

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№4 (37) 2018

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (37) 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Барсуков С.Д., Хахомов С.А., Кондох Д.** Свойства структуры периодического акустического импеданса и взаимодействие акустических волн в новом управляемом устройстве на ПАВ . 7
- Гиргель С.С.** Оптические пучки Вебера – Гаусса 13
- Дей Е.А., Тюменков Г.Ю.** Граничные параметры для состояния растянутой жидкости 18
- Коваленко Д.Л., Гайшун В.Е., Васькевич В.В., Руськин А.С., Москвичёв М.И., Черчук В.А., Мхин С.** Исследование структурно-механических свойств защитных золь-гель покрытий на основе оксидов Si, Ti, Zr и их комплексов 21
- Косенок Я.А., Гайшун В.Е., Тюленкова О.И.** Исследование приповерхностного нарушенного слоя в пластинах монокристаллического кремния после химико-механической полировки . . 25
- Кулак Г.В., Крох Г.В., Ропот П.И., Николаенко Т.В.** Коллинеарная акустооптическая фильтрация полихроматических бесселевых световых пучков в одноосных кристаллах 30
- Макаревич А.В., Шепелевич В.В., Шандаров С.М.** Влияние пространственной ориентации и толщины кристалла $Bi_{12}GeO_{20}$ на коэффициент усиления предметной световой волны: теория и эксперимент 35
- Сидский В.В., Семченко А.В., Гайшун В.Е., Коваленко Д.Л., Ханна А.С.** Влияния дополнительного отжига в вакууме на структуру, электрические и оптические свойства ZnO:Al пленок, синтезированных золь-гель методом 44
- Шершнев Е.Б., Никитюк Ю.В., Соколов С.И., Ермаков С.Ф., Шершнев А.Е.** Обработка синтетических алмазных структур лазерным излучением с длиной волны 532 нм 47

МАТЕМАТИКА

- Антоневич А.Б., Шагова Т.Г.** Вложения распределений в алгебру мнемофункций на окружности 52
- Ванькова Т.Н., Детченя Л.В., Пецевич В.М., Селивёрстова А.О.** Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка без подвижных критических особенностей 62
- Васильев А.Ф.** Конечные группы с сильно K - \mathfrak{F} -субнормальными силовскими подгруппами . 66
- Захарчук Ю.В.** Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем 72
- Карасёва Г.Л., Ружицкая Е.А.** Метод решения специальной задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями 80
- Копать Д.Я., Матальцкий М.А.** Исследование в нестационарном режиме G -сети с сигналами и групповым удалением заявок методом последовательных приближений 85
- Марцинкевич А.В.** О проблеме Дёрка – Хоукса для локально нормальных классов Фитинга . 90
- Мурашко В.И., Горский С.М., Сандрыгайло Я.И.** $\mathfrak{K}_\varphi, \mathfrak{K}_\psi$ -выпуклые функции и обобщения классических неравенств 98
- Селькин В.М., Косенок Н.С.** Об обобщенной норме конечной группы 103

ИНФОРМАТИКА

- Липницкий С.Ф.** Математическая модель синтеза текстов на основе слияния коммуникативных фрагментов 106

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 13.12.18. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 11,54. Тираж 100 экз. Заказ № 823.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2018
© Проблемы физики, математики и техники, 2018
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2018

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 4 (37) 2018

CONTENTS

PHYSICS

- Barsukou S.D., Khakhomov S.A., Kondoh Jun.** Features of periodical acoustic impedance structure and acoustic wave interaction in novel controllable SAW device 7
- Girgel S.S.** Optical Weber – Gauss beams 13
- Dey E.A., Tyumenkov G.Yu.** Boundary parameters for stretched fluid state 18
- Kovalenko D.L., Gaishun V.E., Vaskevich V.V., Rusykin A.S., Moskvichev M.I., Cherkchuk V.A., Mhin S.** Research of structural and mechanical properties of protective sol-gel coatings based on oxides Si, Ti, Zr and their complexes 21
- Kosenok Ya.A., Gaishun V.E., Tyulenкова O.I.** Investigation of the near-surface damaged layer in monocrystalline silicon wafers after chemical-mechanical polishing 25
- Kulak G.V., Krokh G.V., Ropot P.I., Nikolaenko T.V.** The collinear acousto-optical filtration of polychromatic Bessel light beams in uniaxial crystals 30
- Makarevich A.V., Shepelevich V.V., Shandarov S.M.** Effect of spatial orientation and thickness of $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ crystal on the gain of the subject light wave: theory and experiment 35
- Sydsky V.V., Semchenko A.V., Gaishun V.E., Kovalenko D.L., Khanna A.S.** Effects of additional vacuum annealing on the structure, electrical and optical properties of ZnO:Al films synthesized by sol-gel 44
- Shershnev E.B., Nikitjuk Y.V., Sokolov S.I., Ermakov S.F., Shershnev A.E.** Processing of synthetic diamond structures laser radiation with a wave length of 532 nm 47

MATHEMATICS

- Antonevich A.B., Shahava T.R.** The embeddings of distributions into the algebra of mnemofunctions on circle 52
- Vankova T.N., Detchenya L.V., Petsevich V.M., Seliverstova A.O.** On a class of systems of second order differential equations without mobile critical features 62
- Vasil'ev A.F.** Finite groups with strongly K- \mathfrak{F} -subnormal Sylow subgroups 66
- Zakharchuk Yu.V.** The circular three-layer elastic-plastic plate with a compressible filler 72
- Karaseva G.L., Ruzhitskaya E.A.** Method of solving the special optimal control problems with phase constraints 80
- Kopats D.Y., Matalytski M.A.** Investigation in non-stationary mode of G -network with signal and group removal customers by successive approximation method 85
- Martsinkevich A.V.** On the problem of Doerk and Hawkes for locally normal Fitting classes 90
- Murashka V.I., Gorsky S.M., Sandryhaila Ya.I.** $\mathfrak{R}_\varphi, \mathfrak{R}_\psi$ -convex functions and generalizations of classical inequalities 98
- Selkin V.M., Kosenok N.S.** On the generalized norm of a finite group 103

INFORMATION SCIENCE

- Lipnitsky S.F.** Mathematical model of the synthesis of texts based on merging of communicative fragments 106

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 534.231.2

СВОЙСТВА СТРУКТУРЫ ПЕРИОДИЧЕСКОГО АКУСТИЧЕСКОГО ИМПЕДАНСА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В НОВОМ УПРАВЛЯЕМОМ УСТРОЙСТВЕ НА ПАВ

С.Д. Барсуков¹, С.А. Хахомов¹, Д. Кондох²¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины²Университет Шизуока, Япония

FEATURES OF PERIODICAL ACOUSTIC IMPEDANCE STRUCTURE AND ACOUSTIC WAVE INTERACTION IN NOVEL CONTROLLABLE SAW DEVICE

S.D. Barsukou¹, S.A. Khakhomov¹, Jun Kondoh²¹F. Scorina Gomel State University²Shizuoka University, Japan

Приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований устройства на ПАВ с управляемой электроиндуцированной структурой. Принципиально новое устройство на ПАВ было предложено на основе монокристалла LiTaO₃ с объемно-индуцированной управляемой доменной структурой. Параметры индуцированной структуры, а также свойства взаимодействия акустических волн, имеют возможность управления. Изложены теоретические и экспериментальные результаты взаимодействия ПАВ в сегнетоэлектрическом волноводе с различными электроиндуцированными периодическими структурами.

Ключевые слова: поверхностные акустические волны (ПАВ), сегнетоэлектрические домены, фононные кристаллы, акустические метаматериалы.

The SAW device with the electroinduced controllable structure was investigated theoretically and experimentally. The innovative SAW device on a LiTaO₃ single crystal with the volume existed and controllable domain structure was proposed. The parameters of the electroinduced structure as well as the acoustic wave interaction have ability to control. The theoretical and experimental results of the acoustic wave interaction in the ferroelectric waveguide with the electroinduced periodical structures were discussed.

Keywords: surface acoustic wave (SAW), ferroelectric domain, phonic crystal, acoustic metamaterials.

Introduction

A surface acoustic wave (SAW) device with novel acoustic metamaterials (AM) and phonic crystal (PCs) structures are increasingly applied in advanced electronics as the broadband filter, negative reflector, signal switcher and so forth [1]–[8]. Current research interest prevails in the ultrasound application area. The perspective effects of ultrasound interaction with PCs and AM structures have been investigated. Recently, the AM structures based on the elementary “metaatoms”, which are characterized by optimal size and shape, opened widespread effects of SAW interaction [9]–[14]. The wave interaction properties are almost determined by the element configuration, size and the array structure [15]–[20]. However, the AMs or 2D analog as the “metasurface” with established parameters and properties do not allow the switching and controlling functionality in real time. Especially, for electronics applications, the controllable interaction of SAW which is the input and output signals are required. In recent years, some studies about the controllable structures have already been discussed [21]–[24]. The controllable electroinduced periodical domain structures on a LiNbO₃ were investigated as a kind of the controllable structures [25]. The switchable

domain structures were induced via the electrostatic effect by applying different electric potentials [26].

In this research the SAW device with an electroinduced controllable structure was theoretically and experimentally studied. The innovative SAW device on a LiTaO₃ single crystal with controllable, electroinduced, and volume existed domain structures was proposed. The periodic domain structures were implemented by the linear electrostatic effect with different electric potentials applied to the surface arranged electrodes. Different electroinduced domain structures are achievable when the electrode structures are crossed on the top and bottom surfaces of the crystal. The parameters of the electroinduced structure and features of the acoustic wave interaction have ability to control. The electroinduced structure is considered as the volume-existed periodic acoustic impedance. The SAW device experimental samples were fabricated, and the propagated SAW influence due to the electroinduced structure was experimentally observed. The theoretical and experimental results of the acoustic wave interaction in ferroelectric waveguide with electroinduced periodical structures were discussed.

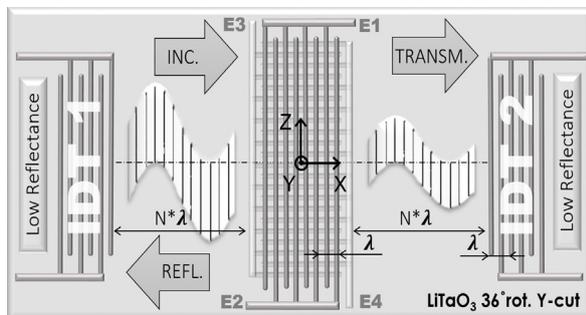
1 Principle of the controllable SAW device and theoretical investigations

The SAW device principle and structure are shown in Figure 1.1 (a). The device was fabricated on a 36° -rotated Y-cut, X-propagating LiTaO_3 single crystal, which allows the shear horizontal (SH) SAW propagation. The SH-SAW propagates as the plate wave with the SH displacements. The resonance frequency and wavelength of the SH-SAW were 10 MHz and $421 \mu\text{m}$, respectively. The controlled periodic domain structures were implemented by applying different electric potentials to the surface arranged electrodes of E1, E2, E3, and E4. The electrode fingers arranged on the both surfaces were mutually perpendicular. The applied electric field was lower than the coercive, and the spontaneous domain polarization was not changed. However, the material parameters at the regions of the electric field action are changed. This regime formation of the periodical structure was applied in the current research. Exited from the inter-digital transducer (IDT1) the SH-SAW interacts at the electroinduced structure region, and then the reflected and transmitted waves were generated and registered using the IDT1 and IDT2 simultaneously. At the measurements, the reflected and transmitted SAWs were studied.

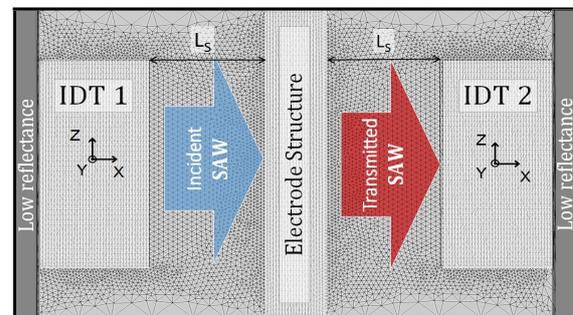
In Ref. [26], the domain formation process for different electrode configurations and ferroelectric substrate thicknesses was discussed. In this research, the finite elements method (FEM) with the full 3D model was applied for the theoretical investigation. The full model of the controllable SAW device was theoretically investigated in two steps in the time domain. The FEM model for the device structure considered is shown in Figure 1.1 (b). In the model the classical descriptions of the electric and relative particle displacements were used. The quasi-static approximation was applied to describe the electric field of the SAW and mechanical stress. All boundaries correspond to the electrical and mechanical potentials absence, and the lateral boundaries

correspond to the low reflection condition. The FEM model includes the IDTs and the electrode structures (ES). The numbers of the electrode fingers of the IDT was 20. The ES consists of 10 electrode fingers on the top and 60 on the bottom surfaces. The distance L_S between the IDT and ES was 10 wavelengths. The SH-SAW propagated in the X-direction from IDT1 to IDT2. The thickness of the crystal was $50 \mu\text{m}$. The total dimension of the calculated structure is $2000 \times 1000 \times 50 \mu\text{m}^2$. The electrical potentials of 200 V and 0 V were periodically applied to each pair of the electrode finger of ES. The parameters of the displacements and the electric potential were calculated for the time of $10 \mu\text{s}$.

Based on the full model discussed the periodical acoustic impedance structure formation was investigated without the SH-SAW action. This allows discussing the features of formation of induced structure. The results are listed in Figures 1.2 (a) and 1.2 (b). In this model, the domain structure was induced by applying of the opposite DC potentials to the top and bottom ESs simultaneously. When the DC is applied to the ES, the short SH-SAWs are generated and propagated in the opposite form the ES directions. The Figure 1.2 (a) shows the total displacement distribution measured for the time of 1 and $10 \mu\text{s}$. The shown displacements correspond to the SAW was induced when the DC is applied. We characterized the periodical structure formation by analyzing spectra of the registered SAW. After the domain structure stabilizes the wave process attenuates. The black curve in Figure 1.2 (b) shows the signal registered by IDT. The short wave packet from 1 to $3 \mu\text{s}$ corresponds to the domain structure formation signal, and the lower amplitude packet between 4 and $7 \mu\text{s}$ is the result of the between lateral boundaries and the IDTs reflection. The registered signal spectra are illustrated in Figure 1.2 (b). At least two maximums of 9.6 MHz and 12.8 MHz were observed. The first maximum corresponds to the resonance frequency of the similarity to the IDT structure. The second one relates to the domain



(a)



(b)

Figure 1.1 – (a) Device structure and principle of the SH-SAW interaction; (b) configuration of FEM model of the controllable SAW device (The INC., REFL., and TRANSM. are the incident, reflected, and transmitted waves, respectively. The E1, E2, E3, and E4 are the conductive electrodes arranged on the surface of the acoustic waveguide)

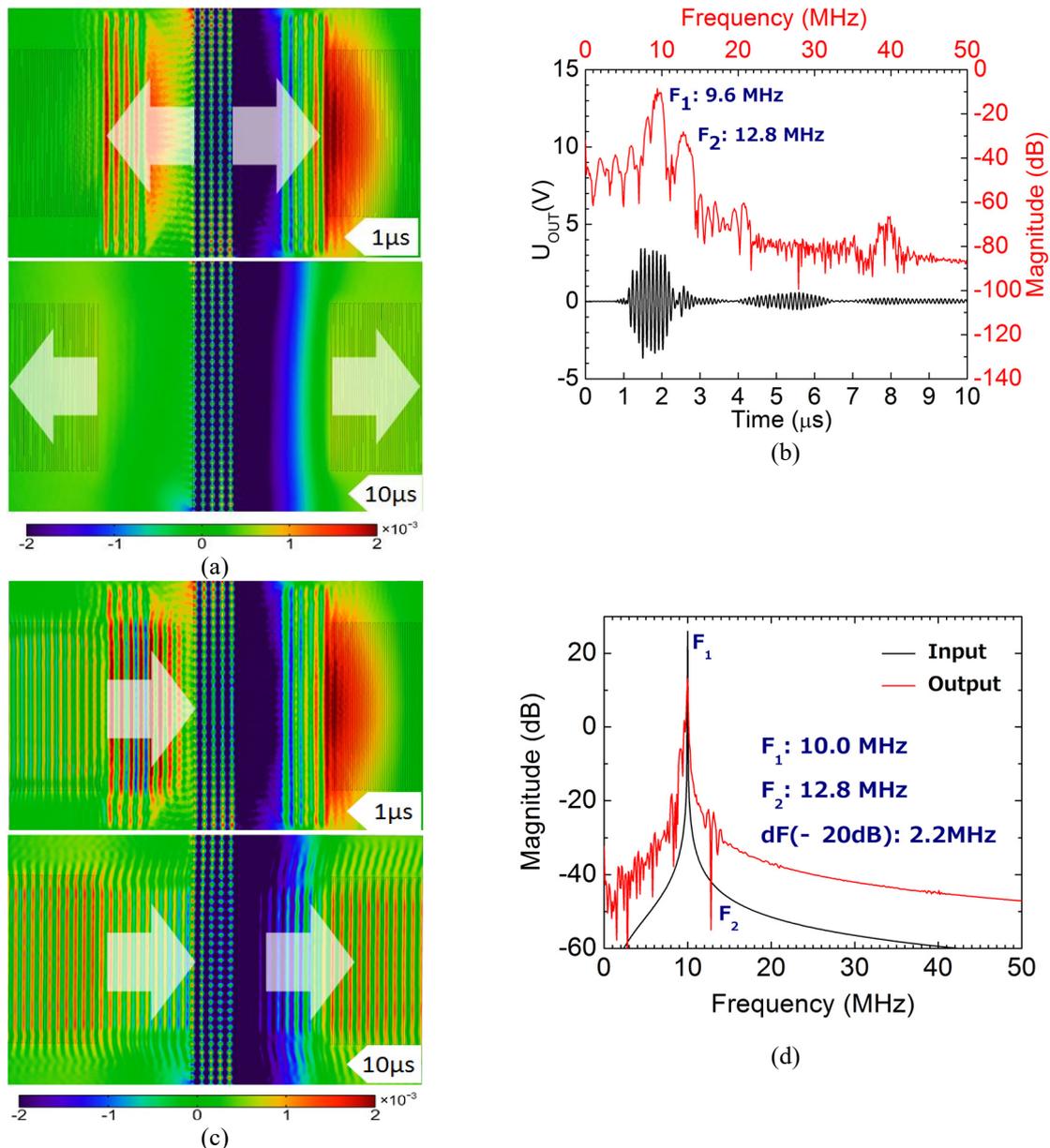


Figure 1.2 – Results of the theoretical investigations: (a) and (b) the periodical structure formation, (c) and (d) the SH-SAW interaction processes. (a) Field of the total displacement distribution measured for the time of 1 and $10\ \mu\text{s}$, (b) the registered of the domain formation signal (the black curve) and spectra (the red curve), (c) the total displacement distribution measured for the time of 1 and $10\ \mu\text{s}$ in the case of the SH-SAW interaction, and (d) spectra of the input signal (the red curve) and output signal (the black curve)

formation process, where the displacement was produced in the volume of the crystal.

The acoustic wave interaction includes the SH-SAW transmission, the domain structure formation, and the interaction processes, simultaneously. The SH-SAW interaction was calculated for the time span from 0 to $10\ \mu\text{s}$ with results in Figures 1.2 (c) and 1.2 (d). The propagated SH-SAW interacts with the induced periodical structure, and results calculated for the time of 1 and $10\ \mu\text{s}$ were plotted in Figure 1.2 (c). Analyzing the displacement distribution in Figure 1.2 (c), the SH-SAW acoustic energy redistribution occurs in the volume of the crystal.

Need to note, that in case of the not matched interaction conditions, the propagation losses will increase. To analyze the acoustic wave interaction, the registered signal spectra (the black curves) and applied signal spectra (the red curve) were compared in Figure 1.2 (d). The resonances of both signals are located at 10 MHz, and related to the SH-SAW propagation. The single minimum of the output signal was found at 12.8 MHz. This result corresponds to the acoustic band gap caused due to SH-SAW interaction with the electroinduced periodical structure.

2 Experimental investigations of SAW interaction

Two types of SAW devices with different parameters of the ES were fabricated using a conventional lithography technique. The pitches between the electrode fingers of ES were of 1.0 and 0.5 wavelength. The thickness of the ferroelectric

waveguide was 250 μm . Electrode fingers material for both the IDT and ES was aluminum with thickness about 100 nm. Number of finger pairs for the IDT was 32, and the ES consists of 20 electrode fingers on the top and 116 on the bottom surfaces. The distance between IDT and ES was 32 wavelengths and corresponds to the matched interaction conditions.

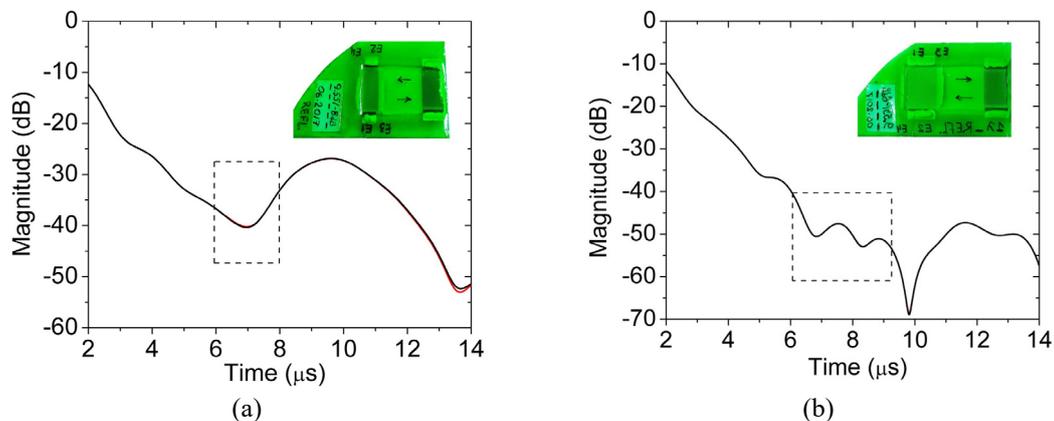


Figure 2.1 – Measured time response and the domain structure region (the dotted curve) and the fabricated sample photograph. (a) The ES with pitch of half wavelength, and (b) the ES with pitch of one wavelength

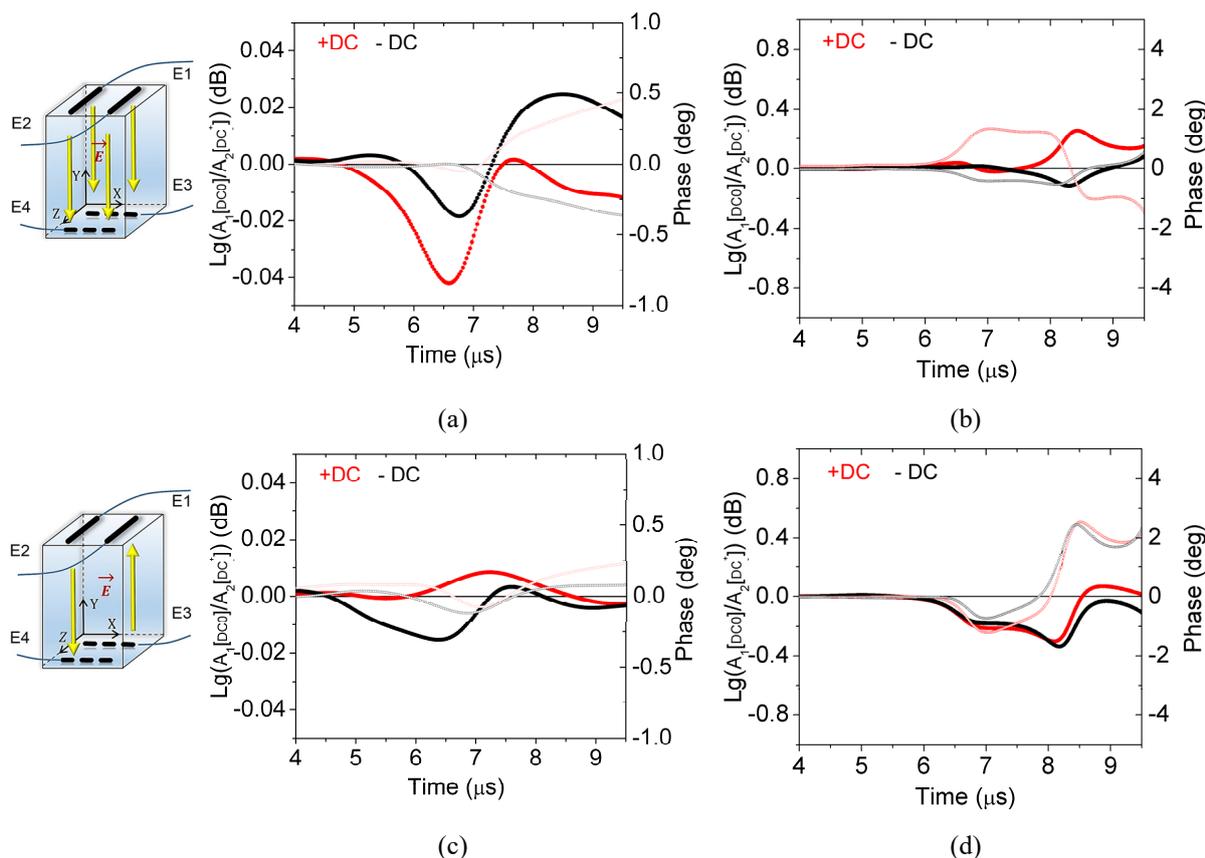


Figure 2.2 – Experimental results of the magnitude relative and phase absolute deviations of the reflected SH-SAW. (a) The domain structure with four codirected domains in the single domain unit and ES pitch of half wavelength, (b) the domain structure with four codirected domains in the domain unit and ES pitch of one wavelength, (c) the domain structure with two opposite directed domains in the domain unit and ES pitch of half wavelength, and (d) the domain structure with two opposite directed domains in the unit and ES pitch of one wavelength

The time response of the reflected signals for the both SH-SAW devices was measured, and the domain induced regions were concluded for both SAW devices. Figures 2.1 (a) and 2.1 (b) shows the measured reflected signals for SH-SAW devices with the pitch of half and one wavelength, respectively. The dashed region shows the location of the induced structure at the timeline scale. Here, the photographs of the fabricated SH-SAW devices with different ES are also shown.

The results of relative magnitude and absolute phase deviation for both studied SAW devices are plotted in Figure 2.2. Here, the results for the periodical structure, which represents the four codirected domains induced in a structural unit, are shown in Figures 2.2 (a) and 2.2 (b). The results obtained for the structure with two opposite directed domains are shown in Figures 2.2 (b) and 2.2 (d). Figures 2.2 (a) and 2.2 (c) describe the results measured for the ES pitch of 0.5, and Figures 2.2 (b) and 2.2 (d) of 1.0 wavelength. The positive +DC (the red curve), and negative –DC (the black curve) polarities of 200 V were applied. The measurement was carried out by the network analyzer (Agilent Technologies, E5070B) in frequency and time domains. To reduce the influence of the “0” level, it was measured for all domain configurations and DC polarities and normalized. During measurements, the ES was “shorted” for AC using the four high voltage capacitance of 0.1 mF connected in “bridge”. That allows reducing the influence occurred during switching of the domain structures. From Figure 2.2 the SH-SAW interaction dependence at the domain induced region on a DC polarity was observed for different domain configurations. Moreover, was found, that the different ESs are provide the different distribution and time shift of the reflected signal. For the ES pitch of one wavelength (Figures 2.2 (b) and 2.2 (d)), the wider region of interaction with different features was observed. However, for the discussed SH-SAW device structure, due to the effects of SH-SAW attenuation and acoustic wave reflection, the matched interaction properties are difficult. The registered signal represents the complex signal from the different acoustic modes which are propagates simultaneously.

In conclusion, the possibilities of the controllable interaction of the SH-SAW with the electroinduced periodical structures were shown theoretically and experimentally. The proposed SAW device structure and discussed interaction features show a good opportunity for advanced electronic applications, such as the controllable filter, delay line, as well as the complex multifunctional device for signal processing. The switchable induced structures allow controlling of the acoustic wave interaction. To achieve the matched conditions of interaction, the SAW device structure improvement is required. The regime of matched interaction allows increasing the SH-SAW parameters and new scattering effects

are reachable. As the way to improve of the domain formation and interaction parameters is the device based on the thin film structure, as well as the appropriate the ferroelectric substrates consideration are required.

REFERENCES

1. Hall, D.A. Nonlinearity in piezoelectric ceramics / D.A. Hall // *J. Mater. Sci.* – 2001. – № 36. – P. 4575.
2. Royer, D. Elastic Waves in Solids I / D. Royer, E. Dieulesain // Springer, Heidelberg. – 2000. – Vol. 1. – P. 216.
3. *Microwave a.c. conductivity of domain walls in ferroelectric thin film* / A. Tselev, P. Yu, Y. Cao, L.R. Dedon, L.W. Martin, S.V. Kalinin, P. Maksymovych // *Nat. Commun.* – 2016. – № 7. – P. 11630.
4. *Micro- and nano-domain engineering in lithium niobate* / V.Y. Shur, E.V. Pelegova, A.R. Akhmatkhanov, I.S. Baturin // *Ferroelectrics.* – 2016. – № 496:1. – P. 49–69.
5. Whyte, J.R. A diode for ferroelectric domain-wall motion / J.R. Whyte, J.M. Gregg // *Nat. Commun.* – 2015. – № 6. – P. 7361.
6. Wu, Y. Perspective: Acoustic metamaterials in transition / Y. Wu, M. Yang, P. Sheng // *J. Appl. Phys.* – 2018. – № 123. – P. 090901.
7. *Experimental realization of all-angle negative refraction in acoustic gradient metasurface* / B. Liu, B. Ren, J. Zhao, X. Xu, Y. Feng, W. Zhao, Y. Jiang // *Appl. Phys. Lett.* – 2017. – № 111. – P. 221602.
8. *Omnidirectional broadband acoustic absorber based on metamaterials* / H. Zhang, B. Liang, X. Zou, J. Yang, J. Yang, J. Cheng // *Appl. Phys. Exp.* – 2017. – № 10. – P. 027201.
9. *Lithium niobate phononic crystals for tailoring performance of RF laterally vibrating devices* / R. Lu, T. Manzanecque, Y. Yang, S. Gong // *IEEE Trans.* – 2018. – № 65 (6). – P. 934–944.
10. *Measurement of a broadband negative index with space-coiling acoustic metamaterials* / Y. Xie, B. Popa, L. Zigoneanu, S.A. Cummer // *Phys. Rev. Lett.* – 2013. – № 110. – P. 175501.
11. *Design of an acoustic metamaterial lens using genetic algorithms* / D. Li, L. Zigoneanu, B. Popa, S.A. Cummer // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2012. – № 132. – P. 2823.
12. *Zigoneanu, L. Design and measurements of a broadband two-dimensional acoustic lens* / L. Zigoneanu, B. Popa, S.A. Cummer // *Phys. Rev. B.* – 2011. – № 84. – P. 024305.
13. *Three-dimensional labyrinthine acoustic metamaterials* / T. Frenzel, J. D. Brehm, T. Buckmann, R. Schittny, M. Kadic, M. Wegener // *Appl. Phys. Lett.* – 2013. – № 103. – P. 061907.
14. *High-Q micromechanical resonators in a two-dimensional phononic crystal slab* / S. Mohammadi, A.A. Eftekhar, W.D. Hunt, A. Adibi // *Appl. Phys. Lett.* – 2009. – № 94. – P. 01KB05.

15. *Iwasaki, Y.* Rectification of Lamb wave propagation in thin plates with piezo-dielectric periodic structures / Y. Iwasaki, K. Tsuruta, A. Ishikawa // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 2016. – № 55. – P. 07KB02.
16. *Liang, B.* Acoustic diode: rectification of acoustic energy flux in one-dimensional systems / B. Liang, B. Yuan, J. Cheng // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – № 103. – P. 104301.
17. *Lu, M.* Phononic crystals and acoustic metamaterials / M. Lu, L. Feng, Y. Chen // *J. Materials Today.* – 2009. – № 12 (12). – P. 34–42.
18. *Laude, V.* Stochastic excitation method for calculating the resolvent band structure of periodic media and waveguides / V. Laude, M.E. Korotyaeva // *Phys. Rev. B.* – 2018. – № 97. – P. 224110.
19. *Acoustic far-field focusing effect for two-dimensional graded negative refractive-index sonic crystals* / S. Peng, Z. He, H. Jia, A. Zhang, C. Qiu, M. Ke, Z. Liu // *Appl. Phys. Lett.* – 2010. – № 96. – P. 263502.
20. *Electrical tuning of dc bias induced acoustic resonances in paraelectric thin films* / A. Noeth, T. Yamada, A.K. Tagantsev, N. Setter // *J. Appl. Phys.* – 2008. – № 104. – P. 094102.
21. *Active acoustic metamaterials reconfigurable in real time* / A. Popa, D. Shinde, A. Konneker, S.A. Cummer // *Phys. Rev. B.* – 2015. – № 91. – P. 220303.
22. *Chen, Z.* Tunable topological phononic crystals / Z. Chen, Y. Wu // *Phys. Rev. Appl.* – 2016. – № 5. – P. 054021.
23. *Pashchenko, V.P.* Controlled surface acoustic wave phononic crystal based on induced periodic domains / V.P. Pashchenko // *Proc. St. Petersburg State Polytechnic University.* – 2013. – № 3 (177). – P. 55–59.
24. *Barsukov, S.D.* Acoustic waves in ceramics with the electroinduced anisotropy / S.D. Barsukov, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko // *Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems.* – 2009. – Vol. 3, № 4. – P. 34.
25. *Periodic domain inversion in x-cut single-crystal lithium niobate thin film* / P. Mackwitz, M. Rüsing, G. Berth, A. Widhalm, K.Müller, A. Zrenner // *Appl. Phys. Lett.* – 2016. – № 108. – P. 152902.
26. *Barsukov, S.D.* Investigation of interaction of shear horizontal surface acoustic wave with controlled electroinduced domain structure / S.D. Barsukov, J. Kondoh // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 2017. – № 56. – P. 07JD07.

Поступила в редакцию 21.09.18.

УДК 535.42

ОПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ ВЕБЕРА – ГАУССА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

OPTICAL WEBER – GAUSS BEAMS

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Найдены и анализируются аналитические выражения в замкнутой форме для оптических пучков Вебера – Гаусса ($W-G$). Установлены физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков. Выполнено графическое моделирование пучков $W-G$ и показано, что комплексные значения свободного параметра a являются физически приемлемыми.

Ключевые слова: пучки, пучки Вебера – Гаусса, параболические гауссовы пучки, пучки Гельмгольца – Гаусса.

Analytical expressions in the closed shape for optical Weber – Gauss ($W-G$) beams are found and analyzed. Physical restrictions on possible values of the free parameters of such beams are discovered. Pictorial modelling of $W-G$ beams is fulfilled and it is shown that complex values of the free parameter a are physically comprehensible.

Keywords: beams, Weber – Gauss beams, parabolic Gauss beam, Helmholtz – Gauss beams.

Введение

По-прежнему актуальны в настоящее время поиск и исследования новых типов световых пучков [1]–[4]. Большой интерес привлекает семейство пучков Гельмгольца – Гаусса ($HL-G$) [5]. Из них наиболее исследованы пучки Бесселя [6], [2] и Бесселя – Гаусса [7], [8]. Слабо изучены решения волнового уравнения в параболической системе координат, описывающие волновые поля Вебера [3], [4] и пучки Вебера – Гаусса ($W-G$) (или параболические гауссовы пучки) [5], [9].

В настоящей работе получены аналитические выражения в замкнутом виде, описывающие пучки $W-G$. Установлены физические ограничения на возможные значения свободных параметров таких пучков. Проведено графическое моделирование пучков $W-G$ и показано, что комплексные значения свободного параметра a являются физически приемлемыми.

1 Параксиальные волновые поля Вебера

Для монохроматических волн вида $f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}) \exp(ik_z z - i\omega t)$ скалярное параболическое уравнение для огибающей $f(\mathbf{r})$, описывающее параксиальные световые пучки, имеет вид [1] $(\Delta_{\perp} + 2ik_{\perp} \partial_z) f(\mathbf{r}) = 0$.

Разделяя переменные подстановкой $f(\mathbf{r}) = f_{12}(\mathbf{r}_{\perp}) f_3(z)$ получаем функцию $f_3(z) = \exp(-ik_{\perp}^2 q / (2k))$, где $q = z - iq_0^*$ – стандартный комплексный параметр пучка, и $2D$ уравнение Гельмгольца

$$(\Delta_{\perp} + k_{\perp}^2) f_{12}(\mathbf{r}_{\perp}) = 0, \quad (1.1)$$

где $k_{\perp}^2 = k^2 - k_z^2$. Перейдем к параболической

цилиндрической системе координат подстановкой $[x = (\eta^2 - \xi^2) / 2; y = \xi\eta]$ [10], [3]. Теперь уравнение (1.1) принимает вид

$$(\partial_{\xi\xi}^2 + \partial_{\eta\eta}^2) + k_{\perp}^2 (\xi^2 + \eta^2) f_{12}(\xi, \eta) = 0. \quad (1.2)$$

Разделяя переменные подстановкой $f_{12}(\xi, \eta) = f_1(\xi) f_2(\eta)$ получаем два независимых дифференциальных уравнения типа Вебера

$$d_{\xi\xi}^2 f_1(\xi) + (k_{\perp}^2 \xi^2 - 2k_{\perp} a) f_1(\xi) = 0; \quad (1.3)$$

$$d_{\eta\eta}^2 f_2(\eta) + (k_{\perp}^2 \eta^2 + 2k_{\perp} a) f_2(\eta) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь a – безразмерная постоянная разделения переменных.

Уравнения (1.3), (1.4) имеют по два независимых решения, которые можно выразить через различные специальные функции, например, через функции параболического цилиндра или функции Уиттекера. Целесообразным представляется выразить решения уравнения (1.3) через функцию Куммера M (вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1$). Тогда четные и нечетные решения для функций $f_1(\xi)$ следующие:

$$f_1(\xi) = \left[A_1 M \left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; ik_{\perp} \xi^2 \right) + A_2 \xi M \left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; ik_{\perp} \xi^2 \right) \right] \times \exp \left(-\frac{ik_{\perp} \xi^2}{2} \right) \equiv f_{1e}(\xi, -a) + f_{1o}(\xi, -a).$$

A_1 и A_2 – произвольные константы. Индексы снизу e и o обозначают чётные и нечётные относительно аргумента ξ решения.

Функции $f_2(\eta)$ получаются из $f_1(\xi)$ заменами $\xi \rightarrow \eta$, $a \rightarrow -a$.

$$f_2(\eta) = \left[B_1 M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; ik_{\perp} \eta^2\right) + B_2 \eta M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; ik_{\perp} \eta^2\right) \right] \exp\left(-\frac{ik_{\perp} \eta^2}{2}\right) \equiv f_{2e}(\eta, a) + f_{2o}(\eta, a).$$

Чтобы функция f_{12} в (1.2) была непрерывной во всём пространстве, следует для общего решения $f(\mathbf{r})$ выбирать только произведения функций одинаковой чётности по η и ξ , т. е.

$$f_o(\mathbf{r}) = f_{2o}(\eta, a) f_{1o}(\xi, -a) f_3(z);$$

$$f_e(\mathbf{r}) = f_{2e}(\eta, a) f_{1e}(\xi, -a) f_3(z).$$

Теперь четные и нечетные решения для парааксиальных параболических полей (пучков Вебера) соответственно равны:

$$f_e = M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; ik_{\perp} \eta^2\right) \cdot M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; ik_{\perp} \xi^2\right) \times \exp\left[-\frac{ik_{\perp}}{2} \left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{k_{\perp} q}{k}\right)\right]. \quad (1.5)$$

$$f_o = \xi \eta M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; ik_{\perp} \eta^2\right) \cdot M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; ik_{\perp} \xi^2\right) \times \exp\left[-\frac{ik_{\perp}}{2} \left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{k_{\perp} q}{k}\right)\right]. \quad (1.6)$$

Поперечные картины полученных парааксиальных пучков представляют собой наложение системы софокусных парабол. Поэтому пучки называются параболическими. Кроме того, параболические пучки ещё часто называют пучками Вебера. Параболические волновые поля зависят от двух координат η , ξ и параметров a и k_{\perp} . Эти поля, как и поля Бесселя, являются бездифракционными [3], поскольку их амплитуды в поперечной плоскости не зависят от z . Как и поля Бесселя, параболические поля обладают свойством самовосстановления после препятствия.

2 Пучки Вебера – Гаусса

Параболические пучки или, что то же самое, пучки Вебера переносят бесконечную энергию и поэтому физически не реализуемы во всём пространстве. Чтобы найти выражения, описывающие пучки с параболической симметрией, обладающие конечной энергией, необходима гауссова аподизация выражений (1.5), (1.6). Пучки $W-G$, обладающие конечной энергией, проще всего получить из парааксиальных пучков Вебера (1.5), (1.6), применяя преобразование Аппеля [10] в форме [8]

$$f(x, y, q) \rightarrow G f\left(\frac{x}{\beta q}, \frac{y}{\beta q}, -\frac{1}{\beta^2 q}\right).$$

При этом $\xi \rightarrow \xi \sqrt{1/(\beta q)}$, $\eta \rightarrow \eta \sqrt{1/(\beta q)}$. Здесь

β – размерная константа,

$$G = \frac{1}{q} \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2q}\right]$$

– гауссиан.

В итоге четные и нечетные пучки $W-G$ (с точностью до постоянного множителя) описываются выражениями

$$f_{W-G,e} = \frac{1}{q} M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{k_{\perp} \eta^2}{\beta q}\right) \times M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{k_{\perp} \xi^2}{\beta q}\right) \exp\left[\frac{ik}{2q} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - \frac{k_{\perp}}{k\beta}\right)^2\right],$$

$$f_{W-G,o} = \frac{\xi \eta}{\beta q} M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{k_{\perp} \eta^2}{\beta q}\right) \times M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{k_{\perp} \xi^2}{\beta q}\right) \exp\left[\frac{ik}{2q} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - \frac{k_{\perp}}{k\beta}\right)^2\right].$$

Пучки $W-G$ зависят от трех пространственных переменных (ξ, η, z) и пяти свободных параметров $(k, k_{\perp}, z_0, q_0, a)$. Отметим, что явные выражения для пучков $W-G$ в [5], [9] не приведены. Для наглядности выразим переменные ξ и η как $\xi^2 = \rho - x$; $\eta^2 = \rho + x$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. В качестве константы β возьмем $\beta = i/z_0$. Тогда четные и нечетные пучки $W-G$ описываются соответственно выражениями

$$f_{W-G,e} = \frac{1}{q} M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{k_{\perp} z_0 (\rho + x)}{q}\right) \times M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{k_{\perp} z_0 (\rho - x)}{q}\right) \exp\left[\frac{ik}{2q} \left(\rho + \frac{ik_{\perp} z_0}{k}\right)^2\right],$$

$$f_{W-G,o} = \frac{y z_0}{q^2} M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{k_{\perp} z_0 (\rho + x)}{q}\right) \times M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{k_{\perp} z_0 (\rho - x)}{q}\right) \exp\left[\frac{ik}{2q} \left(\rho + \frac{ik_{\perp} z_0}{k}\right)^2\right].$$

3 Нормированные пучки Вебера – Гаусса

Чтобы уменьшить число свободных параметров и записать выражения в более общем виде, перейдем к безразмерным величинам, используя характерные продольный и поперечный линейные размеры пучка z_0 и x_0 : $z_0 = kx_0^2/2$. Тогда безразмерные переменные и параметры:

$$X = \frac{x}{x_0}; \quad Y = \frac{y}{x_0}; \quad K_{\perp} = k_{\perp} x_0;$$

$$Q = q/z_0 \equiv Z - iQ_0; \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\rho}{x_0}.$$

Окончательно, явные выражения в безразмерной замкнутой форме для четных и нечетных пучков $W-G$ соответственно имеют вид:

$$f_{W-Q,e} = \frac{1}{Q} M\left(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{K_{\perp}(R+X)}{Q}\right) \times \quad (3.1)$$

$$\times M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}; \frac{K_{\perp}(R-X)}{Q}\right) \exp\left[\frac{i}{Q}\left(R + \frac{iK_{\perp}}{2}\right)^2\right],$$

$$f_{W-Q,o} = \frac{Y}{Q^2} M\left(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{K_{\perp}(R+X)}{Q}\right) \times \quad (3.2)$$

$$\times M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}; \frac{K_{\perp}(R-X)}{Q}\right) \exp\left[\frac{i}{Q}\left(R + \frac{iK_{\perp}}{2}\right)^2\right].$$

Поля Вебера (параболического цилиндра) являются решениями уравнения Гельмгольца в параболической системе координат и, как хорошо известно [11], выражаются через функции параболического цилиндра с комплексными параметрами. Бэндрес и др. [3] предложили использовать вещественные решения уравнения Гельмгольца в параболических координатах через функции P_e и P_o , которые выражаются через ряды с вещественными членами. Однако явные замкнутые аналитические выражения для функций Бэндреса P_e и P_o и для пучков $W-G$ в литературе, насколько нам известно, не приводятся. Выражения (3.1) и (3.2) являются основным результатом работы.

Пучки $W-G$ в безразмерной форме зависят от трех пространственных переменных (X, Y, Z) и только от трех свободных параметров (K_{\perp}, a, Q_0) . Такие пучки должны быть физически реализуемыми, т. е. переносить конечную мощность. Используя подход [8] для нахождения ограничений на параметры пучков Бесселя – Гаусса, нетрудно показать, что условие конечной переносимой мощности для пучков $W-G - Q_0 > 0$. При этом на параметры K_{\perp} и a не накладываются никакие ограничения. Они могут быть произвольными комплексными константами.

4 Графическое моделирование картин распределения интенсивности пучков Вебера – Гаусса

Пучки $W-G$ принадлежат семейству пучков $HL-G$, введенных Бэндресом и др. [5]. Для характеристики пучков $HL-G$ ранее был введен параметр

$\gamma = k_{\perp} w_0 / 2$ [5]. При $\gamma > 1$, согласно [7], [5], пучок $HL-G$ сохраняет свои бездифракционные свойства до расстояния $z_{\max} = k w_0 / k_{\perp}$, а затем расходится, образуя кольцеобразную картину интенсивности.

Произведем численные оценки различных величин пучков $W-G$. Как и в работе [5], полагаем, что длина волны $\lambda = 0.63 \cdot 10^{-6}$ м, размер перетяжки гауссиана $w_0 \approx 2 \cdot 10^{-3}$ м. Тогда волновое число $k \approx 10^7$ м. Пусть далее параметр $k_{\perp} = 10^4$ м⁻¹, $x_0 = w_0$, и $Q_0 = 1$. В наших безразмерных обозначениях $K_{\perp} \approx 20$, $\gamma = K_{\perp} / 2 \approx 10$. Безразмерное расстояние $Z_{\max} = z_{\max} / z_0 = 2 / K_{\perp}$, до которого пучок $W-G$ всё еще сохраняет свое недифрагирующе-подобное поведение, равно $Z_{\max} \approx 0.1$. Графическое моделирование подтверждает эти теоретические оценки.

Картинки интенсивности могут быть самыми разнообразными в зависимости от задаваемых параметров a , K_{\perp} и расстояния Z . Они инвариантны относительно преобразований $(a \rightarrow -a)$ и $(x \rightarrow -x)$. Ось OX является осью симметрии. При $a = 0$ возникает дополнительная симметрия картин относительно оси OY .

На рисунке 4.1 изображены картинки интенсивности в поперечных сечениях пучков $W-G$ при $a = 0$ и различных расстояниях Z в области недифрагирования. Картинки представляют собой семейство софокусных парабол, которое с возрастанием Z остается практически неизменным. На параболы накладывается пятно гауссиана, которое с увеличением Z расширяется.

До настоящего времени рассматривались [5], [4], [9] только вещественные параметры a . Однако a могут быть любыми. При чисто мнимых a индексы функций Куммера становятся вещественными. Такие пучки $W-G$ пока не изучались. Например, при $a = i/2$ четный пучок $W-G$ редуцируется к децентрированному (смещенному) гауссову пучку

$$f_{W-Q,e} = \frac{1}{Q} \exp\left[\frac{i}{Q}\left(Y^2 + \left(X + \frac{iK_{\perp}}{2}\right)^2\right)\right].$$

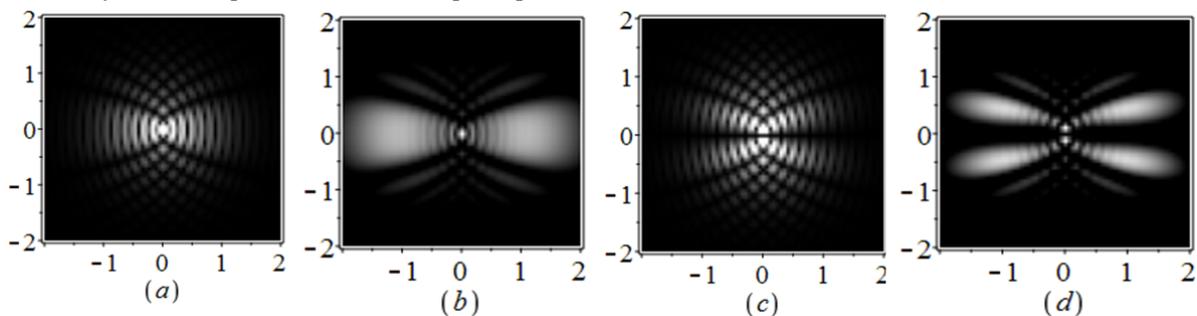


Рисунок 4.1 – Картинки интенсивности I_o четных и I_e нечетных пучков Вебера – Гаусса

(a): $I_e, a = 0, Z = 0$; (b): $I_e, a = 0, Z = 0.06$; (c): $I_o, a = 0, Z = 0.12$.

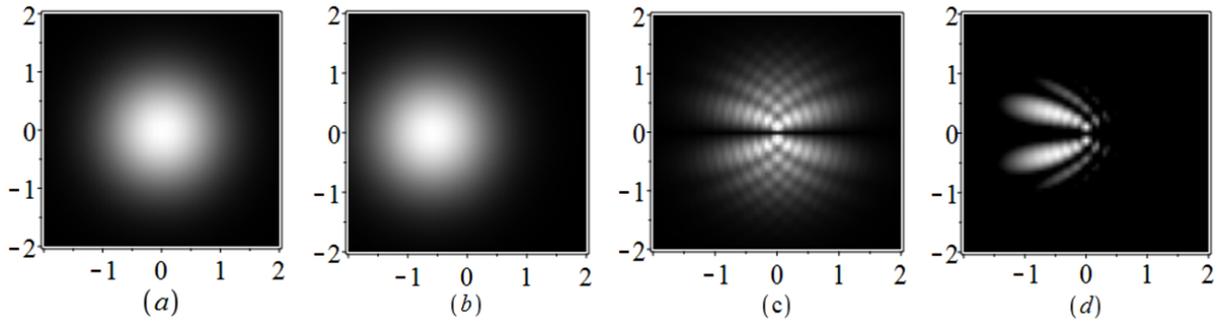


Рисунок 4.2 – Картины интенсивности I_e четных и I_o нечетных пучков $W-G$ при чисто мнимых значениях параметра a . (a): $I_e, a = i/2, Z = 0$; (b): $I_e, a = i/2, Z = 0.06$; (c): $I_o, a = i/2, Z = 0$; (d): $I_o, a = i/2, Z = 0.06$.

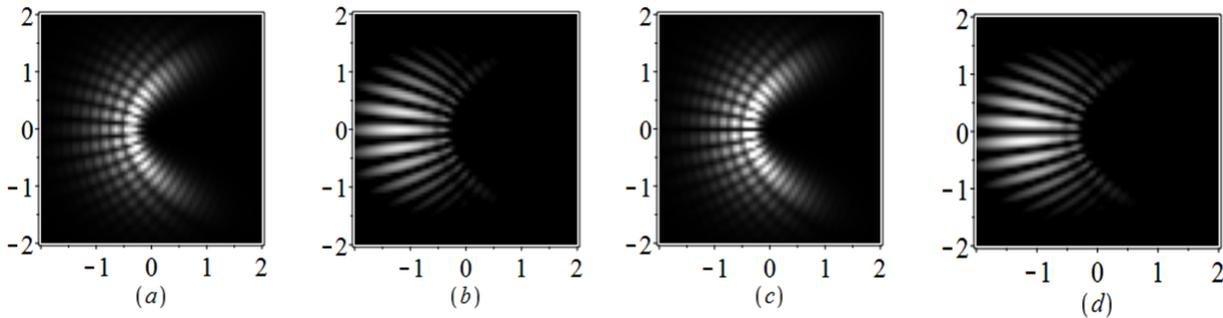


Рисунок 4.3 – Картины интенсивности I_e четных и I_o нечетных пучков $W-G$ при комплексных значениях параметра a . (a): $I_e, a = i/2 + 6, Z = 0$; (b): $I_e, a = i/2 + 6, Z = 0.12$; (c): $I_o, a = i/2, Z = 0$; (d): $I_o, a = i/2, Z = 0.12$.

Рисунок 4.2 подтверждает этот вывод. На нем изображены картины интенсивности I_o четных и I_e нечетных пучков $W-G$ при чисто мнимых значениях параметра a . Видно, что с увеличением расстояния Z в области бездифракционности картина парабол остается практически неизменной, а гауссово пятно смещается влево вдоль оси OX .

На рисунке 4.3 представлены картины интенсивности I_o четных и I_e нечетных пучков Вебера – Гаусса при комплексных значениях параметра a . Видно, что с увеличением расстояния Z в области бездифракционности картина парабол остается практически неизменной, а гауссово пятно смещается влево вдоль оси OX .

Заключение

В данной работе исследуются свойства пучков $W-G$. Найдены явные выражения для пучков $W-G$ в безразмерной замкнутой форме. Показано, что свойства пучков $W-G$ зависят от трех пространственных переменных (X, Y, Z) и только от трех свободных параметров K_{\perp}, a, Q_0 . Условия переносимой конечной мощности этих пучков – $Q_0 > 0$. На параметры K_{\perp} и a не накладываются никакие ограничения. Они могут быть произвольными комплексными константами.

Проведенное графическое моделирование интенсивности пучков Вебера – Гаусса с различными значениями свободного параметра a (включая комплексные) показало, что картины интенсивности отражают параболическую симметрию таких мод.

Варьирование комплексных свободных параметров a и K_{\perp} таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.
2. Girdel, S.S. Vectorial of Bessel light beams / S.S. Girdel, S.N. Kurilkina // Proc. SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 258–264.
3. Bandres, M.A. Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // Optics Letters. – 2004. – Vol. 29, № 1. – P. 44–46.
4. Rodriguez-Lara, B.M. Dynamical constants of structured photons with parabolic-cylindrical symmetry / B.M. Rodriguez-Lara, R. Jauregui // Phys. Rev. A. – 2009. – Vol. 79, № 5. – P. 055806(4).

5. *Gutierrez-Vega, J.C.* Helmholtz-Gauss waves / J.C. Gutierrez-Vega, M.A. Bandres // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 25, № 2. – P. 289–298.
6. *Durnin, J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // *JOSA A.* – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.
7. *Gori, F.* Bessel-Gaussian beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // *Opt. Commun.* – 1987. – Vol. 64. – P. 491–495.
8. *Гиргель, С.С.* Обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2015. – № 4 (25). – С. 11–15.
9. *Rodriguez-Lara, B.M.* Normalization of optical Weber waves and Weber – Gauss beams / B.M. Rodriguez-Lara // *JOSA A.* – 2010. – Vol. 27, № 2. – P. 327–332.
10. *Миллер, У.* Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 342 с.
11. *Абрамовиц, М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Поступила в редакцию 22.08.18.

ГРАНИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ СОСТОЯНИЯ РАСТЯНУТОЙ ЖИДКОСТИ

Е.А. Дей, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

BOUNDARY PARAMETERS FOR STRETCHED FLUID STATE

E.A. Dey, G.Yu. Tyumenkov

F. Scorina Gomel State University

В рамках термодинамического метода исследования на основе различных двухпараметрических уравнений состояния получены выражения для расчета граничных параметров, определяющих возникновение состояния растянутой жидкости. Определены численные значения верхней температурной границы и соответствующего объема для состояния растянутой жидкости в приведенных переменных.

Ключевые слова: граничные параметры, растянутая жидкость, приведенные переменные, двухпараметрическое уравнение состояния.

In the framework of the thermodynamic method of investigation based on various two-parameter equations of state the explicit forms for calculation of boundary parameters determining the occurrence of stretched fluid state are obtained. The numerical values of the upper temperature limit and the corresponding volume for the state of the stretched fluid in the reduced variables are determined.

Keywords: boundary parameters, stretched fluid, reduced variables, two-parameter equation of state.

Введение

Метаустойчивое состояние растянутой жидкости (*stretched fluid state*), при котором реализуется отрицательное давление, изучается экспериментально в течение длительного времени [1]. Теоретическое объяснение возникновения такого состояния связано с существованием локального минимума на подкритических изотермах в моделях реального газа (жидкости) [2]. Граничной для возникновения растянутого состояния будет изотерма, у которой локальный минимум лежит на оси V ($P = 0$) в координатах V - P (рисунок 0.1). Положение этой точки и определяет параметры состояния V_{sf} , T_{sf} , начиная с которых возможно возникновение состояния растянутой жидкости при уменьшении температуры или объема. Поскольку локальные минимумы изотерм составляют левую ветвь спинодали в плоскости V - P , граничное состояние является также и точкой пересечения спинодали с осью V .

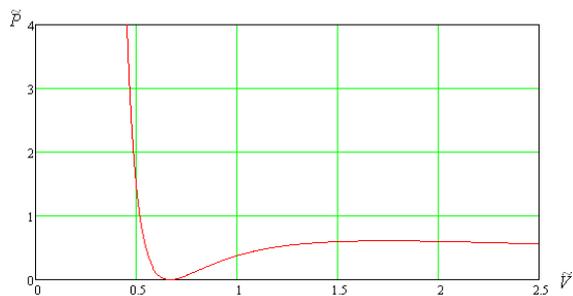


Рисунок 0.1 – Положение граничной изотермы состояний растянутой жидкости для уравнения Ван-дер-Ваальса в приведенных переменных

В работах [2]–[4] параметры граничного состояния растянутой жидкости были определены на основании уравнения Ван-дер-Ваальса.

В данной работе получены выражения для параметров V_{sf} , T_{sf} граничного состояния растянутой жидкости на основе ряда двухпараметрических уравнений состояния как с постоянными, так и с температурно-зависимыми параметрами. Основные соотношения получены как в обычных переменных (P , V , T), так и в приведенных безразмерных переменных (\tilde{P} , \tilde{V} , \tilde{T}).

Математическое условие определения параметров описанного граничного состояния для стандартной и приведенной форм уравнений состояния имеет вид

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_{sf}} = 0, \\ P(T_{sf}, V_{sf}) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{V}} \right)_{\tilde{T}_{sf}} = 0, \\ \tilde{P}(\tilde{T}_{sf}, \tilde{V}_{sf}) = 0. \end{cases} \quad (0.1)$$

1 Параметры граничных изотерм классических двухпараметрических уравнений состояния

Рассмотрим часто используемое в практических расчетах уравнение Редлиха – Квонга [5], имеющее следующий стандартный вид

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{\sqrt{TV}(V+b)}, \quad (1.1)$$

и приведенную форму [6]

$$\tilde{P} = \frac{3\tilde{T}}{\tilde{V}-\xi} - \frac{1}{\xi\sqrt{\tilde{T}}\tilde{V}(\tilde{V}+\xi)}, \quad (1.2)$$

где $\xi = \sqrt[3]{2} - 1 = 0,25992 \approx 0,260$.

