



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№2 (35) 2018

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (35) 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Горбадей О.Ю., Зеневич А.О.** Исследование характеристик потока импульсов шумовых диодов, работающих в режиме микроплазменного пробоя 7
- Максименко А.А.** Структура тонких пленок Co/Pd с перпендикулярной магнитной анизотропией 11
- Овсюк Е.М., Веко О.В., Войнова Я.А., Коральков А.Д., Кисель В.В., Редьков В.М.** Об описании связанных состояний для частицы со спином 1 в кулоновском поле 21
- Пилипцов Д.Г., Рогачев А.А., Чижик С.А., Руденков А.С., Кулеш Е.А., Федосенко Н.Н.** Фазовый состав и структура многослойных наноразмерных металл-углеродных покрытий 34
- Федотова Ю.А., Максименко А.А., Касюк Ю.В.** Перпендикулярная магнитная анизотропия, механизмы перемангничивания и структура магнитных доменов в тонких пленках Co/Pd 38

МАТЕМАТИКА

- Каморников С.Ф.** О ядре p -префраттиниевой подгруппы конечной разрешимой группы 46
- Можаровский В.В., Марьяна Н.А., Кузьменков Д.С.** Реализация решения контактной задачи о вдавлении жесткого цилиндрического индентора в изотропную вязкоупругую полосу на ортотропном основании 51
- Монахов В.С., Ходанович Д.А.** О разрешимости конечной группы с парой несопряженных подгрупп примарных индексов 57
- Пальчик Э.М., Башун С.Ю.** Некоторые критерии непростоты конечных групп 60
- Пецевич В.М., Пронько В.А.** Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени 69
- Русakov А.Д., Селькин М.В.** Новые критерии ассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ 76
- Тютянов В.Н., Тихоненко Т.В., Бычков П.В.** Произведение двух \mathbb{P} -субнормальных подгрупп 80
- Чи Д., Сафонов В.Г., Скиба А.Н.** Об одном применении теории n -кратно σ -локальных формаций конечных групп 85

ИНФОРМАТИКА

- Петушков А.А., Жадан М.И.** Компьютерная система передачи информации с использованием ИК-излучений 89
- Хобня А.И., Демиденко О.М.** Метод автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных телекоммуникационных сетей NGN 97
- Чечет П.Л., Левчук В.Д., Воруев А.В., Левчук Е.А.** Оценка качества простого аппаратного генератора случайных чисел 103

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 12.06.18. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 11,14. Тираж 100 экз. Заказ № 540.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2018
© Проблемы физики, математики и техники, 2018
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2018

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 2 (35) 2018

CONTENTS

PHYSICS

- Gorbadey O.Y., Zenevich A.O.** Investigation of characteristics of the flow of pulses of noise diodes working in the mode of microplasma breakdown 7
- Maximenko A.A.** Structure of Co/Pd thin films with perpendicular magnetic anisotropy 11
- Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Voynova Ya.A., Koral'kov A.D., Kisel V.V., Red'kov V.M.** On describing bound states for a spin 1 particle in the external coulomb field 21
- Piliptsov D.G., Rogachev A.A., Chizik S.A., Rudenkov A.S., Kulesh E.A., Fedosenko N.N.** Phase composition and structure of multilayer nanosized metal-carbon coatings 34
- Fedotova J.F., Maximenko A.A., Kasiuk J.V.** Perpendicular magnetic anisotropy, magnetization reversal mechanisms and structure of magnetic domains in Co/Pd thin films 38

MATHEMATICS

- Kamornikov S.F.** On core of p -prefrattini subgroup of a finite soluble group 46
- Mozharovsky V.V., Maryina N.A., Kuzmenkov D.S.** Realization of solution of the contact problem on indentation of rigid cylindrical indenter in isotropic viscoelastic strip on the orthotropic basis . . . 51
- Monakhov V.S., Khadanovich D.A.** On the solvability of a finite group with a pair of non-conjugate subgroups of primary indices 57
- Palchik E.M., Bashun S.Yu.** Some criteria for the nonsimplicity of finite groups 60
- Petsevich V.M., Pronko V.A.** Necessary conditions for the system of two second degree differential equations to have Painlevé property 69
- Rusakou A.D., Selkin M.V.** New criteria of associativity of l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ 76
- Tyutyanov V.N., Tihonenko T.V., Bychkov P.V.** Product of two \mathbb{P} -subnormal subgroups 80
- Chi Z., Safonov V.G., Skiba A.N.** On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups 85

INFORMATION SCIENCE

- Petushkov A.A., Zhadan M.I.** Computer system of information transmission with the use of infrared radiations 89
- Khobnia A.I., Demidenko O.M.** Method of automation of simulation models construction of multiservice telecommunication NGN networks 97
- Chechat P.L., Liauchuk V.D., Varuyeu A.V., Liauchuk A.A.** Estimation of quality of simple hardware random numbers generator 103

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- **Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 621.391.822

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКА ИМПУЛЬСОВ ШУМОВЫХ ДИОДОВ, РАБОТАЮЩИХ В РЕЖИМЕ МИКРОПЛАЗМЕННОГО ПРОБОЯ

О.Ю. Горбадей, А.О. Зеневич

Белорусская государственная академия связи, Минск

INVESTIGATION OF CHARACTERISTICS OF THE FLOW OF PULSES OF NOISE DIODES WORKING IN THE MODE OF MICROPLASMA BREAKDOWN

O.Y. Gorbadey, A.O. Zenevich

Belarusian State Academy of Telecommunications, Minsk

Определены зависимости интенсивности потока выходных импульсов от напряжения обратного смещения шумовых диодов и силы тока, протекающей через их $p-n$ -переход. Установлены основные процессы, влияющих на величину интенсивности потока выходных импульсов кремниевых шумовых диодов, работающих в режиме микроплазменного пробоя. Получено, что к таким процессам можно отнести ударную ионизацию, термогенерацию и туннелирование носителей электрического заряда.

Ключевые слова: шумовой диод, микроплазменный пробой, автокорреляционная функция.

The dependences of the intensity of the output pulse flux on the voltage of the reverse bias of the noise diodes and the current flowing through their $p-n$ junction are determined. The main processes influencing the intensity of the output pulse flux of silicon noise diodes operating in the microplasma breakdown mode are established. It is obtained that shock processes, thermal generation and tunneling of carriers of electric charge can be classified as such processes.

Keywords: noise diode, microplasma breakdown, autocorrelation function.

Введение

В настоящее время шумовые диоды находят широкое применение для создания генераторов случайных числовых последовательностей [1]. Такие генераторы используются в таких областях науки и техники как криптография, численное моделирование случайных процессов, создание игровых автоматов.

Все большее применение для этих целей находят шумовые диоды, работающие в режиме микроплазменного пробоя [2]. Это в основном связано с тем, что такие диоды имеют небольшие габариты, малые напряжения питания (менее 10 В) по сравнению с другими приборами, используемыми для генерации случайных числовых последовательностей. Такие свойства диодов позволяют достаточно просто встраивать их в различные электронные устройства.

Одной из основных характеристик шумовых диодов является интенсивность потока их выходных импульсов. Под интенсивностью понимается количество импульсов, сформированных на выходе диода, за единицу времени. Однако в настоящее время достаточно плохо изучены зависимости интенсивности потока выходных импульсов от напряжения обратного смещения шумовых диодов и силы тока, протекающей через их $p-n$ -переход, а также процессы, вносящие определяющий вклад в формирование величины интенсивности потока импульсов на выходе шумовых диодов, работающих в режиме

микроплазменного пробоя. Это и явилось целью данной работы.

1 Описание экспериментальной установки и методики измерения

Для проведения исследований использовалась экспериментальная установка, блок-схема которой представлена на рисунке 1.1. Для реализации режима микроплазменного пробоя шумовой диод ШД включался по схеме, показанной на рисунке 1.1. При этом последовательно с диодом ШД подключался нагрузочный резистор (R_n), а для ограничения тока, протекающего через него, применялся ограничительный резистор ($R_{огр}$). Источник постоянного напряжения (I) использовался для питания шумового диода. Напряжения, подаваемые на диод, были близкими или превышали напряжение его лавинного пробоя. Именно при этих напряжениях наблюдается микроплазменный пробой шумового диода [2]. Таким образом реализовывался микроплазменный режим работы шумового диода. Контроль напряжения питания диода осуществлялся при помощи вольтметра (V). Величина электрического тока, протекающего через шумовой диод, измерялась амперметром (A). Импульсы напряжения, сформированные на резисторе (R_n) в результате микроплазменного пробоя диода, поступали на вход усилителя (U). После усиления в усилителе эти импульсы подавались на вход амплитудного дискриминатора (D). Дискриминатор

осуществлял отделение микроплазменных импульсов от собственных шумов усилителя, а также их стандартизацию по амплитуде и длительности. С выхода амплитудного дискриминатора импульсы подавались на входы коррелятора (К) и частотомера (Ч). При помощи коррелятора (К) выполнялись измерения автокорреляционной функции выходного потока шумового диода. Частотомер (Ч) использовался для измерения интенсивности потока выходных импульсов шумового диода.

Измерения выполнялись при постоянной температуре 293 К. Во время исследований определялась вольтамперная характеристика шумового диода. По полученной вольтамперной характеристике определялись напряжения микроплазменных пробоев, согласно методике, описанной в работе [3]. Поскольку для исследуемых типов шумовых диодов напряжения пробоя отличались, то для определения зависимостей использовалась величина перенапряжения

$$\Delta U = U_{см} - U_n,$$

где $U_{см}$ – напряжение обратного смещения, приложенное к шумовому диоду, U_n – напряжение первого канала микроплазменного пробоя.

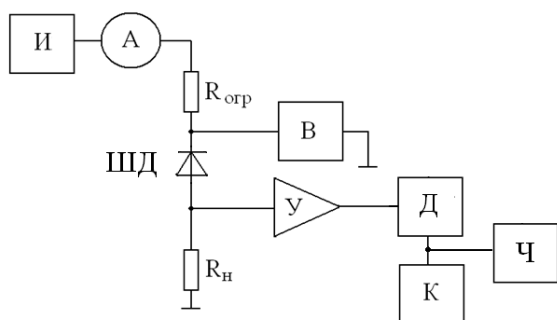


Рисунок 1.1 – Блок-схема экспериментальной установки (И – источник напряжения, ШД – шумовой диод, В – вольтметр, У – усилитель, Д – дискриминатор, К – коррелятор, А – амперметр, Ч – частотомер, $R_{огр}$ – ограничительный резистор, $R_н$ – нагрузочный резистор)

2 Результаты эксперимента и их обсуждение

В качестве объектов исследования были использованы серийно выпускаемые кремниевые шумовые диоды следующих марок: ND102L, ND103L, КГ401.

На рисунке 2.1 представлены зависимости интенсивности выходного потока импульсов λ шумовых диодов от ΔU . Согласно полученным зависимостям с ростом ΔU увеличивается интенсивность λ . Такое поведение зависимостей связано с тем, что концентрация неосновных носителей заряда в базовых областях p - n -перехода повышается с увеличением напряженности электрического поля, поскольку растет вероятность

ударной ионизации неосновных носителей заряда, выходящих из области пространственного заряда. Также с увеличением электрического тока, протекающего через диод, происходит разогрев канала микроплазменного пробоя, что приводит к увеличению концентрации термогенерированных неосновных носителей в базовых областях p - n -перехода. В кремниевых шумовых диодах с напряжением меньше 10 В наблюдается процесс туннелирования носителей заряда, который происходит через ловушечные уровни и приводит к увеличению концентрации неосновных носителей заряда [3]. Отметим, что частота генерации носителей заряда при этом процессе зависит от напряженности электрического поля [3]. Рост концентрации неосновных носителей заряда приводит к росту вероятности возникновения микроплазменного пробоя [3], и, как следствие, к увеличению частоты (интенсивности) появления микроплазменных импульсов на выходе диода с ростом перенапряжения.

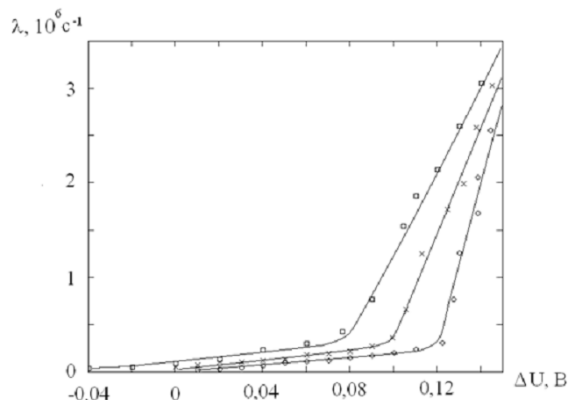


Рисунок 2.1 – Зависимость интенсивности выходного потока импульсов от перенапряжения \times – шумовой диод ND102L; \diamond – шумовой диод КГ401; \square – шумовой диод ND103L

Для определения наличия корреляционных связей между импульсами были выполнены измерения автокорреляционных функций выходного потока импульсов шумовых диодов. Полученные результаты измерений представлены на рисунке 2.2. Также на рисунке 2.2 представлены автокорреляционные функции для шумового диода КГ401. Для других марок шумовых диодов изменение вида автокорреляционной функции от перенапряжения было аналогичным. Автокорреляционная функция, представленная на рисунке 2.2 а), имела приблизительно одинаковые значения на всем временном интервале, на котором она была измерена. Получено, что такой вид автокорреляционных функций имели для следующих перенапряжений: $\Delta U = -0.04 \div 0,00$ В для шумового диода ND103 L; $\Delta U = 0.00 \div 0,03$ В – для КГ401; $\Delta U = 0.01 \div 0,05$ В – для ND102 L. Отметим, что максимальная интенсивность

потока импульсов $\lambda = 8,0 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$, при которой автокорреляционная функция имела вид, показанный на рисунке 2.2 а), была получена для шумового диода ND103L, а минимальная $-\lambda = 2,1 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ для шумового диода ND102L. Таким образом, при этих перенапряжениях корреляционных связей между импульсами не наблюдалось.

Дальнейшее увеличение ΔU приводит к тому, что изменяется вид автокорреляционной функции (рисунок 2.2 б), то есть наблюдался «провал» автокорреляционной функции для ее первого значения. Это связано с тем, что за каждым импульсом следует некоторый интервал времени τ , в течение которого напряженность электрического поля p - n -перехода восстанавливается до пробивного значения. В этот промежуток времени микроплазменный пробой не возникает, а, следовательно, и не может сформироваться импульс на выходе шумового диода. С ростом перенапряжения повышается интенсивность λ (рисунок 2.2). Это приводит к тому, что временной интервал между импульсами сокращается и приближается по длительности к τ , что приводит к уменьшению дисперсии числа выходных импульсов диода D по сравнению с их математическим ожиданием $\langle N \rangle$. Поэтому наблюдается «провал» автокорреляционной функции для ее первого значения.

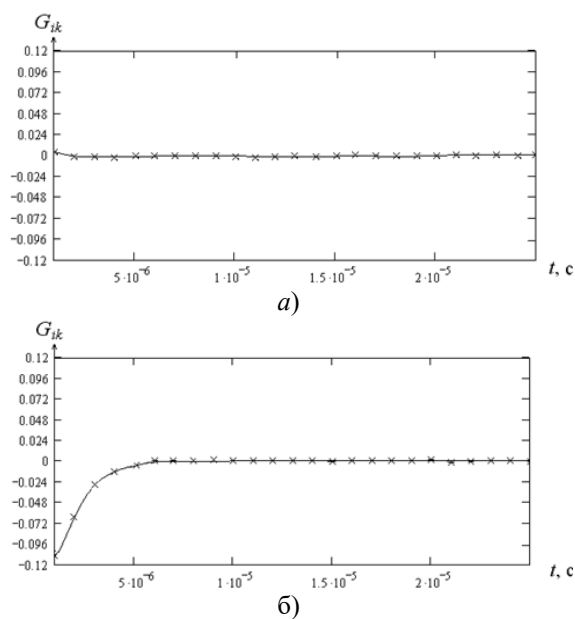


Рисунок 2.2 – Автокорреляционная функция для шумового диода ND103 L
а) $\Delta U = 0.00 \text{ В}$; б) $\Delta U = 0.10 \text{ В}$

На рисунке 2.3 представлены зависимости интенсивности выходных импульсов шумовых диодов от величины электрического тока I , протекающего через него. Как видно из полученных результатов (рисунок 2.3), эти зависимости имеют два участка, на которых зависимость λ от I линейна. Так, для шумового диода марки КГ401

первый диапазон линейности соответствовал диапазону напряжений обратного смещения $U_{см} = -7,98 \div -8,08 \text{ В}$, а второй диапазон линейности $U_{см} = -8,09 \div -8,14 \text{ В}$. Для диода марки ND 102 L первый и второй диапазоны наблюдались при $U_{см} = -9,61 \div 9,72 \text{ В}$ и $U_{см} = -9,73 \div -9,78 \text{ В}$ соответственно. Шумовые диоды марки ND 103 L при исследуемых перенапряжениях имели первый и второй диапазон линейности для $U_{см} = -8,78 \div 8,89 \text{ В}$ и $U_{см} = -8,90 \div -8,98 \text{ В}$ соответственно. Отметим, что при напряжениях обратного смещения более низком, чем в указанных выше интервалах, происходило резкое увеличение электрического тока, протекающего через диод, что могло привести к его тепловому пробую. Поэтому при таких $U_{см}$ исследования не проводились.

