



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№3 (36) 2018

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (36) 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЗОРЫ

- Хахомов С.А., Семченко И.В., Балмаков А.П., Самофалов А.Л.** Исследования по фундаментальным и прикладным аспектам электродинамики, современного материаловедения, физике нано- и метаматериалов, технологии нанесения покрытий в Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины 7

ФИЗИКА

- Ахраменко Н.А.** Поле тяготения массивной сферической оболочки 19
- Балмаков А.П., Хахомов С.А., Алешкевич Н.А., Семченко И.В., Ставенга Д.Г., Ванг Д.** Параметрическое моделирование фотонных кристаллов в перьях птиц 23
- Ма Д., Сонг С., Ху Ж., Балмаков А.П., Хахомов С.А., Ванг Д., Санг Т.** Модуляция фазы терагерцового излучения с помощью метаповерхностей для контролируемого прохождения излучения 28
- Малютина-Бронская В.В., Залесский В.Б., Семченко А.В., Сидский В.В.** Легированные пленки оксида цинка для конверсии спектра кремниевых солнечных элементов 32
- Митюрин Г.С., Лебедева Е.В., Алексюк М., Сердюков А.Н.** Термооптическое возбуждение звука бесселевыми световыми пучками в слоистых средах с внутренними напряжениями . . 39
- Фань Ш., Сун Я., Чжан С.** Широкополосный совершенный поглотитель из метаматериала на основе фрактальной структуры 44
- Шалунаев С.В., Никитюк Ю.В., Серeda А.А.** Лазерное термораскалывание сапфира пучками серповидной формы 49

МАТЕМАТИКА

- Антоневич А.Б., Шагова Т.Г., Шкадинская Е.В.** Алгебра мнемифункций на окружности . . 55
- Башун С.Ю., Пальчик Э.М.** О S -квазинормальных подгруппах в конечных группах 63
- Белокурский М.С., Деменчук А.К.** Признак отсутствия сильно нерегулярных периодических решений системы двух линейных дискретных периодических уравнений 67
- Гальмак А.М.** Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида . . 70
- Казимиров Г.Н.** Эквивалент структурной характеристики сложного процесса, моделируемого алгебраическими многочленами 76
- Каморников С.Ф., Шеметкова О.Л.** О дополнениях корадикала в расширениях конечных групп 80
- Тютянов В.Н., Бычков П.В.** Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка 84

ИНФОРМАТИКА

- Осипенко А.Н., Осипенко Н.Б., Слепенко Ю.А.** Web-приложение для выбора сферы деятельности 87
- Петушков А.А., Жадан М.И.** Принцип и возможности взаимодействия пользователя с системой передачи информации с использованием ИК-излучений 95
- Шевченко Д.Н., Литвин А.Ю., Федянин М.А.** Имитационное моделирование графа состояний в задачах анализа надежности технических систем 101

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 14.09.18. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,55. Уч.-изд. л. 10,94. Тираж 100 экз. Заказ № 680.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2018
© Проблемы физики, математики и техники, 2018
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2018

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 3 (36) 2018

CONTENTS

REVIEWS

- Khakhomov S.A., Semchenko I.V., Balmakou A.P., Samofalov A.L.** Research on the fundamental and applied aspects of electrodynamics, modern materials science, physics of nano- and meta-materials, technology of coating in F. Scorina Gomel State University 7

PHYSICS

- Akhramenko N.A.** The field of gravity of a massive spherical shell 19
- Balmakou A.P., Khakhomov S.A., Aleshkevich N.A., Semchenko I.V., Stavenga D.G., Wang J.** Parametric modeling of photonic crystals in feathers of birds 23
- Ma J., Song C., Hu Z.-D., Balmakou A.P., Khakhomov S.A., Wang J., Sang T.** THz phase modulation with broadband metasurfaces for controlling light propagation 28
- Malyutina-Bronskaya V.V., Zalesski V.B., Semchenko A.V., Sydsky V.V.** Alloyed zinc oxide thin films for the conversion of the silicon solar cells spectrum 32
- Mityurich G.S., Lebedeva E.V., Aleksiejuk M., Serdyukov A.N.** Thermo-optical excitation of sound by Bessel light beams in layered media with internal stress 39
- Fan S., Song Y., Zhang X.** Broadband perfect metamaterial absorber based on fractal structure . . 44
- Shalupaev S.V., Nikitjuk Y.V., Sereda A.A.** Laser thermosplitting of sapphire by crescent-shaped beams 49

MATHEMATICS

- Antonevich A.B., Shahava T.R., Shkadinskaia E.V.** Algebra of mnemofunctions on a circle . . . 55
- Bashun S.Yu., Palchik E.M.** On S -quasinormal subgroups in finite groups 63
- Belokursky M.S., Demenchuk A.C.** The condition of the absence of strongly irregular periodic solutions of the system of two linear discrete periodic equations 67
- Gal'mak A.M.** Permutability of elements in polyadic groupoids of special form 70
- Kazimirov G.N.** Equivalent of the structural characteristic of a complex process modeled by algebraical polynomials 76
- Kamornikov S.F., Shemetkova O.L.** On complements of residual in extensions of finite groups . . 80
- Tyutyaynov V.N., Bychkov P.V.** Finite groups with nilpotent subgroups of odd order 84

INFORMATION SCIENCE

- Osipenko A.N., Osipenko N.B., Slepianok Y.A.** Web-application for selection of activity area . . 87
- Petushkov A.A., Zhadan M.I.** The principle and capabilities of user interaction with the information transmission system using infrared radiation 95
- Shevchenko D.N., Litvin A.U., Fedianin M.A.** Reliability analysis of technical systems by simulation modeling of graph of states 101

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.513: 537.862: 539.2: 621.396.67: 661.862: 669.14: 678.07

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ И ПРИКЛАДНЫМ АСПЕКТАМ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ, СОВРЕМЕННОГО МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЯ, ФИЗИКЕ НАНО- И МЕТАМАТЕРИАЛОВ, ТЕХНОЛОГИИ НАНЕСЕНИЯ ПОКРЫТИЙ В ГОМЕЛЬСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

С.А. Хахомов, И.В. Семченко, А.П. Балмаков, А.Л. Самофалов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

RESEARCH ON THE FUNDAMENTAL AND APPLIED ASPECTS OF ELECTRODYNAMICS, MODERN MATERIALS SCIENCE, PHYSICS OF NANO- AND METAMATERIALS, TECHNOLOGY OF COATING IN F. SCORINA GOMEL STATE UNIVERSITY

S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, A.P. Balmakou, A.L. Samofalov

F. Scorina Gomel State University

Работа представляет собой обзор результатов исследований, произведенных в рамках направления «Многофункциональные материалы и технологии», приоритетных направлений научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы, выполненных в ГГУ им. Ф. Скорины.

Ключевые слова: метаматериал, безэховая камера, покрытие, вакуумно-плазменная технология, золь-гель технология.

The paper is a review of the results of studies carried out in Francisk Scorina Gomel State University within the framework of the “Multifunctional materials and technologies” direction, priority areas of scientific research of the Republic of Belarus for 2016-2020.

Keywords: metamaterial, anechoic chamber, coating, vacuum-plasma technology, sol-gel technology.

Введение

В Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины научные исследования в области материаловедения, как междисциплинарного раздела науки, изучающего изменения свойств материалов (структуры, термических, химических, механических, магнитных, оптических) в твердом и жидком состояниях в зависимости от различных факторов проводятся с 70-х годов 20-го века под руководством В.А. Белого [1], [2], Б.В. Бокутя [3], А.В. Рогачева [4].

Существенный вклад в развитие данного направления внесли А.Н. Сердюков [3], [5], Г.С. Митюрин [6], Д.Г. Лин [7], И.М. Мельниченко [8], [9] и др.

В ГГУ им. Ф. Скорины работают 5 научно-исследовательских лабораторий.

1 Межкафедральная научно-исследовательская лаборатория «Физика волновых процессов»

Лаборатория «Физика волновых процессов», созданная приказом ректора №779 от 20 сентября 1999 года, научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор И.В. Семченко, в определенной степени продолжает и развивает направления работы [10]–[12] отраслевой научно-исследовательской лаборатории «Синтез», которая была создана при кафедре

радиофизики в мае 1974 года и существовала до конца 1991 года под руководством кандидата технических наук доцента В.Н. Мизгайлова [13]. Одной из научных групп в составе НИЛ «Синтез» руководил также кандидат технических наук, доцент И.Ф. Добровольский [14].

В 1974–1975 гг. в университете были созданы безэховые камеры: прямоугольная размером поверхности 20 м^2 и рупорная размером 30 м^2 , разработанные на кафедре радиофизики для студентов физического факультета по циклу «Распространение радиоволн». Внутренняя поверхность прямоугольной безэховой камеры была облицована специальным высокочастотным радиопоглощающим материалом БМП-1, представляющем собой пенопластовые блоки, в которые установлены элементы конусовидной формы («ёлочки»), выполненные из стекловолокна (рис. 1.1).



Рисунок 1.1 – Пенопластовый блок, содержащий конусовидные элементы из стекловолокна

В 2018 году проведено обновление безэховой камеры в ГГУ им. Ф. Скорины с помощью широкодиапазонного поглотителя электромагнитных волн (ПЭВ) «ТОРА», который представляет собой диэлектрический радиопоглощающий материал пирамидального типа в виде панелей из эластичного пенополиуретана с углеродным наполнителем и предназначен для покрытия внутренних поверхностей в высококачественных безэховых камерах (рисунки 1.2, 1.3). ПЭВ «ТОРА» обеспечивает проведение высокоточных измерений характеристик антенной техники и испытаний радиоэлектронной аппаратуры на электромагнитную совместимость и по своим электродинамическим и эксплуатационным характеристиками не уступает лучшим мировым аналогам.

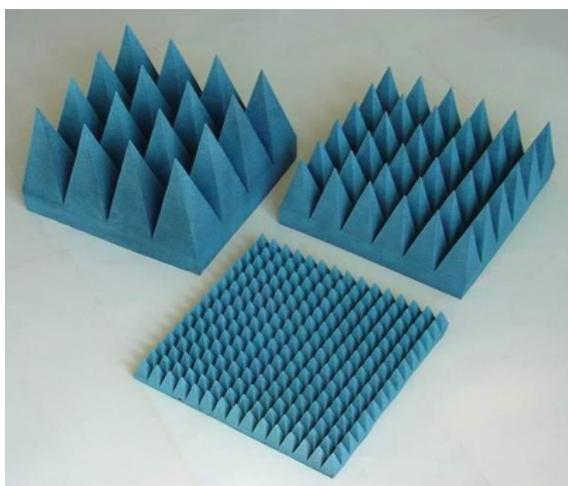


Рисунок 1.2 – Пирамидальные поглотители «ТОРА»

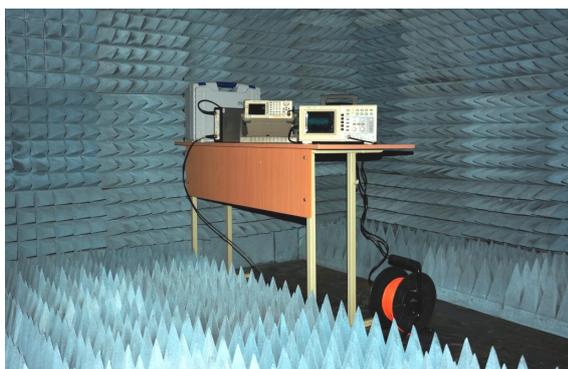


Рисунок 1.3 – Обновленная безэховая камера ГГУ (2018)

Основные направления работы лаборатории «Синтез» определялись задачами, стоявшими в то время перед университетом и промышленностью и включали в себя исследования возможности формирования слабонаправленных диаграмм антенными системами, размещаемыми на объектах сложной формы; исследования и разработки методов решения практических задач возбуждения системы излучателей и их согласование в

диапазоне частот; разработку радиофизических методов измерений и создание стендовой аппаратуры и др. В 1981 г. на работу в НИЛ «Синтез» после окончания физического факультета Гомельского государственного университета был распределён молодой специалист И.В. Семченко, который проработал там до поступления в аспирантуру в ноябре 1981 г. Хотя в то время И.В. Семченко занимался исследованиями в области оптики, работа в НИЛ «Синтез» в большой степени повлияла на выбор направления его дальнейших исследований. Приблизительно через 10 лет вектор научного интереса гомельских физиков совершил характерный виток, и на физическом факультете начались исследования искусственных структур с би-анизотропными и киральными свойствами, а впоследствии – метаматериалов и метаповерхностей. Произошла корректировка направления научных исследований от антенных систем к преобразователям поляризации и поглотителям СВЧ и ТГц волн на основе метаматериалов.

Основные направления работы лаборатории «Физика волновых процессов» в настоящее время: изучение электродинамики искусственных анизотропных структур; расчет, конструирование и создание метаматериалов с особыми диэлектрическими и магнитными свойствами в микроволновом и СВЧ диапазоне; разработка физических основ взаимодействия электромагнитного поля с биологическими объектами; развитие методов исследования акустических волн в средах с искусственной анизотропией [15]. В 2001 г. сотрудниками лаборатории совместно с финскими учеными (авторы А.Н. Сердюков, И.В. Семченко, С.А. Третьяков, А.Г. Сихвола) на английском языке опубликована монография «Электродинамика би-анизотропных материалов. Теория и приложения» объёмом 337 страниц в международном научном издательстве Gordon and Breach Science Publishers, которая стала одной из наиболее цитируемых монографий по данной тематике: по базе данных Google Scholar на июль 2018 года – 476 ссылок [5].

Ученые лаборатории имеют достижения на мировом уровне в области создания и исследования метаматериалов, о чем свидетельствуют публикации в журналах *Physical Review X* [16], *Physical Review B* [17], других престижных международных журналах с высоким импакт-фактором [18]–[27].

К наиболее важным результатам можно отнести, например, то, что на основе спиральных элементов удалось создать широкополосные безотражательные метаповерхности с частотно-селективным прохождением и идеальным поглощением [16] (рисунок 1.4), рассчитать киральный метаматериал с единичным отрицательным показателем преломления [28] (рисунки 1.4–1.7).

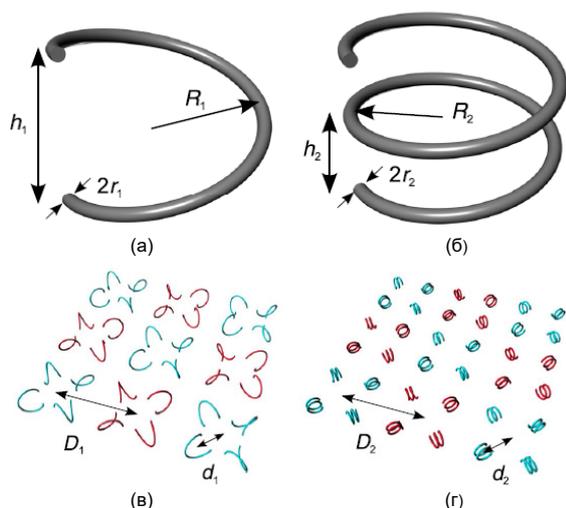


Рисунок 1.4 – Одновитковые (а) и двухвитковые (б) спиральные элементы. Расположение одновитковых (в) и двухвитковых (г) спиральных включений в массивах. Синий и красный цвета обозначают правые и левые спирали соответственно [16]

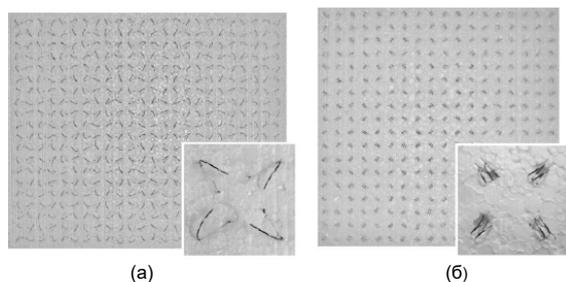


Рисунок 1.5 – Изготовленные метаповерхности из одновитковых (а) и двухвитковых (б) спиралей, содержащие соответственно 480 и 324 элемента, закрепленных в пенопласте [16]

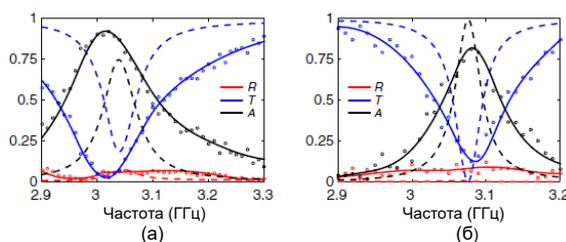


Рисунок 1.6 – Измеренные и моделированные коэффициенты отражения R , прохождения T и поглощения A для метаповерхности с (а) одно- и (б) двухвитковыми включениями. Точки обозначают измеренные значения. Сплошные линии – кривые огибающей измеренных данных. Пунктирные линии показывают соответствующие моделируемые коэффициенты измеренных образцов [16]

На основе оптимальных спиральных элементов возможна реализация тонкой поглощающей метаповерхности, которая не отражает волны в широком частотном диапазоне, в то

время как коэффициент прохождения имеет минимум в полосе полного поглощения (рисунок 1.6). Такая метаповерхность реализуется использованием киральных частиц в элементарных ячейках, расположенных в периодическом плоском рацемическом массиве, что компенсирует киральность на макроскопическом уровне. Такой подход имеет широкий диапазон возможных применений во всем спектре электромагнитных волн в том числе, например, при создании совершенных компактных волновых фильтров, новых видов болометров, селективных многочастотных сенсоров [16]. Возможна разработка болометра, который измеряет мощность падающего излучения различных спектральных линий одновременно. Узкополосный отклик предложенных поглотителей делает их идеальными кандидатами для использования в болометрических массивах в астрономии для волн дальнего ИК диапазона. Благодаря безотражательному принципу действия, предложенные поглотители могут быть успешно использованы для стелс-приложений, особенно для неметаллических объектов. В отличие от обычных поглотителей на металлической поверхности, они не увеличивают эффективную площадь рассеяния скрытого объекта за пределами полосы поглощения [16].

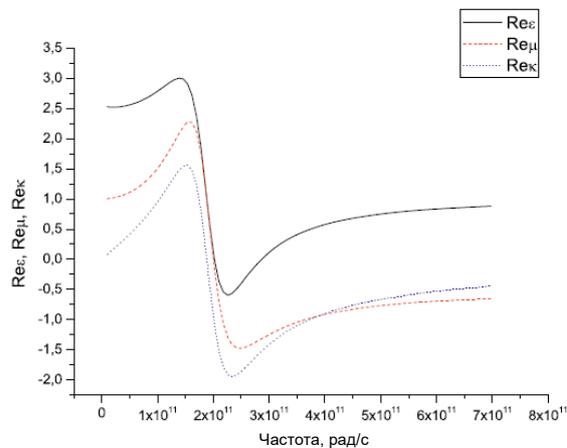


Рисунок 1.7 – Частотные зависимости действительных частей диэлектрической проницаемости ϵ , магнитной проницаемости μ и параметра киральности κ к моделируемым образцам метаматериалов из одновитковых спиральных элементов [28]

Анализ рисунка 1.7 позволяет заключить, что на определенной частоте вблизи резонансной частоты можно реализовать предсказанные эффективные параметры и создать киральный метаматериал с единичным отрицательным показателем преломления [28].

За последние пять лет три сотрудника лаборатории А.П. Балмаков (2013, руководитель с белорусской стороны – И.В. Семченко, с японской – профессор М. Нагату), И.А. Фаняев (2017, руководитель с белорусской стороны –

И.В. Семченко, с японской – профессор В. Мизейкис), С.Д. Барсуков (2018, руководитель с белорусской стороны – С.А. Хахомов, с японской – профессор Д. Кондох) в рамках программы получения двойной ученой степени защитили диссертации на соискание степени PhD (Philosophy Doctor) в области физики в университете Шизуока, Япония (рисунки 1.8–1.10) и один – В.С. Асадчий – в университете Аалто, Финляндия (2017, руководитель с белорусской стороны – И.В. Семченко, с финской – профессор С.А. Третьяков, рисунок 1.11).

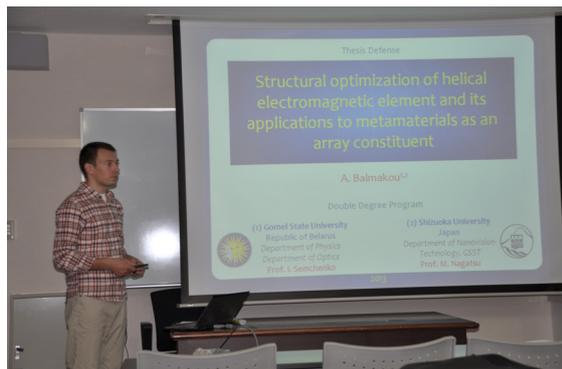


Рисунок 1.8 – А.П. Балмаков во время защиты диссертации в университете Шизуока, Япония (2013)



Рисунок 1.9 – И.А. Фаняев во время защиты диссертации в университете Шизуока, Япония (2017)



Рисунок 1.10 – С.Д. Барсуков во время защиты диссертации в университете Шизуока, Япония (2018)

Всего за время существования лаборатории её сотрудниками защищены 1 докторская и 5 кандидатских диссертаций, получено более 10 патентов на изобретения, полезные модели, промышленные образцы.



Рисунок 1.11 – В.С. Асадчий (крайний слева) во время защиты диссертации в университете Аалто, Финляндия (2017)

Необходимо отметить, что для создания образцов спирально структурированных материалов с параметрами, оптимальными для работы в терагерцовом диапазоне, весьма перспективен разработанный в Институте физики полупроводников Сибирского отделения Российской Академии наук (ИФП СО РАН) метод наноструктурирования, называемый Принц-технологией. Данный метод формирования трёхмерных микро- и наноструктур состоит в отделении напряжённой полупроводниковой плёнки от подложки и последующем сворачивании её в пространственный объект. Предложенный в 1995 году В.Я. Принцем, работающим в ИФП СО РАН, метод применяется в научных лабораториях всех развитых стран (США, Японии, Германии и др.), но только в ИФП СО РАН и ГГУ им. Ф. Скорины его используют для формирования спирально-структурированных массивов электромагнитных резонаторов и метаматериалов, см. рисунки 1.12, 1.13 [29]–[33], [22].

В рамках разработанной в ИФП СО РАН технологии возможно масштабирование размеров спиральных элементов (диаметр спиральных элементов – от единиц до сотен микрометров – и их длина – вплоть до нескольких нанометров – обеспечиваются литографически). Следовательно, можно контролируемо варьировать резонансные свойства киральных метаматериалов на основе спиральных элементов в широком диапазоне (от СВЧ до оптического). Такие метаматериалы перспективны для создания функциональных устройств, предназначенных для управления поляризацией, интенсивностью и другими параметрами излучения [32], [33].

В лабораторных условиях экономически целесообразно и удобнее проводить модельные эксперименты в СВЧ-диапазоне на массивах из проволочных спиральных элементов, поскольку из них легко конструировать трёхмерные массивы различной конфигурации: закреплять на радиопрозрачной подложке, ориентировать необходимым образом в радиопрозрачной матрице и т. п.

Полученные на массивах проволочных модельных спиральных элементов результаты могут быть распространены на спиральные элементы из металл-полупроводниковых пленок той же геометрии с толщинами металлических слоев, существенно превышающими толщину скин-слоя как и в СВЧ-диапазоне [32], [33].

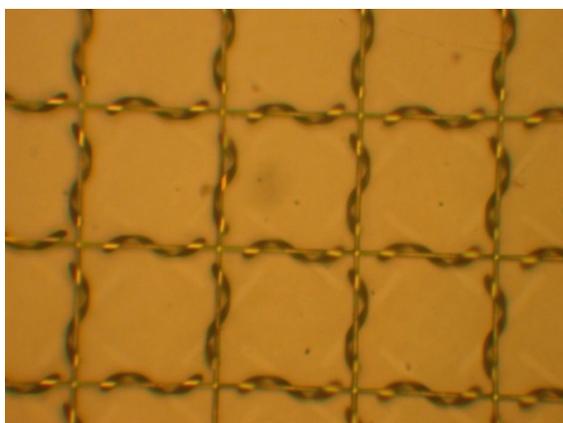


Рисунок 1.12 – Фотография метаматериала, реализованного по расчетам ГГУ им. Ф. Скорины в ИФП СО РАН в форме сетки с квадратными ячейками. Квадратная сетка – негативный фоторезист из полимерного материала толщиной около 1 мкм [32]

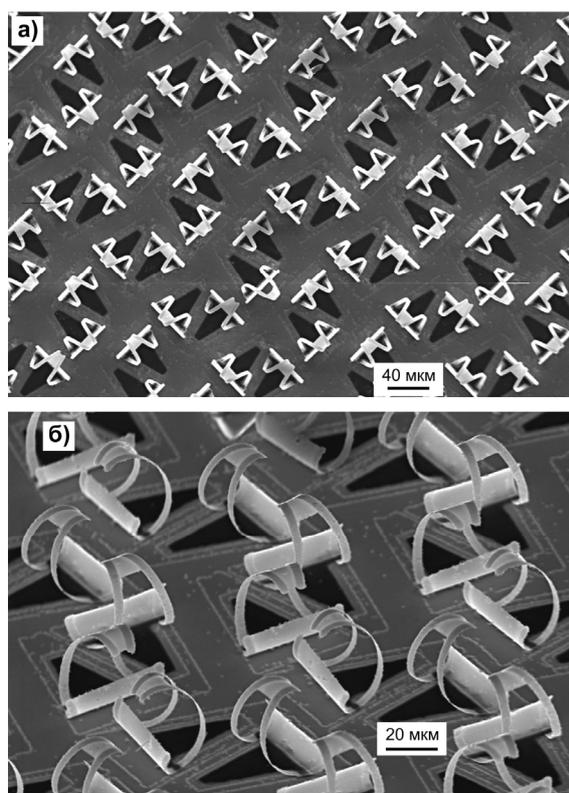


Рисунок 1.13 – СЭМ-изображение метаматериала, образованного одновитковыми спиралями на основе плёнки из $In_{0,2}Ga_{0,8}As/GaAs/Ti/Au$ в ИФП СО РАН; а) вид сверху; б) вид под углом [33]

Наибольшую потребность в киральных метаматериалах испытывают разработчики устройств терагерцового и ИК диапазона, где проблема трансформации поляризации очень актуальна из-за отсутствия соответствующих эффективных фазовых пластинок (даже полуволновых). В последние годы наряду с ИФП СО РАН лабораторией налажено тесное сотрудничество с ОАО «ИНТЕГРАЛ». Для метаматериалов ТГц диапазона искусственные элементы-резонаторы должны иметь характерные размеры порядка единиц – десятков микрометров, чтобы оставаться существенно меньшими длины волны электромагнитного излучения. Для получения согласованного отклика все резонаторы огромного массива должны быть очень точно настроены. Из широко применяемых технологий требуемые размеры и точность обеспечивает традиционная планарная технология, которая позволяет формировать плоские элементы и их слои. Образцы таких метаматериалов по расчетам ГГУ им. Ф. Скорины изготовлены в ОАО «ИНТЕГРАЛ» (рисунок 1.14, [25])

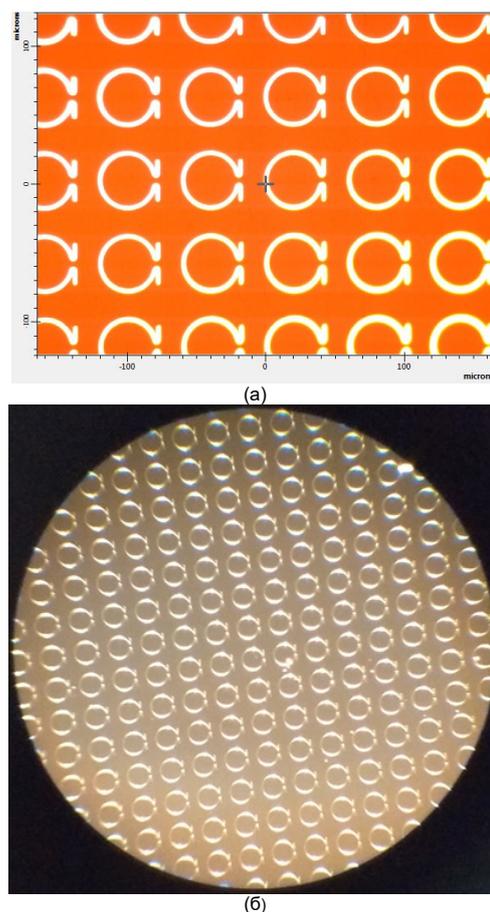


Рисунок 1.14 – Фотошаблон (а) и фотография образца метаматериала (б), образованного омега-подобными элементами, изготовленного ОАО «ИНТЕГРАЛ» (увеличение 200x) [25]

Создание трехмерного структурированного объемного материала довольно тяжело и дорого.

Метасурfaces, представляющие собой упорядоченные специальным образом в пространстве двумерные массивы частиц (омега-элементов), размеры которых много меньше длины волны возбуждающего излучения, являются интересным и важным объектом исследования из-за возможностей более простых способов изготовления (не только нанолитографии, но и, например, химических способов получения двумерных объектов) (рисунок 1.15).

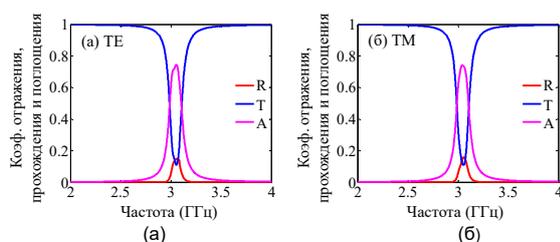


Рисунок 1.15 – Коэффициенты отражения R , прохождения T и поглощения A метаматериала на основе сбалансированных прямоугольных Ω -резонаторов с оптимизированными структурными параметрами для ТЕ (а) и ТМ (б) волн при нормальном падении

Исследование наблюдаемых в природе биологических фотонных объектов с подходящими свойствами для эффективного контроля отражения света и рассмотрение возможности разработки на основе указанных многослойных фотонных структур перестраиваемых селективных датчиков излучения также представляет значительный научный интерес (рисунок 1.16, [34]).

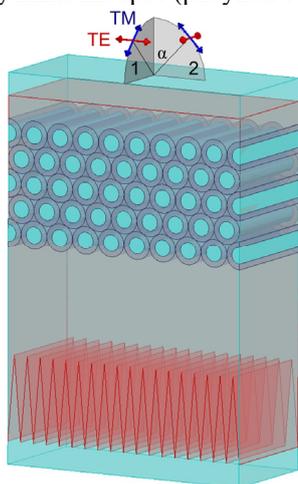


Рисунок 1.16 – Двумерный фотонный кристалл, формирующий структурное цветообразование в перьях некоторых птиц. Общий вид фотонного кристалла, на который падает свет под углом α с поляризациями ТЕ или ТМ

Сотрудниками лаборатории определен тип фотонного кристалла, ответственного за структурное цветообразование в перьях некоторых птиц, определены материальные параметры для всех составляющих фотонного кристалла.

Рассмотрены основные физические механизмы формирования отражения многослойными системами, которые в некотором приближении могут использоваться для определения отражающей способности фотонного кристалла [34].

2 Проблемная научно-исследовательская лаборатория перспективных материалов

Проблемная научно-исследовательская лаборатория (ПНИЛ) создана 1 октября 1980 г. на основании распоряжения Совета Министров республики от 22 июля 1980 года № 591 и приказа Минвуза от 22 августа 1980 года № 495 в целях широкого привлечения профессорско-преподавательского состава, аспирантов и студентов университета к исследованиям в рамках актуальных научных направлений. Первоначально лаборатория занималась исследованиями физико-химической механики процессов трения. Первым научным руководителем лаборатории был академик, доктор физико-математических наук, профессор Б.В. Бокуть, являвшийся в то время также ректором ГГУ. Ученые лаборатории разработали ряд экспериментальных приборов для исследования свойств покрытий материалов, диагностики и активного контроля различных машин, технологических процессов. Под руководством доктора технических наук, профессора И.М. Мельниченко (с 1988 по 2001 г.) лаборатория получила новое научное направление: создание перспективных материалов на базе золь-гель технологии. На сегодняшний день Проблемной научно-исследовательской лабораторией перспективных материалов (ПНИЛ ПМ) накоплен значительный опыт в области высоких технологий получения новых материалов и изделий на базе золь-гель технологий: покрытий, кварцевых стекол, керамики, композитов, абразивного инструмента и др. (рисунок 2.1–2.3) [35]–[39].

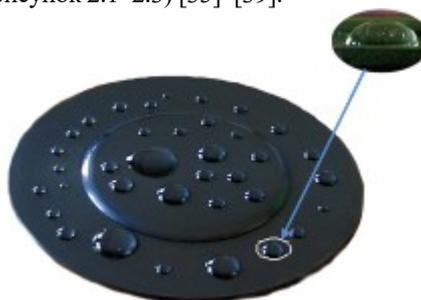


Рисунок 2.1 – Пленкообразующий раствор для формирования золь-гель гидрофобных, просветляющих покрытий на поверхности очковых линз и оптических элементах

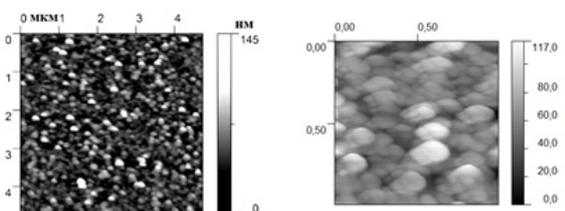
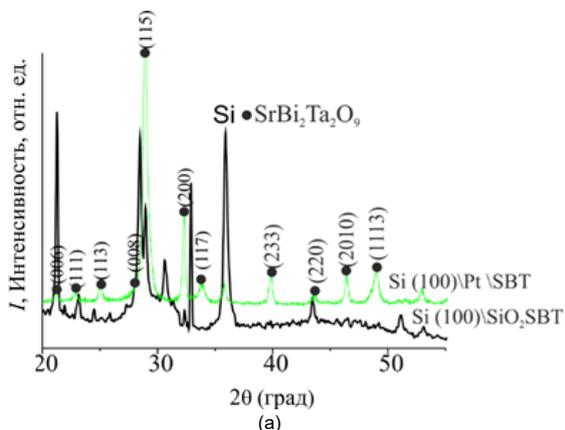
Учеными лаборатории установлена взаимосвязь структуры и сегнетоэлектрических свойств наноструктурированных $\text{SrBi}_2\text{Ta}_2\text{O}_9$ и $\text{SrBi}_2(\text{Ta}_x\text{Nb}_{1-x})_2\text{O}_9$ (SBT и SBTN) в зависимости от химического состава золя и параметров золь-гель процесса (рисунок 2.4)



Рисунок 2.2 – Пеностекло на основе аэросила технического (отходов Гомельского химзавода) в виде легких и теплых строительных блоков



Рисунок 2.3 – Абразивный шлифовальный инструмент повышенной стойкости на керамической связке из первичного и вторичного абразива



Si(100)\Pt\SBT

Si(100)\SiO₂\SBT

Рисунок 2.4 – Рентгенограммы SBT-плёнок (а) и АСМ-изображения SBT-плёнок (б) [39]

Проводимые научные исследования направлены на создание принципиально новых наукоемких конкурентоспособных материалов и технологий в рамках приоритетных для Республики Беларусь научных направлений. В настоящее

время руководителем лаборатории является ученик И.М. Мельниченко кандидат физико-математических наук В.Е. Гайшун.

За время существования лаборатории её сотрудниками защищены 4 докторские и 9 кандидатских диссертаций, получено более 80 свидетельств на изобретения, патенты и промышленные образцы. Разработки ПНИЛ ПМ отмечены дипломами и медалями международных выставок, внедрены в производство на десятках предприятий Беларуси и Российской Федерации.

С целью проведения более глубокого изучения разрабатываемых в ПНИЛ ПМ материалов и обмена опытом заключены договора о научно-техническом сотрудничестве с целым рядом научно-исследовательских организаций России, Украины, Мексики, Польши, Кореи.

3 Польско-белорусская научная лаборатория золь-гель материалов и технологий

В 2016 году создана совместная польско-белорусская научная лаборатория золь-гель материалов и технологий на базе Института низких температур и структурных исследований Польской академии наук (город Вроцлав) и Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Эта лаборатория с 2017 года выполняет международный проект



(TRANSition metal oxides with metastable phases: a way to ward superior FERRoic properties) [40] в рамках грантовой программы Европейского Союза Horizon 2020.

Проект TransFerr предполагает научное сотрудничество ученых из разных стран с целью синтеза ферритов (в том числе для метаматериалов) различными способами, исследования магнитных и других свойств полученных материалов, поиска областей их возможного применения. Предполагается, что ученые из различных научных организаций (Институт низких температур и структурных исследований, г. Вроцлав, Польша; Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва; Университет Авейро, г. Авейро, Португалия; Центр Гельмгольца по материаловедению и прибрежным исследованиям, г. Геестхаст, Федеративная Республика Германия; ОАО «Нанокерамика», г. Вроцлав, Польша; Институт физики НАН Украины, г. Киев, Украина; Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, г. Гомель, Беларусь; НПЦ по материаловедению НАН Беларуси, Минск, Беларусь) смогут проявить свои сильные стороны и одновременно использовать достижения коллег из других стран для быстрого и максимально полного прогресса желаемого результата.

4 Научно-исследовательская лаборатория «Физикохимия и технологии микро- и наноразмерных систем»

Научно-исследовательская лаборатория «Физикохимия и технологии микро- и наноразмерных систем» была создана приказом ректора Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины в 2005 г. Заведующим НИЛ «Физикохимия и технологии микро- и наноразмерных систем» является к.ф.-м.н., доцент Н.Н. Федосенко, научным руководителем – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор А.В. Рогачев.

Основной целью НИЛ являются проведение исследований, направленных на разработку высокоэффективных технологических процессов напыления диэлектрических, металлических, полимерных и полупроводниковых материалов, стимулированных лазерным излучением в вакууме; разработку физико-химических основ формирования тонких пленок с требуемыми и управляемыми физическими свойствами и изучение влияния условий осаждения, структуры и фазового состава пленки, природы подложки на физико-технические свойства тонкопленочных систем различного функционального назначения в области микро- и наноэлектроники; совершенствование и развитие методов ионно-лучевых, ионно-плазменных, корпускулярно-фотонных технологий с целью создания высокотехнологичных и конкурентно способных вакуумных установок указанного типа [41]–[47].

5 Китайско-белорусская научная лаборатория по вакуумно-плазменным технологиям

13 июня 2012 года на базе Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, а 28 сентября 2012 года в Нанкинском университете науки и технологии открыта международная китайско-белорусская научная лаборатория по вакуумно-плазменным технологиям. Научным руководителем лаборатории является член-корреспондент НАН Беларуси, профессор А.В. Рогачев. В последующие годы совместно с вышеуказанным университетом выполнены проекты «Разработка методов формирования и исследование свойств наноконпозиционных, легированных органических и неорганических покрытий из активной газовой фазы» и «Формирование плазменными и ионно-лучевыми методами покрытий сложного состава на основе углерода и нитридов металлов, изучение их свойств».

На протяжении последних пяти лет лабораторией «Физикохимия и технологии микро- и наноразмерных систем» и китайско-белорусской научной лабораторией по вакуумно-плазменным технологиям разработано и поставлено в КНР научное оборудование, вакуумные установки на сумму превышающую 360 тыс. долларов США (рисунки 5.1, 5.2).



Рисунок 5.1 – Вакуумная установка для нанесения углеродных покрытий методом импульсного катодно-дугового распыления (2013)



Рисунок 5.2 – Вакуумная установка для нанесения полимерных наноконпозиционных покрытий из газовой фазы методом электронно-лучевого диспергирования (2017)

Ученые лаборатории разработали способ нанесения покрытия с антибактериальным действием на медицинское изделие на основе высокомолекулярного соединения [48], а также покрытие, которое в контакте с живыми тканями распадается без ущерба для здоровья человека. При этом в зону контакта непрерывно поступают соединения, которые оказывают антибактериальное действие. В состав покрытия могут быть введены соединения, способствующие росту костей. Получено разрешение на их применение в медицинской практике. Совместно с коллегами из Нанкинского университета науки и технологии (Китай) разработана вакуумная технология нанесения антибактериальных покрытий на изделия медицинского назначения. Антибактериальное покрытие предназначено для различных изделий медицинского назначения: металлических имплантов, зубных протезов, ортодонтических винтов, хирургических фиксаторов и сеток, титановых пластин, марлевых повязок и т. д. (рисунок 5.3).

Новая технология позволяет обеспечить пролонгированное действие антимикробных препаратов и предотвращает появление и развитие местных и генерализованных инфекций.

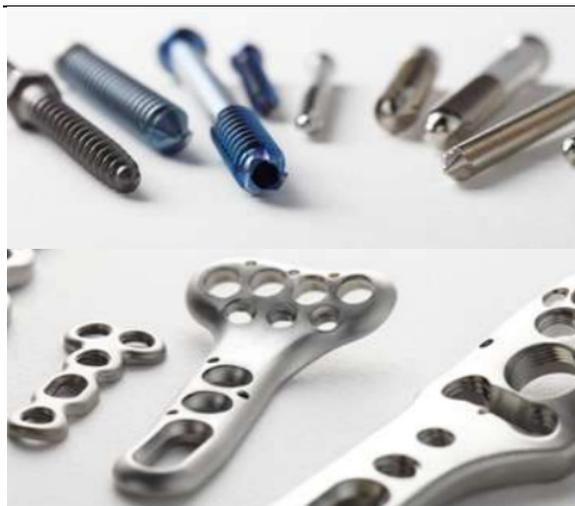


Рисунок 5.3 – Изделия медицинского назначения для антибактериального покрытия

Была успешно внедрена в производство разработка нанесения нанокomпозиционных многослойных углеродных покрытий на поверхности машиностроительных деталей (рисунок 5.4), что позволило значительно улучшить их технологические характеристики и увеличить сроки эксплуатации.

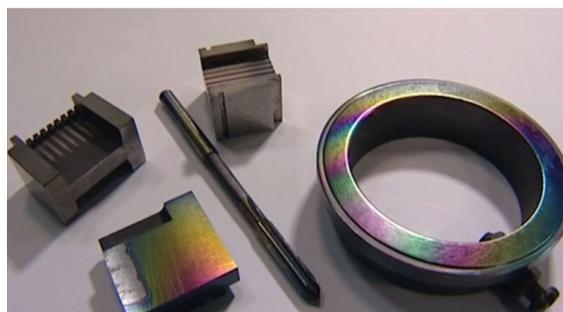


Рисунок 5.4 – Углеродное покрытие на поверхности машиностроительных деталей

Изучено влияние ионного ассистирования на морфологию, фазовый состав, микротвердость и триботехнические свойства углеродных покрытий [49]. Микротвердость углеродных покрытий, сформированных в условиях ассистирования ионами аргона, на 10% выше, чем исходных (рисунок 5.5).

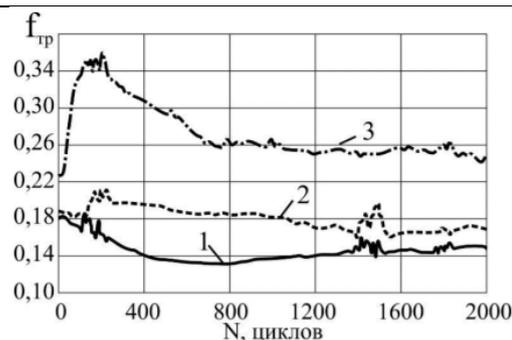


Рисунок 5.5 – Кинетические зависимости коэффициента трения углеродных покрытий, сформированных в отсутствие (1) и в условиях ассистирования ионами Ar^+ (2) и N^+ (3)[49]

В 2013 году после обучения в аспирантуре ГГУ им. Ф. Скорины под руководством А.В. Рогачева успешно защищены кандидатские диссертации по специальности «физика конденсированного состояния» соискателями из Китая Ли Чжубо (Liu Zhubo) и Чжоу Бином (Zhou Bing).



Рисунок 5.6 – Соискатели из Китая Ли Чжубо (слева) и Чжоу Бин (справа)

В 2011 году и 2013 году в университете Шизуока, Япония сотрудниками лаборатории «Физикохимия и технологии микро- и наноразмерных систем» и китайско-белорусской научной лаборатории по вакуумно-плазменным технологиям И. Рязановым (руководитель с белорусской стороны – В.П. Казаченко, с японской – профессор Т. Миено) и Р. Бекаревичем (руководитель с белорусской стороны – А.В. Рогачев, с японской – профессор М. Нагатсу) защищены диссертации на соискание степени PhD (Philosophy Doctor) в области физики.

Всего за время существования лаборатории её сотрудниками защищены 1 докторская и 5 кандидатских диссертаций, получено более 10 свидетельств на изобретения, патенты и промышленные образцы. В настоящее время в советах по защите диссертаций находятся 1 кандидатская и 1 докторская работы.



Рисунок 5.7 – И. Рязанов во время защиты диссертации в университете Шизуока, Япония (2011)



Рисунок 5.8 – Р. Бекаревич во время защиты диссертации в университете Шизуока, Япония (2013)

11–13 июня 2018 года в ГГУ им. Ф. Скорины с участием китайских партнеров состоялся белорусско-китайский научно-технический семинар по результатам проводимых совместно белорусскими и китайскими учеными исследований (рисунки 5.9, 5.10), [50].

В рамках белорусско-китайской программы совместных исследований в ГГУ им. Ф. Скорины в 2017–2019 гг. выполняются следующие проекты:

– «Фундаментальное исследование и проектирование высокочувствительных оптических датчиков на основе многослойных микроструктур метаматериалов» (№ Ф18КИ-027, научный руководитель С.А. Хахомов, совместно с Цзянаньским университетом, Jiangnan University);

– «Разработка двустороннего «идеального» поглотителя СВЧ и ТГц волн на основе метаматериалов и металлополимерных полидисперсных слоев» (№ Ф18КИ-028, научный руководитель И.В. Семченко, совместно с Нанкинским университетом науки и технологии, Nanjing University of Science and Technology);

– «Плазмохимический синтез и исследование структуры и физико-химических свойств нанокomпозиционных градиентных, мозаичных покрытий на основе аморфного углерода и металлов для узлов трения» (№ Т18КИ-008, научный руководитель А.В. Рогачёв, совместно с Тайюаньским техническим университетом, Taiyuan University of Technology).



Рисунок 5.9 – Участники белорусско-китайского научно-технического семинара (11–13 июня 2018 г.)



Рисунок 5.10 – Участники белорусско-китайского научно-технического семинара (11–13 июня 2018 г.)

Заключение

Таким образом, на основе вышеописанного можно сделать вывод, что исследования по фундаментальным и прикладным аспектам современного материаловедения, физике нано- и метаматериалов, технологии нанесения покрытий в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины развиваются активно и результативно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белый, В.А.* Адгезия полимеров к металлам / В.А. Белый, Н.И.Егоренков, Ю.М. Плещачевский. – Минск: Наука и техника, 1971. – 288 с.
2. *Трение полимеров* / В.А. Белый, А.И. Свириденко, М.И. Петроковец, В.Г. Савкин. – М.: Наука, 1972. – 202 с.
3. *Бокуть, Б.В.* Основы теоретической кристаллооптики / Б.В. Бокуть, А.Н. Сердюков. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1977. – Ч. 1. – 90 с., Ч. 2. – 70 с.
4. *Микро- и нанокomпозиционные полимерные покрытия, осаждаемые из активной газовой фазы* / М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Джанг Сянь Хун. – М.: Радиотехника, 2016. – 424 с.
5. *Electromagnetics of bi-anisotropic materials* / A.N. Serdyukov, I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.H. Sihvola. – New York: Gordon and Breach Science Publishers, 2001. – 337 p.
6. *Митюрин, Г.С.* Фотоакустический эффект в оптически активных средах / Г.С. Митюрин // Докл. АН БССР. – 1982. – Т. 26, № 5. – С. 414–417.
7. *Лин, Д.Г.* Влияние антиоксидантов на окисление полиэтилена, катализируемое медью / Д.Г. Лин, Е.В. Воробьева // Химическая технология. Изв. вузов. – 2005. – Т. 48, № 12. – С. 61–65.
8. *Состав для получения токопроводящей пленки на кремнеземсодержащей подложке*: пат. 2169406 РФ / И.И. Проневич, Е.Н. Подденежный, И.М. Мельниченко; дата публ.: 15.04.1997.
9. *Стабилизирующая добавка для абразивных суспензий на основе оксида алюминия для шлифовки пластин монокристаллического кремния*: пат. 10513 РБ / Я.А. Косенок, О.И. Тюленкова,

В.Е. Гайшун, И.М. Мельниченко; дата публ.: 30.04.2008.

10. *Всенаправленная бифилярная спиральная антенна с круговой поляризацией излучения* / С.Д. Барсуков, А.С. Побыха, А.П. Балмаков, И.А. Фаняев, Т.А. Державская, И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов, С.Б. Глыбовский, П.А. Белов // *Антенны*. – 2017. – № 3. – С. 43–48.

11. *Экспериментальные исследования направленной антенны на основе спиральных элементов* / С.Д. Барсуков, А.П. Балмаков, И.В. Семченко, С.А. Хахомов, Т.А. Державская, А.П. Слобожанюк, А.Е. Краснок, П.А. Белов // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2014. – № 3 (20). – С. 16–20.

12. *Поглотители электромагнитного излучения СВЧ-диапазона на основе полимерных композитов и киральных структур* / Сонгсонг Цянь, В.А. Банний, А.Л. Самофалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2014. – № 4 (21). – С. 40–45.

13. *Мизгайлов, В.Н.* Исследование плоских конструкций радиологических антенн / В.Н. Мизгайлов, Б.А. Верига, Н.И. Вяхирев // *Научные технологии*. – 2007. – Т. 8, № 8. – С. 12–14.

14. *Добровольский, И.Ф.* Дополнительные разделы теории излучающих систем / И.Ф. Добровольский. – Гомель: Гомельский государственный университет, 1980. – 47 с.

15. *Семченко, И.В.* Объемные акустические волны в кристаллах во вращающемся электрическом поле: монография / И.В. Семченко, С.А. Хахомов. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 150 с.

16. *Broadband Reflectionless Metasheets: Frequency-Selective Transmission and Perfect Absorption* / V.S. Asadchy, I.A. Faniayeu, Y. Ra'di, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov // *Phys. Rev. X*. – 2015. – Vol. 5, № 3. – P. 031005-1–031005-10.

17. *Stored and absorbed energy of fields in lossy chiral single-component metamaterials* / I.V. Semchenko, A.P. Balmakou, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov // *Phys. Rev. B*. – 2018. – Vol. 97. – P. 014432.

18. *Ground-plane-less bidirectional terahertz absorber based on omega resonators* / A.P. Balmakou, M.A. Podalov, S.A. Khakhomov, D.G. Stavenga, I.V. Semchenko // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40, № 9. – P. 2084–2087.

19. *Semchenko, I.V.* Artificial uniaxial bi-anisotropic media at oblique incidence of electromagnetic waves / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // *Electromagnetics*. – 2002. – Vol. 22, № 1. – P. 71–84.

20. *Semchenko, I.V.* Microwave analogy of optical properties of cholesteric liquid crystals with local chirality under normal incidence of waves / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov, A.H. Sihvola // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 1999. – Vol. 32, № 24. – P. 3222–3226.

21. *Tretyakov, S.A.* Reply to comment on “Reflection and transmission by a uniaxial bi-anisotropic slab

under normal incidence of plane waves” / S.A. Tretyakov, A.H. Sihvola, I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 1999. – Vol. 32, № 20. – P. 2705–2706.

22. *Investigation of electromagnetic properties of a high absorptive, weakly reflective metamaterial-substrate system with compensated chirality* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, V.S. Asadchy, S.V. Golod, E.V. Naumova, V.Ya. Prinz, A.M. Goncharenko, G.V. Sinitsyn, A.V. Lyakhnovich, V.L. Malovich // *Journal of Applied Physics*. – 2017. – Vol. 121. – P. 015108-1–015108-8.

23. *Highly transparent twist polarizer metasurface* / I.A. Faniayeu, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, V.L. Mizeikis // *Appl. Phys. Lett.* – 2017. – Vol. 111. – P. 111108.

24. *The effective optimal parameters of metamaterial on the base of omega-elements* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov, M.A. Podalov, Q. Songsong // *Recent Global Research and Education: Technological Challenges*; Ed. by R. Jablonski and R. Szweczyk. – *Advances in Intelligent Systems and Computing*. – Springer. – 2017. – Vol. 519. – P. 3–9.

25. *Omega-Structured Substrate-Supported Metamaterial for the Transformation of Wave Polarization in THz Frequency Range* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov, M.A. Podalov, V.A. Solodukha, A.N. Pyatlitski, N.S. Kovalchuk // *Recent Advances in Technology Research and Education. INTER-ACADEMIA 2017*; Ed. by D. Luca [et al.]. – *Advances in Intelligent Systems and Computing*. – Springer. – 2018. – Vol. 660. – P. 72–80.

26. *Semchenko, I.V.* Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years / I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov // *Progress In Electromagnetics Research 12*; Chief Editor: J.A. Kong. – *EMW Publishing, Cambridge, Massachusetts*. – 1996. – P. 335–370.

27. *Семченко, И.В.* Поляризационная селективность искусственных анизотропных структур на основе ДНК подобных спиралей / И.В. Семченко, А.П. Балмаков, С.А. Хахомов // *Кристаллография*. – 2010. – Т. 55, № 6. – С. 992–998.

28. *Semchenko, I.V.* Chiral metamaterial with unit negative refraction index / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov // *The European Physical Journal Applied Physics*. – 2009. – Vol. 46, № 3. – P. 32607-1–32607-4.