Применение к уравнению (1.1) критерия (0.1) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{RT_{sf}}{(V_{sf}-b)^2} = \frac{a}{\sqrt{T_{sf}}} \frac{(2V_{sf}+b)}{V_{sf}^2(V_{sf}+b)^2}, \\ \frac{RT_{sf}}{V_{sf}-b} = \frac{a}{\sqrt{T_{sf}}} \frac{1}{V_{sf}(V_{sf}+b)}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Решение системы дает значения параметров

$$\begin{aligned} V_{sf} &= \eta b = 2,42421b, \\ T_{sf} &= \left(\frac{a}{\eta^2 b R}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,30877 \left(\frac{a}{b R}\right)^{\frac{2}{3}}, \\ \eta &= (\sqrt{2} + 1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решать аналогичную систему уравнений для приведенной формы (1.2) необязательно, так как можно использовать критические параметры уравнения состояния, полученные в работе [3]:

$$V_c = \frac{b}{\xi}, \quad T_c = \left(\frac{3a\xi^2}{bR}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad P_c = \left(\frac{Ra^2\xi^7}{3b^5}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

И на основе определения (0.1) находим, что

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{sf} &= \xi\eta = 0,62750; \\ \tilde{T}_{sf} &= (3\xi^2\eta^2)^{-\frac{2}{3}} = 0,89488. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Полученные результаты определяют диапазоны изменения объема и температуры, в пределах которых рассмотренное уравнение допускает существование состояний жидкости с отрицательными давлениями

$$\begin{aligned} 0 < T < T_{sf}, \quad b < V < V_{sf}; \\ 0 < T < \tilde{T}_{sf}, \quad \xi < V < \tilde{V}_{sf}. \end{aligned}$$

Приведем результаты, полученные для некоторых часто используемых двухпараметрических уравнений состояния [7]:

– уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\begin{aligned} P &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \quad V_{sf} = 2b, \quad T_{sf} = \frac{a}{4bR}; \\ \tilde{P} &= \frac{8\tilde{T}}{3\tilde{V}-2} - \frac{3}{\tilde{V}^2}, \quad \tilde{V}_{sf} = \frac{2}{3} = 0,66667, \\ \tilde{T}_{sf} &= \frac{27}{32} = 0,84375. \end{aligned} \quad (1.7)$$

– уравнение Бертло

$$\begin{aligned} P &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^2}, \quad V_{sf} = 2b, \quad T_{sf} = \sqrt{\frac{a}{4bR}}; \\ \tilde{P} &= \frac{8\tilde{T}}{3\tilde{V}-1} - \frac{3}{\tilde{T}\tilde{V}^2}, \quad \tilde{V}_{sf} = \frac{2}{3} = 0,66667, \\ \tilde{T}_{sf} &= \sqrt{\frac{27}{32}} = 0,91856. \end{aligned} \quad (1.9)$$

– второе уравнение Дитеричи

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^{\frac{5}{3}}}, \quad V_{sf} = \frac{5}{2}b = 2,5b,$$

$$T_{sf} = \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{a}{Rb^{\frac{5}{3}}} = 0,32573 \frac{a}{Rb^{\frac{5}{3}}}; \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{15\tilde{T}}{4\tilde{V}-1} - \frac{4}{\tilde{V}^{\frac{5}{3}}}, \quad \tilde{V}_{sf} = \frac{5}{8} = 0,625, \\ \tilde{T}_{sf} &= \frac{64}{125} \sqrt[3]{5} = 0,87551. \end{aligned} \quad (1.11)$$

2 Получение результатов для уравнения состояния с температурно-зависимым параметром

Аналогичным образом можно выполнить рассмотрение уравнений состояния реальных газов (жидкостей) с параметрами, явным образом зависящими от приведенной температуры. Одним из первых таких уравнений было уравнение Соаве – Редлиха – Квонга [8], в котором в параметр a введена зависимость от приведенной температуры и ацентрического фактора Питцера ω , учитывающего несимметричность молекул индивидуального вещества:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a_c \alpha(\tilde{T})}{V(V+b)},$$

$$\alpha(T) = \left[1 + m(\omega)(1 - \sqrt{T})\right]^2,$$

$$m(\omega) = 0,48508 + 1,55171\omega - 0,15613\omega^2. \quad (2.1)$$

Для воды $\omega = 0,3443$ [9]. В критической точке $\alpha(1) = 1$. Приведенная форма уравнения имеет вид

$$\tilde{P} = \frac{3\tilde{T}}{\tilde{V}-\xi} - \frac{\alpha(\tilde{T})}{\xi\tilde{V}(\tilde{V}+\xi)}, \quad (2.2)$$

На основании (0.1) из (2.2) получаем

$$\tilde{V}_{sf} = \xi\eta = 0,627505, \quad \xi = \sqrt[3]{2} - 1, \quad \eta = \sqrt{2} + 1,$$

$$\tilde{T}_{sf} = k \left[\frac{1+m(\omega)}{1+\sqrt{k}m(\omega)} \right], \quad k = \frac{1}{3\xi^2\eta^2}. \quad (2.3)$$

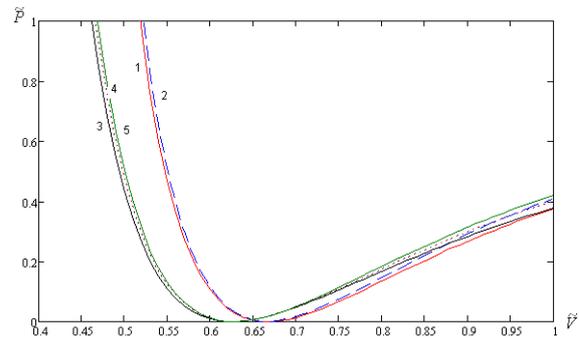


Рисунок 2.1 – Графики изотерм для двухпараметрических уравнений состояния в приведенных координатах:

- 1 – уравнение Ван-дер-Ваальса;
- 2 – уравнение Бертло;
- 3 – второе уравнение Дитеричи;
- 4 – уравнение Редлиха – Квонга;
- 5 – уравнение Соаве – Редлиха – Квонга при $\omega = 0,3443$.

Для значения $\omega = 0,3443$ (вода) на основании (2.3) получаем $\tilde{T}_{sf} = 0,91851$.

Графики рассмотренных граничных изотерм в окрестности точки касания приведены на рисунке 2.1. Точка касания на оси \tilde{V} соответствует значению \tilde{V}_{sf} , а сами кривые построены на основании уравнения состояния, записанного в приведенных переменных, при $\tilde{T} = \tilde{T}_{sf}$, то есть, $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{V}, \tilde{T}_{sf})$.

Заключение

Таким образом, в работе на основе уравнений Ван-дер-Ваальса, Бертло, Дитеричи-П, Редлиха – Квонга и Соаве – Редлиха – Квонга получены аналитические выражения (в обычных и приведенных переменных) для расчета параметров граничного состояния, определяющего возникновение фазы растянутой жидкости.

Полученные соотношения использованы для расчета численных значений граничных параметров состояния растянутой жидкости в приведенных переменных (таблица).

Таблица – Численные значения параметров граничного состояния для растянутой жидкости

Уравнение	\tilde{V}_{sf}	\tilde{T}_{sf}
Ван-дер-Ваальса	0,66667	0,84375
Бертло	0,66667	0,91856
Дитеричи-2	0,62500	0,87551
Редлиха – Квонга	0,62750	0,89488
Соаве – Редлиха – Квонга при $\omega = 0,3443$	0,62750	0,91851

Следует отметить малое различие численных значений параметров граничного состояния, полученных на основе разных уравнений, тогда как другие термодинамические характеристики реального вещества (например, кривые инверсии эффекта Джоуля – Томсона) рассмотренные уравнения описывают с существенным различием [6].

Наиболее близкое к наблюдаемому на эксперименте значению $\tilde{T}_{sf,exp} = 0,92$ [10], как следует из таблицы, дают уравнение Бертло и уравнение Соаве – Редлиха – Квонга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейуорд, А. Отрицательные давления в жидкостях: как их заставить служить человеку? / А. Хейуорд // УФН. – 1972. – Т. 108, вып. 2. – С. 303–318.
2. Колгатин, С.Н. Критическая точка, бинадаль, спинопаль и отрицательные давления на примере уравнения Ван-дер-Ваальса / С.Н. Колгатин // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2012. – Т. 3, № 2. – С. 199–205.
3. Imre, A. Thermodynamics of Negative Pressures in Liquids / A. Imre, K. Martinas, L.P.N. Rebelo // J. Non-Equilibr. Thermodyn. – 1998. – Vol. 23. – P. 351–375.
4. Imre, A.R. On the existence of negative pressure states / A.R. Imre // Phys. Stat. Sol. (B). – 2007. – Vol. 244, № 3. – P. 893–899.
5. Redlich, O. On the thermodynamics of solutions V. An equation of state: fugacity of gaseous solutions / O. Redlich, J.N.S. Kwong // Chemical Reviews. – 1949. – Vol. 44. – P. 233–244.
6. Дей, Е.А. Расчет параметров изотермического охлаждения газов Редлиха – Квонга / Е.А. Дей, О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 39–42.
7. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 2000. – 608 с.
8. Soave, G. Equilibrium constants from a modified Redlich-Kwong equation of state / G. Soave // Chem. Eng. Science. – 1972. – Vol. 27. – P. 1197–1203.
9. Velasco, S. Extended corresponding states expressions for the changes in enthalpy, compressibility factor and constant-volume heat capacity at vaporization / S. Velasco, M.J. Santos, J.A. White // J. Chem. Thermodynamics – 2015. – Vol. 85. – P. 68–76.
10. Теплофизические свойства жидкостей в метастабильном состоянии. Справочник / В.П. Скрипов [и др.]. – М.: Атомиздат, 1980. – 208 с.

Поступила в редакцию 14.10.18.

УДК 661.8

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЗАЩИТНЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ОКСИДОВ Si, Ti, Zr И ИХ КОМПЛЕКСОВ

Д.Л. Коваленко¹, В.Е. Гайшун¹, В.В. Васьеви́ч¹, А.С. Русыкин¹,
М.И. Москвичёв¹, В.А. Черчук¹, С. Мхин²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Корейский институт промышленных технологий, Сеул

RESEARCH OF STRUCTURAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF PROTECTIVE SOL-GEL COATINGS BASED ON OXIDES Si, Ti, Zr AND THEIR COMPLEXES

D.L. Kovalenko¹, V.E. Gaishun¹, V.V. Vaskevich¹, A.S. Rusykin¹,
M.I. Moskvichev¹, V.A. Cherchuk¹, S. Mhin²

¹F. Scorina Gomel State University

²Korea Institute of Industrial Technology, Seoul

Описан золь-гель-метод получения защитных покрытий на основе оксидов кремния, титана и циркония, содержащих армирующие добавки: мелкодисперсный порошок углерода и оксид титана. Определены оптимальные условия синтеза и описан способ формирования получаемых материалов. Представлены исследования адгезии полученных покрытий и влияние армирующих добавок на твердость и прочность при ударе сформированных защитных золь-гель покрытий.

Ключевые слова: золь-гель технология, защитные покрытия, адгезия, твердость, гидрофобные свойства.

A sol-gel method for producing protective coatings based on silicon, titanium and zirconium oxides containing reinforcing additives: carbon powder and titanium oxide is presented. The optimal synthesis conditions are determined and the main regime of formation of the obtained materials is described. The investigation of the adhesion of the obtained coatings and studying the effect of adding reinforcing additives on the hardness and impact strength of the formed protective sol-gel coatings are presented.

Keywords: sol-gel technology, protective coatings, adhesion, hardness, hydrophobic properties.

Введение

Проблема повышения коррозионной и термической стойкости деталей из металлов и сплавов является весьма актуальной и ее решение зачастую, не всегда эффективно и связано с большими материальными затратами. В последние годы значительно возрос интерес к разработке новых методов обработки рабочих поверхностей узлов изделий, в числе которых важное место занимают методы вакуумного осаждения функциональных покрытий, приводящие к изменению структуры и состава поверхностных слоев и, в конечном счете, к повышению эксплуатационных характеристик изделий, использующихся в условиях агрессивных сред. Одним из прогрессивных и быстроразвивающихся методов получения покрытий с заданными свойствами является золь-гель метод. С использованием этого метода возможно получать многослойные покрытия, состоящие из слоев разного состава, для улучшения не только адгезионных свойств, но и для придания получаемым материалам улучшенных физико-химических и структурно-прочностных характеристик по сравнению с существующими методами защиты поверхности [2]–[4].

1 Экспериментальная часть

Для синтеза защитных композиционных покрытий использовали пленкообразующие растворы на основе: тетраэтилортосиликата, метилтриэтоксисилана, этоксида титана, пропоксида титана, пропоксида циркония и их композиций. Указанные пленкообразующие алкоксисоединения и неорганические вещества используют в виде растворов в полярных органических жидкостях, спиртоводных или ацетоноводных смесях. При этом содержание воды в зависимости от природы пленкообразующего вещества колеблется от 0,1 об. % до (10–20) об. %. В некоторых случаях при получении пленок из смесей нескольких соединений возможно применение и смешанных полярных и неполярных растворителей [1], [4].

В растворах пленкообразующих веществ должно осуществляться оптимальное соотношение исходного основного пленкообразующего вещества, растворителя и катализатора. Это должно одновременно обеспечить, с одной стороны, быстрый частичный или полный гидролиз в растворе с сохранением образующихся продуктов гидролиза соответствующих кислот или гидроокисей элементов в виде золя и, с другой

стороны, мгновенный окончательный гидролиз в тонком слое на обрабатываемой поверхности. Кроме того, только при оптимальных соотношениях компонентов в растворе образующиеся пленки сцепляются достаточно прочно с поверхностью обрабатываемого материала [1].

Гидролиз в получаемых растворах проводили с использованием воды в присутствии растворителя. В качестве катализатора выступали азотная и соляная кислота. В растворах на основе диоксида титана, пропоксида титана и пропоксида циркония гидролиз походил при минимальном содержании воды в течении 10–12 суток. В растворах на основе тетраэтилоксида кремния, метилтриэтоксисилана реакция гидролиза протекала в присутствии воды (до 15 об. %) в течении 2–3 суток. После созревания в приготовленные растворы вводили армирующие добавки: мелкодисперсный порошок углерода (20–30 масс. %) и оксид титана (10–20 масс. %), для придания получаемым покрытиям дополнительных защитных свойств.

Нанесение защитных золь-гель покрытий на подложки может осуществляться несколькими способами. В зависимости от необходимого эффекта выбирается определенный материал покрытия (прекурсор) и технология нанесения золь-гель пленки. Композиционные покрытия на металлических подложках 100×50 мм были сформированы методом распыления. Метод распыления достаточно распространен, готовый раствор наносят краскопульт, распыляя золь по всей поверхности ровным слоем. Универсальность метода заключается в возможности его применения с разной производительностью практически в любых производственных условиях как при получении защитных покрытий вручную на отдельных изделиях, так и при нанесении раствора на полностью автоматизированных поточных линиях. Преимуществом аэрозольного распыления пленкообразующего раствора является возможность покрытия поверхности произвольного размера и формы.

После нанесения на поверхности подложки формируется однородный по толщине слой соединений того или иного элемента. Последующая термическая обработка приводит к завершению реакций разложения промежуточных продуктов гидролиза и к полному удалению растворителя и органических остатков. Образующаяся сверху твердая пленка препятствует свободному удалению паров растворителей, находящихся в нижележащих слоях. Поэтому сушка ведется ступенчато: в начальный период (при интенсивном испарении растворителя), при температуре (60–100)° С в течении 10–15 минут, затем при температуре (200–250)° С в течении 30–60 минут. Скорость отверждения покрытий зависит от вида пленкообразующего раствора и толщины покрытия.

2 Результаты и их обсуждение

2.1 Измерение толщины полученных покрытий. Так как получаемые композиционные покрытия по толщине близки к лакокрасочным покрытиям контроль толщины проводили с использованием толщиномера САЕdt-156.

Таблица 2.1 – Результаты исследования толщины силикатных покрытий

Образец		Толщина, мкм
TiO ₂ покрытие		12,3
ZrO ₂ покрытие		13,0
SiO ₂ покрытие		20,5
TiO ₂	+ порошок TiO 20 масс.%	21,4
	+ порошок углерода 30 масс.%	30,2
ZrO ₂	+ порошок TiO 20 масс.%	20,7
	+ порошок углерода 30 масс.%	28,7
SiO ₂	+ порошок TiO 20 масс.%	47,8
	+ порошок углерода 30 масс.%	34,6

Результаты исследований показали, что наибольшей толщиной обладают силикатные покрытия на основе диоксида кремния с добавлением оксида титана. Однако использование тех же добавок при легировании покрытий на основе диоксида титана уже не вносит существенный вклад в толщину покрытий. Увеличение концентрации порошка в обоих случаях несущественно влияет на толщины исследуемых покрытий.

2.2 Исследование адгезии к подложке. Испытание адгезии может выполняться в целях контроля качества, но, как правило, применяется для соблюдения промышленных стандартов и технических условий. Испытание адгезии во время нанесения покрытия квалифицирует прочность связи подложки и покрытия. Даже в установленных процессах нанесения покрытий многие факторы могут влиять на адгезию. Для определения адгезии используют метод решетчатого надреза и метод параллельных надрезов [3].

Таблица 2.2 – Результаты исследования адгезии методом решетчатого надреза

Образец		Адгезия, %	Класс (ISO 2409: 2013)
TiO ₂ покрытие		100	0
ZrO ₂ покрытие		99	0
SiO ₂ покрытие		100	0
TiO ₂	+ порошок TiO 20 масс.%	99	0
	+ порошок углерода 30 масс.%	99	0
ZrO ₂	+ порошок TiO 20 масс.%	92	1
	+ порошок углерода 30 масс.%	94	1
SiO ₂	+ порошок TiO 20 масс.%	100	0
	+ порошок углерода 30 масс.%	100	0

Результаты испытания показали, что все покрытия на основе SiO₂ и TiO₂ имеют самый высокий класс адгезии согласно ISO 2409:2013 –

Класс 0 (края надрезов полностью гладкие; сегменты нарезанной решетки не отслоились). Покрытия на основе ZrO_2 армированные порошками имеют класс адгезии – 1 (отслоение мелких чешуек покрытия на пересечении надрезов; площадь отслоений немного превышает 5% площади решетки). Стоит отметить, что введение армирующих порошков в покрытие на основе ZrO_2 приводит к ухудшению адгезии к подложке по сравнению с чистым ZrO_2 покрытием.

2.3 *Исследование твердости полученных покрытий.* Из многочисленных методов испытаний твердости были выбраны два метода. Первый метод определения твердости методом Виккерса.

Исследование проводили на покрытиях, сформированных на алюминиевых подложках. Результаты измерения твердости по Виккерсу полученных композиционных покрытий представлены в таблице 2.3, оказываемая нагрузка на поверхность равна 100 г.

Таблица 2.3 – Результаты измерения твердости по Виккерсу

Образец		Твердость по Виккерсу, МПа
Без покрытия		332
TiO_2 покрытие		405
ZrO_2 покрытие		388
SiO_2 покрытие		577
TiO_2	+ порошок TiO 20 масс.%	441
	+ порошок углерода 30 масс.%	407
ZrO_2	+ порошок TiO 20 масс.%	402
	+ порошок углерода 30 масс.%	399
SiO_2	+ порошок TiO 20 масс.%	671
	+ порошок углерода 30 масс.%	711

Результаты исследования твердости по Виккерсу показывают, что использование в качестве армирующих добавок порошков оксида титана и углерода в покрытиях на основе SiO_2 приводит к увеличению твердости с 577 МПа до 711 МПа (при использовании порошка углерода), и до 671 МПа (при использовании порошка оксида титана). Введение порошка оксида титана позволяет увеличить твердость SiO_2 покрытий на 16%, а введение порошка углерода увеличить твердость на 23%. Введение армирующих порошков в покрытия на основе TiO_2 и ZrO_2 не оказывает существенного влияния на твердость получаемых покрытий. Твердость покрытий увеличивается на 1–3%.

Второй метод Вольфа – Виборна, распространен в лакокрасочной промышленности, основан на скробировании поверхности графитовым карандашом. Твердость покрытия соответствует максимальной твердости карандаша, который не повреждает покрытие [4].

Карандаши используются с твердостями в диапазоне от 6В до 9Н. На твердость могут повлиять атмосферные условия (температура и влажность), поэтому все пленки должны

подготавливаться, испытываться в одинаковых условиях. Результаты измерения твердости с помощью карандаша представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Результаты измерения твердости методом Вольфа – Виборна

Образец		Твердость
TiO_2 покрытие		3Н
ZrO_2 покрытие		3Н
SiO_2 покрытие		5Н
TiO_2	+ порошок TiO 20 масс.%	4Н
	+ порошок углерода 30 масс.%	4Н
ZrO_2	+ порошок TiO 20 масс.%	3Н
	+ порошок углерода 30 масс.%	3Н
SiO_2	+ порошок TiO 20 масс.%	6Н
	+ порошок углерода 30 масс.%	7Н

Результаты испытания твердости по методу Вольфа – Виборна показали, что покрытие на основе SiO_2 без введения армирующих добавок имеет твердость – 5Н, при этом введение порошка углерода позволяет увеличить твердость до 7Н. Покрытия на основе TiO_2 и ZrO_2 имеют меньшую твердость – 4Н, а введение армирующих добавок не оказывает влияния на увеличение их твердости. Полученные данные согласуются с результатами измерения твердости по Виккерсу.

2.4 *Исследование прочности покрытий при ударе.* Основной из характеристик, определяющей гарантированный производителем покрытий срок эксплуатации и антикоррозионную защиту любого промышленного изделия, является прочность покрытий при ударе.

Любое покрытие за период всего срока эксплуатации изделия, включая процесс транспортировки и монтажа и кончая его эксплуатацией в различных климатических условиях окружающей среды, испытывает динамические и статические нагрузки, среди которых периодические удары.

Международный стандарт ISO 6272, ГОСТ Р 53007-2008 и ГОСТ 4765 определяют метод измерения прочности покрытий при ударе. Для исследования ударопрочности использовался прибор Удар-Тестер фирмы Градиент-Техно. Главным требованием ГОСТ Р 53007-2008 и ISO 6272 является наличие в составе прибора механизма прижима и фиксации образца с покрытием при проведении испытания. Метод измерения прочности покрытий при ударе относится к одним из методов оценки адгезии и твердости однослойных и многослойных покрытий, особенно в процессе производства изделий. Он заключается в нанесении с определенной высоты ударного воздействия по покрытию бойком с наконечником сферической формы с диаметром 8 мм и тарированной массы величиной 1 кг. При испытании образец с покрытием жестко фиксируется на матрице с отверстием диаметра 15 мм для защиты от явлений деформации (рисунок 2.1). Испытание проводят, сбрасывая груз с высоты 0,5–1 м.

Высота нанесения ударного воздействия, при которой на покрытия появляются первые признаки начала разрушения, определяется как величина ударопрочности покрытия.



Рисунок 2.1 – Результат испытания на прочность SiO₂ покрытия армированного 30 масс.% порошка углерода при ударе

Результаты испытания показали, что покрытия на основе SiO₂, содержащие углерод и оксид титана, выдерживают удар груза массой 1 кг с высоты 1 м. Покрытия на основе ZrO₂ и TiO₂, армированные углеродом и оксидом титана, менее стойкие и имеют незначительные отслоения при ударе груза массой 1 кг с высоты 1 м.

2.5 Исследование механической прочности покрытий методом истирания. Для определения механической прочности защитных покрытий применяют склерометрический метод и (или) метод истирания. Наиболее подходящими методами определения механической прочности покрытий являются те, которые основаны на определении прочности покрытий к истиранию.

Прочность полученных в работе защитных золь-гель покрытий определялась методом истирания резиновым наконечником, изготовленным из пищевой резины средней плотности, через батистовую прокладку при следующих параметрах: частота вращения – 300 об/мин, общее число оборотов – 6000, нагрузка на наконечник – 200 г, расстояние от оси вращения – 5 мм.

Таблица 2.5 – Механическая стойкость покрытий

Образец	Механическая стойкость, количество циклов стирания
ZrO ₂ покрытие	>6000
TiO ₂ покрытие	>6000
SiO ₂ покрытие	>6000

По результатам исследования механической прочности установлено, что полученные покрытия обладают высокой механической стойкостью к истиранию.

Заключение

Установлено, что толщина покрытий варьируется от 21 до 45 мкм и зависит от состава покрытия и наполнителя. Покрытия обладают высокой адгезией к материалам на основе металлов и сплавов. Использование в качестве армирующей добавки порошка оксида титана позволяет увеличить твердость SiO₂ покрытий на 16%, а введение порошка углерода увеличить твердость на 23%. Введение армирующих порошков в покрытия на основе TiO₂ и ZrO₂ не оказывает существенного влияния на твердость получаемых покрытий (твердость покрытий увеличивается на 1–3%). Покрытия на основе SiO₂, содержащие углерод и оксид титана, выдерживают удар груза массой 1 кг с высоты 1 м. Покрытия на основе ZrO₂ и TiO₂, армированные углеродом и оксидом титана, менее стойкие и имеют незначительные отслоения при ударе груза массой 1 кг с высоты 1 м.

По результатам исследования механической прочности можно сделать вывод, что полученные покрытия обладают высокой механической стойкостью к истиранию (более 6000 циклов).

Представленные в работе защитные покрытия найдут свое применение в машиностроительной и приборостроительной индустрии в качестве коррозионно-стойких и декоративных покрытий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Основы золь-гель технологии нанокмпозитов / А.И. Максимов [и др.]. – СПб.: ООО «Техномедиа»; Издательство «Элмор», 2007. – 255 с.
2. Анतिकоррозионные золь-гель SiO₂ покрытия для защиты металлических поверхностей / Д.Л. Коваленко [и др.] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 94–97.
3. Защитные золь-гель покрытия с гидрофобными свойствами / В.Е. Гайшун [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №3 (8). – С. 15–19.
4. Получение и свойства защитных золь-гель покрытий на поверхности металлов / В.Е. Гайшун [и др.] // Международный научно-практический журнал «Чрезвычайные ситуации: образование и наука». – Гомель, ГИИ МЧС РБ. – 2012. – Т. 7, № 2. – С. 17–21.
5. ГОСТ 31149-2014 (ISO 2409:2013). Материалы лакокрасочные. Определение адгезии методом решетчатого надреза. – Введ. 01.09.2015. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2015. – 12 с.
6. ГОСТ Р 54586-2011 (ISO 15184:1998) Материалы лакокрасочные. Метод определения твердости покрытия по карандашу. – Введ. 01.09.2011.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16КОР-003).

Поступила в редакцию 01.11.18.

УДК 546.28 535.375.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО НАРУШЕННОГО СЛОЯ В ПЛАСТИНАХ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ ПОСЛЕ ХИМИКО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ПОЛИРОВКИ

Я.А. Косенок, В.Е. Гайшун, О.И. Тюленкова

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

INVESTIGATION OF THE NEAR-SURFACE DAMAGED LAYER IN MONOCRYSTALLINE SILICON WAFERS AFTER CHEMICAL-MECHANICAL POLISHING

Ya.A. Kosenok, V.E. Gaishun, O.I. Tyulenкова

F. Scorina Gomel State University

В процессе химико-механической полировки (ХМП) пластин монокристаллического кремния применяют суспензии на основе наноразмерного диоксида кремния. Качество поверхности полупроводниковых подложек характеризуется шероховатостью и глубиной структурно нарушенного слоя. Методом комбинационного рассеяния света исследуется нарушенный слой и влияние шероховатости поверхности на интенсивность спектральных линий. Показано, что интенсивность основной рамановской моды кремния сильно зависит от шероховатости поверхности.

Ключевые слова: комбинационное рассеяние света, шероховатость поверхности, наноразмерные частицы, нарушенный слой, химико-механическая полировка.

In the process of chemical-mechanical polishing (CMP) of monocrystalline silicon wafers, suspensions based on nanosized silica dioxide are used. The quality of the surface of semiconductor substrates is characterized by roughness and depth of structural damaged layer. The damaged layer and the effect of surface roughness on the intensity of spectral lines are investigated by Raman spectroscopy. It is shown that the intensity of the main Raman mode of silicon strongly depends on the surface roughness.

Keywords: raman spectroscopy, surface roughness, nanosized particles, damaged layer, chemical-mechanical polishing.

Введение

На сегодняшний день кремний, благодаря своим электрофизическим и механическим свойствам, является основным материалом для производства микроэлектронных устройств. Полупроводниковая кремниевая подложка является основной конструктивной базой в производстве приборов и микросхем. При создании интегральных микросхем предъявляются высокие требования к качеству поверхности и приповерхностному слою пластин кремния. Существует зависимость качества диэлектрического слоя от микронеровностей (шероховатости) поверхности полупроводниковых пластин (при толщине формируемого слоя SiO_2 менее 10 нм), что напрямую влияет на стабильность работы транзисторных структур [1]. В настоящее время в Республике Беларусь и странах СНГ изготавливаются интегральные микросхемы с минимальными размерами элементов менее 1 мкм с толщиной слоя SiO_2 9 нм на пластинах диаметром до 150 мм. Характеристики диэлектрического слоя, а значит и работа всей интегральной микросхемы, зависят от величины микронеровностей поверхности подложек монокристаллического кремния уровня десятых долей нанометра. От правильной обработки поверхности подложек зависят не только

структура, свойства наносимых слоёв и электрические характеристики элементов, но и их воспроизводимость, выход годных элементов, т. е. в конечном счете стоимость и качество электронных изделий [2].

Химико-механическое полирование (ХМП) – широко распространенный и наиболее эффективный метод получения зеркальной гладкой поверхности. ХМП является завершающим и одним из ключевых этапов подготовки пластин. Важным является также выбор материалов для ХМП. Мы предлагаем использовать полирующие суспензии на основе наноразмерных частиц диоксида кремния [3]. Контроль структурного совершенства приповерхностных слоёв кремниевых пластин производится при варьировании химической и механической составляющих в процессе полирования.

Качество поверхности полупроводниковых подложек характеризуется шероховатостью и глубиной структурно нарушенного слоя. Существуют стандартные [4] и новые перспективные методы определения параметров нарушенного слоя [5]. Для всех методов общим является регистрация какого-либо физико-химического параметра, зависящего от степени дефектности кристалла, на различных расстояниях от поверхности.

На практике чаще всего используется послыжное удаление материала (метод селективного химического травления) [2]. Однако стандартными методами контроля состояния поверхности нельзя получить данные о шероховатости поверхности на наноуровне. Преимущество отдается неразрушающим методам контроля, основанным на дифракции электромагнитного излучения на неоднородной границе раздела сред (оптические и рентгеновские) и прямым методам контроля нанорельефа (атомно-силовая микроскопия) [6]. Цель работы – определение нарушенного слоя методом комбинационного рассеяния света (КРС) и влияния шероховатости поверхности на интенсивность КРС.

1 Экспериментальная часть

Для исследований были отобраны пластины монокристаллического кремния марки КЭФ-0.5 (кремний электронного типа проводимости с удельным сопротивлением 0,5 Ом·см) с ориентацией (111), прошедшие последовательно предварительную и финишную стадии ХМП суспензиями на основе наноразмерного диоксида кремния ($d \approx 40$ нм) и травление в смеси кислот HNO_3 и HF . Основные технологические параметры процесса ХМП приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Основные технологические параметры процесса ХМП пластин монокристаллического кремния полирующими композициями на основе наноразмерных частиц диоксида кремния

Характеристика	Марка суспензии	
	СПС-81М	СПС-55М
Стадия использования	I стадия	II стадия
Рекомендуемое разбавление	1:10	1:10
рН после разбавления	11,2–11,6	10,4–10,6
Плотность после разбавления, г/см ³	1,005	1,01
Давление, кгс/см ²	0,4	1,0
Расход суспензии, мл/мин	50	200
Температура полировки, °С	51–55	48–50
Время обработки, мин	50	8
Величина съёма, мкм	30	1
Рекомендуемый тип полировальника	политан	сегаль

Исследования топографии поверхности пластин монокристаллического кремния проводились на высокоразрешающем атомно-силовом микроскопе SOLVER P 47-PRO (фирмы «NT – MDT», Россия). Для анализа образцов полированных пластин кремния методом спектроскопии комбинационного рассеяния использовали конфокальный микроспектрометр inVia производства Renishaw (Великобритания). Конфигурация прибора: HeCd лазер возбуждения 442 нм (мощность лазера – 80 мВт), время экспозиции – 1 с.

2 Результаты и их обсуждение

При проведении операций шлифовки и полировки в пластине монокристаллического кремния появляются механические напряжения, которые создают нарушенный слой, прилегающий к поверхности пластины. Структура нарушенного слоя состоит из четырех зон: верхняя зона – рельефный слой h_1 , под ней расположен трещиноватый слой h_2 , содержащий микротрещины, далее напряженный слой h_3 , содержащий упругие деформации и сдвиги, и дефектный слой h_4 , где число дислокаций повышено по сравнению с остальным объемом кремния (рисунок 2.1).

В нарушенном слое обнаруживаются различные переходные структуры от монокристалла до искаженного поликристалла или даже аморфного слоя, которые могут быть обнаружены различными спектроскопическими и рентгеновскими методами.

Кристаллическая решётка кремния кубическая гранцентрированная типа алмаза, пространственная группа $Fd\bar{3}m$. Известно, что в материалах, обладающих алмазоподобной решеткой, элементарная ячейка содержит два атома. Поэтому в зоне Бриллюэна существует шесть фоновых ветвей: три акустические и три оптические фоновые ветви [7].

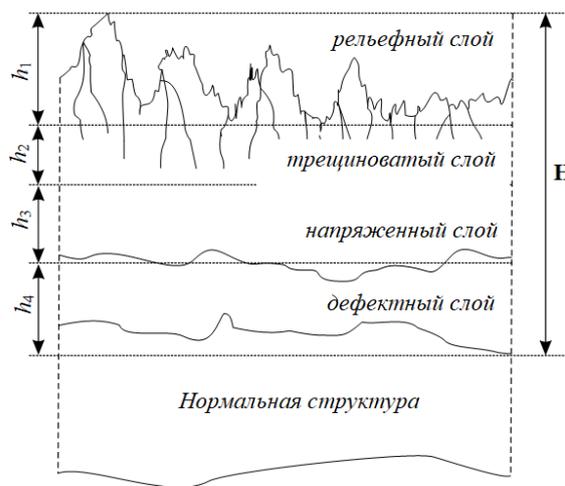


Рисунок 2.1 – Структура нарушенного слоя

На рисунке 2.2 представлен спектр КРС для пластин монокристаллического кремния, полированных композициями СПС-81М и СПС-55М, и для сравнения приведен спектр полированной пластины монокристаллического кремния с нарушенным слоем из работы [8].

Вследствие трансляционной симметрии в монокристаллическом кремнии квазиимпульс сохраняется, и в процессе КРС могут принимать участие фононы из центра зоны Бриллюэна, так как импульс светового фотона примерно на три порядка меньше границ зоны Бриллюэна [9]. Видно, что спектр КРС первого порядка монокристаллического кремния представляет собой

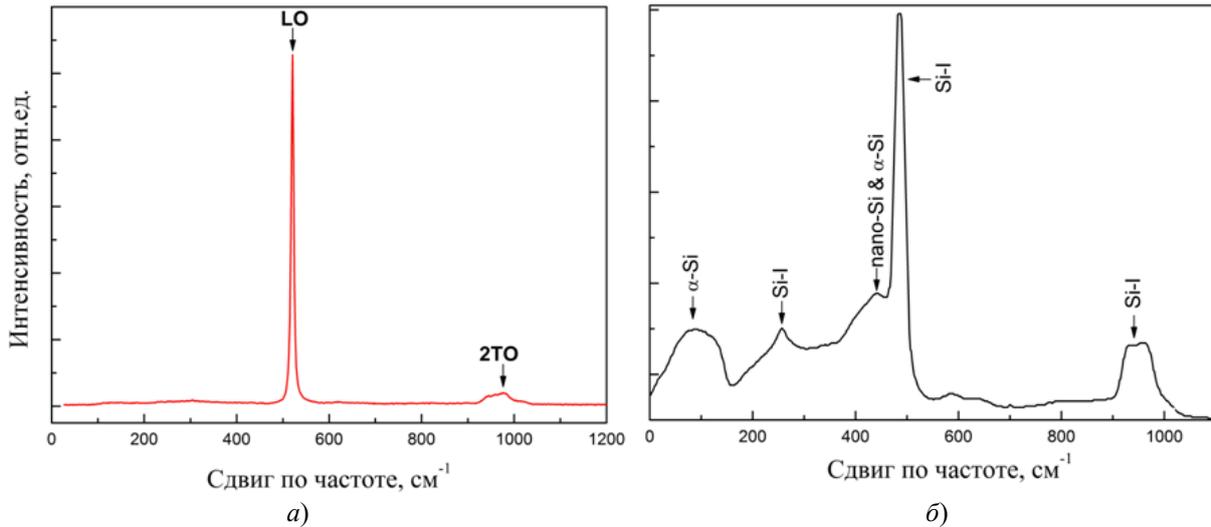


Рисунок 2.2 – Спектры КРС полированной пластины монокристаллического кремния: а) – без нарушенного слоя; б) – с нарушенным слоем [8]

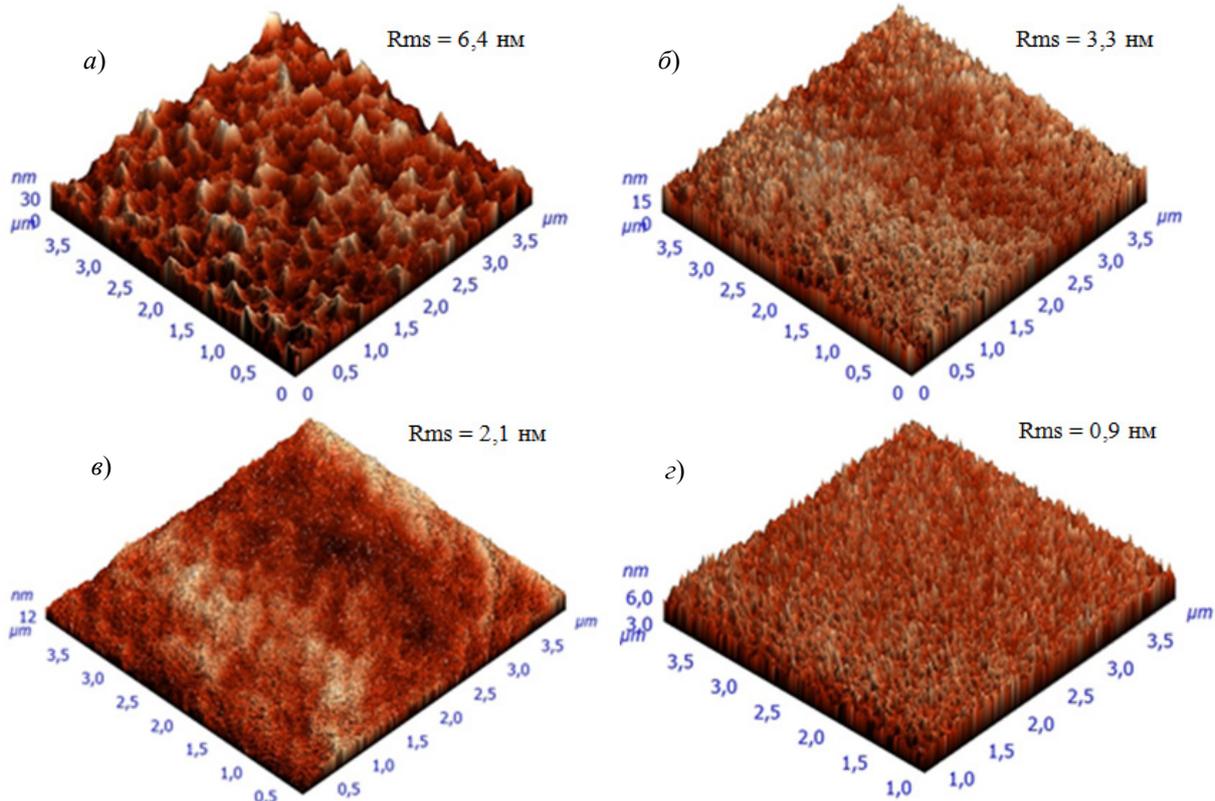


Рисунок 2.3 – АСМ изображения полированных пластин кремния, имеющих разную шероховатость (Rms)

одиночную линию с положением максимума на частоте $520,7 \text{ см}^{-1}$, которая соответствует трижды вырожденному оптическому колебанию симметрии F2g. Для образцов, обладающих высоким структурным совершенством, ширина этой фоновой линии $\sim 3 \text{ см}^{-1}$. Широкий пик КР второго порядка в области $900\text{--}1100 \text{ см}^{-1}$ соответствует суперпозиции трех поперечных оптических фононов $\sim 2\text{TO (X)}$, 2TO (W) и 2TO (L) [10].

В сравнение, в аморфных материалах дальний порядок (трансляционная симметрия) кристаллической решетки частично или полностью нарушены, что приводит к снятию запрета, накладываемого законом сохранения квазиимпульса. Как следствие, фононы с любыми волновыми векторами разрешены в их спектрах КРС, которые в итоге воспроизводят плотность колебательных состояний кристаллического кремния [11]. В спектре комбинационного рассеяния полированной

поверхности пластины с нарушенным слоем (рисунок 2.2, б) имеются дополнительные пики с волновыми числами $134,5 \text{ см}^{-1}$ и $480,2 \text{ см}^{-1}$. Широкий пик с максимумом около $134,5 \text{ см}^{-1}$ приписывается аморфному кремнию ($\alpha\text{-Si}$), а пик при $480,2 \text{ см}^{-1}$ относится к $\alpha\text{-Si}$ и нано-Si [12].

Методом АСМ были получены изображения поверхности пластин монокристаллического кремния, характеризующие поверхность подложки после I стадии полировки (рисунок 2.3, б), после I стадии полировки и травления (рисунок 2.3, а), после II стадии полировки (рисунок 2.3, в) и после полировки и последующего травления (рисунок 2.3, г). Поверхность пластин является однородной со среднеквадратичной шероховатостью Rms от 0,9 нм до 6,4 нм. Наличие поверхностных дефектов и нарушение поверхностного слоя не установлено. Некоторые перепады по высоте обусловлены процессом полировки, а также остаточными оксидами кремния. Шероховатость поверхности полупроводниковых пластин увеличивается после проведения технологических операций обработки, в частности, травления подложек, в результате которого на полированной поверхности кремния формируется развитая нанопористая структура (рисунок 2.3, а).

Интенсивность рассеяния связана с распределением атомов (наночастиц) на поверхности: большее количество атомов вызывает более высокую интенсивность рассеяния. Это наблюдается в усилении интенсивности пиков комбинационного рассеяния с увеличением шероховатости поверхности. Например, гигантское комбинационное рассеяние состоит в увеличении (до 10^6) интенсивности линий при комбинационном рассеянии света на молекулах, адсорбированных на шероховатых поверхностях металлов (как правило, Ag, Au, Cu). Гигантское комбинационное рассеяние основано на эффекте плазмонного резонанса. Однако, такой механизм не является единственным для увеличения поверхностного светорассеяния. Аналогичное усиление КР наблюдается для микросфер диоксида кремния [11], ключевую роль здесь играет оптический резонанс мод типа шепчущей галереи [12]. В случае наноструктурированного кремния также наблюдается усиление КРС [13], [14]. Точный механизм усиления комбинационного рассеяния света наноструктурной поверхностью до конца не выяснен из-за одновременного прохождения нескольких процессов.

Хорошим экспериментальным доказательством эффекта усиления КРС является эволюция основной рамановской моды кремния (рисунок 2.4). Видно, что интенсивность КРС сильно зависит от шероховатости поверхности (при увеличении Rms на 5,5 нм интенсивность пика КРС увеличивается в 3 раза). При этом положение пика КРС и его полуширина не изменяется.

Поскольку кремниевые наноструктуры не содержат никакого плазмонного резонанса для длины волны 442 нм, это усиление не подчиняется плазмонному механизму. В спектроскопии КРС необходимо учитывать количество исследуемого вещества при сравнении нескольких образцов. Согласно АСМ изображениям (рисунок 2.3) площадь поверхности больше у образцов с большей шероховатостью. Также необходимо учитывать весь объем материала, в котором происходит взаимодействие света с веществом. В [15] показано, что усиление КРС не зависит от длины волны возбуждения, следовательно, увеличение площади или объема поверхности является не единственным механизмом усиления комбинационного рассеяния. Усиление КРС электрохимически шероховатых пластин кремния в [16] объясняется двумя эффектами: электромагнитным объемным резонансом и резонансом, возникающим на наночастицах кремния.

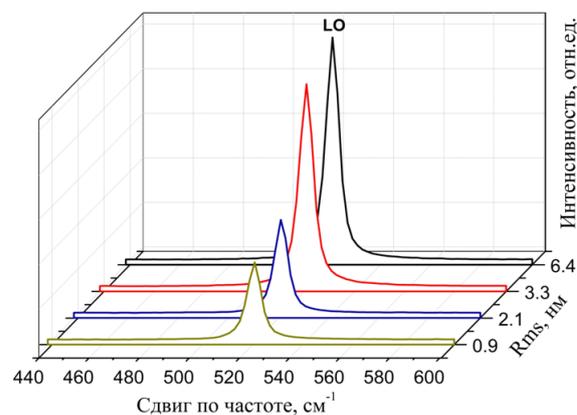


Рисунок 2.4 – Спектры КРС полированных пластин монокристаллического кремния с разной шероховатостью в области рассеяния на LO-фононе из центра зоны Бриллюэна

На спектрах КРС полированных пластин кремния (рисунок 2.4) не наблюдается сдвига и уширения основной полосы, что свидетельствует о том, что после полировки, травления и последующей очистки не образуются наночастицы кремния. Следовательно, наблюдаемое здесь усиление КРС с увеличением шероховатости поверхности возникает только из-за резонанса в объеме кремния. Также усиление КРС, наблюдаемое в макро- и нанопористом кремнии, объясняется многократным поглощением и отражением в порах рассеянного излучения [15]. Этот эффект также вносит свой вклад в усиление КРС и в нашем случае.

Заключение

На спектрах КРС пластин монокристаллического кремния, прошедших химико-механическую полировку суспензиями на основе наноразмерного диоксида кремния, не наблюдается

пиков, относящихся к аморфной или какой-либо другой переходной структуре кремния. Из чего можно сделать вывод, что нарушенный слой на данных пластинах отсутствует.

В результате проведенных исследований установлена зависимость интенсивности спектральных линий комбинационного рассеяния света от шероховатости поверхности полированных пластин монокристаллического кремния. Показано увеличение основной рамановской моды кремния в 3 раза при увеличении среднеквадратичной шероховатости всего на 5,5 нм. Этот эффект возникает из-за электромагнитного резонанса в объеме кремния.

Метод комбинационного рассеяния света в сочетании с методом атомно-силовой микроскопии могут быть применены для контроля нарушенного слоя и шероховатости поверхности пластин монокристаллического кремния после их предварительной и финишной химико-механической полировки.

Авторы выражают особую благодарность Dumitru Luca и Marius Dobromir из университета Александру Куза за проведенные измерения спектров комбинационного рассеяния света.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chesters, S.* A fractal-based method for describing surface texture / S. Chesters // *Solid state technology*. – 1991. – Vol. 34, № 1. – P. 73–76.
2. *Воротынцев, В.М.* Базовые технологии микро- и нанoeлектроники: учебное пособие / В.М. Воротынцев, В.Д. Скупов. – М.: Проспект, 2017. – 439 с.
3. *Водные композиции на основе наноразмерных частиц диоксида кремния для химико-механической полировки пластин монокристаллического кремния* / Я.А. Косенок, В.Е. Гайшун, О.И. Тюленкова, В.Г. Денисман // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2014. – № 3 (20). – С. 26–31.
4. *Методы контроля нарушенных слоев при механической обработке монокристаллов* / А.И. Татаренков [и др.]. – М.: Энергия, 1978. – 64 с.
5. *Солодуха, В.А.* Измерение глубины нарушенного слоя на поверхности кремниевых пластин методом оже-спектроскопии / В.А. Солодуха, А.И. Белоус, Г.Г. Чигирь // *Наука и техника*. – 2016. – Т. 15, № 4. – С. 329–334.
6. *Невлюдов, И.Ш.* Анализ методов контроля шероховатости подложек для изделий электронной техники / И.Ш. Невлюдов, И.В. Жарикова, И.Д. Перепелица, А.Г. Резниченко // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. – 2014. – № 2 (5). – С. 25–30.
7. *Wei, S.* Phonon dispersions of silicon and germanium from first-principles calculations / S. Wei, M.Y. Chou // *Phys. Rev. B*. – 1994. – Vol. 50. – P. 2221–2226.
8. *Li, Y.* Phase transformation of monocrystalline silicon induced by polishing with diamond abrasives / Y. Li, J. Lu, X. Xu // *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*. – 2015. – Vol. 28, № 2. – P. 153–159.
9. *Качко, А.С.* Ангармонизм фононов в кремнии: исследование методом спектроскопии комбинационного рассеяния света / А.С. Качко, В.Н. Ваховский, В.А. Володин // *Вестник НГУ. Серия: Физика*. – 2010. – Т. 5, Вып. 1. – С. 48–55.
10. *One and two-phonon Raman scattering from nanostructured silicon* / I. Iatsunskyi [et al.] // *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*. – № 126 (18). – P. 1650–1655.
11. *Beeman, D.* Structural information from the Raman spectrum of amorphous silicon / D. Beeman, R. Tsu, M.F. Thorpe // *Phys. Rev. B*. – 1985. – Vol. 32. – P. 874.
12. *Nanoscratchinduced phase transformation of monocrystalline Si* / Y.Q. Wu, H. Huang, J. Zou, L.C. Zhang, J.M. Dell // *Scripta Mater.* – 2010. – Vol. 63, № 8. – P. 847–850.
13. *Anderson, M.S.* Nonplasmonic surface enhanced Raman spectroscopy using silica microspheres / M.S. Anderson // *Appl. Phys. Lett.* – 2010. – Vol. 97, № 13. – P. 131116–131119.
14. *Ausman, L.K.* Whispering-gallery mode resonators: surface enhanced Raman scattering without plasmons / L.K. Ausman, G.C. Schatz // *J. Chem. Phys.* – 2008. – Vol. 129 (5). – P. 054704–054710.
15. *Multi-wavelength enhancement of silicon Raman scattering by nanoscale laser surface ablation* / A. Merlena [et. al.] // *Applied Surface Science*. – 2013. – Vol. 284. – P. 545–548.
16. *Enhanced-Raman scattering from silicon nanoparticle substrates* / F.M. Liu [et. al.] // *Chem. Phys. Lett.* – 2003. – Vol. 382, № 5–6. – P. 502–507.

Поступила в редакцию 06.11.18.

УДК 534.535

КОЛЛИНЕАРНАЯ АКУСТООПТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПОЛИХРОМАТИЧЕСКИХ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Г.В. Кулак¹, Г.В. Крох¹, П.И. Ропот², Т.В. Николаенко¹¹Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина²Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси

THE COLLINEAR ACOUSTO-OPTICAL FILTRATION OF POLYCHROMATIC BESSEL LIGHT BEAMS IN UNIAXIAL CRYSTALS

G.V. Kulak¹, G.V. Krokh¹, P.I. Ropot², T.V. Nikolaenko¹¹I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University²B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus

Исследованы особенности коллинеарной акустооптической фильтрации квазибездифракционных бесселевых световых пучков *o*- и *e*- типа в одноосных кристаллах. С использованием метода интегралов перекрытия найдено выражение для эффективности дифракции в зависимости от параметров акустооптического взаимодействия, а также от значений интегралов перекрытия. Показано, что для моды нулевого порядка бесселевого светового пучка для кристалла ниобата лития в условиях поперечного фазового синхронизма и в диапазоне оптического спектра 0,4–0,7 мкм достижима полоса пропускания фильтра ~0,2 нм; с увеличением порядка моды $m \geq 1$ увеличение полосы пропускания незначительно и составляет ~0,23–0,24 нм.

Ключевые слова: коллинеарное акустооптическое взаимодействие, бесселевы световые пучки, акустооптическая фильтрация, одноосный кристалл, эффективность дифракции, разрешение фильтра.

The collinear acousto-optic filtration of quasi-nondiffracting Bessel light beams of *o*- and *e*-types in uniaxial crystals has been investigated. Using the method of overlap integrals the expression for the diffraction efficiency depending on the parameters of acoustooptical interacting of Bessel beams and the value of overlap integral is founded. It is shown that for zero order Bessel light beams in the transversal phase-matching conditions of the diffracted waves in the range of optical spectrum of 0,4–0,7 μm for lithium niobate crystals the transmission bandwidth of ~0,2 nm is reached; with evaluation of Bessel beam order of $m \geq 1$ the bandwidth of transmission is not so significantly big, than ~0,23–0,24 nm.

Keywords: collinear acousto-optic interaction, acousto-optic filtration, Bessel light beams, uniaxial crystal, diffraction efficiency.

Введение

В настоящее время для целей акустооптического (АО) преобразования значительный интерес представляют бесселевы световые пучки (БСП), распространяющиеся в одноосных кристаллах [1], [2]. Ряд особенностей коллинеарных АО взаимодействий БСП исследованы в работах [3], [4]. При этом исследовались, в основном, особенности АО преобразований пространственной структуры БСП различных порядков. Следует отметить, однако, что для ряда важных применений значительный интерес представляют процессы коллинеарной АО фильтрации полихроматических БСП на ультразвуке в анизотропных средах [5]. Такие процессы перспективны для создания узкополосных коллинеарных перестраиваемых АО фильтров [6]. В этой связи, для целей АО фильтрации широкополосного оптического излучения важно использовать БСП, поскольку они обладают свойствами квазибездифракционности и самореконструкции пространственной структуры [4].

В настоящей работе с использованием метода интегралов перекрытия рассмотрена коллинеарная АО фильтрация бесселевых полихроматических световых пучков высоких порядков при коллинеарном АО взаимодействии в одноосных кристаллах. При этом, в качестве примера, рассмотрена АО дифракция БСП в кристаллах ниобата лития (LiNbO_3) на сдвиговой УЗ волне, распространяющейся под некоторым углом к оптической оси кристалла. Такая геометрия коллинеарного попутного АО взаимодействия является наиболее эффективной и реализуется, когда дифрагированные световые волны распространяются ортогонально оптической оси кристалла ($\theta_{o,e} = 0^0$) [7].

Кроме обычного продольного фазового согласования, БСП должны удовлетворять условиям поперечного фазового согласования [3], [4]. Такое согласование связано с тем, что БСП с различными углами конусности имеют различную пространственную структуру и, как следствие, различные величины интегралов перекрытия дифрагированных пучков. При этом вычисление

интегралов перекрытия (g_m) позволяет найти их максимальные значения в условиях поперечного синхронизма.

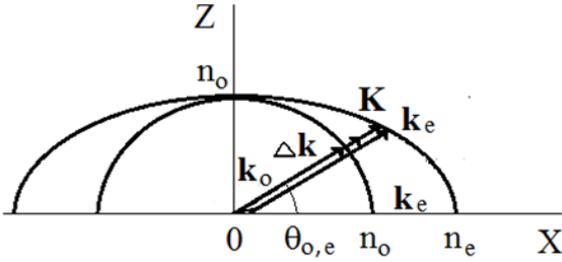


Рисунок 0.1 – Диаграмма волновых векторов падающего и дифрагированного света при заданной частоте (f) ультразвука и длине волны (λ) света

1 Теоретические результаты

Рассмотрим геометрию АО взаимодействия, при которой УЗ волна распространяется в кристалле $LiNbO_3$ в направлении оси X и занимает пространство между плоскостями $x = 0$ и $x = l$. Будем считать, что падающая волна в одноосном кристалле имеет обыкновенную « o » поляризацию и является бесселевым световым пучком o -типа [7]. В свою очередь, дифрагированная волна имеет необыкновенную « e » поляризацию и является бесселевым пучком e -типа (рисунок 0.1). Ось падающего БСП o -типа расположена в плоскости XZ под некоторым углом к оптической оси Z кристалла. При этом реализуются условия пространственного $\vec{k}_o + \vec{K} + \Delta\vec{k} = \vec{k}_e$ и временного $\omega + \Omega = \omega_d$ синхронизма, где \vec{k}_o (\vec{k}_e) – волновой вектор бесселева пучка o -типа (e -типа), \vec{K} – волновой вектор УЗ волны, $\Delta\vec{k}$ – расстройка фазового синхронизма (продольное фазовое рассогласование). Система уравнений связанных волн для амплитуд падающего (A_o) пучка o -типа и дифрагированного (A_e) пучка e -типа имеет вид:

$$\frac{dA_o}{dz} = -i \frac{k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} (\vec{e}_o^* \Delta \hat{\epsilon} \vec{e}_e) \rho d\varphi d\rho}{2k_{oz} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_o|^2 \rho d\varphi d\rho} A_e e^{-i\Delta k_z z}, \quad (1.1)$$

$$\frac{dA_e}{dz} = -i \frac{k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} (\vec{e}_e^* \Delta \hat{\epsilon} \vec{e}_o) \rho d\varphi d\rho}{2k_{ez} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_e|^2 \rho d\varphi d\rho} A_o e^{i\Delta k_z z},$$

где звездочка «*» означает комплексное сопряжение. В уравнениях (1.1) вектор-функции поляризации падающего бесселева пучка o -типа и дифрагированного пучка e -типа даются следующими выражениями [1], [2]:

$$\begin{aligned} \vec{e}_o &= e_{o1} \vec{e}_1 + e_{o2} \vec{e}_2 + e_{o3} \vec{e}_3, \\ \vec{e}_e &= e_{e1} \vec{e}_1 + e_{e2} \vec{e}_2 + e_{e3} \vec{e}_3, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} e_{o1} &= \frac{iq_{o\perp} \cos \theta'_o (J_{m-1}(q_{o\perp}\rho)e^{-i\varphi} + J_{m+1}(q_{o\perp}\rho)e^{i\varphi})}{2} + \\ &\quad + iq_{o\parallel} \sin \theta'_o J_m(q_{o\perp}\rho), \\ e_{o2} &= \frac{q_{o\perp} \cos \theta'_o (J_{m-1}(q_{o\perp}\rho)e^{-i\varphi} - J_{m+1}(q_{o\perp}\rho)e^{i\varphi})}{2\sqrt{1+a^4 \operatorname{tg}^4 \theta'_o}} + \\ &\quad + \frac{q_{o\perp} \sin^2 \theta'_o (J_{m+1}(q_{o\perp}\rho)e^{i\varphi} - J_{m-1}(q_{o\perp}\rho)e^{-i\varphi})}{2}, \\ e_{o3} &= \frac{q_{o\perp} \cos \theta'_o (J_{m-1}(q_{o\perp}\rho)e^{-i\varphi} - J_{m+1}(q_{o\perp}\rho)e^{i\varphi}) a^2 \operatorname{tg}^2 \theta'_o}{2\sqrt{1+a^4 \operatorname{tg}^4 \theta'_o}} + \\ &\quad + \frac{q_{o\perp} \sin 2\theta'_o (J_{m+1}(q_{o\perp}\rho)e^{i\varphi} - J_{m-1}(q_{o\perp}\rho)e^{-i\varphi})}{4}, \\ e_{e1} &= k^{-1} n_o^{-2} n_e^{-2} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{aq_{e\perp}^2 \sin^2 \theta'_e (J_{m-2}(q_{e\perp}\rho)e^{-i2\varphi'} - J_{m+2}(q_{e\perp}\rho)e^{i2\varphi'})}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{aq_{e\perp} q_{e\parallel} \cos \theta'_e ((J_{m+1}(q_{e\perp}\rho)e^{i\varphi'} - J_{m-1}(q_{e\perp}\rho)e^{-i\varphi'}))}{2} \right\}, \\ e_{e2} &= ik^{-1} n_o^{-2} n_e^{-2} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{aq_{e\perp}^2 \sin 2\theta'_e (J_{m+2}(q_{e\perp}\rho)e^{i2\varphi'} + J_{m-2}(q_{e\perp}\rho)e^{-i2\varphi'})}{4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{aq_{e\perp} q_{e\parallel} \cos 2\theta'_e ((J_{m-1}(q_{e\perp}\rho)e^{-i\varphi'} + J_{m+1}(q_{e\perp}\rho)e^{-i\varphi'}))}{2} \right. \\ &\quad \left. - a \left(k^2 - \frac{3q_{e\perp}^2}{2} \right) \sin 2\theta'_e J_m(q_{e\perp}\rho) \right\}, \\ e_{e3} &= ik^{-1} n_o^{-4} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{-q_{e\perp}^2 \sin 2\theta'_e (J_{m+2}(q_{e\perp}\rho)e^{i2\varphi'} + J_{m-2}(q_{e\perp}\rho)e^{-i2\varphi'})}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q_{e\perp} q_{e\parallel} \sin 2\theta'_e ((J_{m-1}(q_{e\perp}\rho)e^{-i\varphi'} + J_{m+1}(q_{e\perp}\rho)e^{-i\varphi'}))}{2} \right. \\ &\quad \left. + q_{e\perp}^2 (1 + \cos^2 \theta'_e + q_{e\parallel}^2 \sin^2 \theta'_e) J_m(q_{e\perp}\rho) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – единичные векторы в кристаллографической системе координат X_1, X_2, X_3 ; ρ, φ – цилиндрические координаты БСП, $\varphi' = \arctg[a \operatorname{tg}(\varphi)]$, $a = n_o / n_e$; n_o (n_e) – обыкновенный (необыкновенный) показатель преломления кристалла; $q_{o\perp, e\perp} = k_{o, e} \sin \gamma_{o, e}$, $q_{o\parallel, e\parallel} = \sqrt{k_{o, e}^2 - q_{o\perp, e\perp}^2}$, причем $\gamma_{o, e}$ – параметр конусности БСП; $\theta'_o = 90^\circ - \theta_o$; $\theta'_e = 90^\circ - \arctg[a \operatorname{tg}(\theta_e)]$; $\Delta \hat{\epsilon}$ – изменение тензора диэлектрической проницаемости, индуцированное ультразвуковой волной.

Из (1.2) следует, что падающий и дифрагированный пучки соответственно o - и e -типа обладают сложной неоднородной по сечению пучка поляризационной структурой [1], [2]. При

этом векторы поляризации \vec{e}_o и \vec{e}_e моды Бесселева пучка порядка m зависят от функций Бесселя пяти порядков $J_m, J_{m\pm 1}, J_{m\pm 2}$. Здесь, по определению, Бесселев пучок порядка m имеет общий фазовый множитель $e^{i(mz+k_z z - \omega t)}$, то есть распространяется в кристалле с фазовой скоростью ω/k_z без изменения пространственного распределения поперечной составляющей.