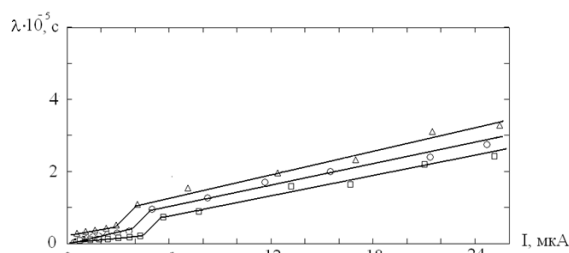


Рисунок 2.3 – Зависимости интенсивности выходных импульсов шумовых диодов от величины электрического тока
 Δ – для шумовых диодов КГ401; \circ – ND 102 L;
 \square – ND 103 L

Максимальное значение электрического тока I_{max} , соответствующее первому диапазону линейности, отличалось от минимального значения I_{min} , соответствующего второму диапазону линейности. Так, эти значения для исследуемых марок шумовых диодов составляли следующие значения: $I_{max} = 4,1 \text{ мкА}$ и $I_{min} = 6,0 \text{ мкА}$ для шумового диода ND103 L; $I_{max} = 3,8 \text{ мкА}$ и $I_{min} = 5,1 \text{ мкА}$ для ND102 L; $I_{max} = 3,0 \text{ мкА}$ и $I_{min} = 4 \text{ мкА}$ для КГ401. Для этих токов интенсивности выходных импульсов принимали следующие значения: $\lambda_{max} = 2 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ и $\lambda_{min} = 7 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ для шумового диода ND103 L; $\lambda_{max} = 3 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ и $\lambda_{min} = 9 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ для ND102 L; $\lambda_{max} = 5 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ и $\lambda_{min} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$ для КГ401 (λ_{max} и λ_{min} – интенсивности выходных импульсов для I_{max} и I_{min} соответственно). Наличие таких участков связано с возникновением при малых напряжениях питания одного канала микроплазменного пробоя, а при больших напряжениях питания появлением и второго канала. Отметим, что микроплазменный пробой характеризуется последовательным сопротивлением R_s и напряжением пробоя U_{np} [3].

Коэффициент пропорциональности β между величинами λ и I представлены в таблице. Таким образом, величина I определяется частотой попадания носителей заряда в канал микроплазменного

Таблица 2.1 – Характеристики шумовых диодов

Тип шумового диода	Первый микроплазменный пробой			Второй микроплазменный пробой		
	$U_{пр}$, В	R_s , кОм	β , (мкА·с) ⁻¹	$U_{пр}$, В	R_s , кОм	β , (мкА·с) ⁻¹
КГ 401	7,98	33,1	$16,7 \cdot 10^3$	8,10	2,0	$9,3 \cdot 10^3$
ND 103 L1	8,77	30,2	$4,9 \cdot 10^3$	8,97	0,6	$9,5 \cdot 10^3$
ND 102 L1	9,61	40,1	$7,9 \cdot 10^3$	9,76	1,0	$9,8 \cdot 10^3$

пробоя и вероятностью включения микроплазменного пробоя. В основном от этих параметров зависит величина электрического тока, протекающего через шумовой диод в этом диапазоне ΔU . Также в таблице 2.1 представлены значения последовательных сопротивлений первого и второго микроплазменных пробоев R_s и коэффициентов пропорциональности β .

Как следует из представленных данных в таблице, при возникновении второго микроплазменного пробоя величина R_s уменьшается по сравнению с последовательным сопротивлением, полученным для первого микроплазменного пробоя. Это связано с тем, что с появлением второго микроплазменного канала увеличивается площадь p - n -перехода, по которой может протекать электрический ток, вызванный микроплазменным пробоем. Такое увеличение площади и приводит к уменьшению величины R_s . Отметим, что среди исследуемых марок шумовых диодов интенсивность выходных импульсов шумового диода КГ 401 имела более сильную зависимость от величины электрического тока для перенапряжений, соответствующим первому микроплазменному пробоя. Для перенапряжений, соответствующих второму микроплазменному пробоя, более сильная зависимость λ от I была характерна для шумовых диодов ND 102 L1 (см. таблицу 2.1).

Заключение

Получено, что увеличение напряжения обратного смещения приводит к росту интенсивности потока выходных импульсов на выходе шумового диода.

Выявлено, что при значениях интенсивности потока выходных импульсов, больших $8,0 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, для всех исследуемых марок шумовых диодов наблюдалось наличие корреляционных связей между импульсами.

Установлено, что зависимость интенсивности потока выходных импульсов от величины силы тока, протекающего через шумовой диод, имеет два участка, на которых эта зависимость линейна.

Таким образом, на основании анализа полученных зависимостей и характеристик можно сделать заключение, что следующие процессы, протекающие в шумовых диодах, влияют на величину интенсивности потока импульсов на их выходе: ударная ионизация неосновных носителей заряда, выходящих из области пространственного заряда; термогенерация носителей заряда; туннелирование носителей заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Криптология: учебник* / Ю.С. Харин [и др.]. – Минск: БГУ, 2013. – 511 с.
2. *Барановский, О.К.* Оценка энтропии случайных числовых последовательностей формируемых с использованием физического источника шума / О.К. Барановский, П.В. Кучинский, А.Ф. Чернявский // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2004. – № 4. – С. 105–110.
3. *Грехов, И.В.* Лавинный пробой p - n -перехода в полупроводниках / И.В. Грехов, Ю.Н. Сережкин. – Л.: Энергия, 1980. – 152 с.

Поступила в редакцию 31.01.18.

УДК 539.8

СТРУКТУРА ТОНКИХ ПЛЕНОК Co/Pd С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ МАГНИТНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

А.А. Максименко

Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск

STRUCTURE OF Co/Pd THIN FILMS WITH PERPENDICULAR MAGNETIC ANISOTROPY

A.A. Maximenko

Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University, Minsk

Исследовано влияние отжига и присутствия буферного слоя Pd на изменение структуры границ раздела и кристаллической структуры многослойных тонких пленок Co/Pd, осажденных методом термического распыления с толщинами слоев Co ($t_{Co} = 0,2\text{--}0,4$ нм) и Pd ($t_{Pd} = 0,6\text{--}1,0$ нм), при которых ожидается максимальная перпендикулярная магнитная анизотропия.

Ключевые слова: тонкие пленки Co/Pd, перпендикулярная магнитная анизотропия, интерфейсы многослойных тонких пленок, кристаллическая структура тонких пленок, рентгеновская рефлектометрия, рентгеноструктурный анализ тонких пленок, рентгеноструктурный анализ тонких пленок с наклоном вектора дифракции относительно нормали к поверхности.

We investigate the effects of annealing and presence of the Pd buffer sublayer on the modifications of interfaces and crystal structure of multilayered Co/Pd thin films deposited by the thermal evaporation method and with the thicknesses of Co 0.2–0.4 nm and Pd 0.6–1.0 nm at which one can expect the maximum magnetic anisotropy.

Keywords: Co/Pd thin films, perpendicular magnetic anisotropy, interfaces of multilayered thin films, crystal structure of thin films, X-ray reflectivity, thin films analysis by X-ray diffraction, X-ray diffraction of thin films with inclination of diffraction vector with respect to the surface normal.

Введение

Значения эффективной константы магнитной анизотропии тонких сплошных магнитных пленок могут варьироваться в широком диапазоне значений [1]–[9]. При этом направление оси лёгкого намагничивания в данных пленках может быть направлено как параллельно (плоскостная магнитная анизотропия) так и перпендикулярно (перпендикулярная магнитная анизотропия, ПМА) плоскости пленки. Пленки с ПМА, к числу которых относятся пленки сплавов Fe (Pd, Pt) с упорядоченной структурой $L1_0$ и многослойные пленки Co/(Pd, Pt) [1], [6], [10], уже несколько десятилетий остаются в авангарде академических и промышленных исследований, поскольку могут использоваться при проектировании магнитных датчиков, магнитных логических устройств и как материал для создания магнитных носителей информации с высокой плотностью записи [6], [11]–[13].

В целом, анизотропия магнитных материалов может формироваться за счет нескольких вкладов [1], [14], [15], к числу которых относятся магнитокристаллическая анизотропия, анизотропия формы либо деформации (магнитоупругая анизотропия), поверхностная анизотропия Нееля и др.

Полная анизотропия тонких пленок может быть представлена как суперпозиция всех типов

анизотропий. В этом случае магнитная анизотропия может быть феноменологически охарактеризована эффективной константой магнитной анизотропии

$$K_{эфф} = K_V + 2K_S / t,$$

где K_V содержит вклады от анизотропии формы, магнитокристаллической и магнитоупругой анизотропии, а K_S интерпретируется как магнитная анизотропия на интерфейсе, определяемая анизотропией Нееля и магнитоупругой анизотропией [2], [3], t – это толщина магнитного слоя.

С точки зрения структурных особенностей ПМА непосредственно в пленках Co/Pd определяется многими факторами. К их числу относятся, прежде всего, кристаллическая структура пленок [2], [16], [17], где наибольшие значения ПМА наблюдаются для Co/Pd с предпочтительной ориентацией (111), другими словами текстурой (111). Кроме того, ПМА зависит от толщины слоев Co и Pd [3], [18]–[20], причем ПМА в пленках наблюдается при $t_{Co} < 2,0\text{--}2,5$ нм (для пленок с текстурой (111)). Следует также отметить, что наличие перпендикулярной анизотропии в многослойных системах более чувствительно к изменению толщины кобальта, чем палладия. Так, для случаев поликристаллических пленок, перпендикулярная анизотропия фиксируется для $t_{Pd} < 2,5$ нм с максимум константы одноосной магнитной анизотропии в диапазоне

0,6–1,2 нм, в то время как для поликристаллических пленок ПМА исчезает при $t_{\text{Co}} > 1,1$ нм. В работе [21] было показано, что ПМА для пленок Co/Pd наблюдается и при $t_{\text{Pd}} = 6,6$ нм. Фактором, влияющим на магнитоанізотропные свойства пленок, является и количество бислоев Co/Pd, где оптимальное значение лежит между 6–20 бислоями [22]–[24]. Рост количества повторов увеличивает вклад магнитостатической энергии, что приводит к понижению ПМА. На эффективность анизотропии влияют также присутствие буферного слоя, который влияет на кристаллическую структуру пленок Co/Pd [18], [25], [26] и качество границы раздела между слоями [15], [27]–[29], то есть, их шероховатость, а также перемешивание атомов Co и Pd на интерфейсе.

Кристаллическая структура пленок Co/Pd а также структура их интерфейсов определяется способом осаждения тонких пленок и структурой подложек. Поэтому магнитные свойства многослойных пленок Co/Pd с тем же составом, но нанесенных различными методами, могут заметно отличаться.

В данной работе рассматриваются многослойные пленки Co/Pd, синтезированные методом термического осаждения, с толщинами слоев Co ($t_{\text{Co}} = 0,2\text{--}0,4$ нм) и Pd ($t_{\text{Pd}} = 0,6\text{--}1,0$ нм) при которых ожидается максимальная перпендикулярная магнитная анизотропия. Систематически исследуется как изменяется кристаллическая структура пленок с увеличением толщин Co и Pd и с ростом степени перемешивания между осажденными слоями в процессе отжига пленок, а также при использовании буферного слоя Pd при их синтезе.

1 Методика эксперимента

Предметом исследования являются многослойные тонкие пленки $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{t_{\text{Pd}}}] \times 15$ перед и после их отжига в вакууме при температуре 300°C , а также многослойные тонкие пленки с палладиевым буферным слоем $\text{Pd}_{10\text{нм}} [\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{t_{\text{Pd}}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$ ($t_{\text{Co}} = 0,2$ нм; $0,3$ нм; $0,4$ нм и $t_{\text{Pd}} = 0,6$ нм; $1,0$ нм). Пленки осаждались на плоские кремниевые подложки Si (100), покрытые аморфным слоем оксида (SiO_2) толщиной 100 нм. Выбор данного типа подложки позволяет исключить влияние ее кристаллической структуры на структуру пленок. Все исследуемые пленки характеризуются перпендикулярной магнитной анизотропией.

Качество осаждаемых сплошных пленок и их параметры (толщина слоев, плотность, шероховатость) оценивались методом рентгеновской рефлектометрии. Измерения рентгеновской рефлектометрии выполнялись на лабораторном дифрактометре Panalytical X'Pert Pro с использованием рентгеновской лампы с медным анодом ($\lambda_{\text{CuK}\alpha} = 0,154$ нм) и работающей при 40 кВ и 30 мА. Оптика падающего пучка состояла из никелевого

фильтра, который ограничивал интенсивность излучаемого трубкой рентгеновского излучения и поглощал линию Cu K_β ($\lambda = 0,139$ нм), щели Соллера ($0,04$ рад), программируемой щели, которая фиксировала угловой размер пучка до $1/32^\circ$ и 5 мм маски, которая ограничивала поперечную ширину пучка. Отраженное излучение фокусировалось щелью Соллера ($0,04$ рад), параллельным пластинчатым коллиматором ($0,18$ град), приемной щелью ($0,4$ мм) и фиксировалось пропорциональным счетчиком. Во время измерения образец помещался на стол с регулируемой высотой. Измерения проводились в угловом диапазоне $\omega = 0,2\text{--}5,0^\circ$ с шагом $0,004^\circ$ и статистикой 30 сек/шаг.

Состав и последовательность слоев в пленке определялись путем анализа критического угла ω_c и аппроксимации экспериментальных кривых с помощью программного обеспечения X'Pert Reflectivity от PANalytical. Компьютерный код этого программного обеспечения основывается на оптическом формализме Паррата, а согласованность аппроксимации проводится на основе метода наименьших квадратов. Аппроксимация экспериментальных кривых позволяет определить приближенные значения плотности, толщины и шероховатости осажденных плоских пленок. При аппроксимации начальные значения плотностей для металлов и сплавов принимались равными плотностям для сплошных материалов ($\rho_{\text{Co}} = 8,90$ г/см³ и $\rho_{\text{Pd}} = 12,02$ г/см³), начальные значения толщин слоев определялись на основе показаний кварцевых детекторов в процессе напыления пленок, а начальные значения шероховатостей пленок принимались равными 30% от толщины осаждаемых пленок. Также учитывалось, что плоские подложки кремния ($\rho_{\text{Si}} = 2,33$ г/см³) покрыты пленкой оксида толщиной 100 нм и $\rho_{\text{SiO}_2} = 2,64$ г/см³, согласно данным представленными производителем подложек (CrysTec GmbH). Величины плотности осажденных пленок подбирались в диапазоне $\pm 3\text{--}4\%$ от начальных значений. Значения толщины и шероховатости подбирались в диапазонах $\pm 20\%$ и $\pm 80\%$ начальных значений, соответственно. Значения плотностей, толщин и шероховатостей аппроксимировались независимо друг от друга. Параметрами аппроксимации были также фон измерения и рассеяние пучка рентгеновского излучения. Плотность кремния не аппроксимировалась.

Рентгеноструктурный анализ (РСА) сплошных пленок, представленный в данной работе, был выполнен с использованием лабораторного дифрактометра Panalytical X'Pert Pro. Измерения проводились в стандартной геометрии $\theta\text{--}2\theta$ с использованием рентгеновской лампы с медным анодом ($\lambda_{\text{CuK}\alpha} = 0,154$ нм), работающей при 40 кВ и 30 мА. Рентгеновский пучок, излучаемый рентгеновской трубкой, фокусировался в параллельный пучок с помощью разрезной щели с

фиксированной высотой в $1/2^\circ$, параболическим градуированным зеркалом W/Si с экваториальной дивергенцией менее $0,05^\circ$, коллиматора с щелью Соллера ($0,04$ рад) и маской шириной 5 мм, которая ограничивает ширину пучка. Оптика дифрагированного пучка состояла из приемной щели высотой $8,7$ мм, коллиматора с щелью Соллера ($0,04$ рад), изогнутого графитового монокроматора для удаления вклада от излучения K_β и полосового полупроводникового детектора с ограничением регистрации угла $2,122^\circ$. Во время измерения образец помещался на стол с регулируемой высотой. Дифрактограммы измерялись с шагом $0,05^\circ$ и статистикой 10000 сек/шаг.

Для получения информации о микроструктуре кристаллитов с плоскостями решетки (hkl) проведены измерения с наклоном вектора дифракции относительно нормали к поверхности (ψ) [30]. Для измерений РСА- ψ образец монтировали на подставку Эйлера и проводили стандартные измерения θ - 2θ при фиксированном угле ψ . Подставка Эйлера позволяла наклонять образец по линии, соединяющей рентгеновскую трубку и детектор при $2\theta = 0^\circ$. Угол ψ в данных измерениях варьировался от 0 до 70° , а размер рентгеновского пучка не превышал 4×4 мм², что обеспечивало незначительную инструментальную потерю интенсивности [31].

2 Структура границ раздела в многослойных тонких пленках Co/Pd

Экспериментальные рентгеновские рефлектограммы исходных пленок $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{t_{\text{Pd}}}] \times 15$ и пленок после отжига в вакууме при температуре 300°C , а также пленок $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{t_{\text{Pd}}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$ ($t_{\text{Co}} = 0,2$ нм; $0,3$ нм; $0,4$ нм и $t_{\text{Pd}} = 0,6$ нм; $1,0$ нм), показанные на рисунке 2.1, указывают на присутствие типичных осцилляций Киссига, которые свидетельствуют о равномерной толщине пленки.