29. *Киральные метаматериалы терагерцового диапазона на основе спиралей из металлполупроводниковых нанопленок* / Е.В. Наумова [и др.] // *Автоматрия*. – 2009. – Vol. 45, № 4. – С. 12–22.

30. *Free-standing and overgrown InGaAs/GaAs nanotubes, nanohelices and their arrays* / Prinz V.Ya. [et al.] // *Physica E*. – 2000. – Vol. 6, № 1. – P. 828–831.

31. *Структура с киральными электромагнитными свойствами и способ ее изготовления*

(варианты): пат. 2317942 РФ: МПК В82В 3/00 (2006) / Е.В. Наумова, В.Я. Принц; дата публ.: 27.02.2008.

32. *Исследование свойств искусственных анизотропных структур с большой киральностью* / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, Е.В. Наумова, В.Я. Принц, С.В. Голод, В.В. Кубарев // Кристаллография. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 404–411.

33. *Исследование свойств слабоотражающих метаматериалов с компенсированной киральностью* / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, В.С. Асадчий, Е.В. Наумова, В.Я. Принц, С.В. Голод, А.Г. Милехин, А.М. Гончаренко, Г.В. Синицын // Кристаллография. – 2014. – Т. 59, № 4. – С. 544–550.

34. *Numerical parametric investigation of photonic crystals in bird feathers* / А.Р. Balmakou, D.G. Stavenga, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko // Proc. of Belarusian and Chinese scientific and technical seminar. – 2018. – P. 4–7.

35. *Hydrated phosphorus oxyacids alone and adsorbed on nanosilica* / V.M. Gun'ko, L.P. Morozova, A.A. Turova, A.V. Turov, V.E. Gaishun, V.M. Bogatyrev, V.V. Turov // Journal of Colloid and Interface Science. – 2012. – Vol. 368, № (1). – P. 263–272.

36. *Spectroscopic studies of chromium-doped silica sol-gel glasses* / W. Stręk, P.J. Dereń, E. Łukowiak, J. Hanuza, H. Drulis, A. Bednarkiewicz, V. Gaishun // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2001. – Vol. 288, № 1–3. – P. 56–65.

37. *Ferroelectric Properties of Nanostructured SBTN Sol-Gel Layers* / V.V. Sidsky, A.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.N. Morozovska, N.V. Morozovsky, V.V. Kolos, A.S. Turtsevich, A.N. Pyatlitski, Yu.M. Pleskachevsky, S.V. Shil'ko, E.M. Petrokovets // Recent Global Research and Education: Technological Challenges; Ed. by R. Jablonski, R. Szweczyk. – Advances in Intelligent Systems and Computing. – Springer. – 2017. – Vol. 519. – P. 103–108.

38. *Nanostructure and Ferroelectric Properties of Sol-Gel SBTN-Films for Electronic Devices* / S.A. Khakhomov, A.V. Semchenko, V.V. Sidsky, V.E. Gaishun, D. Luca, V.V. Kolos, V.A. Solodukha, A.N. Pyatlitski, N.S. Kovalchuk // Recent Advances in Technology Research and Education. INTER-ACADEMIA 2017; Ed. by D. Luca [et al.]. – Advances in Intelligent Systems and Computing. – Springer. – 2018. – Vol. 660. – P.144–150.

39. *Сидский, В.В.* Получение золь-гель методом наноструктурированных материалов на основе танталата (танталата-ниобата) висмута-стронция для конденсаторных структур: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.16.08 / В.В. Сидский. – Минск, БГУИР, 2017. – 24 с.

40. TransFerr [Electronic resource]. – Mode of access: <http://transferr.eu/>. – Date of access: 20.03.2018.

41. *Structure and properties of polyaniline nanocomposite coatings containing gold nanoparticles formed by low-energy electron beam deposition* / W. Surui, A.A. Rogachev, M.A. Yarmolenko,

A.V. Rogachev, J. Xiaohong, M.S. Gaur, P.A. Luchnikov, O.V. Galtseva, S.A. Chizhik // Applied Surface Science. – 2018. – № 428. – P.1070–1078.

42. *Nanocomposite coatings for implants protection from microbial colonization: Formation features, structure, and properties* / Qi Chen, A.V. Rogachev, D.V. Tapal'skii, M.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, J. Xiaohong, E.V. Koshanskaya, A.S. Vorontsov // Surface & Coatings Technology. – 2017. – Vol. 315. – P. 350–358.

43. *Chromium-modified a-C films with advanced structural, mechanical and corrosive-resistant characteristics* / Y.M. Miao, J. Xiaohong, D.G. Piliptsov, Z. Yuzhao, A.V. Rogachev, A.S. Rudenkov, A.P. Balmakou // Applied Surface Science. – 2016. – Vol. 379. – P. 424–432.

44. *Features of the formation of nanoparticles based on copper in thin-layer systems* / A.V. Rogachev, Jiang Xiaohong, Liu Xiaoheng, M.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, D.L. Gorbachev, Liu Zhu-bo // Applied Surface Science. – 2014. – Vol. 317. – P. 449–456.

45. *Chemical composition, morphology and optical properties of zinc sulfide coatings deposited by low-energy electron beam evaporation* / A.V. Rogachev, M.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, D.L. Gorbachev, Bing Zhou // Applied Surface Science. – 2014. – Vol. 303. – P. 23–29.

46. *Рогачев, А.А.*, Физико-химия полимерных покрытий, осаждаемых из активной газовой фазы / А.А. Рогачев. – М.: Научный мир, 2014. – 287 с.

47. *Микро- и наноконпозиционные полимерные покрытия, осаждаемые из активной газовой фазы* / М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Сянь Хун Джанг. – М.: Радиотехника, 2016. – 424 с.

48. *Способ нанесения покрытия с антибактериальным действием на медицинское изделие на основе высокомолекулярного соединения*: пат. 13256 РБ / А.В. Рогачев, Д.В. Топальский, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, А.И. Козлова; дата публ.: 30.06.2010.

49. *Руденков, А.С.* Структура и свойства ионно-модифицированных, легированных азотом и металлами углеродных покрытий для рабочих поверхностей инструмента: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.04.07 / А.С. Руденков. – Гомель, ИММС НАН Беларуси, 2016. – 23 с.

50. *Белорусско-китайский научно-технический семинар* (2018; Гомель): [материалы]; редкол.: А.В. Рогачев (гл. ред.) [и др.]. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2018. – 40 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проекты № Ф18КИ-027, № Ф18КИ-028).

Поступила в редакцию 31.07.18.

УДК 531.51:531.18:530.12

ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ МАССИВНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Н.А. Ахраменко

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

THE FIELD OF GRAVITY OF A MASSIVE SPHERICAL SHELL

N.A. Akhramenko

Belarusian State University of Transport, Gomel

Получены выражения для величины напряженности и потенциала гравитационного поля массивной сферической оболочки. Показано, что полученное дифференциальное уравнение для напряженности является нелинейным. Полученные соотношения являются обобщением для величины напряженности и потенциала гравитационного поля в нерелятивистском случае.

Ключевые слова: теория тяготения, напряженность гравитационного поля, потенциал поля.

Expressions for the magnitude and potential of the gravitational field of a massive spherical shell are obtained. It is shown that the differential equation obtained for the intensity is nonlinear. The relations obtained are a generalization for the strength and potential of the gravitational field in the nonrelativistic case.

Keywords: theory of gravitation, gravitational field intensity, field potential.

Введение

В теории тяготения Ньютона гравитационная масса является источником ее гравитационного поля. Напряженность гравитационного поля, определяемая распределением массы в пространстве, представляет собой его силовую характеристику. Как известно [1]–[5], в теории тяготения Ньютона напряженность статического поля тяготения определяется величиной силы, действующей на покоящееся тело единичной массы, помещенное в это поле. Статическое поле тяготения сферической оболочки в классической механике несложно определяется использованием теоремы Гаусса для потока вектора напряженности гравитационного поля, как и электрическое поле в соответствующей задаче электростатики [6].

Однако в случае сильных гравитационных полей ситуация изменяется. По мнению Бриллюэна [7] в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна участвовать и масса самого поля. Имеются и другие теории гравитации, учитывающие массу поля, например [8]. В данной работе определяются характеристики гравитационного поля массивной сферической оболочки с учетом предположения Бриллюэна.

1 Определение напряженности гравитационного поля

Пусть имеется однородная сферическая оболочка радиуса R и массой m .

Предположим, что существующее в пространстве поле напряженности \mathbf{g} формируется как этой сферической оболочкой, так и самим полем. Ввиду сферической симметрии это поле

будет зависеть только от одной переменной r и может быть записано в виде

$$\mathbf{g} = g(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.1)$$

где радиус-вектор \mathbf{r} проведен из центра сферы, а вектор \mathbf{g} направлен к центру сферы.

Возьмем произвольную точку A на расстоянии r от центра O и построим вспомогательную сферу радиуса r также с центром в точке O (рисунок 1.1).

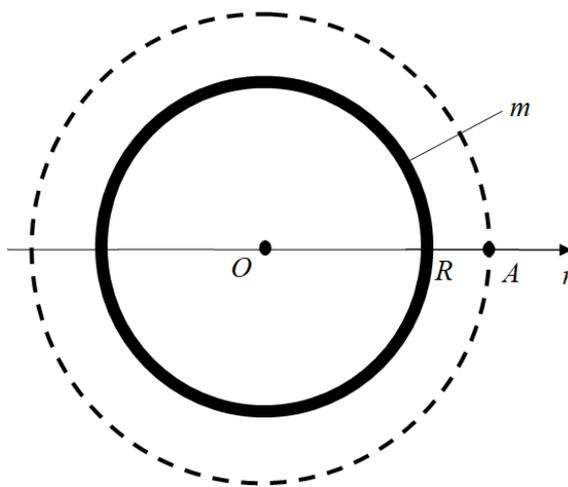


Рисунок 1.1 – Массивная сферическая оболочка массой m

Ввиду сферической симметрии напряженность гравитационного поля в т. A будет определяться суммарной массой сосредоточенной внутри сферы радиуса OA . В случае $|OA| > R$ внутри вспомогательной сферы будет находиться

сферическая оболочка массой m и некоторая масса самого гравитационного поля.

Объемную плотность энергии этого поля запишем в виде [9, с. 437]

$$w = -\frac{g^2}{8\pi G}, \quad (1.2)$$

где G – гравитационная постоянная.

Соответствующую ей плотность массы с учетом (1.2) запишем в виде

$$\rho = \frac{w}{c^2} = -\frac{g^2}{8\pi Gc^2}, \quad (1.3)$$

где c – скорость света в вакууме.

Тогда вся масса внутри вспомогательной сферы

$$M = m + \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \quad (1.4)$$

где ρ – плотность массы гравитационного поля, определяемая согласно (1.3).

Подставив плотность массы гравитационного поля, соотношение (1.4) переписывается в виде

$$M = m - \int_0^r \frac{g^2 r^2}{2c^2 G} dr. \quad (1.5)$$

Воспользуемся тем, что напряженность поля сферически-симметричного распределения массы (с учетом (1.1)) можно записать в виде

$$g = -\frac{GM}{r^2}. \quad (1.6)$$

Тогда, подставив в соотношение (1.6) M из выражения (1.5), получим

$$g = -\frac{G}{r^2} \left(m - \int_0^r \frac{g^2 r^2}{2c^2 G} dr \right). \quad (1.7)$$

Дифференцируя соотношение (1.7), можно получить

$$\frac{dg}{dr} + 2\frac{g}{r} - \frac{g^2}{2c^2} = 0. \quad (1.8)$$

Одно из решений уравнения (1.8) тривиальное: $g = 0$. Ввиду того, что напряженность поля в центре сферы из соображений симметрии можно положить равной нулю, это решение будет определять поле внутри сферической оболочки.

Заменой переменной $\psi = gr$ уравнение (1.8) преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{2c^2 d\psi}{\psi^2 - 2c^2 \psi} = \frac{dr}{r}. \quad (1.9)$$

Интегрируя уравнение (1.9), можно получить

$$\frac{\psi - 2c^2}{\psi} = \alpha r, \quad (1.10)$$

где α – постоянная интегрирования.

Подставив в выражение (1.10) $\psi = gr$, напряженность гравитационного поля запишется в виде

$$g = \frac{2c^2}{r(1-\alpha r)}. \quad (1.11)$$

Полученное второе решение будет определять напряженность гравитационного поля вне сферической оболочки.

Постоянную интегрирования α находим, подставив (1.11) в (1.7)

$$\frac{2c^2}{r(1-\alpha r)} = -\frac{G}{r^2} \left(m - \int_R^r \frac{1}{2c^2 G} \left(\frac{2c^2}{1-\alpha r} \right)^2 dr \right). \quad (1.12)$$

Вычисляя α из (1.12), получаем

$$\alpha = \frac{1}{R} + \frac{2c^2}{Gm}. \quad (1.13)$$

Тогда, подставив α из соотношения (1.13) в (1.11), найдем

$$g = \frac{2c^2}{r \left[1 - \left(\frac{1}{R} + \frac{2c^2}{Gm} \right) r \right]}. \quad (1.14)$$

После преобразований (1.14) представится в виде

$$g = -\frac{Gm}{r^2 \left[1 + \frac{Gm}{2c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]}. \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) определяет напряженность поля при $r > R$.

Окончательно для напряженности гравитационного поля (с учетом (1.1)) запишем

$$g(r) = \begin{cases} 0, & r < R; \\ -\frac{Gm}{2R^2}, & r = R; \\ -\frac{Gm}{r^2 \left[1 + \frac{Gm}{2c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]}, & r > R. \end{cases} \quad (1.16)$$

В выражении (1.16) напряженность гравитационного поля при $r = R$ записана с учетом решения соответствующей задачи электростатики [6].

2 Определение потенциала гравитационного поля

Для нахождения потенциала гравитационного поля используем соотношение

$$g(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}. \quad (2.1)$$

Из соотношения (2.1) следует

$$\varphi(r) = -\int g(r) dr. \quad (2.2)$$

Подставив в (2.2) напряженность поля из (1.16), получим (для $r \geq R$)

$$\varphi = -\int \frac{Gm}{r^2 \left[1 + \frac{Gm}{2c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]} dr. \quad (2.3)$$

Интегрируя соотношение (2.3), получаем

$$\varphi = 2c^2 \ln \left[1 + \frac{Gm}{2c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right] + const. \quad (2.4)$$

Постоянную интегрирования в (2.4) выбираем такой, чтобы потенциал на бесконечности был равен нулю. Этому условию соответствует

$$-2c^2 \ln \left[1 + \frac{Gm}{2c^2 R} \right] = const. \quad (2.5)$$

С учетом найденной согласно (2.5) константы получим

$$\varphi = 2c^2 \ln \left[1 - \frac{Gm}{2c^2 r \left(1 + \frac{Gm}{2c^2 R} \right)} \right]. \quad (2.6)$$

Потенциал на поверхности сферической оболочки, с учетом (2.6), запишется в виде

$$\varphi(R) = 2c^2 \ln \left[1 - \frac{Gm}{2c^2 R \left(1 + \frac{Gm}{2c^2 R} \right)} \right]. \quad (2.7)$$

Потенциал, определяемый соотношением (2.7), будет справедливым и для точек внутри сферической оболочки, так как напряженность гравитационного поля внутри ее равна нулю. Тогда окончательно для потенциала можно записать

$$\varphi(r) = \begin{cases} 2c^2 \ln \left[1 - \frac{Gm}{2c^2 R \left(1 + \frac{Gm}{2c^2 R} \right)} \right], & r \leq R; \\ 2c^2 \ln \left[1 - \frac{Gm}{2c^2 r \left(1 + \frac{Gm}{2c^2 R} \right)} \right], & r \geq R. \end{cases} \quad (2.8)$$

Потенциал, определяемый согласно (2.8), является непрерывной функцией при любых значениях r , в том числе и при $r = R$.

3 Приближение для слабых гравитационных полей

Для малых масс m , соответственно, слабых гравитационных полей, напряженность гравитационного поля можно представить в виде

$$\begin{aligned} g &= -\frac{Gm}{r^2 \left[1 + \frac{Gm}{2c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]} \approx \quad (3.1) \\ &\approx -\frac{Gm}{r^2} \left(1 - \frac{Gm}{2c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right) = \\ &= -\frac{Gm}{r^2} + \frac{G^2 m^2}{2c^2 r^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

(при $r > R$).

Первое слагаемое в выражении (3.1) (после последнего знака равенства) соответствует напряженности гравитационного поля ньютоновского поля тяготения. Второе слагаемое определяет величину поправки к этому полю.

Аналогично для потенциала гравитационного поля можно получить выражение

$$\begin{aligned} \varphi &= 2c^2 \ln \left[1 - \frac{Gm}{2c^2 r \left(1 + \frac{Gm}{2c^2 R} \right)} \right] \approx \quad (3.2) \\ &\approx 2c^2 \ln \left[1 - \frac{Gm}{2c^2 r} \right] \approx \\ &\approx 2c^2 \left[-\frac{Gm}{2c^2 r} - \frac{1}{2} \left(\frac{Gm}{2c^2 r} \right)^2 \right] = \\ &= -\frac{Gm}{r} - \frac{1}{4c^2} \left(\frac{Gm}{r} \right)^2 \quad (\text{при } r \geq R). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в выражении (3.2) (также после последнего знака равенства) соответствует потенциалу гравитационного поля ньютоновского поля тяготения. Второе слагаемое определяет величину поправки к этому потенциалу.

Из соотношений (3.1) и (3.2) следуют напряженность и потенциал ньютоновского поля тяготения (в случае пренебрежения величиной поправки)

$$g(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ -\frac{Gm}{2R^2}, & r = R \\ -\frac{Gm}{r^2}, & r > R \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\frac{Gm}{R}, & r \leq R; \\ -\frac{Gm}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (3.4)$$

Выражение (3.3) показывает, что напряженность поля претерпевает разрыв при $r = R$, а потенциал согласно (3.4) является непрерывной функцией.

Заключение

Таким образом, учитывая предположение Бриллюэна о том, что в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна участвовать и масса самого поля, определены напряженность и потенциал гравитационного поля массивной сферической оболочки. Полученные соотношения являются обобщением для величины напряженности и потенциала гравитационного поля в нерелятивистском случае. Из этих соотношений для случая слабых гравитационных полей следуют выражения напряженности и потенциала, соответствующие ньютоновскому полю тяготения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики в 5-и т. Т. 1. Механика. / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2005. – 560 с.

2. Савельев, И.В. Курс физики в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989. – 352 с.
3. Матвеев, А.Н. Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев. – М.: ОНИКС 21 век, 2003. – 432 с.
4. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк., 1989. – 608 с.
5. Яворский, Б.М. Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
6. Ахраменко, Н.А. К определению электрического поля равномерно заряженной сферы / Н.А. Ахраменко, Л.М. Булавко // Вестник БГУ. Серия. 1. – 2005. – № 3. – С. 40–43.
7. Бриллюэн, Л. Новый взгляд на теорию относительности / Л. Бриллюэн. – М.: Мир, 1972. – 143 с.
8. Сердюков, А.Н. Калибровочная теория скалярного гравитационного поля / А.Н. Сердюков. – Гомель: изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.
9. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Поступила в редакцию 07.05.18.

УДК 535.326

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛОВ В ПЕРЬЯХ ПТИЦ

А.П. Балмаков¹, С.А. Хахомов¹, Н.А. Алешкевич¹,
И.В. Семченко¹, Д.Г. Ставенга², Д. Ванг³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Университет Гронингена, Нидерланды

³Университет Цзянань, Китай

PARAMETRIC MODELING OF PHOTONIC CRYSTALS IN FEATHERS OF BIRDS

A.P. Balmakou¹, S.A. Khakhomov¹, N.A. Aleshkevich¹,
I.V. Semchenko¹, D.G. Stavenga², J. Wang³

¹F. Scorina Gomel State University

²University of Groningen, Netherlands

³Jiangnan University, China

Исследуются фотонные кристаллы, которые естественным образом встречаются в перьях некоторых видов птиц со структурным типом окраски с точки зрения возможных оптических приложений. Разработана параметрическая трехмерная модель фотонного кристалла, состоящего из твердых цилиндрических меланосом, встроенных в кератиновую матрицу, для изучения того, как геометрия структуры связана с оптическими свойствами. Потенциально ключевые особенности, заложенные природой в дизайн фотонных кристаллов в птичьих перьях, могут быть успешно реализованы технически для датчиков в оптическом диапазоне волн. Возможные сенсорные устройства такого типа могут иметь преимущества из-за низкого энергопотребления, высокой чувствительности, небольших размеров и т. д.

Ключевые слова: фотонный кристалл, структурная окраска, оптические датчики, отражение.

The photonic crystals that occur naturally in feathers of some species of birds involving structural type of coloration from the perspective of optical applications are investigated. A parametric 3D model of the photonic crystal composed of solid cylindrical melanosomes embedded in keratin matrix for studying how the geometry of the structure relates to optical properties was developed. Potentially the key features embedded by nature into the design of the photonic crystals in bird's feathers can be successfully technically utilized for sensing application in optical wave range. The possible sensing appliances of this type might advance regarding to low power consumption, high sensitivity, small dimensions etc.

Keywords: photonic crystal, structural coloration, optical sensors, reflectance.

Introduction

The realm of birds is extremely diverse – more than 10 000 species of birds are found on our planet. Different species have inherent unique appearance, however from the physical point of view all these colors in birds are created by just two main mechanisms. The first one is pigmental (pigmentary) type of coloration, which is quite simple and well known [1]. Pigments are colored chemical substances that can be found in both plants and animals. The coloration realized by pigments is independent of the structure of the feather. When the outer white light, which is a combination of wavelength from 400 to 750 nm, illuminates the structure of a feather, part of the initial wavelengths is absorbed but part is reflected. We see the reflected light, thus if, for example, only the red wavelength is reflected we see the bird as red.

The second type of coloration – structural coloration – is not so common as pigmental and is divided into two subdivisions: iridescent and non-iridescent [2]. Structurally colored feathers produce their colors by a non-pigmentary way as they are

typically made of only few proteins, most commonly, melanin and keratin. The structural color is a result of interference of light on sub micrometer structures inside of the feather. Despite this very limited range of materials involved in structural coloration of birds, the photonic crystals in the structures of feathers produce full range of colors of visible spectrum. Iridescent feathers contain cylindrical rodlets in their structures called melanosomes. For iridescent type coloration, the observable colors are changing at different viewing angles. Tiny spherical air pockets in the feathers can scatter incoming light, resulting in a specific, non-iridescent color. For non-iridescent coloration the color is not changing at different viewing angles and from this point of view it is similar to pigmentary type of coloration. Blue colors in feathers are almost always produced in this manner.

Structural coloration results from the interaction of light waves with featured structures having the same order of size as the wavelength of light. The structures most commonly have a cylindrical or spherical shape. Structural coloration is typically

described by light scattering from a multilayer structure and thin-film interference [3].

1 Setup of the model

To get an insight into the physical mechanism of coloration of birds, we developed a numerical 3D model (using finite element method solver for electromagnetic structures Ansys HFSS 14, which is 3D electromagnetic simulation software for designing and simulating high-frequency electronic products) with material parameters assigned taking into account their dispersive character for every protein involved into the structure. As the model incorporates a number of geometrical parameters influencing the resultant spectral characteristics, we implemented the model to be fully parameterized to make a well-rounded study. In the model of the photonic crystal shown in Figure 1.1, we implement the following main features. The incident light is represented as a plane wave, linearly polarized with two orthogonal polarizations TE and TM. The sources of excitation of these waves in Ansys HFSS are determined by ‘Floquet ports’ which are located at the top and bottom of the structure in Figure 1.1. There are two pairs of periodic planes along YZ and YX translating the structure along X and Y axes which are set as ‘Master’ and ‘Slave’ boundary conditions.

In Figure 1.1, a cross section of a photonic crystal representing the microstructure inside a feather of some birds is shown. Notably, there are only two main material components (keratin and melanin) involved in the structure, which as a whole surrounded by air. In the model, we take into account the dispersion of material parameters for both melanin and keratin and losses of electromagnetic radiation inside the structure. The real part of the wavelength-dependent refractive indices of keratin and melanin, n_k and n_m , was calculated with the Cauchy formula $n = A + B\lambda^{-2}$ (λ is the wavelength of light), using for keratin $A_k = 1.532$ and $B_k = 5890 \text{ nm}^2$ and for melanin $A_m = 1.648$ and $B_m = 23700 \text{ nm}^2$; the imaginary component of the refractive index for keratin was assumed to be negligible in the visible wavelength range, but that of melanin was taken to be $k_m = a_m \exp(-\lambda / b_m)$, where $a_m = 0.56$ and $b_m = 270 \text{ nm}$ [4], [5].

The structure of the photonic crystal in Figure 1.1 is limited by the keratin layer (depicted in red), the thickness of which is $3 \mu\text{m}$. The bottom of the matrix is ragged having a saw-tooth structure which serves as an impedance matching intermediate surface between keratin and air and helps avoiding Fabry–Perot oscillations in reflectance spectra. Initially all the geometrical parameters of the structure in the model are set as default by assigning them as follows: the keratin thickness is $3 \mu\text{m}$, the thickness of the upper keratin layer is 100 nm , the diameter of melanosomes $D = 100 \text{ nm}$ (they are magnified in Figure 1.1 for convenience), the number of layers is 7, the inter-layer spacing (distance

between adjacent layers) $I = 150 \text{ nm}$, the arrangement of melanosomes represents a rectangular lattice. By default, the model incorporates a normal incidence of light. For the case of an oblique incidence, the TE polarization of electric field is in the YZ plane and TM polarization is along the X-axis.

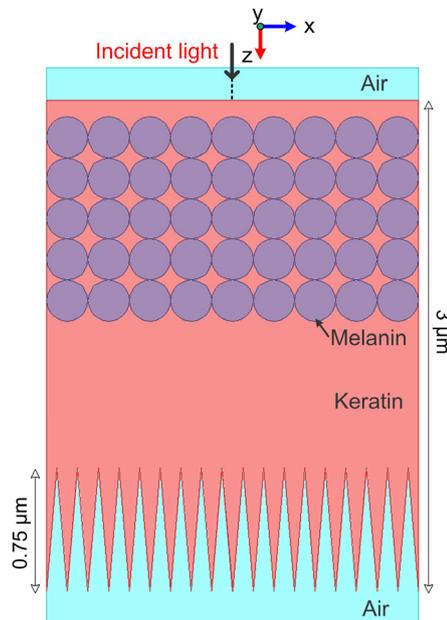


Figure 1.1. – Schematic of an array composed of solid melanosomes immersed in keratin matrix inside a feather’s barbule of some birds with specific structural type of coloration

The structure we study in Figure 1.1 is actually represents half of the real structure found in barbules of feathers. However the reflectance from the half of the structure very closely follows the reflectance from the full structure of the double-stacked photonic crystal. In the real structure of a photonic crystal in bird feathers, the rows of melanosomes are not ideally arranged, and the diameters of the melanosomes differ slightly from each other. The imperfections lead to reducing the peak reflectance leaving the shape of the spectra virtually the same [6].

2 Results of modeling

We start our analysis of reflectance spectra by varying value of the number of melanosome layers. Figure 2.1 (a, b) shows that with increasing the number of layers an obvious increase in peak reflectance is observed, the bandwidth slightly narrows and a small bathochromic (towards longer wavelengths) peak shift occurs. Despite we applied the impedance-matching surface for the bottom keratin surface, the tiny high-frequency oscillations in spectra in Figure 2.1 (a, b) are still visible for the cases of pure keratin matrix and for unitary and triple layer(s) of melanosomes, however the oscillations completely disappear for higher number of melanosomes in the stack, as it is shown for 5 layers.

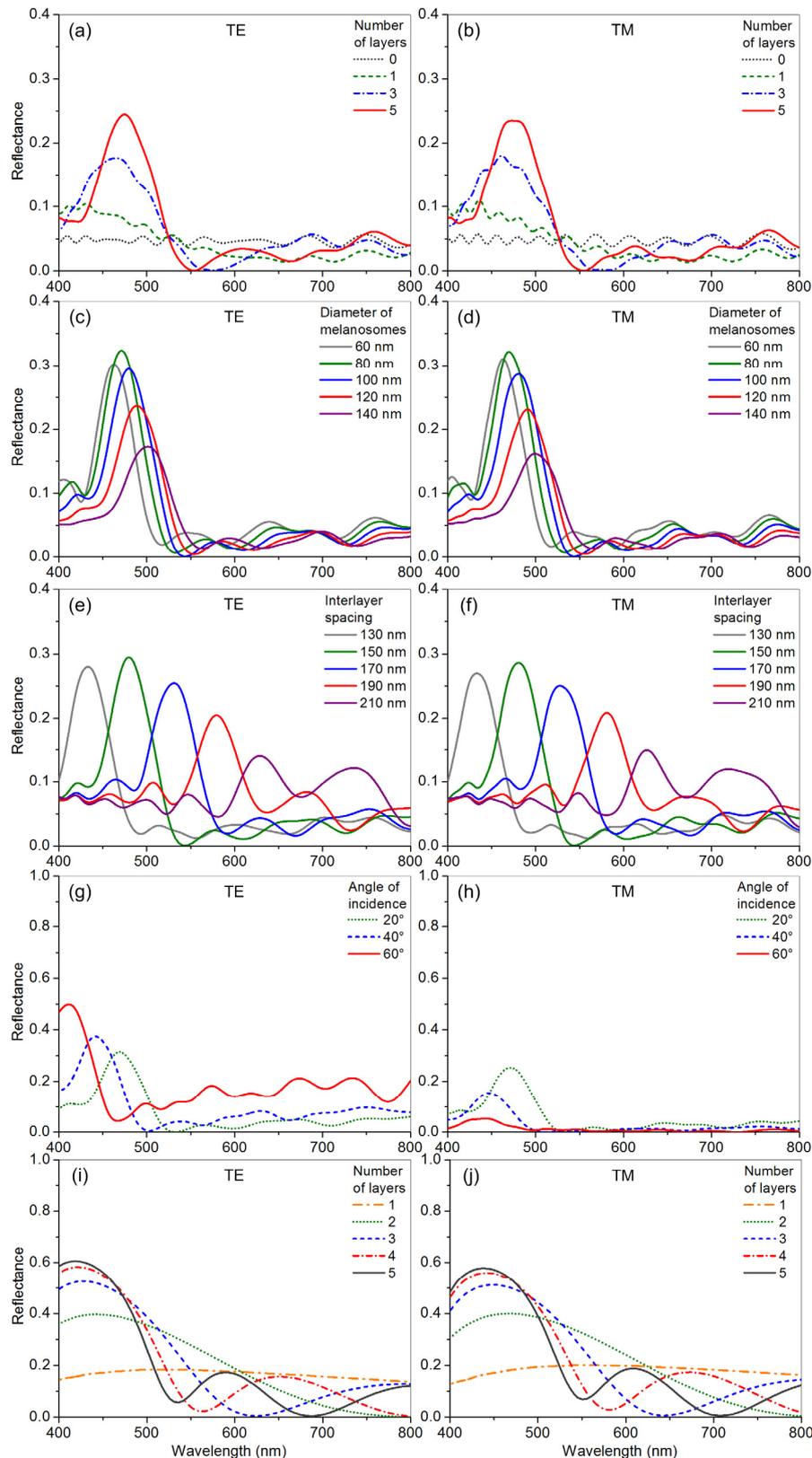


Figure 2.1. – Results of modeling. (a, b) Reflectance spectra vs. number of layers in the array; (c, d) Reflectance spectra vs. diameter of melanosomes; (e, f) Reflectance spectra vs. inter-layer spacing (distance between centers of adjacent layers); (g, h) Reflectance spectra vs. angle of incidence. The case of normal incidence (0°) was considered in figures (e–f); (i, j) Reflectance spectra vs. number of layers for the case when the keratin layer is replaced by the air. In the case of (c, d, e, f, h) the number of layers of melanosomes was seven

The diameter of melanosomes is one of the key parameters which strongly influences the peak reflectance while causing only slight changes in the peak wavelength positioning. Figure 2.1 (c, d) demonstrates the reflectance dependence on the diameter of melanosomes and indicates that the dependence is not monotonous: with increasing the diameter of cylinders the reflectance first increases reaching its peak at 80 nm and then changes the trend into opposite decreasing almost twice at 140 nm from its peak value.

The dependence of reflectance on interlayer spacing (which is a distance between adjacent layers of melanosomes) is radically different from the dependence on diameter of melanosomes from the point of view of the peak shift. As Figure 2.1 (e, f) shows, in this case both the peak wavelength positioning and peak shift are strongly depending on the parameter of interlayer spacing. The peak of reflectance reaches its maximum at 150 nm at which the stack of melanosomes is closely packed as the interlayer spacing is also (as default) has the length of 150 nm. This behavior can be interpreted with the following rule $\lambda_{\max} = 2(n_1d_1 + n_2d_2)$ for a multilayer composed of two components with refractive indices n_1 and n_2 and thicknesses d_1 and d_2 . As an example, taking $n_1 = 1.55$ and $n_2 = 1.65$ and $d_1 = d_2 = 75$ nm (half of the interlayer spacing at close packing), yields $\lambda_{\max} = 480$ nm. Higher (lower) values of the wavelengths will result to an increasing (decreasing) multilayer period. We must emphasize, however, that light interference in the combined structure consisting of the upper thin-film-like keratin cortex and the multilayer stack of melanosomes ultimately determines the reflectance spectrum. Increasing the interlayer spacing leads to reduction in the peak magnitude, which almost decreases twice at 210 nm and to changing in the shape of the spectrum, which transforms substantially into two-peak profile.

To study the iridescent properties of the photonic crystal, we performed angle dependence analysis for TE and TM modes. Figure 2.1 (g, h) reveals the peculiarities of spectra transformations with increasing the incidence angle. First of all, the TE and TM spectra differ strongly from the point of view of the peak height but have the same trend for the peak shifting. From the peak shift, it definitely follows that the appearance of the structure will acquire a purplish tint with observing at oblique angles.

The total reflectance of the spectra we have just analyzed is not impressively high staying in its peak on the level of 30% which might not be sufficient at some image or sensing applications but seems to be quite enough for color signalling in birds' communications. The reason for that lays in low refractive index contrast between melanin and keratin. To demonstrate the potential ability of increasing the peak reflectance in some artificial photonic crystals based on the same principle, we replaced the keratin

matrix by air for studying the increment of reflectance. Figure 2.1 (i, j) depicts the reflectance spectra in this case when the melanosomes are surrounded by air. First, one can see that the spectra became wider and, second, the peak reflectance doubled in comparison with reflectance in Figure 2.1 (a, b).

It is necessary to note, that there is one more parameter that influences both peak reflectance and peak wavelength. The parameter is the thickness of the upper-keratin layer or keratin cortex, which is the distance between the top keratin surface the upper layer of melanosomes. With increasing cortex thickness both the peak reflectance and peak wavelength also increases.

Conclusion

Full parametric analysis of a photonic crystal found in birds feathers reveals details of the physical mechanism of colors formation in this type of photonic crystals. The type of photonic crystal utilizes materials with very limited refractive index contrast, therefore, it is reasonable to continue our modeling by considering more complicated photonic crystal with hollow melanosomes [7]. The knowledge obtained in this analysis can be applied at the stage of designing photonic optical sensors, indicators, displays with new types of light reflectors with reconfigurable spectrum and almost zero power consumption, metamaterials [8]–[12]. As our analysis indicates, the number of layers of cylinders in the photonic crystal for satisfactory spectra recognition (or formation) can be limited by just 5–7 layers. The best parameter for the reflecting color controlling in the photonic crystal is the interlayer spacing while the diameter of cylindrical melanosomes is responsible for the magnitude of the peak reflectance.

REFERENCES

1. Fox, H.M. The nature of animal colours / H.M. Fox, G. Vevers. – London: Sidgwick and Jackson, 1960.
2. Kinoshita, S. Structural colors in the realm of nature / S. Kinoshita. – World Scientific Pub Co Inc, 2008.
3. Eliason, C.M. How hollow melanosomes affect iridescent colour production in birds / C.M. Eliason, P.-P. Bitton, M.D. Shawkey // Proc. Biol. Sci. – 2013. – Vol. 280, № 1767. – P. 20131505.
4. Leertouwer, H.L. Refractive index and dispersion of butterfly chitin and bird keratin measured by polarizing interference microscopy / H.L. Leertouwer, B.D. Wilts, D.G. Stavenga // Opt. Express. – 2011. – Vol. 19, № 24. – P. 24061–24066.
5. High refractive index of melanin in shiny occipital feathers of a bird of paradise / D.G. Stavenga, H.L. Leertouwer, D.C. Osorio, B.D. Wilts // Light: Sci. Appl. – 2015. – Vol. 4, № 1. – P. e243.
6. Stavenga, D.G. Structural coloured feathers of mallards act by simple multilayer photonics / D.G. Stavenga, C.J. Van Der Kooi, B.D. Wilts //

J.R. Soc. Interface. – 2017. – Vol. 14, № 133. – P. 20170407.

7. *Numerical parametric investigation of photonic crystals in bird feathers* / A.P. Balmakou, D.G. Stavenga, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko // Proc. of Belarusian and Chinese scientific and technical seminar. – 2018. – P. 4–7.

8. *Ground-plane-less bidirectional terahertz absorber based on omega resonators* / A.P. Balmakou, M.A. Podalov, S.A. Khakhomov, D.G. Stavenga, I.V. Semchenko // Opt. Lett. – 2016. – Vol. 40, № 9. – P. 2084–2087.

9. *Broadband reflectionless metasheets: Frequency-selective transmission and perfect absorption* / V.S. Asadchy, I.A. Faniayeu, Y. Ra'di, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov // Phys. Rev. X. – 2015. – Vol. 5, № 3. – P. 031005-1–031005-10.

10. *Stored and absorbed energy of fields in lossy chiral single-component metamaterials* /

I.V. Semchenko, A.P. Balmakou, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov // Phys. Rev. B. – 2018. – Vol. 97, № 1. – P. 14432.

11. *Highly transparent twist polarizer metasurface* / I.A. Faniayeu, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, V. Mizeikis // Appl. Phys. Lett. – 2017. – Vol. 111. – P. 111108.

12. *Metalenses based on the unsymmetrical double slits array* / H. Shao, J.Wang, Z. Hu, T. Sang // Proc. of Belarusian and Chinese scientific and technical seminar. – 2018. – P. 23–26.

This research was supported by Belarussian-Chinese Grants (Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research № F18K1-027) and National Natural Science Foundation of China, № 11811530052.

Поступила в редакцию 19.07.18.

МОДУЛЯЦИЯ ФАЗЫ ТЕРАГЕРЦОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТАПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ КОНТРОЛИРУЕМОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Д. Ма¹, С. Сонг¹, Ж. Ху¹, А.П. Балмаков², С.А. Хахомов², Д. Ванг¹, Т. Санг¹

¹Университет Цзяннань, Китай

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THz PHASE MODULATION WITH BROADBAND METASURFACES FOR CONTROLLING LIGHT PROPAGATION

J. Ma¹, C. Song¹, Z.-D. Hu¹, A.P. Balmakou², S.A. Khakhomov², J. Wang¹, T. Sang¹

¹Jiangnan University, China

²F. Scorina Gomel State University

Предложено создание сверхтонких фазовых метаповерхностных структур на основе комплементарных квадратных расщепленных колец по типу наноантенна для создания терагерцовых металинз, перестраиваемых и мультифокусирующихся. Резонансный режим резонатора Фабри – Перо может быть полезен при объяснении принципа распространения пучка и эффективной передачи излучения. Терагерцовые металинзы могут эффективно функционировать как кросс-поляризатор при условии создания решеток на падающей плоскости. За счет локального изменения длины кромки и углов открытия расщепленных колец можно добиться полного контроля над изменениями фазы. Два симметрично распределенных параллельных фокальных пятна и два вертикальных фокальных пятна с произвольным расстоянием были получены путем размещения колец-резонаторов на металинзах. Кроме того, мы применяем концепцию режима секционированной фазы для реализации двухфокусных металинз в продольном направлении, что обеспечивает гибкий и удобный метод фокусировки.

Keywords: метаповерхность, фазовая модуляция, терагерцовое излучение, Фабри – Перо, оптическая фаза.

The ultra-thin phase metasurface structures based on the complementary square split ring nanoantenna have been proposed to achieve the THz optical metalenses with multi-dimensional and multi-focusing. The Fabry – Péro resonance mode could be usefully employed in explaining the principle of beam propagation and efficient transmission. The THz metalens can transfer the linear cross-polarization efficiently under the effect of the gratings on the incident plane. By locally tailoring edge lengths and opening angles of the split rings, full control over abrupt phase changes can be achieved. Two symmetrically distributed parallel focal spots and two vertical focal spots with arbitrary distance are obtained by arranging the SSRs units on the metalenses. Furthermore, we apply the concept of partitioned phase mode to realize the double-focusing metalens in the longitudinal direction, which provides a flexible and convenient method for focusing properties.

Keywords: metasurface, phase modulation, THz, Fabry – Péro, optical phase.

Introduction

Metamaterials with artificially engineered new-type optical devices have been achieved in the manipulation of electromagnetic (EM) polarization, applying in optical vortexes [1], optical focusing [2], high resolution holography [3], [4], quarter-wave plates [5], and so on. The metasurface, which is a 2D counterpart to metamaterials consisted of individual structures, has attracted great interests due to their its unique properties and simplicity of fabrication in recent years [6]. Some metasurfaces rely on sub-wavelength nanoantennas which play a significant role in creating arbitrary phase profiles across 2π for cross-polarized scattered light and ensuring the uniform amplitudes [7]. Each of the nanoantennas acts as a unit cell and realizes the modulation of optical properties easily based on the fine tuning of both the geometrical parameters and rotation angles, e. g. The faculty to engineer the phase of the polarized light with high accuracy and high polarization transferred efficiency is perfectly suited for applications of metalens.

For conventional lenses, such as LED lens, Fresnel lens and Luneburg lens, are based on the reflection and refraction of light at the interface of the medium, and the phase accumulation along the optical path during the wave propagation in the medium to realize the manipulation of the wave front [8], [9]. Moreover, the thicknesses of these conventional optical components are generally greater than or comparable to the operating wavelength due to the optical properties such as refractive index and anisotropy of natural materials. Recently, optical metalens has been the indispensable tool under comprehensive study towards more integrated, planar and precision ways to operate the incidence [10]–[12]. Researchers have been fascinated by different principles and technologies to design metalenses with unusual functions.

So far as we know, realizing focusing metalenses on basic substrates possesses many characteristics. Firstly, many research results on metalenses are devoted to the design of multifocal, which have been allowed to focus at different focal length in the

directions of longitudinal or the transverse [13]–[16]. Additionally, the metalenses with many focusing spots have been proposed mainly based on the phase retrieval algorithm and the parabolic phase variation algorithm [11], [17]–[19]. Few investigations have been attempted to design the metalenses with multi-dimensional and multi-focusing based on the holistic and partitioned mode, simultaneously [20], [21].

In this paper, we have proposed several novel polarization-independent multi-dimensional and multi-focusing metalenses in the horizontal and longitudinal direction based on the metasurface of the designed square split ring nanoantenna structure on the thin silicon film. The focusing lengths and focusing intensities of every focusing spots from the multi-focusing metalens can be controlled and

modulated by the concrete designs effectively. The simulation results show that the perfect focusing phenomenon of cross linearly-polarized (LP) wave can be achieved due to the modulation of gold grating layer that acts as a polarizer and the novel complementary square split ring nanoantenna. The results can provide a reliable method for the enhanced tunability and selectivity of designing plasmonic devices. And this structure will lead to improved approaches for the miniaturization and integration of THz systems.

2 Results and discussion

As shown in Figure 2.1 (a), the structure consists of a gold gratings film, silicon substrate and an array of square split ring gold antennas.

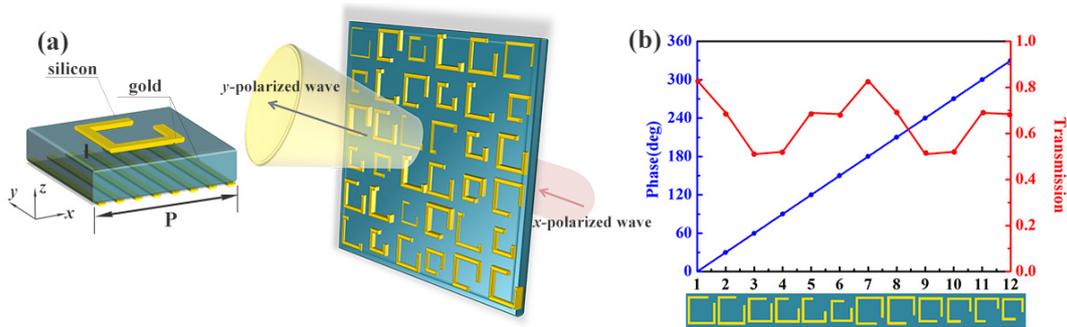


Figure 2.1 – (a) Schematic view of the nanoantenna unit. (b) An illustration of 2D multi-focusing metalens consisted of the square split ring gold nanoantennas array. (c) Phase shifts and transmitted amplitudes of the cross-polarized electric field of the proposed twelve units under LP normal incident wave

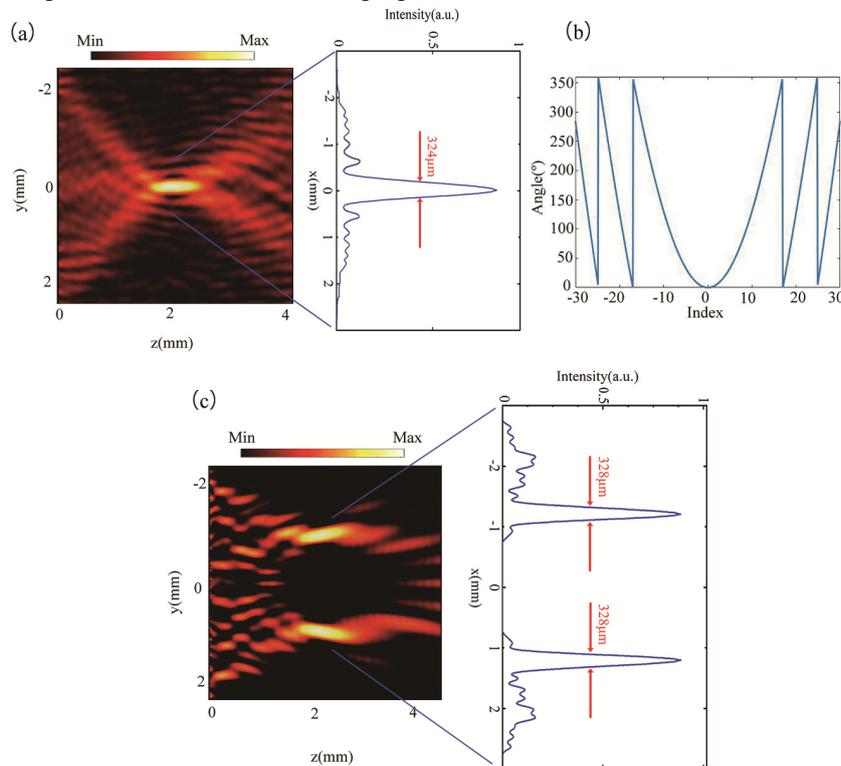


Figure 2.2 – (a) Intensity distribution and the FWHM of the y-polarized light for the designed 1-D single-focal metalens along the z-direction, which was simulated using commercial software. (b) The focusing phase distribution of metasurface arrays. (c) Intensity distribution and the FWHM of the y-polarized light for the designed 1-D double-focal metalens along the z-direction

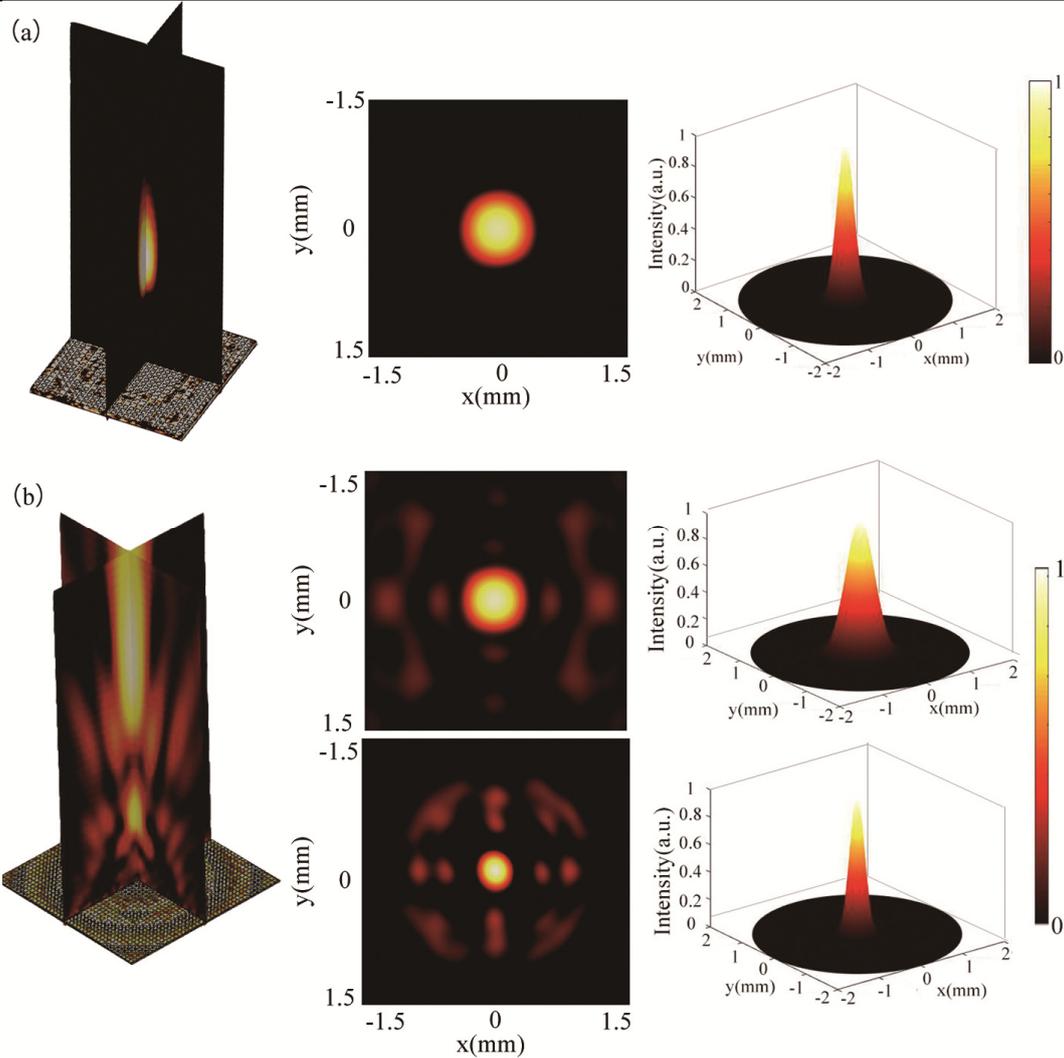


Figure 2.3 – (a) Intensity distribution, focusing on the x-y plane and the FWHM of the y-polarized light for the designed 2-D single-focal metalens. (b) Intensity distribution, focusing on the x-y plane and the FWHM of the y-polarized light for the designed 2-D double-focal metalens

Both the antennas and the gratings have the same thickness d of 200 nm, and the silicon layer thickness D is 25 μm . The period P of the unit cell is set as 80 μm to avoid coupling between the adjacent split ring nanoantennas, the width w and period Λ of the grating are 4 μm and 10 μm , respectively. The gold gratings act as the polarizer that can transmit the x-polarized radiation and reflect the y-polarized THz radiation almost completely. By optimizing both the frame length and the opening size of the square gold nanoantenna, the phase of the transmitted y-polarized light can be modulated in the range between 0 and 2π with a constant phase difference of $\pi/6$, while the amplitude transmission is maintained up to 0.5 at an operating frequency of 0.86 THz, as shown in Figure 2.1 (b).

The metalens can be designed based on equal optical path principle. Firstly, we have designed the polarization-independent 1-D metalens with single-focal by square gold nanoantennas array. According to the equal optical path principle, the phase profile can be expressed as

$$\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{x^2 + f^2} - f \right) - 2\pi m.$$

Based on the phase distribution principle of the single-focal structure, under the incidence of LP light, the corresponding induced double-focal phase profile in the horizontal direction can be expressed as

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{r_1} \sin kr_1 + \frac{1}{r_2} \sin kr_2}{\frac{1}{r_1} \cos kr_1 + \frac{1}{r_2} \cos kr_2}.$$

Where φ represents the abrupt phase shifts between an arbitrary point and the original point; λ is the incident wavelength at 0.86 THz; r_1 and r_2 represent the optical path between an arbitrary point and the original point, and f is the focal length. The intensity distribution of the y-polarized light on the x-z plane is as shown in Figure 2.2 (a). Additionally, it shows the focal point profiles ($f = 2.5$ mm) that correspond to the intensity distributions along the center of focus, which both show good sinc shapes with a full width at half maximum (FWHM) of 324 μm .

And the focusing phase distribution of one dimensional metasurface arrays are displayed clearly in Figure 2.2 (b). The electric intensity distribution of symmetric double-focal ($f=2.5$ mm) is presented in Figure 2.2 (c), which the FWHM of the focal spots are 328 μm . The transmission efficiency and the focusing efficiency (power ratio toward the focus by the focusing metalens) can reach to 93% and 1.2% respectively.

For achieving the maximum density in the radial direction and designing the multi-dimensional metalens to satisfy the realistic needs, simultaneously, the metalens with one focus ($f=2.5$ mm) in Figure 2.3 (a) and the double-focusing metalens ($f_1=2$ mm, $f_2=5$ mm) based on the partitioned mode in Figure 2.3 (b) have been proposed. The designing plane of the multi-focusing metalens with 40×40 unit cells has been divided into different regions (the inner 20×20 unit cells), which is called partitioned mode. Both the focused intensity and FWHM of the upper focus are larger than the lower focus. The double-focusing metalens with different focal length can be realized by tuning the densities of the nanoantennas in the special rings.