Решение системы уравнений связанных волн (1.1) ищем с использованием следующих граничных условий: $A_o(z=0) = A, A_e(z=0) = 0$. Тогда эффективность АО дифракции $\eta = |A_e(z=l)|^2 / |A|^2$ дается соотношением:

$$\eta = \frac{\chi^2 \sin^2 \left[l_d \sqrt{\chi^2 + (\Delta k_z / 2)^2} \right]}{\chi^2 + (\Delta k_z / 2)^2}, \quad (1.3)$$

где
$$\chi = \frac{\pi n_o^4 g_m p_{\phi}}{2n\lambda_0 \cos^2 \theta_o} \sqrt{\frac{2I_a}{\sigma v^3}},$$

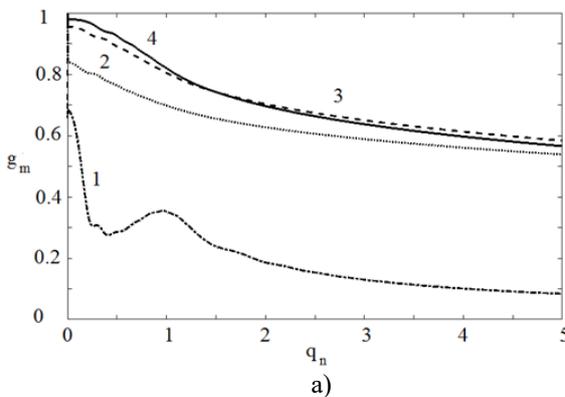
$$\Delta k_z = \left(-\frac{2\pi n_o}{\lambda_0^2} \right) [\xi(\alpha) - \eta - 1] \Delta \lambda,$$

$$\xi(\theta_o) = \frac{n_e}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 \theta_o + n_e^2 \sin^2 \theta_o}}, \quad \eta = \frac{\lambda_o f}{n_o v},$$

причем λ_0 – центральная длина световой волны, $\Delta \lambda$ – отклонение длины волны света от центральной, f – частота УЗ волны, v – фазовая скорость сдвиговой УЗ волны; $p_{\phi} = p_{14}$ (p_{14} – фотоупругая постоянная, σ – плотность кристалла, v – фазовая скорость УЗ волны, $n = (n_o + n_e) / 2$, I_a – интенсивность УЗ волны). Интеграл перекрытия g_m дифрагированных волн находим из соотношения:

$$g_m = \frac{\left| \int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} (\vec{e}_o^* \vec{e}_e) \rho d\phi d\rho \right|}{\sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_e|^2 \rho d\phi d\rho} \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_o|^2 \rho d\phi d\rho}}, \quad (1.4)$$

где R_B – радиус БСП.



2 Результаты расчетов

На рисунке 2.1 представлена зависимость интеграла перекрытия g_m от параметра $q_n = \Delta q / q_{o\perp}$ ($\Delta q = |q_{e\perp} - q_{o\perp}|$) для дифракции БСП малых ($m = 0, 1, 2, 3$) (а) и больших ($m = 10, 11, 12, 13$) (б) значений моды m .

Из рисунка 2.1 следует, что интегралы перекрытия БСП достигают максимального значения при точном поперечном синхронизме дифрагированных волн ($\Delta q = 0$). Для малых значений моды БСП (рисунок 2.1, а) и при условии поперечного синхронизма ($q_n = 0$) интегралы перекрытия принимают следующие максимальные значения: $g_m = 0,67$ ($m = 0$), $g_m = 0,84$ ($m = 1$), $g_m = 0,96$ ($m = 2$), $g_m = 0,99$ ($m = 3$). Для больших значений моды БСП и при условии поперечного синхронизма имеет место пересечение кривых $g_m(q_n)$ с последующим изменением на противоположную зависимость интеграла перекрытия от порядка моды БСП.

На рисунке 2.2 представлена зависимость эффективности дифракции η от параметра отстройки поперечного (q_n) синхронизма для малых (а) и больших (б) значений моды БСП.

Из рисунка 2.2, а следует, что при интенсивностях ультразвука, соответствующим максимальным значениям эффективности дифракции при условии продольного и поперечного синхронизма, с увеличением (отклонением) отстройки поперечного синхронизма q_n от оптимального, происходит снижение эффективности дифракции. При точном поперечном синхронизме ($q_n = 0$) и малых порядках БСП ($m = 0 \div 3$) максимальная эффективность дифракции не достигается. Для больших порядков БСП ($m = 3 \div 30$) при $q_n \geq 1$ эффективность дифракции $\eta \approx 0$ (рисунок 2.2, б).

С использованием соотношений (1.3)–(1.4) рассмотрим физические характеристики АО фильтрации в диапазоне оптического спектра 0,4–0,7 мкм [8]. Выберем для исследования в качестве центральной длины волны перестраиваемого фильтра центральную длину волны

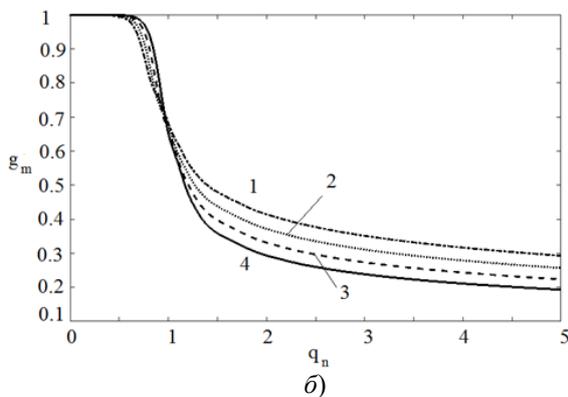


Рисунок 2.1 – Зависимость интеграла перекрытия g_m от параметра $q_n = \Delta q / q_0$ для дифракции БСП различных порядков $m = 0$ (1), 1 (2), 2 (3), 3 (4) (а) и $m = 10$ (1), 11 (2), 12 (3), 13 (4) (б) (кристалл $LiNbO_3$; $\theta_{o,e} = 0^0$; $\gamma_o = \gamma_e = 0,5^0$, $R_B = 6$ мм, $\lambda_0 = 0,63$ мкм)

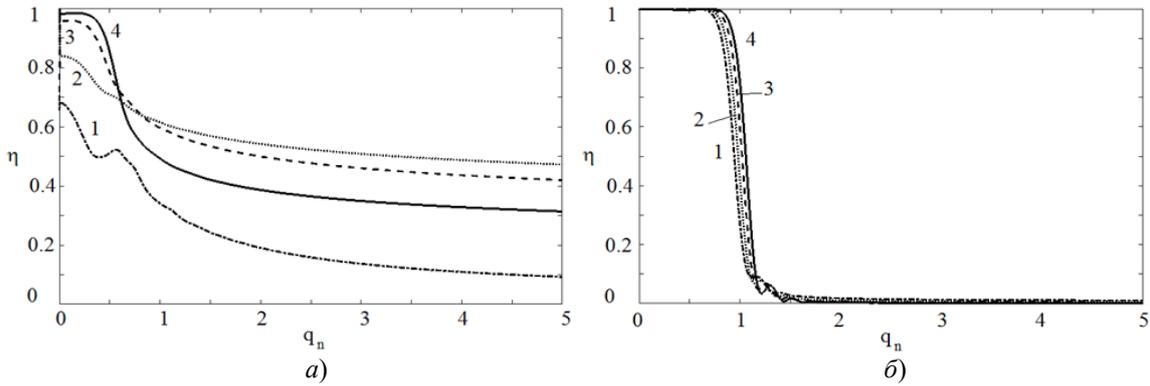


Рисунок 2.2 – Зависимость эффективности дифракции η от параметра отстройки поперечного синхронизма q_n для $m = 0$ (1), 1 (2), 2 (3), 3 (4) (а) и $m = 10$ (1), 11 (2), 12 (3), 13 (4) (б) (кристалл $LiNbO_3$; $\theta_{o,c} = 0^0$; $\gamma_o = \gamma_c = 0,5^0$, $R_B = 6$ мм, $I_a = 0,2$ Вт/см², $f = 570$ МГц, $l = 10$ см, $\lambda_0 = 0,63$ мкм)

исследуемого диапазона $\lambda_0 = 0,63$ мкм. Для данной длины волны света показатели преломления кристалла $LiNbO_3$ соответственно равны: $n_o = 2,29$, $n_e = 2,2$ [9]. Для длины АО взаимодействия $l = 10$ см максимальная эффективность дифракции ($\eta = 1$) достигается в условиях продольного и поперечного синхронизма при УЗ интенсивности $I_a = 0,2$ Вт/см² [7].

Зависимости эффективности дифракции η от ширины полосы спектра $\Delta\lambda$ акустооптического перестраиваемого фильтра (АОПФ) для центральной длины волны $\lambda_0 = 630$ нм представлены на рисунок 2.3.

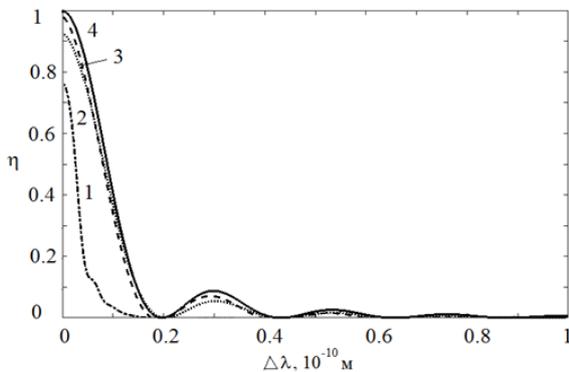


Рисунок 2.3 – Зависимость эффективности дифракции η от ширины полосы пропускания $\Delta\lambda$ при условии поперечного синхронизма для различных порядков БСП m :

0 (1), 1 (2), 2 (3), 3÷30 (4) (кристалл $LiNbO_3$; $\theta_{o,c} = 0^0$; $\gamma_o = \gamma_c = 0,5^0$, $R_B = 6$ мм, $I_a = 0,2$ Вт/см², $f = 570$ МГц, $l = 10$ см, $\lambda_0 = 0,63$ мкм)

Ширина полосы АО фильтрации рассчитывалась по уровню 50% от максимального значения дифракционной эффективности. В условиях продольного и поперечного синхронизма ширина полосы пропускания составила $\Delta\lambda_{1/2} = 0,01$ нм ($m = 0$), $\Delta\lambda_{1/2} = 0,02$ нм ($m = 1$), $\Delta\lambda_{1/2} = 0,022$ нм ($m = 2$), $\Delta\lambda_{1/2} = 0,023$ нм ($m = 3\div 30$).

В условиях опыта наряду с рассмотренной шириной спектра, обусловленной условиями брэгговского синхронизма, следует учитывать также изменение ширины спектра, связанное с уширением ультразвукового и светового пучков [10], [11]. Расчет данных ширин спектра для ультразвукового ($\Delta\lambda_s$) и светового ($\Delta\lambda_L$) пучков достигается с использованием соотношений [10]: $\Delta\lambda_{s,L} = \lambda_0 \phi_{s,L}^2 / 4$, где ϕ_s – расходимость УЗ пучка, ϕ_L – расходимость светового пучка. Таким образом, общая ширина спектра составляет: $\Delta\lambda_{об} = \Delta\lambda_{1/2} + \Delta\lambda_s + \Delta\lambda_L$. Следует отметить, что для квазибездифракционных бesselевых световых пучков выполняются естественные соотношения: $\Delta\lambda_L \ll \Delta\lambda_{1/2}$, $\Delta\lambda_L \ll \Delta\lambda_s$. В таком случае, использование БСП для АО фильтрации предпочтительнее, например, чем гауссовых пучков [10]. Положив, к примеру, $\Delta\lambda_s = 0,2$ нм, $\Delta\lambda_L = 0,02$ нм получим, что $\Delta\lambda_{tot} = 0,230$ нм ($m = 0$), $\Delta\lambda_{tot} = 0,240$ нм ($m = 1$), $\Delta\lambda_{tot} = 0,242$ нм ($m = 2$), $\Delta\lambda_{tot} = 0,243$ нм ($m = 3\div 30$). Спектральная разрешающая способность АО фильтрации дается соотношением: $N_\lambda = \delta\lambda / \Delta\lambda_{tot}$, где $\delta\lambda$ – ширина исследуемого диапазона спектра [1]. Для рассматриваемого диапазона спектра $N_\lambda \approx 1300$ ($m = 0$), $N_\lambda \approx 1200$ ($m \geq 1$).

Вывод

Таким образом, в одноосных кристаллах в широком диапазоне оптического спектра возможна коллинеарная АО фильтрация полихроматических бesselевых световых пучков o - и e -типов для различных мод m в условиях поперечного синхронизма дифрагированных волн. Для кристаллов ниобата лития в диапазоне оптического спектра 0,4–0,7 мкм ширина полосы пропускания АО фильтра для бesselевой моды нулевого порядка может составить $\sim 0,23$ нм. При этом разрешающая способность АО фильтрации ~ 1300 . Для бesselевых мод порядка $m \geq 1$ ширина

полосы пропускания $\sim 0,24$ нм и разрешающая способность ~ 1200 .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Second Harmonic Generation with Elliptical Bessel beams* / V.N. Belyi, N.A. Khilo, E.S. Petrova, A.G. Maschenko, V.E. Leparskii // Proc. SPIE. – 2002. – Vol. 4751. – P. 97–103.

2. *Гиргель, С.С.* Бесселевы световые пучки в одноосных кристаллах / С.С. Гиргель // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика: сб. научных трудов. – Минск, 2005. – С. 170–176.

3. *Generation of TH- and TE-polarized Bessel light beams at acousto-optic interaction in anisotropic crystals* / V.N. Belyi, P.A. Khilo, N.S. Kazak, N.A. Khilo // Optics commun. – 2014. – Vol. 325. – P. 84–91.

4. *Peculiarities of Acoustooptic Transformation of Bessel Light Beams in gyrotropic Crystals* / V.N. Belyi, N.S. Kazak, P.A. Khilo, E.S. Petrova, N.A. Khilo // Universal Journal of Physics and Application. – 2015. – Vol. 9 (5). – P. 220–224.

5. *Добровольский, Ю.С.* Влияние не взаимного эффекта на работу коллинеарного акустооптического фильтра / Ю.С. Добровольский,

В.Б. Волошинов, Ю.А. Зюрюкин // Квант. электроника. – 2008. – Т. 38, №1. – С. 46–50.

6. *Мачихин, А.С.* Аберрации изображения в акустооптическом перестраиваемом фильтре / А.С. Мачихин, В.Э. Пожар // ЖТФ. – 2010. – Т. 80, В. 10. – С. 101–107.

7. *Ярив, А.* Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М.: Мир, 1987. – 616 с.

8. *Блистанов, А.А.* Кристаллы квантовой и нелинейной оптики / А.А. Блистанов. – М.: МИСИС, 2000. – 431 с.

9. *Акустические кристаллы. Справочник* / А.А. Блистанов, В.С. Бондаренко, В.В. Чирков [и др.]; под ред. М.П. Шаскольской. – М.: Наука, 1986. – 629 с.

10. *Балакший, В.Н.* Физические основы акустооптики / В.Н. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М.: Радио и связь, 1985. – 279 с.

11. *Спектральное пропускание широкоапертурного брэгговского акустооптического фильтра на парателлурите* / В.Б. Волошинов, Н.С. Казак, А.С. Лугина, А.В. Надененко, В.К. Павленко, Ю.А. Санников // ЖПС. – 1990. – Т. 52, В. 2. – С. 284–289.

Поступила в редакцию 31.08.18.

УДК 535.4; 53.5

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОРИЕНТАЦИИ И ТОЛЩИНЫ КРИСТАЛЛА $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ НА КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ ПРЕДМЕТНОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

А.В. Макаревич¹, В.В. Шепелевич¹, С.М. Шандаров²

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

²Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

EFFECT OF SPATIAL ORIENTATION AND THICKNESS OF $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ CRYSTAL ON THE GAIN OF THE SUBJECT LIGHT WAVE: THEORY AND EXPERIMENT

A.V. Makarevich¹, V.V. Shepelevich¹, S.M. Shandarov²

¹I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

²Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics

Экспериментально изучена зависимость коэффициента усиления предметной световой волны при двухволновом взаимодействии от ориентационного угла и толщины фоторефрактивного кристалла $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ при использовании только одного кристаллического образца толщиной 16 мм. Описана методика проведения эксперимента и обработки полученных результатов. Показана определяющая роль обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов в теоретической интерпретации получаемых экспериментальных данных. Выполнена теоретическая оптимизация коэффициента усиления предметной световой волны в этом кристалле.

Ключевые слова: фоторефрактивный кристалл, кристалл BGO, коэффициент усиления предметной световой волны, электрооптический эффект, обратный пьезоэлектрический эффект, фотоупругий эффект, оптическая активность.

The dependence of the gain of an object light wave in two-wave interaction on the orientation angle and the thickness of the photorefractive $(\bar{1}\bar{1}0)$ -cut $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ crystal using only a single crystal sample with a thickness of 16 mm has been experimentally investigated. The technique of carrying out the experiment and processing the results is described. The decisive role of the inverse piezoelectric and photoelastic effects in the theoretical interpretation of the experimental data is shown. Theoretical optimization of the gain of the object light wave in this crystal is performed.

Keywords: photorefractive crystal, BGO crystal, gain of the object light wave, electro-optical effect, inverse piezoelectric effect, photoelastic effect, optical activity.

Введение

Фоторефрактивные кристаллы силенитов $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO) и $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO) находят применение в различных голографических приложениях [1]–[4]. Это обусловлено их высокой светочувствительностью, неограниченностью числа циклов записи и считывания голограмм, а также другими уникальными оптическими свойствами.

При этом хорошо известно, что для наиболее эффективного использования кристаллов данного типа в голографических приложениях необходимо оптимизировать выходные энергетические характеристики записанных в них голограмм.

К таким важнейшим характеристикам относятся *дифракционная эффективность* голограмм, а также *коэффициент усиления предметной световой волны* при двухволновом взаимодействии, обусловленный перекачкой энергии из опорного пучка в предметный (далее сокращенно «*коэффициент усиления*»).

Одна из первых попыток экспериментальной и теоретической оптимизации *дифракционной эффективности* голограмм за счет выбора азимута линейной поляризации считывающего голографическую решетку пучка была предпринята в [5] для кристалла BSO. Подобные теоретические расчеты и эксперименты для BSO проведены также в [6].

Насколько нам известно, впервые оптимизация *перекачки энергии* световых пучков за счет выбора их линейной поляризации была выполнена в [7] для кристалла BSO.

Однако следует отметить, что в [5]–[7] рассматривались только такие пространственные ориентации кристалла относительно плоскости распространения световых пучков, при которых вектор голографической решетки \vec{K} был параллелен или перпендикулярен кристаллографическому направлению [001]. Как известно, например, из [9], [10], при этих ориентациях вектора решетки совместное влияние обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов (далее сокращенно «*пьеzoэффект*») на выходные

энергетические характеристики голограмм в кристаллах силленитов либо отсутствует ($\vec{K} \parallel [001]$), либо им можно пренебречь ($\vec{K} \perp [001]$). Поэтому для теоретической интерпретации экспериментальных данных в подобных экспериментах достаточно учета только электрооптического эффекта и оптической активности кристалла.

Влияние пьезоэффекта на свойства голограмм в кристаллах силленитов было впервые рассмотрено еще в работе [10] и более подробно изучено в [11] с учетом их оптической активности. Однако в более поздних по сравнению с [10], [11] работах как в области голографической интерферометрии (см., например, [12], [13]), так и в области других интересных современных голографических приложений (см., например, [14], [15]), по-прежнему используются «электрооптические конфигурации» ($\vec{K} \parallel [001]$ и $\vec{K} \perp [001]$) для кристаллов данного типа, не позволяющие получить оптимизированные результаты.

На основании изложенного выше в данной работе мы экспериментально и теоретически показываем, что данные конфигурации не являются оптимальными для усиления предметной световой волны в кристалле ВГО среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ при различных значениях его толщины. Результаты выполненных исследований могут быть использованы в случае применения кристалла ВГО для усиления оптических пучков и изображений, а также для других важных приложений [1], [2].

1 Оптическая схема и методика проведения эксперимента

Для проведения эксперимента по изучению зависимости коэффициента усиления предметной световой волны от ориентационного угла и толщины кристалла ВГО использовалась экспериментальная установка, оптическая схема которой представлена на рисунке 1.1.

Линейно поляризованный световой пучок гелий-неонового лазера, излучающего на длине волны $\lambda = 632.8$ нм с относительно малой мощностью 3 мВт, проходил через коллимирующую систему из цилиндрических линз 1 и 2 с фокусными расстояниями 20 мм и 170 мм соответственно. После этого он разделялся светоделительным кубом 3 с длиной ребра 25 мм на опорный R и предметный S пучки. Эти пучки, отражаясь от зеркал 4 и 5, проходили через полуволновые фазовые пластинки 6 и 7, после чего падали на кристалл ВГО, перед которым была расположена прямоугольная диафрагма с величиной отверстия 5 мм вдоль плоскости распространения световых пучков. Предметный пучок S до вхождения в кристалл дополнительно проходил через световой ослабитель 8, в результате чего интенсивность этого пучка при вхождении в кристалл становилась в четыре раза меньше, чем у опорного пучка. За кристаллом на пути пучка S

располагались световой ослабитель 9 и светочувствительная матрица CCD камеры, которая для простоты последующего изложения материала «вынесена» на рисунке 1 из камеры с указанием на нее стрелки «выноска 1». Эта матрица имела 768 пикселей вдоль горизонтальной оси Ox и 576 пикселей вдоль вертикальной оси Oy .

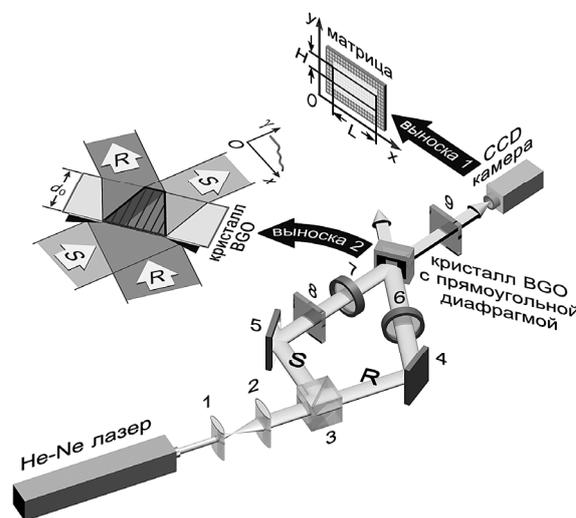


Рисунок 1.1 – Оптическая схема экспериментальной установки:

- 1, 2 – цилиндрические линзы;
- 3 – светоделительный куб; 4, 5 – зеркала;
- 6, 7 – полуволновые фазовые пластинки;
- 8, 9 – световые ослабители

Принцип использования прямоугольной диафрагмы для проведения подобных исследований также поясняется на этом рисунке с использованием выноски, на которую указывает стрелка «выноска 2». Здесь кристаллическая пластинка с фиксированной толщиной d_0 показана в разрезе, совпадающем с плоскостью распространения пучков R и S . Из этой выноски видно, что при записи голограммы пучки, проходя через прямоугольную диафрагму (обозначена черными клиньями на пути пучков R и S), формируют в кристалле ненаклонную пропускающую голографическую решетку в форме равнобокой трапеции. При этом в светлой области голограммы пересечение пучков осуществляется при различных значениях эффективной толщины кристалла d ($0 < d \leq d_0$), а в затемненной – при одной фиксированной толщине d_0 . Под «эффективной толщиной» здесь и в дальнейшем будем понимать локальное значение толщины образца, на которой происходит взаимодействие (пересечение) опорного R и предметного S световых пучков.

Очевидно, что такой подход позволяет экспериментально исследовать зависимость коэффициента усиления предметной световой волны γ от эффективной толщины кристалла d с использованием только одного кристаллического

образца с фиксированной толщиной d_0 . При этом зависимость $\gamma(d)$ в этом случае содержит два участка: участок изменения величины γ (соответствует $0 < d \leq d_0$) и участок её теоретически постоянного значения (соответствует $d = d_0$), что также схематично показано на данной выноске возле выходящего из кристалла пучка S .

Методика обработки экспериментальных данных может быть объяснена с использованием изображенной на рисунке 1.1 светочувствительной матрицы CCD камеры, на которую указывает стрелка «выноска 1». На первоначальном этапе коэффициент усиления предметной световой волны определялся как

$$\Gamma(H, L) = \frac{I_S^R(L, H)}{I_S(L, H)},$$

где $I_S^R(L, H)$ – двумерное цифровое изображение распределения интенсивности предметного пучка на выходе из кристалла, полученное с использованием CCD камеры при наличии в кристалле голографической решетки и в присутствии пучка накачки R , а $I_S(L, H)$ – аналогичное изображение предметного пучка в отсутствие голографической решетки, то есть при «выключенном» пучке R .

Очевидно, что величина $\Gamma(L, H)$ также представляет собой двумерный массив. Усреднение значений строк этого массива вдоль вертикальной координаты Oy дает одномерную усредненную зависимость коэффициента усиления предметной световой волны $\gamma(x)$, которая непосредственно соответствует зависимости $\gamma(d)$. При данном усреднении мы не использовали всё изображение светового пучка вдоль оси Oy , поскольку лишь его средняя часть в этом направлении имела близкое к супергауссовому распределение интенсивности и поэтому мы усредняли только ее. В частности, в нашем случае число строк H составляло 150.

Отметим, что трапециевидная геометрия пересечения в кристалле световых пучков впервые была предложена в работах [16]–[18] также для изучения коэффициента усиления предметной световой волны в кристаллах BSO с $d_0 = 2$ мм, BGO с $d_0 = 8$ мм и ВТО с $d_0 = 10$ мм срезов $(\bar{1}\bar{1}0)$, $(1\bar{1}0)$ и $(1\bar{1}0)$ соответственно. Однако исследования коэффициента усиления предметной световой волны в этих работах опять же проводились только лишь для «электрооптических конфигураций», когда $\vec{K} \parallel [001]$ и $\vec{K} \perp [001]$.

Пространственная ориентация использованного нами в эксперименте образца кристалла BGO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ с толщиной $d_0 = 16$ мм относительно единичных векторов \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 рабочей системы координат, связанной с плоскостью распространения опорного R и предметного S световых пучков, представлена на

рисунке 1.2. Отсчет ориентационного угла кристалла θ осуществляется от кристаллографического направления $[001]$ к вектору голографической решетки \vec{K} .

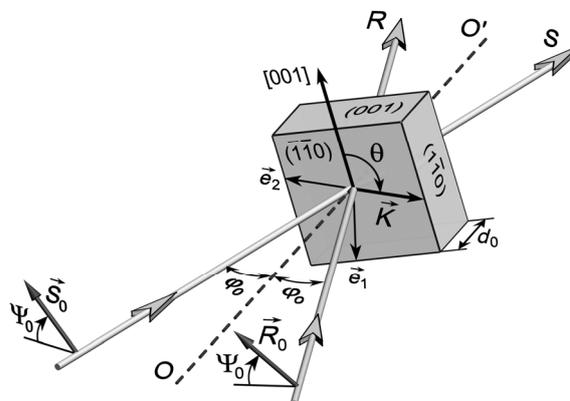


Рисунок 1.2 – Ориентация кристалла BGO относительно плоскости распространения световых пучков

В экспериментах векторы напряжённостей опорной \vec{R}_0 и предметной \vec{S}_0 световых волн характеризовались азимутами Ψ_0 , равными 0° , 45° , 90° или 135° . Угол Брэгга ϕ_0 вне кристалла составлял 15° . Время формирования голограммы было равно 30 с. Ориентационный угол кристалла изменялся с шагом $\Delta\theta = 10^\circ$, при этом кристалл поворачивался вокруг оси OO' .

Отметим, что возможность применения трапециевидной геометрии световых пучков для экспериментального изучения зависимости дифракционной эффективности голограмм от толщины и ориентационного угла фоторефрактивного кристалла BSO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ впервые была продемонстрирована в [19] и развита в [20].

2 Результаты и их обсуждение

Полученные экспериментальные и теоретические зависимости $\gamma(d)$ для $\theta = 80^\circ$ и 260° при $\Psi_0 = 0^\circ$, 45° , 90° и 135° представлены на фрагментах a – z рисунка 2.1. Данные значения θ были взяты такими, чтобы электрооптические конфигурации $\vec{K} \parallel [001]$ ($\theta = 0$ и 180°) и $\vec{K} \perp [001]$ ($\theta = 90^\circ$ и 270°) не реализовывались. Однако это позволило показать, что даже при углах θ , близких к конфигурации $\vec{K} \perp [001]$, пьезоэффект уже оказывает заметное влияние на коэффициент усиления предметной световой волны в кристалле BGO. Значения Ψ_0 были выбраны аналогичными указанным выше работам [16]–[18], в которых изучалась зависимость $\gamma(d)$ без учета пьезоэффекта.

Из рисунка 2.1 видно, что при изменении θ на 180° направление перекачки энергии из одного пучка в другой меняется на противоположное,

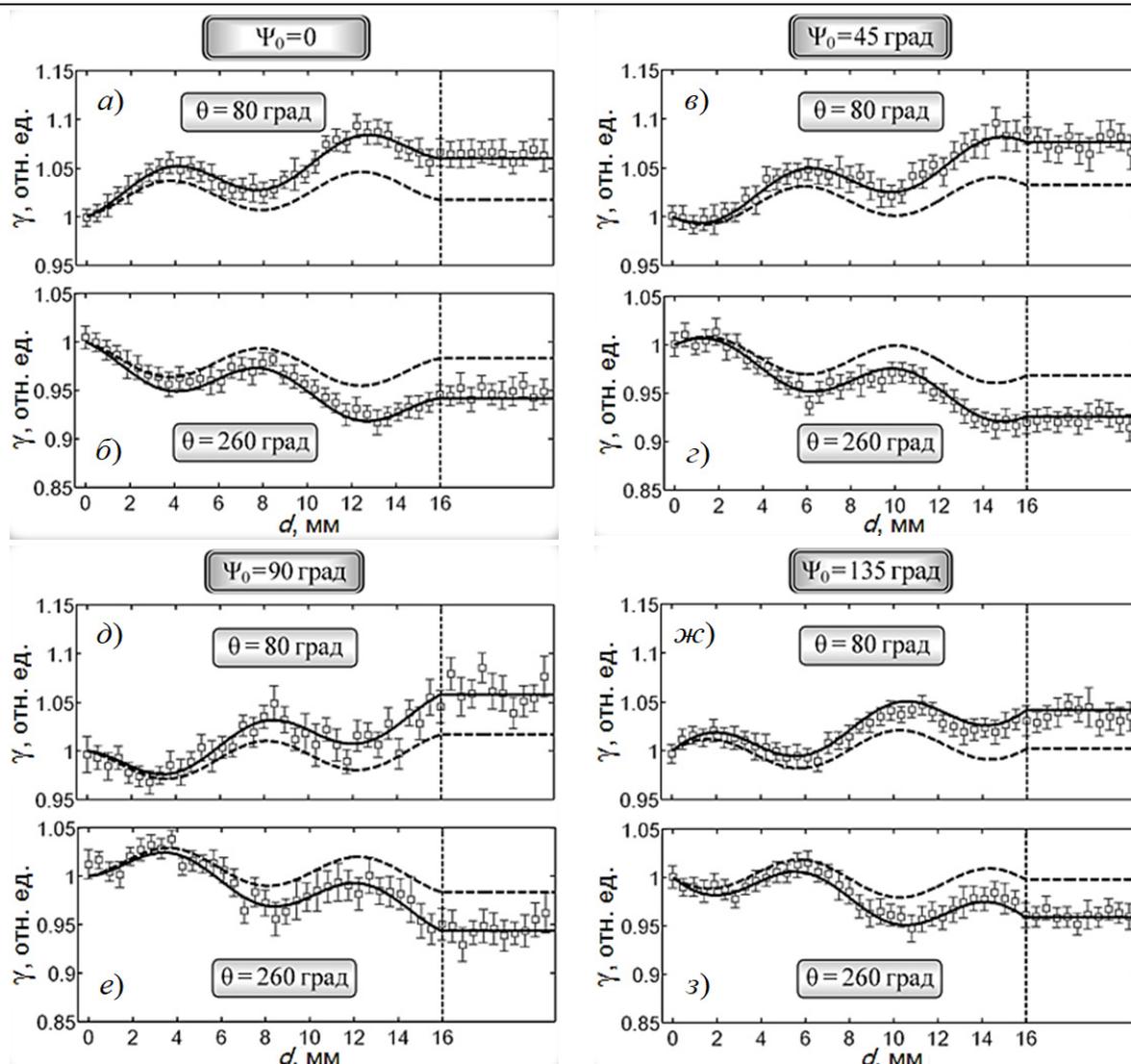


Рисунок 2.1 – Зависимости $\gamma(d)$ для $\theta = 80^\circ$ (а, в, д, ж) и 260° (б, з, е, з) при $\Psi_0 = 0$ (а, б), 45° (в, з), 90° (д, е) и 135° (ж, з):

штриховая линия – результаты теоретических расчетов без учета пьезоэффекта;
 сплошная линия – результаты теоретических расчетов с учетом пьезоэффекта;
 □ – экспериментальные данные

Таблица 2.1 – Физические параметры кристалла BGO для $\lambda = 632.8$ нм

Физическая величина	Обозначение	Числовое значение	Единицы измерения	Источники литературы
Показатель преломления	n	2.55	–	[21, 22]
Электрооптический коэффициент	r, r_{41} или r_{231}	-3.4×10^{-12}	м/В	[2, 21–24]
Модули упругости	c_1, C_{11} или C_{1111}	12.84×10^{10}	Н/м ²	[21, 25, 26]
	c_2, C_{12} или C_{1122}	2.94×10^{10}	Н/м ²	
	c_3, C_{44} или C_{2323}	2.55×10^{10}	Н/м ²	[21, 25–27]
Фотоупругие постоянные	p_1, p_{11} или p_{1111}	-0.136	–	[28]
	p_2, p_{12} или p_{1122}	-0.103	–	
	p_3, p_{13} или p_{1133}	-0.091	–	
	p_4, p_{44} или p_{2323}	-0.0134	–	
Пьезоэлектрический коэффициент	e, e_{14} или e_{123}	0.99	Кл/м ²	[21, 27]
Удельное вращение плоскости поляризации	ρ	363	рад/м	измерено на образце BGO

а варьирование величины Ψ_0 приводит к изменению положения локальных максимумов зависимости $\gamma(d)$. При этом «включение» пьезоэффекта в теоретических расчетах обуславливает увеличение взаимной трансформации энергии световых пучков на всем рассмотренном интервале толщины кристалла d и позволяет успешно согласовывать теорию с экспериментом.

На фрагментах *a–з* рисунка 2.1 вертикальной штриховой линией отмечена «граница» между областью, в которой взаимодействие световых пучков происходило при различных эффективных толщинах кристалла d , принадлежащих интервалу от 0 до 16 мм, и областью, в которой

взаимодействие пучков осуществлялось при постоянной толщине кристалла d_0 , равной 16 мм.

Использованные при расчетах параметры кристалла ВГО с указанием источников, из которых они были заимствованы, представлены в таблице 2.1.

При проведении теоретического анализа также принималась во внимание глубина модуляции интерференционной картины в кристалле на основании работы [29]. Наилучшая корреляция теории с экспериментом была достигнута при выборе амплитуды напряженности решетки электрического поля пространственного заряда $E_{SC} = 0.221$ кВ/см.

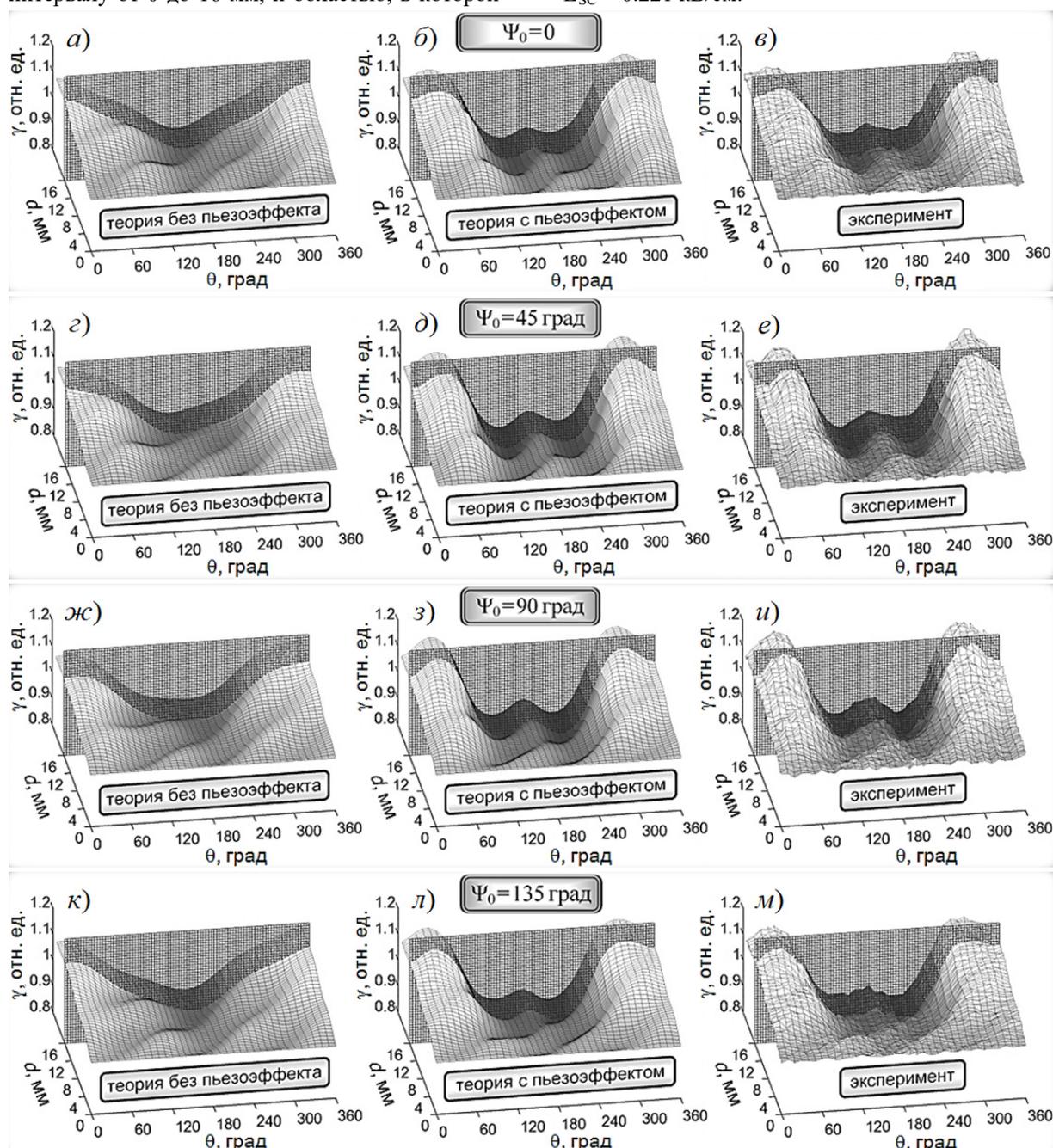


Рисунок 2.2 – Зависимости $\gamma(\theta, d)$ для $\Psi_0 = 0^\circ$ (*a, б, в*), 45° (*г, д, е*), 90° (*ж, з, и*) и 135° (*к, л, м*): *a, г, ж, к* – результаты теоретических расчетов без учета пьезоэффекта; *б, д, з, л* – результаты теоретических расчетов с учетом пьезоэффекта; *в, е, и, м* – результаты, полученные экспериментально

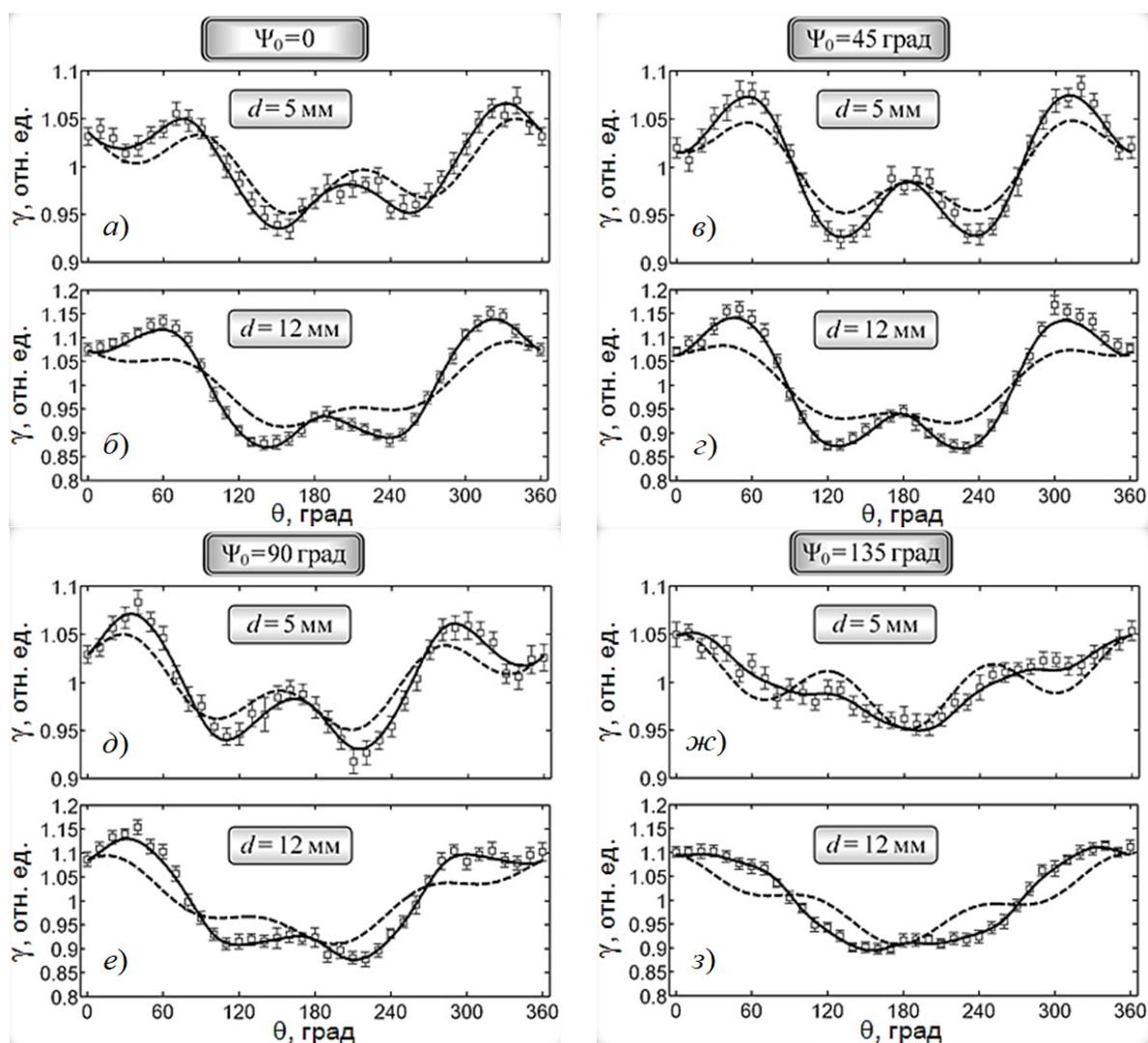


Рисунок 2.3 – Зависимости $\gamma(\theta)$ для $d = 5$ мм (а, в, д, ж) и $d = 12$ мм (б, г, е, з) при $\Psi_0 = 0$ (а, б), 45° (в, г), 90° (д, е) и 135° (ж, з): штриховая линия – теоретические расчеты без учета пьезоэффекта; сплошная линия – теоретические расчеты с учетом пьезоэффекта; \square – экспериментальные данные

Провести более детальную оценку влияния пьезоэффекта на коэффициент усиления предметной световой волны в ВГО позволяют поверхности $\gamma(\theta, d)$, представленные на фрагментах а–м рисунка 2.2. Эти поверхности были получены путем последовательного комбинирования зависимостей $\gamma(d)$ для различных θ . Здесь «граница» между областями изменения величины d и постоянного значения этой величины $d = d_0$ отмечена плоскостью $d = 16$ мм.

Эти поверхности демонстрируют, что удовлетворительная теоретическая интерпретация экспериментальных данных по изучению коэффициента усиления предметной световой волны в кристалле ВГО при различных значениях его ориентационных углов и толщины может быть дана только в случае *обязательного* учета пьезоэффекта. Действительно, при теоретическом учете этого эффекта (фрагменты б, д, з и л

рисунка 2.2) достигается как количественное, так и качественное соответствие теории эксперименту (фрагменты в, е, и м рисунка 2.2) в отличие от чисто электрооптической теоретической модели (фрагменты а, г, ж и к рисунка 2.2).

Сечение поверхностей $\gamma(\theta, d)$, представленных на рисунке 2.2, плоскостями $d = \text{const}$ позволяет получить зависимости $\gamma(\theta)$ для четырёх значений азимута линейной поляризации световых волн. Такие зависимости для $d = 5$ мм и 12 мм без учета и с учетом пьезоэффекта, а также соответствующие им экспериментальные данные, представлены на фрагментах а–з рисунка 2.3. Здесь с целью лучшей визуализации полученных результатов ось ординат для двух указанных значений толщины кристалла представлена в различных масштабах.

Из этих зависимостей видно, что в широком диапазоне ориентационных углов кристалла

только «включение» пьезоэффекта приводит к удовлетворительной корреляции теории с экспериментом.

Важным представляется отметить тот факт, что при использовании описанного в настоящей статье подхода с применением трапециевидной геометрии пересечения в кристалле световых пучков мы получили более 300 зависимостей $\gamma(\theta)$ для каждой из представленных поляризаций с шагом изменения толщины Δd кристалла BGO менее 0.05 мм. Это позволяет экспериментально обоснованно выбрать оптимальные значения не только θ , но и d , при которых коэффициент усиления предметной световой волны принимает значения локальных максимумов.

Очевидно, что увеличение числа получаемых зависимостей $\gamma(\theta)$ может быть реализовано, в частности, за счет выбора CCD камеры с большей разрешающей способностью светочувствительной матрицы.

3 Теоретическая оптимизация коэффициента усиления в кристалле BGO

Из представленного выше материала видно, насколько существенным оказывается вклад пьезоэффекта в энергетический обмен световых пучков в кристалле BGO при его различных пространственных ориентациях. Однако, несомненно, наибольший интерес для практических применений данного представителя силленитов представляет рассмотрение влияния пьезоэффекта на оптимизацию этого энергообмена, когда достигается наибольшая перекачка энергии из опорного пучка в предметный. Такая оптимизация, в частности, может быть выполнена за счет выбора оптимальных значений азимута линейной поляризации Ψ_0^{opt} световых пучков, при которых для фиксированных величин ориентационного угла θ и толщины d кристалла достигается поляризационно оптимизированный коэффициент усиления $\gamma_{\Psi_0}^{opt}$ предметной световой волны.

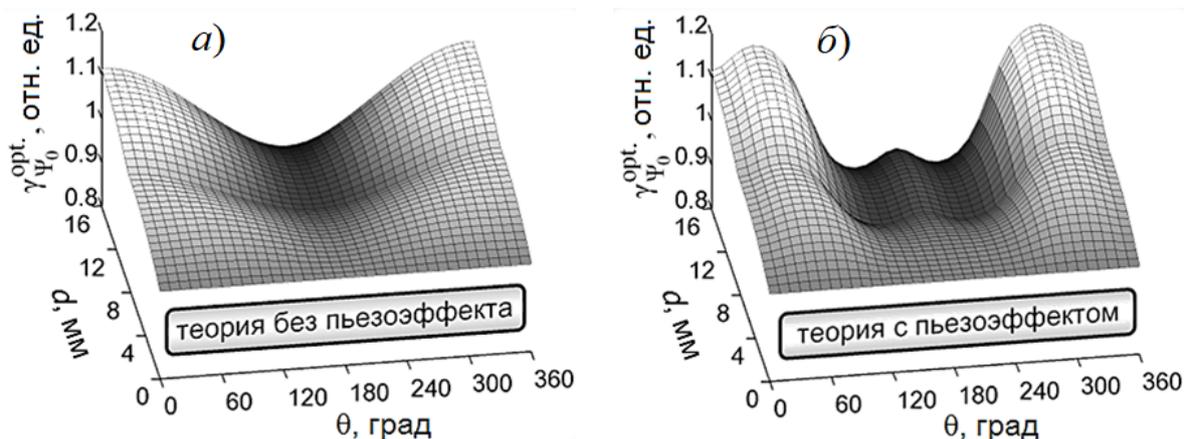


Рисунок 3.1 – Теоретические зависимости $\gamma_{\Psi_0}^{opt}(\theta, d)$:
 а) – без учета пьезоэффекта; б) – с учетом пьезоэффекта

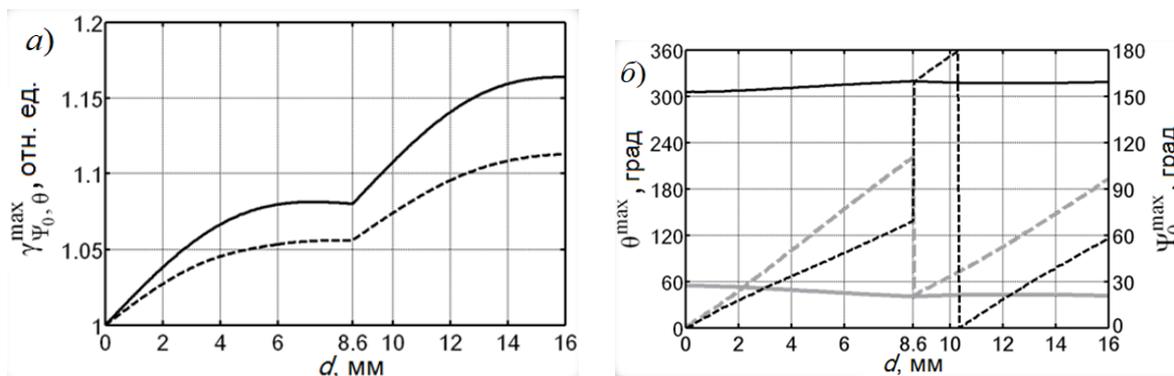


Рисунок 3.2 – а) – зависимости $\gamma_{\Psi_0, \theta}^{max}(d)$ без учета пьезоэффекта (штриховая линия) и с учетом пьезоэффекта (сплошная линия); б) – зависимости $\theta^{max}(d)$, обозначенные сплошными линиями, и $\Psi_0^{max}(d)$, обозначенные штриховыми линиями, при которых формируются максимумы коэффициента усиления с учетом пьезоэффекта: серый цвет – в случае «первого» максимума, черный цвет – в случае «второго» максимума

Полученные поверхности $\gamma_{\Psi_0}^{opt.}(\theta, d)$ для кристалла BGO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ без учета и с учетом пьезоэффекта представлены на рисунке 3.1, из которого видно их существенное качественное и количественное различие.

Детальный анализ вида этих поверхностей показал, что без учета пьезоэффекта (рисунок 3.1, а) при значении толщины кристаллического образца менее 5.9 мм максимум коэффициента усиления может быть достигнут при двух ориентационных углах. Такие максимумы коэффициента усиления при фиксированной толщине кристалла d далее обозначим как $\gamma_{\Psi_0, \theta}^{\max}$. В случае достижения и превышения этого значения толщины кристаллического образца максимум перекачки энергии из опорного пучка в предметный имеет место уже только при одном ориентационном угле $\theta = 0$ (360°), т. е. при условии, когда вектор голографической решетки \vec{K} сонаправлен с кристаллографическим направлением $[001]$ ($\vec{K} \uparrow [001]$).

Иначе обстоит дело при учете пьезоэффекта. В этом случае максимально возможные значения коэффициента усиления на всем исследованном интервале толщины кристалла всегда достигаются при двух его ориентационных углах. При этом значения $\gamma_{\Psi_0, \theta}^{\max}$ в случае учета пьезоэффекта превышают аналогичные значения $\gamma_{\Psi_0, \theta}^{\max}$ без его учета на всем промежутке d , о чем свидетельствует рисунок 3.2, а. При этом зависимости ориентационного угла θ^{\max} и азимута линейной поляризации Ψ_0^{\max} от толщины d , при которых реализуются «первый» и «второй» по направлению отсчета угла θ максимумы коэффициента усиления $\gamma_{\Psi_0, \theta}^{\max}$ с учетом пьезоэффекта, приведены на рисунке 3.2, б. Такие зависимости имеют важное прикладное значение, поскольку могут быть использованы для оптимизации устройств, выполненных на основе кристалла BGO.

Из рисунка 3.2, а видно, что при толщине кристаллического образца, равной 8.6 мм, имеет место скачок производных функций $\gamma_{\Psi_0, \theta}^{\max}(d)$; также при этом наблюдается заметный скачок значений Ψ_0^{\max} , что следует из фрагмента 3.2, б.

Значения толщины кристалла, при которых наблюдаются указанные скачки, определяются согласно выражению

$$d = (\pi m \cos \varphi) / \rho,$$

где φ – угол Брэгга внутри кристалла (связан с углом φ_0 законом Снеллиуса), а $m = 1, 2, 3 \dots$

Из представленного выше материала следует, что для наиболее эффективного практического использования кристалла BGO в приложениях

необходимо учитывать влияние пьезоэффекта на перекачку световой энергии из опорной волны в предметную. При этом непосредственно сам коэффициент усиления может быть значительно увеличен, в частности, за счет повышения интенсивности пучка накачки, изменения пространственного периода голограммы и т. д., что хорошо известно, например, из [1], [2].

Заключение

Таким образом, в данной статье описана методика и представлены результаты экспериментальных исследований зависимости коэффициента усиления γ предметной световой волны от ориентационного угла θ и толщины d кристалла BGO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$. Исследования выполнены для четырех азимутов линейной поляризации $\Psi_0 = 0, 45^\circ, 90^\circ$ и 135° взаимодействующих световых пучков. Установлено, что при ориентационных углах кристалла, при которых вектор голографической решетки \vec{K} не параллелен или не перпендикулярен кристаллографическому направлению $[001]$, теория удовлетворительно согласуется с экспериментом только при принятии во внимание обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов в дополнение к традиционно рассматриваемому электрооптическому эффекту и оптической активности кристалла. Показано, что исследование зависимостей $\gamma(\theta)$ при фиксированных значениях толщины кристалла может быть проведено с помощью сечения плоскостями $d = \text{const}$ экспериментально полученных поверхностей $\gamma(\theta, d)$.

Установлено, что поляризационно оптимизированные зависимости коэффициента усиления $\gamma_{\Psi_0}^{opt.}(\theta, d)$, рассчитанные без учета и с учетом пьезоэффекта, имеют существенные качественные и количественные различия. С учетом пьезоэффекта найдены значения ориентационного угла кристалла θ^{\max} и азимута линейной поляризации световых пучков Ψ_0^{\max} , при которых для фиксированных значений толщины d кристалла достигается максимальный коэффициент усиления $\gamma_{\Psi_0, \theta}^{\max}$ предметной световой волны, что может быть использовано для оптимизации голографических устройств, выполненных на основе кристалла BGO.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров, М.П. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – СПб.: Наука. С.-Петербургское отд-ние, 1992. – 320 с.
2. Solymar, L. The physics and applications of photorefractive materials / L. Solymar, D.J. Webb, A. Grunnet-Jepsen. – Oxford: Clarendon Press, 1996. – 494 p.

3. *Picometer detection by adaptive holographic interferometry* / U. Bortolozzo [et al.] // *Fundamentals of Picoscience* / ed. by K.D. Sattler. – New York, 2014. – P. 3–26.
4. *Photorefractive moiré-like patterns for the multifringe projection method in Fourier transform profilometry* / M.E. Oliveira [et al.] // *Appl. Opt.* – 2016. – Vol. 55, № 5. – P. 1048–1053.
5. *Petrov, M.P.* Light diffraction from volume phase holograms in electrooptic photorefractive crystals / M.P. Petrov, T.G. Pencheva, S.I. Stepanov // *Journal of Optics.* – 1981. – Vol. 12, № 5. – P. 287–292.
6. *Mallik, S.* Efficiency and polarization characteristics of photorefractive diffraction in a $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ crystal / S. Mallik, D. Rouède, A.G. Apostolidis // *JOSA B.* – 1987. – Vol. 4, № 8. – P. 1247–1259.
7. *Mallik, S.* Influence of the polarization direction on two-beam coupling in photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$: Diffusion regime / S. Mallik, D. Rouède // *Appl. Phys. B.* – 1987. – Vol. 43, № 4. – P. 239–245.
8. *Фоторефрактивные эффекты в электрооптических кристаллах* / С.М. Шандаров [и др.]. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 242 с.
9. *Шепелевич, В.В.* Голография в фоторефрактивных оптически активных кристаллах / В.В. Шепелевич. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 254 с.
10. *Степанов, С.И.* Фотоупругий вклад в фоторефрактивный эффект в кубических кристаллах / С.И. Степанов, С.М. Шандаров, Н.Д. Хатьков // *ФТТ.* – 1987. – Т. 24, № 10. – С. 3054–3058.
11. *Shepelevich, V.V.* Light diffraction by holographic gratings in optically active photorefractive piezocrystals / V.V. Shepelevich, S.M. Shandarov, A.E. Mandel // *Ferroelectrics.* – 1990. – Vol. 110. – P. 235–249.
12. *Real-time holographic interferometry with double two-wave mixing in photorefractive crystals* / G. Cedilnik [et al.] // *Appl. Opt.* – 2000. – Vol. 39, № 13. – P. 2091–2100.
13. *Gesualdi, M.R.R.* Light-induced lens analysis in photorefractive crystals employing phase-shifting real-time holographic interferometry / M.R.R. Gesualdi, M. Muramatsu, E.A. Barbosa // *Opt. comm.* – 2008. – Vol. 281, № 23. – P. 5739–5744.
14. *de Oliveira, G.N.* Photorefractive holographic moiré-like patterns for secure numerical code generation / G.N. de Oliveira, M.E. Oliveira, P.A.M. dos Santos // *Opt. Lett.* – 2013. – Vol. 38, № 6. – 1004–1006.
15. *Digital holographic microscopy with photorefractive sillenite $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ crystals* / J. Ricardo [et al.] // *Opt. Lasers Eng.* – 2013. – Vol. 51, № 8. – P. 949–952.
16. *Dynamic holography with none plane waves in sillenites* / E. Shamonina [et al.] // *Opt. Quant. Electron.* – 1996. – Vol. 28, № 1. – P. 25–42.
17. *Investigation of two-wave mixing in arbitrary oriented sillenite crystals* / E. Shamonina [et al.] // *Appl. Phys. B.* – 1997. – Vol. 64, № 1. – P. 49–56.
18. *Optical activity in photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$* / E. Shamonina [et al.] // *Opt. Comm.* – 1998. – Vol. 146, № 1–6. – P. 62–68.
19. *Экспериментальное исследование ориентационной зависимости дифракционной эффективности пропускающих голограмм от толщины кристалла $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$* / А.В. Макаревич [и др.] // *Письма в ЖТФ.* – 2015. – Т. 41, № 19. – С. 46–54.
20. *Экспериментальное исследование зависимости дифракционной эффективности фоторефрактивных голограмм от толщины образца и ориентационного угла в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ среза $(\bar{1}\bar{1}0)$* / В.В. Шепелевич [и др.] // *Известия вузов. Физика.* – 2015. – Т. 28, № 10. – С. 74–79.
21. *Акустические кристаллы* / А.А. Блисталов [и др.]; под ред. М.П. Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
22. *Growth of sillenite-structure single crystals* / V.M. Skorikov [et al.] // *Inorg. Mater.* – 2005. – Vol. 41, Suppl. 1. – S24–S25.
23. *Cronin-Golomb, M.* Photorefractive Materials and Devices / M. Cronin-Golomb, M. Klein // *Handbook of Optics* / ed. by M. Bass. – New York, 1995. – P. 39.1–39.42.
24. *Growth and holographic characterization of nonstoichiometric sillenite-type crystals* / H. Vogt [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2001. – Vol. 90, № 7. – P. 3167–3173.
25. *Photorefractive properties of $(\bar{1}\bar{1}0)$ and (111) -cut sillenite crystals when external electric field is applied along the direction of the optimum diffraction efficiency* / N.C. Deliolanis [et al.] // *Appl. Phys. B.* – 2002. – Vol. 75, № 1. – P. 67–73.
26. *Diffraction properties of volume phase gratings in photorefractive sillenite crystals of arbitrary cut under the influence of an external electric field* / N.C. Deliolanis [et al.] // *Phys. Rev. E.* – 2003. – Vol. 68, № 5. – P. 056602-1–17.
27. *Slobodnik, A.J.* Elastic, piezoelectric, and dielectric constants of $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ / A.J. Slobodnik, J.C. Sethares // *J. Appl. Phys.* – 1972. – Vol. 43, № 1. – P. 247–248.
28. *Ропот, П.И.* Определение фотоупругих постоянных оптически активных кубических кристаллов поляризационным методом / П.И. Ропот // *Опт. и спектр.* – 1991. – Т. 70, № 2. – С. 371–375.
29. *Шепелевич, В.В.* К процессу формирования голографических решеток в плоскопараллельном гиротропном слое / В.В. Шепелевич // *Опт. и спектр.* – 1983. – Т. 54, № 5. – С. 1064–1071.

Поступила в редакцию 02.08.18.