Следует отметить, что для пленок с фиксированной толщиной t_{Pd} величина измеренного критического угла ω_c уменьшалась с $\sim 0,47^\circ$ до $\sim 0,45^\circ$ с ростом толщины кобальта t_{Co} , что обусловлено уменьшением средней плотности пленок. Для пленок после отжига число наблюдаемых осцилляций Киссига увеличивается по сравнению с пленками перед отжигом, что свидетельствует об уменьшении суммарной шероховатости пленки. На рефлектограммах пленок с буферным слоем Pd можно наблюдать большее количество осцилляций Киссига с меньшим периодом их появления по сравнению с рефлектограммами пленок без буферного слоя. Это указывает на большую суммарную толщину исследуемых пленок. Также для пленок с $t_{\text{Co}} = 0,4$ нм перед отжигом и с палладиевым буферным слоем

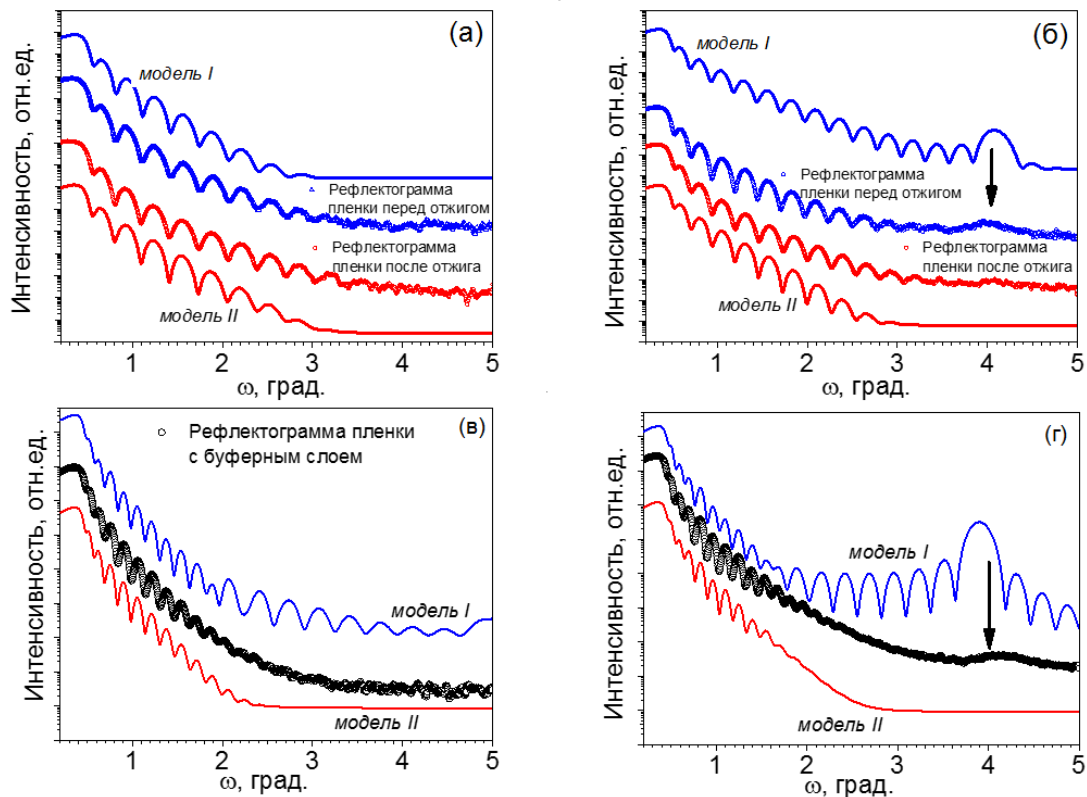


Рисунок 2.1 – Рефлектограммы многослойных пленок $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{0,6\text{нм}}] \times 15$, где $t_{\text{Co}} = 0,2$ нм (а) и $0,4$ нм (б) перед и после отжига, а также рефлектограммы многослойных пленок $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{0,6\text{нм}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$ ($t_{\text{Co}} = 0,2$ нм (в), $0,4$ нм (г)). Экспериментальные данные представлены точками, результаты аппроксимации – сплошными линиями; кривые симуляции представлены на рисунках с отступом для удобства сравнения. Стрелкой указан пик Брэгга

в области $\omega \approx 3^\circ-4^\circ$ можно наблюдать пик Брэгга (на рисунке 2.1 указан стрелкой). Стоит отметить, что пик Брэгга наблюдается также на рефлектограмме пленки $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{0,3\text{нм}} / \text{Pd}_{1,0\text{нм}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$. Присутствие данного пика на рефлектограммах может свидетельствовать о сохранении периодичности осажденных слоев, однако его низкая интенсивность свидетельствует о сильно размытой границе раздела между слоями палладия и кобальта. Формализм Паррата, который использовался для аппроксимации полученных рефлектограмм, предполагает, что отдельные слои в многослойных системах имеют непрерывные интерфейсы. Однако пик Брэгга можно наблюдать и для многослойных пленок с прерывистыми интерфейсами [32]. В этом случае многослойную структуру можно представить в виде блоков, состоящих из участков материала с показателем преломления n_1 (участков пленки, обогащенных кобальтом), встроенных в матрицу другого материала с показателем преломления n_2 (участков пленки, обогащенных палладием). Для пленок с толщиной Co, сравнимой с атомным монослоем ($\sim 0,2$ нм), вероятно, величина областей, обогащенных кобальтом, очень мала и пик Брэгга не наблюдается, что указывает на отсутствие периодических непрерывных интерфейсов. Появление такой периодичности может предполагаться для пленок с $t_{\text{Co}} = 0,4$ нм, для которых наблюдались слабо видимые пики Брэгга. Для

пленок с $t_{\text{Co}} = 0,3$ нм можно предполагать промежуточное состояние, когда наличие фиксируемых периодических непрерывных интерфейсов может наблюдаться при незначительных модификациях системы, например, при использовании буферного слоя. Малая интенсивность пиков Брэгга свидетельствует о сильно прерывистой структуре таких периодических интерфейсов. Это объясняется значительной диффузией атомов кобальта в слои палладия уже при комнатной температуре и формированию твердого раствора Co_xPd_y непосредственно в процессе напыления.

Экспериментальные рефлектограммы для пленок перед отжигом, а также для пленок с буферным слоем были аппроксимированы с точки зрения двух возможных композиций пленок (для удобства сравнения экспериментальные кривые и кривые симуляции на рисунке 2.1 представлены с отступом). В первом случае приближенные кривые моделировались для многослойных систем Co/Pd с периодическими слоями Co и Pd (*модель I*), где параметры каждого слоя подбирались независимо друг от друга. Во втором случае обработка проводилась в предположении образования сплавов CoPd (*модель II*), который образуется при полном перемешивании пленок кобальта t_{Co} с соответствующей толщиной палладия t_{Pd} .

Рефлектограммы пленок после отжига аппроксимировались по *модели II*.

Таблица 2.1 – Данные о многослойной структуре плоских образцов $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{0,6\text{нм}}] \times 15$ ($t_{\text{Co}} = 0,2; 0,4$ нм), полученные из анализа данных рентгеновской рефлектометрии сплошных пленок перед и после отжига

$t_{\text{Co}} = 0,2$ нм					$t_{\text{Co}} = 0,4$ нм					
Модель	$\rho, \text{г/см}^3$	$t, \text{нм}$	$R, \text{нм}$		Модель	$\rho, \text{г/см}^3$	$t, \text{нм}$	$R, \text{нм}$		
<i>модель I</i>	Co	8,6±0,1	0,23±0,02	0,6±0,1	<i>модель I</i>	Co	8,5±0,1	0,43±0,03	0,4±0,1	
	Pd	11,7±0,1	0,64±0,02	1,0±0,2		Pd	11,5±0,1	0,65±0,03	0,6±0,1	
Суммарная толщина пленки				13,1	Суммарная толщина пленки				16,2	
<i>модель II</i>	$\text{Co}_9\text{Pd}_{20}$	10,8±0,2	13,1±0,2	0,9±0,1	<i>модель II</i>	$\text{Co}_9\text{Pd}_{10}$	10,3±0,1	15,8±0,2	0,8±0,1	

Таблица 2.2 – Данные о многослойной структуре сплошных пленок $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{0,6\text{нм}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$ ($t_{\text{Co}} = 0,2; 0,4$ нм), полученные из анализа данных рентгеновской рефлектометрии

0,2					0,4				
Модель	$\rho, \text{г/см}^3$	$t, \text{нм}$	$R, \text{нм}$		Модель	$\rho, \text{г/см}^3$	$t, \text{нм}$	$R, \text{нм}$	
<i>модель I</i>	Pd (буферный слой)	11,8±0,2	10,8±0,1	0,6±0,1	<i>модель I</i>	Pd (буферный слой)	12,1±0,1	9,8±0,1	0,6±0,1
	Co	8,4±0,2	0,23±0,01	0,5±0,1		Co	8,6±0,1	0,47±0,01	0,6±0,1
	Pd	11,7±0,1	0,65±0,01	0,4±0,1		Pd	12,1±0,1	0,67±0,01	0,2±0,1
	Pd (защитный слой)	11,8±0,1	0,9±0,1	1,2±0,1		Pd (защитный слой)	11,9±0,1	1,4±0,1	1,1±0,1
<i>модель II</i>	Pd (буферный слой)	11,6±0,1	10,5±0,1	2,0±0,5	<i>модель II</i>	Pd (буферный слой)	11,9±0,2	10,4±0,1	1,1±0,1
	$\text{Co}_9\text{Pd}_{20}$	10,8±0,1	13,5±0,1	0,7±0,2		$\text{Co}_9\text{Pd}_{10}$	10,5±0,1	15,9±0,1	0,9±0,1
	Pd (защитный слой)	11,6±0,1	1,0±0,2	1,3±0,1		Pd (защитный слой)	11,6±0,2	2,0±0,1	1,2±0,1

В таблицах 2.1 и 2.2 представлены результаты аппроксимации (плотность, толщина и шероховатость) пленок, рефлектограммы которых показаны на рисунке 2.1. Значения, определенные из модели I, усреднены для 15 повторений и равны средним значениям величин. Полученные в процессе аппроксимации значения плотностей $\rho_{\text{Co}} \approx 8,6 \text{ г/см}^3$ и $\rho_{\text{Pd}} \approx 11,7 \text{ г/см}^3$ меньше соответствующих значений для сплошных материалов на 3–4%. Это может быть связано с наличием дефектов и микронапряжений в осажденных тонких пленках. Учитывая, что точность измерения толщины слоев в процессе осаждения при помощи кварцевых детекторов составляет порядка 5%, толщины осажденных слоев согласуются с номинальными значениями. Как видно из таблицы для пленок перед отжигом и с буферным слоем, средняя шероховатость слоев кобальта, определенная по модели I, превышает их среднюю толщину. Это подтверждает предположение о существенном перемешивании слоев кобальта и палладия на интерфейсах уже на стадии осаждения [28] и формирование прерывистых интерфейсов. Аппроксимирующие кривые на основе модели II лучше воспроизводят экспериментальные данные для пленок без буферного слоя перед и после отжига, а также для пленок с буферным слоем. Однако, ни одна из используемых моделей не аппроксимирует идеально экспериментальные рефлектограммы для пленок с $t_{\text{Co}} = 0,4 \text{ нм}$. Использование модели I показывает положения пика Брэгга, соответствующее тем, которые наблюдаются на экспериментальных рефлектограммах, однако в этом случае модельная кривая значительно отличается от экспериментальной при углах ω выше $1,5^\circ$. Модель II не воспроизводит слабо видимые пики Брэгга, однако отображает экспериментальные рефлектограммы лучше, чем модель I. Таким образом, осажденные многослойные слои можно рассматривать как твердый раствор Co_xPd_y .

3 Кристаллическая структура многослойных тонких пленок Co/Pd

На дифрактограммах исследуемых пленок после отжига наблюдаются дифракционные линии при углах $2\theta \approx 40,5\text{--}41,5^\circ$ и дифракционные линии меньшей интенсивности при углах $2\theta \approx 47,3\text{--}48,3^\circ$ (рисунок 3.1). Указанные линии отражения соответствуют дифракционным линиям (111) и (200) твердого раствора Co_xPd_y , имеющего ГЦК структуру. Стехиометрия твердого раствора определяется толщиной слоев кобальта и палладия. Меньшие значения соотношений интенсивностей пиков $A_{(002)} / A_{(111)} < 0,14$ для пленок, по сравнению с объемным материалом ($A_{(002)} / A_{(111)} \approx 0,3$ [33], [34]), свидетельствуют о преимущественной ориентации роста в направлении [111] (присутствие текстуры) для кристаллитов твердого раствора Co_xPd_y .

Для пленок перед отжигом линии отражения при углах $2\theta \approx 40,5\text{--}41,5^\circ$ и $2\theta \approx 47,3\text{--}48,3^\circ$ могут соответствовать кристаллографическим плоскостям (111) и (200) твердого раствора Co_xPd_y с соответствующей стехиометрией, что указывает на существенное перемешивание слоев кобальта и палладия уже в процессе нанесения пленок. Одновременно они могут характеризовать отражения нулевого и +1-го порядков от многослойных периодических структур, то есть, сверхрешеток [35]. Рассчитанные положения сателлитных пиков –1-го порядка относительно отражений нулевого порядка, за которые принимались пики при углах $2\theta \approx 40,5\text{--}41,5^\circ$, лежат в диапазоне углов $2\theta \approx 30,0^\circ\text{--}35,0^\circ$. За период сверхрешеток брались суммы средних толщин слоев кобальта и палладия, определенные из рентгеновской рефлектометрии.

Для пленок $[\text{Co}_{0,4\text{нм}} / \text{Pd}_{0,6\text{нм}}] \times 15$ перед отжигом наблюдается пик при $2\theta = 32,2^\circ$, а для пленок $[\text{Co}_{0,4\text{нм}} / \text{Pd}_{1,0\text{нм}}] \times 15$ при $2\theta = 35,0^\circ$, которые не наблюдаются после отжига, и могут быть интерпретированы, как пики –1-го порядка для системы с периодическими интерфейсами. Этот вывод согласуется с данными рентгеновской рефлектометрии, где пик Брэгга, характерный для периодических структур, присутствует на рефлектограммах пленок $[\text{Co}_{0,4\text{нм}} / \text{Pd}_{\text{Pd}}] \times 15$ ($t_{\text{Pd}} = 0,6 \text{ нм}$ и $1,0 \text{ нм}$) перед отжигом. Пики +1-го порядка для данных систем не наблюдаются. Для пленок перед отжигом $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{t_{\text{Pd}}}] \times 15$ ($t_{\text{Co}} = 0,2 \text{ нм}$; $0,3 \text{ нм}$ и $t_{\text{Pd}} = 0,6 \text{ нм}$ и $1,0 \text{ нм}$) наблюдаются линии при $2\theta \approx 47,3\text{--}48,0^\circ$. Значения соотношений интенсивностей $A_{(002)} / A_{(111)}$ данных пиков к интенсивностям пиков при $2\theta \approx 40,5\text{--}41,3^\circ$ составляет $< 0,14$ и примерно равно соотношению интенсивностей пиков (111) и (200) ($A_{(002)} / A_{(111)}$) для твердого раствора Co_xPd_y в пленках после отжига. Это позволяет сделать вывод об отсутствии структуры с периодическими интерфейсами и формировании твердого раствора Co_xPd_y в пленках $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{t_{\text{Pd}}}] \times 15$ ($t_{\text{Co}} = 0,2 \text{ нм}$; $0,3 \text{ нм}$ и $t_{\text{Pd}} = 0,6 \text{ нм}$ и $1,0 \text{ нм}$) уже в процессе осаждения пленок. Таким образом, для изучаемых пленок без буферного слоя появление периодической структуры может предполагаться для $[\text{Co}/\text{Pd}] \times 15$ при толщине кобальта $t_{\text{Co}} \geq 0,4 \text{ нм}$. Отсутствие пика –1-го порядка для пленок после отжига с $t_{\text{Co}} = 0,4 \text{ нм}$ свидетельствует о разрушении периодической структуры, что также подтверждается отсутствием пика Брэгга на их рефлектограммах (рисунок 2.1 б).

Пики при углах $2\theta \approx 40\text{--}41^\circ$ и $2\theta \approx 46\text{--}48^\circ$ для пленок с буферным слоем $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{t_{\text{Pd}}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$ ($t_{\text{Co}} = 0,2 \text{ нм}$; $0,3 \text{ нм}$; $0,4 \text{ нм}$ и $t_{\text{Pd}} = 0,6 \text{ нм}$; $1,0 \text{ нм}$) могут быть представлены как суперпозиция двух дифракционных линий. Одна из них характеризует буферный слой палладия, а вторая описывает периодическую часть Co/Pd

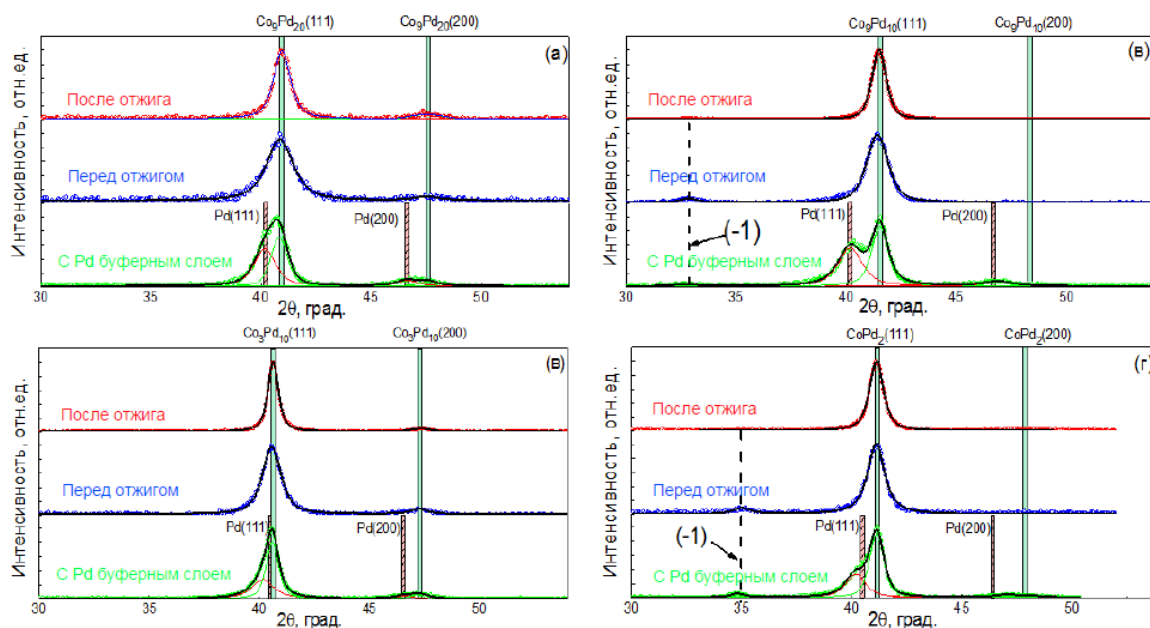


Рисунок 3.1 – Экспериментальные рентгенограммы (точки) многослойных пленок $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{0,6 \text{ нм}}] \times 15$: а) $t_{\text{Co}} = 0,2 \text{ нм}$, б) $t_{\text{Co}} = 0,4 \text{ нм}$ и $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{1,0 \text{ нм}}] \times 15$, где $t_{\text{Co}} = 0,2 \text{ нм}$ (г) и $0,4 \text{ нм}$ (е) перед, после отжига, а также пленок с буферным слоем, аппроксимированные линиями псевдо-Войта (линии). Пунктирными линиями на рисунке указаны позиции пиков порядков -1 относительно пиков нулевого порядка, за которые принимались дифракционные линии при углах 2θ равных $41,1^\circ$ и $41,5^\circ$