Conclusion

We have proposed a series of multi-dimension and multi-focusing metalenses consisted of twelve gold SSRs nanoantennas and gold gratings used for the performance of polarization conversion. For the normal incidence of x-polarized with fixed frequency in the terahertz region, the simulated results of the constructed chain double-focusing with the foci position along horizontal and longitudinal agree well with the theoretical expectations and have excellent focusing features. Furthermore, a comparison of the chain-like lenses and the planar-like lenses for multifocal imaging has been made to facilitate the development of metasurface devices towards integration and practical applications. The approach of partitioned mode provides a flexible design for realizing a tunable multifocusing metalens, which would open a new avenue for the THz field modulated device.

REFERENCES

1. *Ultra-thin plasmonic optical vortex plate based on phase discontinuities* / P. Genevet [et al.] // Applied Physics Letters. – 2012. – Vol. 100. – P. 013101.
2. *Longitudinal Multifoci Metalens for Circularly Polarized Light* / X.-Z. Chen [et al.] // Advanced Optical Materials. – 2015. – Vol. 3. – P. 1201–1206.
3. *Infrared metamaterial phase holograms* / S. Larouche [et al.] // Nature Materials. – 2012. – Vol. 11. – P. 450–454.
4. *Conformable Holographic Metasurfaces* / J. Burch [et al.] // Scientific Reports. – 2017. – Vol. 7. – P. 4520.
5. *A broadband, background-free quarter-wave plate based on plasmonic metasurfaces* / N. Yu [et al.] // Nano Letters. – 2012. – Vol. 12. – P. 6328–6333.
6. *Flat optics with designer metasurfaces* / N. Yu [et al.] // Nature Materials. – 2014. – Vol. 13. – P. 139–150.
7. *Double split-loop resonators as building blocks of metasurfaces for light manipulation: bending, focusing and flat-top generation* / A. Forouzmmand [et al.] // Journal of The Optical Society of America B. – 2016. – Vol. 33. – P. 1411.
8. *Efficient flat metasurface lens for terahertz imaging* / Q. Yang [et al.] // Optics Express. – 2014. – Vol. 22. – P. 25931–25939.
9. *Polarization-independent longitudinal multi-focusing metalens* / F. Shen [et al.] // Optics Express. – 2015. – Vol. 23. – P. 29855.
10. *Light Propagation with Phase Discontinuities: Generalized Laws of Reflection and Refraction* / N. Yu [et al.] // Science. – 2011. – Vol. 334. – P. 333–337.
11. *Wave front engineering from an array of thinaperture antennas* / M. Kang [et al.] // Optics Express. – 2012. – Vol. 20. – P. 15882–15890.
12. *Metalenses based on the non-parallel double-slit arrays* / H. Shao [et al.] // Journal of Physics D. – 2017. – Vol. 50. – P. 384001.
13. *Multiple zone multifocal phase designs* / S. Marcos [et al.] // Optics Letters. – 2013. – Vol. 38. – P. 3526–3529.
14. *Analytic design of multiple-axis, multifocal diffractive lenses* / P.J. Valle [et al.] // Optics Letters. – 2012. – Vol. 37. – P. 1121–1123.
15. *Multifunctional metasurface lens for imaging and Fourier transform* / D.-D. Wen [et al.] // Scientific Reports. – 2016. – Vol. 6. – P. 27628.
16. *Enhanced optical performance of multifocal metalens with conic shapes* / Y.-J. Bao [et al.] // Light: Science & Applications. – 2017. – Vol. 6. – P. 17071.
17. *A broadband metasurface-based terahertz flat-lens array* / Q. Wang [et al.] // Advanced Optical Materials. – 2015. – Vol. 3. – P. 779–785.
18. *A broadband terahertz ultrathin multi-focus lens* / J.-W. He [et al.] // Scientific Reports. – 2016. – Vol. 6. – P. 28800.
19. *Ultrathin metasurface laser beam shaper* / X.-Z. Chen [et al.] // Advanced Optical Materials. – 2014. – Vol. 2. – P. 978–982.
20. *Controllable design of superoscillatory lenses with multiple subdiffraction-limit foci* / M.-Y. Li [et al.] // Scientific Reports. – 2017. – Vol. 7. – P. 1335.
21. *A broadband multifocal metalens in the terahertz frequency range* / M. Hashemi [et al.] // Optics Communications. – 2016. – Vol. 370 – P. 306–310.

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant № 11504139, 11504140, 11811530052), the China Postdoctoral Science Foundation (2017M611693, 2018T110440), the Open Fund of State Key Laboratory of Millimeter Waves (№ K201802), Belarussian-Chinese Grants (Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research № F18KI-027 and F18KI-028), and the Postgraduate Research & Practice Innovation Program of Jiangsu Province (Grant № KYCX17 1479).

Поступила в редакцию 06.08.18.

УДК 538.95

ЛЕГИРОВАННЫЕ ПЛЕНКИ ОКСИДА ЦИНКА ДЛЯ КОНВЕРСИИ СПЕКТРА КРЕМНИЕВЫХ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.В. Малютина-Бронская¹, В.Б. Залесский¹, А.В. Семченко², В.В. Сидский²

¹Государственное научно-производственное объединение
«Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ALLOYED ZINC OXIDE THIN FILMS FOR THE CONVERSION OF THE SILICON SOLAR CELLS SPECTRUM

V.V. Malyutina-Bronskaya¹, V.B. Zaleski¹, A.V. Semchenko², V.V. Sydsky²

¹State Scientific and Production Association "Optics, Optoelectronics and Laser Technology", Minsk

²F. Scorina Gomel State University

Представлены оптические и фотоэлектрические свойства пленок ZnO:Me:RE³⁺ на стекле и кремнии, изготовленных с помощью золь-гель технологии методом центрифугирования. Показано, что структуры Al/ZnO:Me:RE³⁺/Si обладают фоточувствительностью в видимом и ИК спектральных диапазонах. Характеристики, полученные для системы солнечный элемент/ ZnO:Me:RE³⁺/стекло, показали возможность использования исследуемой системы в качестве даун-конвертера спектра поступающего излучения, поскольку при ее использовании наблюдается вклад в увеличение КПД солнечного элемента по сравнению с системой солнечный элемент/ ZnO:Al/ стекло.

Ключевые слова: оксид цинка, редкоземельные ионы, кремниевые солнечные элементы, пропускание, фоточувствительность, конверсия спектра.

Optical and photoelectrical properties of ZnO:Me:RE³⁺ thin films on glass and silicon substrates, formed by means of the sol-gel technique by the spin-coating method are presented. It is shown, that the Al/ZnO:Me:RE³⁺/Si structures obtain photosensitivity in visible and IR spectral ranges. Characteristics obtained for the system "Solar Cell / ZnO:Me:RE³⁺/ glass" have presented a possibility of the use of the studied system as the down-converter of the entering irradiation, as it gives a contribution to the performance factor of the individual solar cell as compared to the "Solar Element/ZnO:Al/glass" system.

Keywords: zinc oxide, rare-earth ions, silicon solar cells, transmission, photosensitivity, spectrum conversion.

Введение

Пленки ZnO имеют широкое применение в оптоэлектронике, в частности, в прозрачно-проводящих электродах в светодиодах, плоских панельных дисплеях и солнечных элементах (СЭ) [1]–[3]. Это связано с такими свойствами оксида цинка, как высокий коэффициент пропускания в видимой области спектра и хорошая электропроводность [4]. Высокая проводимость связана со стехиометрией пленки и наличием внутренних дефектов кристалла. Введение в кристаллическую структуру пленки различных примесей приводит к изменению как оптических свойств, так и электрических свойств пленки [5]–[7].

Легирование ZnO является важным направлением в исследовании оптических и электрических свойств, имеющее решающее значение для практического применения этого материала. Среди легирующих примесей особое место занимают ионы редкоземельных ионов (РЗИ), которые обладают уникальными электрическими, оптическими и люминесцентными свойствами для самых различных применений [8], [9]. В настоящее время материалы, легированные РЗИ элементами интенсивно исследуются, в частности, как материалы для фотоники [10], [11].

Наиболее существенными механизмами, понижающими эффективность кремниевых солнечных элементов, являются неполное поглощение солнечного спектра и термализация фотоэлектронов, возбужденных фотонами с энергией, существенно превышающей ширину запрещенной зоны полупроводника. Два этих механизма ответственны за потерю почти 50% солнечной энергии. Одним из способов минимизации потерь является более эффективное использования солнечного спектра, как например, в тандемных солнечных элементах. Еще один способ – это трансформировать широкий солнечный спектр в спектр с узким распределением фотонов по энергии вблизи оптимального для конкретного полупроводника значения [12]. Кремниевые фотоэлементы эффективно преобразуют энергию солнечного излучения видимого и ближнего инфракрасного диапазонов (500–900 нм). Имеется возможность повысить КПД фотоэлемента в области ниже 500 нм и выше 900 нм.

В новейших СЭ повышение КПД достигается за счет расширения спектра «действенного» солнечного излучения. Идея конверсии длин волн излучения в фотоэлектричестве заключается в возможности, используя необходимые материалы,

изменить солнечный спектр с тем, чтобы задействовать фотоны, энергии которых не соответствуют диапазону поглощения фотоэлектрических приборов. Поглощение фотона, а затем испускание одного или нескольких фотонов с более низкой энергией называется преобразованием с повышением частоты (фотолюминисценция), или «даун-конверсией», в то время как поглощение двух и более фотонов, а затем испускание одного фотона с более высокой энергией называется преобразованием с понижением частоты, или «ап-конверсией» [13]–[15]. Один из методов повышения эффективности солнечных фотоэлементов связан с использованием материалов легированных РЗИ, которые характеризуются сильной люминесценцией в видимом диапазоне [10]. Такие преобразователи солнечного излучения используют люминесцентную среду для изменения длины волны фотонов, энергия которых превышает допустимый диапазон энергий полупроводникового прибора. Данный подход обладает рядом преимуществ по сравнению с другими способами повышения эффективности солнечных батарей [16], [17]. Прежде всего, преобразователи являются внешними дополнительными приспособлениями, поэтому не требуется модификация самих фотоэлементов. Преобразователь способен поглощать как прямое, так и рассеянное излучение, тем самым значительно повышая используемую спектральную плотность. Одним из уникальных преимуществ данной концепции является его совместимость со множеством существующих технологий производства солнечных элементов, так как модифицируется только поступающий спектр солнечной энергии (рисунок 0.1). Еще одно дополнительное преимущество связано с тем, что, поглощая значительную долю высокоэнергичных фотонов, преобразователь будет поглощать и высвобождаемую тепловую энергию. Это дает возможность уменьшить тепловую нагрузку на фотоэлемент, тем самым улучшая его работоспособность.

К таким преобразователям можно отнести среды на органических красителях, но они имеют высокую деградацию и неорганические люминесцентные среды, например активированные стекла, стеклокерамики и кристаллы [18], [19]. В свою очередь стекла могут быть органически включены в структуру солнечного элемента, причем люминесцентная среда может быть как на поверхности, так и в объеме стеклообразной матрицы.

К таким активным материалам можно отнести пленки ZnO, легирование РЗИ, нанесенные на стекло. Данные пленки проявляют люминесцентные свойства, зависящие от вида РЗИ и способа получения материала [20].

Для получения пленок ZnO используются различные виды напыления, молекулярно-лучевая эпитаксия, осаждение из газовой фазы, золь-гель

метод [21]. Золь-гель метод получения пленок ZnO имеет такие преимущества, как простота оборудования, возможность контроля стехиометричности пленки, низкая стоимость, гибкость технологии, ее экологическая безопасность. При синтезе пленок на основе оксида цинка золь-гель методом появляется возможность управления оптическими и электрофизическими свойствами. В работе [22] показаны фотоэлектрические свойства слоев оксида цинка легированных Er и Tb, полученные реактивным магнетронным распылением мишени и показывающие их возможность использования в качестве активных слоев оптоэлектроники.

Целью данной работы было изучение оптических и фотоэлектрических свойств набора пленок ZnO легированных РЗИ на стекле и кремнии, полученных золь-гель методом, определить возможность применения их в качестве спектрального преобразователя для кремниевых солнечных элементов.

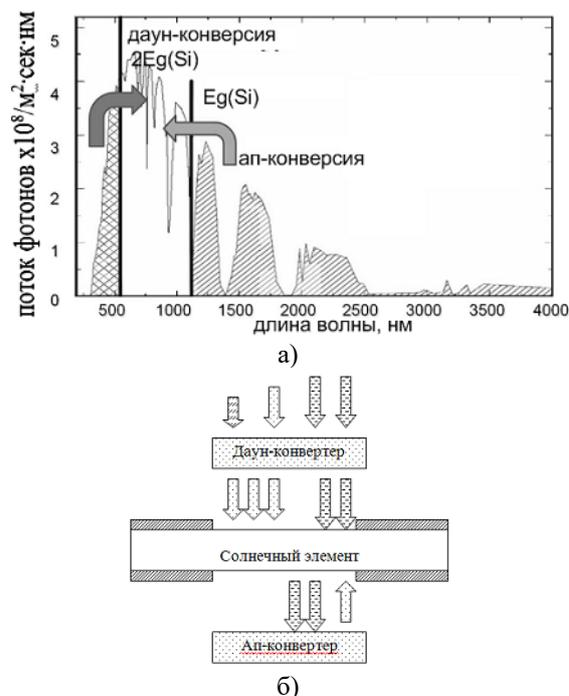


Рисунок 0.1 – Спектр солнечного света (а) и структура тестируемого солнечного элемента для преобразования спектра солнечного элемента (б)

1 Методика эксперимента

В данной работе рассматриваются пленки оксида цинка на стекле, полученные золь-гель методом. В качестве легирующей примеси были использованы ионы РЗЭ: Eu, Er, Sm, Tb, Yb. Для улучшения проводимости некоторые пленки дополнительно со-легировались ионами алюминия (Al) или серебра (Ag).

Легированные пленки ZnO ($ZnO:Me:RE^{3+}$) на стекле и кремнии были изготовлены с помощью

золь-гель технологии методом центрифугирования. Химический состав золя подобран экспериментальным путём. Пленки синтезировались на основе ацетата цинка, изопропилового спирта с содержанием ионов Me (5 ат.% нитрата алюминия (Al) или 0,5 ат. % нитрата серебра (Ag) и 2 ат. % нитратов RE³⁺). Пленкообразующий раствор готовился из ацетата цинка, который заливался абсолютным изопропиловым спиртом и перемешивался. После нанесения золя на поверхность пластин (стекла, монокристаллического кремния), образцы отжигались при температуре 400° С с выдержкой в течение 1 часа. Полученные пленки имеют толщину порядка 300 нм. Данные пленки характеризуются однородной мелкозернистой микроструктурой с размерами зерен 19 нм [23].

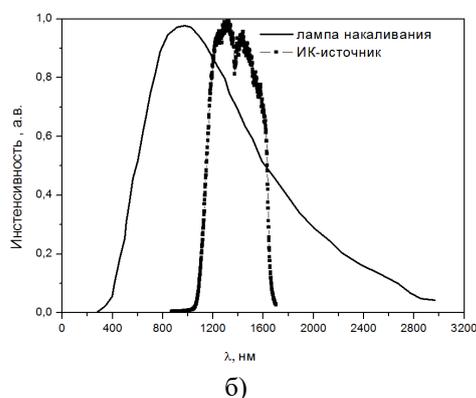
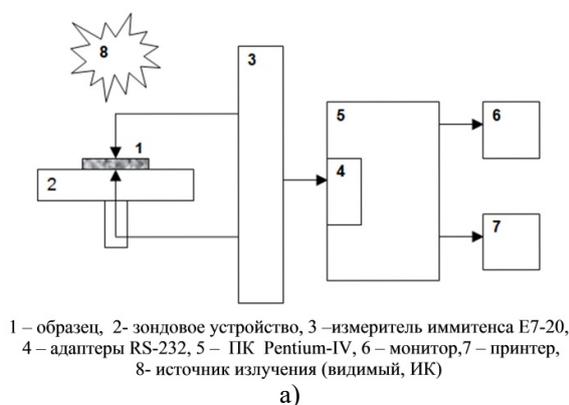


Рисунок 1.1 – Автоматизированная установка на основе измерителя иммитанса E7-20 (а). Спектры лампы накаливания и ИК-источника (б)

Измерение спектров пропускания проведено на спектрофотометре PV 1251С. Измерения вольт-амперных характеристик (ВАХ) производились на измерителе иммитанса E7-20 при комнатной температуре (рисунок 1.1, а). Измерения ВАХ проводились как в темноте, так и при освещении лампой накаливания и ИК – источником. Спектр ИК-источника, полученный с помощью спектрометра SDH-IV, показал, что данная лампа излучает в ближнем ИК диапазоне от 1,1 до 1,6 мкм (рисунок 1.1, б).

Измерение параметров солнечного элемента проводилось с использованием импульсного тестера ИФТ-4/3 (имитатора солнечного излучения со спектром АМ 1,5), представленном на рисунке 1.2. Импульсный тестер ИФТ-4/3 (рисунок 1.2, а) представляет собой комбинацию импульсного источника излучения (рисунок 1.2, б) и электронного измерительного устройства. Комплект оборудования тестера включает в себя осветитель и блок измерения и управления со светозащитным кожухом, источник питания осветителя и управляющий компьютер. Тестер предназначен для проведения научных исследований и тестирования параметров фотоэлектрических преобразователей, в том числе солнечных, на основе аморфного или кристаллического кремния, а также на основе многослойных наногетероструктур материалов А₃В₅. Схема активной электронной нагрузки выдает биполярный импульс напряжения сложной формы, прикладываемого к СЭ до светового импульса и во время светового импульса, а электронный измерительный блок регистрирует зависимости во времени для приложенного напряжения и генерируемого фототока. На основе этих данных строились темновая и нагрузочная вольт-амперные характеристики СЭ. Управление и контроль процессом измерений, а также обработка результатов осуществлялись в персональном компьютере по специально разработанной программе.

Тестер дополнен системой контроля интенсивности освещения, так что перечисленные выше характеристики могут быть измерены как в условиях стандартной засветки, соответствующей одной (или менее) солнечной постоянной (100 мВт/см²), так и при концентрированной солнечной засветке, причем с минимальным температурным воздействием на СЭ благодаря импульсному режиму работы. Автоматизированный программно-аппаратный комплекс предназначен для измерения и расчета в автоматическом режиме параметров и характеристик фотоэлектрических преобразователей, таких, как, вольт-амперная кривая, ток короткого замыкания, напряжение холостого хода, эффективность преобразования световой энергии (КПД), коэффициент заполнения.

Параметры СЭ измерялись по следующей методике: изначально измерялись параметры исходного кремниевого СЭ, после чего на лицевую сторону СЭ клали стеклянную подложку и измеряли параметры; далее на лицевую сторону СЭ вместо стеклянной подложки клали преобразователь солнечного излучения (с люминесцентной средой для изменения длины волны фотонов) представляющий собой стекло с нанесенной пленкой ZnO:Me:RE³⁺ и вновь проводилось измерение параметров.

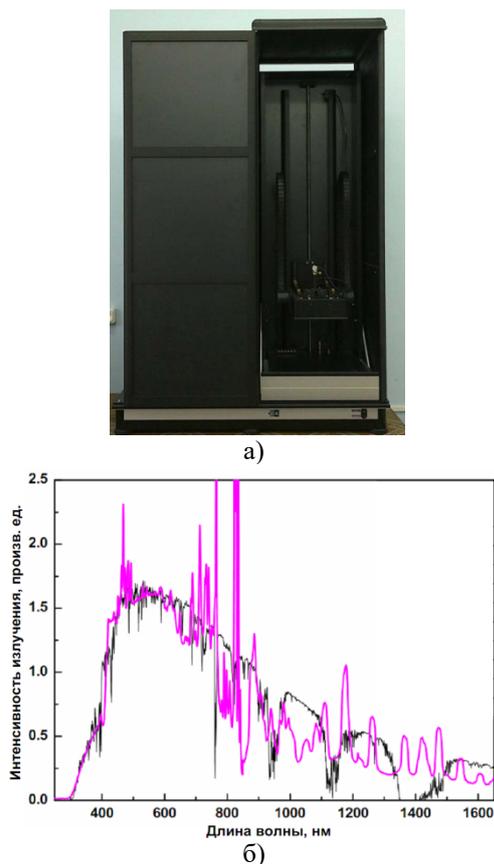


Рисунок 1.2 – Внешний вид осветителя и блока измерения и управления со светозащитным кожухом (на правом рисунке дверца сдвинута для обеспечения доступа к тестируемому образцу) (а) и спектр излучения импульсных ламп при подборе фильтров и напряжений заряда конденсаторных батарей для формирования стандартного солнечного спектра AM 1,5D (б)

2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 2.1 представлены спектры пропускания стекла и пленок нелегированного и легированного оксида цинка на стеклянной подложке. Можно выделить две области: в первой области $\lambda < 400$ нм энергия квантов падающего излучения больше, чем ширина запрещенной зоны ZnO:Me:RE^{3+} , поглощение света резко увеличивается. Вторая область лежит в интервале длин волн ($400 \text{ нм} < \lambda < 1000 \text{ нм}$), здесь энергия падающих фотонов низкая, и в результате пленки ZnO:Me:RE^{3+} практически прозрачна для этого диапазона длин волн, и соответственно, поглощение света минимально. Как можно увидеть в области длин волн от 400 нм до 800 нм наибольшим коэффициентом пропускания обладают пленки ZnO:Al и ZnO с пропусканием порядка 85%, далее с пропусканием порядка 75% пленки $\text{ZnO:Al:Yb}^{3+}:\text{Tb}^{3+}$ и ZnO:Al:Er^{3+} , а для остальных пленок этот параметр лежит в диапазоне от 65% до 75%. В области длин волн более 900 нм коэффициент пропускания для всех пленок практически

одинаковый на уровне 80–85%. Небольшой разброс по значению пропускания может быть обусловлен структурой пленки, в частности, размером зерен. Уменьшение размера зерна приводит к улучшению оптических свойств пленок [6].

На рисунке 2.2 представлены типичные вольт-амперные характеристики (ВАХ) МОП структур Al/ZnO:Al:Eu^{3+} и Al/ZnO:Ag:Eu^{3+} на кремнии. Аналогичные по характеру зависимости наблюдались и для всех типов МОП-структур $\text{Al/ZnO:Me:RE}^{3+}/\text{Si}$. Фоточувствительность наблюдается только при приложенном смещении. Для анализа сравнивались значения тока и фототоков, полученных при смещении 2 В, приложенного к структуре $\text{Al/ZnO:Me:RE}^{3+}/\text{Si}$. Результаты значений тока и фототоков исследуемых МОП-структур представлены в таблице 2.1. Максимальная чувствительность к ИК-излучению проявилась на структурах $\text{ZnO:Al:Er}^{3+}/\text{Si}$, а к видимому диапазону $\text{ZnO:Al:Yb:Tb}/\text{Si}$. Для МОП-структуры $\text{ZnO:Al:Er}^{3+}/\text{Si}$ наблюдается высокая фоточувствительность как в видимом так и ИК-диапазоне длин волн.

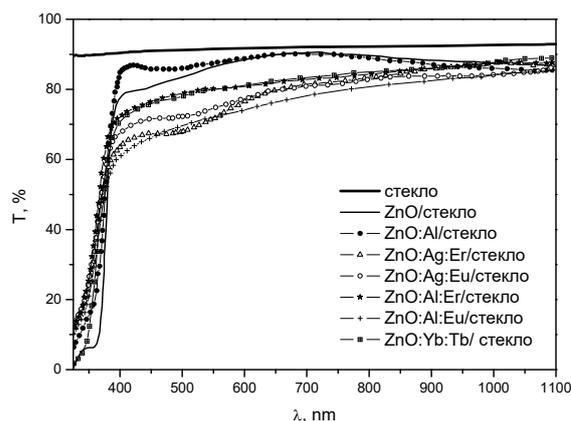


Рисунок 2.1 – Спектры пропускания стекла и структур ZnO/стекло и $\text{ZnO:Me:RE}^{3+}/\text{стекло}$

Данный эффект можно связать с тем, что при легировании РЗИ и Me возможна реализация резонансного механизма передачи возбуждения от матрицы ZnO к РЗИ и от одного РЗИ к другому при со-легировании, а также достижение сенсibilизации излучения 4f-внутрицентровых переходов в определенном диапазоне длин волн. Для трехвалентных ионов Eu^{3+} , Tb^{3+} это видимый диапазон спектра (400 нм – 700 нм), для ионов Er^{3+} , Yb^{3+} – это ИК-область спектра (950 нм – 1540 нм). Введение дополнительной примеси, такой как Al или Ag, может способствовать оптимальному положению акцепторного уровня в запрещенной зоне ZnO , позволяющего обеспечить эффективные пути переноса энергии возбуждения от матрицы к РЗИ, созданию дополнительных оптически активных центров, что в свою очередь позволит найти управляющий параметр для увеличения фоточувствительности в требуемом спектральном диапазоне.

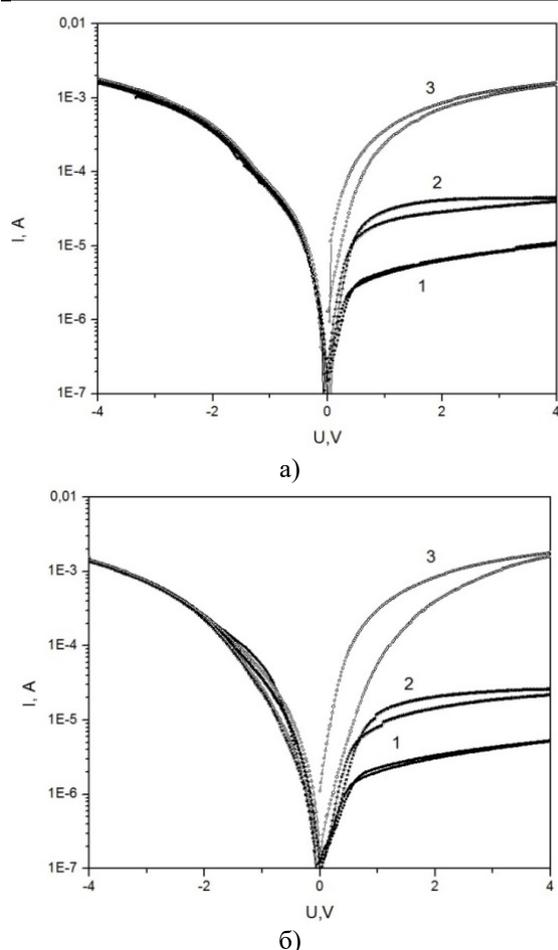


Рисунок 2.2 – Вольт-амперные характерные характеристики пленок ZnO:Al:Eu³⁺ (а) и ZnO:Ag:Eu³⁺ (б) на кремнии. Источники освещения: 1 – без освещения (темновая), 2 – ИК источник, 3 – лампа накаливания

Результаты измерения фотоэлектрических характеристик, полученных с использованием имитатора солнечного спектра (рисунок 1.2) для исходного солнечного элемента и СЭ, состыкованного со структурой ZnO:Me:RE³⁺/стекло представлены на рисунке 2.3. В качестве исходного солнечного элемента был выбран монокристаллический кремниевый солнечный элемент изготовленный по стандартной технологии площадью порядка 2 см². При стыковке солнечного элемента и исследуемых структур на стекле,

площадь стекла была сопоставима с площадью СЭ, так чтобы исследуемая структура полностью покрывала СЭ.

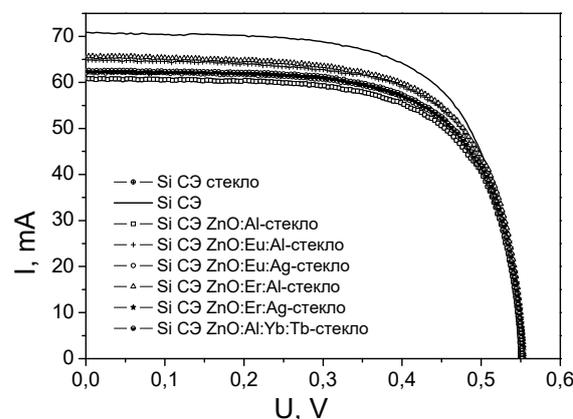


Рисунок 2.3 – Вольт-амперные характеристики кремниевого солнечного элемента с различной структурой

Как видно из рисунка 2.3 и таблицы 2.2, напряжение холостого хода практически не меняется, незначительно изменяется ток короткого замыкания. Максимальное падение параметров происходит, как только мы стыкуем СЭ со стеклом без дополнительного покрытия. Как видно из спектров пропускания, за счет стекла происходят потери порядка 10%, а на КПД СЭ при этом уменьшается на 17% от первоначального значения. Это обусловлено потерей в мощности падающего спектра через стекло.

При совмещении СЭ со структурой ZnO:Me:RE³⁺/стекло, в зависимости от легирующей примеси пленки ZnO, параметры СЭ, по сравнению с реперным образцом, увеличиваются: I_{cs} на величину от 1,27 мА/см² до 3,70 мА/см², а КПД – на величину от 0,5% до 1,46%. При использовании пленок ZnO:Eu:Al и ZnO:Er:Al на стекле наблюдается максимальное повышение КПД на 1,32% и 1,46% соответственно. Состыковка СЭ со структурой ZnO:Er:Al/стекло дает максимальный вклад в увеличение параметров СЭ, это может быть обусловлено тем, что для этих пленок наблюдается хорошая фоточувствительность в широком диапазоне длин волн (таблица 1.1) и коэффициент пропускания для этой пленки – более 75%.

Таблица 2.1 – Значение тока при напряжении +2В, где: I_D – темновой ток, I_{IR} – фототок при освещении ИК-источником, I_L – фототок при освещении лампой накаливания

№ п/п	Структура образца	I_D , А	I_{IR} , А	I_L , А	I_{IR}/I_D	I_L/I_D
1	ZnO:Al	$3,24 \cdot 10^{-5}$	$2,45 \cdot 10^{-4}$	$2,30 \cdot 10^{-3}$	7,56	70,99
2	ZnO:Al:Er/Si	$2,65 \cdot 10^{-6}$	$8,42 \cdot 10^{-5}$	$1,83 \cdot 10^{-4}$	31,77	69,06
3	ZnO:Ag:Er/Si	$4,64 \cdot 10^{-6}$	$4,32 \cdot 10^{-5}$	$3,32 \cdot 10^{-4}$	9,31	71,55
4	ZnO:Al:Eu/Si	$6,54 \cdot 10^{-6}$	$4,15 \cdot 10^{-5}$	$7,11 \cdot 10^{-4}$	6,35	108,72
5	ZnO:Ag:Eu/Si	$3,31 \cdot 10^{-6}$	$2,06 \cdot 10^{-5}$	$3,91 \cdot 10^{-4}$	6,22	118,13
6	ZnO:Al:Yb:Tb/Si	$1,20 \cdot 10^{-6}$	$2,14 \cdot 10^{-5}$	$1,67 \cdot 10^{-4}$	17,83	139,17

Таблица 2.2 – Значение фотоэлектрических параметров кремниевого солнечного элемента с различной структурой

№ п/п	Измеряемая система	Ток короткого замыкания, I_{cs} , мА/см ²	Напряжение холостого хода, U_{oc} , В	Фактор заполнения FF, %	КПД, %
1	Si-CЭ	35,45	0,548	67,8	13,16
2	стекло/ Si –CЭ (репер)	29,17	0,550	68,1	10,92
3	ZnO:Al/стекло/ Si –CЭ	30,44	0,550	68,2	11,42
4	ZnO:Eu:Ag/стекло/ Si –CЭ	31,07	0,551	68,4	11,71
5	ZnO:Er:Ag/стекло/ Si –CЭ	31,18	0,553	68,3	11,79
6	ZnO:Al:Yb:Tb/стекло/ Si –CЭ	31,32	0,552	68,5	11,84
7	ZnO:Eu:Al/стекло/ Si –CЭ	32,44	0,554	68,1	12,24
8	ZnO:Er:Al/стекло/ Si –CЭ	32,87	0,553	68,1	12,38

Это связано с тем, что спектры пропускания отличаются для разных пленок в широком диапазоне значений. Для структур ZnO:Eu:Al, хоть пропускание и самое низкое из всех, более 60%, зато в видимой области значение I_L/I_D на 40% выше, чем значение I_L/I_D для структур ZnO:Er:Al/Si.

Как можно заметить по полученным данным, введение Al лучше способствует оптимальному положению акцепторного уровня в запрещенной зоне ZnO, позволяющего обеспечить эффективные пути переноса энергии возбуждения от матрицы к РЗИ для увеличения фоточувствительности.

Заключение

Представлены оптические и фотоэлектрические характеристики структур Al/ZnO:Me:RE³⁺/Si и ZnO:Me:RE³⁺/стекло, изготовленных по золь-гель технологии. В качестве легирующих примесей были использованы ионы металлов: нитрата Al или нитрата Ag и нитраты редких земель, таких как Er, Eu, Yb, Tb. Анализ спектров пропускания показал, что в области длин волн от 400 нм до 800 нм наибольшим коэффициентом пропускания обладают пленки ZnO:Al и ZnO с пропусканием порядка 85%, а все пленки с добавками РЗИ обладают пропусканием более 65% в видимом спектральном диапазоне и более 80% в ИК-диапазоне длин волн. Установлено, что структуры Al/ZnO:Me:RE³⁺/Si обладают фоточувствительностью. Максимальная чувствительность к ИК-излучению при смещении + 2 В (отношение значения фототока к значению темнового тока составило 31,77) проявилась на структурах ZnO:Al:Er³⁺/Si, а к видимому диапазону – у структур ZnO:Al:Yb:Tb/Si (отношение значения фототока к значению темнового тока составило 139,17). Для МОП-структуры ZnO:Al:Er³⁺/Si наблюдается высокая фоточувствительность как в видимом так и ИК-диапазоне длин волн (отношение значения фототока к значению темнового тока в ИК – области и в видимой области спектра составило 31,77 и 69,06 соответственно). Данный эффект можно связать с

тем, что при легировании РЗИ и ионами металла возможна реализация резонансного механизма передачи возбуждения от матрицы ZnO к РЗИ и от одного РЗИ к другому при со-легировании, а также достижение сенсбилизации излучения 4f-внутри-центровых переходов в определенном диапазоне длин волн.

Характеристики, полученные для системы CЭ/ ZnO:Me:RE³⁺/стекло и исходного солнечного элемента, показали, что в качестве даунконвертера подходит структура ZnO:Er:Al/ стекло, поскольку дает максимальный вклад в увеличение КПД CЭ на 1,46% по сравнению со структурой CЭ/ ZnO:Al/ стекло.

Таким образом, исследованные пленки являются перспективными кандидатами в качестве активных слоев фотодиодов и даун-конвертеров для повышения эффективности солнечных элементов, в частности, кремниевых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jagadish, C. Zinc oxide bulk, thin films and nanostructures processing, properties and applications / C. Jagadish, S. Pearton. – Elsevier, 2006. – 589 p.
2. Zinc oxide thin films: characterization and potential applications / S. O'Brien [et al.] // Thin Solid Films. – 2010. – Vol. 518, № 16. – P. 4515–4519.
3. Growth of pure and doped ZnO thin films for solar cell applications / M. Sathya [et al.] // Advances in Applied Science Research. – 2012. – Vol. 3, № 5. – P. 2591–2598.
4. Pandal, S.K. Preparation of transparent ZnO thin films and their application in UV sensor devices / S.K. Pandal, C. Jacob // Solid-State Electronics. – 2012. – Vol. 73. – P. 44–50.
5. Structural, electrical and optical properties of N-doped ZnO films synthesized by SS-CVD / J. Lu [et al.] // Materials Science in Semiconductor Processing. – 2002. – Vol. 5, № 6. – P. 491–496.
6. Transport properties of phosphorus-doped ZnO thin films / Y.W. Heo [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2003. – Vol. 83. – P. 1128.

7. Singha, C. Variation of electrical properties in thickening Al-doped ZnO films: role of defect chemistry / C. Singha, E. Panda // RSC Adv. – 2016. – Vol. 6. – P. 48910–48918.
8. Kenyon, A.J. Recent developments in rare-earth doped materials for optoelectronics / A.J. Kenyon // Progress in Quantum Electronics. – 2002. – Vol. 26, № 4–5. – P. 225–284.
9. Voncken, J.H.L. The Rare Earth Elements / J.H.L. Voncken. – Springer, 2016. – 125 p.
10. Steckl, A.J. Photonic applications of rare-earth-doped materials / A.J. Steckl, J.M. Zavada // MRS Bulletin. – 1999. – Vol. 24, № 9. – P. 16–20.
11. Rare-Earth doped ZnO films: a material platform to realize multicolor and near-infrared electroluminescence / Y. Yang [et al.] // Advance optical materials. – 2014. – Vol. 2, № 3. – P. 240–244.
12. van Sarka, W.G.J.H.M. Enhancing solar cell efficiency by using spectral converters / W.G.J.H.M. van Sarka // Solar Energy Materials and Solar Cells. – 2005. – Vol. 87, № 1–4. – P. 395–409.
13. Modifying the solar spectrum to enhance silicon solar cell efficiency – An overview of available materials / C. Strumpel [et al.] // Sol. Energy Mater. Sol. Cells. – 2007. – Vol. 91. – P. 238–249.
14. Chen, D. Lanthanide nanomaterials with photon management characteristics for photovoltaic application / D. Chen, Y. Wang, M. Hong // Nano Energy. – 2012. – № 1. – P. 73–90.
15. Richards, B. Enhancing the performance of silicon solar cells via the application of passive luminescence conversion layers / B. Richards // Sol. En. Mat. Sol. Cell. – 2006. – Vol. 90. – P. 2329.
16. Application of a silicon nanocrystal down-shifter to a c-Si solar cell / S.L. Luxembourg [et al.] // Energy Procedia. – 2014. – Vol. 55. – P. 190–196.
17. Enhancing solar cell efficiency using photon upconversion materials / Y. Shang [et al.] // Nanomaterials (Basel). – 2015. – Vol. 5, № 4. – P. 1782–1809.
18. Jing, Z. Upconversion luminescent materials: advances and applications / Z. Jing // Chem. Rev. – 2015. – Vol. 115, № 1. – P. 395–465.
19. Photon upconversion in organic nanoparticles and subsequent amplification by plasmonic silver nanowires / Z. Qu [et al.] // Nanoscale. – 2018. – Vol. 10. – P. 985–991.
20. Кузьмина, И.П. Окись цинка. Получение и оптические свойства / И.П. Кузьмина, В.А. Никитенко. – М.: Наука, 1984. – 168 с.
21. Основы золь-гель-технологии нанокм-позитов / Ю.М. Таиров [и др.]. – СПб.: Техноме-диа, Элмор, 2007. – 255 с.
22. Активные слои легированные редкоземельными металлами для повышения эффективности солнечных элементов / В.В. Малютина-Бронская [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 26–29.
23. Свойства пленок ZnO:Er³⁺, полученных золь-гель методом / В.В. Малютина-Бронская [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2017. – Т. 51/3. – С. 409–413.

Поступила в редакцию 27.06.18.

УДК 535.16:534.341

ТЕРМООПТИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗВУКА БЕССЕЛЕВЫМИ СВЕТОВЫМИ ПУЧКАМИ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С ВНУТРЕННИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Г.С. Митюрин^{1,2}, Е.В. Лебедева², М. Алексиук³, А.Н. Сердюков¹

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель

³Институт фундаментальных технологических исследований Польской академии наук, Варшава

THERMOOPTICAL EXCITATION OF SOUND BY BESSEL LIGHT BEAMS IN LAYERED MEDIA WITH INTERNAL STRESS

G.S. Mityurich^{1,2}, E.V. Lebedeva², M. Aleksiejuk³, A.N. Serdyukov¹

¹F. Scorina Gomel State University

²Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel

³Institute of Fundamental Technological Research Polish Academy of Sciences, Warsaw

Представлены результаты исследования фотоакустического преобразования различных мод БСП в гиротропных слоистых средах при пьезоэлектрическом методе регистрации результирующего сигнала. Показано, что амплитуда фотоакустического сигнала определяется теплофизическими характеристиками слоистых сред с внутренними напряжениями, коэффициентом поглощения и параметром кругового дихроизма гиротропных слоистых сред, поляризацией и энергетическими характеристиками БСП, частотой амплитудной модуляции, а также геометрией системы «пьезоэлектрический датчик – гиротропный слоистый образец».

Ключевые слова: фотоакустическое преобразование, пьезоэлектрическая спектроскопия, бесселев световой пучок, диссипация энергии, функция Бесселя, уравнение теплопроводности, гиротропная слоистая среда, константы Мурнагана, коэффициенты Ламэ.

The results of investigation of photoacoustic transformation of different modes BLB in gyrotropic layered media are submitted at piezoelectric detection method of registration of a resulting signal. Following the obtained expressions, it is showed that the amplitude of a photoacoustic signal is determined by the thermophysical characteristics of layered media with internal stress, absorption coefficient and parameter of circular dichroism of gyrotropic layered media, polarization and energy characteristics of BLB, frequency of amplitude modulation, and also by geometry system piezoelectric sensor – gyrotropic layered sample.

Keywords: photoacoustic transformation, piezoelectric spectroscopy, Bessel light beam, energy dissipation, Bessel function, heat equation, gyrotropic layered media, Murnaghan constants, Lamé coefficients.

Introduction

The research of the mechanism of photoacoustic transformation at Bessel light beams (BLB) uptake in media with spatial dispersion is interesting from both practical and theoretical points of view. The relevant feature of BLB is the absence of diffraction divergence during their distribution. Taking that fact that natural layered gyrotropic media are widely used in quantum electronics, linear and nonlinear optics, in items of nanotechnologies, analysis of a broad spectrum of physical, acoustics, thermal etc. properties in such media is very actual.

1 Method

One of the most important line of the development of modern methods of nondestructive testing and diagnostic facilities is connected with the detection of mechanical stresses in solids. A range of methods has been developed and is being applied for the solution of this problem at present. The most important of them are as follows: ultrasound, diffraction, magnetic, and photothermoacoustic, as well

as methods based on the use of holographic interferometry. However, great attention has been recently paid to the possibility of the use of photothermoelastic effect for the diagnostics of mechanical stresses in solids [1]–[6]. An important advantage of the photothermoelastic method is its possibility to research different objects such as, for example, gyrotropic [7] and nonlinear [8] crystals, layered [9] and inhomogeneous media [10], different classes of piezo crystals symmetry [11] and so on.

Let's note that the paper [5] studied the resonant photoacoustic phenomena in mechanically stressed solids, taking into account the dependence of the thermoelastic coupling coefficient on the initial deformation in an isotropic sample upon irradiation him monochromatic plane electromagnetic waves.

Bessel light beams attract attention of researches due to their unique properties i.e. non-diffraction propagation in definite region of space, as well as the ability of high concentration of light energy nearby an axis of beam [12]–[14]. The important

feature of Bessel light beams is the existence of radial energy flux. The use of opportunity to manage the choice of necessary polarized modes of BLB let us to propose a device [15] of thermo-optical excitation of acoustic waves with the aim to develop the method of photoacoustic diagnostics of different media and materials.

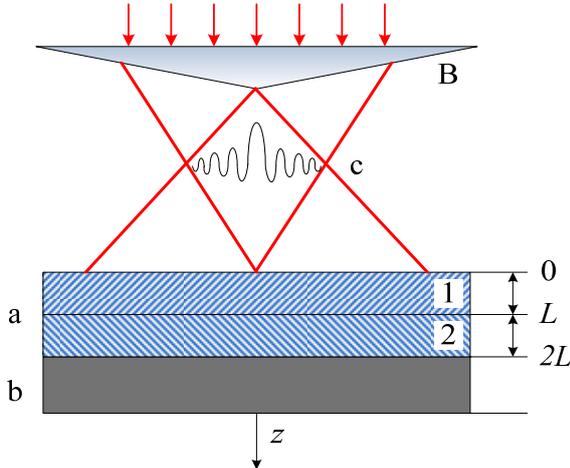


Figure 1.1. – Schematic of detection of a photoacoustic signal: (a) – sample (1) gyrotropic-isotropic layer, (2) isotropic layer; (b) piezoelectric cell, (B) conical lens, (C) modes Bessel light beams

This paper aims at studying the resonant photoacoustic transformation in a two-layer gyrotropic medium under generation of a thermoelastic signal by TE-mode of BLB (Bessel light beam). Detection of the signal is carried out using piezoelectric transducer, in the geometry shown in Figure 1.1.

2 Results

The research of photoacoustic transformation of TE-modes of BLB in multilayer will be described by means of material equations and Maxwell's equations.

The properties of a gyrotropic sample will be described with the use of coupling equations [16]

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} + i\eta \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H} - i\tilde{\eta} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

where and $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ are electric and magnetic constants respectively, μ is magnetic medium permittivity, $\mu = 1$ – it is assumed that the medium is nonmagnetic, the sign ‘ \sim ’ is used to denote transposition, η is a pseudoscalar complex parameter of gyrotropy, and the real part $\text{Re } \eta = \eta_1$ defines specific rotation of the plane of polarization, and the imaginary part $\text{Im } \eta = \eta_2$ is responsible for circular dichroism.

The energy dissipation in the gyrotropic sample can be found basing on (2.1) and Maxwell equations and can write down as follows

$$\tilde{Q}^{TE} = \tilde{Q}^{TE} e^{-2k_z z},$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{TE} &= \frac{\omega |\varepsilon| \varepsilon_2 \varepsilon_0}{2\pi} \left(\left(\frac{m}{q\rho} \right)^2 J_m^2(q\rho) + J_m'^2(q\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2mk_0 k_{z1} \eta_2}{q^3 \rho} J_m(q\rho) J_m'(q\rho) \right), \end{aligned}$$

where $k_0 = \omega/c$, ε is the medium permittivity, ρ is a radial coordinate, $q = k_0 \sqrt{\varepsilon} \sin(\gamma)$, $k_{z1} = k_0 \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\gamma_1)$, $k_{z2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\gamma_2)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\varepsilon_1''$ is a complex permittivity of the gyrotropic-isotropic layer, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + i\varepsilon_2''$ is the complex permittivity of the second isotropic layer, γ_1 и γ_2 are conicity parameters of BLB in the first and the second layer, which is equal to the half apex angle of the cone of the wave vectors that define the spatial frequency spectrum of the beam, ω_0 is the frequency of light, ω is the frequency of amplitude modulation of BLB, $J_m(q\rho)$ is a m-order Bessel function of the first kind, $J_m'(q\rho) = \partial J_m(q\rho) / \partial \rho$.

Basing on the formerly used method in [5] we obtain the expression for the photoacoustic (PA) response from the piezoelectric transducer under generation of a thermoelastic signal in the layered medium (here, a double layer) of BLB when the boundaries are free:

$$V = \frac{\left(\begin{aligned} &iY_u(2L) \times \\ &\times (c_u^T Q_u 2 \cos(Q_z L) - c_z^T Q_z i 2 \sin(Q_z L)) - \\ &- iX_1 (c_u^T Q_u 2 \cos(Q_z L) - c_z^T Q_z 2i \sin(Q_z L)) - \\ &- c_u^T C e^{iQ_z L} \end{aligned} \right) \times}{\left(\begin{aligned} &c_u^T (e^{i2k_1 L} + 1) \times \\ &\times (c_u^T i Q_u 2 \cos(Q_z L) - c_z^T i Q_z 2i \sin(Q_z L)) + \\ &+ c^D k_1 (1 - e^{i2k_1 L}) \times \\ &\times (c_u^T Q_u 2 \cos(Q_z L) - c_z^T Q_z 2i \sin(Q_z L)) \\ &\times (2e^{ik_1 L} - e^{ik_1 2L} - 1) \end{aligned} \right)}$$

with the following designations:

$$\begin{aligned} X_0 &= c_z^T \frac{\partial Y_z(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} - B_z \alpha_{tz} T_z(0), \\ X_1 &= c_u^T \frac{\partial Y_u(z)}{\partial z} \Big|_{z=2L} - B_u \alpha_{tu} T_u(2L), \\ X_2 &= Y_z(L) - Y_u(L), \\ X_3 &= \left(c_z^T \frac{\partial Y_z(z)}{\partial z} \Big|_{z=L} - c_u^T \frac{\partial Y_u(z)}{\partial z} \Big|_{z=L} + \right. \\ &\quad \left. + B_u \alpha_{tu} T_u(L) - B_z \alpha_{tz} T_z(L) \right), \\ C &= c_u^T (X_3 - X_0 e^{iQ_z L}) (e^{-iQ_z L} + e^{iQ_z L}) + \\ &\quad + (e^{iQ_z L} X_0 - c_z^T i Q_z X_2) (e^{iQ_z L} - e^{-iQ_z L}), \\ T_z(z) &= B_1 e^{-\sigma z} + B_2 e^{\sigma z} + \psi_z e^{-2k_{z2} z}, \\ T_u(z) &= B_3 e^{-\sigma z} + \psi_u e^{-2k_{z2} z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{(\phi_1 + \sigma\phi_2)e^{-\sigma L} - 4k_{z2z}\psi_z}{2\sigma}, \\
 B_2 &= \frac{(\phi_1 + \sigma\phi_2)e^{-\sigma L}}{2\sigma}, \\
 B_3 &= \frac{(\phi_1 + \sigma\phi_2)(e^{-\sigma L} + e^{\sigma L}) - 4k_{z2z}\psi_z - \phi_2 e^{\sigma L}}{2\sigma}, \\
 \psi_z &= \frac{\tilde{Q}_z^{TE}}{2k_{sz}(\sigma^2 - 4k_{z2z}^2)}, \quad \psi_u = \frac{\tilde{Q}_u^{TE}}{2k_{su}(\sigma^2 - 4k_{z2u}^2)}, \\
 \sigma &= \sqrt{\frac{i\omega}{\beta}}, \\
 \phi_1 &= (2k_{z2z}\psi_z e^{-2k_{z2z}L} - 2k_{z2u}\psi_u e^{-2k_{z2u}L}), \\
 \phi_2 &= (\psi_u e^{-2k_{z2u}L} - \psi_z e^{-2k_{z2z}L}), \\
 Y_z(z) &= Y_1 e^{-\sigma z} + Y_2 e^{\sigma z} + Y_3 e^{-2k_{z2z}z}, \\
 Y_u(z) &= Y_4 e^{-\sigma z} + Y_5 e^{-2k_{z2u}z}, \\
 Y_1 &= -\frac{g^{(3)z}\sigma B_1}{G_{3z}^{(3)}(\sigma^2 + Q_z^2)}, \quad Y_2 = \frac{g^{(3)z}\sigma B_2}{G_{3z}^{(3)}(\sigma^2 + Q_z^2)}, \\
 Y_3 &= -\frac{g^{(3)z}2k_{z2z}}{G_{3z}^{(3)}(4k_{z2z}^2 + Q_z^2)}, \quad Y_4 = -\frac{g^{(3)u}\sigma B_3}{G_{3u}^{(3)}(\sigma^2 + Q_z^2)}, \\
 Y_5 &= -\frac{g^{(3)u}2k_{z2u}}{G_{3u}^{(3)}(4k_{z2u}^2 + Q_u^2)}, \\
 Q_z^2 &= \frac{\rho_{0z}\omega^2}{G_{3z}^{(3)}}, \quad Q_u^2 = \frac{\rho_{0u}\omega^2}{G_{3u}^{(3)}}, \\
 G_3^{(3)} &= t_{33}^{(0)} + b + 2(n + m_0)U_{33} + C_{33}, \\
 b &= 2\mu + (2m - n)U_{33}, \\
 C_{33} &= K - \frac{2}{3}\mu + 2L_0U_{33}, \quad g^{(3)} = (1 + 9U_{33})\gamma_0,
 \end{aligned}$$

ρ_0 is the sample density at the initial instant; \mathcal{G} is the coefficient determining the dependence of the thermoelastic coupling on the initial strain; γ_0 is the thermoelastic coupling coefficient for the unstrained sample; K is the compressibility; m_0, n, L_0 are the Murnaghan constants; U_{33} is a component of the initial deformation vector; $t_{33}^{(0)}$ is a component of the

initial stress tensor; $h = e/\epsilon^s$; e is a piezoelectric modulus; ϵ^s is the permittivity of clamped crystal; $c^D = c^E(1 + e^2/(\epsilon^s c^E))$; c^E is the coefficient of piezoelectric stiffness; $c^T = \lambda + 2\mu$, λ and μ are the Lamé coefficients; B is the bulk elasticity modulus; α_t is the coefficient of thermal volume expansion; k_s is the thermal conductivity; β is the thermal diffusivity; index z corresponds to the gyrotropic-isotropic layer; index u corresponds to the isotropic layer.

For the simplicity of further calculations, let us choose the media under consideration such that they have approximately identical thermophysical parameters.

3 Graphical analysis

As seen from the graphs (Figure 3.1), for TE mode of the function $Q^{TE}(\rho)$ for BLB₀ and oscillate nearly in antiphase. This peculiarity is conditioned by the out-of-phase component S_ϕ^{TE} .

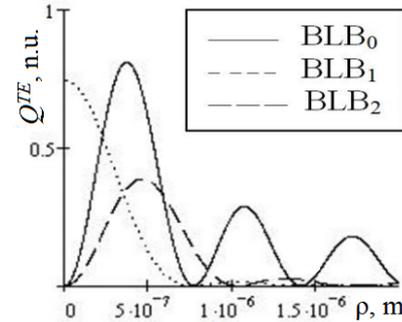


Figure 3.1. – Radial distribution of the energy dissipation $Q^{TE}(\rho)$ for different BLB

Change the shape of the graphs for $Q^{TE}(\rho)$ at BLB₁ and BLB₂ of TE-polarization occurs as a result of the combined influence of the two factors: the emergence of the azimuthal energy flux S_ϕ^{TE} and the absence of the radial flow S_ρ^{TE} that determine the diffraction spreading of a light beam near of paraxial area.