УДК 661.862 537.411

ВЛИЯНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОТЖИГА В ВАКУУМЕ НА СТРУКТУРУ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ZnO:Al ПЛЕНОК, СИНТЕЗИРОВАННЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМ

В.В. Сидский¹, А.В. Семченко¹, В.Е. Гайшун¹, Д.Л. Коваленко¹, А.С. Ханна²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Индийский технологический институт Бомбей, Мумбаи

EFFECTS OF ADDITIONAL VACUUM ANNEALING ON THE STRUCTURE, ELECTRICAL AND OPTICAL PROPERTIES OF ZnO:Al FILMS SYNTHESIZED BY SOL-GEL

V.V. Sydsky¹, A.V. Semchenko¹, V.E. Gaishun¹, D.L. Kovalenko¹, A.S. Khanna²

¹F. Scorina Gomel State University

²Indian Institute of Technology Bombay, Mumbai

Определено влияние дополнительного отжига в вакууме на структуру, электрофизические и оптические свойства ZnO:Al пленок, синтезированных золь-гель методом. Дополнительный отжиг в вакууме при температуре 350° C приводит к повышению содержания кристаллической фазы в пленках, наблюдается существенное уменьшение значений ширины запрещенной зоны, что хорошо согласуется с данными предыдущих исследований структурных свойств пленок ZnO, полученных золь-гель методом.

Ключевые слова: оксид цинка, золь-гель метод, вакуумный отжиг, кремниевые солнечные элементы, пропускание, поглощение, дифракция.

The effect of additional annealing in vacuum on the structure, electrical and optical properties of ZnO:Al films synthesized by sol-gel method is determined. Additional annealing in vacuum at the temperature of 350° C leads to the increasing of the content of the crystalline phase in the films. There significant decreasing of the widths of the forbidden gap is observed, which is in good agreement with the data of previous studies of the structural properties of ZnO:Al films.

Keywords: zinc oxide, sol-gel method, vacuum annealing, silicon solar cells, transmission, absorption, diffraction.

Введение

В течение последнего десятилетия резко возрос интерес к наноструктурированным прозрачным проводящим покрытиям. Это объясняется их уникальными функциональными возможностями для последующего применения в опто- и наноэлектронике, в солнечных элементах типа CIGS, фотовольтаических и электрохромных устройств («умные» оконные покрытия, дисплеи, элементы солнечных батарей), светодиодов (LED, OLED) и пр. [1].

В последнее время значительный интерес проявляется к покрытиям на основе оксида цинка из-за возможности прикладного использования [1]. Данный материал имеет высокую химическую, радиационную и термическую стойкость и обладает высоким потенциалом для использования при создании различных элементов прозрачной электроники [2]. Благодаря соединению уникальных электрических, пьезоэлектрических и оптических свойств, ZnO может применяться в устройствах генерации поверхностных акустических волн, газовых сенсорах, фотодиодах, фотонных кристаллах. Кроме того, оксид цинка является перспективным катодолуминофором. Обладающие достаточно широкой запрещенной

зоной, полупроводники ZnO ($E_g = 3,37$ эВ) можно использовать в качестве детекторного материала для регистрации ультрафиолетового излучения [3].

В качестве метода синтеза авторами выбран золь-гель метод. Золь-гель метод широко используется при синтезе неорганических смешанных оксидов из-за многочисленных преимуществ, в первую очередь простоты технологического процесса. Золь-гель процесс является одним из привлекательных методов осаждения тонких пленок ZnO из-за низкой стоимости оборудования, низкой температуры обработки, простоты введения легирующих добавок, а также возможностью подготовки покрытий на большой площади.

1 Методика эксперимента

Для получения золь-гель методом слоёв на основе ZnO:Al требуемой толщины и хорошей однородности использовался метод центрифугирования (spin-coating). Установлена корреляция между параметрами коллоидного раствора и дополнительного вакуумного отжига на основе ZnO:Al. Для изучения влияния дополнительного вакуумного отжига на структуру, электрические

и оптические свойства ZnO:Al плёнок после нанесения золь на поверхность пластин монокристаллического кремния их помещали в печь, где они отжигались до температуры 350° С пошагово с интервалом в 20° С в течение 10 мин. Процесс нанесения и сушки повторялся до получения нужной толщины. На последней стадии подложки помещали в печь и нагревали до 550° С пошагово с интервалом 20° С в течение 50 мин. Затем был проведен дополнительный вакуумный отжиг при температуре 350° С при предельном остаточном давлении $1 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст.

Изучение фазового состава синтезированных плёнок на основе оксида цинка с примесью алюминия, полученных золь-гель методом проведено путём рентгенофазового анализа на дифрактометре ARL X'tra (Thermo Fisher Scientific, Швейцария) в режиме отражения (геометрия Брэгга – Брентано).

Измерение спектров пропускания проведено на спектрофлуориметре «СОЛАР» СМ 2203 ЗАО «Солар» (Беларусь), обеспечивающем высокочувствительные и стабильные измерения в ультрафиолетовой и видимой областях спектра

2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 2.1 приведены дифрактограммы плёнок оксида цинка с примесью алюминия, осаждённых на стеклянную подложку.

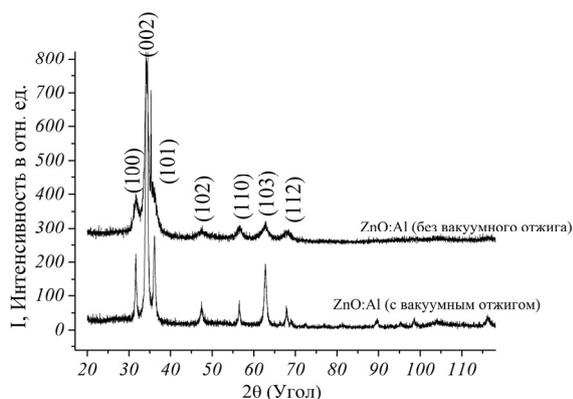


Рисунок 2.1 – Рентгенограммы ZnO:Al-плёнок, полученных золь-гель методом с вакуумным отжигом и без

Присутствие чётких дифракционных пиков указывает на наличие у осаждённой плёнки кристаллической структуры. При сравнении интенсивности пиков и их положение относительно углов дифракции 2θ со значениями, приведёнными в JCPDS для рентгеновской дифракции оксида цинка, было установлено, что осаждённая плёнка имеет гексагональную решётку типа вюрцита. При этом доминирующим по интенсивности пиком во всех случаях является пик (002), что свидетельствует о наличии в полученных плёнках ярко выраженной текстуры роста. Тонкая плёнка оксида цинка с примесью алюминия после дополнительного вакуумного имеет

дифракционный пик (002) наибольшей интенсивности. Это указывает на то, что дополнительный отжиг в вакууме при температуре 350° С приводит к улучшению кристаллической структуры плёнок.

На рисунке 2.2 представлены спектры пропускания стекла и плёнок легированного алюминия оксида цинка на стеклянной подложке. Можно выделить две области: в первой области $\lambda < 400$ нм энергия квантов падающего излучения больше, чем ширина запрещённой зоны ZnO:Me, в этом диапазоне поглощение света резко увеличивается.

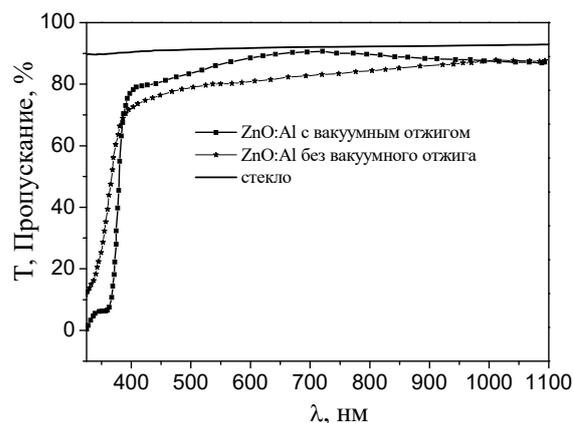


Рисунок 2.2 – Спектры пропускания ZnO:Al-плёнок, полученных золь-гель методом с отжигом в вакууме и без дополнительной обработки

Вторая область лежит в интервале длин волн ($400 \text{ нм} < \lambda < 1000 \text{ нм}$), здесь энергия падающих фотонов низка, и в результате плёнки ZnO:Me практически прозрачны для этого диапазона длин волн, и, соответственно, поглощение света минимально. Как следует из рисунка 2.2, в области длин волн от 400 нм до 700 нм наибольшим коэффициентом пропускания (порядка 75%) обладает плёнка ZnO:Al с дополнительным отжигом в вакууме, для плёнки без дополнительной обработки этот параметр лежит в диапазоне от 65% до 75%. В области длин волн более 700 нм коэффициент пропускания для всех плёнок практически одинаков и составляет 80–85%. Небольшой разброс по значению пропускания может быть обусловлен структурой плёнки, в частности, размером зёрен, уменьшение размера зерна за счёт дополнительной обработки в вакууме приводит к улучшению оптических свойств плёнок [3].

На рисунках 2.3–2.4 представлены спектры поглощения ZnO:Al-плёнок, полученных золь-гель методом с отжигом в вакууме и без и определены ширины запрещённых зон слоёв на основе ZnO:Al.

Из рисунков можно заметить существенное уменьшение значений ширины запрещённой зоны с применением дополнительной обработки в вакууме температурой отжига, что хорошо

согласуется с данными предыдущих исследований структурных свойств плёнок ZnO:Al, полученных золь-гель методом. Предполагаемой причиной уменьшения ширины запрещённой зоны является уменьшение концентрации дефектов при дополнительном отжиге в вакууме.

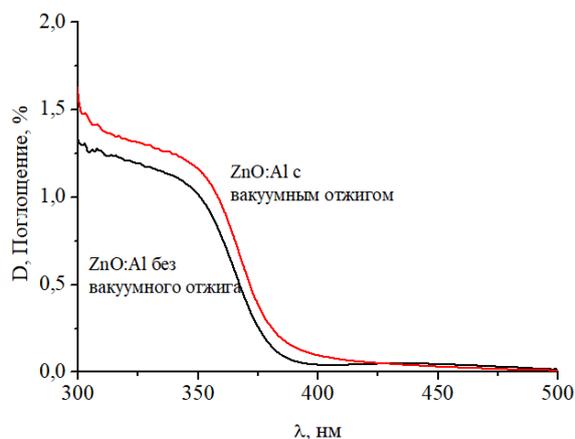


Рисунок 2.3 – Спектры поглощения ZnO:Al-плёнок, полученных золь-гель методом, с отжигом в вакууме и без дополнительной обработки

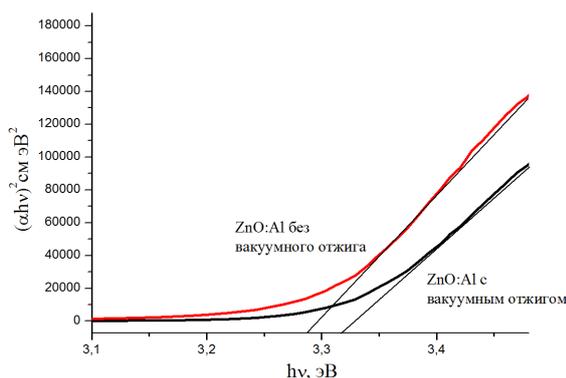


Рисунок 2.4 – Определение ширины запрещённой зоны ZnO:Al-плёнок, полученных золь-гель методом, с отжигом в вакууме и без дополнительной обработки

Заключение

Определено влияние дополнительного отжига в вакууме на структуру, электрофизические и оптические свойства ZnO:Al плёнок, синтезированных золь-гель методом. Дополнительный отжиг в вакууме при температуре 350° С приводит к повышению содержания кристаллической фазы в плёнках, наблюдается существенное уменьшение значений ширины запрещённой зоны, что хорошо согласуется с данными предыдущих исследований структурных свойств плёнок ZnO, полученных золь-гель методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thin film solar cells: Fabrication, characterization and application* / J. Poortmans, V. Arkhipov // Leuven, Belgium: John Wiley & Sons, Ltd. IMEC, 2006. – 471 p.
2. *The springer handbook of electronic and photonic materials* / S. Kasap, P. Capper // Berlin: Springer, 2007. – 1406 p.
3. *Structure and technology problems of A2B6 semiconductor films* / P.A. Panchekha // Functional materials. – 2000. – Vol. 7, № 2. – P. 1–5.
4. *Свойства плёнок ZnO: Er³⁺, полученных золь-гель методом* / В.В. Малютин-Бронская [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2017. – Т. 51/3. – С. 409–413.

Исследование выполнено при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научного проекта № Т17ИНДГ-007.

Поступила в редакцию 09.11.18.

УДК 539.12

ОБРАБОТКА СИНТЕТИЧЕСКИХ АЛМАЗНЫХ СТРУКТУР ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ С ДЛИНОЙ ВОЛНЫ 532 НМ

Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, С.Ф. Ермаков, А.Е. Шершнев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

PROCESSING OF SYNTHETIC DIAMOND STRUCTURES LASER RADIATION WITH A WAVE LENGTH OF 532 NM

E.B. Shershnev, Y.V. Nikitjuk, S.I. Sokolov, S.F. Ermakov, A.E. Shershnev

F. Scorina Gomel State University

Выполнено численное моделирование процесса обработки кристаллов алмаза при воздействии лазерного излучения с длиной волны 532 нм. Расчет формы лунки и температурных полей, формируемых в кристаллах алмаза в результате лазерного нагрева, осуществлен с использованием трёх вариантов моделирования: I – трехмерный анализ при воздействии лазерного излучения вдоль оси симметрии второго порядка (L_2), II – трехмерный анализ при воздействии лазерного излучения вдоль оси симметрии третьего порядка (L_3), III – трехмерный анализ при воздействии лазерного излучения вдоль оси симметрии четвертого порядка (L_4). Проведена экспериментальная проверка полученных результатов.

Ключевые слова: лазерная обработка, алмаз, графит, метод конечных элементов.

A numerical simulation of the processing of diamond crystals when exposed to laser radiation with a wavelength of 532 nm was performed. The calculation of the shape of the hole and temperature fields formed in diamond crystals as a result of laser heating was carried out using three modeling options: I – a three-dimensional analysis when exposed to laser radiation along a second-order symmetry axis (L_2), II – a three-dimensional analysis when exposed laser radiation along the axis of symmetry of the third order (L_3), III – three-dimensional analysis when exposed to laser radiation along the axis of symmetry of the fourth order (L_4). An experimental verification of the obtained results was carried out.

Keywords: laser treatment, diamond, finite element method.

Введение

Физические свойства кристаллов алмаза обеспечивают надёжную работу в критических условиях устройств, созданных на его основе, и делают перспективным применение данных кристаллов при создании новой техники [1].

В работах [2]–[5] проведено исследование особенностей лазерной обработки кристаллов алмазов при воздействии лазерного излучения с длиной волны 1064 нм. В работе [6] проведено исследование особенностей локализации температурных полей и полей термоупругих напряжений, формируемых в кристаллах алмаза при воздействии лазерного излучения.

В данной работе представлены результаты трехмерного моделирования процесса формирования лунок в образцах при воздействии лазерного излучения с длиной волны 532 нм вдоль осей симметрии второго, третьего и четвертого порядка кристаллов алмаза и результаты экспериментальной проверки, полученных результатов с использованием сверхтвёрдого материала (СТМ) «Алмазот» ТУ РБ № 600 1245 13. 002 – 2002.

1 Моделирование

Лазерное воздействие на кристаллы алмаза приводит к значительному увеличению температуры, сопровождаемому фазовыми переходами. В соответствии с [3] в данной работе была

использована упрощенная схема превращений алмаза под воздействием лазерного излучения: алмаз \Rightarrow фазовый переход \Rightarrow графит \Rightarrow испарение. При этом полагалось, что стадия интенсивной графитизации кристаллов алмаза наступает по достижении обрабатываемым материалом температуры 2300 К.

Для анализа особенностей лазерной обработки кристаллов алмаза был использован метод конечных элементов [5].

Моделирование процесса фазового перехода алмаз – графит осуществлялось за счет циклической проверки условия достижения точками обрабатываемого материала температуры графитизации с последующим присвоением теплофизических свойств графита соответствующим областям конечно элементной модели. При этом учитывалась строгая ориентация гексагональных плоскостей графита параллельно плоскостям (111) кристаллов алмаза, независимо от ориентации падающего лазерного излучения.

При расчетах плотность, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности алмаза и графита принимались равными соответственно: $\rho_a = 3520 \text{ кг/м}^3$, $\rho_g = 2300 \text{ кг/м}^3$; $C_a = 854 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, $C_g = 994 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$; $\lambda_a = 427 \text{ Вт/ м}\cdot\text{К}$, $\lambda_{g\perp} = 88 \text{ Вт/ м}\cdot\text{К}$, $\lambda_{g\parallel} = 355 \text{ Вт/ м}\cdot\text{К}$ [3]. Символом $\lambda_{g\perp}$ обозначен коэффициент теплопроводности графита в направлении, перпендикулярном гексагональным

граням, а символом λ_{\parallel} обозначен коэффициент теплопроводности графита в направлении, параллельном гексагональным граням.

Расчет формы лунок и температурных полей, формируемых в кристаллах алмаза в результате лазерного нагрева, был выполнен для трех различных вариантов: I – трехмерный анализ при воздействии лазерного излучения вдоль оси симметрии второго порядка (L_2), II – трехмерный анализ при воздействии лазерного излучения вдоль оси симметрии третьего порядка (L_3), III – трехмерный анализ при воздействии лазерного излучения вдоль оси симметрии четвертого порядка (L_4).

Расчеты были выполнены с использованием следующих значений технологических параметров обработки: плотность мощности лазерного излучения $P_0 = 0,5 \div 1,5 \cdot 10^{12}$ Вт/м², радиус поперечного сечения лазерного пучка $R = 0,05$ мм. Результаты моделирования представлены в таблице 2.1 и на рисунках 2.1–2.3.

Таблица 2.1 – Результаты моделирования лазерной обработки кристаллов алмазов при воздействии лазерного излучения с длиной волны 532 нм

Плотность мощности лазерного излучения $P_0, 10^{12}$ Вт/м ²	0,5	0,75	1	1,25	1,5
I вариант					
Диаметр лунки на поверхности, мкм	380	390	390	380	380
Диаметр лунки на глубине, мкм	350	360	310	350	360
II вариант					
Ширина сверху, мкм	390	380	400	380	380
Ширина снизу, мкм	350	340	320	340	360
III вариант					
Ширина сверху, мкм	390	390	380	380	380
Ширина снизу, мкм	350	360	310	340	360

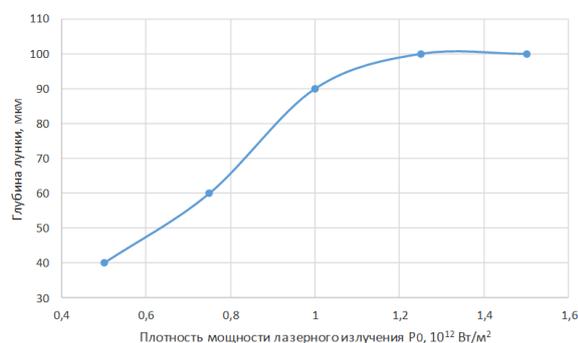


Рисунок 2.1 – Зависимость глубины лунки от плотности мощности лазерного излучения

Анализ результатов моделирования показал, что зависимость глубины лунки от плотности мощности лазерного излучения практически одинакова для всех трех вариантов обработки и носит нелинейный характер.

Представленные результаты объясняются более эффективным объемным поглощением кристаллом алмаза лазерного излучения с длиной волны 532 нм по сравнению с излучением с длиной волны 1064 нм. Такое лазерное воздействие приводит к снижению влияния анизотропии теплофизических свойств графита на геометрические параметры лунок, индуцированных лазерным излучением. Тем не менее расчётная форма лунки, образующейся при обработке вдоль оси L_4 , обладает асимметричностью относительно линии воздействия лазерного пучка.

2 Эксперимент

Проведение экспериментальных исследований лазерной обработки СТМ «Алмазот» проводилось с использованием лазера LS-2134Y (рисунок 2.4). Лазер LS-2134Y – лазер на АИГ:Nd³⁺ с электрооптической модуляцией добротности и преобразованием длины волны излучения 1064 нм в излучение с длиной волны 532 нм, работающий в частотном режиме. Основные характеристики лазера приведены в таблице 2.2.

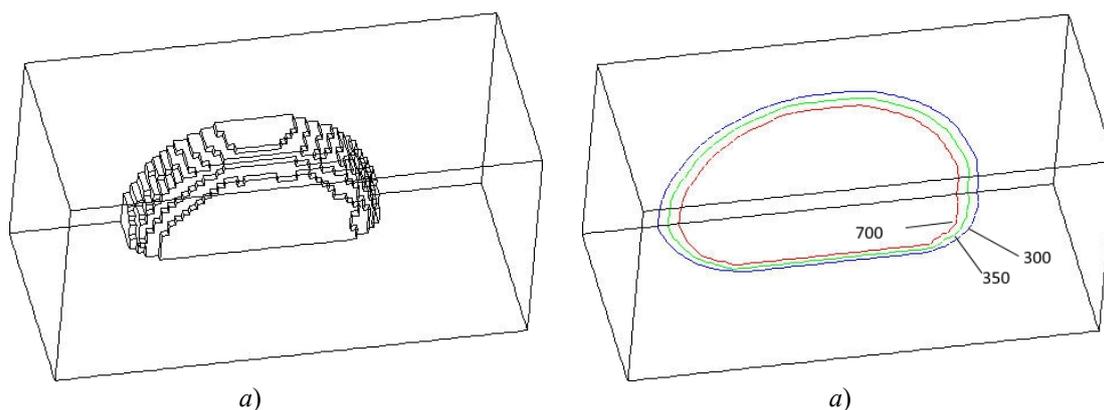
Таблица 2.2 – Основные характеристики лазера LS-2134Y

Наименование параметра, единица измерения	Номинальное значение
Длина волны генерируемого излучения, нм	1064, 532
Энергия импульса излучения, мДж	>250 >150
Частота повторения импульсов f, Гц	<15
Длительность импульса излучения по уровню 0,5, нс	<15
Диаметр пучка лазерного излучения, мм	<5
Энергетическая расходимость лазерного излучения по уровню 0,5, мрад	<3

Экспериментальные исследования проводились при различных режимах обработки: время обработки варьировалось от 10 до 120 с, частота повторения импульсов от 1 до 15 Гц, энергия импульса от 10 до 20 мДж.

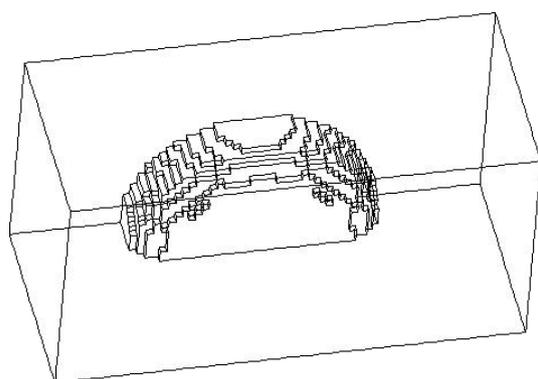
Структуру поверхностей обработанных лазерным излучением образцов СТМ «Алмазот» исследовали на сканирующем электронном микроскопе VEGA II LSH (рисунок 2.5). Основные характеристики прибора приведены в таблице 2.3.

Анализ рисунков показывает, что с увеличением количества импульсов ширина зоны воздействия лазерного излучения практически не меняется, однако более явно проявляется форма лунки, при этом с увеличением энергии импульса ширина зоны воздействия лазерного излучения становится больше. С увеличением энергии импульсов наблюдается увеличение глубины лазерно-индуцированных лунок, при более высоких значениях энергии структура лунки характеризуется наличием сколов.

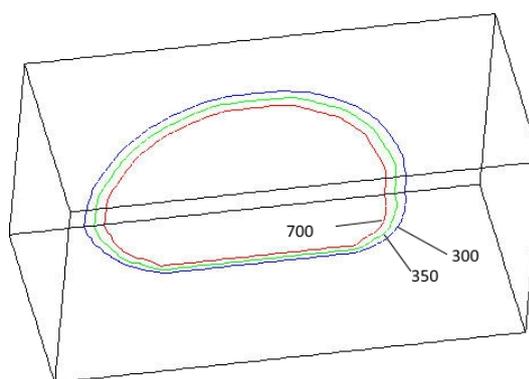


a)

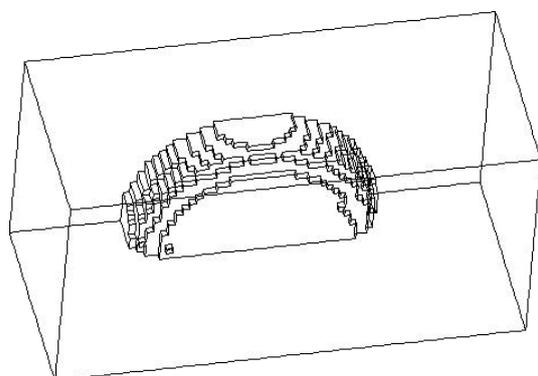
a)



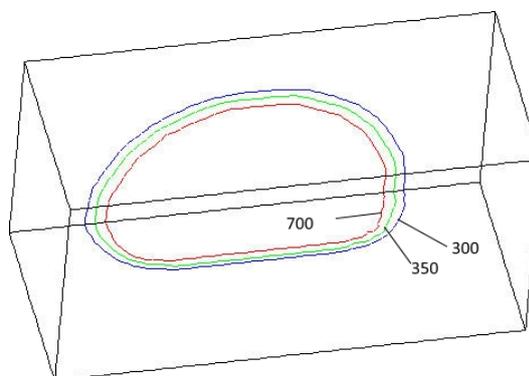
б)



б)



в)



в)

Рисунок 2.2 – Расчетные формы лунок в результате лазерной обработки кристаллов алмазов: а) I вариант; б) II вариант; в) III вариант

Рисунок 2.3 – Расчетные формы температурных полей в результате лазерной обработки кристаллов алмазов: а) I вариант; б) II вариант; в) III вариант



Рисунок 2.4 – Лазер LS-2134Y



Рисунок 2.5 – Сканирующий электронный микроскоп VEGA II LSH

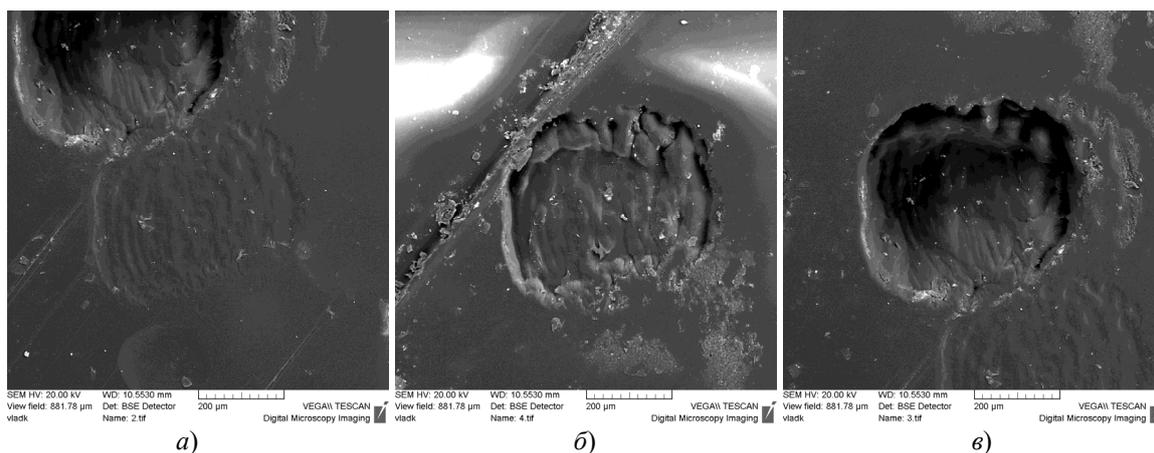


Рисунок 2.6 – Структура поверхности, образованной в СТМ «Алмазот» при воздействии лазерного излучения с длиной волны 532 нм с энергией в импульсе 15 мДж при различном количестве импульсов: а) 2 импульса; б) 3 импульса; в) 5 импульсов

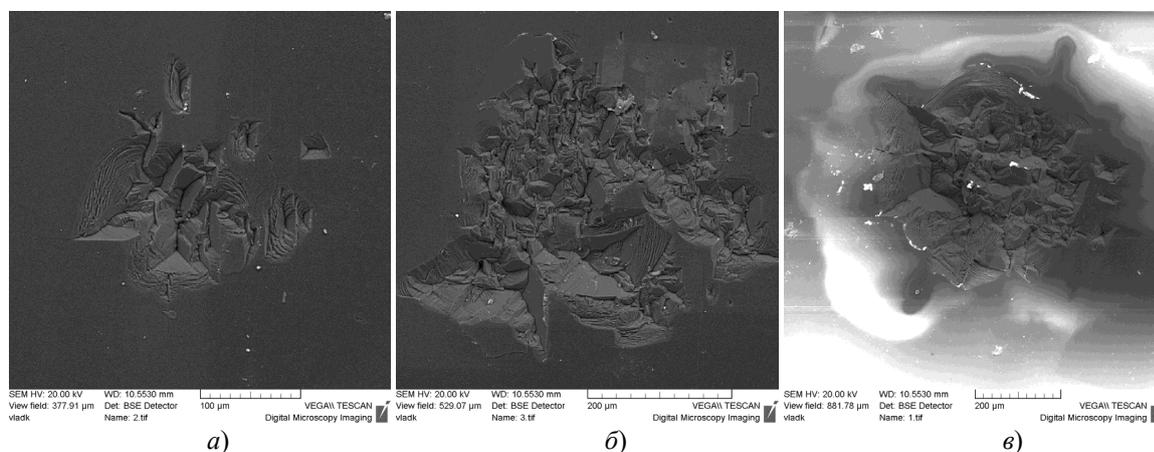


Рисунок 2.7 – Структура поверхности, образованной в СТМ «Алмазот» при воздействии 1 импульса лазерного излучения с длиной волны 532 нм при различной энергии импульса: а) 12,5 мДж; б) 17,5 мДж; в) 20 мДж

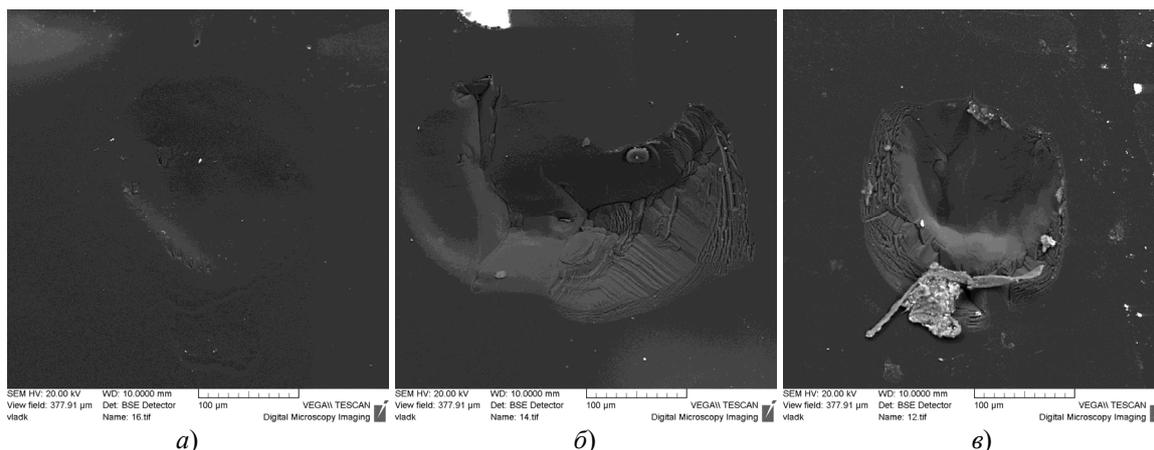


Рисунок 2.8 – Структура поверхности, образованной в СТМ «Алмазот» при воздействии импульса лазерного излучения с длиной волны 532 нм с частотой 1 Гц в течение 1 минуты при различной энергии импульса: а) 10 мДж; б) 15 мДж; в) 20 мДж

На рисунках 2.6–2.8 представлены результаты экспериментальных исследований.

Таблица 2.3 – Характеристика сканирующего электронного микроскопа VEGA II LSH

Наименование параметра, единица измерения	Номинальное значение
Источник электронов	Вольфрамовый катод с термоэлектронной эмиссией
Разрешение в режиме высокого вакуума (SE) в режиме переменного вакуума (BSE)	3,0 нм при 30 кВ 3,5 нм при 30 кВ;
Увеличение	от 4 до 1 000 000
Ускоряющее напряжение	от 200 В до 30 кВ (с шагом 10 В)
Ток пучка электронов	от 1 пА до 2 мкА

Заключение

Выполнено компьютерное моделирование процесса формирования лунок при обработке кристаллов алмазов под действием лазерного излучения с длиной волны 532 нм. Проведены эксперименты по обработке кристаллов СТМ «Алмазот» лазерным излучением с длиной волны 532 нм. Выявлены особенности формирования лунок при различных параметрах лазерной обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митягин, А.Ю. Технология и оборудование для обработки алмазных материалов современной техники / А.Ю. Митягин, А.А. Алтухов, А.Б. Митягина // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2009. – №1. – С. 53–58.
2. Физические основы лазерной обработки алмазов: в 15 кн.: учеб. пособие для ВТУЗов / А.И. Шкадов; под ред. А.М. Бочарова. – Смоленск, 1997. – Кн. 3: Физические основы лазерной обработки алмазов. – 288 с.
3. Dependence of the diamond laser processing efficiency on crystallographic directions / S.V. Shalupaev, E.B. Shershnev, Y.V. Nikitjuk, V.V. Sviridova // SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 329–333.
4. Шершнев, Е.Б. Моделирование лазерной обработки кристаллов алмаза / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.Е. Шершнев // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 164–168.
5. Особенности формирования термоупругих полей при лазерной обработке кристаллов алмаза / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.Е. Шершнев, С.И. Соколов // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 38–40.
6. Особенности применения лазерного излучения с длинами волн 1064 нм, 532 нм и 266 нм для обработки кристаллов алмаза / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.Е. Шершнев, С.И. Соколов // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 22–24.
7. Шабров, Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.

Поступила в редакцию 12.11.18.

УДК 517.9

ВЛОЖЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В АЛГЕБРУ МНЕМОФУНКЦИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

А.Б. Антоневиц, Т.Г. Шагова

Белорусский государственный университет, Минск

THE EMBEDDINGS OF DISTRIBUTIONS INTO THE ALGEBRA OF MNEMOFUNCTIONS ON CIRCLE

A.B. Antonevich, T.R. Shahava

Belarusian State University, Minsk

Проводится анализ различных способов вложений пространства периодических обобщенных функций в алгебру новых обобщенных функций, или мнемофункций. Исследуется вопрос о том, какими дополнительными свойствами могут обладать такие вложения. Рассмотрены такие свойства как инвариантность относительно вращений, согласованность с умножением гладких функций, локальность умножения.

Ключевые слова: пространство периодических обобщенных функций, алгебра типа Коломбо, вложение в алгебру мнемофункций.

The different ways of embedding of periodic generalized functions space into the algebra of new generalized functions, or mneмоfunctions, have been analyzed. The question on additional properties of embeddings has been investigated. Such properties as rotation invariance, consistency with the multiplication of smooth functions and the locality of multiplication have been considered.

Keywords: space of periodic generalized functions, Colombeau type algebra, embedding into the mneмоfunctions algebra.

Введение

В связи с проблемой умножения обобщенных функций (распределений) был разработан общий подход, который заключается во введении новых объектов, сохраняющих ряд свойств распределений и образующих дифференциальные алгебры. Такие объекты называют новыми обобщенными функциями или мнемофункциями, а соответствующие алгебры G называют алгебрами типа Коломбо. При таком подходе задача умножения распределений имеет следующее решение. Строится вложение R пространства распределений в алгебру мнемофункций G , и тогда произведением распределений f и g называется мнемофункция $R(f)R(g)$.

В работе [1], содержащей краткий обзор этого направления, был сформулирован ряд задач о свойствах алгебр мнемофункций и соответствующих вложений, а также была построена алгебра $G(\mathbb{S}^1)$ мнемофункций на окружности. В данной работе, которая является продолжением [1], на примере алгебры $G(\mathbb{S}^1)$ исследован один из поставленных в [1] вопросов: какими дополнительными свойствами может обладать вложение пространства распределений в алгебру мнемофункций?

1 Предварительные сведения

Напомним основные определения и факты из [1], отсылая за деталями к этой работе.

© Антоневиц А.Б., Шагова Т.Г., 2018

52

Окружность может быть реализована как подмножество комплексной плоскости $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}$ и как фактор-пространство $\mathbb{T} = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$. Соответственно, для пространств функций или распределений на окружности возникают две реализации: их можно рассматривать как периодические функции переменной t на прямой \mathbb{R} с периодом 2π и как функции комплексной переменной z , определенные на \mathbb{S}^1 . Такие пространства изоморфны, изоморфизм устанавливается с помощью замены $z = e^{it}$.

Пространство обобщенных функций (распределений) $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяется как сопряженное к пространству $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, т. е. состоит из непрерывных линейных функционалов на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Топология в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ задается счетной системой норм

$$p_m(\varphi) = \sum_{j=0}^m \max_z |\varphi^{(j)}(z)|, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \quad (1.1)$$

Каждая функция φ из $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k z^k,$$

сходящийся в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, где коэффициенты Фурье есть

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(z) z^{-k} |dz| = \langle \varphi, z^{-k} \rangle,$$

причем последовательность φ_k убывает быстрее любой степени $\frac{1}{|k|}$. Соответственно, топологию на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, которую задает система норм (1.1), можно задать с помощью системы норм

$$p_m(\varphi) = \sum_k (1+|k|)^m |\varphi_k|. \quad (1.2)$$

Каждая обобщенная функция f разлагается в ряд Фурье

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k z^k, \quad C_k = \langle f, z^{-k} \rangle, \quad (1.3)$$

причем последовательность коэффициентов Фурье C_k возрастает не быстрее некоторой степени $|k|$.

Алгебра мнемифункций на окружности $G(\mathbb{S}^1)$ строится следующим образом.

Сначала рассматривается множество $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, состоящее из всех семейств $\{f_\varepsilon\}$, бесконечно дифференцируемых функций на \mathbb{S}^1 , зависящих от малого положительного параметра ε , таких, что для каждого $\{f_\varepsilon\}$ существуют числа μ и ν , при которых имеет место оценка

$$p_m(f_\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{\mu+\nu}}. \quad (1.4)$$

Далее рассматривается подмножество в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, состоящее из семейств, быстро стремящихся к нулю:

$$J(\mathbb{S}^1) = \{g_\varepsilon : \forall p \text{ и } m \exists C : p_m(g_\varepsilon) \leq C\varepsilon^p\}.$$

Поскольку $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ является дифференциальной алгеброй, а $J(\mathbb{S}^1)$ есть идеал в ней, то определена фактор-алгебра

$$G(\mathbb{S}^1) = \widetilde{G(\mathbb{S}^1)} / J(\mathbb{S}^1),$$

которая называется *алгеброй мнемифункций на окружности*.

Связь мнемифункций с распределениями устанавливается следующим образом. Говорят, что мнемифункция – класс эквивалентности $[f_\varepsilon]$, содержащий f_ε , – *ассоциирована с распределением f* , если семейство f_ε сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ к f . В общем случае информацию о мнемифункции дает анализ асимптотического поведения величин $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle$, в частности, наиболее наглядным является их асимптотическое разложение в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, например, вида

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \sum_{k=k_0}^{\infty} \langle u_k, \varphi \rangle \varepsilon^k, \quad u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1), \quad (1.5)$$

где равенство (1.5) означает асимптотическую сходимость – разность

$$\sum_{k=k_0}^N \langle u_k, \varphi \rangle \varepsilon^k - \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle$$

убывает быстрее, чем ε^N . При этом асимптотическое разложение может начинаться с отрицательной степени ε , т. е. главным членом разложения

может оказаться некоторое распределение с бесконечно большим коэффициентом. У бесконечно малых мнемифункций оно начинается с положительной степени ε , а асимптотическое разложение семейства f_ε , ассоциированного с распределением u , имеет вид

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle + \langle u_1, \varphi \rangle \varepsilon + \langle u_2, \varphi \rangle \varepsilon^2 + \dots \quad (1.6)$$

Способом аппроксимации R называется такой линейный оператор $R : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \rightarrow G(\mathbb{S}^1)$, при котором для каждого распределения f его образ $R(f) = \{f_\varepsilon\}$ ассоциирован с f .

Каждый способ аппроксимации задает *вложение*

$$R : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \rightarrow G(\mathbb{S}^1).$$

При заданном вложении R *произведением произвольных распределений* называется мнемифункция

$$u \otimes_R v := R(u)R(v) \in G(\mathbb{S}^1). \quad (1.7)$$

Может оказаться, что произведение $f_\varepsilon \times g_\varepsilon$ ассоциировано с некоторым распределением h , тогда естественно считать это распределение h произведением fg , порожденным заданным способом аппроксимации R . В общем случае информацию о поведении произведения $f_\varepsilon \times g_\varepsilon$ дает его асимптотическое разложение.

2 Свойства вложений

Целью данной работы является анализ различных способов вложения $R : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \rightarrow G(\mathbb{S}^1)$ и выяснение того, какими дополнительными свойствами могут обладать такие вложения.

2.1 Инвариантность относительно вращений. В случае окружности одним из естественных требований на вложение является его инвариантность относительно вращений. В случае распределений на прямой рассматривается инвариантность относительно сдвигов.

Пусть $|\xi|=1$. Поворот окружности, заданный формулой $\alpha(z) = \xi z$, порождает оператор поворота, действующий в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ по формуле

$$(T_\xi \varphi)(z) = \varphi(\xi z).$$

Соответственно, оператор поворота действует в алгебре мнемифункций и в пространстве распределений.

Свойство инвариантности вложения R заключается в перестановочности с поворотом: если $R(f) = f_\varepsilon$, то

$$R(T_\xi f) = T_\xi f_\varepsilon.$$

Из этого следует специальный вид такого оператора. Запишем разложения образов функций z^k при действии R :

$$R(z^k) = \sum_j A_{jk} z^j.$$

При повороте окружности образ z^k есть $T_\xi z^k = \xi^k z^k$. Если R – произвольный оператор,

перестановочный с поворотами, то выполняется равенство $R(\xi^k z^k) = \xi^k R z^k$. При разложении в ряд Фурье получаем

$$\sum_j A_{jk} \xi^k z^j = \sum_j A_{jk} \xi^j z^j,$$

откуда $A_{jk}[\xi^j - \xi^k] = 0$ и, следовательно, $A_{jk} = 0$ при $k \neq j$. Если обозначить $A_{kk} = A_k$, получаем, что оператор действует по формуле

$$Rf = \sum_j A_k C_k z^k,$$

т. е. оператор R есть свертка с распределением, для которого A_k являются коэффициентами разложения в ряд Фурье. В частности, $R(z^k) = A_k(\varepsilon)z^k$, т. е. перестановочность с поворотами эквивалентна тому, что функции z^k являются собственными функциями оператора R .

Применяя сказанное, при любом фиксированном ε получаем, что каждый способ аппроксимации, инвариантный относительно вращений, имеет вид

$$R(f) = f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon, \quad (2.1)$$

где $*$ – операция свертка в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, а ψ_ε есть некоторое семейство распределений.

Операция свертки использует групповую структуру окружности, при этом точка 1 выделяется, так как она является нейтральным элементом группы, и свертка с δ_1 есть единичный оператор. Поэтому $\delta_1 * \psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon$, откуда получаем, что ψ_ε есть семейство гладких функций, сходящееся к δ_1 . Таким образом, при выполнении условия инвариантности способ аппроксимации однозначно определяется по аппроксимациям δ_1 .

Если использовать разложение Фурье

$$\psi_\varepsilon(z) = \sum_k A_k(\varepsilon)z^k,$$

то

$$R(f) = f_\varepsilon(z) = \sum_k A_k(\varepsilon)C_k z^k, \quad (2.2)$$

где при фиксированном ε коэффициенты $A_k(\varepsilon)$ убывают быстрее любой степени $\frac{1}{|k|}$, а при фиксированном k из сходимости ψ_ε к δ_1 следует, что $A_k(\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В приложениях существенна также перестановочность вложения с дифференцированием:

$$R(f') = R(f)'. \quad (2.3)$$

Лемма 2.1. *Вложение R перестановочно с дифференцированием тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно поворотов.*

Доказательство. Операция свертки перестановочна с дифференцированием, поэтому из (2.1) следует (2.3).

Пусть выполнено (2.3). Рассмотрим разложение образа

$$R(z^k) = \sum_j B_j(\varepsilon)z^j.$$

Из (2.3) получаем, что

$$ik \sum_j B_j(\varepsilon)z^j = \sum_j B_j(\varepsilon)ijz^j,$$

откуда следует, что

$$B_j(\varepsilon) = 0 \text{ при } j \neq k,$$

т. е. $R(z^k) = B_k(\varepsilon)z^k$, что и требовалось. \square

Наиболее простым и естественным является способ аппроксимации, задаваемый с помощью рядов Фурье. Так как каждое распределение f разлагается в ряд (1.3), формула

$$R_F(f) = f_n = \sum_{-n}^n C_k z^k \quad (2.4)$$

задает вложение $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ (в этом примере через $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ обозначается алгебра мнемифункций, порожденная последовательностями гладких функций).

С точки зрения теории рядов Фурье, формулы вида (2.2) задают методы суммирования таких рядов. Задача суммирования рядов связана, например, с тем, что для непрерывной функции f последовательность частичных сумм (2.4) может не сходить равномерно. Но существует много методов суммирования вида (2.2), которые улучшают сходимость – при которых $f_\varepsilon(z)$ равномерно сходятся к f . Аналогично, способы аппроксимации, заданные формулами вида (2.2), могут обладать свойствами, которых нет у вложения (2.4).

Ниже анализируются некоторые свойства вложений, инвариантных относительно поворотов.

2.2 Локальность умножения. Для распределений не определено значение в заданной точке, но можно говорить о значении на открытом множестве. Говорят, что распределения f и g равны на открытом подмножестве U , если $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ для всех φ , у которых носитель принадлежит U . Это соответствует тому, что значение f на открытом подмножестве U определяется как сужение функционала f на подпространство, состоящее из таких φ .

Носителем распределения f называется наименьшее замкнутое множество $\text{supp } f$, на дополнении к которому $f = 0$.

Свойство локальности умножения распределения f на гладкую функцию g заключается в том, что произведение gf на каждом открытом множестве U зависит только от значений g и f на нем. В частности, если $g = 0$ на U или $f = 0$ на U , то произведение gf также есть нуль на U .

Будем говорить, что для вложения R выполняется *свойство локальности умножения*, если из условия $\text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset$ следует, что $R(f)R(g) = 0$.

На первый взгляд может показаться, что это свойство всегда выполнено. Это «подтверждается» следующим рассуждением. Если $\text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset$, то существует гладкая функция γ такая, что $\gamma(z) = 1$ на $\text{supp } f$ и $\gamma(z) = 0$ на $\text{supp } g$. Тогда $f = \gamma f$, $g = (1 - \gamma)f$, откуда $R(f)R(g) = R[\gamma(1 - \gamma)]R(f)R(g) = 0$.

Однако эти вычисления предполагают, что выполнено равенство

$$R(\gamma f) = R(\gamma)R(f) \quad (2.5)$$

для любых $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$.

Но, согласно известному примеру Л. Шварца, пространство распределений не может быть вложено в ассоциативную коммутативную алгебру таким образом, чтобы сохранялось произведение гладкой функции на распределение. Это означает, что при любом вложении R пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в (произвольную) алгебру равенство (2.5) не может быть выполнено для всех $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ и $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$. Таким образом, приведенное рассуждение некорректно и, в общем случае, если $\text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset$, то произведение $R(g)R(f)$ может быть отличным от нуля в $G(\mathbb{S}^1)$.

2.3 Согласованность вложения с умножением в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. В работах Ж.Ф. Коломбо [2], [3], которые имели наибольший резонанс в этой тематике, рассматривалась задача о построении вложения, удовлетворяющего условию согласованности с умножением в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Это условие является ослаблением условия (2.5), которое не может быть выполнено. В рассматриваемом случае задача Коломбо формулируется следующим образом.

Существует естественное вложение R_0 алгебры $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ в $G(\mathbb{S}^1)$, при котором функции $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ ставится в соответствие стационарное семейство $f_\varepsilon = f$, т. е. не зависящее от ε .

Задача Коломбо. Требуется построить дифференциальную алгебру G и вложение R пространства распределений в G , которое для бесконечно дифференцируемых функций совпадает с естественным вложением R_0 в G .

Применительно к рассматриваемому пространству распределений на окружности, в задаче Коломбо требуется построить вложение, при котором

$$R(f) = R_0(f) \text{ при } f \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \quad (2.6)$$

Это условие означает, что для гладких функций f рассматриваемые аппроксимации должны быстро сходиться к f .

При выполнении (2.6) $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ вкладывается не только как подпространство, но и как алгебра, т. е.

$$R(fg) = R(f)R(g) \text{ для всех } f, g \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \quad (2.7)$$

Основной результат Ж.Ф. Коломбо заключается в построении искомой алгебры для пространств распределений на R^m . При этом алгебра, построенная Коломбо, устроена существенно сложнее описанной выше.

Ниже показано, что особенностью случая распределений на окружности, описанного в данной работе, является то, что вложения, для которых выполнено (2.6) и (2.7), существуют для рассмотренной более простой алгебры мнеморфункций.

3 Вложения $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $G(\mathbb{S}^1)$

Рассмотрим конкретные классы вложений вида (2.1) с точки зрения выполнения указанных выше свойств.

3.1 Вложения, удовлетворяющие условию локальности умножения

Произведение $R(\delta_\varepsilon) \times R(\delta_1) = \psi_\varepsilon(z) \times \psi_\varepsilon(\xi z)$ двух δ -функций, сосредоточенных в разных точках, в общем случае отлично от нуля. Но, если носители функций $\psi_\varepsilon(z)$ стягиваются к точке 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$, то при достаточно малых ε последнее произведение есть нуль и выполнено свойство локальности умножения. Оно выполняется также, если значения $\psi_\varepsilon(z)$ при $z \neq 1$ быстро стремятся к нулю, тогда произведение $\psi_\varepsilon(z) \times \psi_\varepsilon(\xi z)$ принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$.

Лемма 3.1. Если носители функций $\psi_\varepsilon(z)$ стягиваются к точке 1, то свойство локальности умножения выполнено для произвольных распределений.

Доказательство. Пусть $\text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset$.

Условие, что носители функций $\psi_\varepsilon(z)$ стягиваются к точке 1 означает, что $\psi_\varepsilon(z) = 0$ при $|z - 1| > \gamma(\varepsilon)$, где $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку $f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon$, $f_\varepsilon(z) = 0$ вне $\gamma(\varepsilon)$ -окрестности замкнутого множества $\text{supp } f$. Аналогично, $g_\varepsilon(z) = 0$ вне $\gamma(\varepsilon)$ -окрестности замкнутого множества $\text{supp } g$. При достаточно малом ε такие окрестности не пересекаются, т. е. объединение их дополнений есть \mathbb{S}^1 . Поэтому при достаточно малом ε имеем $f_\varepsilon(z) \times g_\varepsilon(z) \equiv 0$, что и требовалось. \square

Способы аппроксимации, которые обычно рассматриваются в пространствах распределений на прямой, строятся следующим образом. Пусть $\psi \in D(\mathbb{R})$ и $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1$. Тогда семейство

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad (3.1)$$

сходится к δ_0 и их носители стягиваются к точке 0. Соответствующий способ аппроксимации задается выражением (2.1), где $*$ есть операция свертки в пространстве $D'(\mathbb{R})$. При таком

способе аппроксимации выполнено свойство локальности умножения. Здесь (3.1) есть δ -образное семейство с заданным профилем ψ – оно порождено одной фиксированной функцией. Такие аппроксимации удобны для исследования благодаря тому, что свойства семейства f_ε описываются через свойства ψ , в частности, с использованием моментов этой функции.

В случае периодических распределений (распределений на окружности) нет полной аналогии этой конструкции, так как, например, если функция $\psi(t)$ периодическая, то семейство вида (3.1) не сходится к δ -функции. Чтобы задать описанную выше аппроксимацию с помощью свертки на окружности, нужно модифицировать конструкцию.

Пусть $\psi_0 \in D(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \psi_0(t) dt = 1$, и носитель расположен внутри интервала $(-\pi, \pi)$. При каждом ε зададим функцию $\frac{1}{\varepsilon} \psi_0(\frac{t}{\varepsilon})$ при $-\pi \leq t \leq \pi$ и продолжим на \mathbb{R} с периодом 2π , т. е. рассмотрим функцию

$$\psi_\varepsilon(t) = \sum_j \frac{1}{\varepsilon} \psi_0\left(\frac{t + 2j\pi}{\varepsilon}\right). \quad (3.2)$$

Тогда формула

$$R(f) = f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon, \quad (3.3)$$

где $*$ – уже операция свертки в пространстве $D'(\mathbb{S}^1)$, задает тот же способ аппроксимации, обладающий свойством локальности умножения.

Но детальный анализ этого способа аппроксимации на окружности усложняется по сравнению со случаем на прямой. Это связано с тем, что нет непосредственной связи между коэффициентами Фурье функций ψ_ε при разных ε , так как

$$\psi_\varepsilon(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_0(2\pi k\varepsilon) e^{ikt},$$

где $\hat{\psi}_0$ есть преобразование Фурье функции ψ_0 на \mathbb{R} .

Отметим, что требование локальности умножения не совсем оправдано с физической точки зрения. Например, δ -функция моделирует ситуацию, когда вещество распределено так, что основная часть массы сосредоточена в малой окрестности заданной точки. При умножении двух плотностей, соответствующих дельта-функциям, сосредоточенным в разных точках, возникает произведение большой плотности на малую, а такое произведение может дать конечный эффект, т. е. ненулевую плотность. Поэтому не всегда произведение двух дельта-функций следует считать нулем.

3.2 Согласованность с умножением гладких функций

В связи с рассматриваемым вопросом прежде всего отметим следующий факт.

Теорема 3.1. Если вложение периодических распределений построено с помощью свертки с функциями вида (3.2), где ψ_0 финитная функция, то выполнено условие локальности умножения, а условия (2.6) и (2.7) согласованности с умножением гладких функций не выполняются.

Это утверждение следует из двух лемм.

Лемма 3.2. Пусть $\psi \in D(\mathbb{R})$, гладкая быстро убывающая функция на \mathbb{R} , в частности, финитная, $M_0(\psi) = \int \psi(t) dt = 1$, и f – бесконечно дифференцируемая периодическая функция. Семейство гладких функций $f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon$, где $\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \psi(\frac{t}{\varepsilon})$, имеет асимптотическое разложение

$$f_\varepsilon(t) \sim f(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} f(t)^{(j)} M_j(\psi) \varepsilon^j, \quad (3.4)$$

где

$$M_j(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j \psi(t) dt, \quad j \in \mathbb{N},$$

– моменты функции ψ .

Доказательство. Согласно формуле Тейлора

$$f(s) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f(t)^{(j)} (s-t)^j + r_n(s-t),$$

где остаточный член оценивается через производную $f(t)^{(n+1)}$. Так как эта производная ограничена, имеем оценку $|r_n(s-t)| \leq C |s-t|^{n+1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) ds = \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f(t)^{(j)} \int_{-\infty}^{+\infty} (s-t)^j \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) ds + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} r_n(s-t) \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) ds = \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f(t)^{(j)} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\varepsilon\tau)^j \psi(\tau) d\tau + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} r_n(-\varepsilon\tau) \psi(\tau) d\tau = \\ &= f(t) + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j!} f(t)^{(j)} M_j(\psi) \varepsilon^j + o(\varepsilon^n), \quad (3.5) \end{aligned}$$

что и требовалось. \square

Лемма 3.3. Если $\psi \in D(\mathbb{R})$ и $\psi \neq 0$, то бесконечное множество моментов $M_j(\psi)$ отлично от нуля.

Доказательство. Предположим, что $M_j(\psi) = 0$ для всех j , за исключением конечного числа. В силу компактности носителя ψ , преобразование Фурье $\hat{\psi}$ является аналитической функцией, причем она стремится к нулю на бесконечности в силу гладкости ψ . При преобразовании Фурье моменты переходят (с точностью до множителя) в значения соответствующих производных. Поэтому

$\hat{\psi}^{(j)}(0) = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, за исключением конечного числа. Тогда из аналитичности $\hat{\psi}$ следует, что эта функция является ненулевым многочленом и, следовательно, не стремится к нулю на бесконечности, что приводит к противоречию. \square

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $M_p(\psi)$ есть ненулевой момент с наименьшим номером. Тогда, согласно (3.5), разность $f(t) - f_\varepsilon(t)$ ведет себя как ε^p и, следовательно, не принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$, т. е. равенство (2.6) не выполнено.

Аналогично, для двух гладких функций имеем, согласно (3.5),

$$\begin{aligned} & f_\varepsilon(t) \times g_\varepsilon(t) - (fg)_\varepsilon(t) = \\ &= \frac{(-1)^p \varepsilon^p}{p!} [f(t)g(t)^{(p)} + f(t)^{(p)}g(t) - \\ & - (f(t)g(t))^{(p)}] M_p(\psi) + o(\varepsilon^p). \end{aligned}$$

Здесь при $p > 1$ выражение в квадратной скобке отлично от нуля, из чего следует, что рассматриваемая разность не принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$. При $p = 1$ получаем, что разность $f(t) - f_\varepsilon(t)$ ведет себя как ε^{p_2} , где $M_{p_2}(\psi)$ есть второй из отличных от нуля моментов. \square

Таким образом, если использовать методы аппроксимации, порожденные финитными функциями, для выполнения условия (2.6) требуется строить алгебры, отличные от $G(\mathbb{S}^1)$, которые были впервые построены Коломбо. Покажем, что существуют алгебры, устроенные более просто, чем алгебра Коломбо, для которых существуют требуемые вложения.

Рассмотрим семейства бесконечно дифференцируемых функций $\{f_{q,\varepsilon}\}$, зависящих от двух параметров ε и q , где $q \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}$ множество, состоящее из всех таких семейств, для каждого из которых существуют μ и ν , при которых имеет место оценка

$$p_m(f_{q,\varepsilon}) \leq \frac{C}{\varepsilon^{\mu m + \nu}}. \quad (3.6)$$

Аналогично предыдущему, это множество является дифференциальной алгеброй.

Пусть

$$J_C(\mathbb{S}^1) = \{g_{q,\varepsilon} : \exists \mu_1 \text{ и } \nu_1, \text{ что } p_m(g_{q,\varepsilon}) \leq C \varepsilon^{q - \mu_1 m - \nu_1}\}.$$

Лемма 3.4. Множество $J_C(\mathbb{S}^1)$ является дифференциальным идеалом в алгебре $\widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}$.

Доказательство. Пусть $f_{q,\varepsilon} \in \widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}$ и $g_{q,\varepsilon} \in J_C(\mathbb{S}^1)$. Тогда

$$p_m(f_{q,\varepsilon} \times g_{q,\varepsilon}) \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{\mu m + \nu}} C_2 \varepsilon^{q - \mu_1 m - \nu_1} = C \varepsilon^{q - (\mu + \mu_1)m - (\nu + \nu_1)},$$

т. е. это произведение принадлежит $J_C(\mathbb{S}^1)$. \square

В силу леммы 3.4 фактор-пространство

$$G_C(\mathbb{S}^1) = \widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)} / J_C(\mathbb{S}^1)$$

является дифференциальной алгеброй, которую будем называть *модифицированной алгеброй Коломбо*.

Для построения вложения в эту алгебру выберем последовательность финитных функций ψ_q , таких, что их носители лежат в окрестности точки 0 и $M_j(\psi_q) = 0$ при $1 \leq j < q$.

Теорема 3.2. *Отображение $R_C : f \rightarrow f_{q,\varepsilon} = f * \psi_{q,\varepsilon}$ задает вложение $D'(\mathbb{S}^1)$ в $G_C(\mathbb{S}^1)$, для которого выполнено условие (2.6) согласования с умножением гладких функций и свойство локальности умножения.*

Доказательство. В силу условий на ψ_q получаем, что

$$p_m(f * \psi_{q,\varepsilon}) \leq C \varepsilon^{m+\nu}.$$

Если $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, то, согласно (3.5), разность $f(t) - f_{q,\varepsilon}(t)$ убывает как ε^q . Поскольку свертка перестановочна с дифференцированием, аналогично ведет себя разность производных этих функций. Отсюда получаем, что

$$p_m(f - f * \psi_{q,\varepsilon}) \leq C \varepsilon^q$$

и разность $f - f_{q,\varepsilon}$ принадлежит идеалу $J_C(\mathbb{S}^1)$. \square

Как было отмечено выше, условие (2.6) означает, что аппроксимации гладкой функции быстро сходятся к ней. Это выполнено для вложения (2.4), построенного с помощью последовательности частичных сумм ряда Фурье. Это отображение R_F инвариантно относительно поворотов и представляется в виде свертки:

$$f_n = f * \psi_n, \text{ где } \psi_n(z) = \sum_{-n}^n z^k = \begin{cases} \frac{z^{n+1} - z^{-n}}{z-1}, & z \neq 1, \\ 2n+1, & z = 1. \end{cases}$$

Теорема 3.3. *Отображение R_F является вложением $D'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемифункций, для которого выполнено условие согласования с умножением, т. е. равенства (2.6) и (2.7), а свойство локальности умножения не выполняется.*

Доказательство. То, что последовательность f_n принадлежит $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, следует из степенной оценки коэффициентов C_k . Действительно, для коэффициентов Фурье распределения f справедлива оценка $|C_k| \leq C(1+|k|)^p$. Поэтому

$$\begin{aligned} p_m(f_n) &\leq \sum_{|k| \leq n} C(1+|k|)^{p+m} \leq \\ &\leq C(2n+1)(1+n)^{p+m} \sim n^{p+m+1}. \end{aligned}$$

Выполнение (2.6) следует из известного факта, что ряд Фурье функции $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ быстро сходится, т. е.

$$f - f_n \in J(\mathbb{S}^1).$$

Заметим, что при этом способе для гладких функций $f_n(z)g_n(z) \neq (fg)_n$, а равенство (2.7) выполняется только в фактор-алгебре, т. е. $f_n(z)g_n(z) - (fg)_n \in J(\mathbb{S}^1)$.