многослойной системы, обозначенную нами как пленка Co_xPd_y . В процессе аппроксимации положение пиков палладия принималось равным положению дифракционных линий пленки палладия толщиной 10 нм ($2\theta_{111} = 40,17^\circ$ и $2\theta_{200} = 46,65^\circ$), проанализированной нами ранее, все остальные параметры варьировались. Используя результаты аппроксимации был определен вклад каждого из пиков в суммарном сигнале. Вклад пика от пленки Co_xPd_y определялся как $A_{\text{CoPd}} / (A_{\text{CoPd}} + A_{\text{Pd}})$, где A_{CoPd} и A_{Pd} – интенсивности линий от пленки Co_xPd_y и пленки чистого палладия соответственно. Полученные величины сравнивались с отношением $t_{\text{CoPd}} / (t_{\text{CoPd}} + t_{\text{Pd}})$ толщин пленок Co/Pd (t_{CoPd}) к общим толщинам осажденных пленок ($t_{\text{CoPd}} + t_{\text{Pd}}$), где t_{Pd} – толщина буферного слоя. Зафиксированное совпадение данных величин подтверждает, что рассматриваемые дифракционные линии могут быть отнесены к буферному слою Pd и к периодической части Co/Pd многослойной системы. Пунктирными линиями на дифрактограммах указаны вычисленные позиции сателлитных пиков порядка -1 относительно пиков нулевого порядка, за которые принимались рефлексы при углах 2θ равных $41,1^\circ$ и $41,5^\circ$. Как и для неоттоженных пленок без буферного слоя, для пленок $\text{Pd}_{10 \text{ нм}} / [\text{Co}_{0,4 \text{ нм}} / \text{Pd}_{\text{Pd}}] \times 15 / \text{Pd}_{2 \text{ нм}}$ ($t_{\text{Pd}} = 0,6$ и $1,0 \text{ нм}$) наблюдается сателлитный пик -1 -го порядка при $2\theta \approx 32\text{--}35^\circ$. Пик $+1$ -го порядка для данных систем перекрывается с пиком от палладиевого буфера и предполагаемых пиков от твердых растворов $\text{Co}_9\text{Pd}_{10}$ и CoPd_2 . Для пленки $\text{Pd}_{10 \text{ нм}} / [\text{Co}_{0,3 \text{ нм}} / \text{Pd}_{1,0 \text{ нм}}] \times$

$15 / \text{Pd}_{2 \text{ нм}}$ также наблюдался сателлитный пик порядка -1 . Пик при $2\theta = 47,6^\circ$ для данной пленки также может быть интерпретирован как пик $+1$ -го порядка периодической системы $\text{Co}_{0,3 \text{ нм}} / \text{Pd}_{1,0 \text{ нм}}$ либо как пик от твердого раствора Co_2Pd_5 . Учитывая данные рефлектометрии, где для пленки $\text{Pd}_{10 \text{ нм}} / [\text{Co}_{0,3 \text{ нм}} / \text{Pd}_{1,0 \text{ нм}}] \times 15 / \text{Pd}_{2 \text{ нм}}$ и пленок $\text{Pd}_{10 \text{ нм}} / [\text{Co}_{0,4 \text{ нм}} / \text{Pd}_{\text{Pd}}] \times 15 / \text{Pd}_{2 \text{ нм}}$ ($t_{\text{Pd}} = 0,6 \text{ нм}$ и $1,0 \text{ нм}$) наблюдались пики Брэгга, дифракционные линии от данных пленок можно рассматривать как суперпозицию сигналов от твердого раствора и системы с периодическими прерывистыми интерфейсами. Однако, учитывая малую интенсивность наблюдаемых сателлитных пиков и пиков Брэгга на соответствующих рефлектограммах, можно предположить, что вклад сигнала от многослойной составляющей будет существенно меньше, чем вклад от твердого раствора.

На всех рентгенограммах для исходных пленок и пленок после отжига, а также пленок с буферным слоем, высокая интенсивность дифракционных линий отражения (111) указывает на преимущественную ориентацию роста кристаллитов (наличие текстуры) в направлении [111], поскольку в данном направлении обеспечивается минимальная поверхностная энергия за счет наиболее плотной упаковки атомов в кристаллитах с ГЦК структурой.

Значительная ширина дифракционных линий на рентгенограммах, приведенных на рисунке 3.1, указывает на небольшой размер зерен и свидетельствует о нанокристаллической структуре осажденных пленок. Используя значения ширины

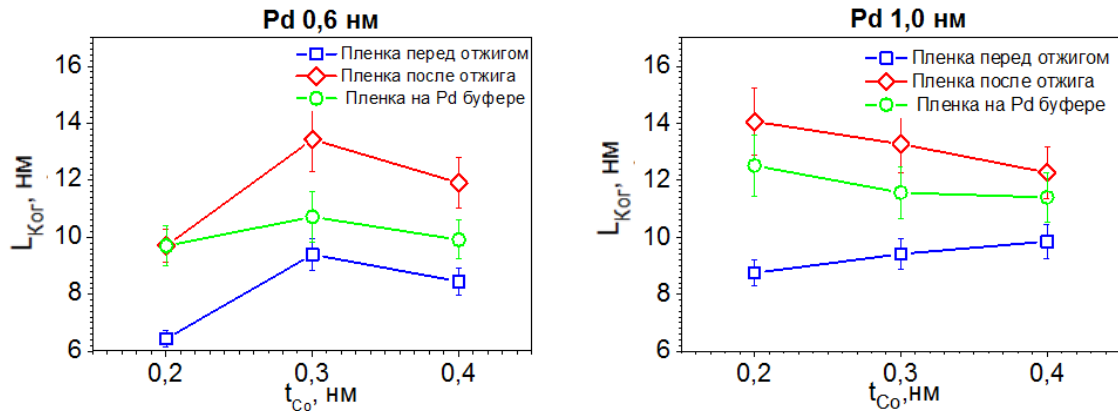


Рисунок 3.2 – Размеры кристаллитов, вычисленные из ширины дифракционной линии (111), для пленок $[Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15$ перед и после отжига, а также тонких пленок с палладиевым буферным слоем $Pd_{10\text{нм}} / [Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15 / Pd_{2\text{нм}}$ ($t_{Co} = 0,2 \text{ нм}; 0,3 \text{ нм}; 0,4 \text{ нм}$ и $t_{Pd} = 0,6 \text{ нм}; 1,0 \text{ нм}$)

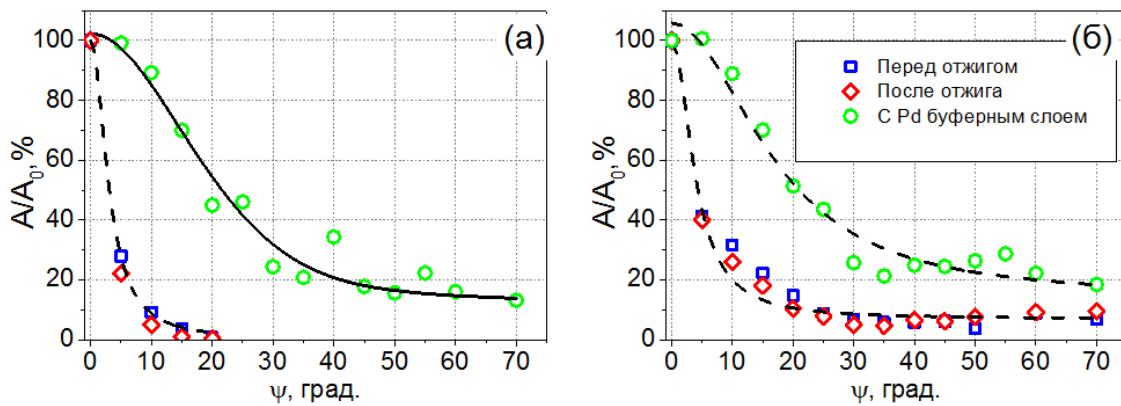


Рисунок 3.3 – Нормализованная интегральная интенсивность линий отражения (111) Co_xPd_y в зависимости от угла ψ для пленок $[Co_{0,3\text{нм}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15$ перед и после отжига, а также пленок $Pd_{10\text{нм}} / [Co_{0,3\text{нм}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15 / Pd_{2\text{нм}}$ для $t_{Pd} = 0,6 \text{ нм}$ (а) и $t_{Pd} = 1,0 \text{ нм}$ (б)

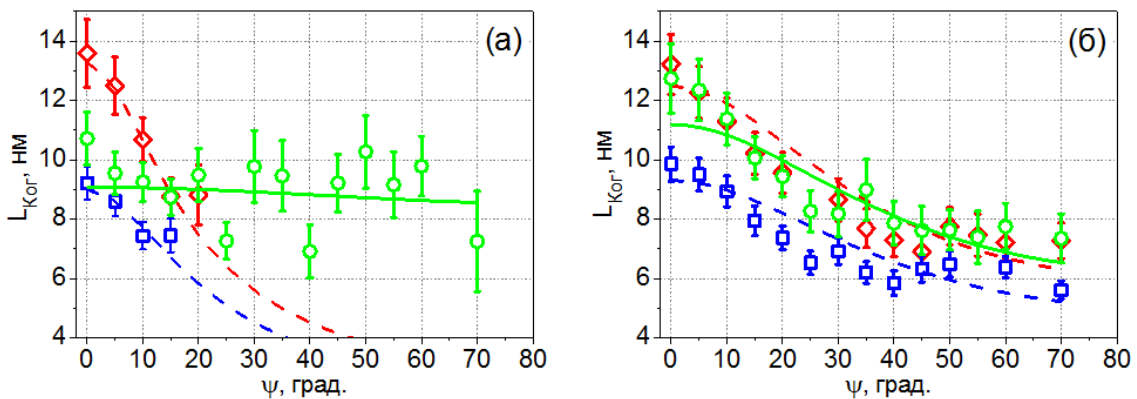


Рисунок 3.4 – Изменение размеров областей когерентного рассеяния L_{Kor} в зависимости от угла ψ для кристаллитов (111) Co_xPd_y пленок $[Co_{0,3\text{нм}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15$ ($t_{Pd} = 0,6 \text{ нм}$ (а) и $t_{Pd} = 1,0 \text{ нм}$ (б)) перед (квадраты) и после (ромбы) отжига, а также для кристаллитов (111) пленок $Pd_{10\text{нм}} / [Co_{0,3\text{нм}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15 / Pd_{2\text{нм}}$ ($t_{Pd} = 0,6 \text{ нм}$ (а) и $t_{Pd} = 1,0 \text{ нм}$ (б)) (круги)

на полувысоте, полученные из аппроксимации функцией псевдо-Войта пиков Co_xPd_y (111), по формуле Шерера определялось, как изменяется размер области когерентного рассеяния (размер кристаллитов) L_{Kor} в направлении, перпендикулярном к поверхности пленок с отжигом пленок, а также при наличии буферного слоя (рисунок 3.2).

Как видно из рисунка, отжиг пленок приводит к увеличению данных областей. Иначе говоря, с отжигом в данных пленках увеличивается размер (высота) областей, в которых расстояние между кристаллографическими плоскостями остается неизменным, что свидетельствует об уменьшении количества дефектов в структуре пленок.

Также, как видно из рисунка 3.2, наличие буфера приводит к увеличению кристаллитов системы Co_xPd_y по сравнению с пленками без буфера, что может свидетельствовать об уменьшении количества дефектов в структуре пленок и о более однородном росте пленки в процессе осаждения. Это объясняет появление пика Брэгга на рефлектограмме пленки $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{0,3\text{нм}}/\text{Pd}_{1,0\text{нм}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$, который не наблюдался для пленки без буферного слоя $[\text{Co}_{0,3\text{нм}}/\text{Pd}_{1,0\text{нм}}] \times 15$ и который связан с увеличением упорядоченности осажденных слоев и увеличением сплошности областей, обогащенных кобальтом, и появлению горизонтальных зон отражения, которые не наблюдались для данной пленки без буферного слоя.

Для определения направления преимущественной ориентации кристаллитов (111) в осажденных пленках, пленках после отжига и в пленках с буферным слоем, а также с целью определения изменения размера данных кристаллитов в различных направлениях относительно плоскости пленки выполнены измерения рентгеновской дифракции в геометрии $\theta-2\theta$, при которой изменялась величина угла наклона вектора дифракции относительно нормали к поверхности (изменение PCA- ψ).

Амплитуда пиков (111) Co_xPd_y на дифрактограммах PCA- ψ уменьшается с увеличением угла ψ . На рисунке 3.3 представлены нормализованные зависимости интенсивности (A/A_0) пиков (111) Co_xPd_y от угла ψ для исходных пленок $[\text{Co}_{0,3}/\text{Pd}_{\text{Pd}}] \times 15$, пленок после отжига, а также для пленок с буферным слоем $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{0,3\text{нм}}/\text{Pd}_{\text{Pd}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$ ($t_{\text{Pd}} = 0,6 \text{ нм}; 1,0 \text{ нм}$). Данные образцы были выбраны с точки зрения двух различных структур пленок: твердого раствора и периодических интерфейсов при наличии палладиевого буфера. Для остальных пленок получены похожие результаты. За интенсивность дифракционных линий в данном случае брались интегральные области (A) под пиками (111) Co_xPd_y при различных углах ψ , а за A_0 бралась интегральная интенсивность при $\psi = 0^\circ$.

Для пленок без буфера уменьшение интегральной интенсивности линий отражения (111) Co_xPd_y с ростом угла ψ показывает, что кристаллографические (111) плоскости большинства кристаллитов параллельны поверхности образца. Поскольку интегральная интенсивность отражения зависит от числа кристаллитов, удовлетворяющих закону Брэгга, то большинство кристаллитов Co_xPd_y со структурой (111) в пленках сориентированы перпендикулярно к поверхности пленки, и их количество экспоненциально уменьшается при отклонении от нормали (с увеличением угла ψ). Полученные значения согласуются с другими исследованиями, выполненными на сильно текстурированных магнитных многослойных системах $[\text{Co}/\text{Pd}] \times n$ [2], [17], [25], [27].

Интенсивность рефлексов (200) остается практически без изменений, что свидетельствует об изотропной ориентации кристаллитов с данной структурой.

Как видно из рисунка 3.3 для пленок с буферным слоем амплитуда рефлексов (111) уменьшается для $\psi < 40^\circ$ и при $\psi \geq 40^\circ$ остается практически неизменной. Таким образом, для пленок Co/Pd с буферным слоем, также как и для пленок без буферного слоя, большинство кристаллитов (111) в пленках Co_xPd_y сориентированы перпендикулярно к поверхности подложки и количество данных кристаллитов уменьшается с ростом угла ψ . Однако, в отличие от пленок без буфера, для пленок с буферным слоем распределение кристаллитов более равномерное. В пленке с буферным слоем присутствует значительное количество кристаллитов с ориентацией (111), ось которых направлена под углом $\psi \geq 40^\circ$. Таким образом, поликристаллический буферный слой палладия с кристаллической текстурой (111) не влияет на текстуру пленки Co_xPd_y , однако существенно сказывается на ориентации кристаллитов (111) относительно нормали к пленке.

Следует также отметить, что для пленки с $t_{\text{Pd}} = 1,0 \text{ нм}$ и буферным слоем, для которой может предполагаться появление периодических интерфейсов, интенсивность пика при $2\theta = 40,6^\circ$, соответствующего кристаллитам (111), уменьшается с увеличением угла ψ , но не равна нулю даже при $\psi = 70^\circ$. Это свидетельствует о том, что наблюдаемый пик не может являться дифракционным пиком только от структуры с периодическими интерфейсами, а, как минимум, является суперпозицией сигналов от многослойной структуры и твердого раствора Co_xPd_y со структурой (111). Это подтверждает правильность предположения о том, что подобные пленки также могут рассматриваться как твердый раствор Co_xPd_y .

Изменение размеров областей когерентного рассеяния в зависимости от угла ψ для кристаллитов (111) Co_xPd_y в исходных пленках с $t_{\text{Co}} = 0,3 \text{ нм}$ и пленках после отжига, а также для пленок с буфером представлены на рисунке 3.4.

При изменении угла наклона ψ дифракционные линии при $2\theta \approx 40,8-41,3^\circ$ наблюдаются для кристаллитов (111), направление роста которых совпадает с углом ψ и которые удовлетворяют закону Брэгга. Как видно из рисунка, значения $L_{\text{ког}}$ уменьшаются с ростом угла ψ . Из этого следует, что кристаллиты (111) Co_xPd_y , которые растут в пленке под разными углами к поверхности, имеют разный размер. Предполагая, что тенденция роста кристаллитов в разных направлениях сохраняется для каждого отдельного кристаллита, можно сделать вывод о том, что кристаллиты твердого раствора Co_xPd_y обладают анизотропией формы. Полученные зависимости $L_{\text{ког}}(\psi)$ могут быть аппроксимированы уравнением эллипса

$$L_{\text{коз}} = 2 \cdot r(\psi) = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{b^2 \cdot \cos^2 \psi + a^2 \cdot \sin^2 \psi}} = \frac{L_{\text{коз}\perp} \cdot L_{\text{коз}\parallel}}{\sqrt{L_{\text{коз}\perp}^2 \cdot \cos^2 \psi + L_{\text{коз}\parallel}^2 \cdot \sin^2 \psi}}$$

где $L_{\text{коз}\perp}$ и $L_{\text{коз}\parallel}$ – размер области когерентного рассеяния в перпендикулярном и параллельном направлениях поверхности пленок.

Результаты аппроксимации размеров областей когерентного рассеяния представлены в таблице 3.1. Следует отметить, что для пленок с $t_{\text{Pd}} = 1,0$ нм увеличение степени перемешивания между осаждаемыми слоями кобальта и палладия за счет отжига приводит к равномерному увеличению размера кристаллитов в образовавшемся твердом растворе Co_xPd_y , однако с сохранением соотношения их линейных параметров $L_{\text{коз}\perp} / L_{\text{коз}\parallel} \approx 2$. Данное соотношение сохраняется и для пленки с $t_{\text{Pd}} = 1,0$ нм с буферным слоем. Образование подобных вытянутых кристаллитов твердого раствора может быть связано с последовательным нанесением слоев кобальта и палладия, при котором атомы кобальта диффундируют в образовавшиеся слои палладия, что объясняется активной диффузией в направлении движения паров материала [36], [37].