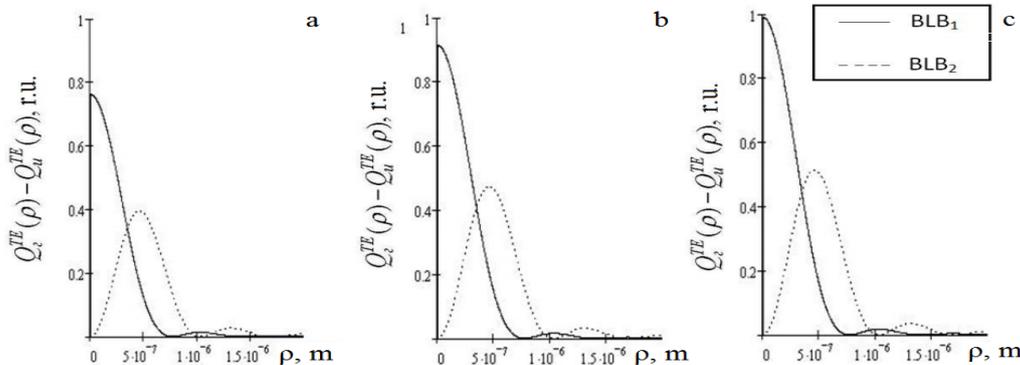


Figure 3.2. – Dependence of the difference of energy dissipation from the ρ as the parameter of gyrotropy η_2 $Q_z^{TE}(\rho)$ and $Q_u^{TE}(\rho)$: (a) $\eta_2 = 10^{-5}$; (b) $\eta_2 = 1.2 \cdot 10^{-5}$; (c) $\eta_2 = 1.3 \cdot 10^{-5}$

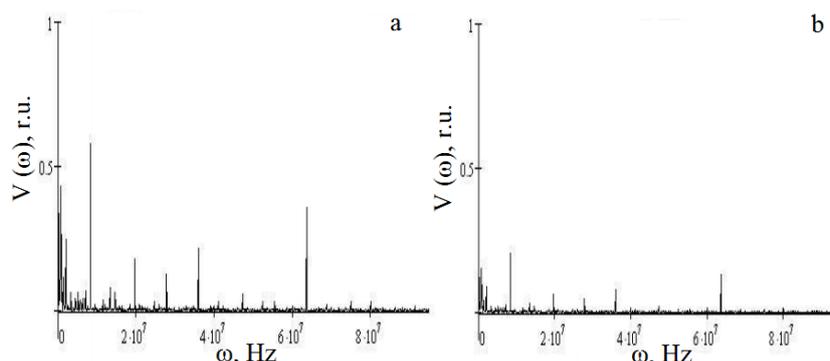


Figure 3.3. – Dependence of the photoacoustic signal from frequency modulation BLB₁ for different ρ : (a) $\rho = 10^{-7}$ m; (b) $\rho = 4 \cdot 10^{-7}$ m

For gyrotropic absorbing medium (Figure 3.2), one can see the notable difference in radial distribution of the heat dissipation

$$Q^{TE}(\rho) = Q_c^{TE}(\rho) - Q_u^{TE}(\rho),$$

it is related to the imaginary part of the gyrotropy parameter, which is responsible for circular dichroism, therefore, the increase parameter of gyrotropy η_2 leads to growth in the absorbed energy of BLB.

The curve (Figure 3.3) shows that the amplitude of the photoacoustic response depends on the frequency of the amplitude modulation. As follows from the graphs (Figure 3.1), the maxima of amplitudes of PA signal are defined by the resonant properties of the system 'layered sample – piezoelectric transducer', namely by the relation of geometric parameters of the investigated sample and piezodetector, by the Murnaghan constants and Lamé coefficients.

Conclusions

Thus, the following results were obtained in the paper:

1. The rate of change of energy dissipation under absorption of BLB in the double-layer gyrotropic medium was calculated. The dependence of the dissipation of TE mode of BLB on the radial coordinate and the value of the imaginary part of gyrotropy parameter were analyzed. It was graphically shown that the energy dissipation can change considerably under the change parameters of the gyrotropy.

2. The amplitude-phase characteristics of the PA signal, which occurs in the double-layer medium with internal stress, were defined taking into account the thermoelastic coupling coefficient. The dependence of the amplitude of the PA response on the modulation frequency and radial coordinate was graphically analyzed. The resonant increase in the amplitude of the PA signal for the frequencies $\omega > 100$ KHz of the incident double-layer BLB sample was revealed. It was shown that the maxima of the amplitude of the PA signal correspond to the values of radial coordinates, near which the maxima of energy dissipation are localized.

3. There by, expression for amplitude of photoacoustic signal in mechanically stressed double layer was obtained with due regard to dependence of thermoelastic connection coefficient on initial deformation in sample. It should be noticed that experimental amplitude measurement of photoacoustic signal for different polarizing BLB will suggest (on the ground of obtained expressions) the method of definition of thermoelastic coupling coefficient as well as Murnaghan constants in crystal medium containing internal stress.

REFERENCES

1. *Burbelo, R.M.* Photoacoustic effect in elastic stress' regions of solids / R.M. Burbelo, M.K. Zhabitenko // Progress in natural of science. – 1996. – Vol. 6. – P. 720–723.
2. *Burbelo, R.M.* Photothermoacoustic and photoelectric microscopy of silicon / R.M. Burbelo, M.K. Zhabitenko // Proc. 10th Inter. Conf. on Photoacoustic and Photothermal Phenomena. – Roma, 23–27 August, 1998. – P. 176–178.
3. *Бурбело, Р.М.* Импульсный фотоакустический метод определения упругого состояния твердых тел / Р.М. Бурбело, Н.К. Жабитенко // Вестник Киевского университета. – 1999. – Вып. 2. – С. 431–435.
4. *Муратиков, К.Л.* Теория генерации механических колебаний лазерным излучением в твердых телах с внутренними напряжениями на основе термоупругого эффекта / К.Л. Муратиков // ЖТФ. – 1999. – Т. 69, вып. 7. – С. 59–63.
5. *Aleksiejuk, M.* Investigation of resonance photoacoustic phenomena in solid mediums with internal stresses / M. Aleksiejuk, A.N. Emelyanovich, G.S. Mityurich // Ceramics. – 2011. – Vol. 61. – P. 85–91.
6. *Mityurich, G.S.* Modern photoacoustic spectroscopy problems. Theory and experiment / G.S. Mityurich, J.Motylewski, J.Ranachowski. – Warszawa: IFTR reports, Polish Academy Science, 1993. – 164 p.
7. *Bokut', B.V.* Determination of optical parameters of gyrotropic absorbing crystals by the photoacoustic method / B.V. Bokut', G.S. Mityurich //

Sov. Phys. Crystallogr. – 1987. – Vol. 32 (4). – P. 962.

8. *Thermo-optical Sound generation by Bessel light beams in nonlinear crystals* / G.S. Mityurich [et al.] // International Journal of Thermophysics. – 2011. – Vol. 32, № 4. – P. 844–851.

9. *Emelyanovich, A.N.* Photoacoustic method for investigation of the resonance phenomena in absorbing magnetoactive mediums with inner stresses / A.N. Emelyanovich, G.S. Mityurich, R.M. Burbello // Photoelectronics. – 2005. – Vol. 14. – P. 8–11.

10. *Photoacoustic diagnostics of inhomogeneous gyrotropic materials with internal stress using Bessel light beams* / G.S. Mityurich [et al.] // Archives of Metallurgy and Materials. – 2011. – Vol. 56 (4). – P. 1235–1242.

11. *Laser photoacoustic spectroscopy of the piezoceramic materials* / G.S. Mityurich [et al.] // Archives of Metallurgy and Materials. – 2009. – Vol. 54 (4). – P. 889–894.

12. *Durnin, J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.

13. *Belyi, V.N.* Frequency conversion of Bessel light beams in nonlinear crystals / V.N. Belyi, N.S. Kazak, N.A. Khilo // Quantum Electronics. – 2000. – Vol. 30 (9). – P. 753–766.

14. *Cizmar, T.* Tunable Bessel light modes: engineering the axial propagation / T. Cizmar, K. Dhollakia // Opt. Express. – 2009. – Vol. 17 (18). – P. 15558–15570.

15. *Устройство термооптического возбуждения акустических волн*: пат. 5969и Респ. Беларусь, МПК (2009) G10K 11/00 / П.И. Ропот, Г.С. Митюрин; дата публ.: 28.02.2010.

16. *Фёдоров, Ф.И.* Теория гиротропии / Ф.И. Фёдоров. – Минск: Наука и техника, 1976. – 456 с.

Поступила в редакцию 26.07.18.

ШИРОКОПОЛОСНЫЙ СОВЕРШЕННЫЙ ПОГЛОТИТЕЛЬ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Ш. Фань, Я. Сун, С. Чжан

Нанкинский университет науки и технологий, Китай

BROADBAND PERFECT METAMATERIAL ABSORBER BASED ON FRACTAL STRUCTURE

S. Fan, Y. Song, X. Zhang

Nanjing University of Science & Technology, China

Широкополосный совершенный поглотитель из метаматериала имеет широкие перспективы применения для обеспечения невидимости цели для радара, в областях конструирования антенн и электромагнитной защиты. Существующий многочастотный поглотитель увеличит размер или толщину структуры. В этой статье представлен широкополосный нечувствительный к поляризации совершенный поглотитель из метаматериала на основе фрактальной структуры. Благодаря комбинации фрактальной и круговой структур, рабочая полоса частот расширяется без увеличения размера структуры. Предложена простая модель эквивалентной схемы, описывающая явление поглощения, для оценки частоты поглощения предлагаемого поглотителя. Рассчитанный результат показывает, что относительная полная ширина полосы поглотителя на уровне половинной амплитуды составляет 11.7%. Рабочие углы, при которых структура метаматериала может поддерживать 50% коэффициента поглощения, равны 50 градусам. Обладая структурой с вращательной симметрией, поглотитель нечувствителен к поляризации. Эта структура создана и измерена в X-диапазоне, результаты эксперимента хорошо совпадают с результатами моделирования.

Ключевые слова: метаматериал, широкополосный совершенный поглотитель, фрактальная структура.

Broadband perfect metamaterial absorber has broad application prospects in the fields of radar target stealth, antenna design and electromagnetic protection. The existing multi frequency absorber will increase the size or thickness of the structure. This paper presents broadband polarization insensitive perfect metamaterial absorber based on fractal structure. Through the combination of fractal and circular structures, the bandwidth is extended without increasing the size of the structure. A simple equivalent circuit model has been proposed describing the absorption phenomenon to estimate the frequency of absorption of the proposed absorber. The simulated result shows that the absorber's relative full width half maximum is 11.7%. The operating angles which the metamaterial structure can maintain 50% of the absorbance are 50 degrees. With rotational symmetry structure, the absorber is insensitive to the polarization. This structure is made and measured at X-band, the experimental results coincide well with the simulation results.

Keywords: metamaterial, broadband perfect absorber, fractal structure.

Introduction

Artificial stealth materials have wide applications in areas such as radar target stealth, antenna design and electromagnetic protection etc. However, absorber based on traditional structures for the radar targets stealth application face big challenges on absorbing frequency, bandwidth, bulky and poor flexibility and other practical problems. Fractal structures different from the traditional structures, it has self-similarity, can have fine structures in any small scale, if it can be used in the designing of microwave absorber combined with characteristics of surface filling curves and will break through existing barriers.

The design of broadband absorbers is the main problem that needs to be solved in applications. Bao [6], Zou [7], Li [8], etc. use the same absorbing structure of different scales to periodically align in the plane to achieve the effect of broadband absorbing. Such a structural plane utilization rate is not high, which is equivalent to expanding the size of a single periodic structure.

Wen Qiye [9] Wang [10], Ghosh [11], Ding [12], etc. using multi-layer structure, superposition or multi-layer metal nesting in the thickness direction to achieve broadband absorption, but it has high processing precision, complicated preparation process and high processing cost. The thickness affects the application of the absorbing screen. Huang [13], Liu [14], Luo [15], etc. had a variety of absorbing structures in the periodic unit, and reduced the double absorbing peak spacing to achieve a single-layer absorbing body bandwidth expansion. Mainly using a number of small size structures to absorb electromagnetic waves, the principle and the first method do not differ much. Qu Shaobo [16], [17] teams achieve wide-band absorbing by loading lumped resistance or magnetic absorbing materials. Although this method greatly increases the absorbing band width, it is difficult to process and it has a heavy structure.

In order to achieve broadband absorption of the absorber, while having a wide angle of incidence, the polarization is independent. In this paper, a description of the designed microwave absorber with a

ring and ring fractal combination structure is presented. By using the fractal structure to increase the structural length of the absorbing unit and simultaneously zooming in on the two absorbing points, the expansion of the absorbing bandwidth is realized. The ultra-thin thickness of the perfect absorber is maintained, the structure is simple and small, so that the absorber to have a wide range of applications. The research in this paper lays the foundation for further application of broadband perfect absorber in electromagnetic stealth.

2 Design and Simulation

2.1 Structural properties

The same-layer multi-frequency resonant structure is realized by tiling multiple resonant structures. According to the literature [18], the resonant frequency is related to the length of the metal wire $f \sim 1/\sqrt{\epsilon L}$. Where ϵ is the dielectric constant of the dielectric layer and L is the length of the metal line, so the structure size is inversely proportional to the resonant frequency. Designing multiple structures of similar size in the same plane enables broadband absorption. In order to narrow two resonance points without increasing the size of the unit, the resonant structure is usually very close, and there is coupling between the resonant structures, and the coupling is too large, which leads to detuning. The plurality of annular square rings and the like can realize multi-frequency absorption in the same unit, but it is difficult to achieve wide-band absorption due to coupling. Fractal can extend the length in a small size. Based on this, a microwave absorber with a ring and a ring fractal structure is proposed, which can achieve similar lengths in different sizes and reasonable design distances, and can close two resonance points.

The designed absorber consists of three layers, the bottom layer is a metallic copper plane, the copper thickness is 0.035 mm, and the conductivity is 5.8×10^7 S/m. The dielectric layer FR4 is in the middle (dielectric constant is 4.3, dielectric loss thickness is 0.025), and the top layer is a ring and a circular fractal structure. The structure is shown in Figure 2.1, where the parameters are $a = 10$ mm, $r_1 = 2.95$ mm, $r_2 = 1.45$ mm, $r_3 = 0.9$ mm, $h = 1.85$ mm, $t = 1.3$ mm. All copper wires have a width of 0.1 mm.

According to the calculation of the length of the ring is 18.12 mm, the length of the circular fractal structure is 19.64 mm, and the lengths of the two are very close, so that double-frequency absorption can be achieved. In order to explain the absorbing mechanism of the absorbing body, the equivalent circuit model of the designed absorber is given, as shown in Figure 2.2.

According to the equivalent circuit theory, each absorbing structure can be equivalent to a combination of RLC circuits, wherein the resistance of each path is shown as follow

$$Z_1 = \frac{1 - \omega^2 L_1 (C_1 + C_p)}{2j\omega C_p (1 - \omega^2 L_1 (C_1 - C_p))},$$

$$Z_2 = \frac{1 - \omega^2 L_2 (C_2 + C_p)}{2j\omega C_p (1 - \omega^2 L_2 (C_2 - C_p))}.$$

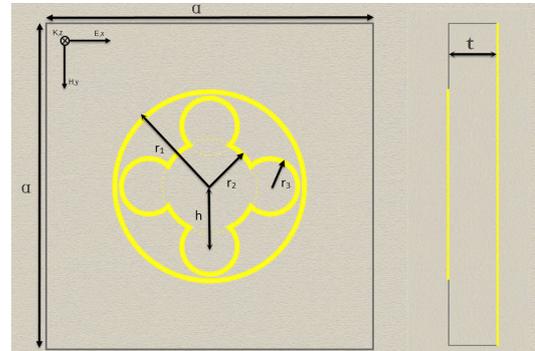


Figure 2.1 – The cell structure of the proposed absorber

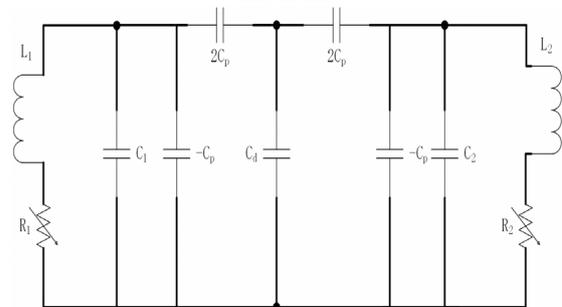


Figure 2.2 – Equivalent circuit model

The coupling capacitance between the ring and the circle fractal is C_p , the coupling capacitance of the surface copper structure and the dielectric layer is C_d , and the equivalent impedance of the final absorber is, $Z = Z_1 // Z_2 // j\omega C_d$.

According to the literature [19], the resonant frequency point needs to satisfy the equation $\text{Im}\{1/Z(\omega)\} = 0$, simplifying the equivalent impedance equation to obtain the equation

$$\omega^4 (L_1 L_2 (C_1 C_2 (4C_p + C_d) + C_p^2 (C_d - 4C_p) + C_p C_d (C_1 + C_2))) - \omega^2 ((L_1 C_1 + L_2 C_2) (4C_p + C_d) + C_p C_d (L_1 + L_2) + (4C_p + C_d)) = 0,$$

$$b^2 - 4ac = (L_1 (C_1 (4C_p + C_d) + C_p C_d) - L_2 (C_2 (4C_p + C_d) + C_p C_d))^2 + 4 \cdot 16 L_1 L_2 C_p^4 > 0.$$

Since the quadratic equation satisfies $b^2 - 4ac > 0$, there are two solutions for the equation, so there are two absorbing resonance points. According to the simulation statistics, the resonant frequency is only inversely proportional to the length of a simple ring or square ring. In this type of structure, $C \sim \epsilon w l / t$, $L \sim \mu t l / w$ [20]–[22], where l is the length of the wire, w is the width of the wire, and t is the thickness of the dielectric layer.

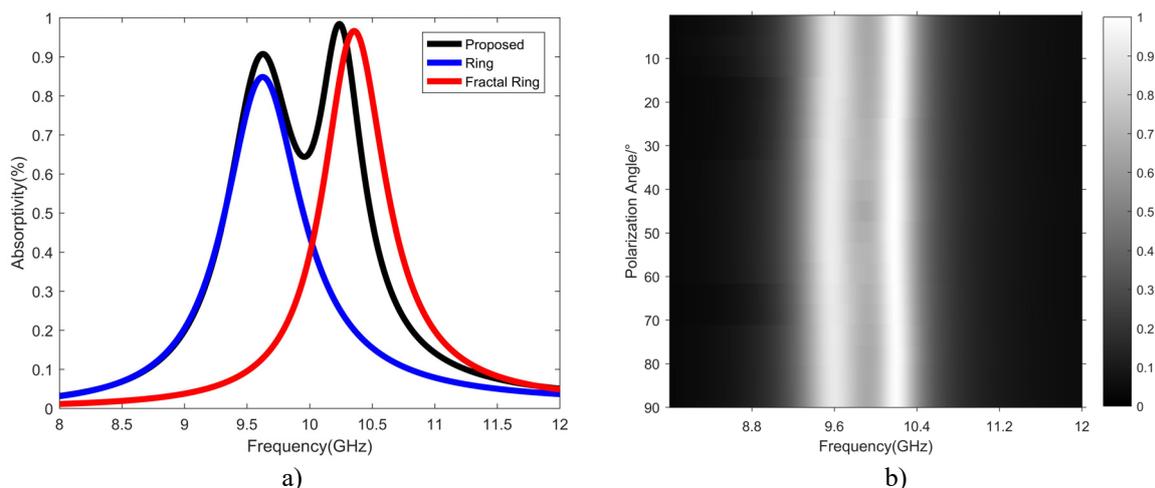


Figure 2.3 – The simulation results of the proposed absorber (a) and absorptivity under different polarization angle (b)

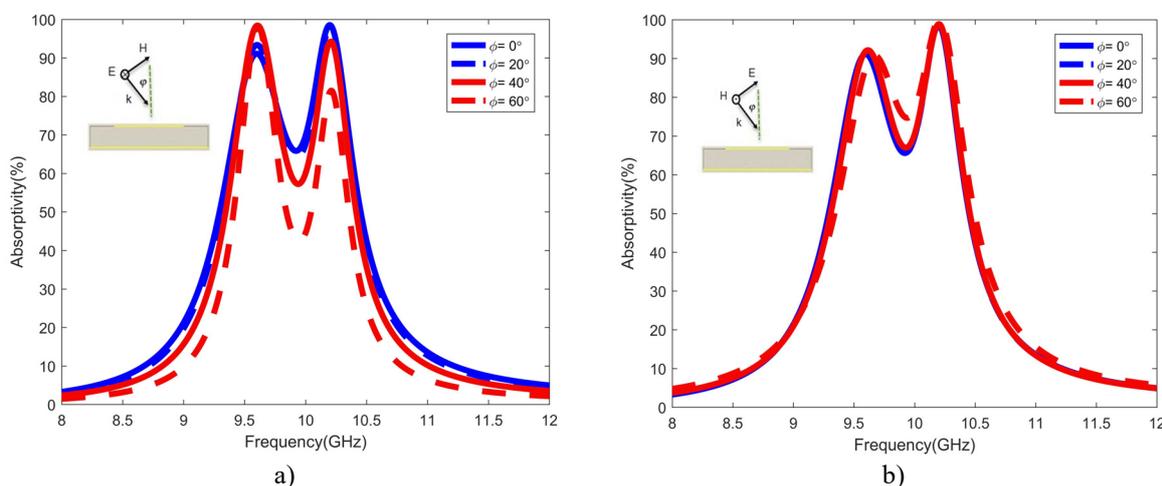


Figure 2.4 –Different incidence angles for (a) TE and (b) TM polarizations

The path of the fractal structure can extend the length of the surface current flowing, so that the resonance frequency is reduced, but the complex structure like the circular structure is not completely in accordance with the above formula. Therefore, the length of the circle is larger than the ring, but the resonance frequency is higher.

2.2 Simulation and analysis

In order to study the performance of the proposed broadband absorber, the structure was simulated by the software CST Microwave Studio based on the finite difference time domain method. On the four faces around the metal structure of the unit were set periodic unit cell boundary conditions. The transmittance is $T(T = |\tau|^2 = |S_{21}|^2)$, and the relationship between the reflectance $R(R = |\Gamma|^2 = |S_{11}|^2)$ and the absorptance A is $A + T + R = 1$. The bottom layer is a copper plane, so there is no transmission wave, and the absorption ratio is $A = 1 - |S_{21}|^2$. The

simulated absorbing rate is shown in Figure 2.3 (a).

As can be seen from the figure, the perfect absorber at the frequency of 9.62 GHz, 10.24 GHz produced 90.7%, 98.4% of the peak of the absorption rate. The full width half maximum is 1.16 GHz (9.32 GHz – 10.48 GHz). The figure also simulates a single circle and a single circular structure, each with a resonant frequency of 9.63 GHz and 10.36 GHz. A reasonable design distance can be achieved by using a coupling capacitor to reduce the resonant frequency of the circular fractal to achieve broadband absorption.

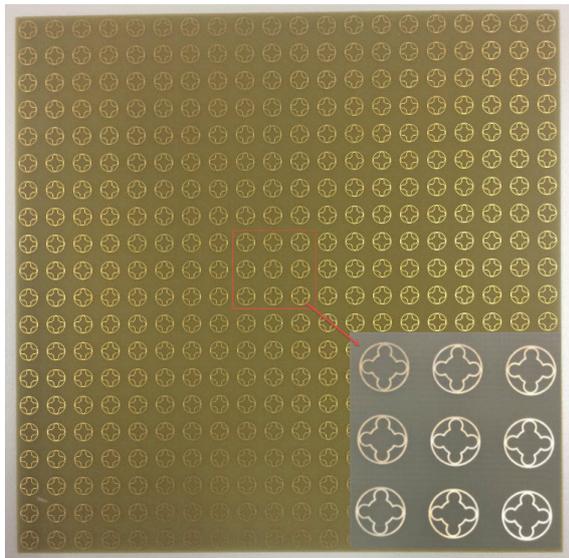
The absorptivity of the electromagnetic wave incident on the electromagnetic wave with different polarization angles is shown in Figure 2.3 (b). The polarization angle θ is the angle from the clockwise rotation to the X-axis in the electric field E direction, gradually increasing from 0° to 90° , and the absorption peak. The frequency and amplitude are basically unchanged, mainly because the absorber unit structure has rotational symmetry and thus has

polarization insensitivity. The absorption of the TE polarization and TM polarization electromagnetic waves by the absorbing body at different oblique incident angles is shown in Figure 2.4 φ is the angle between the electromagnetic wave vector and the normal of the absorbing body.

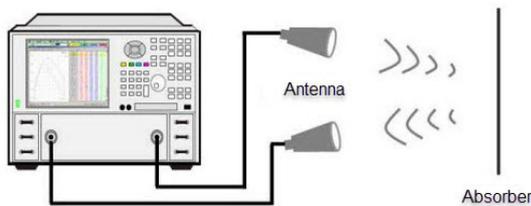
As shown in the figure, for the TE polarized wave, as the incident angle increases, the absorbing frequency does not change, and when the incident angle is 50° , the absorbing effect of 3 dB or more is maintained. For TM polarized waves, as the incident angle increases, high absorption is maintained, and after a large angle, the absorption frequency produces a certain movement. The main reason for this phenomenon is that the electromagnetic wave loss is mainly the current loss generated by the magnetic field, so that as long as the incident angle of the magnetic field is constant, high loss can be maintained at all times.

3 Experimental Verification

In order to verify the correctness of the simulation the printed circuit board technology is used. The model produced is actually 20×20 cycle units. The sample size is 200×200 mm. The sample plot and measurement schematic are shown in Figure 3.1.



a)



b)

Figure 3.1 – Photograph of the fabricated absorber (a) Photograph of measured environment (b)

In the microwave anechoic chamber, a pair of standard gain horn antennas (8–12 GHz) is con-

nected to a vector network analyzer (PNA-XN5244A) that is used to measure the reflectivity of the proposed absorber. To ensure the remote field conditions, the distance between the absorber and the antenna is set as 1 m.

The absorber and the metal plate of the same size are sequentially measured, and the results from the metal plate are used as a reference, and the measurement results are compared with the simulation results. As can be seen from the Figure 3.2, the actual measurement and simulation are in good agreement. The measured results present two obvious absorption peaks at 9.58 GHz, 10.34 GHz with peak absorption rates of 90.47%, 95.68%, respectively. The resonant frequency of the circular structure is high, and the main cause of the difference is that it is limited by the manufacturing limit, and the partial structure is too small, resulting in an increase in the resonant frequency.

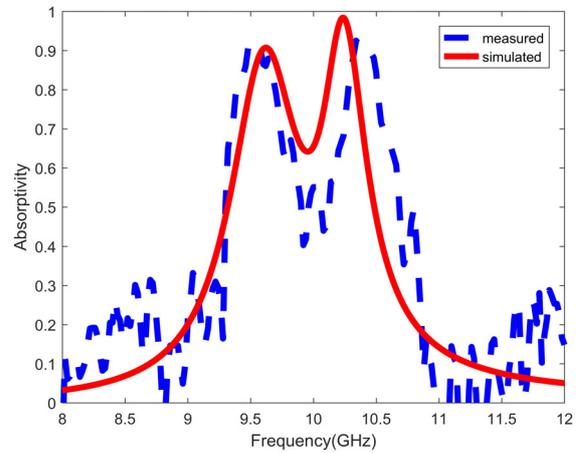


Figure 3.2 – Simulated and measured absorptivity for the proposed absorber

Conclusion

In summary, a bandwidth-enhanced metamaterial absorber is presented. Instead of using the array of scaled structures or multi-layer structures, the proposed absorber has been realized by designing multiple closed lines with similar lengths. The closed line is extended by fractal so that it can avoid mismatch due to closeness. Then, the size of the absorber became much smaller and compact compared with the similar absorber. According to the measurement results, it can be concluded that the fractal structure effectively increases the length of the resonant structure and reduces the resonant frequency. By designing the lengths of two similar structures and pulling the resonance point, the purpose of broadband absorption is achieved. At the same time, it has good rotational symmetry, so it is not sensitive to the polarization of the incident wave. When the incident angle reaches 50° in TM mode, it still maintains high absorbing rate. The absorber has a thickness of $1/25$ of the center wavelength and has the advantages of large angle absorption and it is ultra-thin. The design is simple in structure, easy to

manufacture and low in cost. The broadband absorber body has great application in the electromagnetic stealth of the X-band. The next step is to use a multi-partition structure to achieve ultra-wideband absorber.

REFERENCES

1. *A novel integrated switchable absorber and radiator* / M.L. Li, Z.X. Yi, Y.H. Luo, B. Muneer, Q. Zhu // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2016. – Vol. 64, № 3. – P. 944–952.
 2. *Microwave metamaterial absorber based on multiple square ring structures* / W.C. Zhou, P.H. Wang, N. Wang, W. Jiang, X.C. Dong, S. Hu // AIP Advances. – 2015. – Vol. 5, №11. – P. 117109.
 3. *Agarwal, M. Wide-angle quad-band polarisation-insensitive metamaterial absorber* / M. Agarwal, A.K. Behera, M.K. Meshram // Electronics Letters. – 2016. – Vol. 52, № 5. – P. 340–342.
 4. *Low-RCS waveguide slot array antenna based on a metamaterial absorber* / W.Q. Li, X.Y. Cao, J. Gao, Y. Zhao, H.H. Yang, T. Liu // Acta Phys. Sin. – 2015. – Vol. 64, № 9. – P. 094102 (in Chinese).
 5. *Perfect metamaterial absorber* / N.I. Landy, S. Sajuyigbe, J.J. Mock, D.R. Smith, W.J. Padilla // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100, № 20. – P. 207402.
 6. *Bao, S. S-wave band microstrip antenna with perfect absorbing metamaterial substrate* / S. Bao, C.R. Luo, X.P. Zhao // Acta Phys. Sin. – 2011. – Vol. 60, № 1. – P. 014101 (in Chinese).
 7. *Design of a polarization-insensitive and broadband terahertz absorber using metamaterials* / T.B. Zuo, F.R. Hu, J. Xiao, L.H. Zhang, F. Liu, T. Chen, J.H. Niu, X.M. Xiong // Acta Phys. Sin. – 2014. – Vol. 63, № 17. – P. 178103 (in Chinese).
 8. *Ultrathin multiband gigahertz metamaterial absorbers* / H. Li, L.H. Yuan, B. Zhou, X.P. Shen, Q. Cheng, T.J. Cui // Journal of Applied Physics. – 2011. – Vol. 110, № 1. – P. 014909.
 9. *A polarization-independent and ultra-broadband terahertz metamaterial absorber studied based on circular-truncated cone structure* / M.M. Mo, Q.Y. Wen, Z. Chen, Q.H. Yang, S. Li, Y.L. Jing, H.W. Zhang // Acta Phys. Sin. – 2013. – Vol. 62, № 23. – P. 237801 (in Chinese).
 10. *Theoretical investigation of broadband and wide-angle terahertz metamaterial absorber* / B.X. Wang, L.L. Wang, G.Z. Wang, W.Q. Huang, X.F. Li, X. Zhai // IEEE Photo. Technol. Lett. – 2014. – Vol. 26, № 2. – P. 111–114.
 11. *Polarisation-insensitive and wide-angle multi-layer metamaterial absorber with variable bandwidths* / S. Ghosh, S. Bhattacharyya, D. Chaurasiya, K.V. Strivastava // Electronics Letters. – 2015. – Vol. 51, № 14. – P. 1050–1052.
 12. *Ultra-broadband microwave metamaterial absorber* / F. Ding, Y.X. Cui, X.C. Ge, Y. Jin, S.L. He // Applied. Phys. Lett. – 2012. – Vol. 100, № 10. – P. 103506.
 13. *Design of ultra-thin broadband metamaterial absorber and its application for RCS reduction of circular polarization tilted beam antenna* / S.J. Li, X.Y. Cao, J. Gao, T. Liu, H.H. Yang, W.Q. Li // Acta Phys. Sin. – 2013. – Vol. 62, № 12. – P. 124101 (in Chinese).
 14. *Multiband and broadband metamaterial absorbers* / Y.H. Liu, S.L. Fang, S. Gu, X.P. Zhao // Acta Phys. Sin. – 2013. – Vol. 62, № 13. – P. 134102 (in Chinese).
 15. *Experimental demonstration of terahertz metamaterial absorbers with a broad and flat high absorption band* / L. Huang, D.R. Chowdhury, S. Ramanani, M.T. Reiten, S.N. Luo, H.T. Chen // Optics Letters. – 2012. – Vol. 37, № 2. – P. 154–156.
 16. *Radar cross section reduction of microstrip antenna based on wide-band metamaterial absorber* / W.H. Li, J.Q. Zhang, S.B. Qu, H.Y. Yuan, Y. Shen, D.J. Wang, M.C. Guo // Acta Phys. Sin. – 2015. – Vol. 64, № 8. – P. 084101 (in Chinese).
 17. *A broadband transmission absorption polarization-independent metamaterial absorber* / L. Lu, S.B. Qu, H.Y. Shi, A.X. Zhang, S. Xia, Z. Xu, J.Q. Zhang // Acta Phys. Sin. – 2014. – Vol. 63, № 2. – P. 028103 (in Chinese).
 18. *Analysis and design of wire-based metamaterial absorbers using equivalent circuit approach* / Y.Q. Pang, H.F. Cheng, Y.J. Zhou, J. Wang // Journal of Applied Physics. – 2013. – Vol. 113, № 11. – P. 114902.
 19. *Bandwidth-enhanced polarization-insensitive microwave metamaterial absorber and its equivalent circuit model* / S. Ghosh, S. Bhattacharyya, Y. Kaiprath, K.V. Strivastava // Journal of Applied Physics. – 2015. – Vol. 115, № 10. – P. 104503.
 20. *Unifying approach to left-handed material design* / J. Zhou, E.N. Economon, T. Koschny, C.M. Soukoulis // Opt. Lett. – 2006. – Vol. 31, № 24. – P. 3620–3622.
 21. *Negative index materials using simple short wire pairs* / J. Zhou, L. Zhang, G. Tuttle, T. Koschny, C.M. Soukoulis // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73. – P. 041101.
 22. *Zhou, J. An efficient way to reduce losses of left-handed metamaterials* / J. Zhou, T. Koschny, C.M. Soukoulis // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16, № 15. – P. 11147–11152.
- This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61571229 and 61811530060).*

Поступила в редакцию 09.07.18.

УДК 621.373.8:621.937:549.517.14

ЛАЗЕРНОЕ ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЕ САПФИРА ПУЧКАМИ СЕРПОВИДНОЙ ФОРМЫ

С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Серeda

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

LASER THERMOSPLITTING OF SAPPHIRE BY CRESCENT-SHAPED BEAMS

S.V. Shalupaev, Y.V. Nikitjuk, A.A. Sereda

F. Scorina Gomel State University

В рамках теории термоупругости выполнен сравнительный анализ температурных полей и полей термоупругих напряжений, возникающих в пластинах кристаллического сапфира в процессе однолучевого и двухлучевого управляемого лазерного термораскалывания при использовании пучков круглого и серповидного сечения. Показано, что использование пучков серповидной формы обеспечивает формирование растягивающих напряжений, необходимых для стабильной реализации процесса лазерного термораскалывания при значительном снижении величин максимальных температур в образцах по сравнению с использованием пучков круглой формы.

Ключевые слова: термораскалывание, моделирование, метод конечных элементов, температура, монокристалл, сапфир, термоупругие напряжения.

In the framework of the thermoelasticity theory, a comparative analysis of the temperature fields and fields of thermoelastic stresses arising in the plates of crystalline sapphire in the process of single-beam and two-beam controlled laser thermosplitting is carried out using round and crescent-shaped beams. It is shown that the use of crescent-shaped beams provides the formation of tensile stresses necessary for the stable realization of the laser thermosplitting process, with a significant reduction in the maximum temperatures in the samples compared with the use of round-shaped beams.

Keywords: thermosplitting, modeling, finite element method, temperature, single crystal, sapphire, thermoelastic stresses.

Введение

Управляемое лазерное термораскалывание, сущность которого заключается в локальном нагреве вдоль линии обработки движущимся лазерным излучением с последующим быстрым охлаждением, является эффективным и высокоточным методом разделения изделий из хрупких неметаллических материалов. Образующиеся в области охлаждения растягивающие напряжения обеспечивают формирование разделяющей трещины, которая следует за лазерным пучком. Кромка готовых изделий отличается повышенной прочностью по сравнению с традиционными механическими методами разделения.

Исследования данного процесса были начаты во второй половине двадцатого века [1], [2] и остаются актуальными в настоящее время. Исследованиями в этой области занимаются коллективы авторов из различных стран [3]–[7], в том числе и авторы данной статьи [8]–[11]. Разработано много схем реализации данного метода применительно к изделиям из различных изотропных и анизотропных материалов [5]–[21].

В большинстве случаев для разделения данным методом используются лазерные пучки круглого или эллиптического сечения. Задача повышения эффективности метода управляемого лазерного термораскалывания может быть решена, в том числе, за счет выбора схем, позволяющих

при минимальных энергетических затратах получить заданные величины растягивающих напряжений в области обработки. Такой выбор технологических параметров позволяет увеличить скорость разделения, а также обрабатывать материалы чувствительные к величине нагрева.

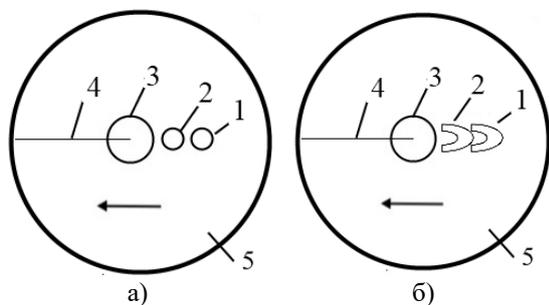
В данной работе, на примере кристаллов сапфира, выполнены исследования применения пучков серповидной геометрии в процессе управляемого лазерного термораскалывания.

1 Результаты расчетов

Для сравнительного анализа выполнен расчет термоупругих полей в пластинах сапфира в процессе однолучевого и двухлучевого управляемого лазерного термораскалывания при использовании пучков круглого и серповидного сечения. Исходя из спектра пропускания сапфира, представленного в источниках [22], [23], для однолучевого термораскалывания использовано непрерывное излучение с длиной волны 10,6 мкм, энергия которого эффективно поглощается в поверхностных слоях материала. Для двухлучевого термораскалывания в качестве второго источника излучения с объемным поглощением выбран лазер с длиной волны 5 мкм.

Схема расположения пучков представлена на рисунке 1.1. Стрелкой указано направление движения пластины относительно лазерных пучков.

Расчеты выполнены для пластин радиусом 15,5 мм. Толщина пластин выбрана 0,2; 0,4 и 1 мм при скорости обработки 10 мм/с. Параметры лазерных пучков следующие: круглый пучок – радиус 1,5 мм; серповидный пучок – наружный контур представляет собой полуэллипс с размерами большой и малой полуосей 3,4 и 1,5 мм соответственно, а внутренний контур – полуэллипс с размерами большой и малой полуосей 1,7 и 0,75 мм соответственно. Размеры серповидных пучков были подобраны так, чтобы при неизменных плотностях мощности излучения во всех расчетах величина максимальных растягивающих напряжений в области обработки при использовании серповидных пучков и пучков круглого сечения были одинаковыми. Теплофизические свойства сапфира для расчетов приведены в [22], [23].



- 1 – лазерный пучок с длиной волны 10,6 мкм,
- 2 – лазерный пучок с длиной волны 5 мкм,
- 3 – хладагент,
- 4 – лазерно-индуцированная микротрещина,
- 5 – сапфировая пластина

Рисунок 1.1 – Схема расположения зон воздействия лазерного излучения и хладагента в плоскости обработки: а) – круглый пучок; б) – пучки серповидной формы

Моделирование процесса лазерного термораскалывания выполнено в рамках теории термоупругости с использованием метода конечных элементов [24]. На первом этапе решения задачи выполняется расчёт температурных полей в образце, на втором этапе решается задача о нахождении термоупругих напряжений, формируемых в результате воздействия лазерного излучения и хладагента на поверхность сапфировых пластин. Такая последовательность моделирования обеспечивает получение результатов в рамках несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке. С физической точки зрения квазистатическая постановка задачи термоупругости означает использование предположения о том, что напряженное состояние устанавливается значительно быстрее, чем достигается тепловое равновесие.

В качестве критерия, определяющего направление развития трещины, выбран критерий максимальных растягивающих напряжений [25].

В соответствии с этим критерием лазерная микротрещина распространяется в направлении, перпендикулярном действию максимальных растягивающих напряжений. При этом принято во внимание, что трещина, распространяющаяся в зоне растяжения, прекращает свой рост в зоне сжатия.

Анализ выполнен с учетом анизотропии тепловых и упругих свойств сапфира для пластин, вырезанных в следующих плоскостях: I – срез (0001) или С-плоскость; II – срез (1102) или R-плоскость.

Матрица $\{C_{ik}\}$ которой с учетом кристаллографической структуры сапфира приобретет вид [26]:

$$\{C_{ik}\} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} \end{pmatrix}.$$

Для расчетов использовались следующие константы упругой жесткости: $C_{11} = 4,97 \cdot 10^5$ МПа, $C_{12} = 1,626 \cdot 10^5$ МПа, $C_{13} = 1,172 \cdot 10^5$ МПа, $C_{14} = -0,229 \cdot 10^5$ МПа, $C_{33} = 4,981 \cdot 10^5$ МПа, $C_{44} = 1,472 \cdot 10^5$ МПа [27].

Для пластины, вырезанной в плоскости (1102), т. е. R-плоскости, матрица приобретает вид:

$$\{C_{ik}\} = \begin{pmatrix} 128,3 & -7,7 & -7,67 & 0,072 & -6,13 & -6,16 \\ -7,7 & 130,15 & -7,76 & 4,5 & -0,6 & -1,38 \\ -7,67 & -7,76 & 130,13 & 4,5 & -1,38 & -0,58 \\ 0,072 & 4,5 & 4,5 & 34,47 & -4,8 & -4,8 \\ -6,13 & -0,6 & -1,38 & -4,8 & 33,6 & 4,78 \\ -6,16 & -1,38 & -0,58 & -4,8 & 4,78 & 33,6 \end{pmatrix}, \text{ ГПа.}$$

На рисунках 1.2 и 1.3 представлено распределение полей термоупругих напряжений на поверхности сапфировой пластины толщиной 0,2 мм при однолучевом и двулучевом лазерном термораскалывании. Картины полей при использовании круглых и серповидных пучков схожи и характерны, в общем, для процесса управляемого лазерного термораскалывания. В области воздействия лазерного излучения формируется зона сильных сжимающих напряжений, которые в области подачи хладагента перерастают в растягивающие. Именно в этой зоне происходит инициирование и развитие разделяющей трещины. Перед лазерным пучком также формируется зона растягивающих напряжений, величина которых увеличивается при приближении к краям образца. Это может приводить к негативному эффекту, а именно к инициированию трещины от разупрочненной кромки и ее развитию в

направлении зоны воздействия лазерного излучения. В таблицах 1.1 и 1.2 представлены расчетные значения максимальных растягивающих напряжений в области воздействия хладагента в образце.

Как видно из представленных расчетных данных в таблицах 1.1 и 1.2, величины значений максимальных растягивающих напряжений в области воздействия хладагента в образце при

использовании лазерных пучков с указанными выше параметрами практически одинаковы.

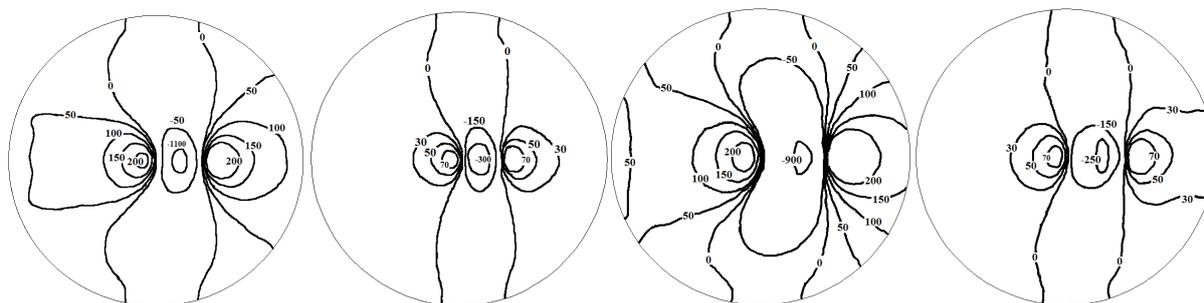
Результаты расчета температур представлены в таблице 1.3 и 1.4 и на рисунках 1.4 и 1.5. На рисунке 1.2 представлено расчетное распределение температур на поверхности сапфировой пластины толщиной 0,2 мм при однолучевом лазерном термораскалывании, а на рисунке 1.3 аналогичные распределения при двухлучевом.

Таблица 1.1 – Расчетные значения максимальных растягивающих напряжений в области воздействия хладагента в образце при использовании лазерных пучков круглого сечения

Толщина пластины, мм	Напряжение, МПа			
	Однолучевое термораскалывание		Двухлучевое термораскалывание	
	срез (0001)	срез (1102)	срез (0001)	срез (1102)
$h = 0,2$	235	87,7	284	101
$h = 0,4$	95,8	26,6	131	36,2
$h = 1$	31,3	7,6	52,9	12,7

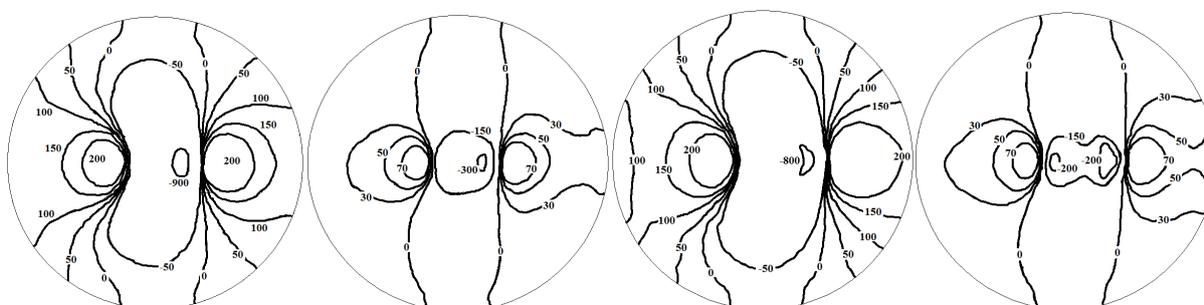
Таблица 1.2 – Расчетные значения максимальных растягивающих напряжений в области воздействия хладагента в образце при использовании лазерных пучков серповидного сечения

Толщина пластины, мм	Напряжение, МПа			
	Однолучевое термораскалывание		Двухлучевое термораскалывание	
	срез (0001)	срез (1102)	срез (0001)	срез (1102)
$h = 0,2$	238	82	279	93,4
$h = 0,4$	99	26,7	130	34,7
$h = 1$	30,1	7	53,2	12,5



а) – срез (0001) или С-плоскость, сечение пучка – круг; б) – срез (1102) или R-плоскость, сечение пучка – круг; в) – срез (0001) или С-плоскость, серповидный пучок; г) – срез (1102) или R-плоскость, серповидный пучок.

Рисунок 1.2 – Распределение полей температурных напряжений (МПа) на поверхности сапфировой пластины при воздействии лазерного излучения с длиной волны равной 10,6 мкм с учетом анизотропии тепловых свойств



а) – срез (0001) или С-плоскость, сечение пучка – круг; б) – срез (1102) или R-плоскость, сечение пучка – круг; в) – срез (0001) или С-плоскость, серповидный пучок; г) – срез (1102) или R-плоскость, серповидный пучок.

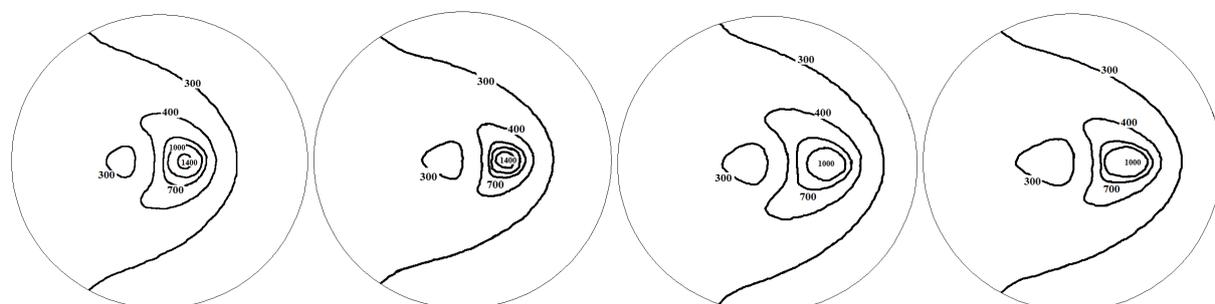
Рисунок 1.3 – Распределение полей температурных напряжений (МПа) на поверхности сапфировой пластины при одновременном воздействии лазерного излучения с длиной волны равной 10,6 мкм и 5 мкм с учетом анизотропии тепловых свойств

Таблица 1.3 – Расчетные значения максимальных температур в образце при использовании лазерных пучков круглого сечения

Толщина пластины, мм	Температура, К			
	Однолучевое термораскалывание		Двулучевое термораскалывание	
	срез (0001)	срез (1102)	срез (0001)	срез (1102)
$h = 0,2$	1511	1780	1572	1795
$h = 0,4$	935	1025	963	1040
$h = 1$	619	607	630,6	617,5

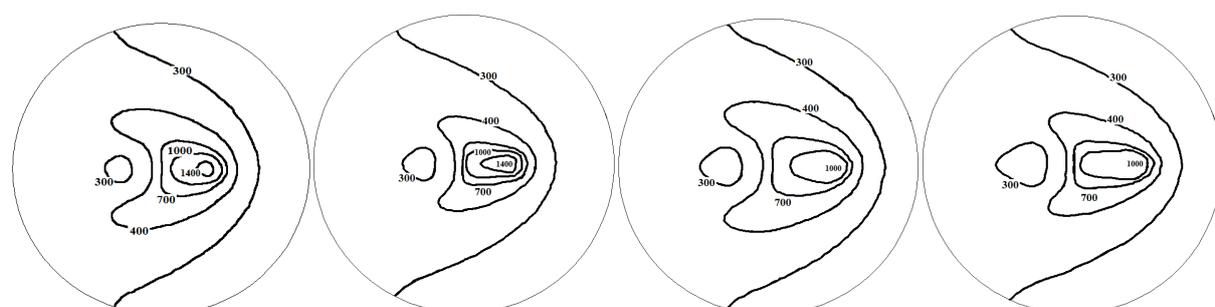
Таблица 1.4 – Расчетные значения максимальных температур в образце при использовании лазерных пучков серповидного сечения

Толщина пластины, мм	Температура, К			
	Однолучевое термораскалывание		Двулучевое термораскалывание	
	срез (0001)	срез (1102)	срез (0001)	срез (1102)
$h = 0,2$	1299	1342	1304	1420
$h = 0,4$	820,4	813,7	822,6	814
$h = 1$	564,8	542	566,8	540



а) – срез (0001) или С-плоскость, сечение пучка – круг; б) – срез (1102) или R-плоскость, сечение пучка – круг; в) – срез (0001) или С-плоскость, серповидный пучок; г) – срез (1102) или R-плоскость, серповидный пучок.

Рисунок 1.4 – Распределение температурных полей (К) на поверхности сапфировой пластины при воздействии лазерного излучения с длиной волны равной 10,6 мкм с учетом анизотропии тепловых свойств



а) – срез (0001) или С-плоскость, сечение пучка – круг; б) – срез (1102) или R-плоскость, сечение пучка – круг; в) – срез (0001) или С-плоскость, серповидный пучок; г) – срез (1102) или R-плоскость, серповидный пучок.

Рисунок 1.5 – Распределение температурных полей (К) на поверхности сапфировой пластины при одновременном воздействии лазерного излучения с длиной волны равной 10,6 мкм и 5 мкм с учетом анизотропии тепловых свойств

Распределение полей температур на поверхности при использовании обоих типов пучков также как и в случае с распределением напряжений схоже и, в общем, характерно для процесса управляемого лазерного термораскалывания. В области воздействия лазерного излучения происходит интенсивный нагрев поверхности пластины. Далее тепло за счет теплопроводности

распространяется по объему пластины. В месте подачи хладагента происходит интенсивное охлаждение поверхности и температура снижается практически до начальных значений. Однако в случае использования серповидных пучков максимальные значения температур ниже, чем при использовании пучков круглого сечения.

2 Выводы

Анализ данных, приведенных в таблице 1.1, позволяет установить, что использование пучков серповидной формы позволяет получить аналогичные величины максимальных растягивающих напряжений в области воздействия хладагента, как и в случае использования пучков круглой формы. При этом максимальные значения температур в образце ниже. Например, при однолучевом термораскалывании пластин толщиной 0,2 мм при выбранных режимах максимальная температура для режима I при использовании серповидных пучков меньше, чем при использовании пучков круглого сечения на 55–212° С в зависимости от толщины пластины и вида управляемого лазерного термораскалывания. При разделении тонких пластин разница в температурах выше. Для режима II разница в температурах составляет 65–432° С. Также следует отметить, что при неизменных плотностях мощности площадь поперечного сечения серповидного пучка меньше на 15%, чем площадь пучка с сечением в виде круга, а следовательно и требуемая мощность источника излучения, необходимая для получения идентичных величин максимальных растягивающих напряжений в области подачи хладагента, меньше.