Распределению δ_ξ соответствует аппроксимирующая последовательность

$$\psi_n(\xi z) = \sum_{-n}^n \xi^k z^k = \frac{(\xi z)^{n+1} - (\xi z)^{-n}}{\xi z - 1}.$$

Поэтому произведению $\delta_\xi \delta_1$ соответствует последовательность

$$\psi_n(\xi z)\psi_n(z) = \frac{(\xi z)^{n+1} - (\xi z)^{-n}}{\xi z - 1} \times \frac{z^{n+1} - z^{-n}}{z - 1},$$

которая не стремится к нулю и, следовательно, не принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$. \square

3.3 Совместная локальность и согласованность с умножением гладких функций

Согласно результатам предыдущего раздела, если рассматривать вложения, порожденные финитными функциями, то выполнено свойство локальности умножения, но для существования вложения, при котором также имеет место согласование с умножением (условие (2.6)), требуется алгебра, устроенная более сложно, чем $G(\mathbb{S}^1)$. А вложение, порожденное частичными суммами ряда Фурье, согласовано с умножением, но не обладает свойством локальности. Покажем, что существуют вложения в $G(\mathbb{S}^1)$, обладающие одновременно двумя указанными свойствами. Такие вложения удастся построить, если отказаться от требования финитности функции ψ_0 .

Рассмотрим пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, т. е. множество функций, бесконечно дифференцируемых и убывающих на бесконечности быстрее любой степени $\frac{1}{t}$. Для функций из этого пространства ситуация отлична от описанной в лемме 3.2.

Лемма 3.5. *В пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1)$ существуют функции ψ , такие, что*

$$M_0(\psi) = 1, M_j(\psi) = 0 \text{ для } j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Преобразование Фурье биективно отображает пространство $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1)$ в себя. В этом пространстве существуют такие функции, что $\varphi(\xi) = 1$ в некоторой окрестности $(-\gamma, \gamma)$ точки 0. Тогда для функции ψ , которая является обратным преобразованием Фурье такой φ , выполнены свойства из утверждения леммы. Действительно, как уже отмечалось, при преобразовании Фурье моменты функции ψ переходят в производные в нуле функции φ , которые есть нуль. \square

Ниже для упрощения выражений считаем, что $\gamma = 1$. Отметим, что, в отличие от функций из $\mathcal{D}(\mathbb{S}^1)$, преобразование Фурье функции из

$\mathcal{S}(\mathbb{S}^1)$ может быть бесконечно дифференцируемой, но не аналитической функцией. Именно такой является выбранная выше функция φ .

Выберем функцию ψ_0 со свойствами, описанными в лемме 3.5, построим семейство функций

$$\psi_\varepsilon(t) = \sum_j \frac{1}{\varepsilon} \psi_0\left(\frac{t + 2j\pi}{\varepsilon}\right) \quad (3.7)$$

и зададим способ аппроксимации формулой (2.1), где свертка понимается в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$. В терминах коэффициентов Фурье это отображение действует по правилу

$$R_\psi : f = \sum_k C_k z^k \rightarrow f_\varepsilon = \sum_k \varphi(2\pi k\varepsilon) C_k z^k, \quad (3.8)$$

где φ есть преобразование Фурье функции ψ_0 .

Теорема 3.4. *При указанном выборе функции ψ_0 для вложения (3.8) выполнено условие согласования (2.6) и свойство локальности умножения.*

Доказательство. В рассматриваемом случае, согласно лемме 3.2, асимптотическое разложение имеет вид $f_\varepsilon \sim f$. Это означает, что разность $f - f_\varepsilon$ убывает быстрее любой степени ε . Так как это верно для всех производных функции, получаем, что $f - f_\varepsilon$ принадлежит идеалу.

Для проверки локальности умножения рассмотрим свойства функции ψ_ε из (3.7) на периоде – отрезке $[-\pi, \pi]$. Пусть $(-\gamma, \gamma)$ окрестность точки 0. Так как для любого p выполнено неравенство

$$|\psi_0(t)| \leq \frac{C}{(1+|t|)^p},$$

для слагаемого из (3.7) имеем оценку

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \psi_0\left(\frac{t + 2j\pi}{\varepsilon}\right) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{C}{(1 + \frac{|t+2j\pi|}{\varepsilon})^p} \leq \frac{C}{|t + 2j\pi|^p} \varepsilon^{p-1}.$$

Поэтому

$$\sum_{j \neq 0} \frac{1}{\varepsilon} \psi_0\left(\frac{t + 2j\pi}{\varepsilon}\right) \leq C \sum_{j \neq 0} \frac{1}{|t + 2j\pi|^p} \varepsilon^{p-1} = C_1 \varepsilon^{p-1}.$$

При $j = 0$ для соответствующего слагаемого получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \psi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right| \leq \begin{cases} \frac{C_2}{\varepsilon}, & |t| \leq \gamma, \\ \frac{C}{\gamma} \varepsilon^{p-1}, & |t| \geq \gamma. \end{cases}$$

Таким образом, вне любой окрестности нуля функции ψ_ε убывают быстрее любой степени ε . Поэтому при любом $t_0 \neq 0$ произведение $\psi_\varepsilon(t) \times \psi_\varepsilon(t - t_0)$ убывает быстрее любой степени ε и, следовательно, принадлежит идеалу. \square

3.4 Аналитическое представление распределения

Рассмотрим еще один способ аппроксимации, часто используемый в анализе, основанный на известном аналитическом представлении распределений [4]. В случае окружности оно за-

дается следующим образом. Рассмотрим разложение произвольного распределения f в ряд Фурье и запишем два оператора

$$(P^+ f)(z) := f^+(z) = \sum_0^{\infty} C_k z^k, \quad (3.9)$$

$$(P^- f)(z) := f^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} C_k z^k. \quad (3.10)$$

Из оценки коэффициентов C_k следует, что для любого $f \in D'(\mathbb{S}_1)$ ряд (3.9) сходится в круге $|z| < 1$, его сумма $f^+(z)$ является аналитической функцией, а ряд (3.10) сходится при $|z| > 1$, и его сумма $f^-(z)$ является функцией, аналитической при $|z| > 1$ и стремящейся к нулю на бесконечности.

Таким образом, аналитическое представление порождает вложение $f \rightarrow (P^+ f, P^- f) = (f^+, f^-)$ пространства распределений в пространство кусочно аналитических функций, т. е. пар (f^+, f^-) , где функция $f^+(z)$ аналитическая при $|z| < 1$, а $f^-(z)$ – при $|z| > 1$. При этом аналитические функции $f^{\pm}(z)$ таковы, что при их разложении в степенной ряд коэффициенты растут не быстрее некоторой степени k .

Покажем, что такие функции могут быть охарактеризованы в терминах скорости роста при $|z| \rightarrow 1$, а именно, что это функции степенного роста, т. е. допускающие оценку

$$|f(z)| \leq \frac{M}{(1-|z|)^m} + M_0. \quad (3.11)$$

Рассматриваемый вопрос есть частный случай общей задачи об установлении связей между поведением аналитической функции и поведением коэффициентов соответствующего степенного ряда. Наиболее известный результат в этом направлении заключается в установлении связи между порядком и типом целой функции и поведением коэффициентов при ее разложении [5]. Для функций, аналитических в круге, аналогичный результат получен в [6]. Для функций, аналитических в круге и имеющих степенной рост, описание считается известным, но не включено в стандартную литературу по теории аналитических функций. Поэтому приведем здесь соответствующие утверждения с доказательствами.

Теорема 3.5. Пусть $f(z) = \sum_0^{\infty} a_k z^k$, причем ряд сходится при $|z| < 1$. Последовательность коэффициентов допускает степенную оценку тогда и только тогда, когда при $|z| \rightarrow 1$ функция f имеет степенной рост.

Доказательство. Пусть выполнена оценка (3.11). Тогда, согласно неравенству Коши,

$$|C_k| \leq \frac{M}{(1-|z|)^m |z|^k}.$$

В частности, положив $z = 1 - \frac{1}{k}$, получаем

$$|C_k| \leq \frac{Mk^m}{(1-\frac{1}{k})^k} \leq 4Mk^m.$$

Для получения утверждения в обратную сторону воспользуемся утверждением из [7], говорящим, что сумма ряда $\sum_1^{\infty} k^{\alpha} z^k, \alpha > 0$, асимптотически ведет себя в окрестности точки $z = 1$ как

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-|z|)^{\alpha+1}}.$$

Поэтому, если имеет место оценка $|C_k| \leq Mk^m, k > 0$, то

$$|f(z)| \leq |a_0| + \sum_1^{\infty} Mk^m |z|^k \leq M_0 + \frac{\widetilde{M}}{(1-|z|)^{m+1}},$$

т. е. функция имеет степенной рост. \square

Аналитическое представление обобщенной функции порождает естественную аппроксимацию распределения f гладкими функциями с помощью значений аналитического представления на окружности радиуса $1 - \varepsilon$ и радиуса $\frac{1}{1-\varepsilon}$:

$$R_{\varepsilon}(f) = f_{\varepsilon}(z) = f^+((1-\varepsilon)z) + f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k (1-\varepsilon)^{|k|} z^k. \quad (3.12)$$

Теорема 3.6. Формула (3.12) задает инвариантное вложение пространства $D'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемифункций. Условие согласования с умножением (2.7) выполнено для пар функций, имеющих представление $f = (f^+, 0), g = (g^+, 0)$, где функции f^+ и g^+ непрерывны в замкнутом круге, а также для пар функций вида $f = (0, f^-), g = (0, g^-)$, непрерывных в области $|z| \geq 1$.

Доказательство. То, что семейство гладких функций $f_{\varepsilon}(z)$ имеет степенной рост, следует из теоремы 3.5.

Для функций $z^k, k \geq 0$ равенство (2.7) проверяется непосредственно. Действительно, пусть $f(z) = z^k, g(z) = z^m, f(z)g(z) = z^{k+m}$. Тогда $R_{\varepsilon}(f) = (1-\varepsilon)^k z^k, R_{\varepsilon}(g) = (1-\varepsilon)^m z^m, R_{\varepsilon}(fg) = (1-\varepsilon)^{k+m} z^{k+m}$, и равенство $R_{\varepsilon}(fg) = R_{\varepsilon}(f)R_{\varepsilon}(g)$, очевидно, выполнено. Из этого следует, что требуемое равенство выполнено для многочленов, откуда, переходя к пределу, получаем требуемое свойство для функций f^+ и g^+ , непрерывных в замкнутом круге. Для пар функций, имеющих представление $f = (0, f^-), g = (0, g^-)$, доказывается аналогично. \square

Для дельта-функции рассматриваемое аппроксимирующее семейство имеет вид

$$R_{\varepsilon}(\delta_1) = \psi_{\varepsilon}(z) = \frac{1}{1-(1-\varepsilon)z} + \frac{1-\varepsilon}{z-(1-\varepsilon)} \quad (3.13)$$

и способ регуляризации задается как свертка $R_\varepsilon(f) = f * \psi_\varepsilon$.

Отметим, что при рассматриваемом способе аппроксимации равенство (2.6) не выполнено. Действительно, функции $f(z) = z$ соответствует мнемофункция $f_\varepsilon(z) = (1 - \varepsilon)z$, при этом $f(z) - f_\varepsilon(z) = \varepsilon z$, откуда следует, что эта разность не принадлежит идеалу – она стремится к нулю как ε , а элементы идеала стремятся к нулю быстрее любой степени ε .

Из доказательства теоремы видно, что здесь равенство (2.7) выполнено не только в фактор-алгебре, но и на уровне представителей из классов эквивалентности, т. е. для непрерывных f^+ и g^+ имеем

$$(f^+ * \psi_\varepsilon) \times (g^+ * \psi_\varepsilon) = (f^+ g^+) * \psi_\varepsilon.$$

Возникает вопрос: существуют ли другие функции $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, такие, что

$$(f^+ * \gamma) \times (g^+ * \gamma) = (f^+ g^+) * \gamma. \quad (3.14)$$

Следующая теорема утверждает, что это практически единственный случай.

Теорема 3.7. Если функция $\gamma(z)$ такова, что равенство (3.14) выполнено для всех гладких функций $f = (f^+, 0)$, то при некоторых ε и ξ , $|\xi| = 1$, имеем

$$\gamma(z) = \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon)\xi z} + g(z),$$

где $g = (0, g^-)$.

Доказательство. Пусть $\gamma(z) = \sum A_k z^k$. Заметим, что для функции f указанного вида свертка с $\gamma(z)$ не зависит от коэффициентов разложения $\gamma(z)$ с отрицательными номерами. Поэтому функцию

$$g^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} A_k z^k$$

можно выбирать произвольным образом. Тогда $z^k * \gamma(z) = A_k z^k$, $z^m * \gamma(z) = A_m z^m$, $z^{k+m} * \gamma(z) = A_{k+m} z^{k+m}$. Из (3.14) следует, что для коэффициентов разложения выполнено $A_{k+m} = A_k A_m$. При $k = 0$ получаем, что $A_0 = 1$. Пусть $A_1 = r\xi$, где $|\xi| = 1$, тогда $A_k = r^k \xi^k$, причем для сходимости ряда должно быть, чтобы $r < 1$. Таким образом, обозначив $1 - r = \varepsilon$, получаем требуемое представление $\gamma(z)$. \square

При аналитическом представлении пространство распределений отождествляется с множеством пар аналитических функций (f^+, f^-) , описанных выше. Произведение $f_\varepsilon(z)g_\varepsilon(z)$ также имеет аналитическое представление $(h_\varepsilon^+(z), h_\varepsilon^-(z))$, где функции $h_\varepsilon^\pm(z)$ аналитически зависят от z и ε . В частности, каждая из этих функций разлагается в ряд Лорана по степеням ε , поэтому для

произведения $f_\varepsilon(z)g_\varepsilon(z)$ существует асимптотическое разложение по степеням ε .

Рассмотрим такое произведение более детально. Результат умножения распределений $(f^+, f^-) \times (g^+, g^-)$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g) &= \left[f^+((1 - \varepsilon)z) + f^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) \right] \times \\ &\times \left[g^+((1 - \varepsilon)z) + g^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) \right] = \\ &= f^+((1 - \varepsilon)z)g^+((1 - \varepsilon)z) + f^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) g^+((1 - \varepsilon)z) + \\ &+ f^+((1 - \varepsilon)z)g^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) + f^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) g^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} f^+((1 - \varepsilon)z)g^+((1 - \varepsilon)z) &= R_\varepsilon(f^+ g^+), \\ f^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) g^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) &= R_\varepsilon(f^- g^-), \end{aligned}$$

т. е. сумма первого и четвертого слагаемых есть аналитическое представление распределения, заданного парой $(f_+ g_+, f_- g_-)$. При фиксированном ε сумма двух остальных слагаемых

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon(z) &:= f^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) g^+((1 - \varepsilon)z) + \\ &+ f^+((1 - \varepsilon)z)g^- \left(\frac{z}{1 - \varepsilon} \right) \end{aligned}$$

есть функция, аналитическая в кольце

$$K_\varepsilon = \left\{ z : 1 - \varepsilon < |z| < \frac{1}{1 - \varepsilon} \right\}.$$

Ее аналитическое представление задается с помощью применения операторов P^\pm . Таким образом, в пространстве $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ кусочно аналитических функций, т. е. пар (f^+, f^-) , задающих аналитическое представление, умножение действует по достаточно сложному правилу.

Теорема 3.8. В пространстве кусочно аналитических функций, т. е. пар (f^+, f^-) , задающих аналитическое представление, результат умножения $(f^+, f^-) \times (g^+, g^-)$ может быть представлен в виде $R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g) = (h_\varepsilon^+(z), h_\varepsilon^-(z))$, где $h_\varepsilon^\pm(z) = R_\varepsilon(f^\pm \cdot g^\pm) + P^\pm(\gamma_\varepsilon(z))$.

Заметим, что каждая из функций $h_\varepsilon^\pm(z)$ разлагается в ряд Лорана по степеням ε с конечной главной частью, в результате чего при рассматриваемом способе аппроксимации для любого произведения $f_\varepsilon(z)g_\varepsilon(z)$ существует асимптотическое разложение по степеням ε .

Заключение

В работе были исследованы различные способы вложений пространства периодических

обобщенных функций в алгебру мнемифункций на окружности. Каждый способ вложения порожден некоторой аппроксимацией обобщенной функции семейством гладких функций, в частности, рассматриваются способы вложений, обладающие свойством инвариантности относительно поворота. Такие способы вложений определяются с помощью свертки с дельтаобразной последовательностью гладких функций.

В зависимости от способа аппроксимации вложение может обладать дополнительными свойствами, такими как согласованность с умножением гладких функций, локальность умножения. В работе рассмотрен ряд вложений, обладающих как одним из указанных свойств, так и двумя одновременно. Выбор способа вложения, обладающего конкретными дополнительными свойствами, обусловлен рассматриваемой задачей и тем, какой способ аппроксимации распределений наиболее удобен в данном случае. В частности, с ряда точек зрения наиболее естественным является способ аппроксимации, порожденный аналитическим представлением распределений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антоневич, А.Б.* Алгебра мнемифункций на окружности / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова, Е.В. Шкадинская // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 55–62.
2. *Colombeau, J.F.* New generalized functions and multiplication of distributions / J.F. Colombeau. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – 374 p.
3. *Colombeau, J.F.* A multiplication of distributions / J.F. Colombeau // Journal of mathematical analysis and applications. – 1983. – № 94. – P. 96–115.
4. *Бремерман, Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
5. *Маркушевич, А.И.* Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. – М., 1950.
6. *Антоневич, А.Б.* О росте аналитической функции в круге / А.Б. Антоневич, Али А. Шуккур // Доклады НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 41–45.
7. *Евграфов, М.А.* Асимптотические оценки и целые функции / М.А. Евграфов. – М.: Гостехиздат, 1957. – 159 с.

Поступила в редакцию 22.10.18.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Т.Н. Ванькова, Л.В. Детченя, В.М. Пецевич, А.О. Селивёрстова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

ON A CLASS OF SYSTEMS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITHOUT MOBILE CRITICAL FEATURES

T.N. Vankova, L.V. Detchenya, V.M. Petsevich, A.O. Seliverstova

Y. Kupala Grodno State University

Получены необходимые и достаточные условия принадлежности исследуемой системы к системам типа Пенлеве.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, подвижные критические особые точки, метод малого параметра.

Necessary and sufficient conditions for the system under investigation to belong to the Painlevé type system are obtained.

Keywords: system of the ordinary differential equations, Painlevé property, movable critical singularities, method of small parameter.

1. Предварительные результаты

В [1] найдены необходимые условия наличия свойства Пенлеве для системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x'^2 &= A_2 \cdot y^2 + A_1 \cdot y + A_0, \\y'^2 &= B_2 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + B_0,\end{aligned}\quad (1.1)$$

где $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, A_i , $i = \overline{0,2}$, – полиномы по x с аналитическими по t коэффициентами, B_j , $j = \overline{0,2}$, – полиномы по y с аналитическими по t коэффициентами. Была доказана

Лемма 1.1. Для того, чтобы дифференциальная система (1.1) имела свойство Пенлеве необходимо, чтобы степени полиномов A_i , $i = \overline{0,2}$, по переменной x и степени полиномов B_j , $j = \overline{0,2}$, по переменной y были не выше 4.

Изучение систем дифференциальных уравнений на предмет отсутствия подвижных критических особых точек очень часто приводит к изучению уравнения второго порядка второй степени вида

$$(x'' - E(x', x, t))^2 = F(x', x, t), \quad (1.2)$$

где E, F – рациональные функции от x', x с аналитическими по t коэффициентами.

Основные результаты по поиску необходимых условий наличия свойства Пенлеве в решениях уравнения (1.2), а в некоторых случаях и достаточных, содержатся в работах [2, 3]. Некоторые из них содержатся в следующих леммах.

Лемма 1.2 [2], [3]. Для наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения (1.2)

необходимо, чтобы $E(x', x, t)$, $F(x', x, t)$ были полиномами по x' степени не выше 2 и 4 соответственно, коэффициенты которых являются рациональными по x функциями с аналитическими по t коэффициентами, т. е.

$$\begin{aligned}E(x', x, t) &= E_2(x, t)x'^2 + E_1(x, t)x' + E_0(x, t), \\F(x', x, t) &= F_4(x, t)x'^4 + F_3(x, t)x'^3 + \\&+ F_2(x, t)x'^2 + F_1(x, t)x' + F_0(x, t).\end{aligned}$$

Лемма 1.3 [3]. Пусть $x' = \mu(x, t)$ – нуль нечетной кратности функции $F(x', x, t)$, в котором функция $E(x', x, t)$ голоморфна. Тогда для наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения (1.2) необходимо, чтобы решения дифференциального уравнения $x' = \mu(x, t)$ были особыми для (1.2).

Лемма 1.4 [3]. Если (1.2) имеет свойство Пенлеве, то нули функции $F(x', x, t)$ вида $x = \gamma(t)$ должны быть четной кратности, при условии, что $E(x', x, t)$ голоморфна в этих нулях.

2 Основной результат

Целью данной работы является поиск необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у решений системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x'^2 &= (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 + \\&+ (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})y + \\&+ a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\y'^2 &= x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00},\end{aligned}\quad (2.1)$$

с аналитическими по t коэффициентами, где

$$|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0, \quad (2.2)$$

которая является частным случаем системы (1.1).

Запись $P \neq 0$, здесь и далее означает, что коэффициенты полинома P одновременно не обращаются в нуль в некоторой области D .

Исключая из системы (2.1) компоненту x , относительно компоненты y построим уравнение

$$(2y'y'' + \alpha_1 \cdot y' + \alpha_0)^2 =$$

$$= \beta_8 \cdot (y')^8 + \beta_6 \cdot (y')^6 + \beta_4 \cdot (y')^4 + \beta_2 \cdot (y')^2 + \beta_0,$$

где a_i, β_j однозначно определяются через коэффициенты системы (2.1). Требуя выполнение леммы 1.2, для наличия свойства Пенлеве, на коэффициенты системы (2.1) получим 27 условий. Разрешая их, найдем, что для наличия свойства Пенлеве у решений системы (2.1) с условиями (2.2) необходимо, чтобы она принимала один из видов

$$x'^2 = (K_2 y^2 + K_1 y + x)(a_{03} x^2 + a_{02} x + a_{01}), \quad (2.3)$$

$$y'^2 = K_2 y^2 + K_1 y + x,$$

где $K_2 \neq 0$ (здесь и в дальнейшем $K_i \in \mathbb{C}$ будем считать произвольными постоянными),

$$|a_{03}| + |a_{02}| + |a_{01}| \neq 0;$$

$$x'^2 = (x + K_1 y) \times$$

$$\times ((a_{13} x^2 + a_{12} x + a_{11}) y + a_{03} x^2 + a_{02} x + a_{01}), \quad (2.4)$$

$$y'^2 = K_1 y + x,$$

где $K_1 \neq 0, |a_{13}| + |a_{12}| + |a_{11}| \neq 0;$

$$x'^2 = (a_{23} x^3 + a_{22} x^2 + a_{21} x) y^2 + (a_{13} x^3 + a_{12} x^2 + a_{11} x) y + a_{03} x^3 + a_{02} x^2 + a_{01} x, \quad (2.5)$$

$$y'^2 = x,$$

где $|a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| \neq 0$.

Рассмотрим систему (2.3). С помощью линейного преобразования относительно зависимых переменных $x = X + \frac{K_1^2}{4K_2}, y = Y - \frac{K_1}{2K_2}$, в прежних обозначениях, система (2.3) сведется к виду

$$x'^2 = (K_2 y^2 + x)(a_{03} x^2 + a_{02} x + a_{01}), \quad (2.6)$$

$$y'^2 = K_2 y^2 + x,$$

где $K_2 \neq 0, |a_{03}| + |a_{02}| + |a_{01}| \neq 0$.

Из (2.6) относительно компоненты y будем иметь

$$(y'' - K_2 y)^2 = \frac{a_{03}}{4} (y')^4 + \left(\frac{a_{02}}{4} - \frac{a_{03} K_2}{2} y^2 \right) (y')^2 + \frac{a_{03} K_2^2}{4} y^4 - \frac{a_{02} K_2}{4} y^2 + \frac{a_{01}}{4}. \quad (2.7)$$

Согласно [1], [3], для наличия свойства Пенлеве, необходимо требовать $a_{03} = 0$, т. е. (2.7) примет вид

$$(y'' - K_2 y)^2 = \frac{a_{02}}{4} (y')^2 - \frac{a_{02} K_2}{4} y^2 + \frac{a_{01}}{4}. \quad (2.8)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $a_{02} \neq 0$. Для наличия свойства Пенлеве, согласно лемме 1.3, требуя, чтобы общее решение уравнения $a_{02} (y')^2 - a_{02} K_2 y^2 + a_{01} = 0$ было особым решением для уравнения (2.8), получим, что необходимо выполнение условия $a_{01} = K_1 a_{02}$. Таким образом, (2.6) примет вид

$$x'^2 = a_{02} (K_2 y^2 + x)(x + K_1), \quad (2.9)$$

$$y'^2 = K_2 y^2 + x,$$

где $K_2 \neq 0, a_{02} \neq 0$. Поскольку $x = y'^2 - K_2 y^2$, а y удовлетворяет уравнению

$$(y'' - K_2 y)(4a_{02} y''' - 2a'_{02} y'' - a_{02}(4K_2 + a_{02})y' + 2K_2 a'_{02} y) = 0,$$

которое получается из (2.8) дифференцированием, на основании [4] заключаем, что система (2.9) обладает свойством Пенлеве.

2. Пусть $a_{02} = 0$, а тогда $a_{01} \neq 0$, т. е. (2.6) примет вид

$$x'^2 = a_{01} (K_2 y^2 + x), \quad (2.10)$$

$$y'^2 = K_2 y^2 + x,$$

где $K_2 \neq 0, a_{01} \neq 0$. Поскольку $x = y'^2 - K_2 y^2$, а y удовлетворяет уравнению

$$y'' - K_2 y = \pm \frac{\sqrt{a_{01}}}{2},$$

на основании [4] заключаем, что система (2.10) обладает свойством Пенлеве.

Рассмотрим систему (2.4). Исключая из системы компоненту x , относительно компоненты y построим уравнение

$$\left(y'' - \frac{K_1}{2} \right)^2 = \left(\frac{a_{13}}{4} y + \frac{a_{03}}{4} \right) (y')^4 + \left(\frac{a_{02}}{4} + \left(\frac{a_{12}}{4} - \frac{a_{03} K_1}{2} \right) y - \frac{a_{13} K_1}{2} y^2 \right) (y')^2 + \frac{a_{13} K_1^2}{4} y^3 - \frac{(a_{12} - a_{03} K_1) K_1}{4} y^2 + \left(\frac{a_{11}}{4} - \frac{a_{02} K_1}{4} \right) y + \frac{a_{01}}{4}. \quad (2.11)$$

Согласно [1], [3], для наличия свойства Пенлеве, необходимо выполнение условий $a_{13} = 0, a_{03} = 0$.

Пусть $a_{12} \neq 0$. Учитывая полученные выше условия, в уравнение (2.11) введем малый параметр λ по формулам $y = \lambda^{-2} Y, t = t_0 + \lambda z$. При $\lambda = 0$ будем иметь упрощенное в смысле Пенлеве уравнение

$$\left(\frac{d^2Y}{dz^2}\right)^2 = \frac{a_{12}}{4} Y \left(\frac{dY}{dz}\right)^2,$$

которое, согласно лемме 1.4, не обладает свойством Пенлеве, т. е. $a_{12} = 0$, и (2.11) примет вид

$$\begin{aligned} \left(y'' - \frac{K_1}{2}\right)^2 &= \frac{a_{02}}{4} (y')^2 + \\ &+ \left(\frac{a_{11}}{4} - \frac{a_{02}K_1}{4}\right)y + \frac{a_{01}}{4}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $K_1 \neq 0$, $a_{11} \neq 0$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $a_{02} \neq 0$. Если $|a_{11} - a_{02}K_1| + |a_{01}| \neq 0$, то уравнение $a_{02}(y')^2 + (a_{11} - a_{02}K_1)y + a_{01} = 0$ имеет два нуля нечетной кратности вида $y' = \mu(y, t)$, которые, согласно лемме 1.3, должны быть особыми решениями для уравнения (2.12). Данное требование приводит к условию $a_{11} = 0$, которое противоречит условиям накладываем на коэффициенты системы (2.4). Следовательно, $a_{11} = a_{02}K_1$, $a_{01} = 0$, и (2.4) примет вид

$$x' = \varepsilon \sqrt{a_{02}}(x + K_1y), \quad y'^2 = x + K_1y, \quad (2.13)$$

где $K_1 \neq 0$, $a_{02} \neq 0$, $\varepsilon^2 = 1$. Поскольку

$$x = y'^2 - K_1y,$$

а y удовлетворяет уравнению

$$y'' - \frac{K_1}{2} = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{a_{02}}}{2} y',$$

на основании [4] заключаем, что система (2.13) обладает свойством Пенлеве.

2. Пусть $a_{02} = 0$. Тогда (2.12) примет вид

$$\left(y'' - \frac{K_1}{2}\right)^2 = \frac{a_{11}}{4} y + \frac{a_{01}}{4}. \quad (2.14)$$

Для наличия свойства Пенлеве, согласно лемме 1.4, необходимо требовать чтобы $a_{11} = 0$, что противоречит условиям накладываем на коэффициенты системы (2.4).

Рассмотрим систему (2.5). Исключая из системы компоненту x , относительно компоненты y построим уравнение

$$\begin{aligned} (y'')^2 &= \frac{1}{4} \left((a_{23}y^2 + a_{13}y + a_{03})(y')^4 + \right. \\ &+ \left. (a_{22}y^2 + a_{12}y + a_{02})(y')^2 + a_{21}y^2 + a_{11}y + a_{01} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Откуда, согласно [1], [3], для наличия свойства Пенлеве, необходимо требовать $a_{23} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{03} = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} (y'')^2 &= \frac{1}{4} \left((a_{22}y^2 + a_{12}y + a_{02})(y')^2 + \right. \\ &+ \left. a_{21}y^2 + a_{11}y + a_{01} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $a_{22} \neq 0$. Уравнение

$$(a_{22}y^2 + a_{12}y + a_{02})(y')^2 + a_{21}y^2 + a_{11}y + a_{01} = 0$$

имеет два нуля нечетной кратности вида $y' = \mu(y, t)$, которые, согласно лемме 1.3, должны быть особыми решениями для (2.16). Данное требование приводит к условиям $a_{21} = a_{22}K_1$, $a_{11} = a_{12}K_1$, $a_{01} = a_{02}K_1$, и (2.16) примет вид

$$(y'')^2 = \frac{1}{4} (a_{22}y^2 + a_{12}y + a_{02}) \left((y')^2 + K_1 \right). \quad (2.17)$$

Для наличия свойства Пенлеве у решений уравнения (2.17), согласно лемме 1.4, необходимо

требовать $a_{02} = \frac{a_{12}^2}{4a_{22}}$, т. е. можем записать

$$16a_{22}(y'')^2 = (2a_{22}y + a_{12})^2 \left((y')^2 + K_1 \right). \quad (2.18)$$

Для наличия свойства Пенлеве, согласно методу резонансов, решение уравнения (2.18) можно представить формальным рядом

$$y = \frac{\alpha_0}{t} + \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3 + \dots,$$

где α_2 – должно быть произвольной постоянной. Это требование приводит к необходимости выполнения условий

$$a_{22} = \frac{4}{(K_2 t + K_3)^2}, \quad a_{12} = \frac{4K_4}{(K_2 t + K_3)^2},$$

где $|K_2| + |K_3| \neq 0$. С учетом полученных выше условий, система (2.5) примет вид

$$\begin{aligned} x'^2 &= \frac{x(x + K_1)(2y + K_4)^2}{(K_2 t + K_3)^2}, \\ y'^2 &= x, \end{aligned}$$

которую, с помощью линейного преобразования зависимой переменной, при сохранении для коэффициентов прежних обозначений, можем записать в виде

$$\begin{aligned} x'^2 &= \frac{xy^2(x + K_1)}{(K_2 t + K_3)^2}, \\ y'^2 &= x, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $|K_2| + |K_3| \neq 0$. Поскольку $x = y'^2$, а y удовлетворяет уравнению

$$(y'')^2 = \frac{1}{4(K_2 t + K_3)^2} y^2 \left((y')^2 + K_1 \right), \quad (2.20)$$

согласно [2] (используя нормализацию, при $K_2 = 1$, $K_3 = 0$ решения уравнения (2.20) выражаются в терминах третьего трансцендента Пенлеве; при $K_2 = 0$, $K_3 = 1$ решения уравнения (2.20) выражаются в терминах эллиптических функций), заключаем, что система (2.19) обладает свойством Пенлеве.

2. Пусть $a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$. Учитывая эти условия, в уравнение (2.16) введем малый параметр по формулам $y = \lambda^{-2}Y$, $t = t_0 + \lambda z$. При $\lambda = 0$

будем иметь упрощенное в смысле Пенлеве уравнение

$$\left(\frac{d^2Y}{dz^2}\right)^2 = \frac{a_{12}}{4} Y \left(\frac{dY}{dz}\right)^2,$$

которое, согласно лемме 1.4, не обладает свойством Пенлеве. Следовательно, в случае $a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$ нет систем, обладающих свойством Пенлеве.

3. Пусть $a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{02} \neq 0$ (при этом $a_{21} \neq 0$). Уравнение

$$a_{02}(y')^2 + a_{21}y^2 + a_{11}y + a_{01} = 0$$

имеет два нуля нечетной кратности вида $y' = \mu(y, t)$, которые, согласно лемме 1.3, должны быть особыми решениями для (2.16). Данное требование приводит к условию $a_{21} = 0$, что противоречит данным рассматриваемого случая, т. е. нет систем, обладающих свойством Пенлеве.

Таким образом, имеет место

Теорема 2.1. Для того, чтобы дифференциальная система (2.1) при условии (2.2) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием x , y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из видов: (2.9), (2.10), (2.13), (2.19). Решения данной системы в случае (2.19) выражаются через решения третьего уравнения Пенлеве.

Заключение

Используя метод малого параметра, метод резонансов, метод сравнения полученных уравнений с уравнениями, аналитические свойства решений которых известны, найдены необходимые и достаточные условия принадлежности исследуемой системы (2.1) к системам типа Пенлеве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пецевич, В.М.* Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени / В.М. Пецевич, В.А. Пронько // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 69–75.
2. *Bureau, F.* Equations differentielles du second ordre en Y et du second degre en \dot{Y} dont l'integrale generale est a points critiques fixes / F. Bureau // Ann. di Math. – 1972. – Vol. 91. – P. 163–281.
3. *Cosgrove, C.M.* Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / C.M. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. 1993. – Vol. 88. – P. 25–87.
4. *Айнс, Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 719 с.

Поступила в редакцию 15.06.18.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СИЛЬНО К- \mathfrak{F} -СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH STRONGLY K- \mathfrak{F} -SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

A.F. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация групп. Подгруппу H группы G назовем сильно К- \mathfrak{F} -субнормальной в G , если $N_G(H)$ является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G . В работе исследуется вопрос принадлежности конечной группы, у которой все силовские подгруппы сильно К- \mathfrak{F} -субнормальны, насыщенной формации \mathfrak{F} .

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, формация, К- \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа.

Let \mathfrak{F} be a nonempty formation of groups. We call a subgroup H of the group G strongly K- \mathfrak{F} -subnormal in G , if $N_G(H)$ is a \mathfrak{F} -subnormal subgroup in G . In this paper we study the question of belonging a finite group in which all Sylow subgroups of strongly K- \mathfrak{F} subnormal, to saturated formation \mathfrak{F} .

Keywords: finite group, Sylow subgroup, formation, K- \mathfrak{F} -subnormal subgroup.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Понятие силовской подгруппы занимает центральное место в теории конечных групп. Знание свойств строения и вложения силовских подгрупп позволяет во многих случаях получить описание самой группы. К настоящему времени значительное развитие получила теория классов групп, см., например, монографии [1]–[4]. В рамках этой теории возникает следующая естественная проблема.

Проблема. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация (класс Фиттинга, класс Шунка) групп. Найти условия, которым должны удовлетворять силовские подгруппы группы G , чтобы G принадлежала \mathfrak{F} .

Например, хорошо известно, что группа G тогда и только тогда нильпотентна, когда ее силовские подгруппы нормальны (субнормальны) в G .

Естественным обобщением субнормальности являются понятия \mathfrak{F} -субнормальной и К- \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы [4].

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется: 1) \mathfrak{F} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$; 2) К- \mathfrak{F} -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

В работе [5] для случая наследственной насыщенной формации были начаты исследования строения групп, у которых силовские подгруппы являются \mathfrak{F} -субнормальными. В дальнейшем это направление получило развитие в работах различных авторов. Например, в работах [6]–[8] для насыщенной формации \mathfrak{F} были изучены свойства класса групп, у которых силовские подгруппы являются \mathfrak{F} -субнормальными (К- \mathfrak{F} -субнормальными), в работах [9]–[18] были найдены приложения полученных классов для конкретных формаций \mathfrak{F} .

Определение 1. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация групп. Подгруппу H группы G назовем сильно К- \mathfrak{F} -субнормальной в G , если $N_G(H)$ является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G .

Так как подгруппа нормальна в своем нормализаторе, то всякая сильно К- \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа будет К- \mathfrak{F} -субнормальной. Обратное утверждение неверно. Пусть S – симметрическая группа степени 3. Известно, что существует точный неприводимый S -модуль U над полем F_7 из 7 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]S$. Так как подгруппа S неабелева, то группа G не является сверхразрешимой. Из сверхразрешимости G/U следует, что $H = UG_3$ является К- \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой группы G , где G_3 – силовская 3-подгруппа группы G , лежащая в S . Заметим, что H – сверхразрешимая подгруппа группы G .

Следовательно, G_3 K - \mathcal{U} -субнормальна в G . С другой стороны, нормализатор G_3 в G равен подгруппе S , которая не является \mathcal{U} -субнормальной в G . Следовательно, G_3 не является сильно K - \mathcal{U} -субнормальной подгруппой в G .

Теорема А. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, состоящая из дисперсивных групп. Тогда и только тогда группа G принадлежит \mathfrak{F} , когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и каждая силовская подгруппа из G сильно K - \mathfrak{F} -субнормальна в G .

Следствие 1. [16] Пусть \mathcal{U} – формация всех сверхразрешимых групп. Если каждая силовская подгруппа группы G сильно K - \mathcal{U} -субнормальна в G , то G сверхразрешима.

Теорема В. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, состоящая из метанильпотентных групп. Тогда и только тогда группа G принадлежит \mathfrak{F} , когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и каждая силовская подгруппа из G сильно K - \mathfrak{F} -субнормальна в G .

Следствие 2. Пусть \mathfrak{F} – формация всех групп, имеющих нильпотентный коммутант. Если каждая силовская подгруппа группы G сильно K - \mathfrak{F} -субнормальна в G , то G имеет нильпотентный коммутант.

Следствие 3. Пусть \mathfrak{F} – формация всех метанильпотентных групп. Если каждая силовская подгруппа группы G сильно K - \mathfrak{F} -субнормальна в G , то G метанильпотентна.

1 Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [1], [2] и [4].

Через \mathbb{P} обозначается множество всех простых чисел, π – подмножество из \mathbb{P} , $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Пусть G – группа, $p \in \mathbb{P}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка G , $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа G , $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π -подгруппа G , $\text{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп G , $F(G)$ – подгруппа Фиттинга или нильпотентный радикал G , т. е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа G , Z_p – циклическая группа порядка p , 1 – единичная подгруппа.

В следующей лемме собраны известные свойства силовских подгрупп.

Лемма 1.1 [2, гл. А, теорема 6.4]. Пусть G – группа и $p \in \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда $P \cap N \in \text{Syl}_p(N)$ и $PN/N \in \text{Syl}_p(G/N)$;

2) если $N_i \trianglelefteq G$, $i=1,2$ и $P \in \text{Syl}_p(G)$, то $N_1P \cap N_2P = (N_1 \cap N_2)P$;

3) пусть $\{p_1, \dots, p_r\}$ – множество всех простых делителей $|G|$ и $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$ для $i=1, \dots, r$. Тогда $G = \langle P_1, \dots, P_r \rangle$.

Лемма 1.2. [1, лемма 3.9]. Если H/K – главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p -подгрупп, причем $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$.

Пусть \mathfrak{X} – некоторый класс групп. Через $\pi(\mathfrak{X})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих \mathfrak{X} ; \mathfrak{X}_π – класс всех π -групп, принадлежащих \mathfrak{X} ; $\mathfrak{X}_p = \mathfrak{X}_\pi$ для $\pi = \{p\}$.

Будем использовать следующие обозначения: \mathfrak{S} – класс всех разрешимых групп; \mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп; \mathfrak{N}^2 – класс всех метанильпотентных групп.

Класс групп \mathfrak{F} называется *формацией*, если 1) \mathfrak{F} – гомоморф, т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и 2) из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ ($i=1,2$) всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется *наследственной*, если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через $G^\mathfrak{F}$ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G , для которой $G/G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$.

Нам потребуются известные свойства \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп. В дальнейшем в работе $H \mathfrak{F}$ -sn G означает, что в группе G подгруппа H является \mathfrak{F} -субнормальной.

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{F} – формация, H и K – подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N ;

2) если $N \leq H$ и $H/N \mathfrak{F}$ -sn G/N , то $H \mathfrak{F}$ -sn G ;

3) если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $HN \mathfrak{F}$ -sn G ;

4) если $H \mathfrak{F}$ -sn K и $K \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \mathfrak{F}$ -sn G ;

5) если все композиционные факторы G принадлежат \mathfrak{F} , то всякая субнормальная подгруппа G является \mathfrak{F} -субнормальной;

6) пусть p – простое число и G – p -группа. Если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то в G все подгруппы являются \mathfrak{F} -субнормальными.

Аналогичные свойства справедливы для K - \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп.

Лемма 1.4. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация, $H \leq G$ и $M \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \cap M \mathfrak{F}$ -sn M ;
- 2) если $H \mathfrak{F}$ -sn G и $M \mathfrak{F}$ -sn G , то $H \cap M \mathfrak{F}$ -sn G ;
- 3) если $G^\delta \leq H$, то $H \mathfrak{F}$ -sn G ;
- 4) если $H \mathfrak{F}$ -sn G , то $H^x \mathfrak{F}$ -sn G для любого $x \in G$.

2 Доказательство Теоремы А

Напомним, что группа называется дисперсивной, если найдётся линейный порядок ϕ на $\pi(G)$ такой, что если $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$, причем $p_i \leq_\phi p_j$ для $i < j$, то G имеет нормальные холловы $\{p_1, \dots, p_i\}$ -подгруппы для всех $i \leq n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$. По условию \mathfrak{F} – наследственная формация. Тогда любая подгруппа из G является \mathfrak{F} -субнормальной в ней, в частности, $N_G(G_p)$ для любой $G_p \in \text{Syl}_p(G)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть группа G – контрпример минимального порядка и N – минимальная нормальная подгруппа G .

Если $G = N$, то G – простая группа в силу минимальности N . Если $G \simeq Z_p$, то из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Предположим, что G – простая неабелева группа и $p \in \pi(G)$. Пусть $G_p \in \text{Syl}_p(G)$. Так как G – простая группа, то $N_G(G_p) \neq G$. Из $G \notin \mathfrak{F}$ следует, что $G^\delta = G$. По условию $N_G(\mathfrak{F})$ является \mathfrak{F} -субнормальной в G . Тогда найдется максимальная в G подгруппа M такая, что $N_G(P) \subseteq M$ и $G^\delta \subseteq M$. Получили противоречие.

Пусть $N \neq G$. Так как $N_{G/N}(G_p N/N) = N_G(G_p)N/N$ и $N_G(G_p) \mathfrak{F}$ -sn G , то $N_G(G_p N/N) \mathfrak{F}$ -sn G/N . Следовательно, для G/N все условия выполняются. Ввиду выбора G получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если K – минимальная нормальная подгруппа G и $K \neq N$, то $G/K \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то $G/N \cap K = G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G . Следовательно, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N . Если $\Phi(G) \neq 1$, то из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и насыщенности \mathfrak{F} следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Снова получили противоречие с выбором G . Поэтому $\Phi(G) = 1$. В этом случае $N = G^\delta$ и существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = NM$. Рассмотрим следующие случаи.

1. N – неабелева группа. Пусть $p \in \pi(N)$ и $G_p \in \text{Syl}_p(G)$. Тогда $N_G(G_p) \neq G$. В противном случае $G_p \trianglelefteq G$ и $N \subseteq G_p$, так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Но тогда N – абелева группа. Противоречие с предположением.

Рассмотрим $N_G(G_p)N$. Если $N_G(G_p)N = G$, то из \mathfrak{F} -субнормальности $N_G(G_p)$ в G получаем, что найдется максимальная подгруппа W в G такая, что $N_G(G_p) \subseteq W$ и $N = G^\delta \subseteq W$. Откуда следует, что $G = N_G(G_p)N \subseteq W \neq G$. Противоречие.

Пусть теперь $N_G(G_p)N \neq G$. Заметим, что $G_p \cap N = N_p \in \text{Syl}_p(N)$ и $N_p = G_p \cap N \trianglelefteq N_G(G_p) \cap N$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация и $N_G(G_p) \mathfrak{F}$ -sn G , то $N_G(G_p) \cap N \mathfrak{F}$ -sn N . Из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $N_p \trianglelefteq N_G(G_p) \cap N$ следует, что $N_p \mathfrak{F}$ -sn $(N_G(G_p) \cap N) \mathfrak{F}$ -sn N . Откуда по 4) леммы 1.3 получаем, что $N_p \mathfrak{F}$ -sn N для любого $p \in \pi(N)$. Так как \mathfrak{F} состоит из разрешимых групп, то N разрешима. Получаем противоречие с нашим предположением.

2. N – абелева p -группа, p – некоторое простое число. Из $G/N \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ и $N \in \mathfrak{S}$ следует, что G разрешима. Из единственности N и $\Phi(G) = 1$ следует, что $G = N \rtimes M$, где $G^\delta = N = C_G(N) = F(G)$ и M – максимальная подгруппа G , причем M дисперсивна. Отсюда следует, что в M имеется нормальная силовская q -подгруппа M_q для некоторого простого делителя q порядка M . Так как по лемме 1.2 $O_p(M) = 1$, то $q \neq p$. Поэтому $M_q = G_q$ является силовской q -подгруппой группы G . Тогда в силу единственности N следует, что $N_G(G_q) \neq G$. Так как M – максимальная подгруппа G и $M \subseteq N_G(G_q)$, то $M = N_G(G_q)$. Но это противоречит тому, что $N_G(G_q)$ является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в G . Получили заключительное противоречие. \square

3 Доказательство Теоремы В

Напомним, что группа G метанильпотентна, если $G/F(G)$ нильпотентна.

Доказательство. Необходимость. По условию $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Из насыщенности \mathfrak{F} по теореме 3.18 из [2; IV] следует, что \mathfrak{F} – наследственная формация. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$. Тогда любая подгруппа G является \mathfrak{F} -субнормальной в ней, в частности, $N_G(G_p)$ для любой $G_p \in \text{Syl}_p(G)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть G – контрпример минимального порядка и N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Рассуждая аналогично, как в теореме А, получаем, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $\Phi(G) = 1$. В этом случае $N = G^{\mathfrak{F}}$ и существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = NM$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть N – неабелева группа. Рассуждая аналогично, как в случае 1 теоремы А получаем противоречие с выбором группы В.

2. N – абелева p -группа, p – некоторое простое число. Из $G/N \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ и $N \in \mathfrak{S}$ следует, что G разрешима. Из единственности N и $\Phi(G) = 1$ получаем, что $G = N \rtimes M$, где $G^{\mathfrak{F}} = N = C_G(N) = F(G)$ и M – максимальная подгруппа G , причем $M \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Предположим, что M нильпотентна. Так как по лемме 1.2 $O_p(M) = 1$, то $p \cap \pi(M) = \emptyset$. Тогда группа G является дисперсивной. Теперь применяя рассуждения аналогичные, как при доказательстве теоремы А, получим, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Будем считать, что M ненильпотентна. Рассмотрим следующие случаи.

i) Пусть $|\pi(M)| = 2$.

Предположим, что $p \in \pi(M)$. По лемме 1.2 $O_p(M) = 1$. Так как $M \in \mathfrak{N}^2$, то $M/F(M)$ нильпотентна. Заметим, что $F(M)$ – q -группа, $q \neq p$. Тогда $M_q \in \text{Syl}_q(M)$ является нормальной подгруппой в M . Заметим, что $M_q \in \text{Syl}_q(G)$ и $N_G(M_q) = M$. По условию $N_G(M_q) = M$ \mathfrak{F} -sn G . С другой стороны $N = G^{\mathfrak{F}}$ и $NM = G$. Получили противоречие.

Пусть p не принадлежит $\pi(M)$ и $\pi(M) = \{r, q \mid r \neq p \neq q\}$. Тогда $N \in \text{Syl}_p(G)$ и M – $\{r, q\}$ -группа. Пусть $M_q \in \text{Syl}_q(M)$. Тогда $M_q \in \text{Syl}_q(G)$. Заметим, что $N_G(M_q) \neq G$ в силу $N = C_G(N)$ и N – p -группа, $p \neq q$.

Из того, что $N = G^{\mathfrak{F}}$ и $N_G(M_q)$ \mathfrak{F} -sn G следует, что $T = NN_G(M_q) = G^{\mathfrak{F}}N_G(M_q) \neq G$. Изучим подробнее строение $N_G(M_q)$. Заметим, что $N_G(M_q) = M_q \rtimes S$, где S – холлова q' -подгруппа в $N_G(M_q)$.

Покажем, что $N_G(M_q) \in \mathfrak{F}$.

Вначале предположим, что $N_G(M_q) \cap N = 1$. Тогда из $G/N \in \mathfrak{F}$ и наследственности \mathfrak{F} следует, что

$$\begin{aligned} N_G(M_q)N/N &\cong \\ &\cong N_G(M_q)/N_G(M_q) \cap N \cong N_G(M_q) \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Пусть $N_G(M_q) \cap N = D \neq 1$. Тогда $D \trianglelefteq N_G(M_q)$ и $M_q \trianglelefteq N_G(M_q)$. Откуда $M_q \times D \trianglelefteq N_G(M_q)$ и $N_G(M_q) = (M_q \times D) \rtimes R$, где R – r -группа.

Далее $N_G(M_q)/M_q \cong DR \in \mathfrak{N}^2$. Откуда по теореме 1 из [5] $N_G(M_q)/M_q \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то $M_qR \subseteq M^x \in \mathfrak{F}$ и $N_G(M_q)/D \cong M_qR \in \mathfrak{F}$. Тогда получаем $N_G(M_q)/M_q \cap D \cong N_G(M_q) \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $N_M(M_q)$ является нильпотентной группой.

Так как $N_G(M_q)$ \mathfrak{F} -sn G и \mathfrak{F} – наследственная формация, то $N_G(M_q)$ \mathfrak{F} -sn T . По теореме 15.10 [1] $T \in \mathfrak{F}$. Так как $N = C_G(N) = F(G)$, то $F(T) = N$. Из $T \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$ следует, что $T/N \in \mathfrak{N}$, откуда $N_G(M_q)N/N \cong N_G(M_q)/N_G(M_q) \cap N \in \mathfrak{N}$. Тогда $(N_G(M_q) \cap M)N/N \cong N_G(M_q) \cap M/N_G(M_q) \cap N \cap M \cong N_G(M_q) \cap M \in \mathfrak{N}$. Заметим, что $N_G(M_q) \cap M = N_M(M_q)$. Следовательно, $N_M(M_q) \in \mathfrak{N}$.

Аналогично проводя рассуждения для $M_r \in \text{Syl}_r(M)$, получаем, что $N_M(M_r) \in \mathfrak{N}$. Так как нормализатор любой силовской подгруппы в M нильпотентен, то из [19] следует, что M нильпотентна. Получили противоречие.

ii) Пусть $|\pi(G)| = |\pi(M)| = 3$. Тогда $p \in \pi(M)$.

Так как $O_p(M) = 1$, то $\pi(F(M)) \subseteq \{r, q\}$. Заметим, что $G/N \cong M \in \mathfrak{N}^2$. Тогда $M/F(M)$ нильпотентна. Пусть $A = G_p G_q$, где G_p – силовская p -подгруппа, а G_q – силовская q -подгруппа в G . Так как $|A| < |G|$, $N_G(G_p) \cap A = N_A(G_p)$ \mathfrak{F} -sn A и $N_G(G_q) \cap A = N_A(G_q)$ \mathfrak{F} -sn A , то $A \in \mathfrak{F}$ и $A \in \mathfrak{N}^2$.

Заметим, что $N \subseteq A$. Покажем, что $G_p \trianglelefteq A$. Из $N = C_G(N)$ следует, что $F(A)$ – p -группа. Из $A \in \mathfrak{N}^2$ следует, что $A/F(A) \in \mathfrak{N}$. Тогда $G_p/F(A) \trianglelefteq A/F(A)$. Откуда $G_p \trianglelefteq A$. Следовательно, $G_q \subseteq A \subseteq N_G(G_p)$.

Аналогично, $G_r \subseteq N_G(G_p)$. Откуда получаем, что $G_p \trianglelefteq G$. Следовательно, $G_p \cap M \trianglelefteq M$. Но $O_p(M) = 1$. Поэтому $M_p = 1$ и $p \notin \pi(M)$, то есть наше предположение неверно.

iii) Пусть $|\pi(G)| > 3$. Покажем, что любая собственная холлова, в частности, любая трипримарная холлова подгруппа G принадлежит \mathfrak{F} .

Пусть H – π_i -холлова подгруппа G , $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$, где $\pi_i = \pi(G) \setminus \{p_i\}$. Для любой $S \in \text{Syl}_q(H)$ имеем, что $N_G(S) \cap H = N_H(S)$

\mathfrak{F} -сп H , так как \mathfrak{F} – наследственная формация. Ввиду выбора группы G получаем, что любая собственная холлова подгруппа, в частности, три-примарная холлова подгруппа G принадлежит \mathfrak{F} . Используя методы работы [20], нетрудно показать, что $G \in \mathfrak{N}^2$. Так как $N = F(G)$, то $G/N \cong M \in \mathfrak{N}$. По доказанному выше следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. \square

4 Заключительные замечания и открытые вопросы

Требование дисперсивности групп в теореме А и метанильпотентности групп в теореме В является существенным.

Пример 4.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^3$ – формация всех разрешимых групп, чья нильпотентная длина не превосходит 3. Возьмем $M = S_4$ – симметрическую группу степени 4. Известно, что существует точный неприводимый M -модуль U над полем F_3 из 3 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]M$. Заметим, что нильпотентная длина G равна 4 и $\pi(G) = \{2, 3\}$. Так как подгруппа M является минимальной не \mathfrak{N}^2 -группой, то группа G – минимальная не \mathfrak{N}^3 -группа. Отметим также, что G не является дисперсивной и метанильпотентной группой. Нетрудно видеть, что нормализаторы ее силовских подгрупп являются \mathfrak{F} -субнормальными подгруппами в G , но сама группа G не принадлежит \mathfrak{F} .

Определение 4.2. Для некоторого множества простых чисел π и непустой формации \mathfrak{F} обозначим через $w_\pi^* \mathfrak{F}$ – класс всех групп G , у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и для любого $q \in \pi \cap \pi(G)$ всякая силовская q -подгруппа является сильно \mathfrak{F} -субнормальной в G .

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, будем обозначать $w_\mathbb{P}^* \mathfrak{F} = w^* \mathfrak{F}$.

Предложения 4.3. Пусть \mathfrak{F} – наследственная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если π_1 – множество простых чисел и $\pi \subseteq \pi_1$, то $w_{\pi_1}^* \mathfrak{F} \subseteq w_\pi^* \mathfrak{F}$;
- 2) $\mathfrak{F} \subseteq w^* \mathfrak{F} \subseteq w_\pi^* \mathfrak{F}$;
- 3) $\mathfrak{N}_{\pi \cap \pi(\mathfrak{F})} \subseteq w_\pi^* \mathfrak{F}$;
- 4) $w_\pi^* \mathfrak{F} = w_{\pi \cap \pi(\mathfrak{F})}^* \mathfrak{F}$;
- 5) $w_\pi^* \mathfrak{F}$ – формация;
- 6) $w_\pi^*(w_\pi^* \mathfrak{F}) = w_\pi^* \mathfrak{F}$.

Доказательство предложения осуществляется проверкой определений.

Проблема 4.4. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и π – некоторое множество простых чисел. Найдите условия, при которых:

- 1) $w_\pi^* \mathfrak{F}$ также является насыщенной формацией;
- 2) $w_\pi^* \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 359 p.
4. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.
5. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
6. Васильева, Т.И. Конечные группы с \mathfrak{F} -достижимыми проекторами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 38. – С. 14–18.
7. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.
8. Васильев, А.Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.
9. Семенчук, В.Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Мат. заметки. – 2011. – Т. 89, № 1. – С. 104–108.
10. Семенчук, В.Н. Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо \mathfrak{F} -субнормальны, либо \mathfrak{F} -абнормальны / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 8. – С. 46–55.
11. Semenchuk, V.N. On one generalization of finite \mathfrak{A} -critical groups / V.N. Semenchuk, A.N. Skiba // J. of Algebra and its Applications. – 2016. – Vol. 15, № 4. – P. 1650063-1–1650063-11.
12. Васильев, В.А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.
13. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
14. Васильев, А.Ф. О K - \mathbb{P} -субнормальных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев,

Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Мат. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

15. *Monakhov, V.S.* Finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // *Ricerche di Matematica*. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.

16. *Kniahina, V.* On supersolubility of finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V. Kniahina, V. Monakhov // *International Journal of Group Theory*. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

17. *Мурашко, В.И.* Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // *Сиб. мат. журн.* – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.

18. *Мурашко, В.И.* О классе групп с экстремальными \mathbb{P} -субнормальными подгруппами /

В.И. Мурашко // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*. – 2017. – № 105. – С. 111–115.

19. *Bianchi, M.* On finite groups with nilpotent Sylow-normalizers / M. Bianchi, A. Gillio Mauri, P. Huck // *Arch. Math (Basel)*. – 1986 – Vol. 47. – P. 193–197.

20. *Васильева, Т.И.* О влиянии k -примарных холловых подгрупп на строение конечных разрешимых групп / Т.И. Васильева, С.В. Балычев // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2018. – № 1 (34). – С. 55–60.

Поступила в редакцию 28.09.18.

ТРЕХСЛОЙНАЯ КРУГОВАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА СО СЖИМАЕМОМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ю.В. Захарчук

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

THE CIRCULAR THREE-LAYER ELASTIC-PLASTIC PLATE WITH A COMPRESSIBLE FILLER

Yu.V. Zakharchuk

Belarusian State University of Transport, Gomel

Рассмотрена задача о симметричном изгибе несимметричной по толщине упругопластической круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем. Для тонких несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом наполнителе учтен поперечный сдвиг, радиальные перемещения и прогиб, который изменяется линейно по толщине, работа касательных напряжений пренебрегается. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций Ильюшина. Постановка и решение краевой задачи приведены в перемещениях в цилиндрической системе координат. Представлены численные результаты.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, легкий сжимаемый наполнитель, пластичность, итерационное решение.

The problem of symmetric bending of a three-layer elastic plate with a light compressible filler asymmetrical in thickness is considered. Kirchhoff's hypotheses are accepted for thin bearing layers. In a relatively thick aggregate, the transverse shear, radial displacements and deflection are taken into account, which vary linearly in thickness are taken into account, the work of shear stresses is neglected. The differential equations of equilibrium in the displacements are obtained using the Lagrange variational method. Physical equations of state correspond to the theory of small elastic-plastic deformations of Ilyushin. The formulation and solution of the boundary value problem are given in displacements in a cylindrical coordinate system. Numerical results are presented.

Keywords: three-layer circular plate, light compressible filler, plasticity, iterative solution.