Таблица 3.1 – Результаты расчетов размеров областей когерентного рассеяния для исходных пленок [$\text{Co}_{0,3\text{нм}} / \text{Pd}_{\text{Pd}}$], пленок после отжига и пленок с буферным слоем $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{0,3\text{нм}} / \text{Pd}_{\text{Pd}}] / \text{Pd}_{2\text{нм}}$

t_{Pd}	Перед отжигом		После отжига		С буферным слоем	
	$L_{\text{коз}\perp}$	$L_{\text{коз}\parallel}$	$L_{\text{коз}\perp}$	$L_{\text{коз}\parallel}$	$L_{\text{коз}\perp}$	$L_{\text{коз}\parallel}$
0,6	$8,9 \pm 0,4$	$2,8 \pm 0,5$	$13,3 \pm 0,6$	$3,0 \pm 0,3$	$9,0 \pm 0,5$	$8,5 \pm 1,0$
1,0	$9,3 \pm 0,5$	$5,0 \pm 0,5$	$12,5 \pm 0,5$	$6,0 \pm 0,5$	$11,2 \pm 0,5$	$6,3 \pm 0,5$

Заключение

Методом рентгеновской рефлектометрии и методом РСА показано, что периодические бислои Co/Pd в сплошных пленках без буферного слоя перед и после отжига, также как и в пленках с буферным слоем, можно рассматривать как твердый раствор Co_xPd_y , что объясняется значительной диффузией атомов кобальта в слои палладия уже при комнатной температуре и формированием твердого раствора Co_xPd_y непосредственно в процессе напыления. Кристаллиты Co_xPd_y имеют преимущественную ориентацию роста (текстуру) в направлении [111], поскольку в данном направлении обеспечивается минимальная поверхностная энергия за счет наиболее плотной упаковки атомов в кристаллитах с ГЦК структурой. Большинство кристаллитов (111) Co_xPd_y в пленках сориентированы перпендикулярно к поверхности пленки и их количество экспоненциально уменьшается при отклонении от нормали. Буферный слой Pd

способствует более упорядоченному осаждению слоев Co и Pd, что обусловлено увеличением размеров областей, обогащенных кобальтом (увеличением их сплошности), и появлением горизонтальных зон отражения, которые не наблюдались для данной пленки без буферного слоя. Буферный слой не влияет на текстуру пленки Co_xPd_y , однако существенно сказывается на ориентации кристаллитов (111) относительно нормали к пленке. Кристаллиты твердого раствора Co_xPd_y обладают анизотропией формы. Кристаллиты (111) Co_xPd_y в исходных пленках с $t_{\text{Pd}} = 1,0$ нм и $t_{\text{Pd}} = 0,6$ нм и пленках после отжига обладают вытянутой эллиптической формой с длинной осью параллельной нормали к поверхности пленок. Для пленок с $t_{\text{Pd}} = 0,6$ нм, при наличии буфера кристаллиты (111) Co_xPd_y имеют одинаковый размер во всех направлениях относительно нормали к плоскости образца.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnetic anisotropy in metallic multilayers* / M.T. Johnson, P.J.H. Bloemen, F.J. a Den Broeder, J.J. De Vries // Reports Prog. Phys. – 1996. – Vol. 59. – P. 1409–1458.
2. *Interface magnetic anisotropy in epitaxial superlattices* / B.N. Engel, C.D. England, R.A. Van Leeuwen, M.H. Wiedmann, C.M. Falco // Phys. Rev. Lett. – 1991. – Vol. 67. – P. 1910–1913.
3. *Magnetic anisotropy of multilayers* / F.J.A. den Broeder, W. Hoving, P. J. H. Bloemen // J. Magn. Magn. Mater. – 1991. – Vol. 93. – P. 562–570.
4. *Magnetic domain replication in interacting bilayers with out-of-plane anisotropy: Application to Co/Pt multilayers* / V. Baltz, A. Marty, B. Rodmacq, B. Dieny // Phys. Rev. B – Condens. Matter Phys. – 2007. – Vol. 75. – P. 014406-1–014406-6.
5. *Influence of layer thickness on the structure and the magnetic properties of Co/Pd epitaxial multilayer films* / K. Tobar, M. Ohtake, K. Nagano, M. Futamoto // J. Magn. Magn. Mater. – 2012. – Vol. 324. – P. 1059–1062.
6. *Piramanayagam, S.N. Perpendicular recording media for hard disk drives* / S.N. Piramanayagam // J. Appl. Phys. – 2007. – Vol. 102, № 1. – P. 011301-1–011301-22.
7. *Ultrathin Magnetic Structures IV Applications of Nanomagnetism* / J.A.C. Bland, B. Heinrich, eds. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – 258 p.
8. *Comparison of anisotropic interface magnetoresistance in Co/Pt and Co/Pd multilayers* / J.C. Lee [et al.] // J. Appl. Phys. – 2013. – Vol. 113, № 17. – P. 17C714-1–17C714-3.
9. *High temperature annealing stability of magnetic properties in MgO-based perpendicular magnetic tunnel junction stacks with CoFeB polarizing layer* / M.T. Rahman, A. Lyle, G. Hu,

- W.J. Gallaghe, J. P. Wang // J. Appl. Phys. – 2011. – Vol. 109, № 7. – P. 07C709-1–07C709-3.
10. Barton, C.W. Magnetisation reversal in anisotropy graded Co/Pd multilayers / C.W. Barton, T. Thomson // J. Appl. Phys. – 2015. – Vol. 118. – P. 063901-1–063901-6.
11. *Probing the energy barriers and magnetization reversal processes of nanoporated membrane based percolated media* / V. Neu [et al.] // Nanotechnology. – 2013. – Vol. 24. – P. 145702-1–145702-6.
12. *Magnetic films on nanoporated templates: a route towards percolated perpendicular media* / C. Schulze [et al.] // Nanotechnology – 2010. – Vol. 21. – P. 495701-1–495701-9.
13. *Recording study of percolated perpendicular media* / M. Grobis, C. Schulze, M. Faustini, D. Grosso, O. Hellwig, D. Makarov, M. Albrecht // Appl. Phys. Lett. – 2011. – Vol. 98. – P. 192504-1–192504-3.
14. *Effect of coherent to incoherent structural transition on magnetic anisotropy in Co/Pt multilayers* / P. Chowdhury [et al.] // J. Appl. Phys. – 2012. – Vol. 112. – P. 023912-1–023912-8.
15. Kim, S.K. Alloy-like co environment in Co/Pd multilayer films having perpendicular magnetic anisotropy / S.K. Kim, S.C. Shin // J. Appl. Phys. – 2001. – Vol. 89. – P. 3055–3057.
16. *Effect of microstructure on magnetic properties and anisotropy distributions in Co/Pd thin films and nanostructures* / J.M. Shaw [et al.] // Phys. Rev. B – Condens. Matter Mater. Phys. – 2009. – Vol. 80. – P. 184419-1–184419.
17. *Magnetic force microscopy of Co-Pd multilayers with perpendicular anisotropy* / J.R. Barnes [et al.] // J. Appl. Phys. – 1994. – Vol. 76. – P. 2974–2980.
18. *Origins of switching field distributions in perpendicular magnetic nanodot arrays* / J.M. Shaw, W.H. Rippard, S.E. Russek, T. Reith, C.M. Falco // J. Appl. Phys. – 2007. – Vol. 101. – P. 023909-1–023909-5.
19. Nemoto, H. Analysis of interfacial magnetic anisotropy in Co/Pt and Co/Pd multilayer films / H. Nemoto and Y. Hosoe // J. Appl. Phys. – 2005. – Vol. 97. – P. 10J109-1–10J109-4.
20. *Ultra-thin Co/Pd multilayers with enhanced high-temperature annealing stability* / M. Gottwald [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2013. – Vol. 102. – P. 052405-1–052405-5.
21. Yang, T. Microstructure and magnetic properties of Co/Pd multilayer films / T. Yang, F. Pan, B.X. Liu // Phys. Status Solidi Appl. Res. – 1994. – Vol. 142. – P. 443–450.
22. *Perpendicular magnetic tunnel junctions using Co-based multilayers* / Z.R. Tadisina [et al.] // J. Appl. Phys. – 2010. – Vol. 107. – P. 09C703-1–09C703-3.
23. Sbiaa, R. Domain structures and magnetization reversal in Co/Pd and CoFeB/Pd multilayers / R. Sbiaa, M. Ranjbar, J. Åkerman, 117 (2015) 17C102 1-5 // J. Appl. Phys. – 2015. – Vol. 117. – P. 17C102-1–17C102-5.
24. *The relationship between interface structure, conformality and perpendicular anisotropy in Co/Pd multilayers* / A.S.H. Rozatian, C.H. Marrows, T.P.A. Hase, B.K. Tanner // J. Phys. Condens. Matter. – 2005. – Vol. 17. – P. 3759–3770.
25. *Microstructures and perpendicular magnetic properties of Co/Pd multilayers on various metal/MgO seed-layers* / S. Kim, S. Lee, J. Kim, J. Kang, J. Hong // J. Appl. Phys. – 2011. – Vol. 109. – P. 07B766-1–07B766-3.
26. *Improvement of signal to noise ratio for Co/Pd multilayer perpendicular magnetic recording media by the addition of an underlayer* / T. Asahi, K. Kuramochi, J. Kawaji, T. Homma, T. Osaka // J. Magn. Magn. Mater. – 2001. – Vol. 235. – P. 40–44.
27. Kim, S.-K. Evidence for diffuse interfaces and tensile in-plane strains in evaporated (1 1 1) multilayers and their role in perpendicular magnetic anisotropy / S.-K. Kim, V.A. Chernov, Y.-M. Koo // J. Magn. Magn. Mater. – 1997. – Vol. 170. – P. L7–L12.
28. *Comparison of atomic structure anisotropy between Co-Pd alloys and Co/Pd multilayer films* / S. Kim, Y. Koo, V. Chernov, J. Kortright, S. Shin // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 62. – P. 3025–3028.
29. *Influence of interface alloying on the magnetic properties of Co/Pd multilayers* / J. Carrey, A.E. Berkowitz, W.F. Egelhoff, D.J. Smith // Appl. Phys. Lett. – 2003. – Vol. 83. – P. 5259–5261.
30. Mittemeijer, E.J. The “state of the art” of the diffraction analysis of crystallite size and lattice strain / E.J. Mittemeijer, U. Welzel // Zeitschrift für Krist. – 2008. – Vol. 223. – P. 552–560.
31. Welzel, U. The analysis of homogeneously and inhomogeneously anisotropic microstructures by X-ray diffraction / U. Welzel, E.J. Mittemeijer // Powder Diffr. – 2005. – Vol. 20. – P. 376–392.
32. *X-ray reflectivity of multilayers with non-continuous interfaces* / D. Rafaja [et al.] // J. Physics-Condensed Matter. – 2002. – Vol. 14. – P. 5303–5314.
33. *Data Card 03-065-6075*, Data Base of International Centre for Diffraction Data, 2013.
34. *Data Card 00-050-1437*, Data Base of International Centre for Diffraction Data, 2013.
35. Fullerton, E.E. Structural refinement of superlattices from X-ray diffraction / E. E. Fullerton, I.K. Schuller, H. Vanderstraeten, Y. Bruynseraede // Phys. Rev. B – 1992. – Vol. 45. – P. 9292–9310.
36. *Transmission electron microscopy study of Co/Pd and Co/Au multilayers* / F. Hakkens, A. De Veirman, W. Coene, F.J.A. Den Broeder // J. Mater. Res. – 1993. – Vol. 8. – P. 1019–1027.
37. Dinhut, J.F. Magnetic anisotropy in iron thin films evaporated under ultra-high vacuum / J.F. Dinhut, J.P. Eymery, R. Krishnan // Journal de Physique. – 1992. – Vol. 2. – P. C3-239–C3-244.

Поступила в редакцию 08.05.18.

УДК 539.12

ОБ ОПИСАНИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Е.М. Овсиук¹, О.В. Веко², Я.А. Войнова², А.Д. Коральков¹,
В.В. Кисель³, В.М. Редьков²

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

²Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

³Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

ON DESCRIBING BOUND STATES FOR A SPIN 1 PARTICLE IN THE EXTERNAL COULOMB FIELD

E.M. Ovsiyuk¹, O.V. Veko², Ya.A. Voynova², A.D. Koral'kov¹,
V.V. Kisel³, V.M. Red'kov²

¹I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University

²B.I. Stepanov Institute of Physics National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

³Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Исследуется система из 10 радиальных уравнений для векторной частицы в кулоновском поле. С использованием оператора пространственной четности система разбивается на две, по 4 и 6 уравнений каждая. Система из 4 уравнений решается в гипергеометрических функциях, приводя к известному спектру энергий. Комбинированием 6 уравнений удается получить для некоторых радиальных функций дифференциальные уравнения второго порядка. В частности, одно из уравнений оказывается уравнением Гойна, это позволило на основе выделения так называемых трансцендентных вырожденных функций Гойна получить условие квантования и соответствующий спектр энергий. Система 6 уравнений после исключения недифференциальных соотношений приведена к связанным уравнениям 1-го порядка для функций f_1, f_2, f_3, f_4 . Выведены уравнения 4-го порядка для каждой из этих функций, описаны их сингулярности.

Предложен метод описания проекций векторов решений – линий в 4-мерном пространстве $\{f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r)\}$ на различные плоскости $f_i = 0$.

Ключевые слова: векторная частица, поле Кулона, условие Лоренца, связанные состояния, трансцендентные функции Гойна, точные решения, дифференциальные уравнения первого и четвертого порядка.

The system of 10 radial equations for a spin 1 particle in the external Coulomb field, is studied. With the use of the space reflection operator, the system is split to subsystems, consisted of 4 and 6 equations respectively. The system of 4 equations is solved in terms of hypergeometric functions, which gives the known energy spectrum. Combining the 6-equation system, we derive several equations of the 2-nd order for some separate functions. On of them may be recognized as a confluent Heun equation. A series of bound states is constructed in terms of the so called transcendental confluent Heun functions, which provides us with solutions for the second class of bound states, with corresponding formula for energy levels. The subsystem of 6 is equations reduced to the system of the 1-st order equations for 4 functions $f_i, i = 1, 2, 3, 4$. We derive explicit form of a corresponding of the 4-th order equation for each function. From four independent solutions of each 4-th order equation, only two solutions may be referred to series of bound states.

Keywords: vector particle, Coulomb field, Lorentz condition, bound states, transcendental Heun functions, exact solutions, differential equations of second and fourth order.

Введение

До сих пор не решенной полностью является квантово-механическая задача о поведении частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле. Первый из трех ожидаемых подклассов решений и соответствующий ему дискретный спектр энергий был установлен И.Е. Таммом [1]. Незавершенность анализа относится к двум другим подклассам решений, описываемых системой из шести зацепляющихся между собой уравнений. Основной вывод работы [1] заключается в утверждении, что в этих состояниях векторная частица должна падать на кулоновский центр, не образуя устойчивых стационарных состояний в

кулоновском поле. Однако исследование нерелятивистского предела в уравнениях для векторной частицы в кулоновском поле показало [2], что существуют три подкласса решений, отвечающих связанным состояниям, с соответствующими спектрами энергии, модифицирующими известную шредингеровскую формулу для нерелятивистской скалярной частицы. Выполненный в работах [3], [4] анализ также показал, что есть возможность получать для некоторых радиальных функций дифференциальные уравнения второго порядка вместо ожидаемых уравнений 4-го порядка. К сожалению, в работах [3], [4] обнаружилась существенная техническая ошибка, что

делает неверной форму представления части полученных там результатов; в частности, в настоящей работе эта ошибка исправлена.

В разделе 1 получена система из 10 радиальных уравнений, следующая из уравнения Даффина – Кеммера для векторной частицы в кулоновском поле. С использованием оператора пространственной четности система разбивается на две подсистемы, состоящие из 4 и 6 уравнений. Решение системы из 4 уравнений выражено через гипергеометрические функции, при этом найденный спектр энергий совпадает с уже известным. Также найдены решения и уровни энергии при нулевом полном моменте $j = 0$.

В разделе 2 с использованием обобщенного условия Лоренца показано равенство нулю одной из радиальных компонент, что позволило упростить уравнения. Для простой подсистемы из 4 уравнений условие Лоренца выполняется автоматически. Условие равенства нулю одной из радиальных функций относится только к подсистеме из 6 уравнений, в ней имеем только 5 неизвестных функций.

В разделе 3 комбинированием полученных 6 уравнений удастся получить уравнение второго порядка для одной из радиальных функций.

В разделе 4 выполнен анализ этого дифференциального уравнения. Оно может быть отождествлено с вырожденным уравнением Гойна. На основе использования условия, выделяющего так называемые трансцендентные вырожденные функции Гойна, введено условие квантования и найден соответствующий спектр энергии. Таким образом, установлен второй класс связанных состояний.

В разделе 5 система 6 уравнений после исключения двух функций может быть приведена к четырем связанным между собой уравнениям первого порядка для 4 функций $f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r)$. В работе предложен метод, позволяющий получить описание проекций (сечений) линий в 4-мерном пространстве $\{f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r)\}$ – полных решений системы из 5 уравнений на различные плоскости $f_i = 0$. В каждом случае эти проекции состоят из двух частей (ветвей), которые задаются решениями двух разных уравнений второго порядка. Найден явный вид всех уравнений второго порядка, возникающих при описании таких проекций решений.

В разделе 6 выведены уравнения 4-го порядка для каждой из этих функций, описаны их сингулярности. Четыре дифференциальных уравнения 4-го порядка разбиваются на две пары с одинаковыми наборами сингулярных точек.

Уравнения для f_1, f_3 имеют одинаковый набор особых точек: три регулярные и две нерегулярные ранга 3/2. Уравнения для f_2, f_4 имеют также одинаковый набор особых точек: две регулярные

и две нерегулярные ранга 3/2. Любую из 4 функций, подчиняющихся уравнению 4-го порядка, можно выбрать как основную, а остальные вычислить из нее. Каждое из уравнений 4-го порядка имеет 4 линейно независимых решения. Из общих физических соображений можно ожидать, что только два из них описывают связанные состояния, порождая тем самым две серии связанных состояний с соответствующими (неизвестными) спектрами энергии.