Изменяя параметры лазерных пучков серповидной формы, можно добиться увеличения растягивающих напряжений в области обработки по сравнению с термораскалыванием пучками круглого сечения без увеличения максимальных температур в образце, что ведет к повышению стабильности зарождения трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lumley, R.M. Controlled separation of brittle materials using a laser / R.M. Lumley // *Am. Ceram. Soc. Bull.* – 1969. – Vol. 48. – P. 850–854.
2. Мачулка, Г.А. Лазерная обработка стекла / Г.А. Мачулка. – М.: Сов. радио, 1979. – 136 с.
3. Junke, J. Cutting glass substrates with dual-laser beams / J. Junke, W. Xinbing // *Optics and Lasers in Engineering.* – 2009. – Vol. 47. – P. 860–864.
4. Zhao, C. Semiconductor laser asymmetry cutting glass with laser induced thermal-crack propagation / C. Zhao, H. Zhang, Y. Wang // *Optics and Lasers in Engineering.* – 2014. – Vol. 63. – P. 43–52.
5. Кондратенко, В.С. Развитие метода лазерного управляемого термораскалывания / В.С. Кондратенко, А.С. Наумов // *Вестник МГТУ МИРЭА.* – 2015. – Т. 2, № 3. – С. 1–11.
6. Григорьянц, А.Г. Технологические процессы лазерной обработки: учеб. пособие / А.Г. Григорьянц, И.Н. Шиганов, А.И. Мисюров; под ред. А.Г. Григорьянца. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 664 с.

7. Малов, И.Е. Исследование применимости технологии лазерного управляемого термораскалывания для изготовления элементов термооптического покрытия радиаторов космических аппаратов / И.Е. Малов // *Научноёмкие технологии в машиностроении.* – 2017. – № 12. – С. 36–39.

8. *Прецизионная лазерная обработка хрупких неметаллических материалов* / С.В. Шалупаев [и др.] // *Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины.* – 2005. – № 3 (30). – С. 87–92.

9. *Двухлучевое лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов* / С.В. Шалупаев [и др.] // *Оптический журнал.* – 2006. – Т. 73, № 5. – С. 62–66.

10. *The analysis of laser thermosplitting of materials by using of special geometry beams* / S.V. Shalupaev [et al.] // *Archives of metallurgy and materials.* – 2011. – Vol. 56, № 4. – P. 1149–1155.

11. *Исследование процесса лазерного раскалывания кремниевых пластин, вырезанных в плоскости (110)* / А.Н. Сердюков [и др.] // *Проблемы физики, математики и техники* – 2012. – № 3 (12). – С. 37–40.

12. *Способ резки неметаллических материалов*: пат. 2024441 Рос. Федерация, МПК5 С 03 В 33/02 №5030537/33 / В.С. Кондратенко; дата публ. 15.12.94.

13. Tsai, C.-H. Laser cutting of thick ceramic substrates by controlled fracture technique / C.-H. Tsai, H.-W. Chen // *Journal of materials processing technology.* – 2003. – Vol. 136. – P. 166–173.

14. Сысоев, В.К. Технологические характеристики процесса лазерного термораскалывания / В.К. Сысоев, П.А. Вятлев // *Известия ВУЗов. Приборостроение.* – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 48–50.

15. *Сорокин, А.В. Разработка технологического процесса лазерного параллельного термораскалывания хрупких материалов*: дис. ... канд. техн. наук: 05.11.14 / А.В. Сорокин. – Москва, 2011. – 148 л.

16. Клуникова, Ю.В. Лазерное управляемое термораскалывание сапфира / Ю.В. Клуникова, С.П. Малюков, А.В. Саенко // *Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ».* – 2015. – № 9. – С. 6–10.

17. Буй, Т.Х. Разработка и исследование чувствительных элементов датчиков давления на основе структур «кремний на сапфире» с использованием лазерных технологий: дис. ... канд. техн. наук: 05.27.01 / Т.Х. Буй. – Таганрог, 2016. – 127 л.

18. *Моделирование температурных полей и внутренних напряжений в пластине сапфира при лазерной обработке* / С.П. Малюков [и др.] // *Физика и химия обработки материалов.* – 2016. – № 5. – С. 11–16.

19. *Shalupaev, S.V. Modeling of mechanical influence of double-beam laser on single-crystalline silicon* / S.V. Shalupaev [et al.] // *Archives of metallurgy and materials.* – 2013. – Vol. 58, № 4. – P. 1381–1385.

20. Шалупаев, С.В. Особенности процесса лазерного термораскальвания кристаллов с кубической гранецентрированной кристаллической решеткой типа алмаза / С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Серета // IV Международная научная конференция «Проблемы взаимодействия излучения с веществом», посвященная 90-летию со дня рождения Б.В. Бокутя, Гомель, 9–11 ноября 2016 г.: в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины. – Гомель, 2016. – Ч. 2. – С. 188–192.

21. Шалупаев, С.В. Моделирование процесса управляемого лазерного термораскальвания сапфира / С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Серета // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2017. – № 6 (105). – С. 158–164.

22. Сапфир [Электронный ресурс] / Официальный сайт ООО «ТИДЕКС». – Режим доступа: <http://www.tydexoptics.com/pdf/ru/Sapphire.pdf>. – Дата доступа: 10.07.2018.

23. Лейкосапфир (Al_2O_3). Оптика из сапфира: линзы, защитные окна, микрооптика из лейкосапфира [Электронный ресурс] / Официаль-

ный сайт компании ООО Алкор Текнолоджиз. – Режим доступа: <http://www.alkor.net/alkorru/Sapphire1.html>. – Дата доступа: 10.07.2018.

24. Шабров, Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.

25. Карзов, Г.П. Физико-механическое моделирование процессов разрушения / Г.П. Карзов, Б.З. Марголин, В.А. Шевцова. – СПб.: Политехника, 1993. – 391 с.

26. Daniel, G. Harris Does anyone out there know the strength of sapphire? [Electronic resource]. – Mode of access: <http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=ADA421203>. – Date of access: 27.02.2017.

27. *The effect of anisotropy on the deformation and fracture of sapphire wafers subjected to thermal shocks* / T. Vodenitcharova [et al.] // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2007. – Vol. 194. – P. 52–62.

Поступила в редакцию 17.08.18.

УДК 517.9

АЛГЕБРА МНЕМОФУНКЦИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

А.Б. Антоневиц, Т.Г. Шагова, Е.В. Шкадинская

Белорусский государственный университет, Минск

ALGEBRA OF MNEMOFUNCTIONS ON A CIRCLE

A.B. Antonevich, T.R. Shahava, E.V. Shkadinskaia

Belarusian State University, Minsk

В рамках классической теории невозможно задать произведение произвольных обобщенных функций, что является препятствием для приложений к уравнениям с обобщенными коэффициентами и нелинейным задачам. Общий подход к решению задачи умножения обобщенных функций заключается в построении по заданному пространству обобщенных функций E дифференциальной алгебры G и вложения $R: E \rightarrow G$. Такие алгебры G называют алгебрами типа Коломбо, а их элементы – новыми обобщенными функциями или мнемофункциями. В данной работе построена алгебра мнемофункций на окружности и на ее примере сформулирован ряд общих вопросов об алгебрах мнемофункций.

Ключевые слова: обобщенная функция, пространство периодических обобщенных функций, мнемофункция, алгебра типа Коломбо.

It is impossible to define the product of arbitrary generalized functions in the classical theory of distributions. That is an obstacle for applications generalized functions theory to equations with generalized coefficients and nonlinear problems. The common approach for solving the problem of generalized functions multiplication consists in constructing a differential algebra G according to the given space of generalized functions E and building an embedding $R: E \rightarrow G$. Such algebras G are called *Colombeau type algebras* and their elements are called *new generalized functions* or *mnemofunctions*. The algebra of mnemofunctions on the circle is constructed in this article. By this example some general questions on algebras of mnemofunctions are formulated.

Keywords: *generalized function, space of periodic generalized functions, mnemofunction, Colombeau type algebra.*

Введение

Создание теории обобщенных функций (распределений) позволило решить многие задачи, в первую очередь из математической физики и теории линейных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами [1]–[4]. Однако в рамках этой классической теории невозможно задать произведение произвольных распределений, что является препятствием для приложений к уравнениям с обобщенными коэффициентами и нелинейным задачам. В связи с этим разрабатывались различные подходы к решению задачи умножения распределений (В.К. Иванов, Б. Дамьянов и Х. Христов, С.Т. Завалищин и А.Н. Сесекин, Э. Розингер). Наибольший резонанс в этом направлении вызвали работы французского математика Ж.Ф. Коломбо [5]. Модификация этой конструкции была предложена Ю.В. Егоровым в работе [6], содержащей довольно подробную историю вопроса. Общий подход заключается во введении (для заданного пространства распределений) новых объектов, сохраняющих ряд свойств распределений и образующих алгебры – допускающих корректно заданное умножение. Эти объекты называют *новыми обобщенными функциями*, *мнемофункциями* или *нелинейными обобщенными функциями*. На основе анализа предшествующих конструкций в работах [7], [8] был описан общий метод построения таких алгебр.

Относительно дальнейшего развития теории таких алгебр и их приложений см., например, [9]–[12].

Целью данной работы является постановка ряда вопросов об алгебрах мнемофункций, которые ранее детально не исследовались. Для этого построена алгебра мнемофункций на окружности и вопросы сформулированы для этого модельного примера. Для рассмотренной алгебры удается получить более наглядные, чем в общем случае, ответы на поставленные вопросы, соответствующие результаты предполагается опубликовать в последующих работах.

1 Пространство распределений на окружности

Пространство периодических распределений описано, например, в [3], [4]. Введем необходимые для дальнейшего понятия, связанные с этим пространством.

Окружность как многообразие, может быть реализована как подмножество комплексной плоскости $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и как фактор-пространство $\mathbb{T} = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$. Соответственно, для пространств функций или распределений на окружности возникают две реализации: их можно рассматривать как периодические функции переменной t на прямой \mathbb{R} с периодом 2π и как функции комплексной переменной z , определенные на

\mathbb{S}^1 . Такие пространства изоморфны, изоморфизм устанавливается с помощью замены $z = e^{it}$. При этом каждая из реализаций имеет свои преимущества в смысле более простого вида встречающихся формул.

Пространство $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R})$ состоит из комплексно-значных бесконечно дифференцируемых функций, периодических с периодом 2π . Изоморфное ему пространство $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, состоит из функций, бесконечно дифференцируемых на \mathbb{S}^1 . Обратим внимание на то, что здесь имеется в виду дифференцирование не по z , а по переменной t при представлении $z = e^{it}$. Если функция переменной z определена и аналитична в окрестности единичной окружности, связь этих производных задается формулой $f' = iz \frac{df}{dz}$. Например, $(z^n)' = inz^n$.

Топология на пространстве $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ задается с помощью счетной системы норм

$$p_m(\varphi) = \sum_{j=0}^m \max_z |\varphi^{(j)}(z)|, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \quad (1.1)$$

Пространство обобщенных функций (распределений) $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяется как сопряженное к пространству $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, т. е. состоит из непрерывных линейных функционалов на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Для значений функционала f в точке φ обычно используется обозначение $f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle$.

На пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ задается сходимость, соответствующая *-слабой топологии в сопряженном пространстве: последовательность f_n сходится к f , если

$$\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \text{ для любого } \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1).$$

Функцию, заданную на окружности, можно интегрировать по комплексной переменной z и по вещественной переменной t . Поскольку на окружности $z = e^{it}$, имеем $dz = ie^{it} dt$ и $dt = \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{iz} dz$, эти интегралы связаны равенством

$$\int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt = \int_{\mathbb{S}^1} u(z) |dz| = \int_{\mathbb{S}^1} u(z) \frac{dz}{iz}.$$

Пространство $L_1(\mathbb{S}^1)$ (и, в частности, $C(\mathbb{S}^1)$) вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ по формуле

$$L_1(\mathbb{S}^1) \ni u \rightarrow \langle u, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} u(z) \varphi(z) |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \varphi(e^{it}) dt. \quad (1.2)$$

Всюду ниже интегралы вычисляются по всей окружности \mathbb{S}^1 . Нормирующий множитель $\frac{1}{2\pi}$ вводится для того, чтобы приведенные ниже формулы имели более простой вид.

Каждая функция φ из $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k z^k,$$

сходящийся в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, где коэффициенты Фурье есть

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(z) z^{-k} |dz| = \langle \varphi, z^{-k} \rangle,$$

причем последовательность φ_k убывает быстрее любой степени $\frac{1}{|k|}$. Поэтому элементы из $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяются однозначно по своим значениям на функциях $z^k, k \in \mathbb{Z}$, и представляются в виде рядов Фурье

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k z^k, \quad (1.3)$$

где коэффициенты Фурье есть $C_k = \langle f, z^{-k} \rangle$. Эти коэффициенты для каждого f возрастают не быстрее некоторой степени $|k|$. Распределение f , как функционал, действует по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \varphi_k.$$

Например, дельта-функция δ_ξ , сосредоточенная в точке $\xi \in \mathbb{S}^1$, задается формулой $\langle \delta_\xi, \varphi \rangle = \varphi(\xi)$, она разлагается в ряд

$$\delta_\xi = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi^{-k} z^k.$$

В различных вопросах анализа активно используются рациональные функции, в частности, вида $f(z) = \frac{1}{(z-\xi)^n}$. При $|\xi|=1$ такие функции неинтегрируемы на окружности, но каждой из них естественно соответствует целое семейство распределений. В частности, особый интерес представляет распределение $\mathcal{P}(\frac{1}{z-1})$, которое задается выражением

$$\langle \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right), \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\varphi(z)}{z-1} dz,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Разложение этого распределения в ряд Фурье имеет вид

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{i}{2} \left[\sum_{-\infty}^{-1} z^k - \sum_0^{+\infty} z^k \right].$$

В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ задано дифференцирование

$$\langle f', \varphi \rangle := - \langle f, \varphi' \rangle,$$

которое в терминах коэффициентов Фурье задается формулой

$$f' = \sum_{-\infty}^{\infty} ik C_k z^k.$$

В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определено также умножение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ на любую функцию $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$:

$$\langle gf, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle, \quad g \in C^\infty(\mathbb{S}^1), \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1).$$

В терминах коэффициентов Фурье это произведение задается с помощью операции свертки

последовательностей: если f имеет разложение (1.3), а

$$g = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k z^k, \quad (1.4)$$

то $g * f = \sum_{-\infty}^{\infty} B_k z^k$, где $B_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j A_{k-j}$.

Пусть $|\xi|=1$. Отображение $\alpha(z) = \xi z$ есть поворот окружности, оно порождает по формуле $(T_\xi \varphi)(z) = \varphi(\xi z)$

оператор поворота, действующий в $C^\infty(S^1)$ и других пространствах функций на окружности. Соответственно, определен оператор поворота в пространстве распределений:

$$\langle T_\xi f, \varphi \rangle = \langle f, T_\xi \varphi \rangle = \langle f, T_\xi^{-1} \varphi \rangle.$$

Для обычных функций на окружности операция свертки задается формулой

$$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi} \int f(\xi) g\left(\frac{z}{\xi}\right) |d\xi|.$$

Для заданного распределения g функция

$$\psi(z) = \langle g, T_z \varphi \rangle$$

принадлежит $C^\infty(S^1)$. Это позволяет задать свертку распределений формулой

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g, T_z(\varphi) \rangle \rangle.$$

На окружности свертка существует для любой пары распределений, при разложениях (1.3) и (1.4) в ряды Фурье свертка переходит в полученное произведение коэффициентов Фурье:

$$f * g = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k A_k z^k.$$

Сингулярный интегральный оператор Коши S на окружности задается как свертка с распределением $\frac{2}{i} \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)$, при разложении (1.3) этот оператор действует по формуле

$$Sf = \sum_{-\infty}^{-1} C_k z^k - \sum_0^{+\infty} C_k z^k. \quad (1.5)$$

Очевидно, что $S^2 = I$, поэтому операторы

$$P^\pm = \frac{1}{2} [I \pm S]$$

являются проекторами.

2 Проблема умножения распределений

Еще в 1954 г. Л. Шварцем было показано, что невозможно задать операцию умножения произвольных распределений так, чтобы оно было ассоциативно и коммутативно. Точнее, пример Шварца показывает, что введенное выше умножение распределения и гладкой функции не является ассоциативным. В случае окружности аналог примера Шварца имеет следующий вид.

Рассмотрим три распределения: $\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)$, $z-1$ и δ_1 . Их произведение принимает разные значения при разной расстановке скобок. А именно

$$\left\{ \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \times (z-1) \right\} \times \delta_1 = 1 \times \delta_1 = \delta_1,$$

но при этом

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \times \{(z-1) \times \delta_1\} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \times 0 = 0.$$

А при перестановке порядка сомножителей получаем выражение, которое не определено

$$\left\{ \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) \times \delta_1 \right\} \times (z-1).$$

Примером задачи, в которой нужно придать смысл произведению распределений, является исследование простейшего дифференциального уравнения с обобщенным коэффициентом

$$f' + \delta_1 f = g.$$

В рамках классической теории распределений для такого уравнения не определено понятие решения, так как гладких (и даже непрерывных в точке 1) решений, как правило, не существует, а для разрывной функции f (тем более, для произвольного распределения) не определено произведение $\delta_1 f$.

Как было отмечено во введении, задача о придании смысла понятию произведения распределений рассматривалась многими специалистами. Отправная точка почти всех исследований в этом направлении следующая. Для распределения f существует последовательность гладких функций f_n , сходящаяся к f , аналогично для g существует последовательность гладких функций g_n , сходящаяся к g . Кажется естественным определить произведение, как предел произведений соответствующих аппроксимаций:

$$f \times g := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n g_n. \quad (2.1)$$

Но такое определение некорректно по двум причинам: такой предел зависит от выбора аппроксимирующих последовательностей, и может быть, что предел не существует.

Приведем стандартный пример, иллюстрирующий сказанное. В пространстве распределений имеем

$$z^n \rightarrow 0, \quad z^{-n} \rightarrow 0,$$

причем сходимости к нулю очень быстрая: последовательность $\langle z^n, \varphi \rangle$ убывает быстрее любой степени $1/n$. Но при этом $z^n z^{-n} = 1 \rightarrow 1$. Тогда, согласно формуле (2.1), получаем, что $0 \times 0 = 1$, что абсурдно.

Это связано с тем, что умножение (на своей области определения) не является непрерывным отображением в топологии пространства распределений.

3 Алгебры мнемифункций

Общий подход к решению задачи умножения элементов из заданного пространства распределений E заключается в расширении пространства распределений E – построении нового более широкого

пространства G и вложения $R: E \rightarrow G$. При этом G строится так, что оно является дифференциальной алгеброй – это векторное пространство, в котором определена коммутативная и ассоциативная операция умножения для произвольной пары элементов, определено дифференцирование и выполнено правило Лейбница

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Такие алгебры G называют алгебрами типа Колумбо, а их элементы – новыми обобщенными функциями или мнемифункциями. Это направление исследований часто называют нелинейной теорией обобщенных функций. Такие построения осуществлены в [5], [6], в [7], [8] проанализированы общие методы построения искомого алгебр.

Обычно существует много различных вложений R , каждое из них позволяет определить произведение произвольных распределений, которое является мнемифункцией: по определению считается, что

$$u \otimes v = R(u)R(v) \in G(\mathbb{S}^1). \quad (3.1)$$

Из примера Шварца следует, что умножение, заданное (3.1), не может совпадать с введенным выше умножением распределения на гладкую функцию, т. е. при таком подходе операция умножения корректируется – изменяется так, что становится ассоциативной.

При решении задач, связанных с умножением элементов из заданного пространства распределений E , используется не вся алгебра G , а только подалгебра G_E , порожденная образом E при заданном вложении – наименьшая подалгебра, содержащая элементы $R(u), u \in E$. Но описание подалгебры G_E оказывается достаточно сложным, поэтому удобнее рассматривать более широкую алгебру G , которая обычно строится явно.

Поясним на простом примере, что конструкция алгебр мнемифункций аналогична известным построениям расширений математических структур. Возьмем в качестве исходного пространства поле \mathbb{Q} и рассмотрим операцию извлечения квадратного корня из неотрицательного числа. Она определена не для всех положительных рациональных чисел, например, в этом пространстве нет элемента $\sqrt{2}$. Задача заключается в построении более широкого поля, в котором существует квадратный корень из любого неотрицательного элемента. Одним из таких полей является поле вещественных чисел \mathbb{R} . Среди подполей в \mathbb{R} существует наименьшее подполе $\mathbb{R}_{\sqrt{\cdot}}$, замкнутое относительно операции извлечения корня из неотрицательного числа. Оно имеет достаточно сложное описание: для его построения надо к \mathbb{Q} присоединить квадратные корни из рациональных чисел, затем добавить корни из получившихся чисел и продолжать этот процесс бесконечное число раз.

При сравнении с рассмотренной выше задачей, здесь \mathbb{R} является аналогом G , а $\mathbb{R}_{\sqrt{\cdot}}$ – аналогом G_E .

Для развития аналогии напомним конструкцию \mathbb{R} : в множестве последовательностей Коши рациональных чисел вводится отношение эквивалентности $(q_n) \sim (r_n)$, если $q_n - r_n \rightarrow 0$, классы эквивалентности образуют поле \mathbb{R} .

При построении алгебр мнемифункций аналогично рассматривается некоторое множество последовательностей (или семейств) гладких функций, вводится отношение эквивалентности и искомая алгебра по определению состоит из классов эквивалентности.

Построим, согласно общему подходу из [7], одну из возможных алгебр мнемифункций, соответствующих пространству $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$.

Рассмотрим семейства $\{f_\varepsilon\}$, зависящие от малого параметра ε и состоящие из бесконечно дифференцируемых функций f_ε на \mathbb{S}^1 , такие, что для каждого $\{f_\varepsilon\}$ существуют числа μ и ν , при которых имеет место оценка

$$p_m(f_\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{\mu+m+\nu}}. \quad (3.2)$$

Здесь и ниже через C будем обозначать разные константы, так как их явный вид в рассматриваемых вопросах несущественен. Обозначим множество, состоящее из всех таких семейств, через $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$. Это множество является векторным пространством.

Заметим, что иногда оказывается более удобным рассматривать не семейства гладких функций, зависящие от непрерывно меняющегося положительного малого параметра ε , а последовательности $\{f_n\}$ таких функций. Приведенные ниже утверждения справедливы и для этого случая, если считать, что малый параметр принимает только значения $\frac{1}{n}$.

Лемма 3.1. В пространстве $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ определены естественные операции умножения и дифференцирования:

$$\{f_\varepsilon\} \times \{g_\varepsilon\} = \{f_\varepsilon g_\varepsilon\}, \quad \{f_\varepsilon\}' = \{f_\varepsilon'\}.$$

Это пространство с введенными операциями является дифференциальной алгеброй.

Доказательство. Утверждение следует из того, что для норм (1.1) выполнено неравенство

$$p_m(fg) \leq Cp_m(f)p_m(g),$$

отражающее непрерывность умножения в пространстве $C^m(\mathbb{S}^1)$.

Поэтому, если для f_ε выполнена оценка (3.2), а для g_ε – оценка

$$p_m(g_\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{\mu_1+m+\nu_1}},$$

то

$$p_m(f_\varepsilon g_\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{(\mu+\mu_1)m+(v+v_1)}}.$$

Замкнутость пространства относительно дифференцирования следует из неравенства

$$p_m(f'_\varepsilon) \leq p_{m+1}(f_\varepsilon). \quad \square$$

Пространство $\widehat{G(\mathbb{S}^1)}$ весьма обширно, поэтому для получения более обозримого пространства вводится отношение эквивалентности и рассматривается фактор-пространство, состоящее из классов эквивалентности. В векторных пространствах всегда рассматриваются отношения эквивалентности, имеющие вид $f - g \in L$, где L есть некоторое заданное подпространство. Это позволяет корректно задать операции сложения и умножения на число. Но чтобы на фактор-пространстве алгебры по подпространству L можно было задать операцию умножения, L должно быть идеалом.

Пусть \mathcal{N}_0 есть подпространство, состоящее из семейств, сходящихся к нулю в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$:

$$\mathcal{N}_0 = \{f_\varepsilon : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = 0 \text{ для любого } \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)\}.$$

Семейства f_ε и g_ε называют *слабо эквивалентными*, если $f_\varepsilon - g_\varepsilon \in \mathcal{N}_0$. Такое отношение эквивалентности естественно в теории распределений, но \mathcal{N}_0 не является идеалом в $\widehat{G(\mathbb{S}^1)}$, откуда следует, что при таком отношении эквивалентности на фактор-пространстве невозможно корректно задать операцию умножения. Более того, \mathcal{N}_0 не является даже подалгеброй.

В алгебре $\widehat{G(\mathbb{S}^1)}$ существует много идеалов, с помощью которых можно задавать отношения эквивалентности. Из ряда соображений следует, что эквивалентные семейства должны быть слабо эквивалентными. Это выполнено, если искомый идеал принадлежит подпространству \mathcal{N}_0 , т. е. он достаточно малый. С другой стороны, чем меньше идеал, больше фактор-алгебра, поэтому желательно выбрать идеал по-возможности большим.

С теоретической точки зрения здесь наиболее подходящим является какой-нибудь максимальный идеал в $\widehat{G(\mathbb{S}^1)}$, при таком выборе идеала фактор-алгебра является расширением пространства гладких функций в смысле нестандартного анализа. Но максимальные идеалы не выписываются в явном виде, поэтому в соответствующей фактор-алгебре нельзя провести конкретные вычисления.

Более удобным оказывается подпространство

$$J(\mathbb{S}^1) = \{g_\varepsilon : \forall p \text{ и } m \exists C : p_m(g_\varepsilon) \leq C\varepsilon^p\}.$$

Лемма 3.2. *Подпространство $J(\mathbb{S}^1)$ является дифференциальным идеалом в алгебре $\widehat{G(\mathbb{S}^1)}$.*

Доказательство. То, что $J(\mathbb{S}^1)$ является подпространством, инвариантным относительно дифференцирования, очевидно.

Если $f_\varepsilon \in \widehat{G(\mathbb{S}^1)}$, $g_\varepsilon \in J(\mathbb{S}^1)$, то для произведения имеем оценку

$$p_m(f_\varepsilon g_\varepsilon) \leq p_m(f_\varepsilon) p_m(g_\varepsilon) \leq \frac{C}{\varepsilon^{\mu m + \nu}} \times C\varepsilon^p = C\varepsilon^{p - \mu m - \nu}.$$

Так как число p произвольное, получаем, что это произведение принадлежит $J(\mathbb{S}^1)$. \square

Алгебра мнемифункций на окружности $G(\mathbb{S}^1)$ определяется как фактор-алгебра

$$G(\mathbb{S}^1) = \widehat{G(\mathbb{S}^1)} / J(\mathbb{S}^1).$$

С описанной конструкцией связана алгебра обобщенных комплексных чисел $\tilde{\mathbb{C}} \subset G(\mathbb{S}^1)$. Она порождена семействами f_ε постоянных (не зависящих от z). Эта алгебра содержит, в частности, элементы вида $C\varepsilon^k$, $C \in \mathbb{C}$, причем при $k > 0$ это бесконечно малые величины, а при $k < 0$ – бесконечно большие. Алгебра $G(\mathbb{S}^1)$ является модулем над алгеброй $\tilde{\mathbb{C}}$.

Для пояснения взаимосвязи построенной алгебры с пространством распределений напомним другую конструкцию пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$. Рассмотрим подпространство $\widehat{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}$ в $\widehat{G(\mathbb{S}^1)}$, состоящее из таких семейств f_ε , что для каждого $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle$.

Теорема 3.2. *Фактор-пространство $\widehat{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)} / \mathcal{N}_0$ изоморфно пространству распределений $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$.*

Этот способ введения распределений детально описан в [3], где содержится доказательство теоремы 3.2. В этой книге и других работах этих авторов использовались последовательности гладких функций, т. е. случай, когда малый параметр принимает только значения $\varepsilon = \frac{1}{n}$, в связи с чем такая конструкция распределений названа *секвенциальным подходом*.

Эта конструкция пространства распределений позволяет выявить истоки некорректности задачи об умножении классических обобщенных функций:

1) пространство $\widehat{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}$ не является алгеброй, это приводит к тому, что в фактор-пространстве нет элементов, которые могли бы служить кандидатами на произведение для произвольной пары элементов;

2) подпространство \mathcal{N}_0 не является идеалом в алгебре $\widehat{G(\mathbb{S}^1)}$, это приводит к тому, что произведения представителей из одного класса эквивалентности попадают в разные классы, т. е. не определяется корректно произведение классов.

3) то, что \mathcal{N}_0 не является подалгеброй, приводит к утверждениям типа $0 \times 0 \neq 0$: произведение двух элементов из нулевого класса эквивалентности может не принадлежать этому классу.

Как видно из вышесказанного, построение алгебры мнемифункций можно считать модификацией секвенциального подхода к построению пространства распределений: в обоих случаях строится пространство, состоящее из классов эквивалентности семейств гладких функций, удовлетворяющих оценкам вида (3.2), а модификация заключается в следующем:

– вместо пространства $\widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}$ рассмотрено более широкое пространство $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, являющееся алгеброй;

– отношение эквивалентности задано не с помощью подпространства \mathcal{N}_0 , а с помощью идеала $J(\mathbb{S}^1)$, содержащегося в этом подпространстве.

Эти отличия приводят к тому, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ все семейства из \mathcal{N}_0 отождествляются с нулем, а в алгебре мнемифункций они порождают бесконечно малые величины. Но именно учет таких бесконечно малых позволяет корректно определить операцию умножения.

В работе Ю.В. Егорова [6] была предложена несколько другая, но родственная конструкция. Применительно к рассматриваемому случаю окружности, Ю.В. Егоров рассмотрел более широкую алгебру $\widetilde{G_E(\mathbb{S}^1)}$, состоящую из произвольных семейства $\{f_\varepsilon\}$, не требуя выполнения оценок (3.2). В этой более широкой алгебре множество $J(\mathbb{S}^1)$ не является идеалом, поэтому Ю.В. Егоров использовал идеал

$$J_0(\mathbb{S}^1) = \{f_\varepsilon : \forall p \text{ и } m \exists \varepsilon_0 > 0 : f_\varepsilon = 0 \text{ при } \varepsilon < \varepsilon_0\}.$$

Соответствующая фактор-алгебра $G_E(\mathbb{S}^1) := \widetilde{G_E(\mathbb{S}^1)} / J_0(\mathbb{S}^1)$ есть алгебра новых обобщенных функций по Егорову.

Множество $J_0(\mathbb{S}^1)$ является идеалом и в алгебре $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$. Но этот идеал существенно меньше, чем $J(\mathbb{S}^1)$, в результате соответствующая фактор-алгебра $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)} / J_0(\mathbb{S}^1)$ практически не отличается от первоначальной алгебры $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$.

4 Отношение ассоциированности и асимптотические разложения мнемифункций

Основной интерес представляют взаимосвязи построенной алгебры мнемифункций с пространством распределений. Прежде всего устанавливается отношение ассоциированности. Поскольку $J(\mathbb{S}^1) \subset \mathcal{N}_0$, то, если семейство f_ε сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ к f , то любое эквивалентное

семейство также сходится к f . Именно для выполнения этого свойства накладываем условие на отношение эквивалентности.

Будем говорить, что класс эквивалентности $[f_\varepsilon]$, содержащий f_ε , ассоциирован с распределением f , если семейство f_ε сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ к f . Обозначим через $G_{as}(\mathbb{S}^1)$ подпространство в $G(\mathbb{S}^1)$, состоящее из семейств, ассоциированных с распределениями. По построению имеем, что G_{as} есть фактор-пространство: $G_{as}(\mathbb{S}^1) = \widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)} / J(\mathbb{S}^1)$. На $G_{as}(\mathbb{S}^1)$ отношение ассоциированности порождает отображение перехода к пределу

$$Lim : G_{as}(\mathbb{S}^1) \ni [f_\varepsilon] \rightarrow Lim([f_\varepsilon]) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1).$$

Отображение Lim сюръективно, но не является инъективным: с каждым распределением u связано обширное множество $G_{as}(u)$, состоящее из мнемифункций, ассоциированных с u , которое является аффинным подпространством в $G_{as}(\mathbb{S}^1)$. Если в $G_{as}(u)$ выбрать произвольный элемент f_0 , то отображение

$$G_{as}(u) \ni f \rightarrow f - f_0 \in G_{as}(0)$$

задает изоморфизм между $G_{as}(u)$ и векторным пространством $G_{as}(0)$, которое по построению изоморфно фактор-пространству $\mathcal{N}_0 / J(\mathbb{S}^1)$. Обратим внимание на то, что такой изоморфизм не является каноническим, так как в общем случае нет оснований выделить в аффинном подпространстве $G_{as}(u)$ один из элементов, который следует объявить нулевым. Таким образом, степень неоднозначности соответствия между $G_{as}(\mathbb{S}^1)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяется тем, насколько подпространство \mathcal{N}_0 больше идеала $J(\mathbb{S}^1)$. Как отмечалось выше, элементы фактор-пространства $\mathcal{N}_0 / J(\mathbb{S}^1)$ есть бесконечно малые, т. е. два элемента из $G_{as}(u)$ отличаются на бесконечно малую мнемифункцию.

Как показывают дальнейшие и предыдущие рассуждения, переход к рассмотрению ассоциированных распределений приводит к существенному огрублению ситуации – мнемифункции, ассоциированные с данным распределением, могут вести себя по разному при умножении и требуется более детальная информация о поведении мнемифункций.

Фактически выражение $\langle F, \varphi \rangle := \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle$ задает обобщенный линейный функционал F на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, т. е. функционал со значениями в алгебре обобщенных чисел $\widetilde{\mathbb{C}}$. В частности, для $f_\varepsilon \in \mathcal{N}_0$ имеем $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle \rightarrow 0$, т. е. значения соответствующего функционала являются бесконечно малыми.

Дополнительную информацию о свойствах мнемифункции можно получить с помощью анализа асимптотического поведения величин $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle$. При вычислениях в алгебре мнемифункций часто встречаются случаи, когда это семейство функционалов допускает асимптотическое разложение по степеням ε в пространстве $D'(\mathbb{S}^1)$:

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \sum_{k=k_0}^{\infty} \langle u_k, \varphi \rangle \varepsilon^k, \text{ где } u_k \in D'(\mathbb{S}^1). \quad (4.1)$$

Обратим внимание на то, что здесь речь идет именно об асимптотических разложениях, т. е. равенство в (4.1) означает, последовательность конечных сумм

$$F_N = \sum_{k=k_0}^N \langle u_k, \varphi \rangle \varepsilon^k$$

сходится к $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle$ асимптотически, т. е. их разность убывает быстрее, чем ε^N .

При этом асимптотическое разложение может начинаться с отрицательной степени ε , т. е. главным членом разложения может оказаться некоторое распределение с бесконечно большим коэффициентом.

Таким образом, наглядная информация о поведении мнемифункции содержится в ее асимптотическом разложении в пространстве $D'(\mathbb{S}^1)$, при этом асимптотическое разложение у бесконечно малых мнемифункций начинается с положительной степени ε , а асимптотическое разложение семейства f_ε , ассоциированного с u , имеет вид

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle + \langle u_1, \varphi \rangle \varepsilon + \langle u_2, \varphi \rangle \varepsilon^2 + \dots \quad (4.2)$$

Заметим, что в идейном плане связь между $D'(\mathbb{S}^1)$ и G_{as} аналогична связи между многообразием M и его касательным расслоением TM .

Действительно, рассмотрим множество гладких кривых $f(\varepsilon)$, проходящих через заданную точку a многообразия M , т. е. таких, что $f(0) = a$. Если на этом множестве ввести отношение эквивалентности $f(\varepsilon) \sim g(\varepsilon)$, если $f(\varepsilon) - g(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, то множество классов эквивалентности есть касательное пространство TM_a в точке $a \in M$, а объединение всех касательных пространств есть касательное расслоение TM .

Согласно определению, касательный вектор есть класс эквивалентных кривых, приближающихся к точке по одному направлению, т. е. такой класс сохраняет информацию («помнит») только об этом направлении.

Аналогично, семейство f_ε , допускающее разложение (4.1), можно рассматривать как «кривую» в пространстве распределений $D'(\mathbb{S}^1)$, проходящую через точку u . Тогда распределение u_1 описывает, по какому направлению «кривая»

приближается к u . А остальные члены разложения более детально описывают путь, по которому «кривая» приближается к f . По определению, два семейства гладких функций попадают в один класс эквивалентности, если они «очень похоже» ведут себя при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. класс эквивалентности *помнит* о том, как элементы этих семейств приближались к своему пределу, в связи с чем Я.В. Радыно предложил для них название «мнемифункции» (от греческого «мнемо» – память).

Приходится отметить, что асимптотическое разложение содержит только часть информации о поведении мнемифункции, в общем случае даже полное (по всем степеням ε) асимптотическое разложение не позволяет однозначно определить f_ε , в частности, асимптотические разложения для f_ε и g_ε не определяют однозначно их произведение. Это приводит к тому, что при решении конкретных задач промежуточные вычисления следует проводить в алгебре мнемифункций, а асимптотическое разложение полезно построить только для окончательного результата, чтобы придать ему наглядность.

5 Вложения распределений в алгебру мнемифункций

Более детальная связь с распределениями устанавливается с помощью построения правых обратных к отображению Lim . Это линейные отображения $R : D'(\mathbb{S}^1) \rightarrow G_{as} \subset G(\mathbb{S}^1)$, такие, что $LimR(u) = u$. Согласно определению, образ $R(u)$ распределения u есть семейство гладких функций, сходящееся к u , т. е. такое отображение R задает способ аппроксимации распределений гладкими функциями и является вложением (инъективным отображением) $D'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемифункций.

Заметим, что существует много правых обратных к отображению Lim : оператор $R_1 : D'(\mathbb{S}^1) \rightarrow G_{as} \subset G(\mathbb{S}^1)$ является правым обратным тогда и только тогда, когда оператор $R - R_1$ отображает $D'(\mathbb{S}^1)$ в N_0 .

Взятое в обратном порядке произведение отображений $RLim : G_{as} \rightarrow G_{as}$ является проектором в G_{as} . Поэтому формула $f = RLimf + f - RLimf$ задает разложение пространства G_{as} в прямую сумму

$$G_{as} = Im(R) \oplus G_{as}(0).$$

Поскольку образ $Im(R)$ изоморфен $D'(\mathbb{S}^1)$, получаем разложение

$$G_{as} = D'(\mathbb{S}^1) \oplus G_{as}(0),$$

при котором проекция на первую координату есть отображение ассоциированности Lim .

Обратим внимание на то, что полученное разложение определяется вложением R : в аффинном

подпространстве $G_{as}(u)$ нулевым элементом объявляется $R(u)$.

Как уже отмечалось, при заданном R произведение произвольных распределений является, по определению, мнемофункцией

$$u \otimes v := R(u)R(v) \in G(\mathbb{S}^1).$$

Для описания свойств такого произведения обычно требуется установить его связь с распределениями. Если произведение $R(u)R(v)$ ассоциировано с распределением h , то естественно считать это h произведением uv , порожденным заданным способом аппроксимации R .

Как сказано выше, более детальную информацию о мнемофункции $R(u)R(v)$ дает ее асимптотическое разложение в пространстве распределений, которое может существовать и тогда, когда произведение $R(u)R(v)$ не ассоциировано с каким-нибудь распределением. Таким образом, задача описания произведения распределений в значительной степени сводится к построению асимптотического разложения для $R(u)R(v)$. При этом могут возникнуть асимптотические разложения с бесконечно большими и с бесконечно малыми коэффициентами, причем последние также играют существенную роль в рассматриваемых вопросах.

Заключение

В работе построена алгебра мнемофункций на окружности, дающая одно из решений задачи об умножении распределений. При дальнейшем анализе этой алгебры возникает ряд вопросов, среди которых следующие.

I. Выполнение каких дополнительных «хороших» свойства можно потребовать от вложения $R : D'(\mathbb{S}^1) \rightarrow G(\mathbb{S}^1)$? Поскольку каждое вложение R есть некоторый способ аппроксимации распределений гладкими функциями, вопрос связан с выяснением того, какие способы аппроксимации распределений наиболее удобны в рассматриваемых задачах.

II. Алгебры мнемофункций обычно рассматриваются только с алгебраической структурой, без заданной топологии. Поэтому представляет интерес выяснение того, какие топологические структуры или сходимости присущи пространству мнемофункций. Например, упомянутая выше асимптотическая сходимость не задается какой-либо локально выпуклой топологией и есть соображения, показывающие, что на такой алгебре не существует естественной локально выпуклой топологии, в отличие от пространства распределений, которое является локально выпуклым топологическим векторным пространством.

III. Для каких пар распределений произведение $R(u)R(v)$ ассоциировано с каким-либо распределением? В общем случае вряд ли может быть получен явный ответ на этот вопрос. Но если рассмотреть только распределения специального вида, то вопрос более доступен для исследования. В частности, явный ответ может быть получен для элементов из подалгебры, порожденной рациональными мнемофункциями.

Эти вопросы предполагается рассмотреть в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwartz, L. Théorie des distributions: en 2 vol. / L. Schwartz. – Paris: Hermann, 1950. – 2 vol.
2. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 470 с.
3. Антосик, П. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М.: Мир, 1976. – 311 с.
4. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров; 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
5. Colombeau, J.F. New generalized functions and multiplication of distributions / J.F. Colombeau. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – 374 p.
6. Егоров, Ю.В. К теории обобщенных функций / Ю.В. Егоров // УМН. – 1990. – Т. 45, вып. 5 (275). – С. 3–40.
7. Антоневиц, А.Б. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций / А.Б. Антоневиц, Я.В. Радыно // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 43, № 3. – С. 680–684.
8. Antonevich, A.B. On the problem of distributions multiplication / A.B. Antonevich, Ya.V. Radyno // Problems and Methods in Mathematical Physics, Teubner-Texte sur Mathematik. Stuttgart-Leipzig – 1994. – Band 134. – P. 9–14.
9. Nedeljkov, M. Linear Theory of Colombeau's Generalized Functions / M. Nedeljkov, S. Pilipovic, D. Scarpalezos. – Harlow: Addison-Wesley Longman, 1998. – 156 p.
10. Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity / M. Grosse [et al.]; ed.: M. Hazewinkel – Springer-Science + Business Media, B. V., 2013. – 505 p.
11. Baglini, L.L. The Category of Colombeau algebras / L.L. Baglini, P. Giordano // Monats Math. – 2017. – Vol. 182. – P. 649–674.
12. Мельникова, И.В. Решение квазилинейных стохастических задач в абстрактных алгебрах Коломбо / И.В. Мельникова, В.А. Бовкун, У.А. Алексеева // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Vol. 53, № 12. – P. 1653–1663.

Поступила в редакцию 26.07.18.

УДК 512.542

О S -КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

С.Ю. Башун, Э.М. Пальчик

Полоцкий государственный университет, Новополоцк

ON S -QUASINORMAL SUBGROUPS IN FINITE GROUPS

S.Yu. Bashun, E.M. Palchik

Polotsk State University, Novopolotsk

Исследуется строение конечной группы G , у которой ее собственная подгруппа H перестановочна со всеми подгруппами Шмидта группы G (тогда H называется S -квазинормальной подгруппой).

Ключевые слова: группа Шмидта (минимальная ненильпотентная группа), перестановочные подгруппы, разрешимая группа.

The structure of a finite group G with a proper subgroup H which is permutable with all subgroups of Schmidt of group G (then H is called S -quasinormal subgroup) is investigated.

Keywords: Schmidt group (minimal nonnilpotent group), permutable subgroups, solvable group.

Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Одним из первых вопросами перестановочности подгрупп в конечной группе занимался О. Оре [1]. Существенный вклад в это направление внес О. Кегель [2], [3]. Например, в [3] он доказал субнормальность собственной подгруппы, перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы. Отметим, что строение конечных групп, у которых некоторые подгруппы перестановочны с подгруппами Шмидта (минимальными ненильпотентными группами), исследовалось в работах [7], [16], [17] и других. В данной работе исследуется нормальное строение конечной группы, у которой собственная подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта в группе.

1 Обозначения и терминология

В статье используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в работах [4], [5]. Некоторые используемые обозначения (в том числе и новые) приведем для удобства чтения:

- $\Sigma(H)$ – множество всех подгрупп Шмидта в подгруппе H (если $H = G$, то $\Sigma(G) = \Sigma$);
 - $H\Sigma = \Sigma H$ означает, что H перестановочна с каждой подгруппой из Σ ;
 - H_G – наибольшая нормальная подгруппа группы G , лежащая в подгруппе H ;
 - H^G – порождение всех сопряженных с H в G подгрупп;
 - субнормальная подгруппа – член субнормального ряда группы (ряд групп)
- $$1 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_{i-1} \subseteq G_i \subseteq \dots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$$

называется субнормальным, если $G_i \triangleleft G_{i+1}$ для всех $i = \overline{1, n-1}$;

- $H \triangleleft G$ ($H \triangleleft\triangleleft G$) – подгруппа H нормальна (субнормальна) в G ;
- $\pi(G)$ – множество попарно различных простых делителей порядка группы G ;
- pd -группа – группа, чей порядок делится на простое число p ;
- G_p – силовская p -подгруппа группы G ;
- p -замкнутая группа – группа G с $G_p \triangleleft G$;
- $R(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G ;
- примарная (бипримарная) группа – группа G с $|\pi(G)| = 1$ (с $|\pi(G)| = 2$);
- секция в G – фактор-группа A/B , где $B \triangleleft A \subseteq G$;
- $\Phi(G)$ ($Z(G)$) – подгруппа Фраттини (центр) группы G ;
- $A^g = g^{-1}Ag$;
- $A \rtimes B$ – полупрямое произведение групп A и B с $A \triangleleft AB$;
- $\langle \dots \rangle$ – порождение множеств, заключенных в $\langle \rangle$;
- S_n – симметрическая группа перестановок n символов.

2 Используемые результаты

Лемма 2.1. Пусть A , C и B – подгруппы группы G . Тогда

- (1) [1] если $AB = BA = L$, то L – подгруппа в G ;

(2) [1] если $AB = BA, AC = CA$, то $A\langle C, B \rangle = \langle C, B \rangle A$;

(3) [3] если $H \triangleleft\triangleleft G$, то $H \cap G_p = H_p$ для всех $p \in \pi(H)$.

Лемма 2.2. Если A, B, G как в лемме 2.1 и $AB^g = B^g A$ для всех $g \in G$, то и $A^y B^z = B^z A^y$ для всех $y \in G, z \in G$.

Доказательство. Пусть $a, a_1 \in A, b, b_1 \in B$. По условию $ax^{-1}bx = x^{-1}b_1xa_1$. Пусть $y, z \in G, zy^{-1} = x$. Тогда $ayz^{-1}bzy^{-1} = yz^{-1}b_1zy^{-1}a_1$. Последнее равенство после умножения слева на y^{-1} , а справа – на y дает нам $y^{-1}ayz^{-1}bz = z^{-1}b_1zy^{-1}a_1y$. \square

Лемма 2.3. Пусть A и $B_i, i = \overline{1, n}$, – собственные подгруппы группы G и $AB_i^g = B_i^g A$ для всех $g \in G$ и всех $i = \overline{1, n}$. Тогда можно выбрать наибольшую по включению собственную подгруппу M , содержащую A , с этим свойством ($MB_i^g = B_i^g M$ для всех $g \in G$ и всех $i = \overline{1, n}$). Тогда имеет место одно из утверждений:

- (1) $M_G \neq 1$;
- (2) $G = MB_i$ или $B_i^G \subseteq N_G(M)$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. По лемме 2.1 (1) $MB_i = L_i$, – подгруппа в $G, i = \overline{1, n}$. Предположим, что существует i для которого $L_i = L \subset G$. Предположим, что $a \in L \setminus M$ и $a \notin N_G(M) = N$. Тогда $M \subset \langle M, M^a \rangle = D \subseteq L$. По леммам 2.1 (2) и 2.2 $DB_j^x = B_j^x D$ для всех $x \in G$ и всех $j \in \{1, \dots, n\}$. Это противоречит выбору $M \subset L \subset G$. Поэтому $a \in N$. Тогда и $L \subseteq N$ ввиду произвольного выбора элемента $a \in L \setminus N$. В частности, $B_i \subseteq L_i = L \subseteq N$. Аналогично, $B_i^g \subseteq MB_i^g = K$ – подгруппа в $G. K \subset G$ так как в противном случае $MB_i^g = G$ и по [5, лемма VI.4.5] $L = MB_i = G$, что противоречит предположению $L = L_i \subset G$.

Как и выше, $B_i^g \subseteq K \subseteq N$. Ввиду произвольного выбора $g \in G$ получается, что $Y = B_i^G \subseteq N$. Но $Y \triangleleft G$ и из леммы 2.1 (2) следует, что подгруппа MY перестановочна со всеми подгруппами B_i^g для всех $g \in G$ и всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Если $MY \subset G$, то это противоречит выбору M . Поэтому, либо $MY = M$, либо $MY = G$. Но если $Y \subseteq M$, то $M_G \neq 1$. Если $MY = G$, то $M \triangleleft G$ и $M_G \neq 1$.

Поэтому можно считать, что $MB_i = L = G$ для всех $i = \{1, \dots, n\}$ [5, лемма VI.4.5]. \square

Лемма 2.4 [6]. Пусть A – группа Шмидта. Тогда A имеет следующие свойства.

- (1) $A = A_p \rtimes A_r, p \neq r$ – простые числа, $A'_p = \Phi(A_p), A_p / A'_p = p^m$, где m – наименьшее целое число такое, что r делит $p^m - 1$;
- (2) если $r = 2$, то $|A_p| = p$ (следует из (1) и [5, теорема I.17.4]);
- (3) $A_r = \langle y \rangle$;
- (4) $Z(A) = \Phi(A) = \Phi(A_p) \times \langle y^r \rangle$;
- (5) Если $1 \neq N \triangleleft A$, то A/N либо есть группа Шмидта, либо циклическая r -группа.

Лемма 2.5 [7, лемма 2]. Пусть $G/N = \overline{G}$. Среди подгрупп, порождающих вместе с N всю группу G выберем наименьшую относительно включения подгруппу L . Тогда $G = LN, L \cap N \subseteq \Phi(L), \overline{G} \cong LN/N \cong L/L \cap N$.

Лемма 2.6 [8, лемма 5]. Пусть $G/N = \overline{G} = \overline{G}_p \rtimes \overline{G}_r$ – группа Шмидта, а $N \subseteq \Phi(G)$. Тогда либо G – группа Шмидта типа $G = G_p \rtimes G_r$, либо порождается своими собственными p -замкнутыми подгруппами Шмидта.

Лемма 2.7 [10, теорема 7.7.1]. Пусть A, B, H – подгруппы группы $G = A \cdot B, H \subseteq A \cap B$. Если $H \triangleleft\triangleleft A, H \triangleleft\triangleleft B$, то $H \triangleleft\triangleleft G$.

Лемма 2.8 [11, следствие 7.3]. Если в конечной простой группе G нет секций, изоморфных S_3 , то $G \in \{Sz(2^{2n+1}), L_2(3^{2n+1})\}$.

Лемма 2.9. Если в группе G имеется секция $A/B = X^*$, являющаяся подгруппой Шмидта и $X^* = X_p^* \rtimes X_r^*$, то и в группе G имеется подгруппа Шмидта типа $X = X_p \rtimes X_r$.

Доказательство. По лемме 2.5 в группе A имеется подгруппа L такая, что $LB = A$ и $L \cap B \subseteq \Phi(L), LB/B \cong L/L \cap B \cong A/B$. По лемме 2.6 тогда и в группе L имеется подгруппа Шмидта L^0 типа $L_p^0 \rtimes L_r^0$. \square

Лемма 2.10 [15]. Неразрешимая группа G содержит такую подгруппу Шмидта K , которая является p -замкнутой pd -подгруппой Шмидта четного порядка, которая не добавляется в G .

Отметим, что лемма 2.10 обобщает предложение 1 работы [16].

Лемма 2.11. Пусть $G = A \cdot B$ – группа, где $A \in \Sigma, B\Sigma = \Sigma B, a, b$ – наибольшая по включению собственная подгруппа в G с этим свойством и $B_G = 1$. Если B – нильпотентная группа, то G – разрешимая группа.

Доказательство. Предположим, что G – неразрешимая группа. Пусть K – p -замкнутая pd -подгруппа Шмидта четного порядка в G , которая существует по лемме 2.10. По условию

теоремы $BK^g = K^gB$ для всех $g \in G$. Из леммы 2.3 и условия теоремы следует, что $G = BK$. (По условию для B включения $B \subset BK^G \subset G$ невозможно). Это противоречит лемме 2.10. Итак, G – разрешимая группа. \square

Напомним упомянутый во введении результат Кегеля.

Лемма 2.12 [3]. Пусть H – собственная подгруппа группы G , $\pi = \pi(H)$. Если H перестановочна со всеми силовскими π -подгруппами G_p , $p \in \pi$, то $H \triangleleft\triangleleft G$ и $G_p \cap H = H_p$.

Теорема 2.1. Пусть H^* – собственная подгруппа группы G и $\Sigma H^* = H^*\Sigma$. Тогда в группе G существует наибольшая по включению собственная подгруппа H с тем же свойством $H\Sigma = \Sigma H$ и $H^* \subseteq H$. Тогда либо $H \triangleleft\triangleleft G$, либо группа $\bar{G} = G/H_G$ является разрешимой группой с нильпотентной подгруппой $\bar{H} = H/H_G$ и имеющая факторизацию $\bar{G} = \bar{H}\bar{O}_t(\bar{G})$, где $t \in \pi(G)$.