Введение

При оценке работы несущих слоистых элементов конструкций под воздействием силовых нагрузок возникают специфические проблемы. Они в первую очередь связаны с определением соответствующих напряжений и деформаций. В процессе деформирования материалы слоев могут проявлять физически нелинейные свойства, что приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям равновесия, которые не имеют точного аналитического решения. Возникает проблема выбора метода их приближенного решения.

Деформированию и колебаниям слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Постановки и методы решения соответствующих краевых задач приведены в монографии [1]. Результаты, связанные с колебаниями круговых трехслойных элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [2]–[6]. Исследования деформирования слоистых упругопластических систем при циклических нагружениях содержатся в работах [7]–[10]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трехслойных круговых пластин с несжимаемым наполнителем рассмотрено в публикациях [11]–[15].

Следует отметить, что учет сжимаемости наполнителя в большей степени адекватно описывает деформирование трехслойных элементов конструкций. В статьях [16]–[18] приведены постановка задачи и ее решения об изгибе упругой круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем. Здесь приводятся уравнения равновесия подобной упругопластической трехслойной пластины.

1 Постановка краевой задачи

Рассмотрим упругопластическую круговую трехслойную пластину со сжимаемым наполнителем (рисунок 1.1). Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z . Систему координат свяжем со срединной плоскостью наполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами h_1, h_2 справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности своего слоя. В наполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном направлении, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Деформируемость по толщине наполнителя принимается линейной.

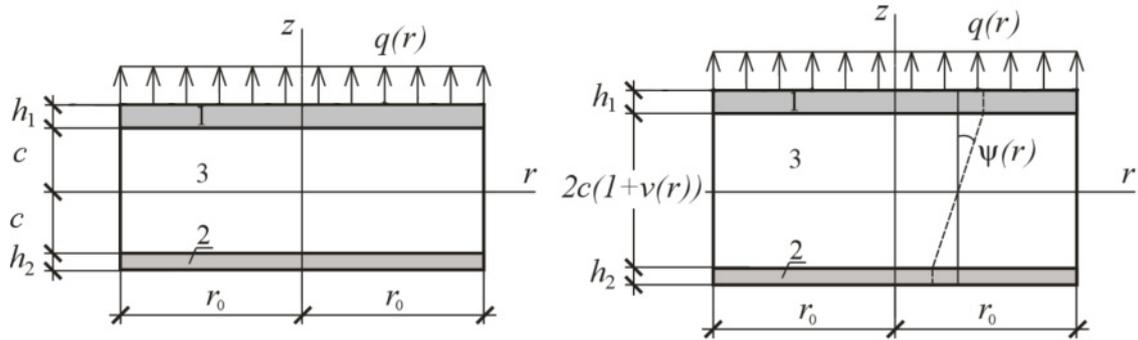


Рисунок 1.1 – Расчетная схема круговой трехслойной пластины

На внешний слой пластины действует осесимметричная распределенная изгибающая нагрузка $q = q(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительно сдвигу слоев и обжатию наполнителя ($\psi = 0$, $v = 0$ при $r = r_0$). Через $u(r)$ обозначено продольное перемещение срединной плоскости наполнителя, $w(r)$ – прогиб нижнего несущего слоя, $v(r)$ – функция обжатия наполнителя. Обозначим через h_k толщину k -го слоя ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), при этом $h_3 = 2c$.

Продольные и поперечные (прогибы) перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

– в несущих слоях 1, 2

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}), \\ w^{(1)}(r, z) &= w(r) + v(r), \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, \quad w^{(2)}(r, z) = w(r), \\ & \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \end{aligned}$$

– в наполнителе 3

$$\begin{aligned} u_r^{(3)} &= u + z\psi - z \left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z + c) \right], \\ & \quad (-c \leq z \leq c); \end{aligned} \quad (1.1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности наполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1.1), используя соотношения Коши [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \\ \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), \\ \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - z \left[w_{,rr} + \frac{v_{,rr}}{2c}(z + c) \right], \\ \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r} \left\{ u + z\psi - z \left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z + c) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(\psi - \frac{z}{2c} v_{,r} \right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c}.$$

Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)}, \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\vartheta_{rz}^{(3)} \\ & \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\vartheta_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев ($k = 1, 2$) [19], которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_y^{(k)}$ – предел текучести материалов несущих слоев; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность наполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала наполнителя; $s_{rz}^{(3)}$, $\vartheta_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и угловая деформация в наполнителе; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое

$$\begin{aligned} \varepsilon_u^{(k)} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left((\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{zz})^2 + \right. \\ & \quad \left. + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr})^2 + 6(\varepsilon_{r\varphi}^2 + \varepsilon_{\varphi z}^2 + \varepsilon_{zr}^2) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \\ D_\alpha &= S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} + M_\alpha^{(2)}), \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (1.2), представим через девiatorную и шаровую части тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} + K_k \theta^{(k)} - 2G_k \omega_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} \\ (\alpha &= r, \varphi; k = 1, 2, 3), \\ \sigma_z^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)} - 2G_3 \omega_3 \vartheta_z^{(3)}, \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)} - 2G_3 \omega_3 \vartheta_{rz}^{(3)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Выделим в тензоре напряжений (1.4) упругие (индекс «е») и неупругие (индекс «ω») составляемые:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \\ \sigma_z^{(3)} &= \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{z\omega}^{(3)}, \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha e}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \vartheta_{\alpha}^{(k)}, \\ \sigma_{ze}^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)}, \quad \sigma_{z\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \vartheta_z^{(3)}, \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \\ \sigma_{rz\omega}^{(3)} &= 2G_3 \omega_3 \vartheta_{rz}^{(3)}. \end{aligned}$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной (индекс «е») и нелинейной (индекс «ω») частей:

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{(k)} &= T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ M_{\alpha}^{(k)} &= M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha \omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi), \\ S_{\alpha}^{(3)} &= S_{\alpha e}^{(3)} - S_{\alpha \omega}^{(3)}, \end{aligned}$$

где упругие и нелинейные составляющие вычисляются по формулам (1.3), в которых напряжения $\sigma_{\alpha}^{(k)}$, нужно заменить соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$, $\sigma_{\alpha \omega}^{(k)}$ из соотношений (1.5).

После этого обобщенные внутренние усилия будут

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= T_{\alpha e} - T_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ M_{\alpha} &= M_{\alpha e} - M_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ H_{\alpha} &= H_{\alpha e} - H_{\alpha \omega}, \\ D_{\alpha} &= D_{\alpha e} - D_{\alpha \omega}, \\ H_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), \\ H_{\alpha \omega} &= M_{\alpha \omega}^{(3)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1)} - T_{\alpha \omega}^{(2)}), \\ D_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha e}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha e}^{(3)}, \\ D_{\alpha \omega} &= M_{\alpha \omega}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha \omega}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha \omega}^{(3)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой упругой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем была получена с помощью принципа Лагранжа в [17] без использования соотношений связи напряжений и деформаций. Поэтому ее можно применить и здесь как исходную:

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_{\varphi}) = 0, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_{\varphi}) = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) = -q. \end{cases} \quad (1.7)$$

На границе $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_{\varphi}) &= 0, \\ D_r &= D_r^0, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_{\varphi}) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Выделяя в обобщенных внутренних усилиях уравнений (1.7), (1.8) линейные и нелинейные составляющие, в соответствии с формулами (1.6), перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_{\varphi}) = p_{\omega}, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_{\varphi}) = h_{\omega}, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q + q_{\omega}, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) = -q + g_{\omega}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Граничные условия следуют из (1.8):

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0 + T_{r\omega}, \quad H_r = H_r^0 + H_{r\omega}, \quad M_r = M_r^0 + M_{r\omega}, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_{\varphi}) &= M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}), \\ D_r &= D_r^0 + D_{r\omega}, \\ D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_{\varphi}) &= D_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(D_{r\omega} - D_{\varphi\omega}), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где нижний индекс «е» для простоты опущен.

Нелинейные добавки, сосредоточенные в правой части уравнений (1.9) и включенные в слагаемые с нижним индексом «ω», будут определяться формулами:

$$\begin{aligned} p_{\omega} &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \\ h_{\omega} &= H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}), \\ q_{\omega} &= M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \\ g_{\omega} &= D_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r\omega,r} - D_{\varphi\omega,r}). \end{aligned}$$

2 Разрешающая система дифференциальных уравнений

Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения формулами, приведенными

в [17], поэтому система уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (1.9), приводится к виду:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r} - a_4v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= p_\omega, \\ L_2(a_2u + a_5\psi - a_6w_{,r} - a_7v_{,r}) &= h_\omega, \\ L_3(a_3u + a_6\psi - a_8w_{,r} - a_9v_{,r}) &= -q + q_\omega, \\ L_3(a_4u + a_7\psi - a_9w_{,r} - a_{10}v_{,r}) + \\ &+ \frac{c}{6} K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) = -q + g_\omega. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \\ a_2 &= c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+, \\ a_4 &= h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+, \\ a_5 &= c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a_6 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_7 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+ \right], \\ a_8 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \\ &+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a_9 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{c^3}{3} K_3^+, \\ a_{10} &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{4}{15} c^3 K_3^+, \\ L_2(g) &= \frac{1}{r} ((rg)_{,r})_{,r}, \quad L_3(g) = \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r}. \end{aligned}$$

Если в системе (2.1) положить функцию сжимаемости $v(r) \equiv 0$, то первые три уравнения совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с легким несжимаемым наполнителем [1].

Краевая задача замыкается добавлением к системе дифференциальных уравнений (2.1), силовых (1.10) или кинематических граничных условий на контуре. Например, при жесткой заделке контура пластины при $r = r_0$ должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = v_{,r} = 0,$$

при шарнирном опирании

$$u = \psi = w = v = w_{,rr} = v_{,rr} = 0. \quad (2.2)$$

3 Решение краевой задачи

Система дифференциальных уравнений (2.1) является существенно нелинейной. Ее решение будем проводить методом линейных последовательных приближений, который основан на методе упругих решений Ильюшина. Для этого перепишем систему в следующем итерационном виде:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3w^{(n)}_{,r} - a_4v^{(n)}_{,r}) + \\ + K_3^- v^{(n)}_{,r} &= p_\omega^{(n-1)}, \\ L_2(a_2u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w^{(n)}_{,r} - a_7v^{(n)}_{,r}) &= h_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_3u^{(n)} + a_6\psi^{(n)} - a_8w^{(n)}_{,r} - a_9v^{(n)}_{,r}) &= -q + q_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_4u^{(n)} + a_7\psi^{(n)} - a_9w^{(n)}_{,r} - a_{10}v^{(n)}_{,r}) + \\ + \frac{c}{6} K_3^- \left(v^{(n)}_{,rr} + \frac{v^{(n)}_{,r}}{r} \right) &= -q + g_\omega^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где n – номер приближения.

Нелинейные добавки в (3.1) определены соотношениями

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n-1)} &= T_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r} (T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\phi\omega}^{(n-1)}), \\ h_\omega^{(n-1)} &= H_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r} (H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\phi\omega}^{(n-1)}), \\ q_\omega^{(n-1)} &= M_{r\omega}^{(n-1)}_{,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} - M_{\phi\omega}^{(n-1)}_{,r}), \\ g_\omega^{(n-1)} &= D_{r\omega}^{(n-1)}_{,rr} + \frac{1}{r} (2D_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} - D_{\phi\omega}^{(n-1)}_{,r}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

На контуре пластины ($r = r_0$) граничные условия в усилиях (1.10) для рассматриваемой итерационной задачи принимают вид

$$\begin{aligned} T_r^{(n)} &= T_r^0 + T_{r\omega}^{(n-1)}, \quad H_r^{(n)} = H_r^0 + H_{r\omega}^{(n-1)}, \\ M_r^{(n)} &= M_r^0 + M_{r\omega}^{(n-1)}, \quad D_r^{(n)} = D_r^0 + D_{r\omega}^{(n-1)}, \\ M_r^{(n)}_{,r} + \frac{1}{r} (M_r^{(n)} - M_\phi^{(n)}) &= \\ &= M_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r} (M_{r\omega}^{(n-1)} - M_{\phi\omega}^{(n-1)}), \\ D_r^{(n)}_{,r} + \frac{1}{r} (D_r^{(n)} - D_\phi^{(n)}) &= \\ &= D_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r} (D_{r\omega}^{(n-1)} - D_{\phi\omega}^{(n-1)}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Нелинейные внутренние усилия в (3.2), (3.3) будут:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 2G_k \int_{h_k} \omega_k (\epsilon_u^{(k,n-1)}) \epsilon_\alpha^{(k,n-1)} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} z dz = \\ &= \sum_{k=1}^3 2G_k \int_{h_k} \omega_k (\epsilon_u^{(k,n-1)}) \epsilon_\alpha^{(k,n-1)} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + c (T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)}), \\ D_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} \quad (\alpha = r, \psi). \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (3.1) после соответствующих преобразований получено в итерационном виде

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{C_1^{(n)} r}{4a_6} (2 \ln r - 1) - \\ & - \frac{1}{a_6} (a_3 u^{(n)} - a_8 w^{(n)},_r - a_9 v^{(n)},_r) + C_3^{(n)} \frac{r}{2} + C_4^{(n)} \frac{1}{r}, \\ u^{(n)} &= b_1 v^{(n)},_r + b_2 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \\ & + b_3 L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) - b_2 C_1^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) - \\ & - b_3 C_2^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) + b_4 L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) + \\ & + b_5 L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + C_5^{(n)} \frac{r}{2} + C_6^{(n)} \frac{1}{r}, \\ w^{(n)} &= \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u^{(n)} dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v^{(n)} - \\ & - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr - \\ & - \frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r} \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) dr + \\ & + \frac{C_1^{(n)} a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{11} \ln r + C_{12}, \\ v^{(n)} &= -\frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8^{(n)}}{\beta} Y_0(\beta r) + \\ & + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr - \right. \\ & \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \right) + C_9^{(n)}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{d_2 d_7 - d_3 d_6}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \quad b_2 = \frac{d_4 d_7 - d_3 d_8}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \\ b_3 &= \frac{d_3 d_9}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \\ b_4 &= \frac{a_6 d_3 (a_6 a_9 - a_7 a_8) - a_6 d_7 (a_3 a_6 - a_2 a_8)}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \\ b_5 &= \frac{a_6 d_7 (a_6^2 - a_5 a_8)}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \\ d_1 &= (a_1 a_6 - a_2 a_3) (a_6^2 - a_5 a_8) - \\ & - (a_2 a_6 - a_3 a_5) (a_3 a_6 - a_2 a_8), \\ d_2 &= (a_4 a_6 - a_2 a_9) (a_6^2 - a_5 a_8) - \\ & - (a_6 a_7 - a_5 a_9) (a_3 a_6 - a_2 a_8), \\ d_3 &= a_6 (a_6^2 - a_5 a_8) K_3^-, \\ d_4 &= a_2 (a_6^2 - a_5 a_8) - a_5 (a_3 a_6 - a_2 a_8), \\ d_5 &= (a_4 a_6 - a_3 a_7) (a_6^2 - a_5 a_8) - \\ & - (a_2 a_6 - a_3 a_5) (a_6 a_9 - a_7 a_8), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_6 &= (a_6 a_{10} - a_7 a_9) (a_6^2 - a_5 a_8) - \\ & - (a_6 a_7 - a_5 a_9) (a_6 a_9 - a_7 a_8), \end{aligned}$$

$$d_7 = \frac{a_6 c}{6} (a_6^2 - a_5 a_8) K_3^-,$$

$$d_8 = a_7 (a_6^2 - a_5 a_8) - a_5 (a_6 a_9 - a_7 a_8),$$

$$d_9 = a_6 (a_6^2 - a_5 a_8), \quad \beta^2 = \frac{d_3 d_5 - d_1 d_7}{d_1 d_6 - d_2 d_5},$$

$$\begin{aligned} q_1^{(n-1)} &= \frac{d_4 d_5 - d_1 d_8}{d_1 d_6 - d_2 d_5} \left(\frac{1}{r} \int (q - q_\omega^{(n-1)}) r dr - \frac{1}{r} C_1^{(n)} \right) + \\ & + \frac{d_1 d_9}{d_1 d_6 - d_2 d_5} \left(\frac{1}{r} \int (q - g_\omega^{(n-1)}) r dr - \frac{1}{r} C_2^{(n)} \right) - \\ & + \frac{a_6 d_1 (a_6 a_9 - a_7 a_8) - a_6 d_5 (a_3 a_6 - a_2 a_8)}{d_1 d_6 - d_2 d_5} h_\omega^{(n-1)} + \\ & + \frac{a_6 d_5 (a_6^2 - a_5 a_8)}{d_1 d_6 - d_2 d_5} p_\omega^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Для сплошных круглых пластин, исходя из условия ограниченности решения в начале координат, следует положить

$$C_1^{(n)} = C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = C_{11}^{(n)} = 0.$$

В этом случае решение (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) - \\ & - \frac{1}{a_6} (a_3 u^{(n)} - a_8 w^{(n)},_r - a_9 v^{(n)},_r) + C_3^{(n)} \frac{r}{2}, \\ u^{(n)} &= b_1 v^{(n)},_r + b_2 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + b_3 L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) + \\ & + b_4 L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) + b_5 L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + C_5^{(n)} \frac{r}{2}, \\ v^{(n)} &= -\frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r) + \\ & + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr - \right. \\ & \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \right) + C_9^{(n)}, \\ w^{(n)} &= \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u^{(n)} dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v^{(n)} - \\ & - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr - \\ & - \frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r} \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) dr + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{12}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

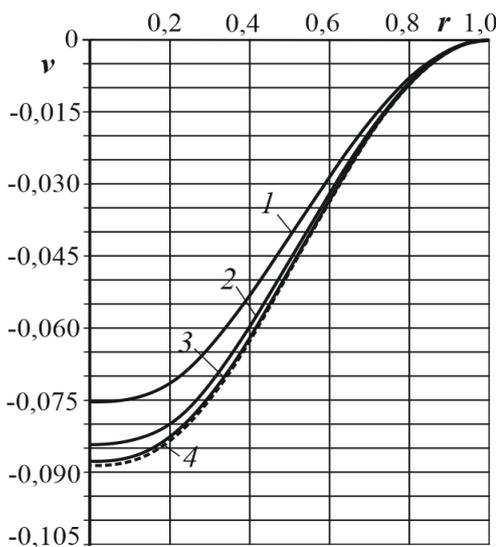
Если контур пластины заделан, то из решения (3.5) и граничных условий (2.2) следуют остальные константы интегрирования:

$$C_3^{(n)} = \frac{2}{a_6 r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0},$$

$$C_5^{(n)} = -\frac{2b_2}{r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} -$$

$$-\frac{2b_3}{r_0} L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_4}{r_0} L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2b_3}{r_0} L_2^{-1} (P_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}, \\
 C_7 = & -\frac{\pi}{2J_1(\beta r_0)} \left(Y_1(\beta r_0) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} - \right. \\
 & \left. - J_1(\beta r_0) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} \right), \\
 C_9^{(n)} = & \frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r_0) - \\
 & -\frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} - \right. \\
 & \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} \right), \\
 C_{10} = & \frac{2a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} L_3^{-1} (q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} + \\
 & + \frac{2a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0^2} L_2^{-1} (h_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}, \\
 C_{12} = & \left(\frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} - b_2 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \right) \times \\
 & \times \int L_3^{-1} (q - q_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} + \\
 & + \left(\frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} - \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} b_4 \right) \int L_2^{-1} (h_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - \\
 & - b_5 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_2^{-1} (p_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - \\
 & - b_3 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1} (q - g_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - \\
 & - \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} C_5^{(n)} \frac{r_0^2}{4} - C_{10} \frac{r_0^2}{4}. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$



1 – упругая пластина; 2 – физически нелинейная

Рисунок 4.1 – Изменение функции сжимаемости $v(r)$ вдоль радиуса пластины

4 Численные результаты

При численной реализации полученного итерационного решения (3.5), (3.6) предполагается, что пластина жестко заделана по контуру, ее радиус $r_0 = 1$ м. Считаем, что все геометрические параметры пластины и линейные перемещения отнесены к ее радиусу. Величина нагрузки и толщины слоев подбирались таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов проявились в достаточной степени: $q = -3$ МПа, $h_1 = h_2 = 0,03$, $c = 0,23$.

В качестве материала несущих слоев принят алюминиевый сплав Д16Т, наполнителя – фторопласт-4 (ПТФЭ). Функции пластичности и нелинейности в соотношениях (1.2) удобно представить в виде [19]:

$$\omega_k(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y, \\ A_k (1 - \varepsilon_y^{(k)} / \varepsilon_u)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u > \varepsilon_y, \end{cases}$$

где A_k, α_k – константы нелинейности материалов.

Соответствующие упругие характеристики материалов и параметры нелинейности заимствованы из [19]: для Д16Т $A_1 = A_2 = 0,96$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 2,34$; $\varepsilon_y^{(1)} = \varepsilon_y^{(2)} = 0,735\%$, $G_1 = G_2 = 0,267 \cdot 10^5$ МПа, $K_1 = K_2 = 0,8 \cdot 10^5$ МПа, для фторопласта $A_3 = 0,905$; $\alpha_3 = 1,48$; $\varepsilon_y = \varepsilon_y^{(3)} = 3,3\%$.

Рисунок 4.1 демонстрирует практическую сходимость принятого итерационного метода, основанного на методе «упругих» решений. Номер кривой соответствует номеру итерации, 1 – для упругой пластины. Здесь второе приближение функции обжатия отличается от первого примерно на 11%. За искомое решение принято 4-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1%. Общее отличие максимального значения функции обжатия в упругопластической пластине от упругой – 16,3%.

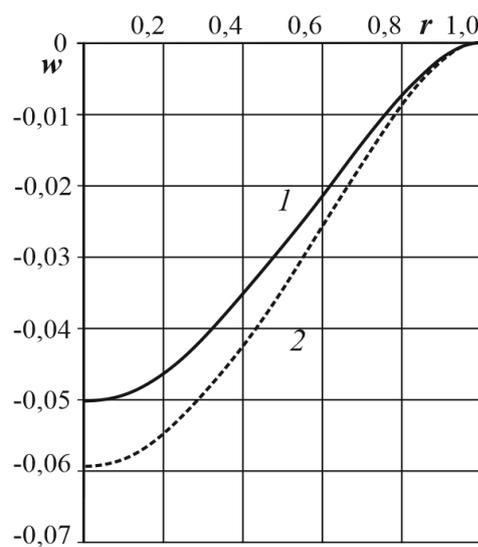
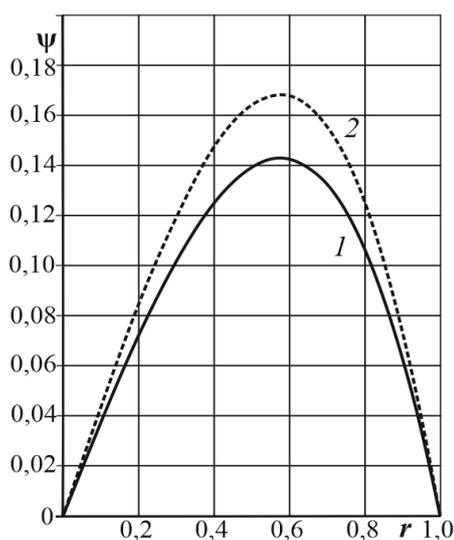


Рисунок 4.2 – Изменение прогиба нижнего слоя $w(r)$ вдоль радиуса пластины



1 – упругая пластина; 2 – физически нелинейная

Рисунок 4.3 – Изменение сдвига в заполнителе $\psi(r)$ вдоль радиуса пластины

На рисунках 4.2–4.4 показаны графики изменения соответственно прогиба нижнего слоя, относительного сдвига в заполнителе и радиального перемещения вдоль радиуса: 1 – упругая пластина, 2 – физически нелинейная.

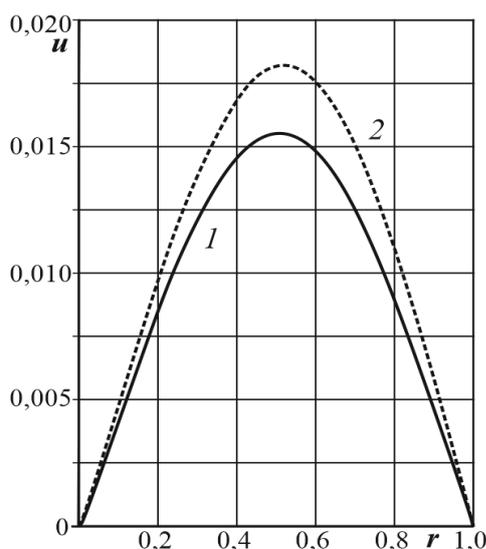
Здесь различия составляют 16,7%; 20,4%; 16,9%. Следовательно, учет физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению искомых перемещений на 16–20%, что приводит к существенному уточнению напряженно-деформированного состояния рассматриваемой трехслойной пластины.

Заключение

Предложенная постановка краевой задачи, полученное итерационное решение и численные результаты позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние упругопластических круговых трехслойных пластин со сжимаемым легким заполнителем при различных нагрузках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая – Минск: Бел. наука. 2004. – 342 с.
2. *Natural vibrations of a sandwich beam on an elastic foundation* / V.D. Kubenko, Yu.M. Pleskachevskii, E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.
3. *Starovoitov, E.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *Strength of Materials*. – 2003. – Vol. 35, № 4. – P. 346–352.

Рисунок 4.4 – Изменение радиального перемещения $u(r)$ вдоль радиуса пластины

4. *Starovoitov, É.I. Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces* / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2005. – Vol. 41, № 7. – P. 809–816.

5. *Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation* / E.I. Starovoitov, V.D. Kubenko, D.V. Tarlakovskii // *Russian Aeronautics*. – 2009. – Vol. 52, № 2. – P. 151–157.

6. *Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 86–93.

7. *Старовойтов, Э.И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек* / Э.И. Старовойтов // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. – 1980. – № 2. – С. 92–96.

8. *Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин* / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 3. – С. 409–416.

9. *Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях* / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1986. – № 1. – С. 116–121.

10. *Gorshkov, A.G. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux* / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // *Mechanics of Solids*. – 2001. – Vol. 36, № 1. – P. 64–69.

11. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

12. Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, № 4. – P. 451–459.

13. Старовойтов, Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э.И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

14. Starovoitov, É.I. Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.

15. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

16. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 53–57.

17. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ. – 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.

18. Захарчук, Ю.В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Международный сборник научных трудов «Механика». – 2018. – Вып.10. – С. 55–66.

19. Старовойтов, Э.И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов / Э.И. Старовойтов // Проблемы прочности. – 1988. – № 4. – С. 11–15.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т18Р-090).

Поступила в редакцию 25.10.18.

УДК 517.977

МЕТОД РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Г.Л. Карасёва, Е.А. Ружицкая

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

METHOD OF SOLVING THE SPECIAL OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH PHASE CONSTRAINTS

G.L. Karaseva, E.A. Ruzhitskaya

F. Scorina Gomel State University

Дана постановка задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями, получена формула приращения критерия качества и сформулированы два конструктивных критерия оптимальности (без использования мер). Введено понятие структуры и определяющих элементов. Предложен конструктивный алгоритм построения решения исследуемой задачи. Приведен пример решения задачи.

Ключевые слова: фазовые ограничения, формула приращения критерия качества, критерий оптимальности, структура, определяющие элементы, доводка, уравнения доводки.

The formulation of the optimal control problem with phase constraints is given, the formula for the increment of the quality criterion is obtained, and two constructive optimality criteria are formulated (without using measures). The concept of structure and defining elements are introduced. A constructive algorithm for constructing a solution to the problem under study is proposed. An example of solving a problem is given.

Keywords: phase constraints, formula for incrementing the quality criterion, optimality criterion, structure, determining elements, refinement, refinement equations.

Введение

Задача оптимального управления с фазовыми ограничениями относится к классу сложнейших экстремальных задач. К настоящему времени известен ряд результатов, посвященных качественному исследованию таких задач [1], [2]. В работах [3]–[4] основное внимание уделено конструктивным вопросам. Хорошо известны и трудности, которые возникают при численном решении задач с фазовыми ограничениями. Эти трудности, в первую очередь, обусловлены следующими причинами: 1) при глубине фазовых ограничений более четырех задача, как правило, имеет решение только в классе измеримых функций; 2) при формулировке критерия оптимальности используются такое понятие как мера, что затрудняет использование данных результатов при численной реализации. Для преодоления указанных трудностей при построении конструктивных методов требуется максимальный учет свойств и специфики решаемой задачи. В данной работе с таких позиций исследуется линейная задача оптимального управления с фазовыми ограничениями в классе многомерных управлений. Получена формула приращения критерия качества и сформулирован конструктивный критерий оптимальности (без использования мер) [5]. Предложен метод решения исследуемой задачи. Приведен пример.

1 Постановка задачи

В классе кусочно-непрерывных функций на фиксированном промежутке времени $T = [0, t^*]$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

$$d'x(t) \leq \alpha(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, t^*].$$

Здесь $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$, $t \in T$, – r -мерное управление в момент времени t ; $x = x(t)$ – n -вектор состояния системы в момент времени t ; A – постоянная $n \times n$ -матрица, B – постоянная $n \times r$ -матрица, $r > 1$; c , d – заданные векторы соответствующих размеров; $\alpha(t)$, $t \in T$, – заданная достаточно гладкая функция. Специфика исследуемой задачи заключается в наличии фазовых ограничений.

Введем обозначения $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, $x(\cdot) = (x(t), t \in T)$, которые будем использовать в дальнейшем. Будем считать, что $d'b \neq 0$ и $\alpha_*(0) < d'x_0 < \alpha^*(0)$.

Определения допустимого, оптимального и субоптимального управления и соответствующих траекторий вводятся стандартно.

Будем считать, что ограничения задачи (1.1) удовлетворяют условию Слейтера, т. е. существует такое управление $\bar{u}(\cdot)$, что вдоль соответствующей

ему траектории $\bar{x}(\cdot)$ выполняется неравенство $\max_{t \in T} (d' \bar{x}(t) - \alpha^*(t)) < 0$.

2 Формула приращения критерия качества

Рассмотрим допустимое управление $u(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x(\cdot)$. Введем искусственную компоненту $u_0(t) = d'x(t) - \alpha(t) \leq 0$, $t \in T$. Наряду с исходным векторным управлением будем исследовать расширенное векторное управление $(u_s(t), s = \overline{1, r})$, $t \in T$. Критическим значением для компоненты $u_0(t)$, $t \in T$, будем считать значение, равное нулю, критическими значениями для компонент $u_i(t), i = \overline{1, r}$, $t \in T$, будем считать значения равные ± 1 . Обозначим $I = \{1, 2, \dots, r\}$, $\tilde{I} = 0 \cup I$. Отрезок T разобьём на подотрезки $T_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, $i = \overline{0, m}$; $\tau_0 = 0$, $\tau_{m+1} = t^*$, таким образом, чтобы для каждого $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ существовало подмножество $I(i) \subset I$, при котором

- а) компоненты $u_s(t)$, $s \in \tilde{I} \setminus I(i)$, на отрезке T_i принимают критические значения;
- б) компоненты $u_s(t)$, $s \in I(i)$, на отрезке T_i , могут принимать критические значения только в изолированных точках $t \in T_i$.

Обозначим:

$$L = \{0, 1, \dots, m\}, \quad L_0 = \{i \in L : I(i) \cap 0 = \emptyset\},$$

$$T_\alpha = \bigcup_{i \in L_0} T_i, \quad L_* = L \setminus L_0,$$

$$L_{00} = \{i \in L : i \in L_0, i-1 \in L_0\}, \quad (2.1)$$

$$L_{*0} = \{i \in L : i \in L_0, i-1 \in L_* \cup (-1)\},$$

$$\{\tau_{iv} = \overline{1, q_i}\} = \{\tau \in \text{int} T_i : u_0(\tau) = 0\}, i \in L_*.$$

Определение 2.1 Допустимое управление $u(\cdot)$ называется регулярным, если для $s \in I(i)$ равенство $|u_s(t)| = 1$ возможно в конечном числе точек $t \in T_i$, $i = \overline{0, m}$ и $m < \alpha$.

Рассмотрим допустимое управление $u(\cdot)$ и порожденную им траекторию $x(\cdot)$. Построим соответствующие им подмножества (2.1). Среди индексов $s \in I(i)$ выберем один индекс $s(i)$, $i \in L_0$. Наряду с допустимым управлением $u(\cdot)$ и соответствующей ему траекторией $x(\cdot)$ рассмотрим допустимое управление $\tilde{u}(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $\tilde{x}(\cdot)$. Получена система

$$\Delta \dot{x} = A(t) \Delta x + B(t) \Delta u + G(t) \Delta \dot{\omega}, \quad \Delta x(0) = 0,$$

где

$$A(t) = A, \quad B(t) = B, \quad G(t) = G, \quad t \in T_\mu = T \setminus \bigcup_{i \in L_0} T_i;$$

$$A(t) = A_{s(i)}, \quad B(t) = B_{s(i)}, \quad G(t) = G_{s(i)}, \quad t \in T_i, \quad i \in L_0,$$

$$A_{s(i)} = \left(E - \frac{b_{s(i)} d'}{d' b_{s(i)}} \right) A, \quad B_{s(i)} = \left(E - \frac{b_{s(i)} d'}{d' b_{s(i)}} \right) B,$$

$$G_{s(i)} = - \frac{b_{s(i)} d'}{d' b_{s(i)}}.$$

Получена формула приращения критерия качества

$$c' \Delta x(t^*) = \int_0^{t^*} \Psi' B(\tau) \Delta u(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{j \in L_0} \int_{T_j} \Psi' A(\tau) G(\tau) \Delta \omega(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{j \in L_0} \Psi'(\tau_j - 0) \frac{b_{s(i)}}{d' b_{s(i)}} \Delta \omega(\tau_j) +$$

$$+ \sum_{j \in L_{*0}} \Psi'(\tau_j) \left(\frac{b_{s(i)}}{d' b_{s(i)}} - \frac{b_{s(i-1)}}{d' b_{s(i-1)}} \right) \Delta \omega(\tau_j) -$$

$$- \sum_{j \in L_*} \Psi'(\tau_j) \frac{b_{s(i-1)}}{d' b_{s(i-1)}} \Delta \omega(\tau_j) + \sum_{i \in L_*} \sum_{v=1}^{q_i} \bar{v}_{iv} \Delta \omega(\tau_{iv}). \quad (2.2)$$

Здесь $\Psi(t)$, $t \in T$, – решение системы

$$\dot{\Psi} = -A'(t) \Psi, \quad \Psi(t^*) = c;$$

$$\Psi(\tau_i - 0) = \Psi(\tau_i + 0) + d \bar{v}_i, \quad i \in L_{*0}; \quad (2.3)$$

$$\Psi(\tau_{iv} - 0) = \Psi(\tau_{iv} + 0) + d \bar{v}_{iv}, \quad v = \overline{1, q_i}, \quad i \in L_*;$$

соответствующее вектору

$$\bar{\omega} = (\bar{v}_i, i \in L_{*0}; \bar{v}_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*). \quad (2.4)$$

3 Критерий оптимальности

Справедлива следующая

Теорема 3.1. Пусть ограничения задачи (1.1) удовлетворяют условию Слейтера. Тогда для оптимальности регулярного управления $u(\cdot)$ в задаче (1.1) необходимо и достаточно существования такого вектора

$$\bar{\omega} = (\bar{v}_i, i \in L_{*0}; \bar{v}_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*),$$

что вдоль соответствующего ему решения $\Psi(t)$, $t \in T$, системы (2.3) и управления $u(\cdot)$ выполняются следующие соотношения:

$$\Psi'(t) B(t) u(t) = \max_{|u| \leq 1} \Psi'(t) B(t) u, \quad t \in T;$$

$$\Psi'(\tau_i - 0) \frac{b_{s(i)}}{d' b_{s(i)}} \leq 0, \quad i \in L_{*0}, \quad (3.1)$$

$$\Psi'(\tau_i) \frac{b_{s(i-1)}}{d' b_{s(i-1)}} \geq 0, \quad i \in L_*,$$

$$\Psi'(\tau_i) \left(\frac{b_{s(i)}}{d' b_{s(i)}} - \frac{b_{s(i-1)}}{d' b_{s(i-1)}} \right) \leq 0,$$

$$i \in L_{00}, \quad \bar{v}_{iv} \leq 0, \quad v = \overline{1, q_i}, \quad i \in L_*,$$

$$\Psi'(t) A(t) G(t) \leq 0, \quad t \in T_i, \quad i \in L_0.$$

Рассмотрим сопряженную систему

$$\dot{\varphi} = -A'\varphi + d\xi, \varphi(t^*) = c; \quad (3.2)$$

$$\varphi(t_i - 0) = \varphi(t_i + 0) + dz_i, i = \overline{1, p};$$

где $t_i, i = \overline{1, p}$, – некоторые моменты из T . Рассмотрим два допустимых управления $u(\cdot)$ и $\bar{u}(\cdot) = u(\cdot) + \Delta u(\cdot)$ задачи (1.1). Легко убедиться в справедливости формулы приращения

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & \int_T \varphi'(t) B \Delta u(t) dt + \\ & + \sum_{i=1}^p z_i d' \Delta x(t_i) + \int_T \xi(t) d' \Delta x(t) dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассмотрим допустимое управление $u(\cdot)$, по которому построим множества (2.1) и моменты $\tau_i, i \in L; \tau_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*$. Рассмотрим частный случай системы (3.2):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = -A'\varphi + d\xi, \varphi(t^*) = c; \\ \varphi(\tau_i - 0) = \varphi(\tau_i + 0) + dz_i, \\ i \in L_k = L_{*0} \cup L_{00} \cup L_{0*}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\varphi(\tau_{iv} - 0) = \varphi(\tau_{iv} + 0) + dz_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*.$$

Справедлива следующая

Теорема 3.2. Пусть ограничения задачи (1.1) удовлетворяют условию Слейтера. Тогда для оптимальности регулярного управления $u(\cdot)$ в задаче (1.1) необходимо и достаточно существования таких кусочно-непрерывной функции $\xi(t), t \in T$, и чисел $(z_i, i \in L_k; z_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*)$, что вдоль соответствующего им решения $\varphi(t), t \in T$, сопряженной системы (3.4) и управления $u(\cdot)$ выполняются условия максимума:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) B u(t) = \max_{|u| \leq 1} \varphi'(t) B u, \\ -\xi(t) d' x(t) = \max_{\gamma \leq \alpha(t)} -\xi(t) \gamma, t \in T; \\ z_i \leq 0, i \in L_k; z_{iv} \leq 0, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*. \end{aligned} \quad (3.5)$$

4 Алгоритм решения задачи

Пусть $u^0(\cdot)$ – регулярное оптимальное управление. Ему соответствуют моменты $\tau_i^0, i = \overline{1, m}$, множества (2.1) и индексы $s(i), i \in I$. Согласно теореме 3.1, существует такой вектор

$$\varpi = (\bar{v}_i, i \in L_{*0}; \bar{v}_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*),$$

что вдоль соответствующего ему решения $\psi(t), t \in T$, системы (2.3) выполняются соотношения (3.1).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} I_u(t) = \{ \zeta \in I : u_\zeta^0(t-0) \neq u_\zeta^0(t+0) \}; \\ \{ t_j^0, j = \overline{1, p_k} \} = \\ = \{ t \in T \setminus \{ \tau_i^0, i = \overline{0, m+1} \} : u^0(t-0) \neq u^0(t+0) \}; \end{aligned}$$

$$\{ \xi_{ij}^0, j = \overline{1, q_i} \} = \{ t \in \text{int } T_i : u^0(t-0) = u^0(t+0) \}, i \in L_*;$$

$$L_{*0}^R = \{ i \in L_{*0} : u_s^0(\tau_i^0 - 0) \neq u_s^0(\tau_i^0 + 0), s \in I(i) \},$$

$$L_{00}^R = \{ i \in L_{00} : u_s^0(\tau_i^0 - 0) \neq u_s^0(\tau_i^0 + 0), s \in I(i) \},$$

$$L_*^R = \{ i \in L_* : u_s^0(\tau_i^0 - 0) \neq u_s^0(\tau_i^0 + 0), s \in I(i-1) \},$$

$$L_R = L_{*0}^R \cup L_{00}^R \cup L_*^R;$$

$$\{ \eta_j^0, j = \overline{1, p_\eta + 1} \} = \bigcup_{i \in L_*} \{ \xi_{ij}^0, j = \overline{1, q_i} \} \cup$$

$$\cup \{ t_j^0, j = \overline{1, p_k} \} \cup \{ \tau_i^0, i = \overline{0, m+1} \};$$

$$\eta_0^0 = 0, \eta_{p_\eta + 1}^0 = t^*, \eta_j^0 < \eta_{j+1}^0, j = \overline{0, p_\eta};$$

$$p_i, i = \overline{0, m+1};$$

p_{iv} – такие индексы из $(0, 1, \dots, p_\eta + 1)$, что $\eta_{p_i}^0 = \tau_i^0, i = \overline{0, m+1}; \eta_{p_{iv}}^0 = \xi_{iv}^0, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*$.

Пусть K – подмножество из $(0, 1, \dots, p_\eta + 1)$, при котором

$$\{ \eta_j^0, j \in K \} = \{ t_j^0, j = \overline{1, p_k} \};$$

$$I_j = I_u(\eta_j^0), j \in K; J_i = I_u(\tau_i^0), i \in L_*^R;$$

$$k^{(j)} = (k_\zeta^{(j)}, \zeta \in I) = u_\zeta^0(\eta_j + 0), j = \overline{0, p_\eta}, \zeta \in I.$$

Совокупность моментов

$$\begin{aligned} L, L_*, L_0, L_{*0}, L_{00}, L_{*0}^R, L_{00}^R, L_*^R, \\ K, I_j, j \in K, J_i, i \in L_*^R; \end{aligned} \quad (4.1)$$

чисел и векторов

$$p_i, i \in L; s(i), i \in L_0;$$

$$p_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*; k^{(j)}, j = \overline{0, p_\eta}; \quad (4.2)$$

назовем структурой оптимального управления задачи (1.1).

Совокупность

$$\begin{aligned} \theta^0 = \bar{v}_i^0, i \in L_{*0}; \bar{v}_{iv}^0, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*; \\ \eta_j^0, j = \overline{1, p_\eta}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

назовем определяющими элементами решения задачи (1.1).

Алгоритм составим из двух процедур.

Первая процедура строит приближенное $u^*(\cdot)$ решение задачи (1.1), по которому определяется структура (4.1), (4.2) и вычисляются приближенные значения θ^* определяющих элементов (4.3).

Построение точных значений вектора определяющих элементов осуществляет процедура доводки.

Доводка. Пусть известны структура (4.1), (4.2) задачи и приближенные значения θ^* вектора (4.3). Введем вектор параметров

$$\theta = (\bar{v}_i, i \in L_{*0}; \bar{v}_{iv}, v = \overline{1, q_i}, i \in L_*; \eta_j, j = \overline{1, p_\eta}).$$

Обозначим через $\psi(\theta, t), t \in T$, – решение системы

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \psi(t^*) = c,$$

$$\psi(\eta_{p_i} - 0) = \psi(\eta_{p_i} + 0) + d\bar{v}_i, \quad i \in L_{*0}; \quad (4.4)$$

$$\psi(\eta_{p_v} - 0) = \psi(\eta_{p_v} + 0) + d\bar{v}_i, \quad v = \overline{1, q_i}, \quad i \in L_*,$$

через $\chi(\theta, t)$, $t \in T$, – траекторию системы

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= A(\theta, t)\chi + B(\theta, t)\omega(\theta, t) + G(\theta, t)\dot{\alpha}(t), \\ \chi(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Функции $A(\theta, t)$, $B(\theta, t)$, $G(\theta, t)$, $\omega(\theta, t)$, $t \in T$, строятся следующим образом:

$$A(\theta, t) = A, \quad t \in T_n;$$

$$A(\theta, t) = \left(E - \frac{b_{s(i)}d'}{d'b_{s(i)}} \right) A, \quad t \in T_i, \quad i \in L_0;$$

$$B(\theta, t) = B, \quad t \in T_n;$$

$$B(\theta, t) = \left(E - \frac{b_{s(i)}d'}{d'b_{s(i)}} \right) B, \quad t \in T_i, \quad i \in L_0;$$

$$G(\theta, t) = 0, \quad t \in T_n;$$

$$G(\theta, t) = -\frac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}}, \quad t \in T_i, \quad i \in L_0;$$

$$\omega(\theta, t) = k^{(j)}, \quad t \in [\eta_j, \eta_{j+1}], \quad j = \overline{0, p_n}.$$

Составим систему нелинейных уравнений, используя полученную структуру (4.1), (4.2).

$$G_1(\theta) = (d'\chi(\theta, \eta_{p_i}) - \alpha(\eta_{p_i}), \quad i \in L_{*0}) = 0,$$

$$G_2(\theta) = (d'\chi(\theta, \eta_{p_v}) - \alpha(\eta_{p_v}), \quad v = \overline{1, q_i}, \quad i \in L_{*0}) = 0,$$

$$G_3(\theta) = \left(d'A(\theta, t)\chi(\theta, \eta_{p_i}) + \sum_{\zeta \in I} d'b_{\zeta}k_{\zeta}^{(p_i-1)} - \dot{\alpha}(\eta_{p_i}), \quad i \in L_{*0} \setminus L_{*0}^R \right) = 0,$$

$$G_4(\theta) = \left(d'A(\theta, t)\chi(\theta, \eta_{p_i}) + \sum_{\zeta \in I \setminus s(i-1)} d'b_{\zeta}k_{\zeta}^{(p_i-1)} + d'b_{s(i-1)}k_{s(i-1)}^{(p_i)} - \dot{\alpha}(\eta_{p_i}), \quad i \in L_{*0} \setminus L_{*0}^R \right) = 0,$$

$$G_5(\theta) = \left(d'A(\theta, t)\chi(\theta, \eta_{p_i}) + \sum_{\zeta \in I} d'b_{\zeta}k_{\zeta}^{(p_i)} - \dot{\alpha}(\eta_{p_i}), \quad i \in L_* \setminus L_*^R \right) = 0, \quad (4.6)$$

$$G_6(\theta) = \left(d'A(\theta, t)\chi(\theta, \eta_{p_v}) + \sum_{\zeta \in I} d'b_{\zeta}k_{\zeta}^{(p_v)} - \dot{\alpha}(\eta_{p_v}), \quad v = \overline{1, q_i}, \quad i \in L_{*0} \right) = 0,$$

$$G_7(\theta) = \left(\begin{aligned} &\psi'(\theta, \eta_j)[B(\theta, \eta_j) + A(\theta, \eta_j) + \\ &+ G(\theta, \eta_j)]_{\zeta}, \quad \eta_j \in T_i, \quad i \in L_0; \\ &\psi'(\theta, \eta_j)[B]_{\zeta}, \quad \eta_j \in T_i, \quad i \in L_*; \\ &\zeta \in I_j, \quad j \in K; \end{aligned} \right) = 0,$$

$$G_8(\theta) = \left(\psi'(\eta_{p_i} - 0) \frac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}}, \quad s \in J_i, \quad i \in L_{*0}^R \right) = 0,$$

$$G_9(\theta) = \left(\psi'(\eta_{p_i}) \left(\frac{b_{s(i)}}{d'b_{s(i)}} - \frac{b_{s(i-1)}}{d'b_{s(i-1)}} \right), \quad s \in J_i, \quad i \in L_{*0}^R \right) = 0,$$

$$G_{10}(\theta) = \left(\psi'(\eta_{p_i}) \frac{b_{s(i-1)}}{d'b_{s(i-1)}}, \quad s \in J_i, \quad i \in L_*^R \right) = 0.$$

Здесь $[B]_{\zeta}$ – ζ -столбец матрицы B .

Систему (4.6) назовем уравнениями доводки. Решив её, получим значение вектора определяющих элементов со сколь угодно высокой точностью.

Пусть θ^0 – решение системы (4.6). Построим траектории $\chi^0(t) = \chi(\theta^0, t)$, $\psi^0(t) = \psi(\theta^0, t)$, $t \in T$, систем (4.4), (4.5). Пусть

$$\eta_i^0 < \eta_{i+1}^0, \quad i = \overline{0, p_n}; \quad \eta_0^0 = 0, \quad \eta_{p_n+1}^0 = t^*. \quad (4.7)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} u_{\zeta}^0(t) &= u_{\zeta}(\theta^0, t), \quad \zeta \in I \setminus s(i), \quad t \in [\eta_{p_i}^0, \eta_{p_{i+1}}^0], \quad i = \overline{0, m}; \\ u_{s(i)}^0(t) &= \dot{\alpha}(t) - d'A\chi^0(t) - \sum_{\zeta \in I \setminus s(i)} d'b_{\zeta}u_{\zeta}^0 / d'b, \\ &t \in [\eta_{p_i}^0, \eta_{p_{i+1}}^0], \quad i \in L_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если

$$|u_{s(i)}^0(t)| \leq 1, \quad t \in [\eta_{p_i}^0, \eta_{p_{i+1}}^0], \quad i \in L_0, \quad (4.9)$$

и вдоль ϖ^0 , $\psi^0(t)$, $u^0(t) = (u_{\zeta}^0(t), \zeta \in I)$, $t \in T$,

выполняются соотношения (3.1), то $u^0(t)$, $t \in T$, – оптимальное управление, т. е. процесс решения задачи успешно завершен.

В случае, когда не удалось построить решение системы (4.6) или когда на её решении нарушается одно из соотношений (3.1), (4.7), (4.9), прекращаем процедуру доводки, считая, что начальная информация для неё была некачественная (неправильно идентифицирована структура (4.1), (4.2), либо велико число $\|\theta^* - \theta^0\|$). Возвращаемся к первой части алгоритма, которая строит более точное приближение $u^{**}(\cdot)$ к оптимальному управлению $u^0(\cdot)$. На основе $u^{**}(\cdot)$ уточняем структуру (4.1), (4.2) и вычисляем новое (более точное) значение θ^{**} вектора (4.3). Затем, исходя из новой информации, заново осуществляем процедуру доводки.

5 Пример

В качестве примера рассмотрена задача

$$\begin{aligned} &x_1(t^*) - 2x_2(t^*) \rightarrow \max, \\ \dot{x}_1(t) &= x_2, \quad \dot{x}_2(t) = x_3, \quad \dot{x}_3(t) = x_4, \quad \dot{x}_4(t) = u_1 - u_2, \\ &x_1(t) + x_3(t) \leq 2, 5, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.8, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 6.$$

После выполнения первой процедуры получено приближенное решение задачи (5.1), определена структура S :

$$\begin{aligned} S = \{ & L = 1, L_* = 1, L_0 = 0, L_{*0} = 1, L_{00} = 0, \\ & L_{*0}^R = 1, L_{00}^R = 0, L_*^R = 0, K = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ & I_1 = 2, I_2 = 1, I_3 = 1, I_4 = 2, I_5 = 2, J_1 = 2, \\ & p_1 = 1, s(1) = 2, \\ & k^0 = (-1, 1), k^1 = (-1, 1), k^2 = (1, 1), k^3 = (-1, 1), \\ & k^4 = (1, 1), k^5 = (1, -1), k^6 = (1, 0)\} \end{aligned}$$

и вычислены приближенные значения вектора определяющих элементов θ

$$\theta = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \bar{v}_1\} \quad (5.2)$$

По известной структуре сформирована система нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} G_1(\theta) &= d'\chi(\theta, \eta_3) - \alpha = 0, \\ G_2(\theta) &= \psi'(\theta, \eta_1)b_1 = 0, \\ G_3(\theta) &= \psi'(\theta, \eta_4)b_2 = 0, \\ G_4(\theta) &= \psi'(\theta, \eta_5)b_1 = 0, \\ G_5(\theta) &= \psi'(\theta, \eta_6)b_1 = 0, \\ G_6(\theta) &= \psi'(\theta, \eta_5)b_2 = 0, \\ G_7(\theta) &= \psi'(\theta, \eta_3 - 0)b_2 / d'b_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

относительно вектора θ (5.2). В результате решения системы (5.3) получены значения вектора определяющих элементов с точностью 10^{-10} . После построения траекторий систем (4.4), (4.5) проверено выполнение соотношений (3.1), (4.7), (4.9). Так как они выполняются, то за решение задачи (5.1) принято управление, построенное по правилам (4.8) (рисунок 5.1)

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= -1, t \in [0, \eta_1[, \quad u_1^*(t) = 1, t \in [\eta_1, \eta_5], \\ u_1^*(t) &= -1, t \in [\eta_5, \eta_6[, \quad u_1^*(t) = 1, t \in [\eta_6, t^*], \\ u_2^*(t) &= 1, t \in [0, \eta_2[, \quad u_2^*(t), t \in [\eta_2, \eta_3] \end{aligned}$$

подсчитываются согласно (4.8)

$$\begin{aligned} u_2^*(t) &= -1, t \in [\eta_3, \eta_4[, \quad u_2^*(t) = 1, t \in [\eta_6, t^*], \\ u_2^*(t) &= -1, t \in [\eta_5, \eta_6], \\ \eta_1 &= 0.6675010, \eta_2 = 1.6376353, \\ \eta_3 &= 2.2334522, \eta_4 = 3.6395361, \\ \eta_5 &= 3.9074147, \eta_6 = 5.5142681. \end{aligned}$$

График управления представлен на рисунке 5.1.

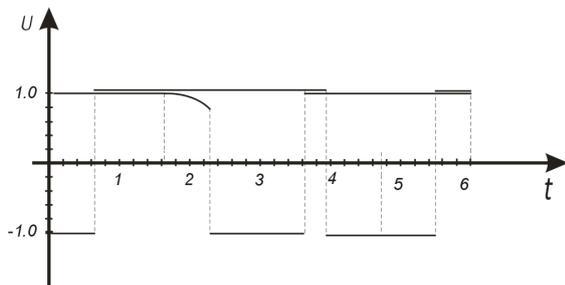


Рисунок 5.1 – Оптимальное управление

ЛИТЕРАТУРА

1. *Математическая теория оптимальных процессов* / Понтрягин Л.С. [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
2. *Дубовицкий, А.Я.* Задачи на экстремум при наличии ограничений / А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 395–453.
3. *Габасов, Р.Ф.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. Р.Ф.Габасов, Ф.М.Кириллова. – Мн.: Изд-во : «Университетское», 1984, – 205с.
4. *Костюкова, О.И.* Конечный алгоритм оптимизации линейной динамической системы со смешанными ограничениями. Мн.: 1990. – 35 с. – (Препринт / АН БССР. Институт математики; 24(424)).
5. *Карасева, Г.Л.* Критерий оптимальности для специальной задачи многомерного управления // Вестник БГУ. Серия 1. – 1997. – № 1. – С. 49–52.
6. *Карасёва, Г.Л.* Критерий оптимальности для задачи управления с негладким критерием качества / Г.Л.Карасёва // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2010. – № 5 (62). – С. 68–72.
7. *Алёшин, Н.А.* Задача оптимального управления с негладким критерием качества как задача ЛП / Н.А. Алёшин, Г.Л. Карасёва // «Наука молодых»: Сборник научных статей по материалам X Всероссийской научно-практической конференции / Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева. – г. Арзамас, 30–31 марта 2017 г. – С. 518–522.
8. *Жогаль, С.П.* Исследование случайных автоколебательных систем с одной степенью свободы методом канонических разложений / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 37–41.
9. *Жогаль, С.П.* О существовании и единственности решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–54.

Поступила в редакцию 15.09.18.

УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ G-СЕТИ С СИГНАЛАМИ И ГРУППОВЫМ УДАЛЕНИЕМ ЗАЯВОК МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

INVESTIGATION IN NON-STATIONARY MODE OF G-NETWORK WITH SIGNAL AND GROUP REMOVAL CUSTOMERS BY SUCCESSIVE APPROXIMATION METHOD

D.Y. Kopats, M.A. Matalytski

Y. Kupala Grodno State University

Проведено исследование в переходном режиме G-сети с положительными заявками и сигналами, когда они при поступлении в систему перемещают заявку в другую систему или уничтожают в ней группу положительных заявок, уменьшая их число на случайную величину, которая задается некоторым распределением вероятностей. Сигнал, поступающий в систему, в которой отсутствуют положительные заявки, не оказывает на сеть массового обслуживания никакого влияния и сразу исчезает из нее. Потоки положительных заявок и сигналов, поступающих в каждую из систем сети, являются независимыми. Для нестационарных вероятностей состояний сети выведена система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова. Предложена методика их нахождения, основанная на использовании модифицированного метода последовательных приближений, совмещенным с методом рядов. Рассмотрены свойства последовательных приближений.

Ключевые слова: марковская G-сеть, положительные и отрицательные заявки, сигналы, групповое удаление, переходный режим, нестационарные вероятности состояний.

A study was conducted in the G-network transition mode with positive customers and signals, when they move the customers to another system or destroy a group of positive customers in it, reducing their number by a random amount, which is specified by some probability distribution. A signal arriving at a system in which there are no positive applications does not have any influence on the queuing network and immediately disappears from it. Streams of positive applications and signals coming to each of the network systems are independent. For nonstationary probabilities of network states, a system of Kolmogorov difference-differential equations is derived. A method for finding them is proposed. It is based on the use of a modified method of successive approximations, combined with the method of series. The properties of successive approximations are considered.

Keywords: Markov G-network, positive and negative customers, signals, group removal, non-stationary mode, non-stationary state probability.

1 Описание сети. Постановка задачи

Рассмотрим открытую G-сеть массового обслуживания [1] с n однолинейными системами массового обслуживания (СМО). В i -ю СМО из внешней среды поступает простейший поток обычных заявок (положительных) с интенсивностью λ_{0i}^+ и дополнительный поток сигналов, который также является простейшим с интенсивностью $\lambda_{0i}^{(c)}$, $i = \overline{1, n}$. Все поступающие потоки независимы. Длительности обслуживания положительных заявок в i -й СМО распределены экспоненциально с параметром μ_i , $i = \overline{1, n}$. После окончания обслуживания положительной заявки в i -й СМО, она направляется в j -ю СМО с вероятностью p_{ij}^+ опять как положительная заявка, а с вероятностью p_{ij}^- как сигнал, и с вероятностью

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-) \text{ уходит из сети, } i, j = \overline{1, n}.$$

Если в некоторый момент времени в i -й СМО находится $k_i \geq B_i$ положительных заявок, где B_i – целочисленная случайная величина, то при поступлении в эту систему сигнала, действующего как отрицательная заявка в эту систему, число положительных заявок в ней уменьшается на B_i (уничтожается сразу B_i положительных заявок). Если $k_i < B_i$, то в i -ой СМО не остаётся заявок. Случайная величина B_i определяет максимальный размер уничтожаемой группы заявок в i -й СМО и подчиняется произвольному дискретному закону распределения:

$$P\{B_i = m\} = \pi_{im}, \quad m \geq 1; \quad \pi_{i0} = 0, \quad m \leq 0.$$

В сети циркулируют не только положительные заявки, но и сигналы [2]. Сигнал, поступающий в i -ю СМО, в которой нет положительных заявок, уходит из сети, не оказывая на неё никакого влияния. В противном случае, когда в нее поступает сигнал, то могут произойти следующие события: поступающий сигнал мгновенно

перемещает положительную заявку из i -й СМО в j -ю СМО с вероятностью q_{ij} , в этом случае сигнал называют триггером; или с вероятностью

$$q_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n q_{ij}$$

сигнал сбрасывает как отрицательная заявка и уничтожает в i -й СМО группу положительных заявок [3]. Исследование аналогичной сети в переходном режиме, когда отрицательная заявка уничтожает только одну положительную, описано в [4].

Под состоянием рассматриваемой сети в момент времени t будем понимать вектор $\vec{k}(t) = (\vec{k}, t) = ((k_1, t), (k_2, t), \dots, (k_n, t))$, который образует марковский случайный процесс со счетным числом состояний, где состояние (k_i, t) означает, что в момент времени t в i -й СМО находятся k_i положительных заявок, $i = \overline{1, n}$.

Требуется найти вероятности состояний сети в переходном режиме. Ранее для их нахождения для других сетей МО применялся метод, основанный на использовании аппарата многомерных производящих функций, но сети должны были функционировать в условиях высокой нагрузки [4], [5]; в описанных ниже результатах это ограничение снято.