1 Разделение переменных

Будем использовать матричное представление уравнения для векторной частицы в форме Даффина – Кеммера, основанное на применении тетрадного формализма [5]:

$$\left\{ \beta^0 \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) + i \left[\beta^3 \partial_r + \frac{1}{r} (\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}) \right] + \frac{1}{r} \Sigma_{0,\phi} - m \right\} \Phi(x) = 0,$$

где $\varepsilon = E / c\hbar$, $m = Mc / \hbar$, $\alpha = e^2 / (c\hbar) = 1/137$; $\Sigma_{0,\phi}$ обозначает зависящий от угловых переменных оператор

$$\Sigma_{0,\phi} = i \beta^1 \partial_\theta + \beta^2 \frac{i \partial_\phi + i j^{12} \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Волновые функции с квантовыми числами (ε, j, m) строятся в этом представлении на основе подстановки [5]

$$\Psi(x) = \{ \Phi_0(x), \bar{\Phi}(x), \bar{E}(x), \bar{H}(x) \},$$

$$\Phi_0(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} \Phi_0(r) D_0, \quad \bar{\Phi}(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} \begin{vmatrix} \Phi_1(r) D_{-1} \\ \Phi_2(r) D_0 \\ \Phi_3(r) D_{+1} \end{vmatrix},$$

$$\bar{E}(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} \begin{vmatrix} E_1(r) D_{-1} \\ E_2(r) D_0 \\ E_3(r) D_{+1} \end{vmatrix}, \quad \bar{H}(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} \begin{vmatrix} H_1(r) D_{-1} \\ H_2(r) D_0 \\ H_3(r) D_{+1} \end{vmatrix}.$$

Функции Вигнера обозначаются так:

$$D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0), \quad \sigma = 0, +1, -1;$$

квантовое число j принимает значения $0, 1, 2, \dots$ (не путать квантовое число m с безразмерным параметром массы). С применением рекуррентных формул для функций Вигнера

$$\partial_\theta D_{-1} = a D_{-2} - c D_0,$$

$$\frac{-m - (-1) \cos \theta}{\sin \theta} D_{-1} = -a D_{-2} - c D_0,$$

$$\partial_\theta D_0 = (c D_{-1} - d D_{+1}), \quad \frac{-m}{\sin \theta} D_0 = -c D_{-1} - d D_{+1},$$

$$\partial_\theta D_{+1} = (d D_0 - b D_{+2}),$$

$$\frac{-m - (+1) \cos \theta}{\sin \theta} D_{+1} = -d D_0 - b D_{+2},$$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{(j-1)(j+2)}, \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{(j-1)(j+2)},$$

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{j(j+1)}, d = \frac{1}{2}\sqrt{j(j+1)}$$

находим систему из 10 радиальных уравнений [3], [4]:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - \frac{\nu}{r}(E_1 + E_3) = m\Phi_0, \\ & +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = m\Phi_1, \\ & +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - i\frac{\nu}{r}(H_1 - H_3) = m\Phi_2, \\ & +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_3 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_3 - i\frac{\nu}{r}H_2 = m\Phi_3, \\ & -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_1 = 0, \\ & -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 - \frac{d}{dr}\Phi_0 - mE_2 = 0, \\ & -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_3 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_3 = 0, \\ & -i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 - i\frac{\nu}{r}\Phi_2 - mH_1 = 0, \\ & +i\frac{\nu}{r}(\Phi_1 - \Phi_3) - mH_2 = 0, \\ & +i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_3 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 - mH_3 = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\nu = \sqrt{j(j+1)}/2$, $j = 1, 2, \dots$

Вместе с операторами квадрата и третьей проекции полного момента будем диагонализировать оператор пространственной инверсии $\hat{\Pi}$. После преобразования представления оператора от обычного декартового базиса к базису сферической тетрады и циклическому базису матриц Даффина – Кеммера находим следующее явное выражение:

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_3 \end{vmatrix} \hat{P}, \quad \Pi_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнение на собственные значения $\hat{\Pi}\Psi = P\Psi$ дает два значения для пространственной четности и соответствующие ограничения для радиальных функций:

$$P = (-1)^{j+1}, \Phi_0 = 0, \Phi_3 = -\Phi_1, \Phi_2 = 0,$$

$$E_3 = -E_1, E_2 = 0, H_3 = H_1;$$

$$P = (-1)^j, \Phi_3 = \Phi_1, E_3 = +E_1, H_3 = -H_1, H_2 = 0.$$

При этом система из 10 уравнений (1.1) дает две более простые подсистемы. Первая:

$$\begin{aligned} & P = (-1)^{j+1}, \\ & +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = m\Phi_1, \end{aligned}$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 = mE_1,$$

$$-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 = mH_1, 2i\frac{\nu}{r}\Phi_1 = mH_2;$$

исключая в ней переменные E_1, H_1, H_2 , приходим к уравнению второго порядка для одной (основной) функции Φ_1

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - m^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\Phi_1 = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением для скалярной частицы в кулоновском поле. Решения строятся в гипергеометрических функциях и спектр энергии следующий (приводим формулу в обычных единицах измерения):

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \alpha^2/N^2}}, N = n + \frac{1}{2} + \sqrt{(j+1/2)^2 - \alpha^2}.$$

Для состояний с четностью $P = (-1)^j$ имеем систему из 6 уравнений:

$$\begin{aligned} 1) & \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1 + m\Phi_0 = 0, \\ 2) & +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 - m\Phi_1 = 0, \\ 3) & +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 - m\Phi_2 = 0, \\ 4) & -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_1 = 0, \\ 5) & i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 + mE_2 = 0, \\ 6) & i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 + mH_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Состояния с $j = 0$ следует рассмотреть отдельно. В этом случае исходим из специальной подстановки для волновой функции:

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= e^{-i\epsilon t/\hbar} \Phi_0(r), \quad \vec{\Phi}(x) = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} 0 \\ \Phi_2(r) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \\ \vec{E}(x) &= e^{-i\epsilon t/\hbar} \begin{vmatrix} 0 \\ E_2(r) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{H}(x) = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} 0 \\ H_2(r) \\ 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Угловой оператор $\Sigma_{0,\phi}$ при действии на эту функцию дает ноль. Четность фиксирована величиной $P = (-1)^{0+1} = -1$. Чтобы исключить из радиальных уравнений мнимую единицу i , используем переменные $\Phi_0 = \varphi_0$, $-i\Phi_1 = \varphi_1$, $-i\Phi_2 = \varphi_2$, тогда имеем уравнения

$$\begin{aligned} H_2 &= 0, \quad -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 = m\varphi_0, \\ \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 &= m\varphi_2, \quad \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\varphi_2 - \frac{d}{dr}\varphi_0 = mE_2. \end{aligned}$$

Отсюда находим уравнение второго порядка для основной функции E_2

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - m^2 \right] E_2 = 0.$$

Оно решается в терминах вырожденных гипергеометрических функций; приведем соответствующий спектр энергии

$$E = Mc^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{(n + \Gamma)^2} \right)^{-1/2},$$

$$\Gamma = \frac{1 + \sqrt{9 - 4\alpha^2}}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$$

2 Условие Лоренца во внешнем кулоновском поле

Известно, что для частицы со спином 1 во внешнем поле должно существовать обобщенное условие Лоренца. Чтобы найти это условие, удобно воспользоваться тензорной записью уравнений в форме Прока [5]:

$$D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha = m \Phi_{\alpha\beta}, \quad D^\alpha \Phi_{\alpha\beta} = m \Phi_\beta, \quad (2.1)$$

где $D_\alpha = \nabla_\alpha + ieA_\alpha$. Действуя на второе уравнение в (2.1) оператором D_α , получим

$$(\nabla_\alpha + ieA_\alpha) \Phi^\alpha = \frac{i\alpha}{2m} F_{\alpha\beta} \Phi^{\alpha\beta}.$$

Это условие в тензорной форме должно быть преобразовано к используемому представлению волновых функций. После необходимых вычислений получим радиальное соотношение [5]:

$$-i \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \Phi_2 - \frac{v}{r} (\Phi_1 + \Phi_3) =$$

$$= \frac{i\alpha}{2mr^2} E_2.$$

Для состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$ это условие превращается в тождество $0 = 0$. Для состояний с четностью $P = (-1)^j$ оно принимает вид

$$-i \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \Phi_2 - \frac{2v}{r} \Phi_1 =$$

$$= \frac{i\alpha}{2mr^2} E_2. \quad (2.2)$$

С использованием (2.2) из системы (1.2) можно вывести полезное для дальнейшего соотношение. Для этого из уравнения (2.2) исключим функцию Φ_2 с помощью третьего уравнения в (1.2), это дает

$$i \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) m \Phi_0 + i \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) E_2 -$$

$$- \frac{2iv}{r} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) H_1 + \frac{2mv}{r} \Phi_1 = \frac{i\alpha}{2r^2} E_2.$$

Преобразуя здесь второй и третий члены с помощью 1-го и 2-го уравнений системы (1.2), получаем

$$i \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) m \Phi_0 + i \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \left(-2 \frac{v}{r} E_1 - m \Phi_0 \right) -$$

$$- \frac{2v}{r} \left[m \Phi_1 - i \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) E_1 \right] + \frac{2mv}{r} \Phi_1 = \frac{i\alpha}{2r^2} E_2.$$

Слагаемые с E_1 и с Φ_1 сокращаются, в результате приходим к равенству

$$im \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi_0 - im \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \Phi_0 = \frac{i\alpha}{2r^2} E_2 \Rightarrow E_2 = 0.$$

Таким образом, имеем ограничение $E_2 = 0$.

Это важное условие, фактически оно означает, что дальше в подсистеме из 6 уравнений будем иметь только 5 неизвестных функций.

3 Уравнение второго порядка для функции Φ_0

Из системы (1.2) с учтенным в ней условием $E_2 = 0$:

- 1) $mE_1 = -\frac{m^2}{2v} r \Phi_0,$
- 2) $\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) mE_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) mH_1 + m^2 \varphi_1 = 0,$
- 3) $\frac{2v}{mr} H_1 = \varphi_2,$
- 4) $-\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \varphi_1 + \frac{v}{r} \Phi_0 = mE_1,$
- 5) $\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \varphi_2 + \frac{d}{dr} \Phi_0 = 0,$
- 6) $\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \varphi_1 + \frac{v}{r} \varphi_2 + mH_1 = 0$

(в уравнениях мнимая единица исключена введением переменных $i\Phi_1 = \varphi_1, i\Phi_2 = \varphi_2$) можно вывести достаточно простое уравнение второго порядка для функции Φ_0 . Сначала, с помощью уравнений 3) и 4) исключим функции φ_2 и E_1 :

- 1) $-\frac{2v}{r} \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \varphi_1 + \left(\frac{2v^2}{r^2} + m^2 \right) \Phi_0 = 0,$
- 2) $\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) H_1 + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) \frac{1}{m} \frac{v}{r} \Phi_0 +$
 $+ \frac{1}{m} \left[m^2 - \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] \varphi_1 = 0, \quad (3.1)$
- 5) $\frac{d}{dr} \Phi_0 + \frac{2v}{mr} \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) H_1 = 0,$
- 6) $\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \varphi_1 + \frac{1}{m} \left(m^2 + \frac{2v^2}{r^2} \right) H_1 = 0.$

Поддействуем на уравнение 5) в (3.1) оператором $\frac{d}{dr}$:

$$\frac{d^2}{dr^2} \Phi_0 - \frac{2v}{mr^2} \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) H_1 - \frac{2v}{mr} \frac{\alpha}{r^2} H_1 +$$

$$+\frac{2\nu}{mr}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{d}{dr}H_1=0.$$

Затем с помощью уравнения 2) в (3.1)

$$\frac{d}{dr}H_1 = -\left[\frac{1}{r}H_1 + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{m}\frac{\nu}{r}\Phi_0 + \frac{1}{m}\left[m^2 - \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\Phi_1\right]$$

получим

$$\frac{d^2}{dr^2}\Phi_0 - \frac{2\nu}{mr^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)H_1 - \frac{2\nu}{mr}\frac{\alpha}{r^2}H_1 - \frac{2\nu}{mr}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\left[\frac{1}{r}H_1 + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{m}\frac{\nu}{r}\Phi_0 + \frac{1}{m}\left[m^2 - \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\Phi_1\right] = 0,$$

или

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\nu^2}{m^2r^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\Phi_0 - \left[\frac{2\nu}{mr^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) + \frac{2\nu}{mr}\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\nu}{mr^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\right]H_1 - \frac{2\nu}{m^2r}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\left[m^2 - \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\Phi_1 = 0.$$

Чтобы исключить отсюда функцию Φ_1 , воспользуемся уравнением 1) в (3.1):

$$\frac{2\nu}{mr}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 = \frac{1}{m}\left(m^2 + \frac{2\nu^2}{r^2}\right)\Phi_0;$$

так приходим к

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - m^2 - \frac{2\nu^2}{r^2}\right]\Phi_0 - \frac{4\nu}{mr^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)H_1 - \frac{2\nu}{mr}\frac{\alpha}{r^2}H_1 = 0.$$

Теперь воспользуемся уравнением 5) в (3.1)

$$\frac{d}{dr}\Phi_0 + \frac{2\nu}{mr}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)H_1 = 0;$$

тогда получим

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - m^2 - \frac{2\nu^2}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right]\Phi_0 - \frac{2\nu}{mr}\frac{\alpha}{r^2}H_1 = 0.$$

Наконец, воспользовавшись еще раз уравнением 5) в (3.1):

$$-\frac{mr}{2\nu}\frac{1}{\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)}\frac{d}{dr}\Phi_0 = H_1,$$

приходим к уравнению второго порядка для функции Φ_0 :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon r + \alpha}\right)\frac{d}{dr} + \varepsilon^2 - \right.$$

$$\left. -m^2 + \frac{2\varepsilon\alpha}{r} + \frac{\alpha^2 - 2\nu^2}{r^2}\right]\Phi_0 = 0.$$

Это уравнение в переменной

$$z = -\frac{\varepsilon}{\alpha}r < 0, \quad r = -\frac{\alpha}{\varepsilon}z$$

примет вид

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \left(\frac{3}{z} - \frac{1}{z-1}\right)\frac{d\Phi_0}{dz} + \left(\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{E_0^2} - \frac{2\alpha^2}{z} - \frac{2\nu^2 - \alpha^2}{z^2}\right)\Phi_0 = 0, \quad (3.2)$$

где все величины безразмерные; в частности, $m^2/\varepsilon^2 = M^2c^4/E^2 = 1/E_0^2$. Будем пользоваться обозначениями

$$\Gamma^2 = 2\nu^2 - \alpha^2 = j(j+1) - \alpha^2 > 0, \\ -\Lambda^2 = -\left(-\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{E_0^2}\right) = -\alpha^2\frac{1-E_0^2}{E_0^2} < 0;$$

тогда уравнение (3.2) запишется так:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \left(\frac{3}{z} - \frac{1}{z-1}\right)\frac{d\Phi_0}{dz} + \left(-\Lambda^2 - \frac{2\alpha^2}{z} - \frac{\Gamma^2}{z^2}\right)\Phi_0 = 0. \quad (3.3)$$

Можно ввести квадрат эффективного импульса

$$P^2(z) = -\Lambda^2 - \frac{2\alpha^2}{z} - \frac{\Gamma^2}{z^2};$$

в физических особых точках он ведет себя так:

$$z \rightarrow 0, \quad P^2(z) \sim -\frac{\Gamma^2}{z^2} \sim -\infty;$$

$$z \rightarrow \infty, \quad P^2(z) \sim -\Lambda^2 < 0.$$

Две точки поворота задаются уравнением $\Lambda^2 z^2 + 2\alpha^2 z + \Gamma^2 = 0$, они равны

$$z_{1,2} = \frac{-\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^4 - \Gamma^2 \Lambda^2}}{\Lambda^2}.$$

Обе точки поворота лежат в отрицательной области переменной z (значит, лежат в физической области), если

$$\alpha^4 - \Gamma^2 \Lambda^2 < 0 \Rightarrow E_0^2 < 1 - \frac{\alpha^2}{\Gamma^2 + \alpha^2}.$$

Это качественное рассмотрение указывает на возможность существования решений, соответствующих связанным состояниям системы; уровни энергии будут описаны ниже.

4 Анализ уравнения для функции Φ_0

Обратимся к уравнению (3.3). Оно имеет две регулярные точки $z = 0, 1$ и одну нерегулярную $z = \infty$ ранга 2. Рассмотрим поведение решений Φ_0 около точки $z = 0$:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \frac{3}{z}\frac{d\Phi_0}{dz} - \frac{\Gamma^2}{z^2}\Phi_0 = 0, \quad \Phi_0 \sim z^A,$$

$A_1 = -1 + \sqrt{1 + \Gamma^2} > 0$, $A_2 = -1 - \sqrt{1 + \Gamma^2} < 0$;
связанным состояниям (решения должны быть конечными в $r = 0$) соответствуют положительные значения для A . В области $z = \infty$ решения ведут себя так:

$$\frac{d^2 \Phi_0}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d \Phi_0}{dz} - \Lambda^2 \Phi_0 = 0,$$

$$\Phi_0 = e^{+\sqrt{\Lambda^2} z} = e^{-\sqrt{M^2 c^4 - E^2} r / \hbar c};$$

используем только решения, затухающие на бесконечности. Около нефизической особой точки решения ведут себя вполне регулярно:

$$\Phi_0(z) \sim (z-1)^\sigma, \quad \sigma = 0, 2.$$

Будем строить решения уравнения (3.3) в виде $\Phi_0(z) = z^A e^{Bz} f(z)$; находим уравнение для функции f :

$$f'' + \left(2B + \frac{2A+3}{z} - \frac{1}{z-1} \right) f' + \left[(B^2 - \Lambda^2) + \frac{A^2 + 2A - \Gamma^2}{z^2} + \frac{2AB + A + 3B - 2\alpha^2}{z} - \frac{A+B}{z-1} \right] f = 0. \quad (4.1)$$

Выбрав A и B так:

$$A = -1 + \sqrt{1 + \Gamma^2}, \quad B = +\sqrt{\Lambda^2},$$

уравнение приводим к более простому виду

$$f'' + \left(2B + \frac{2A+3}{z} - \frac{1}{z-1} \right) f' + \left(\frac{2AB + A + 3B - 2\alpha^2}{z} - \frac{A+B}{z-1} \right) f = 0.$$

Оно может быть отождествлено с вырожденным уравнением Гойна [6], [7]

$$H'' + \left(-t + \frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} \right) H' + \frac{\lambda - taz}{z(z-1)} H = 0,$$

с параметрами

$$t = -2B, \quad c = 2A + 3, \quad d = -1,$$

$$-\lambda = 2AB + 3B + A - 2\alpha^2, \quad -ta = 2BA + 2B - 2\alpha^2.$$

Для параметра a находим выражение $a = A + 1 - \alpha^2 / B$; и далее получаем

$$a = +\sqrt{1 + \Gamma^2} - \alpha^2 / \Lambda.$$

Решения уравнения (4.1) строим в виде степенных рядов: $f = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$. Получив уравнение

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)d_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)nd_{n+1} z^n - t \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)d_{n-1} z^n + (t+d+c) \sum_{n=1}^{\infty} nd_n z^n - c \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)d_{n+1} z^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n - ta \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} z^n = 0,$$

приходим к 3-членным рекуррентным соотношениям

$$n = 0, \quad cd_1 + \lambda d_0 = 0;$$

$$n \geq 1, 2, 3, \dots \quad t(n-1+a)d_{n-1} -$$

$$-[n(n-1+t+d+c) + \lambda]d_n + (n+1)(n+c)d_{n+1} = 0.$$

Рекуррентную формулу можно переписать так:

$$n = 0, \quad cd_1 + \lambda d_0 = 0,$$

$$n = 1, 2, \dots \quad P_n d_n - (Q_n + \lambda)d_{n+1} + R_n d_{n+2} = 0, \quad (4.2)$$

где

$$P_n = t(n-1+a),$$

$$Q_n = n(n-1+t+d+c),$$

$$R_n = (n+1)(n+c).$$

Соотношение (4.2) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{n^2} P_n - \frac{1}{n^2} (Q_n + \lambda) \frac{d_{n+1}}{d_n} + \frac{1}{n^2} R_n \frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 0;$$

отсюда при $n \rightarrow \infty$ находим простое алгебраическое уравнение

$$-r + r^2 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} = r.$$

Согласно методу Пуанкаре – Перрона заключаем, что минимальный (и значит гарантированный) радиус сходимости равен $R_{conv} = 1$. Другая возможность для радиуса сходимости – это $R'_{conv} = \infty$. Нет оснований полагать, что ряд не сходится в области $R'_{conv} = \infty$, поскольку около третьей особой точки $z = 1$ решения ведут себя вполне регулярно. Однако желателен более детальный анализ этого вопроса.