Доказательство. По лемме 2.3 либо $H_G \neq 1$, либо $G = HB$, где $B \in \Sigma(G)$. Если $T = H_G \neq 1$, то рассмотрим группу $\bar{G} = G/T$ и ее подмножество $\Sigma(\bar{G})$. Пусть $\Sigma(\bar{G}) \neq \emptyset$. Пусть $\bar{S} \in \Sigma(\bar{G})$, $\bar{S} = \bar{S}_p \times \bar{S}_r$. По лемме 2.5 в группе S , где $S/T = \bar{S}$, имеется подгруппа L^* такая, что $TL^* = S$, $\bar{S} \cong L^*/L^* \cap T$, $L^* \cap T \subseteq \Phi(L^*)$. По лемме 2.6 L^* есть либо группа Шмидта, либо порождается своими подгруппами Шмидта.

По условию и лемме 2.1 (2) $HL^* = L^*H$. Тогда

$$\begin{aligned} H/T \cdot L^*T/T &= L^*T/T \cdot H/T \\ &= S/T \cdot H/T = H/T \cdot S/T = \bar{S}\bar{H} = \bar{H}\bar{S}. \end{aligned}$$

Так как подгруппа \bar{S} пробегает все множество $\Sigma(\bar{G})$, то получается, что $\bar{H}\Sigma(\bar{G}) = \Sigma(\bar{G})\bar{H}$.

Предположим, что в группе \bar{G} имеется подгруппа \bar{H}^{**} , содержащая \bar{H} , наибольшая по включению относительно свойства

$$\bar{H}^{**}\Sigma(\bar{G}) = \Sigma(\bar{G})\bar{H}^{**}.$$

Пусть $X \in \Sigma(H^{**}) \subseteq \Sigma(G)$. По лемме 2.3 $X^G \subseteq H_G^{**}$. Аналогично, H_G^{**} содержит все подгруппы из множества $\Sigma(H^{**})$. Тогда группа \bar{H}^{**} – нильпотентная группа по [10, теорема 4.3.1]. (Если бы в группе \bar{H}^{**} имелись подгруппы Шмидта, то по лемме 2.6 и в группе H^{**} имелись бы вне H_G^{**} подгруппы Шмидта). Ясно также, что $\bar{H}_G^{**} = \bar{1}$. По лемме 2.11 \bar{G} – разрешимая группа. По выбору $H \bar{H} \cdot \bar{H}_G^{**} = \bar{H}$, т. е. $H_G = H_G^{**}$. В частности, из разрешимости группы \bar{G} следует,

что в \bar{G} есть минимальная нормальная t -подгруппа \bar{M} . Поэтому и $\bar{G} = \bar{H}\bar{M} = \bar{H}^{**} \cdot \bar{M}$. Если $\bar{H}\bar{M} \subseteq \bar{G}$, то $H\bar{M} \subseteq G$ и $M \subseteq H$ по условию для H .

Если же $\Sigma(\bar{G}) = \emptyset$, то \bar{G} – нильпотентная группа (как выше \bar{H}^{**}). Но тогда $\bar{H}^{**} \triangleleft\triangleleft \bar{G}$. Если же $H_G = 1$, то для H справедливы те же рассуждения, что и для \bar{H}^{**} выше. \square

Отметим, что вопрос о строении группы с подгруппой $H \subset G$ и условием $H\Sigma = \Sigma H$ был поставлен второму автору Я.Г. Берковичем в 1967 году после выхода работы [7].

Рассмотрим некоторые модификации условия леммы 2.12.

Теорема 2.2. Пусть H – собственная подгруппа группы G , $\pi = \pi(H)$. Пусть выполняется одно из следующих условий:

- (1) $\{p, r\} \subseteq \pi$ и H – наибольшая относительно включения собственная подгруппа в G , перестановочная со всеми силовскими p - и r -подгруппами группы G ;
- (2) $|\pi'(G)| > 1$ и H – наибольшая по включению собственная подгруппа в G , перестановочная со всеми s - и t -силовскими π' -подгруппами группы G ;
- (3) $p \in \pi$, H – наибольшая по включению собственная подгруппа из G , перестановочная со всеми силовскими p -подгруппами группы G .

Тогда при выполнении условий (1) и (2) $H_G \neq 1$. При выполнении условия (3) либо $H_G \neq 1$, либо $G = H \cdot G_p$, $(|H|, |G_p|) = 1$, либо $G = H \cdot G_p$ и $H \cap G_p = H_p \neq 1$ и G – не простая группа, исключая простые группы, указанные в [14, теорема 5.8].

Доказательство. Предположим, что имеем условия (1) и (2) и $H_G = 1$. Тогда по лемме 2.3 $G = HG_p = HG_r$ при условии (1) и $G = HG_s = HG_t$ для $\{s, t\} \subseteq \pi'$ по условию (2). Но тогда $|G_r| \cdot |G_p|$ делит $|H|$ и, соответственно, $|G_s| \cdot |G_t|$ делит $|H|$. Но тогда $H = G$, но не $H \subset G$. Это противоречие показывает, что $H_G \neq 1$.

Предположим, что выполняется условие (3) и $H_G = 1$. По лемме 2.3 $G = HG_p$. Простые группы с такой факторизацией описаны в [14, теорема 5.8]. \square

Заключение

В работе исследовано строение конечной группы, у которой собственная подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта группы. Попутно доказано, что собственная подгруппа группы, порядок которой делится на простые

числа p и r ($p \neq r$), которая перестановочна со всеми силовскими r - и p -подгруппами группы и является наибольшей по включению относительно этого свойства, содержит нормальную подгруппу всей группы, отличную от 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ore, O. Contributions to the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – № 5. – P. 431–460.
2. Kegel, O. Producte nilpotenter Gruppen / O. Kegel // Archiv der Math. – 1961. – Vol. 12. – S. 90–93.
3. Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Zeitschrift. – 1962. – Vol. 78. – S. 205–221.
4. Горенштейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенштейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin: Springer-Verlag. – 1982. – 793 s.
6. Гольфанд, Ю.А. О группах, все подгруппы которых специальные / Ю.А. Гольфанд // Доклады АН СССР. – 1948. – Т. 60, № 8. – С. 1313–1315.
7. Беркович, Я.Г. О конечных группах с перестановочными подгруппами / Я.Г. Беркович, Э.М. Пальчик // Сибирск. матем. ж. – 1967. – Т. 8, № 4. – С. 741–753.
8. Пальчик, Э.М. О подгруппах Шмидта простых неабелевых конечных K -групп / Э.М. Пальчик, О.В. Голубева // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3 (16). – С. 138–144.
9. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.
10. Lennox, J.C. Subnormal subgroups of groups / J.C. Lennox, E. Stewart. – Oxford: Clarendon press, 1987. – 253 p.
11. Glauberman, G. Factorizations in local subgroups of finite groups / G. Glauberman // Regional conf. series in Math. № 33 Amer. Math. Soc. Providence. – 1977. – 74 p.
12. Монахов, В.С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов // Сборник «Конечные группы». – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 70–100.
13. Башун, С.Ю. $3'$ -подгруппы Шмидта четного порядка в конечных группах / С.Ю. Башун // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. н. – 2013. – № 1. – С. 57–63.
14. Arad, Z. On the finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 86, № 2. – P. 522–548.
15. Княгина, В.Н. О существовании подгрупп Шмидта в конечных неразрешимых группах / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь «НИРС 2002». – Минск. – 2003. – С. 322–325.
16. Беркович, Я.Г. Условие, необходимое для совпадения группы с коммутантом / Я.Г. Беркович // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1968. – № 8 (75). – С. 14–18.
17. Княгина, В.Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.

Поступила в редакцию 28.03.18.

УДК 517.929

ПРИЗНАК ОТСУТСТВИЯ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.С. Белокурский¹, А.К. Деменчук²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Институт математики НАН Беларуси, Минск

THE CONDITION OF THE ABSENCE OF STRONGLY IRREGULAR PERIODIC SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF TWO LINEAR DISCRETE PERIODIC EQUATIONS

M.S. Belokursky¹, A.C. Demenchuk²

¹F. Scorina Gomel State University

²Institute of Mathematics of NAS of Belarus, Minsk

Получено необходимое условие существования сильно нерегулярных периодических решений системы двух линейных дискретных периодических уравнений.

Ключевые слова: сильно нерегулярное периодическое решение, линейная дискретная система, периодическое уравнение.

The necessary condition under which the system of two linear discrete periodic equations has strongly irregular periodic solutions was obtained.

Keywords: strongly irregular periodic solution, linear discrete system, periodic equation.

Введение

Пусть \mathbb{N} , \mathbb{Z} и \mathbb{R} – соответственно множества натуральных, целых и действительных чисел, $z = (z_n) = (z(n))$ ($n \in \mathbb{N}$) – l -мерная векторная функция (последовательность), определенная на \mathbb{N} со значениями в \mathbb{R}^l , т. е. $z: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^l$. Множество таких последовательностей обозначим через S^l . Следуя [1, с. 69] введем следующее

Определение 0.1. Последовательность $z \in S^l$ называется периодической с периодом $\omega \in \mathbb{N}$ (ω -периодической), если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $z_{n+\omega} = z_n$.

Естественно, что если число ω – период последовательности z , то его кратные также будут периодами этой последовательности, т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n + m\omega > 0$ имеем $z(n + m\omega) = z(n)$. Поэтому в дальнейшем под периодом последовательности, как правило, будем понимать наименьший из периодов. В таком случае, в частности, всякая постоянная скалярная последовательность будет 1-периодической. Множество l -мерных ω -периодических последовательностей обозначим через PS_{ω}^l .

Периодические последовательности при определенных условиях могут быть решениями дискретных (разностных) систем. Проблеме существования и построения периодических решений дискретных уравнений и систем посвящено

достаточно большое количество работ [1]–[4] и др. В указанных работах в основном изучались решения, период которых совпадает с периодом самого уравнения. Хотя полученные в этом направлении результаты во многом аналогичны соответствующим результатам для обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее, в некоторых случаях имеются значительные различия. Отметим одно из них.

1 Пример дискретного уравнения и дискретной линейной системы с сильно нерегулярным периодическим решением

Как известно [5], [6] и др., нелинейное скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение не имеет отличных от постоянных периодических решений таких, что периоды решения и уравнения несоизмеримы. Более того, Н.П. Еругин в работе [7] доказал, что такого рода решения отсутствуют у линейной нестационарной периодической системы двух уравнений. Представляется интересным исследовать подобные вопросы для дискретных уравнений и систем. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= X(x_n, y_n, n), \quad y_{n+1} = Y(x_n, y_n, n), \\ n &\in \mathbb{N}, \quad \text{col}(x, y) \in S^2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

правая часть которой является ω -периодической, т. е. существует такое наименьшее $\omega \in \mathbb{N}$, что для любого фиксированного $n_0 \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$X(x_{n_0}, y_{n_0}, n + \omega) = X(x_{n_0}, y_{n_0}, n),$$

$$Y(x_{n_0}, y_{n_0}, n + \omega) = Y(x_{n_0}, y_{n_0}, n)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Далее под периодом системы вида (1.1) будем понимать период её правой части.

По аналогии с [8] введем следующее

Определение 1.1. Периодическое решение с периодом Ω системы (1.1) такое, что числа ω и Ω взаимно просты, будем называть сильно нерегулярным.

Предварительно отметим, что в работе [9] А.В. Ласунским показано следующее: при определенных условиях скалярное дискретное уравнение может допускать сильно нерегулярное периодическое решение. Действительно, пусть σ – произвольное нечетное число и $(h_n) \in PS_\sigma^1$.

Возьмем дискретное уравнение

$$x_{n+1} = -x_n - (1 - x_n^2)h_n. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) имеет решение

$$x_n = (-1)^n \quad (1.3)$$

с периодом $\Omega = 2$. Поскольку числа σ и Ω взаимно просты, то согласно определению 1.1 периодическое решение (1.3) уравнения (1.2) является сильно нерегулярным.

Таким образом, теорема Массера [5] об отсутствии сильно нерегулярных периодических решений у скалярного обыкновенного уравнения для разностных уравнений, вообще говоря, для дискретных уравнений полного аналога не имеет. В связи с этим возникает задача реализации аналога упомянутой теоремы Массера для более узких классов уравнений. В работе [10] получен аналог упомянутой теоремы Массера для линейных разностных уравнений. В частности, показано, что скалярное линейное однородное периодическое нестационарное дискретное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, отличные от постоянных.

Вполне естественно поставить вопрос для двумерного случая: имеет ли место аналог отмеченной выше теоремы Н.П. Еругина в двумерном случае том случае, когда система (1.1) линейная

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_n x_n + b_n y_n, & y_{n+1} &= c_n x_n + d_n y_n, \\ n &\in \mathbb{N}, & x &\in S^1, & y &\in S^1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

является ω -периодической, т. е. $A(n + \omega) = A(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и хотя бы один из её элементов отличен от постоянной? Как показывает следующий пример, ответ на этот вопрос, вообще говоря, является отрицательным. Действительно, возьмем линейную дискретную систему

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_n + b_n y_n, & y_{n+1} &= d_n y_n, \\ n &\in \mathbb{N}, & (b_n) &\in PS_\omega^1, & (d_n) &\in PS_\omega^1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где хотя бы один из коэффициентов (b_n) , (d_n) отличен от постоянного, т. е. $\omega \geq 2$, и наибольший общий делитель чисел 2 и ω равен 1. Система (1.5) имеет периодическое решение

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Период решения (1.6) является взаимно простым с периодом системы (1.5).

Таким образом, теорема Н.П. Еругина об отсутствии у линейной системы двух дифференциальных уравнений отличного от постоянного периодического решения, период которого несоизмерим с периодом коэффициентов самой системы, в общем случае аналога для дискретных систем не имеет. Поэтому целью настоящей заметки является выделение классов линейных двумерных дискретных систем, у которых отсутствуют сильно нерегулярные периодические решения.

2 Необходимое условие существования сильно нерегулярных периодических решений системы двух линейных дискретных периодических уравнений

В дальнейшем будем говорить, что столбцы $H^{(1)}(n), \dots, H^{(k)}(n)$ некоторой матрицы $H(n)$, $n \in \mathbb{N}$ линейно независимы, если тождество

$$\begin{aligned} \alpha_1 H^{(1)}(n) + \dots + \alpha_k H^{(k)}(n) &\equiv 0, \\ n &\in \mathbb{N}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

выполняется в том и только том случае, когда $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Через $\text{rank}_{\text{col}} H$ обозначим столбцовый ранг матрицы $H(n)$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. наибольшее число её линейно независимых столбцов.

Допустим, что система (1.4) имеет сильно нерегулярное Ω -периодическое решение

$$\begin{aligned} x_n &= \varphi_n, & y_n &= \psi_n, & \varphi(n + \Omega) &= \varphi(n), \\ \psi(n + \Omega) &= \psi(n), & n &\in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где числа ω и Ω взаимно просты и $\Omega \geq 2$. Это означает, что выполняются тождества

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &\equiv a_n \varphi_n + b_n \psi_n, \\ \psi_{n+1} &\equiv c_n \varphi_n + d_n \psi_n, & n &\in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как тождества (2.2) справедливы для всех $n \in \mathbb{N}$, то верны также тождества

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1+\Omega} &\equiv a_{n+\Omega} \varphi_{n+\Omega} + b_{n+\Omega} \psi_{n+\Omega}, \\ \psi_{n+1+\Omega} &\equiv c_{n+\Omega} \varphi_{n+\Omega} + d_{n+\Omega} \psi_{n+\Omega}, & n &\in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В силу Ω -периодичности функций φ_n , ψ_n тождества (2.3) принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &\equiv a_{n+\Omega} \varphi_n + b_{n+\Omega} \psi_n, \\ \psi_{n+1} &\equiv c_{n+\Omega} \varphi_n + d_{n+\Omega} \psi_n, & n &\in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из тождеств (2.2), (2.4) вытекают тождества

$$\begin{aligned} (a_{n+\Omega} - a_n) \varphi_n + (b_{n+\Omega} - b_n) \psi_n &\equiv \\ \equiv p^{(11)}(n) \varphi_n + p^{(12)}(n) \psi_n &\equiv 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} (c_{n+\Omega} - c_n) \varphi_n + (d_{n+\Omega} - d_n) \psi_n &\equiv \\ \equiv p^{(21)}(n) \varphi_n + p^{(22)}(n) \psi_n &\equiv 0, & n &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Образуем матрицу

$$P(n) = \begin{bmatrix} p^{(11)}(n) & p^{(12)}(n) \\ p^{(21)}(n) & p^{(22)}(n) \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $P^{(j)}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$ столбцы этой матрицы. Так как $P(n) = A(n + \Omega) - A(n)$ и $A(n + \omega) \equiv A(n)$, $n \in \mathbb{N}$, то матричная функция P является ω -периодической.

Покажем, что столбцы $P^{(1)}(n)$ и $P^{(2)}(n)$ матрицы $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ линейно зависимы, т. е. найдутся такие $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, что $\alpha_0 P^{(1)}(n) + \beta_0 P^{(2)}(n) \equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно предположению хотя бы одна из функций $x = \varphi$, $y = \psi$ – нестационарна. Поэтому существует $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого выполняется неравенство $\varphi_{n_0}^2 + \psi_{n_0}^2 \neq 0$. Из тождеств (2.5) вытекает справедливость равенств

$$\varphi_{n_0+m\Omega} P^{(1)}(n_0+m\Omega) + \psi_{n_0+m\Omega} P^{(2)}(n_0+m\Omega) = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

из которых на основании Ω -периодичности функций φ , ψ получаем равенства

$$\varphi_{n_0} P^{(1)}(n_0+m\Omega) + \psi_{n_0} P^{(2)}(n_0+m\Omega) = 0, \quad (2.6) \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как матрица P имеет период ω , то равенства (2.6) можно записать в виде

$$\varphi_{n_0} P^{(1)}(n_0+m\Omega+k\omega) + \psi_{n_0} P^{(2)}(n_0+m\Omega+k\omega) = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Поскольку k, m – произвольные натуральные числа и $\text{НОД}(\omega, \Omega) = 1$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие k, m , что выполняется равенство $n = n_0 + m\Omega + k\omega$. Поэтому при $k, m \in \mathbb{N}$ имеем $P^{(j)}(n_0 + m\Omega + k\omega) = P^{(j)}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$. Следовательно, из равенств (2.7) вытекает тождество

$$\varphi_{n_0} P^{(1)}(n) + \psi_{n_0} P^{(2)}(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

В силу того, что $\varphi_{n_0}^2 + \psi_{n_0}^2 \neq 0$, тождество (2.8) означает, что столбцы матрицы $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ линейно зависимы.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если система (1.4) имеет отличное от стационарного периодическое решение такое, что период решения взаимно прост с периодом системы, то столбцы матрицы $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ линейно зависимы.

Следствие. Если матрица $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ имеет полный столбцовый ранг, т. е. $\text{rank}_{\text{col}} P = 2$, то нестационарные сильно нерегулярные периодические решения у системы (1.4) отсутствуют.

Замечание 2.1. Дискретная периодическая система (1.5) имеет сильно нерегулярное

2-периодическое решение (1.6). Матрица $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ для этой системы имеет вид

$$P(n) = \begin{bmatrix} 0 & b(n+2) - b(n) \\ 0 & d(n+2) - d(n) \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Столбцы этой матрицы линейно зависимы и её столбцовый ранг в общем случае равен единице.

Замечание 2.2. В общем случае линейная зависимость столбцов и строк дискретной матрицы не эквивалентны. Это, в частности, подтверждается примером (2.9), где строки матрицы могут быть линейно зависимыми только при

$$b(n+2) - b(n) \equiv l(d(n+2) - d(n)), \quad l \in \mathbb{R}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Agarwal, R.P. Difference equations and inequalities: theory, methods and applications / R.P. Agarwal. – New York: Marcel Dekker, 1992. – 971 p.
2. Agarwal, R.F. Periodic Solutions of First Order Linear Difference Equations / R.F. Agarwal, J. Pospenda // Math. Comput. Model. – 1995. – Vol. 22, № 1. – P. 11–19.
3. Janglajew, K.R. Periodicity of solutions of non-homogeneous linear difference equations / K.R. Janglajew, E.L. Schmeidel // Advances in Difference Equations. – 2012. – Vol. 2012, № 1. – P. 195–205.
4. Elaydi, S. An introduction to difference equations / S. Elaydi // New York: Springer, 2005. – 539 p.
5. Massera, J.L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J.L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – Vol. 4, № 1. – P. 37–45.
6. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.
7. Еругин, Н.П. О периодических решениях линейной однородной системы дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин // Докл. АН БССР. – 1962. – Т. 6, №7. – С. 407–410.
8. Деменчук, А.К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. / А.К. Деменчук. – Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2012. – 186 с.
9. Ласунский, А.В. О периоде решений дискретного периодического логистического уравнения / А.В. Ласунский // Труды Карельского научного центра РАН. – 2012. – № 5. – С. 44–48.
10. Деменчук, А.К. О сильно нерегулярных периодических решениях линейного однородного дискретного уравнения первого порядка / А.К. Деменчук // Доклады НАН Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 3. – С. 263–267.

Работа выполнена в рамках Отдельного проекта фундаментальных и прикладных научных исследований НАН Беларуси «Исследование свойств спектров дискретных систем при возмущениях их коэффициентов».

Поступила в редакцию 16.07.18.

УДК 512.548

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия

PERMUTABILITY OF ELEMENTS IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies

Изучается перестановочность элементов в полиадических группоидах с полиадической операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется на k -ой декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η .

Ключевые слова: полугруппа, полиадическая операция, полуабелевость, нейтральная последовательность.

The permutability of elements in polyadic groupoids with polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$, which is determined on a k -th Cartesian power A^k of n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ with the substitution σ of the set $\{1, \dots, k\}$ and n -ary operation η is studied.

Keywords: semigroup, polyadic operation, semiabelianness, neutral sequence.

Введение

Полиадическим группоидом специального вида мы называем универсальную алгебру $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с одной l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s(n-1) + 1$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η . Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ первоначально была определена в [1]. Там же было доказано, что если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной. Частным случаем ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -ой декартовой степени A^k полугруппы A . Изучению операции $[\]_{l, \sigma, k}$ и некоторых её обобщений посвящена книга [3]. Частные случаи этой l -арной операции изучал Э. Пост в [4]. В качестве полугруппы A он рассматривал либо симметрическую группу, либо полную линейную группу над полем комплексных чисел. При этом n -арность полиадической операции и число k были связаны равенством $l = k + 1$, а роль подстановки σ в обоих случаях играл цикл $(12 \dots k)$.

В данной статье изучается связь между перестановочностью элементов в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ и перестановочностью элементов в l -арной полугруппе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

1 Операция $\eta_{s, \sigma, k}$

Определение 1.1 [1]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \\ &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{-1}(1)}), \dots \\ &\dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{-1}(k)})), \end{aligned} \quad (1.1)$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \\ &\eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \\ &\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(n-1)+1})) \dots)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ясно, что n -арная операция $\eta_{1, \sigma, k}$ совпадает с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$ при $s = 1$.

Явный вид l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ описывается следующей

Теорема 1.1 [1]. Если

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}), \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= (y_1, \dots, y_k), \end{aligned}$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -я компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{-n-2}(j)} \\ &\eta(x_{n\sigma^{-n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1)\sigma^2(n-1)-j)}) \eta(\dots \\ &\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots \\ &\dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \dots)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Замечание 1.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (1.3) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Если η – бинарная операция, обозначаемая символом \circ , то бинарная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с бинарной операцией $\overset{\sigma}{\circ}$, а l -арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ – с l -арной операцией $[]_{l,\sigma,k}$ из [3]. При этом $l = s + 1$, а равенства (1.1), (1.2) и (1.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_2 &= (x_{11}, \dots, x_{1k}) \overset{\sigma}{\circ} (x_{21}, \dots, x_{2k}) = \\ &= (x_{11}x_{2\sigma(1)}, \dots, x_{1k}x_{2\sigma(k)}), \\ &= [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_k]_{l,\sigma,k} = \\ &= \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l) \dots))), \\ y_j &= x_{1j}(x_{2\sigma(j)} (\dots (x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \dots))). \end{aligned}$$

Для сокращения записей в правой части последнего равенства символ операции $\overset{\sigma}{\circ}$ не указан. Для ассоциативной бинарной операции $\overset{\sigma}{\circ}$ это же равенство может быть переписано следующим образом

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Именно таким равенством в [3, определение 3.1.4] была определена l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ на k -ой декартовой степени полугруппы A .

Таким образом, l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ из [3], определенная на k -ой декартовой степени полугруппы, является частным случаем l -арной операции $[]_{l,\sigma,k}$ из [5], определенной на k -ой декартовой степени группоида. Последняя операция, в свою очередь, является частным случаем l -арной операции из определения 1.1, определенной на k -ой декартовой степени n -арного группоида.

Изучению некоторых свойств операции $\eta_{s,\sigma,k}$ посвящены статьи [6], [7].

Замечание 1.2. Частным случаем l -арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является и n -арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], которая совпадает с n -арной операцией $\eta_{1,(12 \dots n-1),n-1}$.

Имеет место

Теорема 1.2 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.

Теорема 1.3 [8]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная группа.

2 Перестановочность элементов в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$

Напомним, что n -арный группоид $\langle A, [] \rangle$ называют:

абелевым, если в нём для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$[x_1x_2 \dots x_n] = [x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}]; \quad (2.1)$$

полуабелевым, если в нём выполняется тождество

$$[xx_1 \dots x_{n-2}y] = [yx_1 \dots x_{n-2}x]. \quad (2.2)$$

Заметим, что абелевы и полуабелевы n -арные операции впервые появились у Дёрнте [9] при изучении n -арных групп.

При $n = 2$ понятия абелевости и полуабелевости совпадают, так как в этом случае тождества (2.1) и (2.2) принимают вид $xu = ux$.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют:

нейтральной в нём, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1}x] = [xe_1 \dots e_{n-1}] = x;$$

левой нейтральной в нём, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1}x] = x;$$

правой нейтральной в нём, если для любого $x \in A$ верно

$$[xe_1 \dots e_{n-1}] = x.$$

Предложение 2.1. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ является полуабелевым тогда и только тогда, когда полуабелев n -арный группоид $\langle A^k, \eta_{1,\sigma,k} \rangle$.

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{i(n-1)}) \in A^k, i = 1, \dots, n.$$

Так как n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ – полуабелев, то, учитывая определение операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{n-1} , получим

$$\begin{aligned} \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{n-1} \mathbf{x}_n) &= \\ &= \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(1)} x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots \\ &\dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(k)} x_{n\sigma^{n-1}(k)})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(1)} x_{n1}), \dots \\ &\dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(k)} x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{n1}x_{2\sigma(1)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(1)} x_{11}), \dots \\ &\dots, \eta(x_{nk}x_{2\sigma(k)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(k)} x_{1k})) = \\ &= (\eta(x_{n1}x_{2\sigma(1)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(1)} x_{1\sigma^{n-1}(1)}), \dots \\ &\dots, \eta(x_{nk}x_{2\sigma(k)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(k)} x_{1\sigma^{n-1}(k)})) = \\ &= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{n-1} \mathbf{x}_1), \end{aligned}$$

то есть

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{n-1} \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{n-1} \mathbf{x}_1).$$

Следовательно, n -арный группоид $\langle A^k, \eta_{1,\sigma,k} \rangle$ является полуабелевым.

Достаточность. Пусть x_1, \dots, x_n – произвольные элементы из A . Положим

$$\mathbf{y}_i = (\underbrace{x_i, \dots, x_i}_k) \in A^{n-1}, i = 1, \dots, n,$$

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_{n-1} \mathbf{y}_n) = (g_1, \dots, g_{n-1}),$$

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{y}_n \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_{n-1} \mathbf{y}_1) = (h_1, \dots, h_{n-1}).$$

Так как n -арный группоид $\langle A^k, \eta_{1,\sigma,k} \rangle$ является полуабелевым, то

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_{n-1} \mathbf{y}_n) = \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{y}_n \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_{n-1} \mathbf{y}_1),$$

откуда $g_i = h_i$, где

$$g_i = \eta(x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n), h_i = \eta(x_nx_2 \dots x_{n-1}x_1).$$

Следовательно, в n -арном группоиде $\langle A, \eta \rangle$ выполняется тождество

$\eta(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n) = \eta(x_n x_2 \dots x_{n-1} x_1)$,
 что означает его полуабелевость. \square

Замечание 2.1. При доказательстве достаточности предложения 2.1 тождественность подстановки σ^{n-1} не использовалась.

Так как, согласно замечанию 1.2, n -арная операция $\tilde{\eta}$ совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, (12 \dots n-1), n-1}$, то полагая в предложении 2.1 $k = n - 1$, $\sigma = (12 \dots n - 1)$, получим

Следствие 2.1 [3, Предложение 5.1.12]. n -Арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ является полуабелевым тогда и только тогда, когда полуабелев n -арный группоид $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$.

Следующая теорема обобщает необходимое утверждение из формулировки предложения 2.1.

Теорема 2.1. Если n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ является полуабелевой, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная полугруппа $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ также является полуабелевой.

Доказательство. Так как $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, то согласно теореме 1.2, l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ действительно является l -арной полугруппой.

Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l, \\ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_l) &= (y_1, y_2, \dots, y_k), \\ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_l \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_1) &= (z_1, z_2, \dots, z_k), \end{aligned}$$

где, в силу замечания 1.1,

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots \\ &\dots x_{(s(n-1)\sigma^{s(n-1)-1}(j)} x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}), \\ z_j &= \eta(x_{(s(n-1)+1)j} x_{2\sigma(j)} \dots \\ &\dots x_{(s(n-1)\sigma^{s(n-1)-1}(j)} x_{1\sigma^{s(n-1)}(j)}). \end{aligned}$$

Так как σ^{l-1} – тождественная подстановка, то $\sigma^{l-1}(j) = \sigma^{s(n-1)}(j) = j$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$. Учитывая это равенство, и, используя обозначение

$$\alpha_t = x_{((t+1)(n-1)+2)\sigma^{s(n-1)+1}(j)} \dots$$

$$\dots x_{((t+1)(n-1)\sigma^{s(n-1)-1}(j)}), t = 0, 1, \dots, s - 1,$$

последние два равенства можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j} \alpha_1 x_{n\sigma^{n-1}(j)} \alpha_2 x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)} \alpha_3 \dots \\ &\dots \alpha_{s-2} x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \alpha_{s-1} x_{(s(n-1)+1)j}), \\ z_j &= \eta(x_{(s(n-1)+1)j} \alpha_1 x_{n\sigma^{n-1}(j)} \alpha_2 x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)} \alpha_3 \dots \\ &\dots \alpha_{s-2} x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \alpha_{s-1} x_{1j}). \end{aligned}$$

В силу полуабелевости n -арной операции η , имеем

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j} \alpha_1 x_{n\sigma^{n-1}(j)} \alpha_2 x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)} \alpha_3 \dots \\ &\dots \alpha_{s-2} x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \alpha_{s-1} x_{(s(n-1)+1)j}) = \\ &= \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \alpha_1 x_{1j} \alpha_2 x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)} \alpha_3 \dots \\ &\dots \alpha_{s-2} x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \alpha_{s-1} x_{(s(n-1)+1)j}) = \\ &= \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \alpha_1 x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)} \alpha_2 x_{1j} \alpha_3 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots \alpha_{s-2} x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \alpha_{s-1} x_{(s(n-1)+1)j}) = \\ &\dots \\ &= \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \alpha_1 x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)} \alpha_2 x_{(3(n-1)+1)\sigma^{3(n-1)}(j)} \alpha_3 \dots \\ &\dots x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \alpha_{s-2} x_{(s(n-1)+1)j} \alpha_{s-1} x_{1j}) = \\ &= \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \alpha_1 x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)} \alpha_2 x_{(3(n-1)+1)\sigma^{3(n-1)}(j)} \alpha_3 \dots \\ &\dots x_{(s(n-1)+1)j} \alpha_{s-2} x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \alpha_{s-1} x_{1j}) = \\ &\dots \\ &= \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \alpha_1 x_{(s(n-1)+1)j} \alpha_2 x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)} \dots \\ &\dots \alpha_{s-2} x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \alpha_{s-1} x_{1j}) = \\ &= \eta(x_{(s(n-1)+1)j} \alpha_1 x_{n\sigma^{n-1}(j)} \alpha_2 x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)} \alpha_3 \dots \\ &\dots \alpha_{s-2} x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \alpha_{s-1} x_{1j}) = z_j, \end{aligned}$$

то есть $y_j = z_j$. Следовательно, в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ выполняется тождество

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_l) = \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_l \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{l-1} \mathbf{x}_1),$$

что означает полуабелевость l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. \square

Предложение 2.1 получается из теоремы 2.1 при $s = 1$.

Так как n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$, производная от полугруппы A , в которой выполняется тождество

$$xx_1 \dots x_{n-2}y = yx_1 \dots x_{n-2}x,$$

является полуабелевой, то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, производная от полугруппы A , в которой выполняется тождество

$$xx_1 \dots x_{n-2}y = yx_1 \dots x_{n-2}x,$$

подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l -арная полугруппа $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуабелевой.

Теорема 2.2. Если n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой нейтральной последовательностью, то из полуабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ следует полуабелевость n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$.

Доказательство. Пусть $x, x_2, \dots, x_{n-1}, y$ – произвольные элементы из A , $e_1 \dots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$. Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\underbrace{x, \dots, x}_k), \mathbf{x}_2 = (\underbrace{x_2, \dots, x_2}_k), \dots \\ \dots, \mathbf{x}_{n-1} &= (\underbrace{x_{n-1}, \dots, x_{n-1}}_k), \mathbf{y} = (\underbrace{y, \dots, y}_k), \\ \mathbf{x}_n &= \mathbf{x}_{2(n-1)+1} = \dots = \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_k), \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_{2(n-1)+2} = \dots = \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+2} = (\underbrace{e_2, \dots, e_2}_k), \\ &\dots \\ \mathbf{x}_{2(n-1)} &= \mathbf{x}_{3(n-1)} = \dots = \mathbf{x}_{s(n-1)} = (\underbrace{e_{n-1}, \dots, e_{n-1}}_k). \end{aligned}$$

Так как l -арная полугруппа $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева, то

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(xx_2 \dots x_{s(n-1)}y) &= \eta_{s, \sigma, k}(yx_2 \dots x_{s(n-1)}x), \\ \text{откуда, в силу (1.3), имеем} \\ \eta(xx_2 \dots x_{n-1} \underbrace{\eta(e_1 \dots e_{n-1} \eta(\dots \eta(e_1 \dots e_{n-1}y) \dots))}_{s-1}) &= \\ = \eta(yx_2 \dots x_{n-1} \underbrace{\eta(e_1 \dots e_{n-1} \eta(\dots \eta(e_1 \dots e_{n-1}x) \dots))}_{s-1}), \end{aligned}$$

откуда, используя левую нейтральность последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$, получим

$$\eta(xx_2 \dots x_{n-1}y) = \eta(yx_2 \dots x_{n-1}x).$$

Последнее равенство, ввиду произвольного выбора элементов $x, x_2, \dots, x_{n-1}, y \in A$, означает полуабелевость n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$. \square

Если в теореме 2.2 n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ является n -арной полугруппой, обладающей правой нейтральной последовательностью, то в силу замечания 1.1, предпоследнее равенство из доказательства теоремы 2.2 имеет вид

$$\begin{aligned} \eta(xx_2 \dots x_{n-1} \underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} y) &= \\ = \eta(yx_2 \dots x_{n-1} \underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} x), \end{aligned}$$

откуда, используя правую нейтральность последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$, получим

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(xx_2 \dots (x_{n-1} \underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}) y) = \\ = \eta(yx_2 \dots (x_{n-1} \underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}) x), \\ \eta(xx_2 \dots x_{n-1}y) &= \eta(yx_2 \dots x_{n-1}x). \end{aligned}$$

Поэтому имеет место

Теорема 2.3. Если n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, то из полуабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ следует полуабелевость n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$.

Так как в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$, производной от полугруппы A с единицей (левой единицей, правой единицей) e , последовательность $\underbrace{e \dots e}_{n-1}$ является нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной), то из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, производная от полугруппы A с единицей (левой единицей, правой единицей). Тогда из полуабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ следует полуабелевость n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$.

3 Критерии полуабелевости

Теоремы 1.2, 2.1 и 2.3 позволяют сформулировать следующий критерий полуабелевости l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 3.1. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной,

правой нейтральной) последовательностью, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то она удовлетворяет и условию $\sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$. Поэтому из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Любой цикл σ длины $n-1$ из S_k , где $n-1 \leq k$, удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, а значит и условию $\sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$. Поэтому полагая в теореме 3.1 или в следствии 3.1 σ – цикл длины $n-1$, получим

Следствие 3.2. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, σ – цикл длины $n-1$ из S_k , где $n-1 \leq k$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Полагая в следствии 3.2 $k = n-1$, получим

Следствие 3.3. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, σ – цикл длины $n-1$ из S_{n-1} . Тогда $\langle A^{n-1}, \eta_{s, \sigma, n-1} \rangle$ – l -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Полагая в следствии 3.3 $\sigma = (12 \dots n-1)$, получим

Следствие 3.4. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью. Тогда $\langle A^{n-1}, \eta_{s, (12 \dots n-1), n-1} \rangle$ – l -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Полагая в теореме 3.1 и следствиях 3.1–3.4 $n = 3$, получим ещё три следствия.

Следствие 3.5. Пусть тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – $(2s+1)$ -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Следствие 3.6. Пусть тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, подстановка $\sigma \in S_k$ имеет порядок 2.

Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle - (2s + 1)$ -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Следствие 3.7. Пусть тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, $\sigma -$ транспозиция из S_k . Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle - (2s + 1)$ -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Следствие 3.8. Пусть тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью. Тогда $\langle A^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle - (2s + 1)$ -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда тернарная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Так как в бинарных группоидах понятия абелевости и полуабелевости совпадают, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.9. Пусть полугруппа A обладает единицей (левой единицей, правой единицей), подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle - l$ -арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A абелева.

Замечание 3.1. Следствие 3.9 для полугруппы A с единицей доказано в [3, Предложение 3.5.4].

Так как всякая n -арная группа обладает нейтральными последовательностями, то для n -арных групп теоремы 2.3 и 3.1 формулируются следующим образом. При этом при формулировке теоремы 3.3 учитывалась теорема 1.3.

Теорема 3.2. Если $\langle A, \eta \rangle - n$ -арная группа, то из полуабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ следует полуабелевость n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$.

Теорема 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle - n$ -арная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle - l$ -арная группа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ полуабелева.

Для теоремы 3.3 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 3.1–3.9.

Например, используя следствие из теоремы 3.3 для случая $n = 3$, получим следующие два примера.

Пример 3.1. Пусть $T_3 -$ множество всех нечётных подстановок на трёх символах. Определим на T_3 тернарную операцию $\eta(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$. Тогда $\langle T_3, \eta \rangle -$ полуабелева тернарная группа третьего порядка, не являющаяся абелевой [10]. Согласно теореме 3.3, для любого $s \geq 1$ универсальная алгебра $\langle T_3^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$ является полуабелевой $(2s + 1)$ -арной группой девятого порядка. В частности, $\langle T_3^2, \eta_{1, (12), 2} \rangle -$ полуабелева тернарная группа девятого порядка.

Пример 3.2. Пусть $D_n -$ диэдральная группа, $B_n -$ подмножество всех её отражений. Определим на B_n тернарную операцию $\eta(\varphi\psi\theta) = \varphi\psi\theta$. Тогда $\langle B_n, \eta \rangle -$ полуабелева тернарная группа порядка n , не являющаяся абелевой [10]. Согласно теореме 3.3, для любого $s \geq 1$ универсальная алгебра $\langle B_n^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$ является полуабелевой $(2s + 1)$ -арной группой порядка n^2 . В частности, $\langle B_n^2, \eta_{1, (12), 2} \rangle -$ полуабелева тернарная группа порядка n^2 .

4 Критерии не n -полуабелевости

Пусть $l = s(n - 1) + 1, s \geq 1$. l -Арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ называется n -полуабелевым, если в нём для любых $t = 0, 1, \dots, s - 1$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 \dots x_{i(n-1)} x_{i(n-1)+1} x_{i(n-1)+2} \dots x_{(t+1)(n-1)} \\ & \quad x_{(t+1)(n-1)+1} x_{(t+1)(n-1)+2} \dots x_{s(n-1)+1}) = \\ & = \eta(x_1 \dots x_{i(n-1)} x_{(t+1)(n-1)+1} x_{i(n-1)+2} \dots \\ & \quad \dots x_{(t+1)(n-1)} x_{i(n-1)+1} x_{(t+1)(n-1)+2} \dots x_{s(n-1)+1}). \end{aligned}$$

Если положить

$$\alpha_i = x_{(t-1)(n-1)+2} \dots x_{i(n-1)}, i = 1, \dots, s,$$

то последнее тождество можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} & [x_1 \alpha_1 x_n \dots x_{(t-1)(n-1)+1} \alpha_t x_{(n-1)+1} \\ & \quad \alpha_{t+1} x_{(t+1)(n-1)+1} \alpha_{t+2} \dots \alpha_s x_l] = \\ & = [x_1 \alpha_1 x_n \dots x_{(t-1)(n-1)+1} \alpha_t x_{(t+1)(n-1)+1} \\ & \quad \alpha_{t+1} x_{i(n-1)+1} \alpha_{t+2} \dots \alpha_s x_l]. \end{aligned}$$

Понятно, что l -полуабелевые l -арные группоиды – это в точности полуабелевые l -арные группоиды, а 2-полуабелевые l -арные группоиды – это в точности абелевы l -арные группоиды.

n -Полуабелевы полиадические операции впервые появились у Э. Поста [4] при изучении полиадических групп.

Полиадический группоид, не являющийся n -полуабелевым, будем называть также не n -полуабелевым.

Проведя соответствующие вычисление, можно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 4.1. Всякий n -полуабелевый l -арный группоид является полуабелевым.

В связи с предложением 4.1 возникает вопрос: существуют ли полуабелевы l -арные группоиды вида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, не являющиеся n -полуабелевыми?

Для положительного ответа на этот вопрос нам понадобятся две теоремы из [11].

Теорема 4.1 [11]. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$ и отличным от e_{n-1} элементом, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Теорема 4.2 [11]. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой нейтральной последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$ и отличным от e_1 элементом,

подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Эти теоремы и теорема 3.1 позволяют сформулировать следующие две теоремы.

Теорема 4.3. Пусть полуабелева n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$ и отличным от e_{n-1} элементом, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева, но не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Теорема 4.4. Пусть полуабелева n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой нейтральной последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$ и отличным от e_1 элементом, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева, но не n -полуабелева l -арная полугруппа.

В n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ для любого её элемента a существуют такие элементы u и v , что последовательности

$$\underbrace{u a \dots a}_{n-2}, \underbrace{a \dots a v}_{n-2}$$

являются нейтральными. Поэтому к n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$, обладающей различными элементами a и b , применима как теорема 4.3 ($\underbrace{u a \dots a}_{n-2}$ рассматривается как правая нейтральная последовательность), так и теорема 4.4 ($\underbrace{a \dots a v}_{n-2}$ рассматривается как левая нейтральная последовательность).

Таким образом, для n -арных групп имеет место

Теорема 4.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – полуабелева неоднородная n -арная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева, но не n -полуабелева l -арная группа.

Пример 4.1. Пусть $\langle T_3^2, \eta_{1, (12), 2} \rangle$ – полуабелева тернарная группа девятого порядка из примера 3.1. Считая в определении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$

$A = T_3^2, \eta = \eta_{1, (12), 2}, n = 3, k = 4, \sigma = (1234) \in S_4$, определим на $(T_3^2)^4$ $(2s + 1)$ -арную операцию $\eta_{s, (1234), 4}$.

Если $s = 2t$, где $t \geq 1$, то
 $(1234)^{2s+1} = (1234)^{4t+1} = (1234)$.

А так как, кроме того, $(1234)^3 \neq (1234)$, то согласно теореме 4.5, универсальная алгебра $\langle (T_3^2)^4, \eta_{2t, (1234), 4} \rangle$ является полуабелевой $(4t + 1)$ -арной группой порядка 3^8 , не являющейся 3-полуабелевой. В частности, $\langle (T_3^2)^4, \eta_{2, (1234), 4} \rangle$ – полуабелева 5-арная группа порядка 6561, не являющаяся 3-полуабелевой.

Пример 4.2. Пусть $\langle B_n^2, \eta_{1, (12), 2} \rangle$ – полуабелева тернарная группа порядка n^2 из примера 3.2. Считая в определении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$
 $A = B_n^2, \eta = \eta_{1, (12), 2}, n = 3, k = 4, \sigma = (1234) \in S_4$, определим на $(B_n^2)^4$ $(2s + 1)$ -арную операцию $\eta_{s, (1234), 4}$. Тогда для любого $t \geq 1$ по теореме 4.5, $\langle (B_n^2)^4, \eta_{2t, (1234), 4} \rangle$ – полуабелева $(4t + 1)$ -арная группа порядка n^8 , не являющаяся 3-полуабелевой. В частности, $\langle (B_n^2)^4, \eta_{2, (1234), 4} \rangle$ – полуабелева 5-арная группа порядка n^8 , не являющаяся 3-полуабелевой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.
2. Гальмак, А.М. Многочестные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Гальмак, А.М. Об операции $[\]_{l, \sigma, k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – Могилев. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.
6. Русаков, А.Д. О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ / А.Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 68–72.
7. Русаков, А.Д. Новые критерии ассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ / А.Д. Русаков, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 76–79.
8. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – Могилев. – 2018. – № 1 (35). – С. 34–38.
9. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
10. Гальмак, А.М. Тернарные группы отражений / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 128 с.
11. Гальмак, А.М. О не n -полуабелевости полиадических группоидов специального вида / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко // XII школа-конференция по теории групп. – Тез. докл. – Геленджик, 2018. – С. 34–38.

Поступила в редакцию 04.04.18.

УДК 517.5

ЭКВИВАЛЕНТ СТРУКТУРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНОГО ПРОЦЕССА, МОДЕЛИРУЕМОГО АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Г.Н. Казимиров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

EQUIVALENT OF THE STRUCTURAL CHARACTERISTIC OF A COMPLEX PROCESS MODELED BY ALGEBRAICAL POLYNOMIALS

G.N. Kazimirov

F. Scorina Gomel State University

Доказывается эквивалентность обобщённого модуля гладкости, определяемого при помощи оператора обобщённого сдвига типа Якоби и K -функционала Петре.

Ключевые слова: оператор обобщённого сдвига Якоби, обобщённый модуль гладкости, K -функционал.

The equivalence of the generalized modulus of smoothness defined by the generalized shift operator of Jacobi type and the K -functional of Petre is proved.

Keywords: generalized Jacobi shift operator, generalized modulus of smoothness, K -functional.

Введение

Для 2π -периодических функций хорошо известны прямая и обратная теоремы теории приближений о связи между модулями гладкости и их наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами. При рассмотрении непериодических функций уже не удаётся получить такие же связи между модулями гладкости функции и её наилучшими приближениями алгебраическими многочленами. Однако, если обычный модуль гладкости заменить некоторым обобщённым модулем гладкости, то остаются справедливыми прямая и обратная теоремы теории приближений. Некоторые из таких обобщённых модулей были предложены М.К. Потаповым. В настоящей работе рассматривается один из таких обобщённых модулей гладкости и доказывается его эквивалентность K -функционалу. С помощью этой эквивалентности, следуя методу K -функционала, введённому Я. Петре, легко доказываются прямая и обратная теоремы теории приближений.

1 Основные определения

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_p = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$, а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f , что

$$f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \in L_p \text{ и}$$

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p.$$

Для $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$ определим оператор обобщённого сдвига

$$T(f, x, \nu, \mu) = \frac{1}{\gamma(\nu, \mu)} \int_0^1 \int_{-1}^1 f(x \cos t + yz \sin t \sqrt{1-x^2} - (1-y^2)(1-x) \sin^2 \frac{t}{2}) \times \\ \times (1-y^2)^{\nu-\mu-1} y^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dz dy,$$

$$\text{где } \gamma(\nu, \mu) = \int_0^1 \int_{-1}^1 (1-y^2)^{\nu-\mu-1} y^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dz dy.$$

Введём обозначения ($r = 2, 3, \dots$):

$$\Delta_h^1(f, x, \nu, \mu) = T_h(f, x, \nu, \mu) - f(x),$$

$$\Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x, \nu, \mu) = \Delta_{h_r}^1(\Delta_{h_1, \dots, h_{r-1}}^{r-1}(f, x, \nu, \mu), x, \nu, \mu),$$

$$\tilde{\omega}_r(f, \delta, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|h_i| \leq \delta, i=1, \dots, r} \|\Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x, \nu, \mu)\|_{p,\alpha,\beta},$$

$$D_{x,\nu,\mu} = (1-x)^{-\nu} (1+x)^{-\mu} \frac{d}{dx} (1-x)^{\nu+1} (1+x)^{\mu+1} \frac{d}{dx},$$

$$D_{x,\nu,\mu}^0 = I,$$

где I – тождественный оператор, $D_{x,\nu,\mu}^1 = D_{x,\nu,\mu}$ и для $k = 2, 3, \dots$ $D_{x,\nu,\mu}^k = D_{x,\nu,\mu}^1(D_{x,\nu,\mu}^{k-1})$.

Через $AD^l(\nu, \mu)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций g , что g имеет абсолютно непрерывную на каждом $[a, b] \subset (-1, 1)$ $2r-1$ производную и $D_{x,\nu,\mu}^l g \in L_{p,\alpha,\beta}$ для $l = 0, 1, 2, \dots, r$.

Для $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ введём K -функционал Петре по формуле:

$$K_r(f, \delta, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{g \in AD^r(\nu, \mu)_{p,\alpha,\beta}} \left\{ \|f - g\|_{p,\alpha,\beta} + \delta^{2r} \|D_{x,\nu,\mu}^r g(x)\|_{p,\alpha,\beta} \right\}.$$

2 Вспомогательные утверждения

Лемма 2.1. Пусть даны числа p, ν, μ такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$. Пусть числа α и β выбраны по правилу:

$$\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0 \text{ и } -\frac{1}{2} < \beta < \mu \text{ при } p = 1,$$

$$\nu - \mu > \alpha - \beta > 0 \text{ и } -\frac{1}{2p} < \beta < \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \text{ при}$$

$1 < p < \infty$,

$$\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0 \text{ и } 0 \leq \beta < \mu + \frac{1}{2} \text{ при } p = \infty.$$

Тогда, если $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, то $T_l(f, x, \nu, \mu) \in L_{p,\alpha,\beta}$ и $\|T_l(f, x, \nu, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq C_3 \|f\|_{p,\alpha,\beta}$, где положительная постоянная C_3 не зависит от f и l .

Лемма 2.1 доказана в [2].

Лемма 2.2. Пусть даны числа p, r, ν, μ такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $r = 1, 2, 3, \dots$, $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$. Пусть числа α и β выбраны по правилу:

$$\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0 \text{ и } -\frac{1}{2} < \beta < \mu \text{ при } p = 1,$$

$$\nu - \mu > \alpha - \beta > 0 \text{ и } -\frac{1}{2p} < \beta < \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \text{ при}$$

$1 < p < \infty$,

$$\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0 \text{ и } 0 \leq \beta < \mu + \frac{1}{2} \text{ при } p = \infty.$$

Тогда для $g \in AD^r(\nu, \mu)_{p,\alpha,\beta}$ и $\delta \in [0, \pi]$ справедливо неравенство:

$$\tilde{\omega}_r(f, \delta, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} \leq C_4 \delta^{2r} \|D_{x,\nu,\mu}^r g(x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

где положительная постоянная C_4 не зависит от g и δ .

Лемма 2.2 доказана в [3].

Для $0 \leq h \leq \frac{\pi}{2}$ рассмотрим оператор

$$L_h(f, x, \nu, \mu) = \frac{1}{\varphi(h)} \int_0^h \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{-2\nu-1} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{-2\mu-1} \times \\ \times \int_0^\omega \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2\nu+1} \left(\cos \frac{u}{2} \right)^{2\mu+1} T_u(f, x, \nu, \mu) du dw,$$

$$\varphi(h) = \int_0^h \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{-2\nu-1} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{-2\mu-1} \times$$

где

$$\times \int_0^\omega \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{2\nu+1} \left(\cos \frac{u}{2} \right)^{2\mu+1} du dw.$$

Пусть $L_h^1(f, x, \nu, \mu) = L_h(f, x, \nu, \mu)$, а для $k = 2, 3, \dots$

$$L_{h_1, \dots, h_l}^k(f, x, \nu, \mu) = L_{h_l} (L_{h_1, \dots, h_{l-1}}^{k-1}(f, x, \nu, \mu), x, \nu, \mu).$$

Лемма 2.3. Пусть даны числа p, ν, μ такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$. Пусть числа α и β выбраны по правилу:

$$\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0 \text{ и } -\frac{1}{2} < \beta < \mu \text{ при } p = 1,$$

$$\nu - \mu > \alpha - \beta > 0 \text{ и } -\frac{1}{2p} < \beta < \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \text{ при}$$

$1 < p < \infty$,

$$\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0 \text{ и } 0 \leq \beta < \mu + \frac{1}{2} \text{ при } p = \infty.$$

Тогда если $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, то для любого $k \in \mathbb{N}$

$$L_h^k(f, x, \nu, \mu) \in AD^k(\nu, \mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Лемма 2.3 доказана в [3].

Положим $T_h^1(f, x, \nu, \mu) = T_h(f, x, \nu, \mu)$, а для $l = 2, 3, \dots$

$$T_{t_1, \dots, t_l}^l(f, x, \nu, \mu) = T_{t_l} (T_{t_1, \dots, t_{l-1}}^{l-1}(f, x, \nu, \mu), x, \nu, \mu).$$

Лемма 2.4. Пусть даны числа p, r, ν, μ такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $r = 1, 2, 3, \dots$, $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$.