2 Система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний сети

Введем некоторые обозначения. Пусть I_i – нулевой вектор размерности n , за исключением компоненты с номером i , которая равна 1; $P(\vec{k}, t)$ – вероятность состояния сети \vec{k} в момент времени t ; $u(x)$ – единичная функция Хевисайда,

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Возможны следующие переходы случайного марковского процесса $\vec{k}(t)$ в состоянии (\vec{k}, t) за время Δt :

– из состояния $(\vec{k} - I_i, t)$, в этом случае в i -ю СМО за время Δt поступит положительная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^+ u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$;

– из состояния $(\vec{k} + I_i, t)$, при этом положительная заявка уходит из сети во внешнюю среду или переходит в j -ю СМО как сигнал, если в ней не было заявок; вероятность такого события равна $(\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{ij}^- (1 - u(k_j))) \Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1, n}$;

– из состояния $(\vec{k} + I_i - I_j, t)$, в данном случае после окончания обслуживания положительной заявки в i -й СМО она направляется в j -ю СМО снова как положительная заявка или поступивший в i -ю СМО сигнал мгновенно перемещает положительную заявку из системы i -й

СМО в j -ю СМО; вероятность этого события равна $(\mu_i p_{ij}^+ + \lambda_{0i}^{(c)} q_{ij}) u(k_j) \Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1, n}$;

– из состояния $(\vec{k} + I_i + I_j - I_s, t)$, в этом случае после окончания обслуживания заявки в i -й СМО, она направляется в j -ю СМО как сигнал, который мгновенно перемещает положительную заявку из j -й СМО в СМО с номером s ; вероятность такого события равна

$$\mu_i p_{ij}^- q_{js} u(k_s) \Delta t + o(\Delta t), \quad i, j, s = \overline{1, n};$$

– из состояния $(\vec{k} + m I_i, t)$, в данном случае сигнал извне поступает в i -ю СМО и уничтожает в ней группу положительных заявок величиной m ; вероятность такого события равна

$$\lambda_{0i}^{(c)} q_{i0} \pi_{im} \Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n};$$

– из состояния $(\vec{k} + l_i I_i, t), k_i = 0$, в данном случае сигнал извне поступает в i -ю СМО, в которой в момент времени t находится l_i положительных заявок, а количество заявок выбранных для уничтожения m , причём $l_i < m$; вероятность такого события равна $\lambda_{0i}^{(c)} q_{i0} \pi_{im} \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$;

– из состояний $(\vec{k} + I_i + m I_j, t)$, в этом случае после окончания обслуживания заявки в i -й СМО, она направляется в j -ю СМО как сигнал, который уничтожает в ней случайную группу положительных заявок; вероятность такого события равна $\mu_i p_{ij}^- q_{j0} \pi_{jm} \Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1, n}$;

– из состояний $(\vec{k} + I_i + l_j I_j, t), k_j = 0$, в этом случае после окончания обслуживания заявки в i -й СМО, она направляется в j -ю СМО как сигнал, в которой в момент времени t находится l_j положительных заявок, а количество заявок выбранных для уничтожения m , причём $l_j < m$, который уничтожает в ней случайную группу положительных заявок; вероятность такого события равна $\mu_i p_{ij}^- q_{j0} \pi_{jm} \Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1, n}$;

– из состояния (\vec{k}, t) , при этом за время Δt состояние сети не изменилось. Это может быть по следующим причинам: в каждую СМО S_i за время Δt не поступают ни положительные заявки, ни сигналы; сигнал, который попадает в любую из систем сети застаёт систему пустой; в них за время Δt не обслужилось ни одной положительной заявки; вероятность этого события равна

$$1 + \left(- \sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^{(c)} + \mu_i u(k_i)] + \lambda_{0i}^{(c)} (1 - u(k_i)) \right) \Delta t + o(\Delta t);$$

– из остальных состояний с вероятностью $o(\Delta t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности, получим, что нестационарные вероятности состояний, рассматриваемой в данном случае

сети удовлетворяют следующей системе разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{k}, t)}{dt} = & \left[-\sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^{(c)} + \mu_i u(k_i)] + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^{(c)} (1 - u(k_i)) \right] P(\vec{k}, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^+ u(k_i) P(\vec{k} - I_i, t) + \right. \\ & \left. + \mu_i \left(p_{i0} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^- (1 - u(k_j)) \right) P(\vec{k} + I_i, t) + \right. \\ & \left. + \lambda_{0i}^{(c)} q_{i0} \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{im} P(\vec{k} + mI_i, t) + \right. \\ & \left. + \lambda_{0i}^{(c)} q_{i0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=1}^{m-1} \pi_{im} P(\vec{k} + l_j I_i, t) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \left\{ \left(\mu_i p_{ij}^+ + \lambda_{0i}^{(c)} q_{ij} \right) u(k_j) P(\vec{k} + I_i - I_j, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_i p_{ij}^- q_{j0} \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{jm} P(\vec{k} + I_i + mI_j, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_i p_{ij}^- q_{j0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=1}^{m-1} \pi_{jm} P(\vec{k} + I_i + l_j I_j, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{s=1}^n \mu_i p_{ij}^- q_{js} u(k_s) P(\vec{k} + I_i + I_j - I_s, t) \right\} \right]. \quad (2.1) \end{aligned}$$

3 Нахождение вероятностей состояний сети

Можно показать, что систему РДУ (2.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{k}, t)}{dt} = & \Lambda(\vec{k}) P(\vec{k}, t) + \\ & + \sum_{i,j=0}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=-1}^{m-1} \Phi_{ijml_j}(\vec{k}) P(\vec{k} + I_i + l_j I_j, t) + \\ & + \sum_{i,j,s=1}^n \Phi_{ijs}(\vec{k}) P(\vec{k} + I_i + I_j - I_s, t), \quad (3.1) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{k}) = & -\sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^{(c)} + \mu_i u(k_i)] + \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^{(c)} (1 - u(k_i)), \\ \Phi_{ijs}(\vec{k}) = & \mu_i p_{ij}^- q_{js} u(k_s), \\ \Phi_{ijml_j}(\vec{k}) = & \delta_{r-1} \delta_{m1} \left[(\delta_{i0} \lambda_{0j}^+ u(k_j)) + \right. \\ & \left. + \delta_{j0} \mu_i \left(\frac{1}{n} p_{i0} + p_{ij}^- \delta_{k_j,0} (1 - q_{j0}) \right) + \right. \\ & \left. + (1 - \delta_{ij}) (\mu_i p_{ij}^+ + \lambda_{0i}^{(1)} q_{ij}) u(k_j) (1 - \delta_{i0}) (1 - \delta_{j0}) \right] + \\ & + \delta_{i,m} (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} q_{j0} + \mu_i p_{ij}^- q_{j0}) \pi_{jm} + \\ & + u(r+1) (1 - \delta_{rm}) (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} + \mu_i p_{ij}^-) q_{j0} \delta_{k_j,0} \pi_{jm} \end{aligned}$$

– интегрируемые по t функции, δ_{ij} – символ Кронекера.

Исследуем ряд $\sum_{i,j=0}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=-1}^{m-1} \Phi_{ijml_j}(\vec{k})$ на сходимость.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=-1}^{m-1} \Phi_{ijml_j}(\vec{k}) = & \sum_{i,j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=-1}^{m-1} \delta_{l_j-1} \delta_{m1} \left[(\delta_{i0} \lambda_{0j}^+ u(k_j)) + \right. \\ & \left. + \delta_{j0} \mu_i \left(\frac{1}{n} p_{i0} + p_{ij}^- \delta_{k_j,0} (1 - q_{j0}) \right) + \right. \\ & \left. + (1 - \delta_{ij}) (\mu_i p_{ij}^+ + \lambda_{0i}^{(1)} q_{ij}) u(k_j) (1 - \delta_{i0}) (1 - \delta_{j0}) \right] + \\ & + \delta_{rm} (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} q_{j0} + \mu_i p_{ij}^- q_{j0}) \pi_{jm} + \\ & + u(r+1) (1 - \delta_{rm}) (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} + \mu_i p_{ij}^-) q_{j0} \delta_{k_j,0} \pi_{jm} \leq \\ & \leq \sum_{i,j=1}^n \left[(\delta_{i0} \lambda_{0j}^+ u(k_j)) + \right. \\ & \left. + \delta_{j0} \mu_i \left(\frac{1}{n} p_{i0} + p_{ij}^- \delta_{k_j,0} (1 - q_{j0}) \right) + \right. \\ & \left. + (\mu_i p_{ij}^+ + \lambda_{0i}^{(1)} q_{ij}) u(k_j) (1 - \delta_{i0}) (1 - \delta_{j0}) \right] + \\ & \sum_{i,j=1}^n (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} q_{j0} + \mu_i p_{ij}^- q_{ij}) \sum_{m=1}^{\infty} \pi_{jm} + \\ & + \sum_{i,j=0}^n (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} + \mu_i p_{ij}^-) q_{j0} \delta_{k_j,0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=0}^{m-1} \pi_{jm} \leq \\ & \leq \sum_{i,j=1}^n \left[(\delta_{i0} \lambda_{0j}^+ u(k_j)) + \right. \\ & \left. + \delta_{j0} \mu_i \left(\frac{1}{n} p_{i0} + p_{ij}^- \delta_{k_j,0} (1 - q_{j0}) \right) + \right. \\ & \left. + (\mu_i p_{ij}^+ + \lambda_{0i}^{(1)} q_{ij}) u(k_j) (1 - \delta_{i0}) (1 - \delta_{j0}) \right] + \\ & \sum_{i,j=1}^n (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} q_{j0} + \mu_i p_{ij}^- q_{ij}) + \\ & + \sum_{i,j=0}^n (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} + \mu_i p_{ij}^-) q_{j0} \delta_{k_j,0} \sum_{m=1}^{\infty} m \pi_{jm} = \\ & = \sum_{i,j=1}^n \left[(\delta_{i0} \lambda_{0j}^+ u(k_j)) + \right. \\ & \left. + \delta_{j0} \mu_i \left(\frac{1}{n} p_{i0} + p_{ij}^- \delta_{k_j,0} (1 - q_{j0}) \right) + \right. \\ & \left. + (\mu_i p_{ij}^+ + \lambda_{0i}^{(1)} q_{ij}) u(k_j) (1 - \delta_{i0}) (1 - \delta_{j0}) \right] + \\ & \sum_{i,j=1}^n (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} q_{j0} + \mu_i p_{ij}^- q_{ij}) + \\ & + \sum_{i,j=0}^n (\delta_{i0} \lambda_{0j}^{(1)} + \mu_i p_{ij}^-) q_{j0} \delta_{k_j,0} b_i. \end{aligned}$$

Отсюда следует сходимость ряда.

Из (3.1) следует, что

$$P(k, t) = e^{-\Lambda(\vec{k})t} \left\{ P(\vec{k}, 0) + \right.$$

$$+ \int_0^t e^{\Lambda(\bar{k})x} \left(\sum_{i,j=0}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=-1}^{m-1} \Phi_{ijml_j}(\bar{k}) P(k + I_i + l_j I_j, t) + \sum_{i,j,s=1}^n \Phi_{ijs}(\bar{k}) P(\bar{k} + I_i + I_j - I_s, x) \right) dx \}. \quad (3.2)$$

Пусть $P_q(\bar{k}, t)$ – приближение $P(\bar{k}, t)$ на q -й итерации, $P_{q+1}(\bar{k}, t)$ – решение системы (3.1), полученное методом последовательных приближений. Тогда из (3.2) вытекает, что

$$P_{q+1}(\bar{k}, t) = e^{-\Lambda(\bar{k})t} \left\{ P_q(k, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\bar{k})x} \left(\sum_{i,j=0}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=-1}^{m-1} \Phi_{ijml_j}(\bar{k}) P_q(k + I_i + l_j I_j, t) + \sum_{i,j,s=1}^n \Phi_{ijs}(\bar{k}) P_q(k + I_i + I_j - I_s, x) \right) dx \right\}. \quad (3.3)$$

В качестве начального приближения возьмём стационарное распределение

$$P_0(\bar{k}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\bar{k}, t),$$

которое удовлетворяет соотношению

$$\Lambda(\bar{k})P(\bar{k}) = \sum_{i,j=0}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=-1}^{m-1} \Phi_{ijml_j}(\bar{k}) P(\bar{k} + I_i + l_j I_j) + \sum_{i,j,s=1}^n \Phi_{ijs}(\bar{k}) P(\bar{k} + I_i + I_j - I_s). \quad (3.4)$$

Для последовательных приближений справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Последовательные приближения $P_q(\bar{k}, t), q = 0, 1, 2, \dots$, сходятся при $t \rightarrow \infty$ к стационарному решению системы уравнений (3.1).*

Теорема 3.2. *Последовательность $\{P_q(\bar{k}, t)\}, q = 0, 1, 2, \dots$, построенная по схеме (3.3), при любом ограниченном по t нулевом приближении $P_0(\bar{k}, t)$ сходится при $q \rightarrow \infty$ к единственному решению системы (3.1).*

Доказательство этих теорем проводится аналогично как в [6].

Теорема 3.3. *Любое приближение $P_q(\bar{k}, t), q \geq 1$, представимо в виде сходящегося степенного ряда*

$$P_q(\bar{k}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} d_{ql}(\bar{k}) t^l, \quad (3.5)$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$d_{q+l}(\bar{k}) = \frac{-\Lambda(\bar{k})^l}{l!} \times \left\{ P(\bar{k}, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\bar{k})^{u+1}} D_{qu}(\bar{k}) \right\}, l \geq 0, \quad (3.6)$$

$$d_{q0}(\bar{k}) = P(\bar{k}, 0), d_{0l}(\bar{k}) = P(\bar{k}, 0) \delta_{l0},$$

$$D_{ql}(\bar{k}) = \sum_{i,j=0}^n \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=-1}^{m-1} \Phi_{ijml_j}(\bar{k}) d_{ql}(\bar{k} + I_i + l_j I_j) + \sum_{s=1}^n \Phi_{ijs}(\bar{k}) d_{ql}(\bar{k} + I_i + I_j - I_s) \right].$$

Доказательство. Докажем, что коэффициенты степенного ряда (3.5) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (3.6). Подставим последовательные приближения (3.5) в (3.3). Тогда, учитывая, что

$$e^{-\Lambda(\bar{k})t} \int_0^t e^{\Lambda(\bar{k})x} x^l dx = \left[\frac{1}{\Lambda(\bar{k})} \right]^{l+1} l! \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\bar{k})]^j}{j!}, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

получим

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_{ql}(\bar{k}) t^l = e^{-\Lambda(\bar{k})t} P(\bar{k}, 0) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i,j=0}^n \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l_j=-1}^{m-1} \Phi_{ijml_j}(\bar{k}) d_{ql}(\bar{k} + I_i + l_j I_j) + \sum_{s=1}^n \Phi_{ijs}(\bar{k}) d_{ql}(\bar{k} + I_i + I_j - I_s) \right] \times \left[\frac{1}{\Lambda(\bar{k})} \right]^{l+1} l! \sum_{u=l+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\bar{k})]^u}{u!}.$$

Используя обозначения (3.6), этот ряд можно переписать в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_{ql}(\bar{k}) t^l = e^{-\Lambda(\bar{k})t} P(\bar{k}, 0) + \sum_{l=0}^{\infty} D_{ql}(\bar{k}) \left[\frac{1}{\Lambda(\bar{k})} \right]^{l+1} l! \sum_{u=l+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\bar{k})]^u}{u!} t^u.$$

Поменяв местами индексы суммирования и разлагая $e^{-\Lambda(\bar{k})t}$ в ряд по степеням t , будем иметь

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_{ql}(\bar{k}) t^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\bar{k})]^l}{l!} \times \left\{ P(\bar{k}, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\bar{k})^{u+1}} D_{qu}(\bar{k}) \right\} t^l. \quad (3.7)$$

Приравнявая в левой и правой части выражения (3.7) коэффициенты при t^l , получим соотношения (3.6) для коэффициентов ряда (3.5).

При нахождении радиуса сходимости $R_q(\bar{k})$ степенного ряда (3.5) использовалась известная формула Коши-Адамара [7]

$$R_q(\bar{k}) = \left[\lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{d_{ql}^+(\bar{k})} \right]^{-1}.$$

Заключение

В работе проведено исследование марковской G -сети массового обслуживания с сигналами в случае, когда отрицательная заявка может

уничтожать группу положительных заявок. Для такой сети предложен модифицированный метод последовательных приближений, совмещённый с методом рядов, для нахождения нестационарных вероятностей состояний. Последовательные приближения сходятся с течением времени к стационарным вероятностям состояний, а сама последовательность приближений сходится единственному решению полученной для вероятностей состояний системы уравнений Колмогорова. Любое последовательное приближение представимо в виде сходящегося степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости, коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям, что позволяет находить их на компьютере за приемлемое процессорное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe, E.* Product form queueing networks with negative and positive customers / *E. Gelenbe* // *Journal of Applied Probability*. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.
2. *Gelenbe, E.* G-networks with triggered customer movement / *E. Gelenbe* // *Journal of Applied Probability*. – 1993. – Vol. 30. – P. 742–748.

3. *Gelenbe, E.* G-networks with signals and batch removal / *E. Gelenbe* // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. – 1993. – Vol. 7. – P. 335–342.

4. *Матальцкий М.А.* Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок / *М.А. Матальцкий, В.В. Науменко*. – Гродно: ГрГУ, 2016. – 348 с.

5. *Matalytski, M.* Investigation of G-network with signals at transient behavior / *M. Matalytski, V. Naumenko* // *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. – 2014. – Vol. 13, № 1. – P. 75–86.

6. *Копать, Д.Я.* Анализ сети с положительными и отрицательными заявками различных типов в переходном режиме / *Д.Я. Копать, М.А. Матальцкий* // *Вестник ГрГУ. Серия 2*. – 2017. – № 3. – С. 150–162.

7. *Кудрявцев, Л.Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / *Л.Д. Кудрявцев*. – Москва: Высшая школа, 2006. – Т. 2. – 720 с.

Поступила в редакцию 04.09.18.

О ПРОБЛЕМЕ ДЁРКА – ХОУКСА ДЛЯ ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

А.В. Марцинкевич

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

ON THE PROBLEM OF DOERK AND HAWKES FOR LOCALLY NORMAL FITTING CLASSES

A.V. Martsinkevich

P.M. Masherov Vitebsk State University

Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга конечных групп. Класс Фиттинга \mathfrak{F} называют \mathfrak{X} -нормальным или нормальным в классе конечных групп \mathfrak{X} , если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её \mathfrak{F} -радикал является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой группы G . Если \mathfrak{X} – класс всех конечных разрешимых групп, то \mathfrak{X} -нормальный класс Фиттинга называют нормальным. В теории нормальных классов Фиттинга известна проблема Дёрка – Хоукса о том, что если \mathfrak{X} – класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$, то является ли пересечение двух неединичных \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга неединичным \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга. В работе получено положительное решение данной проблемы без требования $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$ для произвольного семейства неединичных \mathfrak{X} -нормальных классов Фишера частично разрешимых групп в случае, когда \mathfrak{X} – класс Фишера такой, что $\mathfrak{N}_p \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ для некоторого простого p .

Ключевые слова: класс Фиттинга, \mathfrak{X} -нормальный класс Фиттинга, \mathfrak{F} -радикал, пересечение классов Фиттинга.

Let \mathfrak{F} be a non-empty class of finite groups. A Fitting class \mathfrak{F} is said to be \mathfrak{X} -normal or normal in a class of finite groups \mathfrak{X} if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ and for all $G \in \mathfrak{X}$ an \mathfrak{F} -radical of G is \mathfrak{F} -maximal in G . If \mathfrak{X} is a class of all soluble finite groups, then \mathfrak{X} -normal Fitting class is called normal. In the theory of normal Fitting classes the problem of Doerk and Hawkes is well known. Let \mathfrak{X} be a Fitting class and $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$. Is the intersection of two non-trivial \mathfrak{X} -normal Fitting classes always non-trivial \mathfrak{X} -normal Fitting class? In this paper a positive answer to this question without the requirement that $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$ for the case of arbitrary family of non-trivial \mathfrak{X} -normal Fischer classes partially soluble groups, where \mathfrak{X} is a Fischer class such, that $\mathfrak{N}_p \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ for some prime p is given.

Keywords: Fitting class, \mathfrak{X} -normal Fitting class, \mathfrak{F} -radical, intersection of Fitting classes.

Введение

В работе все рассматриваемые группы конечны. Класс групп \mathfrak{F} называют *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Из определения класса Фиттинга следует, что для любого непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} в каждой группе G существует наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа, которую обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Её называют *\mathfrak{F} -радикалом G* . Подгруппу H группы G называют *\mathfrak{F} -максимальной в G* , если $H \in \mathfrak{F}$ и из условия $H \leq K \leq G$, $K \in \mathfrak{F}$ следует, что $H = K$.

Напомним, что *\mathfrak{F} -инъектором* группы G называют такую её подгруппу V , что для любой субнормальной подгруппы N группы G пересечение $V \cap N$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой N .

Класс Фиттинга \mathfrak{F} называют нормальным [1, определение 1.1], если для любой разрешимой

группы G её \mathfrak{F} -инъектор является нормальной подгруппой G , т. е. для любой разрешимой группы её \mathfrak{F} -радикал является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой G .

Основополагающий результат в теории нормальных классов Фиттинга был получен Блессенолем и Гашюцом [1, теорема 6.2] о том, что пересечение всех неединичных нормальных классов Фиттинга есть неединичный нормальный класс Фиттинга. Из теоремы следует, что существует наименьший неединичный нормальный класс Фиттинга. Значимость понятия нормального класса Фиттинга подчеркивает тот факт, что, используя наименьший нормальный класс Фиттинга, Гашюц в работе [2] выявил новые свойства разрешимых радикалов произвольных групп.

В последующем Лауэ [3], развивая теорию нормальных классов Фиттинга в общем случае неразрешимых групп, была предложена локализация понятия свойства нормальности классов Фиттинга в смысле следующего определения.

Определение 0.1 [3, определение 1.1]. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга. Класс \mathfrak{F} назовем \mathfrak{X} -нормальным или нормальным в классе групп \mathfrak{X} (обозначают $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её \mathfrak{F} -радикал является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой G . Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, где \mathfrak{S} – класс всех разрешимых групп, \mathfrak{F} является нормальным в смысле определения Блессеноля – Гашюца из [1].

Напомним, что классом Фишера называют класс Фиттинга \mathfrak{F} , если из того, что $K \trianglelefteq G$, $G \in \mathfrak{F}$, $K \leq H \leq G$ и H/K – p -группа для некоторого простого p , следует $H \in \mathfrak{F}$.

Класс групп \mathfrak{F} называют гомоморфом, если из условия $G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq G$ следует $G/K \in \mathfrak{F}$.

Произведением классов Фиттинга \mathfrak{F} и \mathfrak{H} называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [4, теорема IX.1.12 (a), (c)].

Пусть \mathfrak{F} – класс групп и $\sigma(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей всех групп из \mathfrak{F} . Тогда символом $\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$ будем обозначать класс всех $\sigma(\mathfrak{F})$ -разрешимых групп.

В работе [5] нами было получено развитие теоремы Блессеноля – Гашюца [1, теорема 6.2] для произвольных классов Фиттинга. Пусть \mathfrak{X} – класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – множество \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга, которые являются гомоморфами, и $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Было установлено [5], что если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то \mathfrak{F} является \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга. Понятно, что теорема Блессеноля – Гашюца является специальным случаем указанной теоремы при $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$.

Заметим, что в работе [1] (см. также [4, глава X.3]) изучались пересечения неединичных нормальных классов Фиттинга. Однако, как показывает следующий пример, не всегда пересечение неединичных нормальных классов Фиттинга будет неединичным классом Фиттинга.

Символом \mathfrak{N}_p будем обозначать класс всех p -групп (p – простое число), (1) – класс всех единичных групп.

Пример 0.2 [6, замечание 3.1.12]. Пусть \mathbb{N} – множество всех натуральных чисел, $\{p_1, p_2, \dots\}$ – множество всех простых чисел и $\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{N}_{p_i} \dots \mathfrak{N}_{p_i}$. Как установлено в [6] $\mathfrak{F}_k = \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i \geq k} \mathfrak{N}_{p_i} \dots \mathfrak{N}_{p_i}$ – \mathfrak{X} -нормальный класс Фиттинга для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_k = (1)$.

Очевидно, что в примере 0.2 $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$. В связи с этим, Дёрком и Хоуксом была сформулирована следующая проблема.

Проблема 0.3 [4, с. 716]. Пусть \mathfrak{X} – класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$. Является ли пересечение двух неединичных \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга неединичным \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга? В частности, верно ли это для случая $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, где \mathfrak{E} – класс всех групп?

Пример 0.2 показывает, что если $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$, то проблема Дёрка – Хоукса в общем случае решается отрицательно. Это приводит к постановке задачи нахождения семейств классов Фиттинга, для которых проблема 0.3 решается положительно без условия $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$. Решение такой задачи – основной результат настоящей работы.

Нами определены условия, при которых указанная проблема 0.3 решается положительно даже в случае, когда $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$ в универсуме обобщенно разрешимых групп. Доказана

Теорема 0.4. Пусть \mathfrak{X} – класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – семейство неединичных \mathfrak{X} -нормальных классов Фишера, $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{N}_p \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ для некоторого простого числа p . Если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то \mathfrak{F} является неединичным \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга.

1 Предварительные сведения

В определениях и обозначениях мы следуем [4]. Приведем некоторые основные понятия и в качестве лемм известные утверждения, которые мы будем использовать для описания методов построения локально нормальных классов Фиттинга и доказательства основного результата.

Лемма 1.1 [4, лемма A.1.2 (a)]. Пусть U, V и W – подгруппы группы G . Тогда $U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W)$ эквивалентно $UV \cap UW = U(V \cap W)$.

Лемма 1.2 [4, лемма IX.1.1 (a)]. Пусть G – группа, \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга. Если $N \trianglelefteq G$, то $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\pi \in \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

Напомним, что если \mathfrak{F} – класс групп и G – группа, то $\sigma(G) = \{p : p \in \mathbb{P} \text{ и } p || G\}$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup \{\sigma(F) : F \in \mathfrak{F}\}$.

Символом \mathfrak{S}^{π} будем обозначать класс всех π -разрешимых групп.

Приведем вначале следующие леммы, которые представляют свойства \mathfrak{F} -инъектора группы G .

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) [7, теорема A(1)] если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то в G существует \mathfrak{F} -инъектор и любые два \mathfrak{F} -инъектора сопряжены в G ;

(2) [8, теорема 2.4.27] если G – группа такая, что $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}$, то в G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены в G .

Мы используем следующую модификацию теорем Шеметкова [9].

Лемма 1.4. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга, G – π -разрешимая группа, где $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Справедливы следующие утверждения:

(1) [9, теорема 2.2] группа G обладает по крайней мере одним \mathfrak{F} -инъектором и любые два \mathfrak{F} -инъектора сопряжены в G ;

(2) [9, теорема 2.3(1)] если V – \mathfrak{F} -инъектор G и $V \leq R \leq G$, то V – \mathfrak{F} -инъектор R .

Лемма 1.5. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга, тогда справедливы следующие утверждения:

(1) [4, замечание IX.1.3 (a)] если K – субнормальная подгруппа группы G и V – \mathfrak{F} -инъектор G , то $V \cap K$ – \mathfrak{F} -инъектор K ;

(2) [4, замечание IX.1.3 (b)] если V – \mathfrak{F} -инъектор G и $\alpha: G \rightarrow G^\alpha$ – изоморфизм, то V^α – \mathfrak{F} -инъектор G^α ;

(3) [10, теорема 2.5.11] если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$ и V – \mathfrak{F} -инъектор G , причем U – подгруппа G , содержащая V , то V – \mathfrak{F} -инъектор U .

Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} через \mathfrak{F}^* обозначают наименьший из классов Фиттинга, содержащий \mathfrak{F} , такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Если класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, то класс Фиттинга \mathfrak{F} называют классом Локетта [11].

Через $G \wr H$ мы будем обозначать регулярное сплетение групп G и H , через G^\natural – базисную группу $G \wr H$.

Лемма 1.6 [4, предложение X.2.1 (a)]. Пусть \mathfrak{F} – класс Локетта и группа $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $(G \wr H)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^\natural$ для любой группы H .

Используемые нами в дальнейшем свойства операторов Локетта, представляет следующая лемма.

Лемма 1.7. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга.

(1) [4, лемма X.1.3] Если группа $G \in \mathfrak{F}^*$, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ – абелева группа.

(2) [4, теорема X.1.15] $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга. Тогда символом $R(\mathfrak{F})$ обозначим класс всех групп G , в которых $G_{\mathfrak{F}}$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой G , символом Z_p – циклическую группу простого порядка p .

Если \mathfrak{X} – класс групп, то $S_n \mathfrak{X} = (G : G \trianglelefteq H$ для некоторой $H \in \mathfrak{X}$). Класс \mathfrak{X} называется

замкнутым относительно субнормальных подгрупп, если $S_n \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Лемма 1.8 [6, лемма 3.1.6 (a)]. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга, \mathfrak{X} – класс, замкнутый относительно субнормальных подгрупп такой, что $\mathfrak{X} \not\subseteq R(\mathfrak{F})$. Если G – разрешимая группа минимального порядка такая, что $G \in \mathfrak{X} \setminus R(\mathfrak{F})$, и V – \mathfrak{F} -инъектор G , то в G существует единственная максимальная нормальная подгруппа N такая, что $G = VN$, $V \cap N = G_{\mathfrak{F}}$ и $V/G_{\mathfrak{F}} \cong Z_p$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$.

Напомним, что подгруппа H группы G называется π -холловой подгруппой, если $|H|$ является π -числом, а индекс $|G : H|$ – π' -числом.

Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и $\pi \in \mathbb{P}$. Для построения \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга мы будем использовать конструкцию класса Фиттинга \mathfrak{F}^π , которая была определена Локеттом в [12] следующим образом: разрешимая группа $G \in \mathfrak{F}^\pi$ тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} -инъектор G содержит некоторую холлову π -подгруппу G . В частности, если $\pi = \{p\}$, то класс $\mathfrak{F}^{\{p\}}$ будем обозначать \mathfrak{F}^p .

Характеристикой класса групп \mathfrak{F} называется множество $\text{Char}(\mathfrak{F}) = \{p \in \mathbb{P} : Z_p \in \mathfrak{F}\}$.

Лемма 1.9 [12, теорема 3.2]. Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} – классы Фиттинга разрешимых групп, G – разрешимая группа и $\pi = \text{Char}(\mathfrak{Y})$. Пусть группа T – \mathfrak{X} -инъектор G_{x^π} такая, что T нормализуется некоторой холловой π -подгруппой G_π группы G . Если V/T – \mathfrak{Y} -инъектор TG_π/T , то V – $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ -инъектор G . В частности, если $\text{Char}(\mathfrak{Y}) = \mathbb{P}$ и U/G_x – \mathfrak{Y} -инъектор G/G_x , то U – $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ -инъектор группы G .

Лемма 1.10 [13, лемма 2.2]. Если \mathfrak{F} – класс Фишера, то $\sigma(\mathfrak{F}) = \text{Char}(\mathfrak{F})$.

Лемма 1.11 [4, предложение X.1.25]. Каждый класс Фишера является классом Локетта.

2 О методах построения \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга

В настоящем разделе мы докажем ряд утверждений, которые описывают методы построения \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга.

Заметим, что для класса групп \mathfrak{X} , в котором существуют \mathfrak{F} -инъекторы, ввиду [7, лемма 2.2 (1), (2)] понятие \mathfrak{X} -нормальности (см. определение 0.1) совпадает с понятием \mathfrak{X} -нормальности в смысле следующего определения.

Определение 2.1. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга. Класс \mathfrak{F} называют \mathfrak{X} -нормальным

или нормальным в классе групп \mathfrak{X} , если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её \mathfrak{F} -инъекторы являются нормальными подгруппами G .

Символом \mathfrak{N} будем обозначать класс всех нильпотентных групп.

Предложение 2.2. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}^*$, то $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{F}^*$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Очевидно, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Тогда $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{S}$, то $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}$ и по утверждению (2) леммы 1.3 в G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены в G . Пусть V – \mathfrak{F} -инъектор группы G , то $V/G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G/G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $V \trianglelefteq G$ и $V \leq G_{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, $V \geq G_{\mathfrak{F}}$. Значит, $V = G_{\mathfrak{F}}$ и \mathfrak{F} является \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}^*$. По утверждению (2) леммы 1.7 имеем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Тогда по утверждению (1) леммы 1.7 $G/G_{\mathfrak{F}}$ – абелева группа и $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ и \mathfrak{F} – \mathfrak{X} -нормальный класс Фиттинга. \square

Предложение 2.3. Пусть \mathfrak{F} , \mathfrak{H} и \mathfrak{X} – классы Фиттинга и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$;
- (2) если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Доказательство. (1) По условию \mathfrak{F} нормален в \mathfrak{X} . Значит, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её \mathfrak{F} -радикал является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой G . Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$, то \mathfrak{F} -радикал группы H является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой H и класс $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть \mathfrak{H} – класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{N}$ и по предложению 2.2 $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{H}\mathfrak{N}$, то ввиду (1) $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{X}$. \square

Предложение 2.4. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, \mathfrak{M} – класс Фиттинга $\sigma(\mathfrak{F})$ -разрешимых групп. Справедливы следующие утверждения.

- (1) Если $\sigma(\mathfrak{F}) \cap \sigma(\mathfrak{M}) = \emptyset$ и $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$. В частности, $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{F}\mathfrak{M}$.
- (2) Если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{M}$.

Доказательство. (1) Пусть $\sigma(\mathfrak{F}) = \pi$ и $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{M}$. По утверждению (1) леммы 1.4 в группе G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены в G . Тогда V – \mathfrak{F} -инъектор G . Так как $V \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\sigma(\mathfrak{F})}$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \pi$, то по теореме Чунихина $V = V_{\pi} \leq G_{\pi}$, где G_{π} и V_{π} – холловы

π -подгруппы групп G и V соответственно. Так как $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{M}$, то $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S}^{\pi}$. Тогда ввиду условия $\sigma(\mathfrak{F}) \cap \sigma(\mathfrak{M}) = \emptyset$ следует, что $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{E}_{\pi}$ и $G_{\pi} \leq G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $V \leq G_{\mathfrak{F}} \leq G$ и по утверждению (2) леммы 1.4 V – \mathfrak{F} -инъектор $G_{\mathfrak{F}}$.

По условию $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, и поэтому $G_{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -инъектор G . Следовательно, $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Так как по условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{H}$ и $G_{\mathfrak{F}}$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой G . По свойству радикалов получаем $G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}} \leq G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ и $G_{\mathfrak{F}} \leq G$, то $G_{\mathfrak{F}}$ – нормальная $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ -подгруппа G . По определению $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ -радикала получаем $G_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$. Значит, $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$.

Пусть существует группа K такая, что $K \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ и $G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}} \leq K \leq G$. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $K \in \mathfrak{F}$ и $G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}} \in \mathfrak{F}$. Ввиду $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$, по определению \mathfrak{F} -максимальной подгруппы $K = G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$. Значит, $G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$ – $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M})$ -максимальна в G . Утверждение (2) доказано. \square

В следующих трёх утверждениях мы опишем методы построения \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга в универсуме \mathfrak{S} всех разрешимых групп.

Предложение 2.5. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}^2$. Если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$, то либо $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{F} = (1)$.

Доказательство. Предположим, что класс \mathfrak{F} не является нормальным классом Фиттинга. Пусть G – группа минимального порядка такая, что её \mathfrak{F} -радикал не совпадает с \mathfrak{F} -инъектором G . Ввиду леммы 1.8 существуют простые числа p и q такие, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}^2$, то получаем противоречие с условием $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$. Следовательно, \mathfrak{F} является нормальным классом Фиттинга. \square

Предложение 2.6. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга и \mathfrak{X} – класс Фишера. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$;
- (2) если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$, то для всех классов Фиттинга \mathfrak{H} таких, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$, класс $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Доказательство. (1) \Rightarrow (2). Пусть \mathfrak{H} – класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. По утверждению (2) предложения 2.3 получаем $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Докажем, что (2) \Rightarrow (1). Предположим от противного, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Пусть G – группа минимального порядка из класса $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Если предположить, что в G существуют две различные максимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2 , то ввиду выбора G имеем $M_1 \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ и $M_2 \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Следовательно, $M_1 M_2 = G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Полученное противоречие доказывает, что $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа группы G .

Тогда $|G/G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}| = p$ и $O^{p'}(G) = G$. Так как \mathfrak{F} нормален в \mathfrak{X} , то $G_{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -инъектор G и по утверждению (3) леммы 1.5 $G_{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -инъектор группы $G_{\mathfrak{F}^p}$. Следовательно, по лемме 1.9 подгруппа $G_{\mathfrak{F}}G_p$ – $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ -инъектор G , где G_p – силовская p -подгруппа группы G . Так как \mathfrak{X} – класс Фишера, то $G_{\mathfrak{F}}G_p \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}}G_p$ – $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{X}$ -инъектор G . Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$, то по условию утверждения (2) $G_{\mathfrak{F}}G_p \trianglelefteq G$. Ввиду $O^{p'}(G) = G$, $G = G_{\mathfrak{F}}G_p \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Получили противоречие с выбором группы G . Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. \square

Напомним, что символом $O_p(G)$ обозначают наибольшую нормальную p -подгруппу группы G , символом $G_{\mathfrak{N}}$ – нильпотентный радикал G .

Предложение 2.7. Пусть \mathfrak{F} , \mathfrak{H} и \mathfrak{M} – классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Справедливы следующие утверждения.

(1) Если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, то для любого класса \mathfrak{M} верно $\mathfrak{M}\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$.

(2) Пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a) $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$;
- (b) $\mathfrak{N}\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{N}\mathfrak{H}$.

Доказательство. (1) Пусть $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. По утверждению (1) леммы 1.4 в группе G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены в G . Покажем, что для любой группы G её $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ -инъектор совпадает с $G_{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\text{Char}(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Если подгруппа $V/G_{\mathfrak{M}}$ – \mathfrak{F} -инъектор группы $G/G_{\mathfrak{M}}$, то по лемме 1.9 получаем, что V – $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ -инъектор группы G . По определению произведения классов Фиттинга $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$. По условию $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $V/G_{\mathfrak{M}} \trianglelefteq G/G_{\mathfrak{M}}$ и $V \trianglelefteq G$. Это означает, что $\mathfrak{M}\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Тогда по утверждению (1) получаем, что $\mathfrak{N}\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{N}\mathfrak{H}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Докажем, что $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{H}$ и p – простое такое, что $p \nmid |G|$. Тогда $O_p(G) = 1$. Пусть M – точный G -модуль группы над $GF(p)$ и $H = MG$ –

полупрямое произведение групп M и G . Очевидно, что $H_{\mathfrak{N}} = M$. Пусть V – \mathfrak{F} -инъектор группы G . Так как $MG/H_{\mathfrak{N}} = MG/M \cong G$, то $MV/H_{\mathfrak{N}}$ – \mathfrak{F} -инъектор группы $MG/H_{\mathfrak{N}}$. Следовательно по лемме 1.9 MV – $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ -инъектор группы H . Ввиду $H \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{N}\mathfrak{H}$, получаем $MV \trianglelefteq H$. Следовательно,

$$MV/M \trianglelefteq H/M = MG/M \cong G/(G \cap M) \cong G.$$

Ввиду изоморфизма $MV/M \cong V/V \cap M \cong V$, по утверждению (2) леммы 1.5 получаем $V \trianglelefteq G$. Следовательно, $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Утверждение (2) доказано. \square

3 Доказательство теоремы 0.4

Вначале определим условия, когда пересечение неединичных \mathfrak{X} -нормальных классов Фишера является неединичным классом Фиттинга.

Лемма 3.1. Пусть \mathfrak{X} – класс Фиттинга и $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in I}$ – семейство неединичных \mathfrak{X} -нормальных классов Фишера. Если существует простое p такое, что $\mathfrak{N}_p \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, то $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \neq (1)$.

Доказательство. Предположим, что $p \notin \sigma(\mathfrak{F}_i)$.

Так как по лемме 1.10 $\sigma(\mathfrak{F}_i) = \text{Char}(\mathfrak{F}_i)$, то $Z_p \notin \mathfrak{F}_i$. По лемме 1.11 класс Фишера \mathfrak{F}_i является классом Локетта для каждого $i \in I$. Следовательно, для любой группы $G \in \mathfrak{F}_i$ по лемме 1.6 $Z_p \wr G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{X} \setminus R(\mathfrak{F}_i)$ для всех $i \in I$. По условию \mathfrak{F}_i является \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга для любого $i \in I$. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq R(\mathfrak{F}_i)$ и $\mathfrak{N}_p \mathfrak{X} \setminus R(\mathfrak{F}_i) = \emptyset$ для всех $i \in I$. Полученное противоречие доказывает, что $p \in \sigma(\mathfrak{F}_i)$ для любого $i \in I$. Таким образом, $\bigcap_{i \in I} \sigma(\mathfrak{F}_i) = \bigcap_{i \in I} \text{Char}(\mathfrak{F}_i) \neq \emptyset$ и $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \neq (1)$. \square

Доказательство теоремы 0.4.

Проведем индукцию по порядку групп из \mathfrak{X} . Пусть G – группа минимального порядка из \mathfrak{X} такая, для которой теорема неверна. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то группа $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$ и по утверждению (1) леммы 1.3 в G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены в G . Пусть V – такой \mathfrak{F} -инъектор группы G , который не нормален в G . Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$, то $G_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}_i}$. Ввиду изоморфизма

$$(G/G_{\mathfrak{F}})/(G_{\mathfrak{F}_i}/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/G_{\mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F}_i)}.$$

Следовательно, по утверждению (1) леммы 1.3 в группе G существует \mathfrak{F}_i -инъектор V_i для любого $i \in I$. Так как $\mathfrak{F}_i \trianglelefteq \mathfrak{X}$, то $V_i \trianglelefteq G$ для всех $i \in I$ и $\bigcap_{i \in I} V_i \trianglelefteq G$. Кроме того, $\bigcap_{i \in I} V_i \trianglelefteq V_i \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$. Следовательно, $\bigcap_{i \in I} V_i \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. По определению \mathfrak{F} -радикала получаем $\bigcap_{i \in I} V_i \leq G_{\mathfrak{F}}$.

С другой стороны, $G_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}_i} = V_i$ для всех $i \in I$.
 Значит, $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap_{i \in I} V_i$. Так как $V - \mathfrak{F}$ -инъектор G ,
 то $G_{\mathfrak{F}} \leq V$, и поэтому $\bigcap_{i \in I} V_i \leq V$.

Пусть M – любая максимальная нормальная подгруппа группы G . Далее доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

(1) $V \cap M = (\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M$. Так как $M \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то $M/M_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$. По утверждению (1) леммы 1.3 в M существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены в M . Так как $V - \mathfrak{F}$ -инъектор G , то ввиду утверждения (1) леммы 1.5 $V \cap M - \mathfrak{F}$ -инъектор M . По индукции получаем $V \cap M \triangleleft M$. Ввиду леммы 1.2 имеем $M_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap M$. Следовательно, $V \cap M = G_{\mathfrak{F}} \cap M = (\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M$.

(2) $V \not\leq N$ для любой $N \trianglelefteq G$. Предположим от противного, что $V \leq N \trianglelefteq G$. Так как $G \in \mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq G$, то по определению класса Фиттинга \mathfrak{X} получаем $N \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$. По утверждению (3) леммы 1.5 $V - \mathfrak{F}$ -инъектор N . По индукции $V \trianglelefteq N$. Следовательно, $V \trianglelefteq G$ и $V = G_{\mathfrak{F}}$. Получили противоречие с тем, что $V \not\leq G$.

(3) $G = RV$, где R – любая из нормальных подгрупп группы G такая, что G/R является либо элементарной абелевой p -группой для $p \in \sigma(\mathfrak{F})$, либо $\sigma'(\mathfrak{F})$ -группой. Вначале докажем существование такой подгруппы R . Если $G_{\mathfrak{F}} = G$, то $G \in \mathfrak{F}$ и утверждение доказано. Пусть $G_{\mathfrak{F}} \neq G$. Тогда $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$. Значит, найдется максимальная нормальная подгруппа R такая, что $G_{\mathfrak{F}} \leq R$. Следовательно, $(G/G_{\mathfrak{F}})/(R/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/R$. Так как факторгруппа по максимальной нормальной подгруппе является главным фактором группы G , то этот фактор либо элементарная абелева p -группа для $p \in \sigma(\mathfrak{F})$, либо $\sigma'(\mathfrak{F})$ -группа. Этим существование подгруппы R с указанными выше свойствами доказано.

Предположим, что $G \neq RV$. Значит, $RV < G$. Если $G/R -$ элементарная абелева p -группа для $p \in \sigma(\mathfrak{F})$, то $G/R -$ нильпотентная группа. Следовательно, $RV/R \trianglelefteq G/R$ и $RV \trianglelefteq G$. Таким образом, $V \leq RV \trianglelefteq G$. Это противоречит ранее доказанному утверждению (2).

Пусть $G/R \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$, где $\mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$ – класс всех $\sigma'(\mathfrak{F})$ -групп. Так как ввиду изоморфизма $V/(V \cap R) \cong RV/R < G/R$ и $G/R \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$, то $V/(V \cap R) \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$. С другой стороны, $V \in \mathfrak{F}$ и, значит, $V \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. Класс $\mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$ – формация.

Следовательно, $V/(V \cap R) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. Итак, $V/(V \cap R) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})} = (1)$ и $V = V \cap R$. Следовательно, $V \leq R \trianglelefteq G$, что противоречит утверждению (2).

(4) *Группа G комонотична.* Предположим, что существуют максимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2 группы G и $M_1 \neq M_2$. Тогда возможны следующие случаи:

$$(4.1) G_{\mathfrak{F}} \leq M_1 \text{ и } G_{\mathfrak{F}} \not\leq M_2;$$

$$(4.2) G_{\mathfrak{F}} \not\leq M_1 \text{ и } G_{\mathfrak{F}} \leq M_2;$$

$$(4.3) G_{\mathfrak{F}} \leq M_1 \text{ и } G_{\mathfrak{F}} \leq M_2;$$

$$(4.4) G_{\mathfrak{F}} \not\leq M_1 \text{ и } G_{\mathfrak{F}} \not\leq M_2.$$

(4.1) Пусть $G_{\mathfrak{F}} \leq M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \not\leq M_2$. Так как по условию теоремы $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то ввиду изоморфизма $(G/G_{\mathfrak{F}})/(M_1/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/M_1$ и группа $G/M_1 - \sigma(\mathfrak{F})$ -разрешима.

Тогда $G/M_1 -$ главный фактор группы G , который является либо элементарной абелевой p -группой для некоторого $p \in \sigma(\mathfrak{F})$, либо $\sigma'(\mathfrak{F})$ -группой. Пусть $G/M_1 -$ элементарная абелева p -группа. Тогда, $G/M_1 -$ нильпотентная группа, и по доказанному выше утверждению (3) получаем $G = VM_1$. Ввиду предположения $G_{\mathfrak{F}} \not\leq M_2$ имеем $G = G_{\mathfrak{F}}M_2$. Следовательно, $G = VM_2$. Ввиду изоморфизмов

$$G/M_1 = VM_1/M_1 \cong V/(V \cap M_1)$$

и $G/M_2 = VM_2/M_2 \cong V/(V \cap M_2)$ имеем $V \cap M_1$ и $V \cap M_2$ являются максимальными нормальными подгруппами группы V . Пусть $V \cap M_1 \neq V \cap M_2$. Ввиду максимальной подгрупп $V \cap M_1$ и $V \cap M_2$ получаем $V = (V \cap M_1)(V \cap M_2)$. Следовательно, по утверждению (1)

$$V = ((\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M_1)((\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M_2) \triangleleft G.$$

Последнее противоречит предположению о том, что $V \not\leq G$. Поэтому остается признать, что $V \cap M_1 = V \cap M_2$. Тогда $G/M_1 \cong V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \cong G/M_2$ и G/M_2 нильпотентна. Следовательно, по определению формации $G/(M_1 \cap M_2) -$ нильпотентная группа. Ввиду (3), $G = V(M_1 \cap M_2) = VM_1 \cap VM_2$. Отсюда по лемме 1.1 $V \cap M_1 M_2 = (V \cap M_1)(V \cap M_2) = V = V \cap M_1$. Значит, $V \leq M_1$, что невозможно ввиду (2). Итак, $M_1 = M_2 = M$ и группа G в данном случае комонотична.

Предположим, что фактор $G/M_1 - \sigma'(\mathfrak{F})$ -группа. Тогда $V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$. Так как $V - \mathfrak{F}$ -инъектор G , то $V/(V \cap M_1) =$

$=V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. Следовательно, $V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})} = (1)$ и $V = V \cap M_1$. Значит, $V \leq M_1$. Это противоречит утверждению (2). Получаем снова $M_1 = M_2 = M$ и группа G комонотитична.

(4.2) Доказательство комонотитичности группы G аналогично доказательству в случае (4.1).

(4.3) Пусть $G_{\mathfrak{F}} \leq M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \leq M_2$. Так как $G \in \mathfrak{F} \mathfrak{E}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то ввиду изоморфизмов $(G/G_{\mathfrak{F}})/(M_1/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/M_1$ и $(G/G_{\mathfrak{F}})/(M_2/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/M_2$, группы G/M_1 и $G/M_2 - \sigma(\mathfrak{F})$ -разрешимы.

Тогда G/M_1 и $G/M_2 -$ главные факторы группы G , каждый из которых является либо элементарной абелевой примарной группой, либо $\sigma'(\mathfrak{F})$ -группой. Пусть G/M_1 и $G/M_2 -$ примарные группы. Тогда группы G/M_1 и G/M_2 нильпотентны и по доказанному выше утверждению (3) получаем $G = VM_1 = VM_2$. Следовательно, $G/M_1 \cong V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \cong G/M_2 \in \mathfrak{N}$. По определению формации $G/(M_1 \cap M_2) \in \mathfrak{N}$. Значит, ввиду (3), $G = V(M_1 \cap M_2) = VM_1 \cap VM_2$ и по лемме 1.1 имеем $V \cap M_1 M_2 = (V \cap M_1)(V \cap M_2) = V = V \cap M_1$. Итак, $V \leq M_1$, что противоречит (2).

Пусть $G/M_1 \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$ и $G/M_2 \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$. Тогда ввиду (3), рассуждая аналогично случаю (4.1), получаем $V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. С другой стороны, $V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. Следовательно,

$$V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})} = (1).$$

Таким образом, $V = V \cap M_1$ и $V \leq M_1$, что невозможно ввиду (2).

Если один из факторов G/M_1 или G/M_2 примарен, а второй является $\sigma'(\mathfrak{F})$ -группой, то доказательство комонотитичности группы G аналогично доказательству случаев (4.1) и (4.2).

(4.4) Пусть $G_{\mathfrak{F}} \not\leq M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \not\leq M_2$. Так как $V \geq G_{\mathfrak{F}}$, то ввиду максимальности нормальных подгрупп M_1 и M_2 , справедливы равенства

$$G = M_1 G_{\mathfrak{F}} = M_2 G_{\mathfrak{F}} = VM_1 = VM_2.$$

Отсюда G/M_1 и $G/M_2 -$ нильпотентные группы. Тогда, следуя доказательству (4.3), получаем, что $V \leq M_1$, что противоречит (2).

Таким образом, в каждом из случаев (4.1)–(4.4) $M_1 = M_2 = M$ и группа G комонотитична. Отсюда следует, что для каждого $i \in I$ подгруппа $V_i \leq M$. Следовательно, $V \cap M = ((\bigcap_{i \in I} V_i) \cap M) = \bigcap_{i \in I} V_i$. Но тогда, учитывая изоморфизм

$G/M \cong V/\bigcap_{i \in I} V_i$, заключаем, что $V/\bigcap_{i \in I} V_i -$ циклическая группа простого порядка p .

Заключительный шаг. Вначале покажем, что $VV_i \neq G$ для некоторого $i \in I$.

Предположим от противного, что для всех $i \in I$ верно равенство $VV_i = G$. Если для некоторого $j \in I$ имеет место $V_j = G$, то $G \in \mathfrak{F}$ и G является \mathfrak{F} -инъектором G , то есть, $V = G \trianglelefteq G$. Получили противоречие с тем, что подгруппа V не нормальна в G . Следовательно, $V_j \neq G$ для всех $j \in I$. По условию $V_j \trianglelefteq G$. Значит, $G/V_j \cong V/(V \cap V_j)$. Так как $V/\bigcap_{i \in I} V_i -$ циклическая группа простого порядка p , то ввиду изоморфизма $(V/\bigcap_{i \in I} V_i)/((V \cap V_j)/\bigcap_{i \in I} V_i) \cong V/(V \cap V_j) \cong G/V_j$ имеем $G/V_j -$ циклическая группа простого порядка p . Следовательно, $V_j -$ максимальная нормальная подгруппа группы G . Значит, $V_j = M$.

Нетрудно заметить, что $V_j \in \mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Действительно, если найдется такое $i \neq j$ и $i \in I$, что $V_i \neq G$, то как и ранее мы заключаем, что $V_i = M = V_j$ и $V_j \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \neq j$. Значит, $V_i \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Следовательно, $V_j \leq G_{\mathfrak{F}} \leq V$. Но тогда ввиду предположения $VV_i = G$ получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие утверждению (2).

Итак, существуют $i \in I$ такие, что $VV_i \neq G$. Покажем, что в этом случае $VV_i \in \mathfrak{X}$. Так как $V/\bigcap_{i \in I} V_i$ простая группа, то ее нормальная подгруппа $(V \cap V_i)/\bigcap_{i \in I} V_i$ либо совпадает с группой $V/\bigcap_{i \in I} V_i$, либо является единичной. Если $(V \cap V_i)/\bigcap_{i \in I} V_i = V/\bigcap_{i \in I} V_i$, то $V = V \cap V_i \leq V_i$. Снова получаем противоречие с утверждением (2). Значит, $V \cap V_i = \bigcap_{i \in I} V_i$. Тогда, ввиду изоморфизма $VV_i/V \cong V/V \cap V_i$, заключаем, что $VV_i/V -$ p -группа для $p \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Так как $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} -$ класс Фишера, то $VV_i \in \mathfrak{X}$. Теперь имеем $|VV_i| < |G|$ и по утверждению (3) леммы 1.5 V является \mathfrak{F} -инъектором группы VV_i . Следовательно, по индукции $V \trianglelefteq VV_i$. Отсюда, так как $V \in \mathfrak{F}_i$, следует $V \leq (VV_i)_{\mathfrak{F}_i}$. Применяя снова утверждение (3) леммы 1.5, получаем, что подгруппа V_i является \mathfrak{F}_i -инъектором группы VV_i . Следовательно, $(VV_i)_{\mathfrak{F}_i} = V_i$. Таким образом, $V \leq V_i$, что противоречит (2). Полученное противоречие завершает доказательство того, что $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Так как по условию \mathfrak{F}_i – класс Фишера для любого $i \in I$ и $\mathfrak{N}_p \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ для некоторого простого p , то по лемме 3.1 $\mathfrak{F} \neq (1)$. \square

Теорема 3.2. Пусть \mathfrak{X} – класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – семейство \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга и $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то \mathfrak{F} является \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга.

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 0.4.

В случае $\sigma(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$ получаем

Следствие 3.3 [14, теорема 2.1]. Пусть \mathfrak{X} – класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – семейство \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга. Если $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Так как каждый неединичный нормальный класс Фиттинга содержит класс всех нильпотентных групп (см. [1, теорема 5.1]), то в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ получаем известный результат в теории нормальных классов Фиттинга – теорему Блессеноль – Гашюца.

Следствие 3.4 (Блессеноль – Гашюц [1, теорема 6.2]). Пересечение всех неединичных нормальных классов Фиттинга есть неединичный нормальный класс Фиттинга.

Заключение

В работе описаны методы построения нетривиальных \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга конечных групп. Определены условия, при которых пересечение неединичных \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга является неединичным \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга. Установлено, что если \mathfrak{X} – такой класс Фишера, что $\mathfrak{N}_p \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ для некоторого простого p , $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – семейство неединичных \mathfrak{X} -нормальных классов Фишера, $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то \mathfrak{F} является неединичным \mathfrak{X} -нормальным классом Фиттинга. В частности, при указанных условиях теорема даёт положительное решение проблемы Дёрка – Хоукса о пересечении неединичных \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга (см. [4, с. 716]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Blessoehl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessoehl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – № 118 (1). – S. 1–8.

2. Gaschütz, W. Zwei Bemerkungen über normale Fittingklassen / W. Gaschütz // J. Algebra. – 1974. – Vol. 30. – P. 277–278.

3. Laue, H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45. – P. 274–283.

4. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

5. Воробьев, Н.Т. О пересечении локально-нормальных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залеская, А.В. Турковская // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2010. – № 3 (57). – С. 7–12.

6. Reifferscheid, S. On the theory of Fitting classes of finite groups: dis. ... Doktors der Naturwissenschaften / S. Reifferscheid. – Tübingen, 2001. – 131 p.

7. Yang, N. On \mathfrak{F} -injectors of fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Communications in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

8. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

9. Шеметков, Л.А. О подгруппах π -разрешимых групп / Л.А. Шеметков // В кн.: Конечные группы. Мн.: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

10. Wenbin, Guo. Theory of Classes of Groups / Guo Wenbin. – Science Press. – Kluwer Acad. Publ. Dordrecht-Boston-London, 1997. – 258 p.

11. Lockett, F.P. The Fitting class \mathfrak{F}^* / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – № 137. – P. 131–136.

12. Lockett, F.P. On the Theory of Fitting Classes of Finite Soluble Groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – № 131. – P. 103–115.

13. Залеская, Е.Н. О произведениях классов Фишера / Е.Н. Залеская, С.Н. Воробьев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2008. – № 3 (49). – С. 101–105.

14. Shpakov, V.V. On intersection of normal Fitting classes of finite groups / V.V. Shpakov, N.N. Vorob'ev, N.T. Vorob'ev // Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematica. – 2003. – Vol. 30. – P. 167–171.

Исследования выполнены при поддержке БРФФИ (проект Ф17М-064) и Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция» (2016–2020).

Поступила в редакцию 23.07.18.

$\mathfrak{K}_\varphi, \mathfrak{K}_\psi$ -ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И ОБОБЩЕНИЯ
КЛАССИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

В.И. Мурашко¹, С.М. Горский², Я.И. Сандрыгайло³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Санкт-Петербургский Академический университет

³Белорусский государственный университет

$\mathfrak{K}_\varphi, \mathfrak{K}_\psi$ -CONVEX FUNCTIONS AND GENERALIZATIONS
OF CLASSICAL INEQUALITIES

V.I. Murashka¹, S.M. Gorsky², Ya.I. Sandryhaila³

¹F. Scorina Gomel State University

²Sanct-Peterburg Academic University

³Belarussian State University

Функция f называется $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклой, если для любых x и y из области определения функции f выполняется неравенство $f(\mathfrak{M}(x, y)) \leq \mathfrak{N}(f(x), f(y))$, где \mathfrak{M} и \mathfrak{N} – средние величины. В работе получена геометрическая интерпретация $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклости функций, где \mathfrak{M} и \mathfrak{N} – средние по Колмогорову. Также для таких функций получены аналоги перестановочного неравенства, неравенств Поповичу, Эрмита – Адамара и Чебышева.

Ключевые слова: выпуклая функция, $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклая функция, перестановочное неравенство, неравенство Поповичу, неравенство Чебышева, неравенство Йенсена.

A function f is called $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -convex, if for any x and y from the domain of f inequality $f(\mathfrak{M}(x, y)) \leq \mathfrak{N}(f(x), f(y))$ holds, where \mathfrak{M} and \mathfrak{N} are means. In this paper geometric interpretation of $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -convexity of a function is obtained, where \mathfrak{M} and \mathfrak{N} are Kolmogorov's means. For such functions analogies of rearrangement, Popovicu's, Chebyshev's sum and Hermite – Hadamar's inequalities are obtained.

Keywords: convex function, $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -convex function, rearrangement inequality, Popovicu's inequality, Chebyshev's sum inequality, Jensen's inequality, Hermite – Hadamar's inequality.

Введение

Во всей работе, если не оговорено иное, через I и J обозначаются некоторые интервалы действительных чисел, через φ и ψ – строго монотонные непрерывные определенные на I и J соответственно функции.

Напомним, что функция называется *выпуклой*, если её надграфик – выпуклое множество. Это определение эквивалентно тому, что функция f удовлетворяет неравенству Йенсена.

Теорема 0.1. Функция f выпукла тогда и только тогда, когда для любых x и y из области определения f и любого $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (0.1)$$

Выпуклые функции играют важную роль в современной математике, поэтому были приняты различные подходы к обобщению понятия выпуклости. Отметим два из них. Первый состоит в том, что в правой части неравенства (0.1) λ и $1 - \lambda$ заменяются на $h(\lambda)$ и $h(1 - \lambda)$.

Так, Брекнер [1] в качестве $h(\lambda)$ рассматривал λ^s для $s \in (0; 1]$; Годунова и Левин [2] – λ^{-1} ;

Пearce и Рубинов [3] – 1; наиболее общее определение в этом направлении:

Определение 0.1 [4]. Пусть $h : [0; 1] \rightarrow [0; +\infty)$.

Функция f называется *h-выпуклой*, если для любых x и y из области определения функции f и любого $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y). \quad (0.2)$$

Определение 0.2. Средней величиной \mathfrak{M} набора a_1, \dots, a_n называется величина, для которой выполнено условие

$$\min\{a_1, \dots, a_n\} \leq \mathfrak{M}(a_1, \dots, a_n) \leq \max\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Часто рассматриваются средние с дополнительным условием симметричности

$$\mathfrak{M}(a_1, \dots, a_n) = \mathfrak{M}(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}),$$

где σ – произвольная перестановка чисел от 1 до n .

Наиболее употребляемым средним являются среднее Гельдера

$$\mathfrak{H}_p(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p}, & p \neq 0; \\ \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}, & p = 0 \end{cases}$$

и среднее Колмогорова (квази-арифметическое среднее)

$$\mathfrak{K}_\varphi(a_1, \dots, a_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_n)}{n}\right).$$

Отметим, что в левой части (0.1) стоит функция от среднего арифметического аргументов, а в правой части – среднее арифметическое значений функции f . В связи с этим было предложено следующее определение.

