информационных классов определены следующие классы: Passenger, Floor, Elevator, Building. Для организации взаимодействия динамических потоков имитационной модели был реализован шаблон синхронизации транзактов [3].

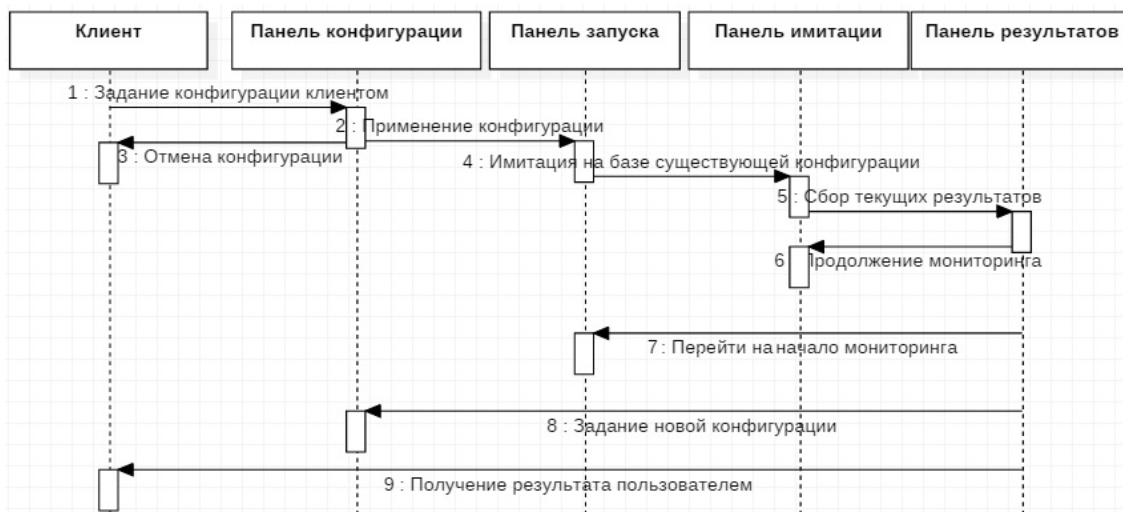


Рисунок 2.1 – Диаграмма последовательностей имитационной модели

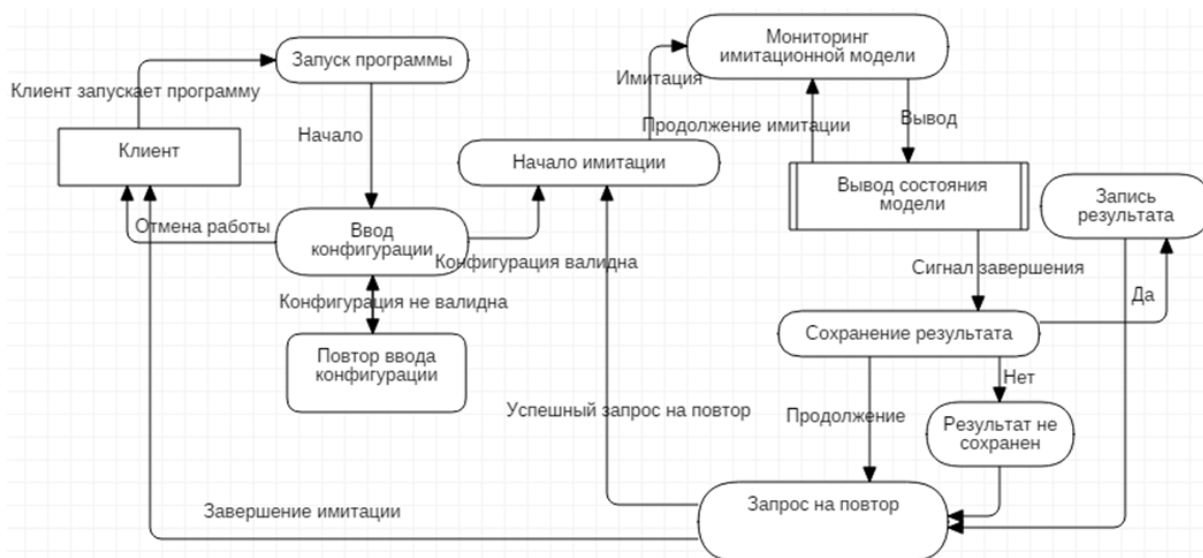


Рисунок 2.2 – Диаграмма потоков данных

2. Компоненты загрузки информации – компоненты, которые берут на себя роль загрузки начальной конфигурации из файла и последующей ее передачи в компоновщик имитационного эксперимента. В качестве компонентов загрузки определен семантический интерфейс Loader и его реализации – PropertyLoader и XMLConfigLoader.