Пусть $g \in AD^r(\nu, \mu)_{1,\nu,\mu}$. Тогда для почти всех $x \in [-1, 1]$ и всех $t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2, 3, \dots$ справедливо равенство:

$$D_{x,\nu,\mu}^r T_{t_1, \dots, t_l}^l(g, x, \nu, \mu) = T_{t_1, \dots, t_l}^l(D_{x,\nu,\mu}^r g, x, \nu, \mu).$$

Лемма 2.4 доказана в [3, с. 26].

Лемма 2.5. Пусть даны числа ν, μ такие, что, $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$. Если $f \in L_{1,\nu,\mu}$, то для любых $k \in \mathbb{N}$ и $0 \leq h \leq \frac{\pi}{2}$ справедливо равенство:

$$D_{x,\nu,\mu}^k L_h^k(f, x, \nu, \mu) = \frac{1}{(\varphi(h))^k} \Delta_h^k(f, x, \nu, \mu).$$

Лемма 2.5 доказана в [3, с. 50].

Лемма 2.6. Пусть даны числа ν, μ такие, что $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$. Если $f \in L_{1,\nu,\mu}$, то для почти

всех $x \in [-1, 1]$ и для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство: $T_{t_1, t_2}^2(f, x, \nu, \mu) = T_{t_2, t_1}^2(f, x, \nu, \mu)$.

Лемма 2.6 доказана в [3, с. 32].

3 Основной результат

Теорема 3.1. Пусть даны числа p, r такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $r = 1, 2, 3, \dots$. Пусть числа α и β выбраны по правилу:

$$\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0 \text{ и } -\frac{1}{2} < \beta < \mu \text{ при } p = 1,$$

$v - \mu > \alpha - \beta > 0$ и $-\frac{1}{2p} < \beta < \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ при $1 < p < \infty$,

$v - \mu > \alpha - \beta \geq 0$ и $0 \leq \beta < \mu + \frac{1}{2}$ при $p = \infty$.

Тогда для $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ справедливы неравенства:

$$C_1 \tilde{\omega}_r(f, \delta, v, \mu)_{p,\alpha,\beta} \leq K_r(f, \delta, v, \mu)_{p,\alpha,\beta} \leq C_2 \tilde{\omega}(f, \delta, v, \mu)_{p,\alpha,\beta},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и δ .

Доказательство. Используя Лемму 2.1 и Лемму 2.2 имеем для $g \in AD^r(v, \mu)_{p,\alpha,\beta}$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_r(f, \delta, v, \mu)_{p,\alpha,\beta} &\leq \\ &\leq \tilde{\omega}_r(f - g, \delta, v, \mu)_{p,\alpha,\beta} + \tilde{\omega}(g, \delta)_{p,\alpha,\beta} \leq \\ &\leq C_5 \|f - g\|_{p,\alpha,\beta} + C_6 \delta^{2r} \|D_x^r g(x)\|_{p,\alpha,\beta}, \end{aligned}$$

где C_5 и C_6 не зависят от f, g и δ .

Переходя к точной нижней грани по всем функциям $g \in AD^r(v, \mu)_{p,\alpha,\beta}$, получим:

$$C_1 \tilde{\omega}_r(f, \delta, v, \mu)_{p,\alpha,\beta} \leq K_r(f, \delta, v, \mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим функцию

$$A_h^r(f, x, v, \mu) = E - (E - L_h^r)^r(f, x, v, \mu),$$

где $E(f, x, v, \mu) = f(x)$.

Из леммы 2.3 следует, что

$$L_h^k(f, x, v, \mu) \in AD^k(v, \mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Нетрудно проверить, что

$$AD^l(v, \mu)_{p,\alpha,\beta} \subset AD^r(v, \mu)_{p,\alpha,\beta}$$

при $l \geq r \geq 1, l = r, r + 1, \dots$. Поэтому

$$A_h^r(f, x, v, \mu) \in AD^r(v, \mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Так как $L_h^r(f, x, v, \mu)$ имеет абсолютно непрерывную производную на каждом $[a, b] \subset (-1, 1)$, то применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, Лемму 2.4, обобщённое неравенство Минковского и Лемму 2.1, имеем для $l = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} &\|D_{x,v,\mu}^r (L_h^r)^l(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varphi(h)} \int_0^h \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{-2v-1} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{-2\mu-1} \times \\ &\quad \times \int_0^\omega \left(\sin \frac{u}{2}\right)^{2v+1} \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{2\mu+1} \times \\ &\quad \times \|T_u(D_{x,v,\mu}^r L_h^{r-1}(f, x, v, \mu), x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} dudw \leq \\ &C_7 \|D_{x,v,\mu}^r L_h^{r-1}(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \dots \leq \\ &\leq C_8 \|D_{x,v,\mu}^r L_h^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Так как $A_h^r(f, x, v, \mu)$ представляет собой сумму произведений $L_h^r(f, x, v, \mu)$, то

$$\|D_{x,v,\mu}^r A_h^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq C_9 \|D_{x,v,\mu}^r L_h^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Применяя лемму 2.5, имеем

$$\begin{aligned} &(\varphi(h))^r \|D_{x,v,\mu}^r A_h^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \\ &\leq C_{10} \|\Delta_h^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \\ &\leq C_{11} \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq C_{12} \tilde{\omega}_r(f, h, v, \mu)_{p,\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Поскольку для $0 \leq h \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \int_0^h \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{-2v-1} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{-2\mu-1} \times \\ &\quad \times \int_0^\omega \left(\sin \frac{u}{2}\right)^{2v+1} \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{2\mu+1} dudw \geq \\ &\geq \int_0^h \left(\frac{\omega}{2}\right)^{-2v-1} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{-2\mu-1} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{2\mu+1} \times \\ &\quad \times \int_0^\omega \left(\frac{u}{\pi}\right)^{2v+1} dudw = C_{13} \int_0^h \omega d\omega = C_{14} h^2, \end{aligned}$$

где положительные постоянные C_{13} и C_{14} не зависят от h , то

$$(h)^{2r} \|D_{x,v,\mu}^r A_h^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq C_{15} \tilde{\omega}_r(f, h, v, \mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

С другой стороны, так как

$$E - L_h^r = (E - L_h)(E + L_h + \dots + L_h^{r-1}),$$

то из определения $L_h(f, x)$, обобщённого неравенства Минковского и Леммы 2.1 следует, что

$$\text{при } 0 \leq h \leq \frac{\pi}{2} \|L_h(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq C_{16} \|f\|_{p,\alpha}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\|(E - L_h^r)(g, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \\ &\leq C_{17} \|(E - L_h)(g, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \\ &\leq C_{18} \sup_{0 \leq u \leq h} \|\Delta_u(g, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из леммы 2.6 следует, что

$$T_l(L_h(f, x, v, \mu), x, v, \mu) = L_h(T_l(f, x, v, \mu), x, v, \mu).$$

Поэтому из неравенства (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} &\|f(x) - A_h^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \\ &\leq C_{18} \sup_{0 \leq u_1 \leq h} \sup_{0 \leq u_2 \leq h} \dots \sup_{0 \leq u_r \leq h} \|\Delta_{u_1, u_2, \dots, u_r}^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leq \\ &\leq C_{19} \tilde{\omega}_r(f, h, v, \mu)_{p,\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом для $0 \leq h \leq \frac{\pi}{2}$

$$K_r(f, \delta, v, \mu)_{p,\alpha,\beta} \leq C_{20} \tilde{\omega}(f, \delta, v, \mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} I_h &= \|f(x) - A_1^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} + \\ &+ h^{2r} \|D_{x,v,\mu}^r A_1^r(f, x, v, \mu)\|_{p,\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

По доказанному выше для

$$0 \leq h \leq \frac{\pi}{2} \quad I_h \leq C_{21} \tilde{\omega}(f, 1, v, \mu)_{p,\alpha,\beta} \quad \text{и для } \frac{\pi}{2} \leq h \leq \pi$$

$$I_h \leq C_{22} I_1 \leq C_{23} \tilde{\omega}(f, 1, \nu, \mu)_{p, \alpha, \beta} \leq \\ \leq C_{24} \tilde{\omega}_r(f, h, \nu, \mu)_{p, \alpha, \beta}.$$

Итак, для любого $\delta \in [0, \pi]$

$$K_r(f, \delta, \nu, \mu)_{p, \alpha, \beta} \leq C_2 \tilde{\omega}(f, \delta, \nu, \mu)_{p, \alpha, \beta}. \quad \square$$

Заключение

В статье рассмотрена эквивалентная структурная характеристика функций f , для которых можно подобрать более простые функции P_n (алгебраические многочлены степени не выше чем $n-1$), близкие в некотором смысле к исходным [1]. Ранее этот результат был получен для обобщённого модуля гладкости, определяемого при помощи оператора обобщённого сдвига типа Чебышева [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Казимиров, Г.Н. Об одном подходе к упрощению модели сложного процесса на основе

алгебраических многочленов / Г.Н.Казимиров // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2002. – № 6 (15). – С. 171–174.

2. Потапов, М.К. О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения / М.К. Потапов // Труды МИАН СССР. – 1975. – Т. 134. – С. 260–277.

3. Казимиров, Г.Н. Приближение алгебраическими многочленами функций с данным k -м обобщённым модулем гладкости: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Г.Н. Казимиров. – Москва, 1995. – 106 л.

4. Казимиров, Г.Н. Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 49–51.

Поступила в редакцию 25.04.18.

УДК 512.542

О ДОПОЛНЕНИЯХ КОРАДИКАЛА В РАСШИРЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С.Ф. Каморников¹, О.Л. Шеметкова²¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины²Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва

ON COMPLEMENTS OF RESIDUAL IN EXTENSIONS OF FINITE GROUPS

S.F. Kamornikov¹, O.L. Shemetkova²¹F. Scorina Gomel State University²G.V. Plekhanov Russian University of Economics, Moscow

Для насыщенной формации \mathfrak{F} исследуется вопрос дополняемости \mathfrak{F} -корадикала в расширении конечной группы, которая представима в виде произведения нормальных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, формация, корадикал, дополняемая подгруппа, насыщенная формация Фиттинга.

For a saturated formation \mathfrak{F} the problem of complementability of \mathfrak{F} -residual in extension of the finite group which is the product of normal subgroups is established.

Keywords: finite group, formation, residual, complement, saturated Fitting formation.

Введение

Все группы, которые рассматриваются в данной работе, являются конечными.

Пусть \mathfrak{F} – формация, т. е. класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Тогда каждая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой, факторгруппа по которой принадлежит формации \mathfrak{F} (эта подгруппа обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется \mathfrak{F} -корадикалом группы G ; она совпадает с пересечением всех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$).

Понятие \mathfrak{F} -корадикала, характеризуя степень вхождения группы в формацию \mathfrak{F} , естественным образом инициировало исследование проблемы расщепляемости группы над ее \mathfrak{F} -корадикалом. Центральное место в решении этой проблемы занимает следующий результат Л.А. Шеметкова.

Теорема 0.1 [1, Теорема 3.2]. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация. Пусть ω – множество всех тех простых чисел $p \in \pi(\mathfrak{F})$, для которых \mathfrak{F} -корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G обладает абелевой силовской p -подгруппой. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ обладает ω -дополнением в любом расширении группы G .

Отметим, что теорема 0.1 эквивалентна следующему утверждению: Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, K – нормальная подгруппа группы G и ω – множество всех тех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$, для которых силовские p -подгруппы из $K^{\mathfrak{F}}$ являются

абелевыми. Тогда \mathfrak{F} -корадикал подгруппы K обладает ω -дополнением в группе G .

Напомним, что подгруппа D является ω -дополнением (ω – некоторое множество простых чисел) к подгруппе N группы G , если $G = DN$ и порядок подгруппы $D \cap N$ не делится на числа из ω . В этом случае говорят также, что подгруппа N обладает ω -дополнением в группе G .

В качестве следствий из теоремы 0.1 вытекают, ставшие уже классическими, теорема Шура – Цассенхауза о дополняемости нормальной холловой подгруппы, теорема Гашюца [2] о дополняемости абелевого \mathfrak{F} -корадикала (\mathfrak{F} – насыщенная формация), теорема Ф. Холла [3] о дополняемости в конечной разрешимой группе G ее коммутанта G' (\mathfrak{A} -корадикала группы G , где \mathfrak{A} – формация всех абелевых групп) с абелевыми силовскими подгруппами, теорема Хуперта [4] о дополняемости в G подгруппы $O^p(G)$ (\mathfrak{R}_p -корадикала группы G , где \mathfrak{R}_p – формация всех p -групп) с абелевой силовской p -подгруппой.

Исключить условие абелевости соответствующих силовских подгрупп \mathfrak{F} -корадикала в теореме 0.1 невозможно (пример, подтверждающий это, можно найти в [5, с. 131]). Поэтому одним из направлений развития теоремы 0.1 может быть введение дополнительных ограничений либо на группу G , либо на формацию \mathfrak{F} . Такой подход, инициированный работой [6], в последнее время получил развитие в работах [7]–[11].

Суть подхода состоит в рассмотрении групп G , представимой в виде произведения своих

нормальных (или субнормальных) подгрупп, что позволяет условие абелевости соответствующих силовских подгрупп \mathfrak{F} -корадикала группы G ослабить до условия абелевости силовских подгрупп из \mathfrak{F} -корадикалов сомножителей.

Главная цель данной работы – доказательство следующей теоремы.

Теорема 0.2. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, K – нормальная подгруппа группы G , представимая в виде произведения нормальных в G подгрупп A и B , и ω – множество всех тех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$, для которых силовские p -подгруппы из A^δ и B^δ являются абелевыми. Если $K^\delta = A^\delta B^\delta$, то \mathfrak{F} -корадикал подгруппы K обладает ω -дополнением в группе G .

Отметим также следующие моменты:

1) в отличие от работ [7]–[11] в теореме 0.2 нет никаких дополнительных требований относительно разрешимости или частичной разрешимости подгрупп A^δ и B^δ группы G ;

2) идея доказательства теоремы 0.2 существенно отличается от схем работ [7]–[11], опирающихся на свойства покрытия-изолирования \mathfrak{F} -нормализаторами главных факторов группы G ;

3) теорема 0.1 является формальным следствием теоремы 0.2.

1 Предварительные результаты

В работе используются определения и обозначения, принятые в монографии [12]. Нам понадобится следующая информация о свойствах \mathfrak{F} -корадикала группы.

Лемма 1.1 [12, лемма 1.2]. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация, N – нормальная подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1) (G/N)^\delta = G^\delta N/N;$$

$$2) \text{ если } G = HN, \text{ то } H^\delta N = G^\delta N.$$

Класс групп \mathfrak{F} называется классом Фиттинга (или радикальным классом), если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) \mathfrak{F} – нормально наследственный класс (т. е. если группа принадлежит классу \mathfrak{F} , то и любая ее нормальная подгруппа входит в \mathfrak{F});

2) из равенства $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга (радикальная формация) – это формация, которая является классом Фиттинга. Один из критериев радикальности формации дает следующая лемма.

Лемма 1.2 [13, лемма 2]. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Тогда и только тогда \mathfrak{F} является формацией Фиттинга, когда для любых двух перестановочных субнормальных подгрупп A и B произвольной группы G имеет место равенство

$(AB)^\delta = A^\delta B^\delta$. В частности, если группа G представима в виде произведения нормальных подгрупп A и B , то для формации Фиттинга справедливо равенство $G^\delta = A^\delta B^\delta$.

Напомним еще, что группа H является расширением группы G , если H имеет нормальную подгруппу N такую, что $G \cong N$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если она замкнута относительно фраттиниевых расширений, т. е. из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

2 Доказательство теоремы 0.2

Ввиду условия теоремы группа G является расширением группы A . Поэтому на основании теоремы 0.1 подгруппа A^δ обладает ω -дополнением H в расширении G группы A , т. е. $G = HA^\delta$ и $|H \cap A^\delta|$ не делится на числа из ω . Поэтому ввиду тождества Дедекинда подгруппа K представима в виде $K = (H \cap K)A^\delta$ и при этом $|(H \cap K) \cap A^\delta|$ не делится на числа из ω . Кроме того, ввиду леммы 1.1 из равенства $K^\delta = A^\delta B^\delta$ следует, что $(H \cap K)^\delta A^\delta = K^\delta$.

Ввиду условия теоремы справедливо равенство $K^\delta = A^\delta B^\delta$, поэтому имеет место изоморфизм

$$K^\delta / A^\delta = B^\delta A^\delta / A^\delta \cong B^\delta / B^\delta \cap A^\delta.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (H \cap K)^\delta / (H \cap K)^\delta \cap A^\delta &\cong \\ &\cong (H \cap K)^\delta A^\delta / A^\delta = K^\delta / A^\delta. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(H \cap K)^\delta / (H \cap K)^\delta \cap A^\delta \cong B^\delta / B^\delta \cap A^\delta.$$

Ввиду условия теоремы для любого простого числа $p \in \omega$ силовские p -подгруппы из B^δ являются абелевыми. Но тогда из

$$(H \cap K)^\delta / (H \cap K)^\delta \cap A^\delta \cong B^\delta / B^\delta \cap A^\delta$$

следует, что силовские p -подгруппы из $(H \cap K)^\delta / (H \cap K)^\delta \cap A^\delta$ также являются абелевыми для любого простого числа $p \in \omega$. Отсюда и из того, что $|(H \cap K)^\delta \cap A^\delta|$ не делится на числа из ω заключаем, что силовские p -подгруппы из $(H \cap K)^\delta$ являются абелевыми для любого простого числа $p \in \omega$. Снова применяя теорему 0.1, получаем, что подгруппа $(H \cap K)^\delta$ обладает ω -дополнением D в группе H , т. е. $H = D(H \cap K)^\delta$ и, кроме того, $|D \cap (H \cap K)^\delta|$ не делится на числа из ω .

Теперь имеем, что

$$\begin{aligned} G = HA^\delta &= (D(H \cap K)^\delta)A^\delta = \\ &= D((H \cap K)^\delta A^\delta) = DK^\delta. \end{aligned}$$

Пусть $p \in \omega$. Так как H – ω -дополнение к A^δ в G , то $|H \cap A^\delta|$ не делится на p , а потому $H \cap A^\delta$ – p' -группа. Отсюда из $D \subseteq H$ следует, что $D \cap A^\delta$ также является p' -группой.

Ввиду нормальности подгруппы $H \cap A^\delta$ в группе H из равенства $H = D(H \cap K)^\delta$ следует, что $H = (D(H \cap A^\delta))(H \cap K)^\delta(H \cap A^\delta)$. Поэтому справедливо равенство

$$\begin{aligned} |D(H \cap A^\delta) \cap (H \cap K)^\delta(H \cap A^\delta)| &= \\ &= \frac{|H \cap A^\delta|^2 \cdot |D \cap (H \cap K)^\delta|}{|D \cap A^\delta| \cdot |(H \cap K)^\delta \cap A^\delta|}. \end{aligned}$$

Из него вытекает, что

$D(H \cap A^\delta) \cap (H \cap K)^\delta(H \cap A^\delta)$ – p' -группа. Это означает, что подгруппа $D(H \cap A^\delta)/(H \cap A^\delta)$ является ω -дополнением подгруппы $(H \cap K)^\delta(H \cap A^\delta)/(H \cap A^\delta)$ в группе $H/(H \cap A^\delta)$.

Рассмотрим отображение

$$f: hA^\delta \rightarrow h(H \cap A^\delta), h \in H.$$

Очевидно, f – изоморфизм группы $HA^\delta/A^\delta = G/A^\delta$ и группы $H/(H \cap A^\delta)$. Функция f отображает подгруппу DA^δ/A^δ группы G/A^δ на $D(H \cap A^\delta)/(H \cap A^\delta)$, а подгруппу $(H \cap K)^\delta A^\delta/A^\delta = K^\delta/A^\delta$ – на группу

$$(H \cap K)^\delta(H \cap A^\delta)/(H \cap A^\delta).$$

Так как f – изоморфизм и группа

$$D(H \cap A^\delta) \cap (H \cap K)^\delta(H \cap A^\delta)$$

является p' -группой для любого простого $p \in \omega$, то подгруппа $DA^\delta \cap K^\delta$, являющаяся полным прообразом подгруппы

$$D(H \cap A^\delta) \cap (H \cap K)^\delta(H \cap A^\delta)$$

при отображении f , также является p' -группой для любого простого $p \in \omega$.

Это означает, что подгруппа DA^δ/A^δ является ω -дополнением подгруппы

$$(H \cap K)^\delta A^\delta/A^\delta = K^\delta/A^\delta$$

в группе G/A^δ , в частности, число

$$k = |DA^\delta/A^\delta \cap K^\delta/A^\delta| = |D \cap K^\delta|/|D \cap A^\delta|$$

не делится на числа из ω . Но тогда из того, что $D \cap A^\delta$ является p' -группой для любого простого $p \in \omega$, следует, что $|D \cap K^\delta|$ не делится на числа из ω . Вместе с равенством $G = DK^\delta$ это означает, что \mathfrak{F} -корадикал K^δ нормальной подгруппы K обладает ω -дополнением в группе G . □

3 Следствия теоремы 0.2

В данном разделе сформулируем основные следствия теоремы 0.2, включающие главные результаты работ [2]–[4]. Отметим, что теорема 0.2 дает индуктивную базу для расширения ее на случай n сомножителей.

Следствие 3.1. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, K – нормальная подгруппа группы G , представимая в виде произведения n нормальных в G подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n , и ω – множество всех тех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$, для которых силовские p -подгруппы подгрупп $A_1^\delta, A_2^\delta, \dots, A_n^\delta$ являются абелевыми. Если $K^\delta = A_1^\delta A_2^\delta \dots A_n^\delta$, то \mathfrak{F} -корадикал подгруппы K обладает ω -дополнением в группе G .

В случае, когда $\omega = \pi(\mathfrak{F})$, справедливо

Следствие 3.2. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, K – нормальная подгруппа группы G , представимая в виде произведения n нормальных в G подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Если для любого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские p -подгруппы подгрупп $A_1^\delta, A_2^\delta, \dots, A_n^\delta$ являются абелевыми и $K^\delta = A_1^\delta A_2^\delta \dots A_n^\delta$, то \mathfrak{F} -корадикал подгруппы K обладает дополнением в группе G .

В случае, когда $K = G$, имеем

Следствие 3.3. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, G – группа, представимая в виде произведения n нормальных подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n , и ω – множество всех тех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$, для которых силовские p -подгруппы подгрупп $A_1^\delta, A_2^\delta, \dots, A_n^\delta$ являются абелевыми. Если $G^\delta = A_1^\delta A_2^\delta \dots A_n^\delta$, то \mathfrak{F} -корадикал G^δ обладает ω -дополнением в группе G .

В случае, когда $\omega = \pi(\mathfrak{F})$, справедливо

Следствие 3.4. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, G – группа, представимая в виде произведения n нормальных в G подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Если для любого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские p -подгруппы подгрупп $A_1^\delta, A_2^\delta, \dots, A_n^\delta$ являются абелевыми и $G^\delta = A_1^\delta A_2^\delta \dots A_n^\delta$, то \mathfrak{F} -корадикал группы G обладает дополнением в группе G .

Интересен частный случай, когда все подгруппы $A_1^\delta, A_2^\delta, \dots, A_n^\delta$ являются абелевыми.

Следствие 3.5. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, K – нормальная подгруппа группы G , представимая в виде произведения n нормальных в G подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Если подгруппы $A_1^\delta, A_2^\delta, \dots, A_n^\delta$ являются абелевыми и $K^\delta = A_1^\delta A_2^\delta \dots A_n^\delta$, то \mathfrak{F} -корадикал подгруппы K обладает дополнением в группе G .

Как следует из леммы 1.2, если группа G представима в виде произведения нормальных подгрупп A и B , то для формации Фиттинга \mathfrak{F} справедливо равенство $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$. Поэтому имеют место следующие утверждения.

Следствие 3.6. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация Фиттинга, K – нормальная подгруппа группы G , представимая в виде произведения n нормальных в G подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Если ω – множество всех тех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$, для которых силовские p -подгруппы подгрупп $A_1^{\mathfrak{F}}, A_2^{\mathfrak{F}}, \dots, A_n^{\mathfrak{F}}$ являются абелевыми, то \mathfrak{F} -корадикал подгруппы K обладает ω -дополнением в группе G .

Следствие 3.7. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация Фиттинга, K – нормальная подгруппа группы G , представимая в виде произведения n нормальных в G подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Если для любого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские p -подгруппы подгрупп $A_1^{\mathfrak{F}}, A_2^{\mathfrak{F}}, \dots, A_n^{\mathfrak{F}}$ являются абелевыми, то \mathfrak{F} -корадикал подгруппы K обладает дополнением в группе G .

Так как формация \mathfrak{N} всех нильпотентных групп является насыщенной формацией Фиттинга, то имеет место следующее утверждение.

Следствие 3.8. Пусть \mathfrak{N} – формация всех нильпотентных групп, K – нормальная подгруппа группы G , представимая в виде произведения n нормальных в G подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Если для любого простого числа p силовские p -подгруппы подгрупп $A_1^{\mathfrak{N}}, A_2^{\mathfrak{N}}, \dots, A_n^{\mathfrak{N}}$ являются абелевыми, то нильпотентный корадикал подгруппы K обладает дополнением в группе G .

В случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ – формация всех p -групп, имеет место следующее утверждение.

Следствие 3.9. Пусть K – нормальная подгруппа группы G , представимая в виде произведения n нормальных в G подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n . Если для некоторого простого числа p силовские p -подгруппы подгрупп $O^p(A_1), O^p(A_2), \dots, O^p(A_n)$ являются абелевыми, то подгруппа $O^p(K)$ обладает дополнением в группе G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.
2. Gaschütz, W. Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen. / W. Gaschütz // J. Reine Angew. Math. – 1952. – Vol. 190. – P. 93–107.
3. Hall, P. The construction of soluble groups / P. Hall // J. Reine Angew. Math. – 1940. – Vol. 182. – С. 206–214.
4. Huppert, B. Subnormale Untergruppen und p -Sylowgruppen / B. Huppert // Acta Sci. Math. – 1961. – Vol. 22. – P. 46–61.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen, I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer, 1967. – 793 p.
6. Каморников, С.Ф. О дополнениях корадикала конечной группы / С.Ф. Каморников // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 17–23.
7. Каморников, С.Ф. О существовании дополнений к корадикалам конечных групп / С.Ф. Каморников, О.Л. Шеметкова // Труды инт. мат. и мех. УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 122–127.
8. Ведерников, В.А. О дополнениях к корадикалам конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 27–52.
9. Ведерников, В.А. \mathfrak{F}^{ω} -нормализаторы конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Сиб. матем. ж. – 2017. – Т. 58, № 1. – С. 64–82.
10. Ballester-Bolinches, A. On complements of \mathfrak{F} -residuals of finite groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Perez-Calabuig // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 2. – P. 878–882.
11. Каморников, С.Ф. О дополнении корадикала конечной группы / С.Ф. Каморников, О.Л. Шеметкова // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 58–64.
12. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
13. Каморников, С.Ф. О некоторых свойствах формации квазинильпотентных групп / С.Ф. Каморников // Мат. заметки. – 1993. – Т. 53, № 2. – С. 71–77.

Поступила в редакцию 12.08.18.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

В.Н. Тютянов¹, П.В. Бычков²

¹Международный университет «МИТСО», Гомель

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH NILPOTENT SUBGROUPS OF ODD ORDER

V.N. Tyutyaynov¹, P.V. Bychkov²

¹International University «MITSO», Gomel

²F. Scorina Gomel State University

Определены композиционные факторы конечной группы, у которой любая подгруппа нечетного порядка нильпотентна.

Ключевые слова: конечная группа, простая неабелева группа, группа Шмидта.

Composition factors of finite groups in which each subgroup odd order is nilpotent were defined.

Keywords: finite group, simple non-abelian group, group Schmidt.

Введение

Строение конечной группы в значительной мере зависит от класса подгрупп, которыми она обладает. Примером этого являются группы Шмидта, у которых любая собственная подгруппа нильпотентна, группы у которых все собственные подгруппы разрешимы и ряд других примеров. В настоящей работе рассматриваются конечные группы, у которых все подгруппы нечетного порядка нильпотентны. Данная задача была предложена авторам В.С. Монаховым. В разрешимом случае, в силу D_π -теоремы, задача решается тривиально. А именно, если G – разрешимая группа, с указанным выше свойством, то её $2'$ -подгруппа является нильпотентной. В случае, когда группа G неразрешима, задача становится существенно сложнее. Нами доказан следующий результат.

Теорема 0.1. Пусть G – конечная группа, у которой все подгруппы нечетного порядка нильпотентны. Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат следующему списку: $PSL_2(2^n)$, $n \geq 2$; $PSL_2(q)$, q – нечетное число, $q - 1 = 2^k$, k – целое. $PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$; $PSp_4(2^n)$, $n \geq 2$; $Sz(2^{2n+1})$, $n \geq 1$.

1 Доказательство вспомогательного результата

Для доказательства теоремы нам потребуются следующая лемма.

Лемма 1.1. Пусть G – конечная простая неабелева группа, у которой все подгруппы нечетного порядка нильпотентны. Тогда группа G принадлежит следующему списку: $PSL_2(2^n)$, $n \geq 2$;

$PSL_2(q)$, q – нечетное число, $q - 1 = 2^k$, k – целое. $PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$; $PSp_4(2^n)$, $n \geq 2$; $Sz(2^{2n+1})$, $n \geq 1$.

Доказательство. Рассмотрим все возможные случаи.

1. $G \cong A_n$, $n \geq 5$.

При $n = 5$ $G \cong A_5 \cong PSL_2(4) \cong PSL_2(5)$ и удовлетворяет условию леммы. При $n = 6$ $G \cong A_6 \cong PSL_2(9)$ и удовлетворяет условию леммы.

Группа A_7 содержит подгруппу $7:3$ и не удовлетворяет условию леммы.

Так как $A_k \subset A_{k+1}$ для всякого $k \geq 2$, то группы A_n при $n \geq 7$ не удовлетворяют условию леммы. В силу указанных изоморфизмов лемма для знакопеременных групп верна.

2. G – простая группа лиевского типа.

(1) $G \cong PSL_n(q)$, где $n \geq 2$, $q = p^k$, p – простое число.

Пусть $p = 2$. Рассмотрим случай $n = 2$. Группа $SL_2(2^2)$ удовлетворяет условию леммы. Из [1, теорема II. 8.27] следует, что подгруппы в G , не удовлетворяющие условию теоремы, могут содержаться только в $SL_2(2^d)$, где d делит k . Математической индукцией по 2^m легко показать, что группа $SL_2(2^k)$ удовлетворяет условию леммы для всех $k \geq 2$.

Пусть $n = 3$. Группа $PSL_3(2)$ содержит подгруппу $7:3$ и не удовлетворяет условию леммы. Поскольку $PSL_3(2)$ содержится в $PSL_3(2^m)$ для всех $m > 2$, то группа $PSL_3(2^k)$ не удовлетворяет условию леммы. Из вложений

$$SL_3(2^k) \subset SL_4(2^k) \subset \dots \subset SL_n(2^k) \subset \dots$$

следует, что группа $PSL_n(2^k)$ при $n \geq 3$ не удовлетворяет условию леммы.

Пусть $p > 2$. Рассмотрим случай $n = 2$. Группа $PSL_2(q)$ содержит подгруппу Бореля порядка $\frac{1}{2}q(q^2 - 1)$, являющуюся группой Фробениуса. Следовательно, $q - 1$ будет степенью числа 2. В этом случае либо $q = 3^2$, либо $q = p -$ простое число Ферма. Группа $PSL_2(3^2)$ удовлетворяет условию леммы. Рассмотрим случай, когда $G \cong PSL_2(p)$, где $p -$ простое число Ферма. Из [1, теорема II.8.27] легко заключить, что $PSL_2(p)$ удовлетворяет условию леммы.

Пусть $n = 3$. В группе $PSL_3(q)$ существует тор T конечного порядка $\frac{1}{(3, q-1)} \frac{q^3 - 1}{q - 1}$. Из рабо-

ты [2] следует, что существует простое число r примитивное по отношению к паре $\{3k, p\}$ и $r \geq 3k + 1$. В частности, $r \geq 5$ и $(r, q - 1) = 1$. Поэтому r делит $|T|$. Так как $|N_G(T):T| = 3$, то $N_G(T)$ не удовлетворяет условию леммы. Из вложений

$$SL_3(q) \subset SL_4(q) \subset \dots \subset SL_n(q) \subset \dots$$

следует, что группа $PSL_n(q)$ при $n \geq 3$ не удовлетворяет условию леммы.

(2) $G \cong PSU_n$, где $n \geq 3$, $q = p^k$, $p -$ простое число.

Пусть $p \geq 3$. Сначала рассмотрим случай $n = 3$. Порядок группы $PSU_3(q)$ равен $\frac{1}{d}q^3(q^3 + 1)$, где $d = (3, q + 1)$. Группа $PSU_3(q)$ содержит два максимальных тора [3] порядков $\frac{1}{d}(q + 1)^2$ и $\frac{1}{d}(q^2 - q + 1)$ нормализаторы которых соответственно изоморфны $[\frac{1}{d}(q + 1)^2]:S_3$ и $[\frac{1}{d}(q^2 - q + 1)]:3$. Имеет место равенство $q^6 - 1 = (q^3 + 1)(q^3 - 1)$ или $(p^{6k} - 1) = (p^{3k} + 1)(p^{3k} - 1)$. Согласно работе [2] найдётся простое число r , примитивное по отношению к паре $\{6k, p\}$. Тогда $r \geq 7$ и поскольку r не делит $q^3 - 1$, то r делит $q^3 + 1$. Так как $q^3 + 1 = (q + 1)(q^2 - q + 1)$, то r делит одно из чисел $q + 1$ или $q^2 - q + 1$. Таким образом, нормализатор одного из торов содержит нильпотентную подгруппу $R : B$, где $R -$ силовская r -подгруппа соответствующего тора, а $B \cong Z_3$. Поэтому $PSU_3(q)$ не удовлетворяет условию леммы. Из соответствующих вложений см. [4] следует, что при нечётных q группы $PSU_n(q)$ не удовлетворяют условию леммы.

Пусть $p = 2$. Рассмотрим случай $n = 3$. Так как группа $PSU_3(2)$ разрешима, то она не удовлетворяет условию леммы. Из [5] следует, что группа $PSU_4(2)$ удовлетворяет условию леммы, а $PSU_5(2) -$ не удовлетворяет, поскольку содержит подгруппу $PSL_2(5^2)$. Следовательно, в серии $PSU_n(2)$ только $PSU_4(2)$ удовлетворяет условию леммы и $PSU_3(q) \cong PSU_3(2^k)$, где $k \geq 2$. Имеет место равенство: $q^6 - 1 = (q^3 + 1)(q^3 - 1)$ или $(2^{6k} - 1) = (2^{3k} + 1)(2^{3k} - 1)$. Так как $k \geq 2$, то из работы [2] следует, что существует число r , примитивное по отношению к паре $\{6k, 2\}$ и

$r \geq 13$. Теперь, как в случае с $p \geq 3$, показывается, что группа $PSU_n(q)$, $n \geq 3$ и $q = 2^k$ ($k \geq 2$) не удовлетворяет условию леммы.

$$(3) G \cong Sz(2^{2k+1}), k \geq 1.$$

Подгруппы групп Судзуки описаны в [6]. Из [6] следует, что разрешимые подгруппы удовлетворяют условию леммы. Неразрешимые подгруппы могут быть только группы $Sz(2^{2m+1})$, где 2^{2k+1} является степенью числа 2^{2m+1} . Индукцией по 2^{2n+1} легко доказать, что группы $Sz(2^{2k+1})$ удовлетворяют условию леммы.

$$(4) G \cong PSp_{2n}(q), n \geq 2, q = p^k.$$

Пусть сначала $n = 2$. Предположим, что p нечётное простое число. Параболическая подгруппа в $PSp_4(q)$ содержит секцию, изоморфную $PSL_2(q)$. Согласно [3] $PSp_4(q)$ содержит подгруппу $PSL_2(q^2)$. Из (1) следует, что $q - 1$ и $q^2 - 1$ являются степенями числа 2. Это возможно только при $q = 3$ и, таким образом, $G \cong PSp_4(3) \cong PSU_4(2)$ удовлетворяет условию леммы.

Пусть $p = 2$. Согласно [3] G может содержать только следующие подгруппы: параболические порядка $q^4(q - 1)(q^2 - 1)$, группы вида $(SL_2(q) * SL(q)) : 2$, группы $PSL_2(q^2) : 2$, группы $PSp_4(q_0)$, где q_0 делит q , и группы Судзуки. Все они удовлетворяют условию леммы. Так как группа $PSp_4(2)$ не является простой, то все группы $PSp_4(2^k)$ при $k \geq 2$ удовлетворяют условию леммы.

Из диаграммы Дынкина легко увидеть, что при $n > 3$ группа G содержит секцию $PSL_3(q)$, которая, в силу (1), не удовлетворяет условию леммы. Поэтому при $n \geq 3$ группы $PSp_n(q)$ не удовлетворяют условию леммы.

$$(5) G \cong P\Omega_{2n+1}(q), n \geq 1, q = p^k.$$

Так как $P\Omega_3(q) \cong PSL_2(q)$, $P\Omega_5(q) \cong PSp_4(q)$, то $n \geq 3$. Из диаграммы Дынкина следует, что G содержит секцию $PSL_3(q)$, что невозможно в силу (1).

$$(6) G \cong {}^2G_2(q), q = 3^{2k+1}, k \geq 1.$$

Группа G содержит подгруппу Бореля $q^3 : (q - 1)$. Если $q - 1 = 2^a$, то $3^{2k+1} = 2^a + 1$. Это равенство выполняется только при $k = 0$. Так как $k \geq 1$, то найдётся нечётный простой делитель $r > 3$ числа $q - 1$. Следовательно, подгруппа Бореля не удовлетворяет условию леммы.

$$(7) G \cong G_2(q).$$

Из [4] следует, что G обладает подгруппой $A_2(q)$. Последнее невозможно в силу (1).

$$(8) G \cong {}^3G_4(q^3).$$

Из [4] следует, что G обладает подгруппой $G_2(q)$. Последнее невозможно в силу (7).

$$(9) G \cong E_8(q).$$

Из диаграммы Дынкина следует, что $E_8(q)$ обладает подгруппой с секцией изоморфной $PSL_3(q)$. Из (1) заключаем, что G не удовлетворяет условию леммы.

$$(10) G \cong E_7(q).$$

Рассматривается так же, как (9).

$$(11) G \cong D_l(q) = PSL_{2l}^+(q), l \geq 4.$$

Из диаграммы Дынкина следует, что G содержит максимальную параболическую подгруппу, обладающую секцией $PSL_{l-1}(q)$. Так как $l \geq 4$, то из (1) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

$$(12) G \cong {}^2D_l(q) = PSL_{2l}^-(q), l \geq 4.$$

Из диаграммы Дынкина следует, что G содержит параболическую подгруппу с секцией $PSL_3(q)$. Из (1) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

$$(13) G \cong E_6(q).$$

Рассматривается также как (9).

$$(14) G \cong {}^2E_6(q).$$

Из диаграммы Дынкина следует, что G содержит параболическую подгруппу с секцией $PSL_3(q)$. Из (1) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

$$(15) G \cong F_4(q).$$

Из диаграммы Дынкина видно, что G обладает параболической подгруппой с секцией $PSL_3(q)$. Из (1) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

$$(16) G \cong {}^2F_4(q), q = 2^{2k+1}, k \geq 0.$$

При $k = 0$ $G \cong {}^2F_4(2)'$. Из [5] следует, что G обладает подгруппой $PSL_2(5^2)$. Из (1) заключаем, что ${}^2F_4(2)'$ не удовлетворяет условию леммы. Следовательно, $k \geq 1$. В этом случае G содержит подгруппу $PGU_3(q)$. Так как $k \geq 1$, то из (2) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

3. G – простая спорадическая группа.

Из [5] следует, что группа M_{11} имеет подгруппу $11 : 5$ и, следовательно, не удовлетворяет условию леммы. Данная группа [5] вкладывается в следующие группы: $M_{12}, M_{23}, HS, M_{24}, M^cL, Suz, O'N, Co_3, Co_2, Fi_{22}, HN, Ly, Fi_{23}, Co_1, Y_4, Fi_{24}', B, M$. Следовательно, все они не удовлетворяют условию леммы. Из [5] следует, что оставшиеся

группы обладают подгруппами: $J_1 - 7 : 3, M_{22} - 7 : 3, J_2 - 7 : 3, J_3 - 19 : 9, He - 7 : 3, Ru - 7 : 3, Th - 31 : 15$; и, таким образом, не удовлетворяют условию леммы. \square

2 Доказательство основного результата

Доказательство теоремы. Пусть G – минимальный контрпример к теореме. Если G – простая неабелева группа, то, в силу леммы, она принадлежит списку простых неабелевых композиционных факторов группы G . Пусть $N \triangleleft G$. Тогда N и G/N удовлетворяют условию теоремы. Следовательно, G удовлетворяет условию теоремы, что невозможно. \square

Непосредственно из теоремы получаем следующий результат.

Следствие 2.1. Пусть G – конечная группа без подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат следующему списку: $PSL_2(2^n), n \geq 2; PSL_2(q), q$ – нечетное число, $q - 1 = 2^k, k$ – целое. $PSU_4(2) \cong PSp_4(3); PSp_4(2^n), n \geq 2; Sz(2^{2n+1}), n \geq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg New York: Springer, 1967. – 793 s.
2. Zsigmondy, K. Zur Theorie der Potenzreste / K. Zsigmondy // Monath. Math. Phys. – 1892. – Vol. 3. – S. 265–284.
3. Mitchell, H.H. Determination of the ordinary and modular ternary linear groups / H.H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – Vol. 12. – P. 207–242.
4. Stensholt, E. Certain embedding finite group of Lie type / E. Stensholt // J. Algebra. – 1978. – Vol. 53. – P. 136–187.
5. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. – London: Clarendon, 1985. – 252 p.
6. Suzuki, M. On a class double transitive groups / M. Suzuki // Ann. Math. – 1962. – Vol. 75, № 1. – P. 105–145.

Поступила в редакцию 20.06.18.

УДК 004.62: 519.254

WEB-ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ВЫБОРА СФЕРЫ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко, Ю.А. Слепенко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

WEB-APPLICATION FOR SELECTION OF ACTIVITY AREA

A.N. Osipenko, N.B. Osipenko, Y.A. Slepianok

F. Scorina Gomel State University

Разработан сайт, с помощью которого пользователь может подобрать группу приемлемых для себя сфер деятельности или профессий. Дается схема применения программного инструментария, краткое описание психологических тестов, структуры базы данных, описание основных особенностей программной реализации и пользовательского интерфейса web-приложения. Приводятся результаты предварительной апробации подбора профессий с использованием психологических тестов и алгоритма квадрата Пифагора.

Ключевые слова: сфера деятельности, профессия, алгоритм Пифагора, психологические тесты.

A website has been developed with the help of which the user can select a group of areas of activity or professions that are acceptable to him. The scheme for the application of software tools, brief description of psychological tests, structure of the database, description of the main features of the software implementation and the user interface of the web application are attached. The results of the preliminary approbation of the selection of professions with the use of psychological tests and the square of Pythagoras are presented.

Keywords: sphere of activities, profession, algorithm of Pythagoras, psychological tests.

Введение

Одна из причин низкой эффективности автоматизации выбора профессий, несмотря на обилие антропометрических, социометрических, психологических и иных тестов, состоит в отсутствии универсального инструмента автоматизации синтеза разнообразных описаний человека [1]. С целью разрешения этой проблемы авторы разработали метод систематизации деятельностей человека и кодировки её элементов применительно к разным диагностическим описаниям [2]. Благодаря наличию таких кодировок появляется возможность проецировать распределения значимостей тем деятельностей по каждой диагностике на единую структуру деятельностей и получать за счет этого интегральное распределение.

Еще одна из причин низкой эффективности традиционных подходов к диагностике человеческих особенностей кроется в том, что используемые специалистами психологические тесты в основном ориентированы на текущее психофизиологическое состояние респондента.

Многие практикующие психологи с успехом используют алгоритм квадрата Пифагора по выявлению потенциально наиболее характерных личностных качеств для диагностики характера человека и его склонностей [2], [3].

В основание разрабатываемого подхода изначально положена гипотеза о наличии у каждого человека некой жизненной «специализации», т. е. большей предрасположенности к одним темам деятельности и меньшей – к другим. Иными

словами, для него исходное распределение значимостей тем деятельностей существенно неравномерно. По мере развития ребенка в социальной среде это распределение может тем или иным способом корректироваться.

Настоящая статья представляет собой логическое развитие предыдущих публикаций авторов [1]–[5] на тему принятия стратегических решений и посвящена описанию разработанного web-приложения для поддержки принятия решений на примере автоматизации выбора наиболее и наименее подходящих сфер профессиональной деятельности с помощью психологического тестирования и алгоритма квадрата Пифагора. Сегодня весьма полезными являются сайты, позволяющие молодому человеку взглянуть на себя со стороны общечеловеческих статистических закономерностей. Большинство имеющихся в Интернете прогнозов и соответствующих рекомендаций по профориентации грешат однобокостью или поверхностностью оценки особенностей и темперамента человека. Существующие более качественные инструменты диагностики профессиональных наклонностей человека предполагают проведение многочасового тестирования и дополнительной дорогостоящей консультации у специалиста. Таким образом, пользователи описываемого web-приложения получают возможность достаточно быстро пройти психологическое тестирование и получить на основании обработанных данных рекомендации по предпочитаемым профессиям и сферам деятельности.

1 Схема применения программного инструментария

Пересечение таких технологий как Yii Framework и AngularJS, используемых при разработке описываемого инструментария, позволяет следовать одновременно нескольким концепциям построения web-приложений. Широкие возможности Yii позволяют перенести логику роутинга по страницам на сам фреймворк, а также избавляют разработчика от необходимости низкоуровневой работы с базой данных, вместо которой используется паттерн ORM (Object Relational Mapping). На сложных страницах, таких как страница психологического тестирования, либо страница регистрации, используется Angular-приложение, которое позволяет следовать паттерну SPA (Single-Page Application), в связи с чем уменьшается нагрузка на сервер, а пользователь может работать со страницей без ее перезагрузки. Для связи фронтэнда и бэкэнда приложения используются рест-сервисы.

Общая схема алгоритма подбора подходящих для пользователя вариантов решений в заданной проблематике представлена на рисунке 1.1. В основе алгоритма положена идея тождества структуры описания индивидуальности человека и варианта решения, благодаря этому появляется возможность проецирования результатов тестирования человека и вариантов решений на структуру тем деятельности (ТД) с попутным определением весов всех ТД в этой структуре. Заключительная операция фильтрации вариантов решений для пользователя опирается на критерий близости весовых

распределений ТД для человека и варианта решения. В случае если возникает потребность повысить степень доверия к экспертной диагностике вариантов решений, дополнительно подключается процедура множественной экспертизы, а на этапе фильтрации вариантов решений используется средневзвешенное по экспертам распределение весов ТД, причем большие веса отдаются тем экспертам, индивидуальные распределения весов ТД по результатам тестирования которых оказались ближе к соответствующему распределению весов пользователя.

2 Описание психологических тестов

Для выполнения профориентации были разработаны, имплементированы и интегрированы 13 психологических тестов: тест 1 «предпочтения цвета»; тест 2 «предпочтения школьных предметов»; тест 3 «конструктивный рисунок человека из геометрических фигур»; тест 4 «темперамент»; тест 5 «дорога жизни»; тест 6 «органы чувств»; тест 7 «вкусовые предпочтения»; тест 8 «стихии»; тест 9 «платоновы тела»; тест 10 «аспекты деятельности»; тест 11 «уровни деятельности»; тест 12 «антропометрические данные»; тест 13 «предпочтения жанров фильмов».

3 Структура разработанной базы данных

Разработанная в ходе работы над проектом база данных рассчитана на хранение больших объемов данных, связанных с личностями пользователей, а также на удобный доступ разработчиков к этим данным для последующей обработки.

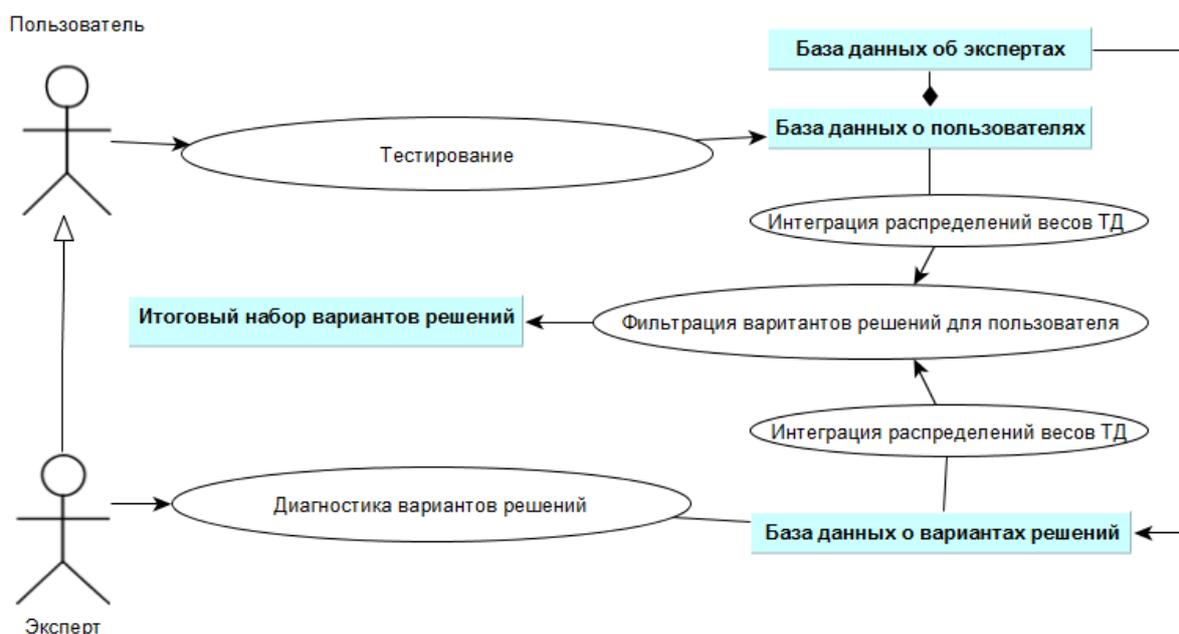


Рисунок 1.1 – Схема подбора подходящих для пользователя вариантов решений в заданной проблематике

Несмотря на то, что задачей создания соответствующего программного обеспечения является подбор подходящих человеку тем и сфер деятельности, а также профессий, в перспективе описываемое программное приложение ориентировано на решение следующих задач человека: профессиональная ориентация, выбор спутника жизни, создание команды для выполнения определенной деятельности, разбиение на команды группы людей, оценка рисков смертности [1].

Каждая из перечисленных задач подразумевает использование своих собственных алгоритмов и некоторых уникальных результатов тестов. Несмотря на то, что в целом структура базы данных для них похожа, была предусмотрена возможность добавления новых блоков в приложение.

Видимо, подобную гибкость базе данных может дать отсутствие жесткой структуры для некоторых данных за счет использования сравнительно новой возможности MySQL – JSON-полей, на основании которых информация, хранящаяся в таких полях, будет иметь смысл только для специализированного средства ее обработки (модуля приложения). Пример такого поля в предложенной структуре базы данных находится в таблице «Тестирование», поле «Результаты». Для дополнительного уточнения результатов тестирования пользователю предлагается сохранять информацию о людях, с которыми он состоит в родственных отношениях. Также для удобства пользователей предусмотрена возможность регистрации.

Таблица 3.1 – Состав таблиц разработанной базы данных

Таблица	Назначение	Содержание
user	Базовая информация о пользователе	Идентификатор, ФИО, user name, e-mail, хеш пароля, дата рождения, роль пользователя в приложении
activity_type	Информация о сфере деятельности	Идентификатор, название, набор описывающих ячеек
user_relation	Описание родственной связи пользователя	Идентификатор, название, уровень близости
user_to_user	Родственная связь пользователя с другим пользователем	Идентификатор первого пользователя, идентификатор второго пользователя, идентификатор типа родственной связи.
user_to_activity	Описание связи пользователя со сферой деятельности	Идентификатор пользователя, идентификатор сферы деятельности, дата расчета, вес сферы деятельности
profession	Описание профессий	Идентификатор профессии, название, идентификатор связанной сферы деятельности, ячейки характеристик сферы деятельности, биты требуемых лидерских качеств
user_info	Связующая таблица для информации о датах рождения с привязкой по пользователям	Идентификатор, идентификатор пользователя, дата рождения
Test	Описание инстанса психологического теста	Идентификатор, название, вес теста, комментарий, описание
question	Описание инстанса вопроса для психологического теста	Идентификатор, идентификатор теста, название, текст, url-адрес изображения
answer	Описание инстанса ответа на вопрос для психологического теста	Идентификатор, идентификатор вопроса, название, url-адрес изображения, текст, JSON-строка ячеек затронутых параметров личности, вес ответа
user_to_testing	Результат прохождения пользователем определенного психологического теста	Идентификатор, идентификатор теста, идентификатор пользователя, JSON-строка с выбранными вариантами ответа, JSON-строка с результатами тестирования после аддитивной свертки, дата прохождения тестирования
user_to_profession_testing	Результат выполненного запроса на рекомендацию профессий с оценкой результатов	Идентификатор, идентификатор пользователя, количество пройденных тестов, общая оценка результатов тестирования, JSON-строка с результатами без влияния психологических тестов, JSON-строка с результатами после перерасчета влияния пройденных психологических тестов, дата прохождения тестирования

Структура базы данных разрабатываемого приложения должна включать в себя хранение всех необходимых для решения этих задач данных. Основные таблицы базы данных, необходимые для непосредственной работы приложения, описаны в таблице 3.1.