Определение 0.3 [5]. Функция f называется $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклой функцией, если для любых x и y из области определения функции f выполняется неравенство

$$f(\mathfrak{M}(x, y)) \leq \mathfrak{N}(f(x), f(y)). \quad (0.3)$$

Данный вид выпуклости в основном исследовался для средних Гельдера (см., например, [6], [7]). В работе [5] приведена следующая лемма

Лемма 0.1. Если $f: I \rightarrow J$ непрерывная $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклая функция и $x_1, \dots, x_n \in I$, то выполняется неравенство

$$f(\mathfrak{M}(x_1, \dots, x_n)) \leq \mathfrak{N}(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Известен [8], [9] следующий критерий $\mathfrak{K}_\varphi, \mathfrak{K}_\psi$ -выпуклости

Лемма 0.2. Пусть ψ – возрастающая (убывающая) и $f: I \rightarrow J$ – непрерывная функция. Функция f есть $\mathfrak{K}_\varphi, \mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция тогда и только тогда, когда $\psi(f(\varphi^{-1}(t)))$ выпукла (вогнута) на $\varphi(I)$.

В настоящее время предложено и изучается определение h - $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклой функции [10], объединяющее определения 0.1 и 0.2.

Целью данной работы является получение геометрической интерпретации и приложений $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклой функций, где \mathfrak{M} , \mathfrak{N} – средние по Колмогорову.

1 Геометрическая интерпретация $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклости

Пусть $\mathfrak{K}_\varphi^{(\lambda)}(x, y) = \varphi^{-1}(\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y))$. Как было отмечено выше, $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -выпуклость изучалась во многих работах, но не давалась геометрическая интерпретация этого понятия. Следующие два результата восполняют этот пробел.

Теорема 1.1. Пусть $f: I \rightarrow J$ есть непрерывная $\mathfrak{K}_\varphi, \mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция, тогда надграфик f вместе со своими любыми двумя точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ содержит и точки

$$\{(\mathfrak{K}_\varphi^{(\lambda)}(x_1, x_2); \mathfrak{K}_\psi^{(\lambda)}(y_1, y_2)) \mid \lambda \in [0; 1]\}.$$

Доказательство. Пусть $F: (x; y) \rightarrow (\varphi(x); \psi(y))$ непрерывное биективное отображение. Пусть множество Γ – график функции f . Тогда $F(\Gamma)$ есть график функции $\psi(f(\varphi^{-1}(t)))$ определенной на $\varphi(I)$. Пусть $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – точки надграфика функции f . Так как ψ возрастающая (убывающая), то $\psi(f(\varphi^{-1}(t)))$ есть выпуклая

(вогнутая) функция по лемме 0.2 и $(\varphi(x_1); \psi(y_1))$, $(\varphi(x_2); \psi(y_2))$ – точки надграфика (подграфика) функции $\psi(f(\varphi^{-1}(t)))$. Так как последнее множество выпуклое, то любая точка вида

$$(\lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2); \lambda\psi(y_1) + (1-\lambda)\psi(y_2)),$$

$\lambda \in [0; 1]$ также принадлежит этому множеству. Так как $F^{-1}: (x'; y') \rightarrow (g^{-1}(x'); h^{-1}(y'))$ есть непрерывное биективное отображение, то надграфик (подграфик) $\psi(f(\varphi^{-1}(t)))$ под действием F^{-1} переходит в надграфик функции f . \square

Следствие 1.1. Условие теоремы 1.1 эквивалентно тому, что надграфик f содержит часть кривой

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} = \frac{\psi(y) - \psi(y_1)}{\psi(y_2) - \psi(y_1)}$$

заключенную между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Доказательство. Положим, что

$$x = \varphi^{-1}(\lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2))$$

и

$$y = \psi^{-1}(\lambda\psi(y_1) + (1-\lambda)\psi(y_2)).$$

Выразив из обоих равенств λ и приравняв, получим требуемое. \square

2 Неравенство Эрмита – Адамара

Известно, что для выпуклой функции $f: I \rightarrow R$ и $[a; b] \subset I$ справедливо неравенство Эрмита – Адамара

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Обобщение этого неравенства исследовались в большом ряде работ. В частности, в работах [11]–[13] были получены аналоги этого неравенства для непрерывных $\mathfrak{H}_{-1}, \mathfrak{H}_1$ -выпуклых, $\mathfrak{H}_{-1}, \mathfrak{H}_0$ -выпуклых и $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1$ -выпуклых функций. Следующий результат обобщает указанные неравенства.

Теорема 2.1. Пусть $f: I \rightarrow J$ есть непрерывная $\mathfrak{K}_\varphi, \mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция, φ – дифференцируемая функция и $[a; b] \subset I$. Тогда

$$f(\mathfrak{K}_\varphi(a, b)) \leq \psi^{-1}\left(\frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_a^b \psi(f(x)) d\varphi(x)\right) \leq \mathfrak{K}_\psi(f(a), f(b)).$$

Доказательство. Пусть ψ – возрастающая (убывающая) функция, тогда по лемме 0.2 функция $g(x) = \psi(f(\varphi^{-1}(x)))$ есть выпуклая (вогнутая) на $\varphi(I)$. По неравенству Эрмита – Адамара

$$g\left(\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}\right) \leq (\geq) \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(y) dy \leq (\geq) \leq (\geq) \frac{g(\varphi(a)) + g(\varphi(b))}{2}.$$

Применим ко всем частям данного неравенства ψ^{-1} и заметив, что

$$\begin{aligned} \psi^{-1}\left(g\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right) &= f(\mathfrak{K}_\varphi(a,b)), \\ \psi^{-1}\left(\frac{g(\varphi(a))+g(\varphi(b))}{2}\right) &= \mathfrak{K}_\psi(f(a),f(b)), \\ \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(y)dy &= [y=\varphi(x)] = \\ &= \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b \psi(f(x))d\varphi(x) \end{aligned}$$

получим требуемое. \square

Следствие 2.1 [11]. Пусть $[a;b] \subset I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ есть $\mathfrak{H}_{-1}\mathfrak{H}_1$ -выпуклая непрерывная функция, тогда

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Следствие 2.2 [12]. Пусть $[a;b] \subset I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $f: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ есть $\mathfrak{H}_{-1}\mathfrak{H}_0$ -выпуклая непрерывная функция, тогда

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \exp\left(\frac{ab}{b-a} \int_a^b \ln \frac{f(x)}{x^2} dx\right) \leq \sqrt{f(a)f(b)}.$$

Следствие 2.3 [13]. Пусть $[a;b] \subset I \subset \mathbb{R}_+$ и $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ есть $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1$ -выпуклая непрерывная функция, тогда

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

3 Неравенство Поповичу

Для выпуклых функций известно неравенство Поповичу

$$\begin{aligned} \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) &\geq \\ \geq \frac{2}{3}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Естественно обобщить его на случай $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклых функций. Такая попытка была принята в работе [9], где была приведена следующая теорема

Теорема 3.1. Пусть $f: I \rightarrow J$ есть $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция. Если ψ – строго возрастающая, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_\psi(\mathfrak{K}_\psi(f(x), f(y), f(z)), f(\mathfrak{K}_\varphi(x, y, z))) &\geq \\ \geq \mathfrak{K}_\psi(f(\mathfrak{K}_\varphi(x, y)), f(\mathfrak{K}_\varphi(y, z)), f(\mathfrak{K}_\varphi(z, x))) \end{aligned}$$

для всех $x, y, z \in I$.

Неравенство верно с обратным знаком, если функция ψ строго убывающая.

Последнее утверждение теоремы не верно. Действительно, пусть $I = J = (0; +\infty)$, $\psi(x) = 1/x$ – убывающая, $\varphi(x) = x$, $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Согласно кри-

терию $\psi(f(\varphi^{-1}(x))) = \sqrt{x}$ – вогнутая функция, а, значит, f есть $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция. Но при $x = y = 1$, $z = 4$ получаем, что неравенство из теоремы верно с указанным, а не обратным, знаком.

Отметим, что рядом авторов были получены аналоги неравенства Поповичу для большего числа переменных (см., например [14], [15]). В наиболее общей с этой точки зрения форме это неравенство было получено в работе [14].

Теорема 3.2. Пусть $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая функция, $x_1, \dots, x_n \in I$ и n, m – натуральные числа, тогда

$$\begin{aligned} \binom{n-2}{m-1} \sum_{i=1}^n f(x_i) + \binom{n-2}{m-2} n f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) &\geq \\ \geq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} m f\left(\frac{x_{i_1}+x_{i_2}+\dots+x_{i_m}}{m}\right). \end{aligned}$$

Приведем исправленное и обобщенное неравенство Поповичу для $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклых функций.

Теорема 3.3. Пусть $f: I \rightarrow J$ есть непрерывная $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция, $1 \leq m \leq n$ и $n > 2$. Для любых $x_1, \dots, x_n \in I$ выполняется

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_\psi(\underbrace{\mathfrak{K}_\psi(f(x_1), \dots, f(x_n)), \dots, \mathfrak{K}_\psi(f(x_1), \dots, f(x_n)))}_{n-m}, \\ \underbrace{f(\mathfrak{K}_\varphi(x_1, \dots, x_n)), \dots, f(\mathfrak{K}_\varphi(x_1, \dots, x_n))}_{m-1}) &\geq \\ \geq \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}))\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n}). \end{aligned}$$

Доказательство. Если $n = m$ или $m = 1$, неравенство превращается в равенство. Положим, что $2 \leq m < n$.

Пусть ψ есть возрастающая (убывающая). Так как f – непрерывная $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция, то $t(x) = \psi(f(\varphi^{-1}(x)))$ есть выпуклая (вогнутая) по лемме 0.2. Пусть $y_i = \varphi(x_i)$. Перепишем неравенство из теоремы 4.2 для функции t :

$$\begin{aligned} \binom{n-2}{m-1} \sum_{i=1}^n t(y_i) + \binom{n-2}{m-2} n t\left(\frac{y_1+\dots+y_n}{n}\right) &\leq (\geq) \\ \leq (\geq) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} m t\left(\frac{y_{i_1}+\dots+y_{i_m}}{m}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{n-2}{m-1} \sum_{i=1}^n \psi(f(x_i)) + \\ + \binom{n-2}{m-2} n \psi\left(f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_1)+\dots+\varphi(x_n)}{n}\right)\right)\right) &\geq (\leq) \end{aligned}$$

$$\geq (\leq) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} m \psi\left(f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(y_{i_1})+\dots+\varphi(y_{i_m})}{m}\right)\right)\right).$$

Сократим полученное неравенство на $m \binom{n}{m}$,

получим

$$\begin{aligned} & \frac{(n-m)}{(n-1)n} \sum_{i=1}^n \psi(f(x_i)) + \\ & + \frac{(m-1)}{n-1} \psi\left(f\left(\mathfrak{K}_\varphi(x_1, \dots, x_n)\right)\right) \geq (\leq) \\ & \geq (\leq) \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} \psi\left(f\left(\mathfrak{K}_\varphi(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})\right)\right)}{\binom{n}{m}}. \end{aligned}$$

Так как ψ^{-1} – возрастающая (убывающая) функция, то имеем

$$\begin{aligned} & \psi^{-1}\left(\frac{(n-m)}{n-1} \psi\left(\mathfrak{K}_\varphi(f(x_1), \dots, f(x_n))\right) + \right. \\ & \left. + \frac{(m-1)}{n-1} \psi\left(f\left(\mathfrak{K}_\varphi(x_1, \dots, x_n)\right)\right)\right) \geq \\ & \geq \psi^{-1}\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} \psi\left(f\left(\mathfrak{K}_\varphi(y_{i_1}, \dots, y_{i_m})\right)\right)}{\binom{n}{m}}\right), \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} & \underbrace{\mathfrak{K}_\psi\left(\mathfrak{K}_\psi(f(x_1), \dots, f(x_n)), \dots, \mathfrak{K}_\psi(f(x_1), \dots, f(x_n))\right)}_{n-m} \\ & \underbrace{f\left(\mathfrak{K}_\varphi(x_1, \dots, x_n), \dots, f\left(\mathfrak{K}_\varphi(x_1, \dots, x_n)\right)\right)}_{m-1} \geq \\ & \geq \psi^{-1}\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} \psi\left(f\left(\mathfrak{K}_\varphi(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})\right)\right)}{\binom{n}{m}}\right). \end{aligned}$$

4 Перестановочное неравенство

Нам понадобится следующая лемма, являющаяся обобщением леммы о четырёх точках для выпуклых функций и доказательство которой может быть найдено в [16].

Лемма 4.1. Пусть функция f выпукла на I , $n \in \mathbb{N}$, $a_1 \leq (\geq) \dots \leq (\geq) a_n$ и $b_1 \leq (\geq) \dots \leq (\geq) b_n$ – точки из I , σ – перестановка чисел от 1 до n . Тогда

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{a_i + b_{n-i+1}}{2}\right) \leq \sum_{i=1}^n f\left(\frac{a_i + b_{\sigma(i)}}{2}\right) \leq \sum_{i=1}^n f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right).$$

Если функция f вогнута, знаки в неравенстве меняются на обратные.

Теорема 4.1. Пусть $f: I \rightarrow J$ есть непрерывная $\mathfrak{K}_\varphi \mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция. Тогда для любых $a_1 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq \dots \leq b_n$ из I верно

$$\begin{aligned} & \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(a_i, b_{n-i+1}))\}_{1 \leq i \leq n}) \leq \\ & \leq \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(a_i, b_{\sigma(i)}))\}_{1 \leq i \leq n}) \leq \\ & \leq \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(a_i, b_i))\}_{1 \leq i \leq n}), \end{aligned}$$

где σ – перестановка чисел от 1 до n .

Доказательство. Заметим, что $\varphi(a_1) \leq \dots \leq \varphi(a_n)$ и $\varphi(b_1) \leq \dots \leq \varphi(b_n)$ или $\varphi(a_1) \geq \dots \geq \varphi(a_n)$ и $\varphi(b_1) \geq \dots \geq \varphi(b_n)$. Если функция ψ возрастающая (убывающая), то $\psi(f(\varphi^{-1}(x)))$ есть выпуклая (вогнутая) по лемме 0.2. Из леммы 4.1 следует:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \psi\left(f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_{n-i+1})}{2}\right)\right)\right) \leq (\geq) \\ & \leq (\geq) \sum_{i=1}^n \psi\left(f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_{\sigma(i)})}{2}\right)\right)\right) \leq (\geq) \\ & \leq (\geq) \sum_{i=1}^n \psi\left(f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_i)}{2}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Разделим неравенство на n и применим к обеим частям ψ^{-1} . Тогда

$$\begin{aligned} & \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(a_i, b_{n-i+1}))\}_{1 \leq i \leq n}) \leq \\ & \leq \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(a_i, b_{\sigma(i)}))\}_{1 \leq i \leq n}) \leq \\ & \leq \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(a_i, b_i))\}_{1 \leq i \leq n}), \end{aligned}$$

так как функция ψ^{-1} – возрастающая (убывающая). \square

Пусть $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ есть $\mathfrak{H}_0 \mathfrak{H}_1$ -выпуклая функция. Если мы применим теорему 4.1 к наборам $a_1^2 \leq \dots \leq a_n^2$ и $b_1^2 \leq \dots \leq b_n^2$, где a_i, b_i положительные числа, получим

Следствие 4.1. Пусть $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ есть непрерывная $\mathfrak{H}_0 \mathfrak{H}_1$ -выпуклая функция, $0 < a_1 \leq \dots \leq a_n$, $0 < b_1 \leq \dots \leq b_n$ и σ есть перестановка чисел от 1 до n . Тогда

$$\sum_{i=1}^n f(a_i b_{n-i+1}) \leq \sum_{i=1}^n f(a_i b_{\sigma(i)}) \leq \sum_{i=1}^n f(a_i b_i).$$

Так как $f(x) = x$ удовлетворяет условию следствия 4.1, то из него мы получаем широко известное перестановочное неравенство для положительных чисел.

5 Неравенство Чебышева для сумм

Теорема 5.1. Пусть $f: I \rightarrow J$ непрерывная $\mathfrak{K}_\varphi \mathfrak{K}_\psi$ -выпуклая функция. Тогда для любых чисел $a_1 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq \dots \leq b_n$ выполняется

$$\begin{aligned} & \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(a_i, b_{n-i+1}))\}_{1 \leq i \leq n}) \leq \\ & \leq \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(a_i, b_j))\}_{1 \leq i, j \leq n}) \leq \\ & \leq \mathfrak{K}_\psi(\{f(\mathfrak{K}_\varphi(a_i, b_i))\}_{1 \leq i \leq n}). \end{aligned}$$

Доказательство. Если функция ψ возрастающая (убывающая), следующее неравенство верно в силу теоремы 5.1

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \psi\left(f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_{n-i+1})}{2}\right)\right)\right) \leq (\geq) \\ & \leq (\geq) \sum_{i=1}^n \psi\left(f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_{\sigma(i)})}{2}\right)\right)\right) \leq (\geq) \end{aligned}$$

$$\leq (\geq) \sum_{i=1}^n \Psi \left(f \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_i)}{2} \right) \right) \right).$$

Просуммируем данное неравенство по всем возможным перестановкам. Так как всего $n!$ перестановок, имеем

$$\begin{aligned} n! \sum_{i=1}^n \Psi \left(f \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_{n-i+1})}{2} \right) \right) \right) &\leq (\geq) \\ \leq (\geq) \sum_{\pi} \sum_{i=1}^n \Psi \left(f \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_{\pi(i)})}{2} \right) \right) \right) &\leq (\geq) \\ \leq (\geq) n! \sum_{i=1}^n \Psi \left(f \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_i)}{2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Не трудно заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{\pi} \sum_{i=1}^n \Psi \left(f \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_{\pi(i)})}{2} \right) \right) \right) &= \\ = (n-1)! \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Psi \left(f \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_j)}{2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Psi \left(f \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_{n-i+1})}{2} \right) \right) \right) &\leq (\geq) \\ \leq (\geq) \frac{1}{n^2} \sum_{\pi} \sum_{i=1}^n \Psi \left(f \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_{\pi(i)})}{2} \right) \right) \right) &\leq (\geq) \\ \leq (\geq) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Psi \left(f \left(\varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_i) + \varphi(b_i)}{2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Применив φ^{-1} к обеим частям, получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{\Psi}(\{f(\mathfrak{K}_{\varphi}(a_i, b_{n-i+1}))\}_{1 \leq i \leq n}) &\leq \\ \leq \mathfrak{K}_{\Psi}(\{f(\mathfrak{K}_{\varphi}(a_i, b_j))\}_{1 \leq i, j \leq n}) &\leq \\ \leq \mathfrak{K}_{\Psi}(\{f(\mathfrak{K}_{\varphi}(a_i, b_i))\}_{1 \leq i \leq n}), \end{aligned}$$

так как функция Ψ^{-1} – возрастающая (убывающая). \square

По аналогии со следствием 4.1 получаем

Следствие 5.1. Пусть $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная $\mathfrak{H}_0 \mathfrak{H}_1$ -выпуклая функция. Тогда для любых положительных $a_1 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq \dots \leq b_n$ выполняется

$$\sum_{i=1}^n f(a_i b_{n-i+1}) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(a_i b_j) \leq \sum_{i=1}^n f(a_i b_i).$$

Так как $f(x) = x$ есть $\mathfrak{H}_0 \mathfrak{H}_1$ -выпуклая функция, то из следствия мы получаем широко известное неравенство Чебышева для сумм:

Следствие 5.2. Для любых положительных $a_1 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq \dots \leq b_n$ выполняется

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Breckner, W.W. Stetigkeitsaussagen fur eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in

topologischen linearen Raumen / W.W. Breckner // Publ. Inst. Math. – 1978. – Vol. 23. – P. 13–20.

2. Годунова, Е.К. Неравенства для функций широкого класса, содержащего выпуклые, монотонные и некоторые другие виды функций / Е.К. Годунова, В.И. Левин // Вычисл. мат. и мат. физ., межвуз. сб. науч. трудов. МГПИ, Москва 1985. – С. 138–142.

3. Pearce, C.E.M. P-functions, quasi-convex functions and Hadamard-type inequalities / C.E.M. Pearce, A.M. Rubinov // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – № 240. – P. 92–104.

4. Varosanec, S. On h -convexity / S. Varosanec // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – № 326. – P. 303–311.

5. Niculescu, C.P. Convexity according to means / C.P. Niculescu // J. Math. Ineq. Appl. – 2003. – Vol. 6, № 4. – P. 571–579.

6. Anderson, G.D. Generalized convexity and inequalities / G.D. Anderson, M.K. Vamanamurthy, M. Vuorinen // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – № 335. – P. 1294–1308.

7. Baricz, A. Geometrically concave univariate distributions / A. Baricz // J. Math. Anal. Appl. – 2010. – № 363. – P. 182–196.

8. Aczél, J. A generalization of the notion of convex functions / J. Aczél // Norske Vid. Selsk. Forhd., Trondhjem. – 1947. – Vol. 19 (24). – P. 87–90.

9. Mihai, M.V. New Extensions of Popoviciu's Inequality / M.V. Mihai, F. Mitroi-Symeonidis // Mediterr. J. Math. – 2015. – DOI:10.1007/s00009-015-0675-3.

10. Alomari, M.V. Some properties of h - $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ -convexity and Jensen's type inequalities / M.V. Alomari // Preprints 2017, 2017100176 (doi:10.20944/preprints201710.0176.v1).

11. İşcan, İ. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions / İ. İşcan // Hacettepe J. Math. Stat. – 2014. – Vol. 43, № 6. – P. 935–942.

12. Noor, M.A. Some characterizations of harmonically log-convex functions / M.A. Noor, K.I. Noor, M.U. Awan // Proc. Jangeon Math. Soc. – 2014. – Vol. 17, № 1. – P. 51–61.

13. İşcan, İ. Hermite-Hadamard type inequalities for GA - s -convex functions / İ. İşcan // Le Matematiche. – 2014. – Vol. LXIX. – P. 129–146.

14. Grinberg, D. Generalizations of Popoviciu's inequality / D. Grinberg // ArXiv.org e-Print archive, arXiv: 0803.2958v1, 20 March 2008.

15. Cirtoaje, V. Two generalizations of Popoviciu's inequality / V. Cirtoaje // Crux Mathematicorum. – 2001. – Vol. 31, № 5. – P. 313–318.

16. Радзивиловский, Л.В. Обобщение перестановочного неравенства и монгольского неравенства / Л.В. Радзивиловский // Матем. просв. Серия. 3. – 2006. – Т. 10. – С. 210–224.

Поступила в редакцию 31.07.18.

УДК 512.542

ОБ ОБОБЩЕННОЙ НОРМЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

В.М. Селькин¹, Н.С. Косенок²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации

ON THE GENERALIZED NORM OF A FINITE GROUP

V.M. Selkin¹, N.S. Kosenok²

¹F. Scorina Gomel State University

²Belarusian Trade and Economic University of Consumer Cooperatives

Пусть G конечная группа $\pi = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{P}$. Тогда G называется π -специальной если $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_\pi(G)$. Мы используем $\mathfrak{N}_{\pi sp}$ для обозначения класса всех конечных π -специальных групп. Пусть $N_{\pi sp}(G)$ пересечение нормализаторов π -специальных корадикалов из всех подгрупп G , то есть, $N_{\pi sp}(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}_{\pi sp}})$. Мы говорим, что $N_\pi(G)$ является π -специальной нормой группы G . Изучены основные свойства π -специальной нормы в G . В частности, доказана π -разрешимость группы $N_{\pi sp}(G)$.

Ключевые слова: конечная группа, π -специальная группа, π -разрешимая группа, π -специальный корадикал группы, π -специальная норма группы.

Let G be a finite group and $\pi = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{P}$. Then G is called π -special if $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_\pi(G)$. We use $\mathfrak{N}_{\pi sp}$ to denote the class of all finite π -special groups. Let $\mathfrak{N}_{\pi sp}(G)$ be the intersection of the normalizers of the π -special residuals of all subgroups of G , that is, $N_{\pi sp}(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}_{\pi sp}})$. We say that $N_\pi(G)$ is the π -special norm of G . We study the basic properties of the π -special norm of G . In particular, we prove that $N_{\pi sp}(G)$ is π -soluble.

Keywords: finite group, π -special group, π -soluble group, π -special residual of a group, π -special norm of a group.

1 Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, \mathbb{P} is the set of all primes, $\pi = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

The group G is said to be: π -special [1], [2] if $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_\pi(G)$; meta- π -special if G is an extension of a π -special group by a π -special group. We use $\mathfrak{N}_{\pi sp}$ to denote the class of all π -special groups.

Various classes of π -special and meta- π -special groups have been studied in many papers and, in particular, in the recent papers [2]–[7]. In this paper, we consider some new properties and applications of such groups.

If $1 \in \mathfrak{F}$ is the class of groups, then $G^{\mathfrak{F}}$ is the \mathfrak{F} -residual of G , that is, the intersection of all normal subgroups N of G with $G/N \in \mathfrak{F}$. In particular, $G^{\mathfrak{N}}$ is the nilpotent residual of G ; $G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}$ is the π -special residual of G .

Recall that the norm $N(G)$ of G is the intersection of the normalizers of all subgroups of G . This concept was introduced by R. Baer [8] (see also [9]) and the norm and the generalized norm of a

group have been studied by many authors. In particular, in the recent paper [10] the following analogues of the subgroup $N(G)$ were introduced:

- (i) $S(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}})$;
- (ii) let $1 = S_0(G) \leq S_1(G) \leq \dots \leq S_n(G) \leq \dots$,

where $S_{i+1}(G)/S_i(G) = S(G/S_{i+1}(G))$ for all $i = 0, 1, 2, \dots$. Then $S_\infty(G) = S_n(G)$, where let n is the smallest n such that $S_n(G) = S_{n+1}(G)$.

The basic properties and some applications of the subgroups $S(G)$ and $S_\infty(G)$ were considered in [10]. In this paper we consider the following generalizations of the subgroups $S(G)$ and $S_\infty(G)$.

Definition 1.1. Let $N_{\pi sp}(G)$ be the intersection of the normalizers of the π -special residuals of all subgroups of G , that is,

$$N_{\pi sp}(G) = \bigcap_{H \leq G} N_G(H^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}).$$

We say that $N_{\pi sp}(G)$ is the π -special norm of G .

Definition 1.2. Let

$$1 = N_{\pi sp}^0(G) \leq N_{\pi sp}^1(G) \leq \dots \leq N_{\pi sp}^n(G) \leq \dots,$$

where

$$N_{\pi sp}^{i+1}(G)/N_{\pi sp}^i(G) = N_{\pi sp}(G/N_{\pi sp}^i(G))$$

for all $i=0,1,2,\dots$. And let n be the smallest n such that $N_{\pi sp}^n = N_{\pi sp}^{n+1}$. Then we write $N_{\pi sp}^\infty(G) = N_{\pi sp}^n(G)$ and say that $N_{\pi sp}^\infty(G)$ is the π -special hypernorm of G .

Obviously, $N_{\pi sp}(G)$ and $N_{\pi sp}^\infty(G)$ are characteristic subgroups of G .

Before continuing, consider the following example.

Example 1.3. (i) Let $G = P \rtimes (Q \rtimes R)$, where $Q \rtimes R$ is a non-abelian group of order 6 and P is a simple $\mathbb{F}_7(Q \rtimes R)$ -module which is faithful for $Q \rtimes R$. Let $\sigma = \{\{2, 7\}, \{2, 7\}'\}$. Then G every proper non- π -special subgroup H of G is either of the form $C_7 \rtimes Q^x$, where $|C_7|=7$, or of the form $(Q \rtimes R)^y$ for some $x, y \in G$. In the former case we have $H^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} = C_7$ and $N_G(C_7) = PQ^x = PQ$. In the second case we have $((Q \rtimes R)^y)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} = Q^y$ and $N_G(Q^y) = (Q \rtimes R)^y$. Moreover,

$$\bigcap_{y \in G} (Q \rtimes R)^y = (Q \rtimes R)_G \leq C_G(P) = P$$

and so $N_{\pi sp}(G) = 1 = N_{\pi sp}^\infty(G)$.

(ii) Let G and σ are the same as in (i). Let $A = G \times C_2$. Let $B = (Q \rtimes R)C_2$, where C_2 is a group of order 2. Then $B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} = Q$, $C_2 \leq N_{\pi sp}(A)$ and $N_A(Q) = B < A$. Hence $N_{\pi sp}(A) = C_2 = N_{\pi sp}^\infty(G)$.

Our first observation is the following fact.

Theorem 1.4. For any group G , the subgroup $N_{\pi sp}^\infty(G)$ is σ -soluble.

Corollary 1.5 (Shen, Shi, Qian [10]). For any group G , the subgroup $S_\sigma(G)$ is soluble.

Our next result generalizes Theorem 1.4 in [10].

Theorem 1.6. Let $G = A \times B$, where A and B are subgroups of G and $(|A|, |B|) = 1$. Then

$$N_{\pi sp}(G) = N_{\pi sp}(A) \times N_{\pi sp}(B).$$

Corollary 1.7 (Shen, Shi, Qian [10]). Let $G = A \times B$, where A and B are subgroups of G and $(|A|, |B|) = 1$. Then $S(G) = S(A) \times S(B)$.

Theorem 1.8. The group G is meta- π -special if and only if $G/N_{\pi sp}(G)$ is meta- π -special.

Corollary 1.9 (Shen, Shi, Qian [10]). The group G is meta-nilpotent if and only if $G/S(G)$ is meta-nilpotent.

2 Proofs of the results

We will use in our proofs the following facts about the subgroups $N_{\pi sp}(G)$ and $N_{\pi sp}^\infty(G)$.

Lemma 2.1. If E is a subgroup of G , then $N_{\pi sp}(G) \cap E \leq N_{\pi sp}(E)$.

Lemma 2.2. If N is a normal subgroup of G , then $N_{\pi sp}(G)N/N \leq N_{\pi sp}(G/N)$.

Lemma 2.3. If N is a normal subgroup of G and $N \leq N_{\pi sp}^\infty(G)$, then $N_{\pi sp}^\infty(G/N) = N_{\pi sp}^\infty(G)/N$.

Proof of Theorem 1.4. It is enough to show that $N_{\pi sp}(G)$ is π -soluble. Let $X = N_{\pi sp}(G)$. Then the group X has the following property: the π -special residual of every subgroup of X is normal in X . We show that every group with such a property is π -soluble. Assume that this is false and let X be a counterexample of minimal order. Let M be a maximal subgroup of X and let $N = M^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}$ be the π -special residual of M . Then N is normal in G . If $N \neq 1$, then X/N and N are π -soluble since the hypothesis evidently holds for X/N and N and so in this case X π -soluble by the choice of X . Therefore every maximal subgroup M of X is π -special and so G is minimal non- π -special group. Then G is a Schmidt group and so soluble. This contradiction completes the proof of the result.

Lemma 2.4. Let $G = A \times B$, where A and B are subgroups of G . Then $G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} = A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \times B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}$.

Proof. First observe that

$$\begin{aligned} AB/A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}B &= A/(A \cap A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}B) = \\ &= A/A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}(A \cap B) = A/A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \in \mathfrak{N}_{\pi sp}, \end{aligned}$$

$B/B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \in \mathfrak{N}_{\pi sp}$ and

$$\begin{aligned} A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}B \cap B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}A &= A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}(B \cap B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}A) = \\ &= A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}(A \cap B) = A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}, \end{aligned}$$

so $G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \leq A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}$. On the other hand,

$$A/(A \cap G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}) \cong AG^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}/G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \in \mathfrak{N}_{\pi sp}$$

since the formation $\mathfrak{N}_{\pi sp}$ is hereditary. Hence

$A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \leq G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}$. Similarly, $B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \leq G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}$. Therefore

$$G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} = A^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \times B^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}. \quad \square$$

Proof of Theorem 1.6. Let H be any subgroups of G . Then $H = (H \cap A) \times (H \cap B)$ since $(|A|, |B|) = 1$.

Therefore $H^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} = (H \cap A)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \times (H \cap B)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}$ by Lemma 2.4. Hence

$$\begin{aligned} N_G(H^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}) &= N_G((H \cap A)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}) \cap N_G((H \cap B)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}) = \\ &= N_A((H \cap A)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}})B \cap N_B((H \cap A)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}})A = \\ &= N_A((H \cap A)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}) \times N_B((H \cap A)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}). \end{aligned}$$

Therefore we have $N_{\pi sp}(G) = N_{\pi sp}(A) \times N_{\pi sp}(B)$. \square

Proof of Theorem 1.8. It is enough to show that if $G/N_{\pi sp}(G)$ is meta- π -special, then also G is meta- π -special. Assume that this is false and let G be a counterexample of minimal order. Then $N_{\pi sp}(G) \neq 1$.

Let R be a minimal normal subgroup of G . Then $RN_{\pi sp}(G)/R \leq N_{\pi sp}(G/R)$ by Lemma 2.2. Moreover,

$$G / RN_{\pi sp}(G) \simeq (G / N_{\pi sp}(G)) / (RN_{\sigma}(G) / N_{\pi sp}(G)) \in \mathfrak{N}_{\pi sp}$$

since the class of all meta- π -special groups is a homomorph. Therefore the hypothesis holds for G/R , so the choice of G implies that G/R is meta- π -special. Hence

$$(G/R)^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} = G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} R / R \simeq G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} / (G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \cap R)$$

is π -special. Therefore $R \leq G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}$ and $G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} / R$ is π -special. If G has a minimal normal subgroup $N \neq R$, then $G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} / L$ is also π -special and so $G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \simeq G^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} / (R \cap L)$ is π -special and so G is meta- π -special, contrary to the choice of G . Therefore R is the unique minimal normal subgroup of G , so $R \leq N_{\pi sp}(G)$ since $N_{\pi sp}(G) \neq 1$. It is clear also that $R\Phi(G)$ and so for some maximal subgroup M of G we have $G = RM$ and $M_G = 1$. Moreover, $M^{\mathfrak{N}_{\pi sp}} \neq 1$ since G is not meta- π -special and R is π -special in view of Theorem 1.4 and the inclusion $R \leq N_{\pi sp}(G)$. Now observe that $R \leq N_G(M^{\mathfrak{N}_{\pi sp}})$ and so $M^{\mathfrak{N}_{\pi sp}}$ is normal in G . Hence $M_G \neq 1$. This contradiction completes the proof of the result.

REFERENCES

1. *Chunikhin, S.A.* Subgroups of finite groups / S.A. Chunikhin. – Minsk: Nauka i Tehnika, 1964.
2. *Guo, W.* On σ -supersoluble groups and one generalization of *CLT*-groups / W. Guo, A.N. Skiba // *J. Algebra.* – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.
3. *Skiba, A.N.* On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // *J. Algebra.* – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
4. *Skiba, A.N.* Some characterizations of finite σ -soluble *PST*-groups, / A.N. Skiba // *J. Algebra.* – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
5. *Chi, Z.* On Σ_i^σ -closed classes of finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // *Ukrainian Math. J.* – 2018, in Press.
6. *Chi, Z.* On n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // *Commun. Algebra*, in Press.
7. *Chi, Z.* A generalization of the Kramer's theory / Z. Chi, A. N. Skiba // *Acta Math. Hungarica*, in Press.
8. *Baer, R.* Der Kern, eine charakteristische Untergruppe / R. Baer // *Compos. Math.* – 1935. – Vol. 1. – P. 254–283.
9. *Baer, R.* Norm and hypernorm / R. Baer // *Publ. Math. Debrecen.* – 1956. – Vol. 4. – P. 347–350.
10. *Shen, Z.* On the norm of the nilpotent residuals of all subgroups of a finite group / Z. Shen, W. Shi, G. Qian // *J. Algebra.* – 2012. – Vol. 352. – P. 290–298.

Поступила в редакцию 13.11.18.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИНТЕЗА ТЕКСТОВ НА ОСНОВЕ СЛИЯНИЯ КОММУНИКАТИВНЫХ ФРАГМЕНТОВ

С.Ф. Липницкий

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси

MATHEMATICAL MODEL OF THE SYNTHESIS OF TEXTS BASED ON MERGING OF COMMUNICATIVE FRAGMENTS

S.F. Lipnitsky

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus

Предлагается математическая модель синтеза тестовых сообщений на основе слияния коммуникативных фрагментов. Формально определяются понятия таких фрагментов, а также вербально-ассоциативных сетей в качестве моделей знаний о предметной области и синтезируемых текстах.

Ключевые слова: вербальные ассоциации, коммуникативный фрагмент, синтез текста, текстовое сообщение, шаблон предложения.

A mathematical model for the synthesis of test messages based on the fusion of communicative fragments is proposed. Formally, the concepts of such fragments, as well as verbal-associative networks, are defined as models of knowledge about the subject area and synthesized texts.

Keywords: verbal associations, communicative fragment, synthesis of text, text message, sentence template.

Введение

Проблема генерации текстов возникает главным образом при проектировании и программной реализации систем машинного перевода с одного естественного языка на другой. При этом синтез предложений текста традиционно рассматривается как последовательная генерация лексем, затем синтаксических фраз и, наконец, предложений по известным синтаксическим правилам. Однако, в соответствии с результатами исследования проблемы синтеза речи, изложенными в монографии [1], основой использования языка человеком является его языковая память. Т. е. предложения при синтезе строятся из готовых хранящихся в памяти компонентов, названных коммуникативными фрагментами. Эти фрагменты не образуются по синтаксическим правилам, а извлекаются из памяти целиком.

В данной статье предлагается математическая модель синтеза тестовых сообщений на основе вербально-ассоциативных сетей. Вершинами таких сетей являются коммуникативные фрагменты, а ребра соответствуют вербально-ассоциативным связям между ними. Под вербальными ассоциациями в лингвистике и психолингвистике понимают семантические связи между словами и словосочетаниями, соответствующие ассоциативным отношениям между обозначаемыми ими сущностями в реальном мире.

Процесс синтеза текста реализуется в три этапа.

На первом этапе коммуникативные фрагменты каждого предложения текста на входном

языке заменяются коммуникативными фрагментами выходного языка с использованием двуязычного словаря.

На втором этапе создается кортеж вербально-ассоциативных сетей для синтезируемого текста на выходном языке.

На третьем этапе синтезируется текст на выходном языке.

1 Понятие коммуникативного фрагмента

С целью алгоритмизации синтеза текстов на основе слияния коммуникативных фрагментов, а также создания системы лингвистических словарей, используемых при синтезе, определим формально понятие коммуникативного фрагмента.

Пусть $\pi = a_1 a_2 \dots a_n$ – произвольное предложение (или подцепочка некоторого предложения) на входном языке из тематического корпуса текстов C_t . (Тематический корпус – это совокупность текстов по конкретной тематике. Объединение всех тематических корпусов образует полный корпус C_f .)

1) Если $n = 1$, то слово a_1 цепочки π назовем коммуникативным фрагментом.

2) Если $n \geq 2$ и $I_{C_t}^{a_1 a_2} < I_{C_t}^{00}$ ($I_{C_t}^{00}$ – пороговое значение информативности), то слово a_1 будем называть коммуникативным фрагментом. Информативность вербально-ассоциативной связи между словами вычисляется по следующей формуле из статьи [2]:

$$I_{C_t}^{ab} = \frac{n_{C_t}^{ab} + n_{C_t}^{Par,ab} + n_{C_t}^{Syn,ab}}{n_{C_f}^{ab} + N_{C_f}^{Par,ab} + N_{C_f}^{Syn,ab}}. \quad (1.1)$$

При вычислении значений вербальных ассоциаций между словами используется частотный словарь вербально-ассоциативных пар слов

$$Dic_{ab} = \{ \langle (a, b), n_{Cf}^{ab}, n_{Ct_1}^{ab}, n_{Ct_2}^{ab}, \dots, n_{Ct_n}^{ab} \rangle \mid a, b \in W_{Cf}, n_{Cf}^{ab} \neq 0, n_{Ct_i}^{ab} \neq 0, i = \overline{1, n} \},$$

где $n_{Cf}^{ab}, n_{Ct_i}^{ab}$ – абсолютные частоты совместной встречаемости слов a и b в одном и том же предложении полного Cf и i -го тематического корпуса текстов Ct_i ($i = \overline{1, n}$), W_{Cf} – множество всех словоформ полного корпуса текстов Cf (рисунок 1.1).

Параметр $n_{Ct}^{Par_{ab}}$ в формуле (1.1) указывает на число вхождений всех пар словоформ, являющихся словоизменениями соответственно слов a и b и встречающимися в одном и том же предложении корпуса текстов Ct . Параметр $n_{Ct}^{Syn_{ab}}$ имеет аналогичный смысл для синонимичных слов.

3) Если при $n \geq 2$ выполняется последовательность неравенств $I_{Ct}^{a_1 a_2} \geq I_{Ct}^{00}, I_{Ct}^{(a_1 a_2) a_3} \geq I_{Ct}^{00}, \dots, I_{Ct}^{(a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n} \geq I_{Ct}^{00}$, то цепочку $a_1 a_2 \dots a_n$ назовем коммуникативным фрагментом. Значения информативности $I_{Ct}^{(a_1 a_2) a_3}, \dots, I_{Ct}^{(a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n}$ вычисляются по формуле

$$I_{Ct}^{pb} = \frac{\sum_{a \in \pi} I_{Ct}^{ab}}{\sqrt{\sum_{a \in \rho} (I_{Ct}^{ab})^2}},$$

где ρ – любая подцепочка цепочки π .

4) Пусть $2 \leq m < n$. Подцепочку $a_1 a_2 \dots a_m$ цепочки π назовем коммуникативным фрагментом, если справедлива последовательность неравенств $I_{Ct}^{a_1 a_2} \geq I_{Ct}^{00}, I_{Ct}^{(a_1 a_2) a_3} \geq I_{Ct}^{00}, \dots, I_{Ct}^{(a_1 a_2 \dots a_{m-1}) a_m} \geq I_{Ct}^{00}$, а $I_{Ct}^{(a_1 a_2 \dots a_m) a_{m+1}} < I_{Ct}^{00}$.

Пары слов	Частота в Cf	Частота в Ct ₁	...	Частота в Ct _n
...				
(находился, на)	0401657	0074526	...	0023747
(скалярное, между)	0120410	0081123	...	0003445
...				
(стол, в)	0204055	0056534	...	0014445
(таблицы, численные значения)	0100234	0076534	...	0009987
...				

Рисунок 1.1 – Фрагмент словаря вербально-ассоциативных пар слов

2 Вербально-ассоциативные сети

Эффективность системы генерации текстов существенным образом зависит от их интеллектуальности, т. е. способности работать не только с данными, но и знаниями о предметной области.

Промоделируем знания о предметной области в виде вербально-ассоциативных сетей.

2.1 Вербально-ассоциативное отношение

Обозначим через $CoCt$ множество всех коммуникативных фрагментов произвольного тематического корпуса текстов $Ct \in Cf$. Определим на множестве $CoCt$ отношение толерантности Θ (рефлексивное и симметричное бинарное отношение), такое, что пара (f, g) любых фрагментов из множества Ft является элементом отношения Θ , т. е. $(f, g) \in \Theta$ тогда и только тогда, когда фрагменты f и g из этой пары содержатся хотя бы в одном предложении корпуса Ct . Отношение Θ будем называть вербально-ассоциативным отношением коммуникативных фрагментов предметной области, определяемой тематическим корпусом текстов Ct .

2.2 Дискурсивная сочетаемость коммуникативных фрагментов

Под дискурсом в лингвистике понимают связную последовательность предложений, обладающую семантическим единством [3]. Для получения «хороших» предложений при их синтезе из коммуникативных фрагментов будем использовать отношение дискурсивной сочетаемости таких фрагментов. Понятие этого отношения введем следующим образом.

Определим на множестве $CoCt$ всех коммуникативных фрагментов в тематическом корпусе текстов Ct антирефлексивное бинарное отношение Ω , такое, что для любых фрагментов $f, g \in CoCt$ соотношение $(f, g) \in \Omega$ выполняется тогда и только тогда, когда в некотором тексте $T \in Ct$ существует предложение π , в котором коммуникативный фрагмент f непосредственно предшествует фрагменту g . Отношение Ω будем называть отношением дискурсивной сочетаемости коммуникативных фрагментов в тематическом корпусе текстов Ct .

Упорядоченные пары $(f, g) \in \Omega$ будем хранить в специальном списке – словаре дискурсивно-сочетаемых коммуникативных фрагментов:

$$Dic_{fg} = \{ (f, g) \mid f \in CoCt, g \in CoCt, (f, g) \in \Omega \}.$$

2.3 Вербально-ассоциативная сеть тематического корпуса текстов

Рассмотрим граф вербально-ассоциативного отношения Θ . Пометим каждую вершину f этого графа значением информативности I_{Ct}^f коммуникативного фрагмента, которая вычисляется по формуле

$$I_{Ct}^f = \frac{I_{Ct}^a + I_{Ct}^b + \dots}{\sqrt{(I_{Ct}^a)^2 + (I_{Ct}^b)^2 + \dots}},$$

где $I_{Ct}^a, I_{Ct}^b, \dots$ – значения информативности всех слов цепочки f . Для вычисления этих значений воспользуемся формулой

$$I_{Ct}^x = \frac{n_{Ct}^x + n_{Ct}^{Par_x} + n_{Ct}^{Syn_x}}{n_{Cf}^x + n_{Cf}^{Par_x} + n_{Cf}^{Syn_x}}. \quad (2.1)$$

Параметр n с индексами Ct и Cf в формуле (2.1) – это частота слова x в соответствующих корпусах текстов с учетом синонимии и парадигматики [2].

Каждое ребро (f, g) графа отношения Θ пометим значением информативности I_{Ct}^{fg} вербально-ассоциативной связи фрагментов f и g (также учитывая синонимии и словоизменения). Пусть (f, g) – произвольное ребро этого графа. Если $(f, g) \in \Omega$, то для всех таких пар (f, g) вершины f и g соединим дугой, направленной от f к g . Обозначим полученный смешанный граф через Net_{Ct} .

Граф Net_{Ct} назовем вербально-ассоциативной сетью тематического корпуса текстов Ct (рисунк 2.1).

При практической реализации информационной системы граф Net_{Ct} целесообразно представить в виде

$Net_{Ct} = \{(f, I_{Ct}^f); (g, I_{Ct}^g); (I_{Ct}^{fg}, Arc)\} | f \in Ct, g \in Ct\}$, где $Arc = 1$, если $(f, g) \in \Omega$, $Arc = -1$, если $(g, f) \in \Omega$ и $Arc = 0$, если $(f, g) \notin \Omega$ и $(g, f) \notin \Omega$.

2.4 Вербально-ассоциативная сеть текста

Пусть имеется текст T . Обозначим через CoT множество всех коммуникативных фрагментов текста T . Рассмотрим сужение Θ_T отношения Θ на множество CoT , т. е. $\Theta_T = \Theta \cap (CoT \times CoT)$. Отношение Θ_T назовем отношением вербально-ассоциативной связи коммуникативных фрагментов в тексте T .

Построим также сужение Ω_T отношения Ω_i на множество CoT , т. е. $\Omega_T = \Omega_i \cap (CoT \times CoT)$. Отношение Ω_T назовем отношением дискурсивной сочетаемости коммуникативных фрагментов в тексте T .

Рассмотрим граф отношения Θ_T . Пометим каждую его вершину значением информативности соответствующего фрагмента, а каждое ребро (f, g) – значением информативности вербально-ассоциативной связи между инцидентными ему вершинами f и g . Если $(f, g) \in \Omega_T$, то ребро (f, g) заменяем дугой, направленной от f к g . Обозначим полученный смешанный граф через Net_T .

Граф Net_T будем называть вербально-ассоциативной сетью текста T .

При практической реализации информационной системы граф Net_T целесообразно представить в виде

$Net_T = \{(f, I_{Ct}^f); (g, I_{Ct}^g); (I_{Ct}^{fg}, Arc)\} | f \in T, g \in T\}$,

где $Arc = 1$, если $(f, g) \in \Omega_T$, $Arc = -1$, если $(g, f) \in \Omega_T$ и $Arc = 0$, если $(f, g) \notin \Omega_T$ и $(g, f) \notin \Omega_T$.

2.5 Вербально-ассоциативная сеть предложения

Пусть π – произвольное предложение из тематического корпуса текстов Ct , а $Co\pi$ – множество всех коммуникативных фрагментов предложения π . Рассмотрим сужение Θ_π отношения Θ на множество $Co\pi$, т. е. $\Theta_\pi = \Theta \cap (Co\pi \times Co\pi)$. Отношение Θ_π назовем вербально-ассоциативным отношением коммуникативных фрагментов в предложении π .

Построим также сужение Ω_π отношения Ω на множество $Co\pi$, т. е. $\Omega_\pi = \Omega \cap (Co\pi \times Co\pi)$. Отношение Ω_π назовем отношением дискурсивной сочетаемости коммуникативных фрагментов в предложении π .

Рассмотрим граф отношения Θ_π . Пометим каждую вершину f этого графа значением информативности I_{Ct}^f этого слова (с учетом синонимии и словоизменения), а каждое ребро (f, g) – значением информативности I_{Ct}^{fg} вербально-ассоциативной связи фрагментов f и g (также учитывая синонимии и словоизменения). Информативность I_{Ct}^f вычисляется по формуле (2.1), а информативность I_{Ct}^{fg} – по формуле

$$I_{Ct}^{fg} = \frac{\sum_{a \in f, b \in g} I_{Ct}^{ab}}{\sqrt{\sum_{a \in f, b \in g} (I_{Ct}^{ab})^2}}$$

Пусть (f, g) – произвольное ребро этого графа. Если $(f, g) \in \Omega_\pi$, то для всех таких пар ребро (f, g) заменим дугой, направленной от f к g . Обозначим полученный смешанный граф через Net_π .

Граф Net_π назовем вербально-ассоциативной сетью предложения π . В информационной системе граф Net_π представим в виде

$Net_\pi = \{(f, I_{Ct}^f); (g, I_{Ct}^g); (I_{Ct}^{fg}, Arc)\} | f \in \pi, g \in \pi\}$,

где $Arc = 1$, если $(f, g) \in \Omega_\pi$, $Arc = -1$, если $(g, f) \in \Omega_\pi$ и $Arc = 0$, если $(f, g) \notin \Omega_\pi$ и $(g, f) \notin \Omega_\pi$.

3 Синтез текстов

Будем считать, что на входе алгоритмов синтеза текста его вербально-ассоциативная сеть. Формирование этой сети рассмотрено в статье [4].

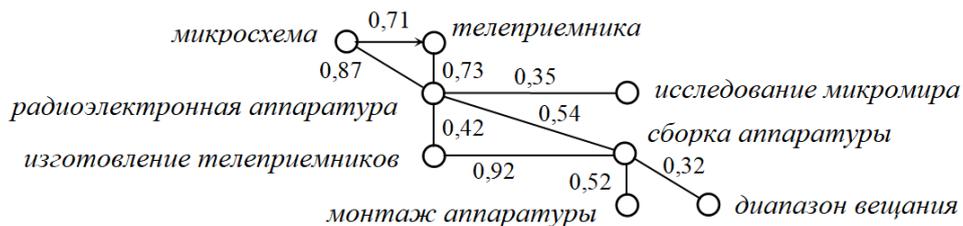


Рисунок 2.1 – Фрагмент вербально-ассоциативной сети

3.1 Двухязычный словарь коммуникативных фрагментов

Обозначим через $F_{\text{вх.}}$ множество всех коммуникативных фрагментов в полном корпусе текстов для входного языка (например, русского), а через $F_{\text{вых.}}$ – их множество для выходного (например, английского). Пусть $2^{F_{\text{вых.}}}$ – множество всех подмножеств множества $F_{\text{вых.}}$. Определим бинарное отношение Dic_{bil} на паре множеств $F_{\text{вх.}}$ и $2^{F_{\text{вых.}}}$, т. е. $Dic_{bil} \subseteq F_{\text{вх.}} \times 2^{F_{\text{вых.}}}$:

$$Dic_{bil} = \{ \langle f, \{g_1, g_2, \dots\} \rangle \mid f \in F_{\text{вх.}}; g_1, g_2, \dots \in F_{\text{вых.}} \}.$$

Таким образом, Dic_{bil} – это двухязычный словарь, каждая запись которого содержит коммуникативный фрагмент на входном языке и один или несколько эквивалентов на выходном (рисунок 3.1). В связи с такой структурой словаря возникает задача устранения лексической неоднозначности при переводе текстов с входного языка на выходной.

Коммуникативный фрагмент на русском языке	Коммуникативные фрагменты на английском языке
...	...
на суше	on land
	ashore
	overland
...	...
подход к решению проблемы	approach to problem solving
...	...

Рисунок 2.2 – Фрагмент двухязычного словаря

3.2 Устранение лексической неоднозначности при переводе текстов

Пусть T – любой текст из тематического корпуса текстов $Ct_{\text{вх.}}$ на входном языке, π – его произвольное предложение, а f – коммуникативный фрагмент этого предложения. Требуется найти однозначный эквивалент фрагмента f в двухязычном словаре Dic_{bil} . Предположим что однозначного эквивалента в словаре нет, имеется лишь пара $(f, \{g_1, g_2, \dots, g_r\})$. Обозначим через $Ct_{\text{вых.}}$ тематический корпус текстов на выходном языке, соответствующий по содержанию корпусу $Ct_{\text{вх.}}$, а через $Net_{Ct_{\text{вых.}}}$ – вербально-ассоциативную сеть корпуса $Ct_{\text{вых.}}$. В сети $Net_{Ct_{\text{вых.}}}$ проведем поиск всех звездных подграфов, определяемых вершинами g_1, g_2, \dots, g_r . Если найден единственный такой граф, определяемый некоторой вершиной g_l ($1 \leq l \leq r$), то коммуникативный фрагмент g_l на выходном языке будем считать эквивалентом фрагмента f на входном языке. Если же при поиске будет найдено два или более звездных подграфов сети $Net_{Ct_{\text{вых.}}}$, то эквивалентом фрагмента f будем считать такой фрагмент из множества $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$, в звездном графе которого будет наибольшее количество концевых вершин.

3.3 Построение кортежа вербально-ассоциативных сетей

Запишем каждое предложение π входного текста T в виде кортежа коммуникативных фрагментов: $\pi = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$. Требуется построить вербально-ассоциативную сеть соответствующего предложения ρ выходного текста, являющегося эквивалентом (переводом) входного предложения.

При построении сети предложения ρ все коммуникативные фрагменты предложения π ищутся в двухязычном словаре Dic_{bil} . После устранения лексической неоднозначности получим множество коммуникативных фрагментов Cor выходного предложения ρ . Далее все коммуникативные фрагменты из множества Cor отождествляются с вершинами сети $Net_{Ct_{\text{вых.}}}$. В результате получим вербально-ассоциативную сеть Net_{ρ} как подграф сети $Net_{Ct_{\text{вых.}}}$:

$$Net_{\rho} = \{ \langle (g, I_{Ct_{\text{вых.}}}^g); (h, I_{Ct_{\text{вых.}}}^h) \rangle; (I_{Ct_{\text{вых.}}}^{gh}, Arc) \mid g \in \rho, h \in \rho \}, \quad (3.1)$$

где $I_{Ct_{\text{вых.}}}^g$, $I_{Ct_{\text{вых.}}}^h$ – значения информативности коммуникативных фрагментов, $I_{Ct_{\text{вых.}}}^{gh}$ – информативность вербально-ассоциативной связи между коммуникативными фрагментами g и h , $Arc = 1$, если $(g, h) \in \Omega_{\rho}$, $Arc = -1$, если $(h, g) \in \Omega_{\rho}$ и $Arc = 0$, если $(g, h) \notin \Omega_{\rho}$ и $(h, g) \notin \Omega_{\rho}$. Отношение Ω_{ρ} дискурсивной сочетаемости коммуникативных фрагментов предложения ρ определяется аналогично отношению Ω_{π} .

3.4 Синтез выходного текста

Проиллюстрируем сначала процедуру синтеза выходного предложения ρ на следующем примере. Рассмотрим вербально-ассоциативную сеть предложения ρ , из которой исключены все ребра (рисунок 3.1).

Проверим на дискурсивную сочетаемость следующие пары коммуникативных фрагментов: (g_6, g_1) , (g_9, g_1) и (g_9, g_5) . В результате поиска данных орцепей в сети $Net_{Ct_{\text{вых.}}}$ выяснилось, что $(g_6, g_1) \in \Omega_{\rho}$. После преобразования орграф на рисунке 3.1 преобразуется к виду, представленному на рисунке 3.2.

Далее найдем наибольшее значение вербально-ассоциативной связи для пар коммуникативных фрагментов (g_9, g_5) и (g_4, g_7) . Пусть такое значение вычислено для пары (g_4, g_7) . Получим смешанный граф вида, показанный на рисунке 3.3.

Имеем кортеж коммуникативных фрагментов $\langle g_5, g_6, g_1, g_2, g_3, g_4, g_7, g_8, g_9 \rangle$, образующих выходное предложение ρ .

В общем виде алгоритм синтеза предложения на выходном языке работает следующим образом.

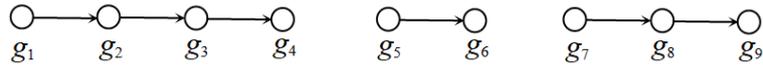


Рисунок 3.1 – Первый этап синтеза предложения ρ

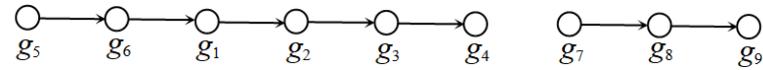


Рисунок 3.2 – Второй этап синтеза предложения ρ

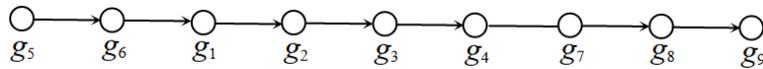


Рисунок 3.3 – Третий этап синтеза предложения ρ

Пусть имеется вербально-ассоциативная сеть (в виде множества (3.1)) выходного предложения ρ , которое необходимо синтезировать, используя эту сеть. Для синтеза следует упорядочить все коммуникативные фрагменты (вершины сети Net_ρ), т. е. найти в сети Net_ρ орцепь, вершинами которой эти фрагменты являются. Рассмотрим основные этапы упорядочения коммуникативных фрагментов.

Исключим из множества (3.1) все записи, в которых $Arc = 0$, т. е. коммуникативные фрагменты этой записи не являются дискурсивно сочетаемыми.

Во всех записях полученного множества поменяем местами коммуникативные фрагменты, если $Arc = 0$. Имеем следующее множество пар коммуникативных фрагментов:

$$Net'_\rho = \{(g, h) \mid g \in \rho, h \in \rho\}. \quad (3.2)$$

Представим множество всех коммуникативных фрагментов, полученных в результате перевода предложения $\pi = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ на выходной язык в виде кортежа $\sigma = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$, где g_i ($i = 1, s$) – эквивалент коммуникативного фрагмента f_i .

Используя множество (3.2), исследуем на дискурсивную сочетаемость пары коммуникативных фрагментов (g_1, g_2) , (g_2, g_3) и т. д. Получим множество кортежей пар

$$Net_\rho^1 = \{(g, h) \mid g \in \rho, h \in \rho\},$$

$$Net_\rho^m = \{(g, h) \mid g \in \rho, h \in \rho\}, \quad (3.3)$$

причем в каждом кортеже фрагменты во всех парах дискурсивно сочетаемы, т. е. $(g, h) \in \Omega_\rho$, и второй фрагмент каждой предыдущей пары является первым в следующей.

Далее строится множество Net_ρ^Σ путем поиска комбинаций и последовательного объединения пар кортежей вида (3.3). При этом кортежи объединяются, если имеются совпадающие коммуникативные фрагменты на их концах. В случаях, когда таких совпадений нет, то объединяются кортежи с наибольшей информативностью вербально-ассоциативной связи между соседними фрагментами в парах кортежей. В результате получим кортеж пар, на основе которого сформируем упорядоченную последовательность коммуникативных фрагментов предложения на выходном языке.

Заключение

Модель синтеза текста на основе слияния коммуникативных фрагментов может быть использована при решении следующих задач:

- машинный перевод текстов. Для всех предложений входного текста формируются вербально-ассоциативные сети, с использованием которых создается кортеж предложений на выходном языке. Многозначность перевода коммуникативных фрагментов, устраняется путем поиска контекста в сети тематического корпуса текстов этого языка;

- индексирование текстовых документов и запросов на поиск информации. В индексированном тексте выявляются коммуникативные фрагменты. Поисковый образ проиндексированного текста или запроса на поиск информации состоит из информативных фрагментов, каждому соответствует значение информативности;

- автоматическое реферирование и аннотирование текста. Одним из этапов при реализации этих процессов является построение шаблона входного текста. На основе этого шаблона генерируется выходной текст. При соответствующем подборе тематики и языка представления корпусов текстов возможны аннотирование и реферирование документов на различных входных языках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаспаров, Б.М. Язык, память, образ. Лингвистика языкового существования / Б.М. Гаспаров. – М.: Новое литературное обозрение, 1996. – 352 с.
2. Липницкий, С.Ф. Модель представления знаний в информационных системах на основе вербальных ассоциаций / С.Ф. Липницкий // Информатика. – 2011. – № 4. – С. 21–28.
3. Темнова, Е.В. Современные подходы к изучению дискурса / Е.В. Темнова // Язык, сознание, коммуникация : сб. статей. – М.: МАКС Пресс, 2004. – Вып. 26. – С. 24–32.
4. Липницкий, С.Ф. Моделирование анализа текстовых документов и кратких сообщений на основе вербальных ассоциаций / С.Ф. Липницкий // Информатика. – 2018. – № 1. – С. 70–80.

Поступила в редакцию 21.09.18.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).