3. Компонент для сборки имитационной модели. Данный компонент выполняет роль порождения выполняемых компонентов в имитационной модели. В качестве входной информации компонент принимает информацию из загрузчика и на выходе поставляет созданные компоненты, которые будут принимать участие в моделировании. В качестве этого компонента определен класс ElevatorTaskBuilder.

4. Компоненты исполнения модели – компоненты, которые являются управляющими в данной модели. Они несут в себе роль исполнения – выполняют определенный алгоритм работы модели. В качестве таких компонентов определены классы ElevatorController, ElevatorTask, TransportationTask и Runner.

5. Компонент валидации системы. Этот компонент выполняет роль проверки компонентов имитационной модели на корректность выполнения (верификация модели). С этой ролью справляется класс Validator.

6. Компонент регистрации событий – элемент в имитационной модели, отвечающий за вывод информации о состоянии модели. Данный компонент регистрирует события на панель выполнения и в файл. В программе имитационной модели представлен класс AppLogger.

На рисунке 3.1 показано взаимодействие компонентов в имитационной модели.

Особенностью разработанного симулятора является возможность варьирования не только параметров, но и алгоритмов управления лифтами. Для этого алгоритмы вынесены в отдельные подклассы суперкласса AbstractLiftStrategy (рисунок 3.2).

Подобная организация структуры имитационной модели позволяет варьировать стратегии обслуживания посетителей здания не только варьированием значений переменных имитационной модели, а гораздо шире: путём выбора различных стратегий функционирования лифтов, задаваемых на уровне алгоритмов управления, что, безусловно, является более гибким, чем традиционное изменение значений параметров имитационной модели.

4 Описание имитационного эксперимента

Для проведения имитационного эксперимента по сравнению эффективности нескольких стратегий обслуживания посетителей многоэтажного здания были реализованы три различных алгоритма функционирования лифтов. Каждый алгоритм реализован в программе имитационной модели в одном из подклассов суперкласса AbstractLiftStrategy.

Первая стратегия представлена классом SpeedLiftStrategy. Идея данной стратегии заключается в максимально быстром обслуживании посетителей: для перемещения пассажира на этаж вызова отправляется ближайший по времени доступа лифт со свободным местом из тех лифтов, которые потенциально могут выполнить перевозку посетителя в нужном направлении (рисунок 4.1). В этой стратегии удобство посетителей поставлено выше загрузки лифта и оптимизации потребления энергии.