Если накладывать только первое условие $a = -n$, опуская второе $d_{n+1} = 0$, то приходим к классу так называемых трансцендентных вырожденных функций Гойна [6] (они не являются полиномами):

$$a = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

С использованием обозначения

$$N \equiv n + \sqrt{1 + \Gamma^2} = n + \sqrt{1 + j(j+1) - \alpha^2}$$

правило квантования (4.3) приводит к

$$N = \frac{\alpha^2}{\Lambda} \equiv \alpha \sqrt{\frac{E_0^2}{1 - E_0^2}},$$

откуда следует формула для уровней энергии

$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 / N^2}}, \quad N = n + \sqrt{1 + j(j+1) - \alpha^2}.$$

Полученная формула для энергий представляется разумной с физической точки зрения, ее можно рассматривать как описывающую вторую серию связанных состояний с четностью $P = (-1)^j$ для векторной частицы в кулоновском поле.

Анализ показывает, что при дальнейшем комбинировании уравнений внутри полученной системы мы приходим к уравнениям с одними и теми же (несколькими) наборами сингулярных точек. В рамках настоящей статьи не излагаются все эти возможности. Это можно рассматривать как обнадеживающий фактор. Вместе с тем анализ

системы уравнений не следует считать законченным. Например, заранее неясно, какие спектры энергии могут возникнуть из анализа разных уравнений второго порядка; множество разных спектров едва ли может рассматриваться удовлетворительным ответом. Еще одна сложность заключается в том, что отсутствуют рецепты выделения решений для связанных состояний, если уравнение содержит достаточно сложный набор сингулярных точек.

В связи с этим дальше возвратимся снова к исходной системе из 6 уравнений, не учитывая следствия их условия Лоренца (само условие Лоренца – это следствие этой же системы уравнений, поэтому учитывать его с самого начала необязательно).

5 Анализ системы из четырех дифференциальных уравнений

Исходим из полученной ранее системы 6 радиальных уравнений, описывающей состояния с фиксированной пространственной четностью $P = (-1)^j, j = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} &+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - 2i\frac{v}{r}H_1 - M\Phi_2 = 0, \\ &-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 + \frac{v}{r}\Phi_0 - ME_1 = 0, \\ &\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{v}{r}E_1 + M\Phi_0 = 0, \\ &+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 - M\Phi_1 = 0, \\ &i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 + ME_2 = 0, \\ &i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 + i\frac{v}{r}\Phi_2 + MH_1 = 0. \end{aligned}$$

Размерности величин определяются соотношениями

$$\begin{aligned} M &= \frac{mc}{\hbar} = \frac{1}{\lambda}, \quad [M] = \frac{1}{L}, \\ \varepsilon &= \frac{E}{\hbar c}, \quad [\varepsilon] = \frac{1}{L}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}. \end{aligned}$$

Фактически, можно перейти полностью к безразмерным параметрам, если учесть присутствие в уравнениях комптоновской длины волны λ и за единицу измерения энергии выбрать энергию покоя частицы mc^2 : $rM \rightarrow x, \quad \varepsilon/M = E/mc^2 \rightarrow \varepsilon$, в результате имеем

$$\begin{aligned} &+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)E_2 - 2i\frac{v}{x}H_1 - \Phi_2 = 0, \\ &-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)\Phi_1 + \frac{v}{x}\Phi_0 - E_1 = 0, \\ &\left(\frac{d}{dx} + \frac{2}{x}\right)E_2 + 2\frac{v}{x}E_1 + \Phi_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{r}\right)H_1 - \Phi_1 = 0, \\ &i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)\Phi_2 + \frac{d}{dx}\Phi_0 + E_2 = 0, \\ &i\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\right)\Phi_1 + i\frac{v}{x}\Phi_2 + H_1 = 0. \end{aligned}$$

С использованием подстановок

$$\Phi_1 = \frac{1}{x}\varphi_1, \quad E_2 = \frac{1}{x^2}e_2, \quad H_1 = \frac{1}{x}h_1$$

преобразуем систему к виду

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)\frac{1}{x^2}e_2 - 2i\frac{v}{x^2}h_1, \\ E_1 &= -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)\frac{1}{x}\varphi_1 + \frac{v}{x}\Phi_0, \\ \frac{d}{dx}e_2 &= -2vx E_1 - x^2\Phi_0, \\ \frac{d}{dx}h_1 &= -(x\varepsilon + \alpha)E_1 - i\varphi_1, \\ \frac{d}{dx}\Phi_0 &= -i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)\Phi_2 - \frac{1}{x^2}e_2, \\ \frac{d}{dx}\varphi_1 &= -v\Phi_2 + ih_1. \end{aligned}$$

С помощью двух первых уравнений исключаем функции Φ_2, E_1 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}e_2 &= 2iv\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)\varphi_1 - (2v^2 + x^2)\Phi_0, \\ \frac{d}{dx}h_1 &= +i\left[\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)^2 - 1\right]\varphi_1 - v\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)\Phi_0; \\ \frac{d}{dx}\varphi_1 &= -\frac{iv}{x^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)e_2 + i\left(\frac{2v^2}{x^2} + 1\right)h_1, \\ \frac{d}{dx}\Phi_0 &= \frac{1}{x^2}\left[\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)^2 - 1\right]e_2 - \frac{2v}{x^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{x}\right)h_1. \end{aligned}$$

Для дальнейшего удобно использовать обобщенные обозначения:

$$\begin{aligned} a &= 2iv\frac{\varepsilon x + \alpha}{x}, \quad c = -(2v^2 + x^2), \\ d &= i\frac{(\varepsilon x + \alpha)^2 - x^2}{x^2}, \quad b = -\frac{v(\varepsilon x + \alpha)}{x}, \\ A &= -i\frac{v(\varepsilon x + \alpha)}{x^3}, \quad B = -\frac{2v(\varepsilon x + \alpha)}{x^3}, \\ C &= +i\frac{(2v^2 + x^2)}{x^2}, \quad D = \frac{(\varepsilon x + \alpha)^2 - x^2}{x^4}, \\ ab - cd &= ip(x), \quad AB - CD = -i\frac{p(x)}{x^4}, \end{aligned}$$

$$p(x) = (\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2\alpha\varepsilon x - (2v^2 - \alpha^2);$$

также переобозначим неизвестные функции: $e_2 = f_1, \quad h_1 = f_2, \quad \varphi_1 = f_3, \quad \Phi_0 = f_4$. Тогда получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_1 &= af_3 + cf_4, & \frac{d}{dx} f_2 &= df_3 + bf_4; \\ \frac{d}{dx} f_3 &= Af_1 + Cf_2, & \frac{d}{dx} f_4 &= Df_1 + Bf_2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Выше в разделе 2 после комбинирования уравнений друг с другом было выведено ограничение $E_2 = 0$. Исследуем эту возможность еще раз; кроме того, будем накладывать такого рода внешние условия и на другие три функции.

Накладываем в системе (5.1) ограничение $f_1 = 0$ (тем самым исследуем проекцию полного решения $\{f_1, \dots, f_4\}$ на плоскость $f_1 = 0$); при этом получаем уравнения

$$\begin{aligned} af_3 + cf_4 &= 0, & df_3 + bf_4 &= \frac{d}{dx} f_2, \\ \frac{d}{dx} f_3 &= Cf_2, & \frac{d}{dx} f_4 &= Bf_2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Рассматривая первые два уравнения как линейные относительно f_3 и f_4 , находим

$$f_3 = \frac{-c}{ab - cd} \frac{d}{dx} f_2, \quad f_4 = \frac{a}{ab - cd} \frac{d}{dx} f_2.$$

Подставляя эти равенства в оставшиеся два уравнения, получаем два разных уравнения второго порядка для функции f_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{-c}{ab - cd} \frac{d}{dr} f_2' &= Cf_2', \\ \left(\frac{d}{dx} \frac{2v^2 + x^2}{p(x)} \frac{d}{dx} + \frac{2v^2 + x^2}{x^2} \right) f_2' &= 0; \\ \frac{d}{dr} \frac{a}{ab - cd} \frac{d}{dr} f_2'' &= Bf_2'', \\ \left(\frac{d}{dx} \frac{\epsilon x + \alpha}{xp(x)} \frac{d}{dx} + \frac{(\epsilon x + \alpha)}{x^3} \right) f_2'' &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений (5.2), описывающая проекцию решения на плоскость $f_1 = 0$, может быть решена на основе использования двух основных функций $f_1 = f_1', f_1''$, подчиняющихся существенно различным дифференциальным уравнениям второго порядка, при этом в каждом случае для остальных трех функций получаем также разные представления. Другими словами, проекция полного решения $\{f_i(x)\}$ на плоскость $f_1 = 0$ состоит из двух частей, связанных соответственно с функциями f_2' и f_2'' . По существу понятие «проекция решения» – это определение; оправдание для его использования в том, что этот прием позволяет получить некоторую дополнительную информацию о решениях, которые мы хотели бы построить.

Накладываем условие $f_2 = 0$; тогда имеем уравнения

$$af_3 + cf_4 = \frac{d}{dx} f_1, \quad 0 = df_3 + bf_4,$$

$$\frac{d}{dx} f_3 = Af_1, \quad \frac{d}{dx} f_4 = Df_1.$$

Из первых двух уравнений находим f_3, f_4 ; в результате имеем

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{b}{ab - cd} \frac{d}{dx} f_1, & f_4 &= \frac{-d}{ab - cd} \frac{d}{dx} f_1, \\ \frac{d}{dx} f_3 &= Af_1', & \frac{d}{dx} f_4 &= Df_1'. \end{aligned}$$

Из двух последних уравнений находим два разных уравнения для f_1 :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx} \frac{(\epsilon x + \alpha)}{xp(x)} \frac{d}{dx} + \frac{(\epsilon x + \alpha)}{x^3} \right] f_1' &= 0; \\ \left[\frac{d}{dx} \frac{(\epsilon x + \alpha)^2 - x^2}{x^2 p(x)} \frac{d}{dx} + \frac{(\epsilon x + \alpha)^2 - x^2}{x^4} \right] f_1'' &= 0. \end{aligned}$$

Проекция полного решения $\{f_i(x)\}$ на плоскость $f_2 = 0$ также состоит из двух частей, связанных соответственно с функциями f_1', f_1'' .

Накладываем условие $f_3 = 0$, тогда имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_1 &= cf_4, & \frac{d}{dx} f_2 &= bf_4, \\ Af_1 + Cf_2 &= 0, & Df_1 + Bf_2 &= \frac{d}{dx} f_4; \end{aligned}$$

откуда получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{-C}{AB - CD} \frac{d}{dx} f_4, & f_2 &= \frac{A}{AB - CD} \frac{d}{dx} f_4, \\ \frac{d}{dx} f_1 &= cf_4, & \frac{d}{dx} f_2 &= bf_4. \end{aligned}$$

Таким образом, находим два разных уравнения для f_4 :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx} \frac{(2v^2 + x^2)x^2}{p(x)} \frac{d}{dx} + (2v^2 + x^2) \right] f_4' &= 0; \\ \left[\frac{d}{dx} \frac{(\epsilon x + \alpha)x}{p(x)} \frac{d}{dx} + \frac{\epsilon x + \alpha}{x} \right] f_4'' &= 0. \end{aligned}$$

Проекция полного решения $\{f_i(x)\}$ на плоскость $f_3 = 0$ состоит из двух частей, связанных соответственно с функциями f_4', f_4'' .

Накладываем условие $f_4 = 0$, тогда имеем уравнения

$$\begin{aligned} Af_1 + Cf_2 &= \frac{d}{dr} f_3, & Df_1 + Bf_2 &= 0, \\ \frac{d}{dx} f_1 &= af_3, & \frac{d}{dx} f_2 &= df_3, \end{aligned}$$

откуда следует эквивалентная система

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{B}{AB - CD} \frac{d}{dx} f_3, & f_2 &= \frac{-D}{AB - CD} \frac{d}{dx} f_3, \\ \frac{d}{dx} f_1 &= af_3, & \frac{d}{dx} f_2 &= df_3. \end{aligned}$$

Два последних уравнения дают разные уравнения для f_3 :

$$\left[\frac{d}{dx} \frac{2\nu(\varepsilon x + \alpha)x}{p(x)} \frac{d}{dx} + \frac{2\nu(\varepsilon x + \alpha)}{x} \right] f_3' = 0,$$

$$\left[\frac{d}{dx} \frac{(\varepsilon x + \alpha)^2 - x^2}{p(x)} + \frac{(\varepsilon x + \alpha)^2 - x^2}{x^2} \right] f_3'' = 0.$$

Проекция полного решения $\{f_i(x)\}$ на плоскость $f_4 = 0$ состоит из двух частей, связанных соответственно с функциями f_3' , f_3'' .

Найдем явный вид всех полученных уравнений второго порядка и проследим за характером их сингулярностей; напоминаем, что

$$p(x) = (\varepsilon^2 - 1)(x - x_1)(x - x_2),$$

$$x_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{2\nu^2 \varepsilon^2 - (2\nu^2 - \alpha^2)}}{1 - \varepsilon^2},$$

это комплексные корни, если следим за связанными состояниями: $0 < \varepsilon < 1$.

Проекция $f_1 = 0$. Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{2x}{x^2 + 2\nu^2} - \frac{p'}{p} \right) \frac{d}{dx} + \frac{p}{x^2} \right] f_2' = 0,$$

особые точки $x_1, x_2, x_{3,4} = \pm i\sqrt{2\nu^2}, 0, \infty_{[2]}$.

Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon x + \alpha} - \frac{1}{x} - \frac{p'}{p} \right) \frac{d}{dx} + \frac{p}{x^2} \right] f_2'' = 0,$$

особые точки $x_1, x_2, x_5 = -\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0, \infty_{[2]}$.

Проекция $f_2 = 0$. Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon x + \alpha} - \frac{1}{x} - \frac{p'}{p} \right) \frac{d}{dx} + \frac{p}{x^2} \right] f_1' = 0.$$

Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{2(\varepsilon x + \alpha)\varepsilon - 2x}{(\varepsilon x + \alpha)^2 - x^2} - \frac{2}{x} - \frac{p'}{p} \right) \frac{d}{dx} + \frac{p}{x^2} \right] f_1'' = 0,$$

корни уравнения $(\varepsilon x + \alpha)^2 - x^2 = 0$:

$$x_{3,4} = -\frac{\alpha}{\varepsilon + 1}, \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}.$$

Здесь имеем уравнение с сингулярными точками: $x_1, x_2, x_3, x_4, 0, \infty_{[2]}$.

Проекция $f_3 = 0$. Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{2x}{2\nu^2 + x^2} + \frac{2}{x} - \frac{p'}{p} \right) \frac{d}{dx} - \frac{p}{x^2} \right] f_4' = 0,$$

особые точки $x_1, x_2, x_{3,4} = \pm i\sqrt{2\nu^2}, 0, \infty_{[2]}$.

Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon x + \alpha} + \frac{1}{x} - \frac{p'}{p} \right) + \frac{p}{x^2} \right] f_4'' = 0,$$

особые точки $x_1, x_2, x_5 = -\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0, \infty_{[2]}$.

Проекция $f_4 = 0$. Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon x + \alpha} + \frac{1}{x} - \frac{p'}{p} \right) \frac{d}{dx} + \frac{p}{x^2} \right] f_3' = 0,$$

особые точки $x_1, x_2, x_5 = -\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0, \infty_{[2]}$.

Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{2(\varepsilon x + \alpha)\varepsilon - 2x}{(\varepsilon x + \alpha)^2 - x^2} - \frac{p'}{p} \right) \frac{d}{dx} + \frac{p}{x^2} \right] f_3'' = 0,$$

особые точки $x_1, x_2, x_3, x_4, 0, \infty_{[2]}$.