Для экспресс-диагностики пользователю предоставляется набор психологических тестов. С целью упрощения возможности расширения набора предоставляемых пользователю психологических тестов был разработан шаблон теста.

Каждый тест выявляет ту или иную особенность индивидуальности человека.

4 Основные особенности программно-алгоритмической реализации

Для работы с базой данных была использована предлагаемая по умолчанию в YiiFramework ORM-система: ActiveRecord, которая позволяет обращаться с таблицами базы данных, как с классами php, а с записями в них – как с экземплярами этих классов.

Основные алгоритмы работы приложения можно разделить на пять групп.

1. Расчет квадрата Пифагора для разных случаев: простой квадрат (9 элементов), расширенный квадрат (23 элемента), средневзвешенный квадрат (23 элемента), рассчитываемый с учетом влияния родственников на этого человека [2].

2. Психологическое и антропометрическое тестирование.

3. Аддитивная свертка результатов психологического тестирования.

4. Расчет подходящих сфер деятельности.

5. Расчет подходящих профессий.

Алгоритмы решения этих задач были разбиты и перенесены в модели PythagorasSquare, UserToActivity, Profession.

Функции расчета простого и расширенного квадрата Пифагора принимают на вход дату рождения пользователя и выдают массив пар «ключ-значение» с элементами квадрата Пифагора. Функция расчета средневзвешенного квадрата Пифагора на вход принимает экземпляр класса User из базы данных по родственникам. В случае отсутствия родственников, алгоритм выполнит расчет расширенного квадрата Пифагора для этого пользователя и вернет его (влияния родственников на человека нет, усложнение алгоритма не требуется). В противном случае функция найдет расширенный квадрат Пифагора для каждого родственника и пересчитает основной массив базового человека с учетом весов соответствующих элементов массивов данных о родственниках.

Так же в классе PythagorasSquare находятся функции для расчета маски лидерских качеств пользователя, расчета ячеек характеристик пользователя, расчета уровней допустимости элементов квадрата Пифагора.

Функции расчета пользовательских сфер деятельности вынесены в класс UserToActivity, который изначально отвечал за интерфейс хранения экземпляров этого класса в базе данных. В классе находятся функции для полного и упрощенного алгоритмов расчета сферы деятельности и ее веса. Во всех функциях используются вызовы методов класса PythagorasSquare.

Функции расчета пользовательских профессий были вынесены в класс Profession, который изначально отвечал за интерфейс хранения экземпляров этого класса в базе данных. В классе находятся функции для полного и упрощенного алгоритмов расчета предпочтительной профессии и ее веса. Во всех функциях используются вызовы методов класса PythagorasSquare.

Учет всех промежуточных результатов ведется в логах приложения.

5 Пользовательский интерфейс приложения

Пользовательский интерфейс приложения состоит из шести основных страниц. Так же в web-приложении присутствуют четыре технические страницы.

Первая страница – индексная страница сайта, содержащая общую информацию о проекте, а также краткое руководство пользователя. Адрес страницы: <http://gsu-psychoanalysis.tk/web/>. Вторая страница – совмещенная SPA-страница авторизации и регистрации. Третья – личный профиль пользователя, используется для заполнения информации о родственниках. Четвертая страница – страница со списком доступных для прохождения пользователем психологических тестов. Пятая страница – AngularJS SPA-приложение, которое отвечает за получение технической информации о тесте из бэкенда, а также рендеринг теста и подсчет результатов. Шестая страница – совмещенная страница результатов рекомендаций по сферам деятельности. Также на этой странице располагается пользовательский интерфейс для оценки результатов рекомендаций.

С внешним видом основных пользовательских страниц можно ознакомиться на рисунках 5.1–5.3.

6 Результаты апробации подбора профессий с использованием психологической диагностики

Разработанная версия клиент-серверного web-приложения является продолжением реализации, описанной в [2], и предоставляет возможность пользователю прохождения серии психологических тестов с целью навигации индивидуальных решений в рамках подбора сфер деятельности и профессий.

Полный список используемых профессий содержится в базе данных.

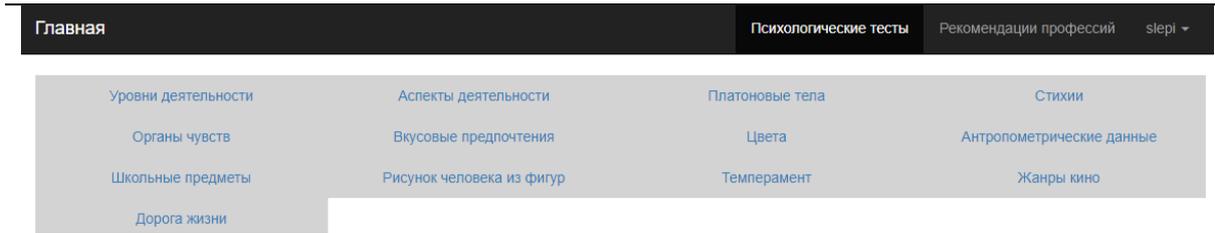


Рисунок 5.1 –Страница со списком психологических тестов

Рекомендуемые профессии и сферы деятельности

Прохождение психологического тестирования значительно улучшает результаты рекомендаций!

Так же стоит обратить внимание на то, что результаты в процентах относительно самого большого.

Результаты автоматически перерасчитываются после каждого нового пройденного теста

В данный момент Вы прошли 0 из 13 тестов, что является довольно слабым результатом. Прохождение тестов увеличит точность ваших прогнозов!

Наиболее рекомендуемые сферы деятельности:

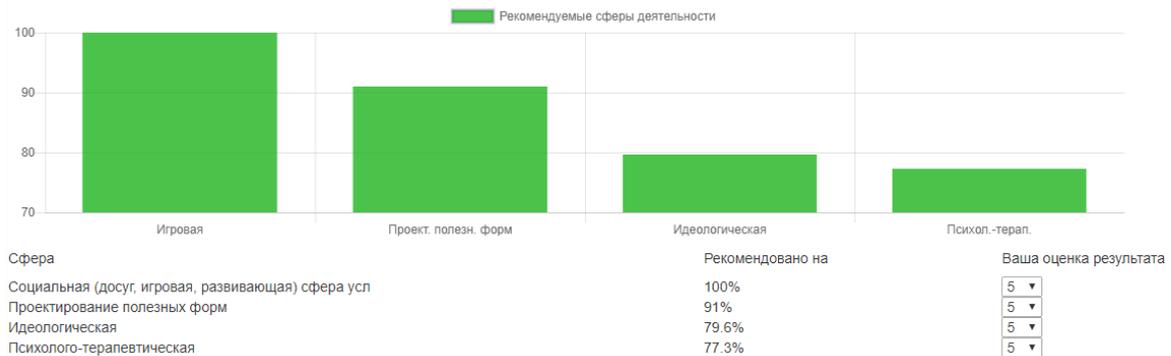


Рисунок 5.2 – Верхняя часть страницы с рекомендациями сфер деятельности

Наиболее рекомендуемые профессии:

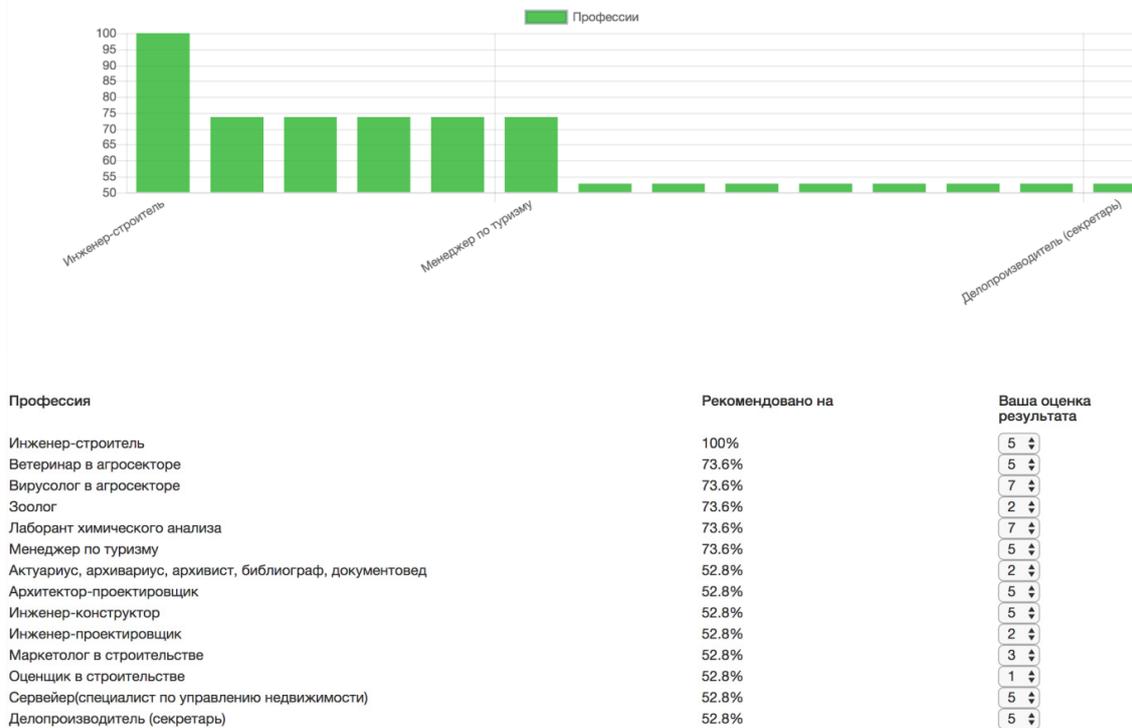


Рисунок 5.3 – Нижняя часть страницы с рекомендациями профессий

Статистика по выдаваемым сферам деятельности

Название сферы	Сколько раз была рекомендована	Средняя оценка пользователями	Сколько раз была не рекомендована	Средняя оценка пользователями
СМИ	14	6.2	2	6.5
Философская	16	5.6	8	5.4
Социальная (досуг, игровая, развивающая) сфера усл	9	5.2	4	7.5
Медико-оздоровительная	9	4.4	3	7.3
Аграрно-экологическая	0	-	11	5.4
Техническое творчество	0	-	17	5.2
Социально-бытовая сфера услуг	1	10	18	5.7
Материальное производство	7	5.6	5	7.2
Педагогический	6	5	6	6.3
Культуры и искусств	5	7.4	6	5.5
Государственно-правовая	4	4.5	5	5.6
Духовно-религиозная	16	5	0	-
Экономическая	6	6.7	4	6.5
Общественно-научная	0	-	12	5.3
Естественнонаучная	10	5.8	0	-
Идеологическая	3	6	8	6
Психолого-терапевтическая	9	5.2	3	7.7
Проектирование полезных форм	4	6	2	5

Рисунок 6.4 – Статистика по сферам деятельности

После разворачивания приложения на хостинге, на нем было зарегистрировано 28 пользователей, которые прошли в общей сумме 170 психологических тестов, получили 46 рекомендаций по профессиям и сферам деятельности и оставили в итоге порядка 30 оценок выдачи. Приложение позволяет делать статистическую выборку на основании результатов, с которой можно ознакомиться на рисунках 6.1–6.3.

Полученная статистика позволяет сделать выводы о наиболее часто выдаваемых результатах, а также отлаживать алгоритм за счет корректировки весов тестов и наборов ТД в описании профессий, отслеживая оценки результатов пользователями. Написанный алгоритм позволяет представлять любую статистическую информацию из базы данных в виде графиков.

Пример выгруженной статистической информации, представляющей собой статистику по частоте выпадения сфер деятельности и средней оценки пользователями, приведен на рисунке 6.4.

Написанный инструмент позволяет отлаживать алгоритм на основании статистического анализа. Например, на таблице из рисунка 6.4 можно увидеть, что у сферы деятельности «техническое творчество» аномально высокая частота нерекондации.

Помимо анализа статистики сфер деятельности был проведен анализ выборок профессий. В связи с тем, что список профессий содержит более 350 наименований, было решено сделать выборки: наиболее часто выдаваемые профессии; наиболее оцененные профессии; наименее оцененные профессии; список профессий, которые не рекомендовались никому.

На текущий момент количество профессий в этом списке весьма значительно, однако на малой выборке тестируемых рано делать выводы об ошибочно поставленных весах профессий. Так как список пересоставляется в режиме онлайн, при росте пользовательской базы он будет сокращаться, и можно будет принимать меры по изменению необходимых весов и описаний для данных профессий.

Исходный код продукта и скрипты создания базы данных располагаются в репозитории GitHub и доступны для просмотра и редактирования другим специалистам по адресу https://github.com/yslepianok/analysis_site. Программное решение развернуто на хостинге и доступно желающим в Интернете по ссылке <http://gsu-psychoanalysis.tk>.

Заключение

Предложенный выше инструмент автоматизации подбора подходящих человеку решений представляет самонастраивающуюся (с помощью оценок пользователей) систему. Эффективность разработанного web-приложения опирается на:

- достаточно полную систематизацию деятельности человека, представленную на текущий период 36-ю темами [1], [2];
- набор разнообразных тестов (психологических, антропометрических и квадрата Пифагора);
- алгоритмы проецирования результатов тестов на структуру деятельности с параллельной их аддитивной сверткой в интегральное распределение значимостей тем деятельности;
- гибкую (за счет обратной связи с пользователем) систему коррекции как самих алгоритмов проекции вариантов тестовых ответов на

соответствующие наборы тем деятельности, так и весовых параметров самих тестов на этапе их свертки;

– сравнительно адекватное состояние начальных тестовых проекций и их весовых параметров, что подтверждается правдоподобностью рекомендаций сфер деятельности и профессий в результате предварительной апробации сайта;

– обеспечивающую гибкость системы программную реализацию, позволяющую администратору сайта корректировать алгоритмы и веса тестовых проекций, минуя программный код и имея дело только с базой данных.

Разрабатывая подобные рекомендательные системы [6], всегда нужно помнить, что мы имеем дело с людьми, т. е. с очень разным жизненным опытом, мировоззренческими установками и общепринятыми штампами предпочтения или недоверия. Многим вообще не нужен адекватный совет и они заходят на сайт просто из праздного любопытства. Таких пользователей система должна научиться фильтровать, в частности, понижать веса их оценок, рекомендуемых сайтом решений.

Таким образом, дальнейшее развитие разрабатываемого проекта предполагается вести по двум направлениям:

1) повышение адекватности и правдоподобности рекомендаций (за счет более глубокой систематизации тем деятельности, расширения спектра тестов и отбрасывание малоинформативных, фильтрацию ложных пользовательских оценок, добавления инструментов экспертного описания и оценивания вариантов предлагаемых решений);

2) повышение показателей посещаемости сайта и доверия к его рекомендациям (за счет привлекательного дизайна, высокой скорости

обработки данных, удобного интерфейса, SEO и иных маркетинговых инструментов продвижения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Осипенко, Н.Б. Методологические аспекты автоматизации поддержки принятия стратегических решений / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2016. – № 6 (99). – С. 59–64.

2. Осипенко, А.Н. Автоматизация диагностики потенциальных качеств человека при выборе профессии / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко, Ю.А. Слепенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – С. 88–96.

3. Осипенко, Н.Б. Автоматизация оценки риска смертности человека с использованием дискриминантного анализа / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2016. – № 3 (96). – С. 75–79.

4. Осипенко, А.Н. Экспертно-аналитическая оптимизация при формировании социальных групп / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко, Е.В. Невдашенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 89–93.

5. Пример применения метода корреляционно-регрессионного анализа в производственной проблеме / Н.Б. Осипенко [и др.] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 59–64.

6. Брейкин, Е.А. Рекомендательная система на основе коллаборативной фильтрации / Е.А. Брейкин // Молодой ученый. – 2015. – № 13. – С. 31–33.

Поступила в редакцию 23.03.18.

УДК 004.415:621.391.64

ПРИНЦИП И ВОЗМОЖНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ С СИСТЕМОЙ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИК-ИЗЛУЧЕНИЙ

А.А. Петушков, М.И. Жадан

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE PRINCIPLE AND CAPABILITIES OF USER INTERACTION WITH THE INFORMATION TRANSMISSION SYSTEM USING INFRARED RADIATION

A.A. Petushkov, M.I. Zhadan

F. Scorina Gomel State University

Статья посвящена принципам работы компьютерной системы передачи и обработки информации с использованием ИК-излучения. Реализовано взаимодействие пользователя с системой, позволяющей воссоздать работу огнестрельного оружия: производить выстрелы, перезаряжать оружие и контролировать состояние системы, используя дисплей. Описывается возможность конфигурирования и опроса значений параметров при помощи консольных команд. Использование конечных автоматов делает компьютерную систему адаптируемой и расширяемой. При практическом применении разработанная система может быть использована правоохранительными и военными органами для обучения боевым навыкам ведения боя.

Ключевые слова: информация, ИК-излучение, стрельба, оружие, конечный автомат, пользователь, дисплей, программное обеспечение.

The principles of the operation of a computer system for transmitting and processing information using infrared radiation are considered. Interaction of the user with a system that allows recreating the operation of firearms: to produce shots, reload weapons and monitor the status of the system using the display is implemented. The possibility of a configuring and polling parameter values using console commands is described. Using finite state machines makes the computer system adaptable and extensible. In practical application, the developed system can be used by law enforcement and military authorities to train combat skills.

Keywords: information, infrared radiation, firing, weapon, finite state machine, user, display, software.

Введение

Описание технологии передачи информации посредством ИК-излучений, использование её для моделирования работы огнестрельного оружия, выделение этапов создания компьютерной системы передачи и обработки информации, используя ИК-сигналы, изучение основных характеристик и методик работы микроконтроллерных систем, выбор технической составляющей системы, построение структуры приложения и разработка программного обеспечения на основе созданной логики приведено в работе [1].

В статье описан принцип и возможности взаимодействия пользователя с системой, позволяющей имитировать работу огнестрельного оружия путём передачи ИК-сигналов, с последующей их регистрацией в случае попадания, для дальнейшей обработки на сервере.

1 Принцип работы системы

Для написания программного обеспечения, управляющего микроконтроллерами, используется среда AVRProjectIDE, которая позволяет, используя платы Arduino, программировать на языке программирования C, тем самым во много

раз ускоряя работу устройства по сравнению со стандартной средой программирования Arduino IDE [2]. Для моделирования и отладки конечных устройств использовался программный пакет Proteus VSM 7 версии. Этот пакет позволяет собрать схему любого электронного устройства и симулировать его работу, выявляя ошибки, допущенные на стадии проектирования и трассировки. В роли сервера выступает программа, написанная на Node.js, которая собирает в себе все статистические данные и выводит их на веб-странице [3].

Модель системы состоит из ряда автономных устройств, передающих и принимающих разного рода информацию. Система включает в себя следующие устройства [4]:

1. Модель оружия, посредством которого осуществляется обработка входных данных от пользователя (нажатие на спусковой крючок, нажатие на кнопку перезарядки и использование разного рода предметов, оснащенных RFID метками). Это устройство передаёт данные посредством ИК-излучений.

2. Принимающее устройство, оформленное в виде жилета, с рядом датчиков, улавливает

ИК-излучение, обрабатывает его, выполняет ряд необходимых действий (блокирует оружие при необходимости) и отправляет полученные данные на сервер.

3. Устройство сервер аккумулирует все полученные данные и строит на основе этих данных всю необходимую статистику.

4. Дополнительные устройства моделируют работу разного рода взрывчаток направленного действия.

На рисунке 1.1 представлена часть схемы, отвечающая за моделирование поведения ИК-передатчика и ИК-приёмника. К ним подключены осциллографы для контроля передачи и приёма сигнала. При замыкании цепи и совершении выстрела происходит приём данных, т.е. ИК-светодиод направлен на ИК-приёмник. В случае приёма данных происходит их дальнейшая обработка. Если разомкнуть переключку и осуществить выстрел, произойдёт передача данных, но данные приняты не будут, т.е. выстрел не попал в цель.

Общение в системе происходит с помощью сообщений. Сообщения необходимы для изменения состояния того или иного автомата. Для корректной работы системы механизм передачи сообщений сделан двухступенчатым, это значит, что флаги сообщений имеют три состояния «неактивно», «установлено, но неактивно» и «активно». Как только функция SendMessage будет вызвана одним из автоматов, то происходит

переход сообщения в состояние «установлено, но неактивно». В то время автоматы, которые находятся по списку ниже, перестают реагировать на сообщение. Как только цикл программы будет пройден до конца, все отправленные сообщения переходят в состояние «активно» и находятся в этом состоянии в следующем цикле программы до его сброса. Особенностью данного подхода, на которую стоит обращать внимание при разработке, является то, что принять сообщение может только один автомат, причём находящийся выше по списку вызовов функций ProcessKA. Часть основных сообщений, передаваемых программой, представлена на рисунке 1.2

На рисунке 1.3 представлена диаграмма вариантов использования устройства передачи информации посредством ИК-излучений.

Пользователь устройства может выполнять следующие действия:

- использовать меню;
- совершать «выстрелы»;
- перезаряжать оружие.

Устройство взаимодействует с пользователем через отображение информации на дисплее:

- изменение информации в меню;
- отображение информации о попадании.

Устройство взаимодействует с другим устройством:

- отправляет информацию;
- получает информацию.

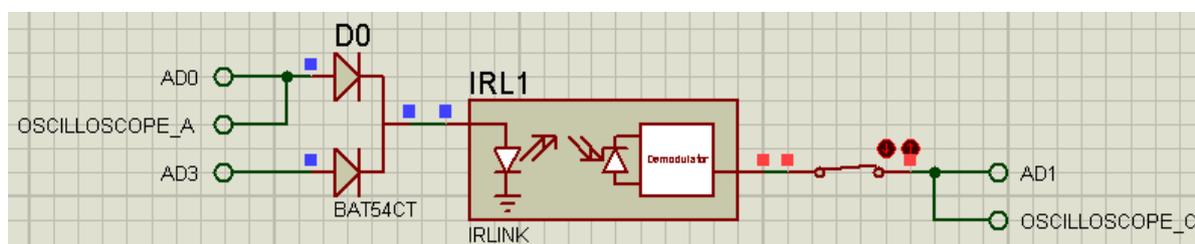


Рисунок 1.1 – Моделирование поведения ИК-передатчика и ИК-приёмника

1:	#define MSG_SENSOR_ERROR	0	// Ошибка в работе сенсора приёма ИК
2:	#define MSG_SENSOR_READY	1	// Сенсор в рабочем состоянии
3:	#define MSG_UART_MESSAGE_SEND	2	// Отправлено сообщение по UART
4:	#define MSG_UART_MESSAGE_GET	3	// Получено сообщение по UART
5:	#define MSG_KEY_PRESSED	4	// Нажата кнопка
6:	#define MSG_IR_MESSAGE_GET	7	// Получен пакет данных по ИК-каналу
7:	#define MSG_PLAYER_STATUS_ACTIVE	8	// Игрок активирован (жив)
8:	#define MSG_WEAPON_ACTIVE_TRUE	9	// Оружие активировано
9:	#define MSG_WEAPON_ACTIVE_FALSE	10	// Оружие деактивировано
10:	#define MSG_WEAPON_FIRE	11	// Произведён выстрел
11:	#define MSG_WEAPON_RELOAD_BEGIN	12	// Начало перезарядки оружия
12:	#define MSG_WEAPON_RELOAD_END	13	// Конец перезарядки оружия
13:	#define MSG_BATTERY_ERROR	14	// Индикатор заряда не подключён
14:	#define MSG_BATTERY_POWER_OFF	15	// Батарея разряжена
15:	#define MSG_BATTERY_POWER_CHANGE	16	// Изменился заряд батареи
16:	#define MSG_SOUNDS_ALL	17	// Включить все звуки
17:	#define MSG_SOUNDS_OFF	18	// Выключить все звуки

Рисунок 1.2 – Основные сообщения, передаваемые системой

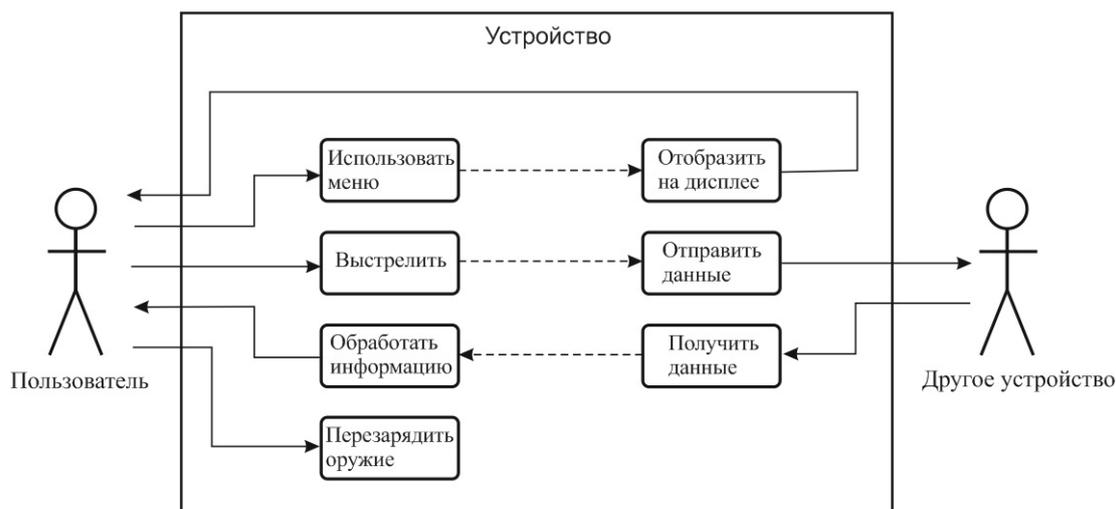


Рисунок 1.3 – Диаграмма вариантов использования

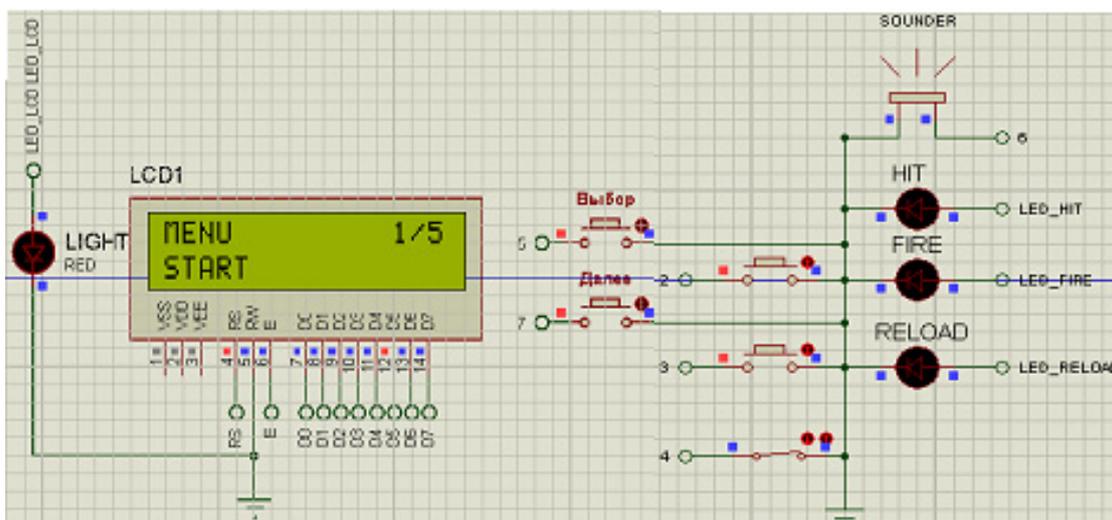


Рисунок 2.1 – Конфигурационное меню

2 Работа с системой

Схема системы передачи информации с использованием ИК-излучений представлена в работе [1]. После запуска системы и инициализации всех модулей происходит запуск конфигурационного меню (рисунок 2.1). Запуск этого меню можно при необходимости отключить. В программе предусмотрены стандартные настройки, имеется возможность конфигурирования системы через командную оболочку при помощи UART.

На рисунке 2.1 изображён принцип подключения дисплея, его подсветки и кнопок управления к микроконтроллеру. В связи с необходимостью упростить загроможденность системы кнопками и повысить её отказоустойчивость, все управление в меню происходит двумя кнопками «Выбор» и «Далее». Кнопка «Выбор» отвечает за выбор элемента меню и увеличение в большую сторону выбранного параметра. Кнопка «Далее»

осуществляет переход к следующему пункту меню. Динамик, необходимый для воспроизведения звуков выстрела, подключён к пину 6 микроконтроллера. Кнопка выстрела (2), перезарядки (3) и переключатель режимов огня (автоматический и полуавтоматический) подключены к пину 4. На схеме предусмотрены световые индикаторы попадания в игрока, выстрела оружия и необходимости перезарядки (при пустой обойме). Следует отметить, что при отсутствии действий в системе предусмотрено автоматическое отключение подсветки дисплея через заданный промежуток времени, это позволяет экономить заряд батареи.

Реализованную программу можно адаптировать практически под любой дисплей. Рассмотрим подробнее информационную составляющую дисплея:

- слева сверху отображается название корневого элемента меню;

- сверху справа отображается номер текущего элемента меню и через слэш общее количество элементов;
- внизу слева отображается название элемента меню или параметра;
- в случае, если элемент меню является параметром, то справа будет отображено его значение (рисунок 2.2).

```
MENU>PLAYER 3/4
HEALTH [100]
```

Рисунок 2.2 – Отображение параметра с возможностью редактирования

Отображаемые параметры могут быть редактируемы или нет. Значения параметров, которые могут быть изменены, выделяются квадратными скобками как показано на рисунке 2.2. Изменение параметра происходит нажатием на кнопку «Выбор», после чего происходит увеличение параметра на единицу. У каждого параметра в меню предусмотрено максимально допустимое значение и в случае выхода за пределы этого значения происходит обнуление этого значения и его можно заново увеличивать, начиная с 0.

Предусмотрено и реализовано изменение логических значений, отображаемых значением «ON» или «OFF», как показано на рисунке 2.3.

```
MENU>HARDWARE1/2
SOUNDS [OFF]
```

Рисунок 2.3 – Изменение логических значений

В меню присутствует еще тип значения – вычисляемое, в случае изменения необходимых полей происходит пересчет этого параметра, например: в конфигурации можно изменить количество игроков в команде и при изменении ID игрока будет меняться номер команды, к которой он принадлежит (рисунок 2.4).

```
MENU>PLAYER 2/4
TEAM 003
```

Рисунок 2.4 – Вычисляемые значения

После выполнения всех необходимых изменений конфигурации необходимо в главном меню выбрать пункт «Start», после чего происходит перевод системы в «боевое» состояние с возможностью производить выстрелы и получать урон. Меню меняется с конфигурационного на игровое.

В связи с тем, что в процессе игры необходимо отображать информацию в достаточно большом размере (количество патронов, жизней, обойм и др.), были разработаны иконки, дающие возможность отображать произвольные символы, не предусмотренные производителем дисплея. Пример таких символов представлен на

рисунке 2.5 и представляет собой большие цифры, разбитые на две строки дисплея, отображающие количество оставшихся патронов в обойме. На основном интерфейсе игрока, помимо отображения количества патронов в текущей обойме, после символа «С» через двоеточие отображается количество оставшихся обойм. В правом углу отображается тип огня: автоматический (А) и одиночный (S). А так же отображается общее количество жизней в процентном соотношении после символов «HP».

```
■■■■ ■■■ C:03 S
■■■■ ■■■ HP:024%
```

Рисунок 2.5 – Основной интерфейс игрока

При совершении выстрела, перезарядки или изменения переключателя огня происходит автоматическое обновление данных дисплея.

В процессе игры пользователь может зайти в игровое меню, в котором он может: посмотреть оставшееся игровое время или продолжительность текущей игры, а также журнал попаданий по игроку по кнопке «Выбор». После входа в игровое меню первым элементом будет количество оставшегося времени на текущую игру (рисунок 2.6). Время автоматически обновляется при его изменении и выглядит это как обычный секундомер с обратным отсчетом.

```
MENU 1/4
TIME LEFT 00:42
```

Рисунок 2.6 – Отображение оставшегося игрового времени

Время, оставшееся на игру, рассчитывается исходя из установленного в параметрах времени на матч и прошедшего времени с внутренних программных часов от момента начала игры. Следуя далее по меню, можно увидеть текущее время игры, как показано на рисунке 2.7. В системе работает таймер, который является внутренними часами и ведёт отсчет времени с начала работы системы.

```
MENU 2/4
GAME TIME 00:06
```

Рисунок 2.7 – Отображение игрового времени

Далее идёт пункт меню «Information», в котором пользователь может просмотреть свои игровые параметры, такие как: номер игрока, номер команды и урон оружия (рисунок 2.8).

```
MENU>INFORMAT3/4
DAMAGE 010
```

Рисунок 2.8 – Отображение значения урона оружия

В системе также предусмотрено сохранение информации о «попаданиях» в игрока с дальнейшим её отображением в меню. Для просмотра журнала попаданий нужно войти в пункт меню «Show Log» (рисунок 2.9). В журнале сохраняется номер попадания (N), игровое время, в которое было зарегистрировано попадание (TIME), ID-игрока, совершившего выстрел и урон (DMG), который он нанёс. Перемещение между записями происходит по кнопке «Далее».

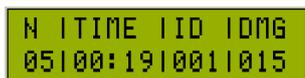


Рисунок 2.9 – Отображение журнала попаданий

Для возврата в основной интерфейс игрока можно нажать на любую кнопку оружия или же выждать время, через 5 секунд ожидания меню возвращается в своё игровое состояние.

При попадании в игрока на экране будет отображена соответствующая надпись, с обозначением индивидуального номера стреляющего и уроном, как показано на рисунке 2.10.



Рисунок 2.10 – Отображение информации о попадании

В данном примере выстрел произведён в самого себя. Стоит заметить, что в системе имеется параметр, который отвечает за «дружественный огонь», т. к., если убрать этот параметр, игроки с одной команды не смогут причинить друг другу урон, в данном примере эта опция включена.

Если у игрока после очередного попадания не осталось жизней, то на экране отображается надпись о его смерти (рисунок 2.11), и, уже в зависимости от игрового режима, он останется мертвым до новой игры или запустится таймер с отсчётом времени, после которого игрок может продолжить игру.



Рисунок 2.11 – Отображение оставшегося игрового времени

3 Использование терминальной оболочки

При подключении системы к компьютеру через USB появляется возможность её конфигурирования и опроса значений параметров при помощи консольных команд. Также предусмотрена возможность отправки всех пересылаемых сообщений конечных автоматов для контроля их работоспособности.

Рассмотрим вариант использования консольных команд для конфигурирования и опроса

системы. Процесс происходит следующим образом: пользователь (или сервер) посылает команду в виде: [команда] [параметры], команда и каждый из параметров разделены пробелами. После получения системой команды, она её обрабатывает и посылает ответ пользователю в виде: [запрашиваемая команда]:[ответ]. В качестве ответа отправляется состояние, с которым была выполнена команда («ок» – команда выполнена без ошибок; «invalid» – команда не найдена и др.). Дублирование команды сделано с учётом того, что разные команды могут иметь разное время выполнения. Есть возможность добавить в ответ идентификатор устройства, чтобы иметь представление какое устройство и какую команду выполнило. Следует отметить, что возможен сокращённый вариант ответа без дублирования команды.

Для проверки работоспособности командной оболочки считаем текущий параметр «количество жизней», изменим его и считаем повторно. Результат проделанных действий представлен на рисунке 3.1.



Рисунок 3.1 – Работа командной оболочки

Первой строкой происходит запрос текущего значения «жизней» путём отправки символа «р» конечному устройству, после чего следующей строкой приходит от устройства ответ в виде отправленной команды и после двоеточия указан текущий размер «жизней» со значением 0. Затем посылается команда изменения «количества жизней» на 50 путём отправки символа «h» и значением параметра в размере 50. Подобным образом происходят и дальнейшие проверки значения.

Заключение

Изложен принцип взаимодействия пользователя с системой передачи информации с использованием ИК-излучений. Описано строение модели системы и представлена диаграмма вариантов использования устройства передачи информации. Подробно рассмотрена работа системы и конфигурационного меню. Описывается возможность конфигурирования и опроса значений параметров при помощи консольных команд.

Созданная в ходе выполнения работы компьютерная система для передачи информации представляет собой конечное устройство, способное принимать и отправлять информацию, осуществлять взаимодействие с пользователем.

Пользователь в состоянии производить выстрелы, перезаряжать оружие, контролировать состояние системы, используя дисплей. Благодаря тому, что система разработана с использованием конечных автоматов, она легко адаптируема и расширяема.

При практическом применении разработанная система может быть использована правоохранительными и военными органами для обучения боевым навыкам ведения боя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петушков, А.А.* Система передачи информации с использованием ИК-излучений / А.А. Петушков, М.И. Жадан // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 89–96.

2. *Татарчевский, В.А.* Некоторые мысли по поводу программирования встроенных систем / В.А. Татарчевский. – СПб.: Питер, 2006. – 280 с.

3. *Непейвода, Н.Н.* Стили и методы программирования / Н.Н. Непейвода. – М.: Интернет-Университет Информационных технологий, 2005. – 326 с.

4. *Петушков, А.А.* Разработка системы обучения владением стрелковым оружием / А.А. Петушков, М.И. Жадан // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов: в 2 ч. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – Ч. 1. – С. 208–209.

Поступила в редакцию 19.04.18.

УДК 519.86.62-192

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАФА СОСТОЯНИЙ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.Н. Шевченко, А.Ю. Литвин, М.А. Федянин

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

RELIABILITY ANALYSIS OF TECHNICAL SYSTEMS BY SIMULATION MODELING OF GRAPH OF STATES

D.N. Shevchenko, A.U. Litvin, M.A. Fedianin

Belarusian State University of Transport, Gomel

Рассматривается задача анализа надежности технической системы, заданной графом состояний, методом имитационного моделирования, который преодолевает ряд ограничений марковского метода анализа. Предлагается модель, программные средства и технология исследования надежности технической системы. Исследуется производительность вычислительного процесса и точность моделирования в зависимости от типа используемой вычислительной системы, ее настроек, а также от количества параллельно работающих вычислительных потоков.

Ключевые слова: надежность, граф состояний, имитационное моделирование, вычислительная система, производительность вычислительного процесса.

An approach is proposed for reliability analysis of a technical system, which is specified by the graph of states, using simulation. This method overcomes the limitations of the Markov method of analysis. The model, software and technology of investigation of the reliability of a technical system are proposed. The performance of the computational process and the accuracy of modeling, depending on the type and properties of the computer system and the number of computational flows are investigated.

Keywords: reliability, graph of states, simulation modeling, computer system, performance of computational process.

Введение

Для анализа надежности технических систем (ТС) широко используется марковский метод, который позволяет определять следующие показатели надежности восстанавливаемых, реконфигурируемых систем: вероятность безотказной работы (P) и функцию отказа (F); среднюю наработку до отказа (MTTF); среднюю наработку между отказами (MTBF); среднее время восстановления (MTTR); стационарный K и нестационарный $K(t)$ коэффициент готовности [1], [2]. В качестве математической модели марковский метод использует граф состояний (ГС) и имеет ряд ограничений:

1) время пребывания ТС в каждом состоянии должно подчиняться экспоненциальному распределению. Только в этом случае графу будет соответствовать система дифференциальных уравнений Чепмана – Колмогорова, которая имеет известное решение;

2) большое количество состояний (более 1000) не позволяет автоматизировано решать систему Чепмана – Колмогорова ни в одном из пакетов компьютерной математики.

Указанные ограничения могут преодолеваются благодаря имитационному моделированию (ИМ) ГС, т. е. компьютерному воспроизведению процесса переходов ГС в ускоренном модельном времени с одновременным сохранением статистики о переходах ГС. Основным ограничением

самого ИМ является ресурсоемкость оценки показателей высоконадежных систем: требуется большое количество реализаций модели в течение длительного модельного времени. Однако современные возможности распараллеливания вычислений в многопроцессорных компьютерах, компьютерных кластерах и облачных вычислительных сервисах снимают указанное ограничение.

1 Описание тестовой задачи

Рассмотрим задачу анализа безотказности подсистемы задающего уровня микропроцессорной централизации «ипуть» [3], включающую два резервированных АРМ диспетчера (рисунок 1.1). Для допущения об экспоненциальном распределении времени безотказной работы и времени восстановления элементов ТС марковским методом получено аналитическое решение задачи [2], а затем – решение методом ИМ.



Рисунок 1.1 – Структурная схема надежности подсистемы задающего уровня микропроцессорной централизации «ипуть»

2 Предлагаемое решение задачи

Для автоматизации ИМ было разработано специальное приложение MANADA-SMGS, которое имеет следующие особенности. Приложение реализовано на Java 8 для простоты организации платформонезависимости и распараллеливания вычислений. Исходные данные о структуре и характеристиках моделируемого ГС, а также условия моделирования извлекаются из подготовленного XML-файла задания; результаты моделирования записываются в файл результатов; для отладки (при необходимости) создается лог-файл.

Исходные данные о моделируемом ГС задаются двумя матрицами:

1) матрица состояний определяет номера состояний, их принадлежность к множеству работоспособных или неработоспособных состояний ГС, вероятность пребывания в данном состоянии в нулевой момент времени;

2) матрица переходов определяет закономерности времени до перехода ГС в новое состояние. Если время до перехода в новое состояние определяется экспоненциальным распределением, то матрица переходов хранит интенсивности переходов ГС из состояния i в состояние j . Если предполагается двухпараметрическое распределение (Вейбулла, логнормальное или равномерное), то используются две матрицы. В одной из них задается первый параметр, а во второй – второй параметр распределения.

Основными показателями безотказности ГС, контролируемые в каждой реализации ИМ, являются: наработка системы до отказа (Time To Failure – TTF) или наработка между отказами (Time Between Failures – TBF), а также время восстановления ГС. В первом случае предполагается, что в начальный момент времени исследуемая ГС находится в исходном работоспособном состоянии; поэтому после моделирования отказа ГС явно переводится в исходное состояние. Выбор режима моделирования (TTF или TBF) определяется исследователем.

При запуске приложения создается вычислительный процесс, включающий поток-планировщик. В свою очередь, поток-планировщик запускает один или несколько вычислительных потоков (рисунок 2.1), которые реализуют одинаковый алгоритм, но используют генераторы случайных величин, инициализированные различными стартовыми числами. Количество и правило организации вычислительных потоков определяются пользователем. Указанная структура многопоточности не требует синхронизации потоков, что замедлило бы вычислительный процесс.

Поток-планировщик периодически проверяет условия остановки моделирования, после выполнения которых анализирует статистику, полученную каждым вычислительным потоком; формирует файл-результатов.

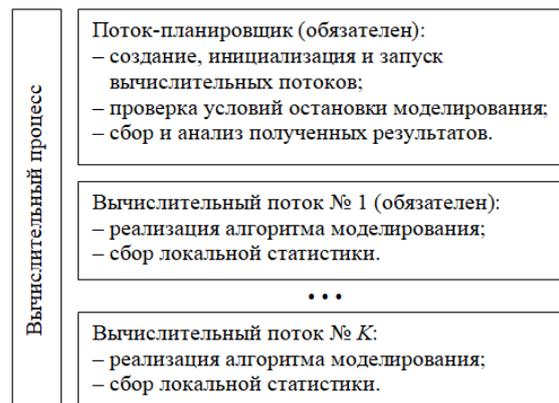


Рисунок 2.1 – Схема многопоточной организации вычислительного процесса

Каждый вычислительный поток локально сохраняет следующую статистику: сумму значений времени наработки ГС до отказа – TTF (или между отказами – TBF, в зависимости от режима моделирования); сумму квадратов значений TTF (или TBF); сумму значений времени восстановления ГС после отказа; количество реализаций TTF, превышающих заданную наработку; общее количество полученных реализаций TTF (или TBF). Кроме того, каждый поток в глобальном массиве может сохранять значения реализаций TTF, которые используются для визуализации функции отказа ГС и оценки гамма-процентной наработки до отказа.

Разработанное приложение позволяет определять:

- точечную и интервальную оценку средней наработки ГС до (или между) отказами;
- точечную оценку дисперсии TTF (или TBF);
- точечную оценку гамма-процентной наработки до отказа TTF;
- точечную и интервальную оценку вероятности безотказной работы [4].

Для обеспечения высокой точности вычислений в приложении MANADA-SMGS используются: 64-битные целые числа; 64-битные вещественные числа повышенной точности (тип DOUBLE); а также вещественные числа сверхвысокой точности для хранения 30 значащих цифр мантисы (Java-объект BigDecimal). Данной точности достаточно для того, чтобы при суммировании 10 млрд. чисел типа DOUBLE не потерять ни одной значащей цифры.

В приложении используются три качественных генератора псевдослучайных чисел: «Marsaglia-Multicarry», «XOR-Shift», «вихрь Мерсенна» [5]. Первые два алгоритма реализованы в вычислительных потоках и используются для розыгрыша времени пребывания ГС в состояниях с четными и нечетными номерами соответственно. «Вихрь Мерсенна» реализован в потоке-планировщике и используется для начальной

инициализации генераторов «Marsaglia-Multi-sargu» и «XOR-Shift» в вычислительных потоках. В свою очередь генератор «вихрь Мерсенна» может быть инициализирован значениями пользователя или таймером компьютера.

3 Исследование производительности вычислительного процесса

Производительность приложения (вычислительного процесса) определяется особенностями используемой вычислительной системы (ВС): количество ядер, тип и объем памяти, тип и настройки операционной системы и прочее, а также самого исполняемого кода (особенности работы с подсистемой ввода-вывода, взаимодействие с памятью). Выполним экспериментальное исследование влияния многопоточности на скорость ИМ при решении вышеприведенной тестовой задачи на четырех доступных ВС (с различными настройками):

- ВС1а – ноутбук Acer Extensa 5635G, 2009 г.в., Core™2 Duo CPU T6600 @2.2GHz, 2 ядра, 3 ГБ ОЗУ, Windows XP Pro SP3, 32-bit;

- ВС1б – то же, но вычислительному процессу разрешено использовать только одно из двух ядер процессора;

- ВС1в – то же, что в предыдущем пункте, но вычислительный процесс имеет наивысший приоритет «реального времени»;

- ВС2а – персональный компьютер, Pentium® CPU G840, 2013 г.в., @2.8GHz, 2 ядра, 4 ГБ ОЗУ, Windows 7 SP1, 64-bit;

- ВС2б – то же, но вычислительному процессу разрешено использовать только одно из двух ядер процессора;

- ВС2в – то же, что в предыдущем пункте, но вычислительный процесс имеет наивысший приоритет «реального времени»;

- ВС3а – сервер с 2 процессорами Xeon® CPU E5-2620 v4 @2.1GHz, 2017 г.в., Windows Server 2016 Standart 64-bit, виртуальный сервер – 4 ядра из 16 доступных;

- ВС3б – то же, но организованный виртуальный сервер использует 8 из 16 доступных ядер;

- ВС4 – облачный вычислительный сервис Amazon Elastic Compute Cloud (Amazon EC2) [6]. Amazon EC2 предоставляет в бесплатное использование виртуальный компьютер «t2.micro», который включает: 1 ГБ оперативной памяти; 10 % вычислительной мощности одного ядра процессора Intel Xeon® CPU E5-2676 v3 @2.4GHz (или аналогичного) с обеспечением постоянного уровня производительности или возможностью повышения производительности до 100 %.

Следует учитывать, что приложение MANADA-SMGS задействует лишь ресурсы процессора и не более 250 МБайт оперативной памяти; не требует дисковой памяти и сетевых устройств. Время работы приложения на ВС1, ВС2 и ВС3 задавалось равным 10 минутам, а на

ВС4 – 100 минутам (учитывая бесплатно доступную производительность процессора в 10 %). По результатам моделирования определялось количество реализаций времени наработки ТС до отказа (ТТФ, таблица 3.1).

Из значений в таблице 3.1 видно, что

- для многоядерных ВС увеличение количества потоков с 1 до 2 проявляется практически двукратным увеличением производительности;

- при увеличении количества потоков с 1 до 2 скорость моделирования существенно возрастает даже для одноядерных ВС. Это вызвано тем, что Windows не отдает единственному вычислительному потоку всех ресурсов процессора, и они могут использоваться вторым потоком;

- настройки вычислительного процесса, принятые в Windows по умолчанию (например, «средний» приоритет), предоставляют ему порядка 60–80 % ресурсов процессора;

- когда за ресурсы ядра процессора конкурируют три и более вычислительных потока, общая скорость вычислительного процесса снижается;

- максимальная производительность ядра ВС1 составляет порядка 330 реализаций ТТФ; для ВС2 и ВС3 эта цифра составляет порядка 2600 реализаций, а для ВС4 – порядка 2400 реализаций ТТФ. Используя данные значения можно прогнозировать производительность вычислительного кластера, построенного на базе множества соответствующих ВС;

- существенно низкая производительность 32-битной ВС1 (по сравнению с другими используемыми ВС) объясняется дополнительными затратами времени на операции с 64-битными числами, которыми оперирует приложение MANADA-SMGS;

- производительность ядер современного сервера ВС3 оказалась несколько ниже, чем производительность ядер ВС2. Это объясняется работой ВС3 на более низкой тактовой частоте. Кроме того, виртуальный сервер ВС3а и ВС3б – не единственный на данном физическом сервере;

- увеличение количества ядер ВС, используемых приложением MANADA-SMGS, сказывается на производительности нелинейно, ведь шины и оперативная память у вычислительных потоков – общие.

В таблице 3.2 показана сходимости результатов ИМ к точным аналитическим значениям [2] с увеличением длительности моделирования при организации трех вычислительных потоков на ВС2а. В скобках указаны доверительные интервалы для вероятности 0,95. Следует отметить, что традиционная (однопоточная) реализация приложения потребовала бы (для обеспечения аналогичной точности) в 2–2,5 раза большего времени моделирования.

Таблица 3.1 – Количество полученных реализаций ТТГ

ВС	Количество потоков									
	1	2	3	4	5	6	9	10	11	
1а	292	464	460	441	422	435	416	462	441	
1б	228	242	265	283	268	258	218	213	210	
1в	295	332	335	333	332	322	311	311	302	
2а	1580	5110	5148	5138	4976	4883	5023	4880	4524	
2б	2517	2584	2372	2474	2508	2222	2209	2265	2339	
2в	2500	2584	2636	2597	2512	2155	2552	2472	2437	
3а	1409	2952	5208	9684	10220	8819	6013	8805	9567	
3б	2031	4201	5396	6609	8882	10375	17816	18201	15342	
4	1194	2333	2392	2343	2258	2106	2154	2165	2130	

Таблица 3.2 – Сходимость оценок, полученных ИМ

Время моделирования	30 сек	10 мин	6 час	15 часов
Количество реализаций	242	4761	168302	416904
Средняя наработка до отказа, час. Точное значение – 6,94683593Е7.	6,42237475Е7 (5,57607110Е7; 7,26867840Е7)	7,05136801Е7 (6,85274954Е7; 7,24998647Е7)	6,94838475Е7 (6,91516764Е7; 6,98160185Е7)	6,93454968Е7 (6,91350517Е7; 6,95559418Е7)
Вероятность безотказной работы в течение 1 млн. часов. Точное значение – 0,9857080997.	0,9752066116 (0,946800105; 0,990798841)	0,98466708675 (0,980759147; 0,987962519)	0,98594193771 (0,985368058; 0,986498986)	0,98585765548 (0,9854946351; 0,9862138999)

Заключение

Благодаря многопоточности приложение MANADA-SMGS эффективно использует мощности доступных ВС, позволяя в несколько раз увеличить производительность по сравнению с однопоточным Windows-приложением, и преодолевает ограничения аналитического марковского метода, связанные с большой размерностью ГС и экспоненциальным временем пребывания в каждом из состояний.

Современные многоядерные ВС позволяют по-новому взглянуть на организацию имитационных экспериментов при оценке с необходимой точностью показателей высоконадежных ТС. Особенно перспективным для проведения ресурсоемких имитационных экспериментов видится использование облачных вычислительных сервисов, которые имеют следующие достоинства: ВС используется лишь по необходимости, удаленно; аппаратное и системное программное обеспечение ВС не нужно приобретать и обслуживать; в вычислительном процессе могут быть задействованы сотни процессоров; мощности сервиса постоянно возрастают; в ряде случаев допустим бесплатный уровень использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ Р 51901.15–2005 (МЭК 61165:1995) Издания. Менеджмент риска. Применение марковских методов. – Введ. 2006–02–01. – М.: Стандартинформ, 2005. – 15 с.

2. Шевченко, Д.Н. Основы теории надежности: учеб.-метод. пособие для студ. техн. спец. / Д.Н. Шевченко; под ред. Л.А. Сосновского; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2010. – 250 с.

3. Бочков, К.А. Сравнительный анализ надежности эксплуатируемых на Белорусской железной дороге микропроцессорных централизаций / К.А. Бочков, С.Н. Харлап, Д.Н. Шевченко // Вестник Белорусского государственного ун-та транспорта: Наука и транспорт. – 2009. – № 2 (19). – С. 41–46.

4. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. – М.: Физматлит, 2006. – 813 с.

5. Шевченко, Д.Н. Методика тестирования и использования генераторов псевдослучайных последовательностей / Д.Н. Шевченко, С.В. Кривенков // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 89–95.

6. Документация Amazon Elastic Compute Cloud [Электронный ресурс] / Amazon Web Services, Inc. или ее дочерние организации, 2017 г. – Режим доступа: <https://aws.amazon.com/ru/documentation/ec2/> – Дата доступа: 15.02.2018.

Поступила в редакцию 23.04.18.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).