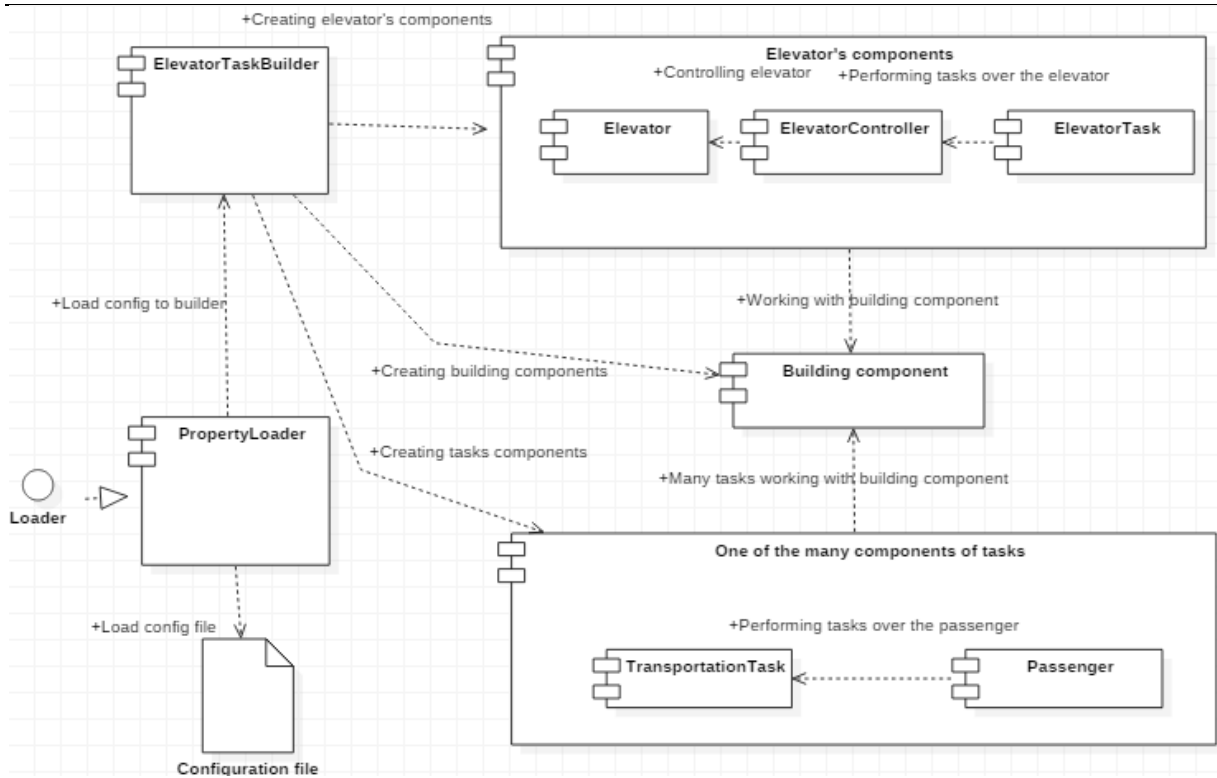


Рисунок 3.1 – Взаимодействие компонентов имитационной модели

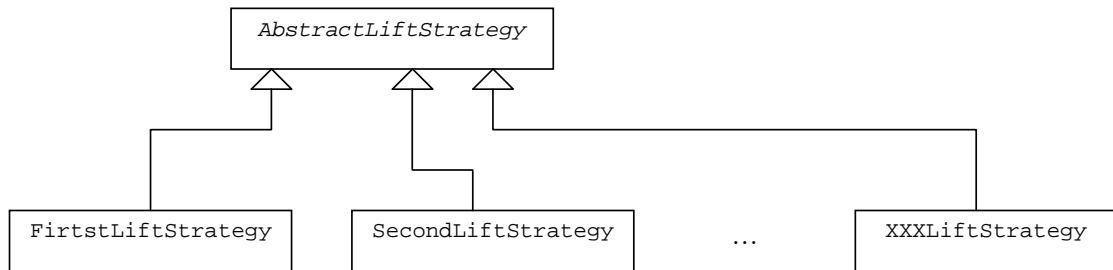


Рисунок 3.2 – Обобщенная диаграмма классов стратегий

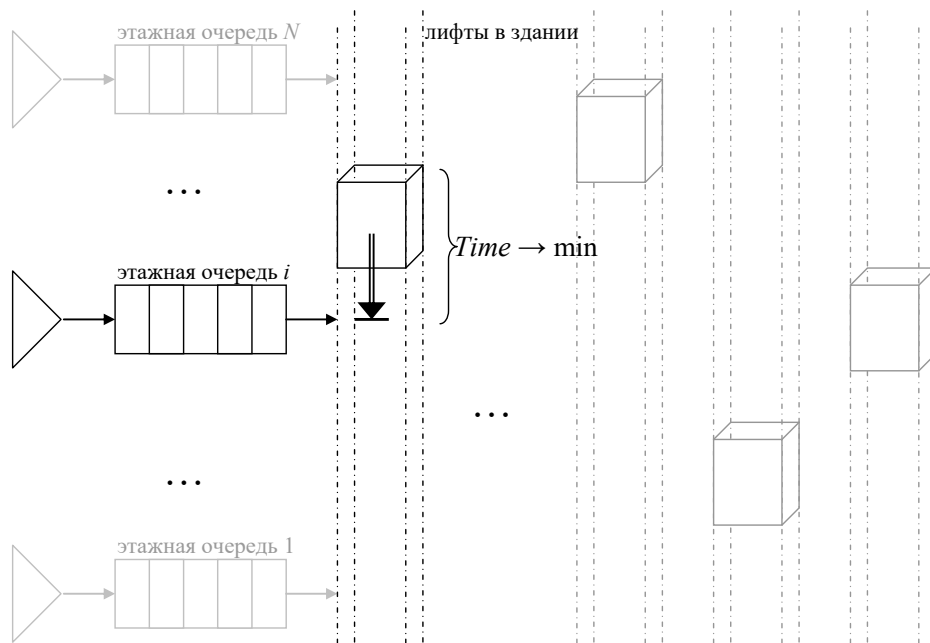


Рисунок 4.1 – Скоростная стратегия перевозки посетителей

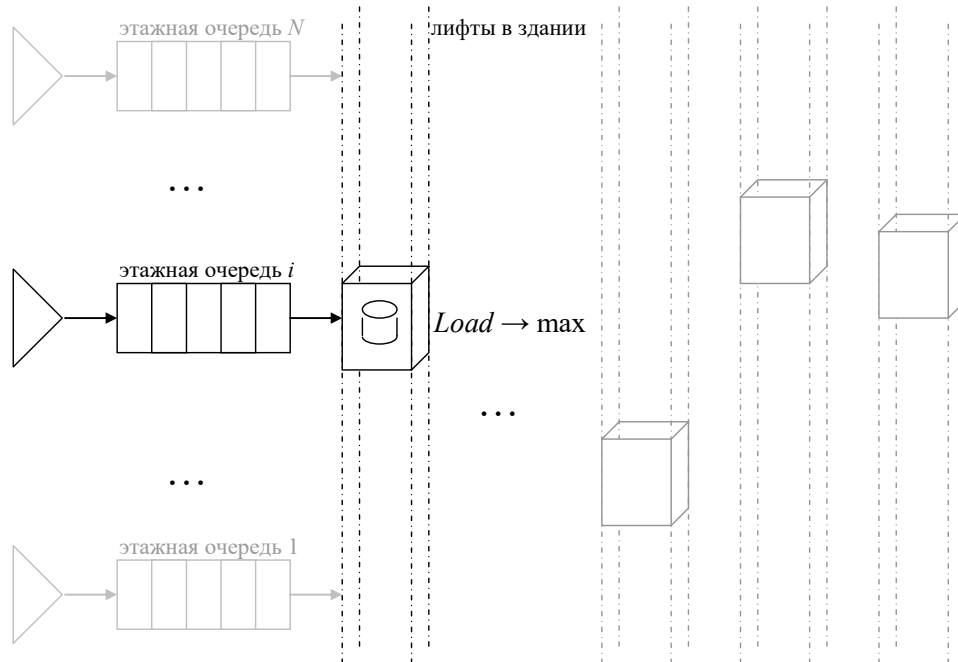


Рисунок 4.2 – Загрузочная стратегия перевозки посетителей

Вторая стратегия представлена классом `LoadLiftStrategy`. Эта стратегия ориентирована на максимальную загрузку лифтов для снижения расхода потреблённой лифтами энергии. В этом случае выбор лифта осуществляется так, чтобы обеспечить максимальную его заполняемость посетителями (рисунок 4.2), т. е. для обслуживания отправляется лифт со свободным местом, уже задействованный для перевозки посетителей. В целях недопущения возрастания времени ожидания лифта посетителем, введён лимит τ_{\max} , по истечении которого для перевозки пассажира может быть задействован даже пустой лифт.

Третья стратегия перевозки посетителей представлена классом `FloatLiftStrategy`. Она является разновидностью стратегии максимальной загрузки лифта. Её отличие от стратегии, представленной классом `LoadLiftStrategy`, заключается в том, что лимит времени ожидания посетителем лифта не является постоянным, а изменяется по закону (4.1):

$$\tau = \tau_{\max} \frac{l_{\max} - l}{l_{\max}}, \quad (4.1)$$

где τ_{\max} – задаваемый исследователем максимальный лимит времени ожидания лифта посетителем, l_{\max} – максимально возможная длина очереди на этаже, l – среднее значение длины очереди к лифту по всем этажам.

Как видно из выражения (4.1), с ростом очередей на этажах время, через которое для посетителя будет отправлен даже свободный лифт, снижается вплоть до нулевого при максимальной длине очереди. Эта стратегия обслуживания

ожидаемо должна обеспечить более качественное (более быстрое, с меньшим временем ожидания) обслуживание посетителей здания, чем загрузочная стратегия, но при этом обеспечить более высокий коэффициент загрузки лифтов, чем скоростная стратегия обслуживания посетителей здания.

Иерархия классов стратегий в программе имитационной модели представлена на рисунке 4.3.

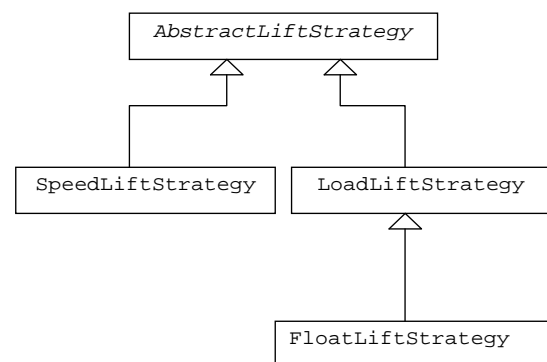


Рисунок 4.3 – Диаграмма классов стратегий обслуживания

Для проверки выдвинутой гипотезы об эффективности третьей стратегии, т. е. с изменяемым лимитом времени ожидания, были проведены имитационные эксперименты для каждой из трёх описанных выше стратегий перевозки посетителей здания имеющимися в нём лифтами.

Результаты имитационного эксперимента полученные в процессе моделирования представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Результаты имитационного эксперимента

Показатель	Стратегии обслуживания		
	Speed	Load	Float
Средняя длина очереди к лифту на этаже (по всем этажам здания)	1,3	7,0	4,2
Среднее время ожидания лифта посетителем, с	32,5	97,2	45,5
Изменение загрузки (коэффициента, характеризующего заполнение лифта посетителями)	0,38	0,7	0,53

Как видно из таблицы, различные стратегии обслуживания приводят к изменению значения загрузки (наполняемости) лифтов.

Для удобства сравнения рассмотренных стратегий обслуживания нормируем значения коэффициента загрузки лифтов их максимальным значением.

Два оставшихся отклика: среднюю длину очереди и среднее время ожидания, преобразуем выражением (4.2):

$$x_i^* = \frac{\max x_i - x_i}{\max x_i - \min x_i}, \quad (4.2)$$

где i – номер стратегии от 1 до 3.

После преобразования значений максимальное значение каждого отклика характеризует большую эффективность. То есть предпочтительным для функционирования системы лифтов в здании является максимальная загрузка и минимальные очередь и время ожидания. Гистограмма преобразованных значений откликов с разбивкой по стратегиям обслуживания выглядит следующим образом (рисунок 4.4).

Из гистограммы на рисунке 4.4 видно, что стратегии, нацеленные исключительно на скорость обслуживания и хорошую загрузку (использование) лифтов, обеспечивают хорошие показатели лишь по тем характеристикам системы, на которые они изначально нацелены. Между тем, остальные характеристики при этом неизбежно «проседают».

Поэтому целесообразным выглядит применение промежуточной, третьей, стратегии, которая варьирует время максимального ожидания t

в зависимости от текущего размера l средней очереди к лифтам.

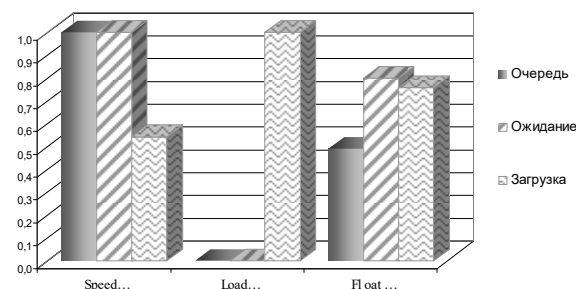


Рисунок 4.4 – Сравнительная характеристика различных стратегий

Заключение

Несмотря на условный характер принятых в имитационной модели управления лифтами в многоэтажном здании допущений по рассмотренному в статье шаблону проектирования можно провести сравнение любых произвольных стратегий управления, которые могут быть представлены в виде некоторого разумного алгоритма. Использование возможностей наследования и полиморфизма в коде программы имитационной модели делает возможным как тривиальное добавление совершенно новых стратегий управления, так и создание новых стратегий управления на основе уже разработанных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elevator* – *Wikipedia* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://en.wikipedia.org/wiki/Elevator>. – Дата доступа: 27.12.2018.
2. Левчук, В.Д. Реализация обмена данных между имитационной моделью и корпоративной информационной системой / В.Д. Левчук, Е.А. Левчук // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2010. – № 5 (62). – С. 115–118.
3. Левчук, В.Д. Реализация шаблона синхронизации транзактов в системном модуле симулятора MICIC4 / В.Д. Левчук, Е.А. Левчук // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 130–133.

Поступила в редакцию 18.01.19.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).