6 Уравнения 4-го порядка

Исходим из системы уравнений

$$\frac{d}{dx} f_1 = af_3 + cf_4, \quad \frac{d}{dx} f_2 = df_3 + bf_4,$$

$$\frac{d}{dx} f_3 = Af_1 + Cf_2, \quad \frac{d}{dx} f_4 = Df_1 + Bf_2.$$

Она эквивалентна следующей системе:

$$f_1 = \frac{Bf_3' - Cf_4'}{AB - CD}, \quad f_2 = \frac{-Df_3' + Af_4'}{AB - CD},$$

$$f_3 = \frac{bf_1' - cf_2'}{ab - cd}, \quad f_4 = \frac{-df_1' + af_2'}{ab - cd}. \quad (6.1)$$

Сначала исключим функции f_3, f_4 :

$$f_1 = \frac{B}{(AB - CD)} \frac{d}{dx} \frac{bf_1' - cf_2'}{ab - cd} - \frac{C}{(AB - CD)} \frac{d}{dx} \frac{-df_1' + af_2'}{ab - cd},$$

$$f_2 = -\frac{D}{(AB - CD)} \frac{d}{dx} \frac{bf_1' - cf_2'}{ab - cd} + \frac{A}{(AB - CD)} \frac{d}{dx} \frac{-df_1' + af_2'}{ab - cd}.$$

Учитывая явный вид $a(x), \dots, D(x)$, предыдущую систему уравнений приводим к виду

$$\left(K_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + K_1(x) \frac{d}{dx} + K_0(x) \right) f_1 = \frac{df_2'}{dx},$$

$$\left(L_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + L_1(x) \frac{d}{dx} + L_0(x) \right) f_2 = \frac{df_1'}{dx}, \quad (6.2)$$

где использованы обозначения

$$K_2(x) = \frac{1 - x^5 \varepsilon^2 - 2x^4 \alpha \varepsilon + 2\nu^2 x^3 + x^5 - x^3 \alpha^2}{2x(2\varepsilon x^3 + 3\alpha x^2 + 2\alpha \nu^2)\nu},$$

$$K_1(x) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon \nu} + \frac{1}{2} \frac{\alpha(3x^2 - x^2 \varepsilon^2 - \varepsilon x \alpha + 2\nu^2)}{\varepsilon \nu(2\varepsilon x^3 + 3\alpha x^2 + 2\alpha \nu^2)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{x\nu},$$

$$K_0(x) = -\frac{1}{4} \frac{((\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2\varepsilon x \alpha - 2\nu^2 + \alpha^2)^2}{\nu(\varepsilon x^3 + 3/2\alpha x^2 + \alpha \nu^2)},$$

$$L_2(x) = \frac{(x^5 \varepsilon^2 + 2x^4 \alpha \varepsilon - x^5 + x^3 \alpha^2 - 2\nu^2 x^3)x}{(x^2 + x^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon x \alpha + \alpha^2)\nu \alpha},$$

$$L_1(x) = \frac{(2\varepsilon x \alpha v^2 + 2x^3 \varepsilon \alpha + 2x^2 \alpha^2 + 2v^2 \alpha^2)x}{(x^2 + x^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon x \alpha + \alpha^2)v \alpha},$$

$$L_0(x) = \frac{((\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2\varepsilon x \alpha - 2v^2 + \alpha^2)x^2}{v(x^2 + x^2 \varepsilon^2 + 2\varepsilon x \alpha + \alpha^2)\alpha}.$$

Исключаем функцию f_2 :

$$f_2(x) = \int \left(K_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + K_1(x) \frac{d}{dx} + K_0(x) \right) f_1,$$

$$\left(L_2 \frac{d}{dx} + L_1 \right) \left(K_2 \frac{d^2}{dx^2} + K_1 \frac{d}{dx} + K_0 \right) f_1 +$$

$$+ L_0 \int dx \left(K_2 \frac{d^2}{dx^2} + K_1 \frac{d}{dx} + K_0 \right) f_1 = 0.$$

Второе уравнение нужно разделить на $L_0(x)$ и полученное соотношение продифференцировать, так получим дифференциальное уравнение 4-го порядка для функции $f_1(x)$:

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{L_2}{L_0} \frac{d}{dx} + \frac{L_1}{L_0} \right) \left(K_2 \frac{d^2}{dx^2} + K_1 \frac{d}{dx} + K_0 \right) + \right. \\ \left. + \left(K_2 \frac{d^2}{dx^2} + K_1 \frac{d}{dx} + K_0 \right) \right\} f_1(x) = 0.$$

Аналогично получаем уравнение 4-го порядка для функции f_2 :

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{K_2}{K_0} \frac{d}{dx} + \frac{K_1}{K_0} \right) \left(L_2 \frac{d^2}{dx^2} + L_1 \frac{d}{dx} + L_0 \right) + \right. \\ \left. + \left(L_2 \frac{d^2}{dx^2} + L_1 \frac{d}{dx} + L_0 \right) \right\} f_2(x) = 0.$$

Получим явный вид системы второго порядка для функций f_3, f_4 . Для этого из системы

$$f_1 = \frac{Bf'_3 - Cf'_4}{AB - CD}, \quad f_2 = \frac{-Df'_3 + Af'_4}{AB - CD},$$

$$f_3 = \frac{bf'_1 - cf'_2}{ab - cd}, \quad f_4 = \frac{-df'_1 + af'_2}{ab - cd}$$

исключим f_1, f_2 , в результате получаем

$$f_3 = \frac{b}{ab - cd} \frac{d}{dx} \frac{Bf'_3 - Cf'_4}{AB - CD} - \\ - \frac{c}{ab - cd} \frac{d}{dx} \frac{-Df'_3 + Af'_4}{AB - CD},$$

$$f_4 = -\frac{d}{ab - cd} \frac{d}{dx} \frac{Bf'_3 - Cf'_4}{AB - CD} + \\ + \frac{a}{ab - cd} \frac{d}{dx} \frac{-Df'_3 + Af'_4}{AB - CD}.$$

Учитывая явный вид $a(x), \dots, D(x)$, предыдущую систему уравнений приводим к виду

$$\left(P_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + P_1(x) \frac{d}{dx} + P_0(x) \right) f_3 = \frac{df_4}{dx},$$

$$\left(Q_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + Q_1(x) \frac{d}{dx} + Q_0(x) \right) f_4 = \frac{df_3}{dx},$$

где использованы обозначения

$$P_2(x) = \frac{ix^2(2v^2 - \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon x \alpha - \alpha^2 + x^2)}{v(2x^3 \varepsilon + 2v^2 \alpha + 3x^2 \alpha)},$$

$$P_1(x) = \frac{2iv(\varepsilon x \alpha + \alpha^2 + 2x^2)}{x(2x^3 \varepsilon + 2v^2 \alpha + 3x^2 \alpha)},$$

$$P_0(x) = \frac{-i((\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2\varepsilon x \alpha - 2v^2 + \alpha^2)}{2v\varepsilon x^3 + 3v\alpha x^2 + 2v^3 \alpha},$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2} \frac{ix^4(2v^2 - \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon x \alpha - \alpha^2 + x^2)}{v\alpha(2\varepsilon x \alpha + x^2 + \varepsilon^2 x^2 + \alpha^2)},$$

$$Q_1(x) =$$

$$= \frac{ix(v^2(2x^2 - \alpha^2 - \varepsilon x \alpha) - x^2(x^2 \varepsilon^2 + 2\alpha^2 - x^2 + 3\varepsilon x \alpha))}{v\alpha(2\varepsilon x \alpha + x^2 + \varepsilon^2 x^2 + \alpha^2)},$$

$$Q_0(x) = \frac{-1/2i((\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2\varepsilon x \alpha - 2v^2 + \alpha^2)x^2}{v\alpha(x^2 + \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon x \alpha + \alpha^2)}.$$

Действуя по описанной методике, находим явный вид уравнений 4-го порядка для всех четырех функций f_1, f_2, f_3, f_4 .

Уравнения для f_1, f_3 имеют одинаковый набор особых точек (три регулярные и две нерегулярные ранга 3/2):

$$(2\varepsilon x^3 + 3\alpha x^2 + 2v^2 \alpha) = 2\varepsilon(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \\ x = 0, \quad x = \infty,$$

$$f''''_1 + \left[-\frac{12x(\varepsilon x + \alpha)}{2\varepsilon x^3 + 2v^2 \alpha + 3\alpha x^2} + \frac{6}{x} \right] f'''_1 +$$

$$+ \left[-2 + 2\varepsilon^2 + \frac{4\varepsilon \alpha}{x} - \frac{18\alpha(2v^2 \alpha + 4\varepsilon v^2 x - \alpha x^2)}{(2\varepsilon x^3 + 2v^2 \alpha + 3\alpha x^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{6 + 2\alpha^2 - 4v^2}{x^2} + \frac{-30\alpha - 12\varepsilon x}{2\varepsilon x^3 + 2v^2 \alpha + 3\alpha x^2} \right] f''_1 +$$

$$+ \left[\frac{72\alpha x(\varepsilon x + \alpha)}{(2\varepsilon x^3 + 2v^2 \alpha + 3\alpha x^2)^2} + \frac{8\varepsilon \alpha}{x^2} + \frac{-4v^2 + 2\alpha^2}{x^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{6v^2 - 6\alpha^2 - 12 + 6\varepsilon^2 v^2}{xv^2} + \frac{1}{(2\varepsilon x^3 + 2v^2 \alpha + 3\alpha x^2)v^2} \times \right.$$

$$\left. \times (24v^4 \varepsilon - 36\varepsilon \alpha^2 v^2 - 24xv^2 \alpha + 18\alpha^3 x - 36\alpha \varepsilon^2 v^2 + \right. \\ \left. + 36\alpha x - 12x^2 v^2 \varepsilon^3 + 24x^2 \varepsilon - 12x^2 \varepsilon v^2 + 12x^2 \varepsilon \alpha^2) \right] f'_1 +$$

$$+ \left[1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \right.$$

$$\left. - \frac{6\alpha^2 + v^2(6\varepsilon^2 + 6\varepsilon^2 \alpha^2 + 6 - 4\varepsilon^2 v^2 + 4v^2 - 2\alpha^2)}{x^2 v^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{4\varepsilon \alpha(2v^2 - \alpha^2)}{x^3} + \frac{-4\alpha^2 + \alpha^4 + 4v^4 - 4\alpha^2 v^2}{x^4} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{(2\varepsilon x^3 + 2v^2\alpha + 3\alpha x^2)v^2\alpha} (-18\varepsilon^2\alpha^2v^2 + 18\alpha^4 - \\
 & - 18\alpha^2v^2 - 84\alpha\varepsilon xv^2 + 120\alpha^3\varepsilon x - 12\alpha\varepsilon^3xv^2 - \\
 & - 48x^2\varepsilon^2v^2 + 72x^2\varepsilon^2\alpha^2) + \frac{1}{(2\varepsilon x^3 + 2v^2\alpha + 3\alpha x^2)^2} \times \\
 & \times (72\alpha^4 - 180\varepsilon^2\alpha^2v^2 - 108\alpha^2v^2 - 72\alpha\varepsilon^3xv^2 - \\
 & - 216\alpha\varepsilon xv^2 + 288\alpha^3\varepsilon x - \\
 & - 144x^2\varepsilon^2v^2 + 162x^2\varepsilon^2\alpha^2 - 18x^2\alpha^2) - \\
 & - \frac{2\alpha^2v^2}{x^6} + \frac{4\varepsilon(-9\alpha^2 - \alpha^2v^2 + 6v^2 + \varepsilon^2\alpha^2v^2)}{xv^2\alpha} \Big] f_1 = 0, \\
 & f''''_3 + \left[-\frac{12x(\varepsilon x + \alpha)}{2x^3\varepsilon + 3\alpha x^2 + 2v^2\alpha} + \frac{10}{x} \right] f'''_3 + \\
 & + \left[2\varepsilon^2 - 2 + \frac{4\alpha\varepsilon}{x} + \frac{2\alpha^2 - 4v^2 + 24}{x^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{-66\alpha - 48\varepsilon x}{2x^3\varepsilon + 3\alpha x^2 + 2v^2\alpha} - \right. \\
 & \left. - \frac{18\alpha(2v^2\alpha + 4xv^2\varepsilon - \alpha x^2)}{(2x^3\varepsilon + 3\alpha x^2 + 2v^2\alpha)^2} \right] f''_3 + \\
 & + \left[\frac{-54 - 6\alpha^2 + 2v^2 + 10\varepsilon^2v^2}{xv^2} + \frac{16\alpha\varepsilon}{x^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{12 + 6\alpha^2 - 12v^2}{x^3} - \frac{72\alpha(2\varepsilon v^2 - 3\alpha x - 2\varepsilon x^2)}{(2x^3\varepsilon + 3\alpha x^2 + 2v^2\alpha)^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(2x^3\varepsilon + 3\alpha x^2 + 2v^2\alpha)v^2} \right] \times \\
 & \times (24\varepsilon v^4 - 36\varepsilon\alpha^2v^2 - 24\varepsilon v^2 + 18\alpha^3x - 24\alpha xv^2 - \\
 & - 36\alpha x\varepsilon^2v^2 + 162\alpha x - 12x^2v^2\varepsilon^3 + \\
 & + 108\varepsilon x^2 + 12x^2\varepsilon\alpha^2 - 12x^2\varepsilon v^2) \Big] f'_3 + \\
 & + \left[-2\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + 1 + \right. \\
 & \left. - \frac{12\alpha^2 + v^2(12\varepsilon^2 + 6\varepsilon^2\alpha^2 + 4v^2 - 2\alpha^2 - 4v^2\varepsilon^2 + 12)}{x^2v^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(2x^3\varepsilon + 3\alpha x^2 + 2v^2\alpha)v^2\alpha} \right] \times \\
 & \times (-54\varepsilon^2\alpha^2v^2 - 42\alpha^2v^2 + 36\alpha^4 - 132\varepsilon x\alpha v^2 + \\
 & + 186\alpha^3\varepsilon x - 24\varepsilon^3x\alpha v^2 - 72x^2\varepsilon^2v^2 + 108\alpha^2\varepsilon^2x^2) - \\
 & - \frac{4\alpha\varepsilon(-2 - \alpha^2 + 2v^2)}{x^3} - \frac{2\alpha^2v^2}{x^6} + \\
 & + \frac{1}{(2x^3\varepsilon + 3\alpha x^2 + 2v^2\alpha)^2} \times \\
 & \times (72\alpha^4 - 180\varepsilon^2\alpha^2v^2 - 108\alpha^2v^2 - 72\varepsilon^3x\alpha v^2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 216\varepsilon x\alpha v^2 + 288\alpha^3\varepsilon x + \\
 & + 162\alpha^2\varepsilon^2x^2 - 18\alpha^2x^2 - 144x^2\varepsilon^2v^2) + \\
 & + \frac{2\varepsilon(-27\alpha^2 - 2\alpha^2v^2 + 18v^2 + 2\varepsilon^2\alpha^2v^2)}{\alpha xv^2} + \\
 & + \frac{-2\alpha^2 - 4\alpha^2v^2 - 4v^2 + \alpha^4 + 4v^4}{x^4} \Big] f_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнения для f_2, f_4 имеют также одинаковый набор особых точек (две регулярные и две нерегулярные ранга 3/2):

$$\begin{aligned}
 (1 + \varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon\alpha x + \alpha^2 &= (1 + \varepsilon^2)(x - x_5)(x - x_6), \\
 x &= 0, \quad x = \infty,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''''_2 + \left[\frac{-4\varepsilon\alpha - 4x\varepsilon^2 - 4x}{2\varepsilon x\alpha + x^2 + \alpha^2 + \varepsilon^2x^2} + \frac{10}{x} \right] f'''_2 + \\
 + \left[-2 + 2\varepsilon^2 + \frac{22 - 4v^2 + 2\alpha^2}{x^2} - \right. \\
 \left. - \frac{8\alpha^2}{(2\varepsilon x\alpha + x^2 + \alpha^2 + \varepsilon^2x^2)^2} + \right. \\
 \left. + \frac{32\varepsilon^2\alpha - 16\alpha + 24x\varepsilon^3 + 24\varepsilon x}{(2\varepsilon x\alpha + x^2 + \alpha^2 + \varepsilon^2x^2)\alpha} + 4 \frac{\varepsilon(-6 + \alpha^2)}{\alpha x} \right] f''_2 + \\
 + \left[\frac{4\varepsilon(2v^2 - 6 + 3\alpha^2)}{\alpha x^2} + \frac{24\varepsilon\alpha - 8\varepsilon^3\alpha - 8x\varepsilon^4 + 8x}{(2\varepsilon x\alpha + x^2 + \alpha^2 + \varepsilon^2x^2)^2} + \right. \\
 \left. + \frac{1}{(2\varepsilon x\alpha + x^2 + \alpha^2 + \varepsilon^2x^2)\alpha^2} (-72\varepsilon^3\alpha + 8v^2\varepsilon^3\alpha + \right. \\
 \left. + 56\varepsilon\alpha + 8\varepsilon\alpha^3 - 24v^2\varepsilon\alpha - 48x\varepsilon^4 + \right. \\
 \left. + 8xv^2\varepsilon^4 - 32x\varepsilon^2 + 8\varepsilon^2\alpha^2x - 8xv^2 + 16x + 8\alpha^2x) + \right. \\
 \left. + \frac{8v^2 - 8v^2\varepsilon^2 - 16 + 48\varepsilon^2 - 14\alpha^2 + 6\varepsilon^2\alpha^2}{\alpha^2x} + \right. \\
 \left. + \frac{-12v^2 + 8 + 6\alpha^2}{x^3} \right] f'_2 + + \left[\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 1 + \right. \\
 \left. + \frac{4\varepsilon(-24v^2 + \varepsilon^2\alpha^4 + 8v^2\varepsilon^2 + 8\alpha^2 - \alpha^4)}{\alpha^3x} + \right. \\
 \left. + \frac{24v^2 + 6\varepsilon^2\alpha^2 + 6\varepsilon^2\alpha^4 - 24v^2\varepsilon^2}{x^2\alpha^2} + \right. \\
 \left. + \frac{-4v^2\varepsilon^2\alpha^2 - 30\alpha^2 - 2\alpha^4 + 4\alpha^2v^2}{x^2\alpha^2} + \right. \\
 \left. + \frac{16\alpha^3 - 16\alpha v^2 + 48\alpha v^2\varepsilon^2 + 32\varepsilon xv^2 + 32\varepsilon^3xv^2}{(2\varepsilon x\alpha + x^2 + \alpha^2 + \varepsilon^2x^2)^2\alpha} - \right. \\
 \left. - \frac{2\alpha^2v^2}{x^6} + \frac{1}{(2\varepsilon x\alpha + x^2 + \alpha^2 + \varepsilon^2x^2)\alpha^3} \right] \times \\
 \times (-40\alpha v^2\varepsilon^4 - 40\alpha^3\varepsilon^2 + 192\alpha v^2\varepsilon^2 + 24\alpha^3 - 24\alpha v^2 - \\
 - 32xv^2\varepsilon^5 + 64\varepsilon^3xv^2 - 32x\varepsilon^3\alpha^2 - 32\varepsilon\alpha^2x + 96\varepsilon xv^2) + \\
 + \frac{-8v^2 - 4\alpha^2v^2 + \alpha^4 + 4v^4}{x^4} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. - \frac{4\varepsilon(2\alpha^2 v^2 - \alpha^4 - 4v^2 - 2\alpha^2)}{\alpha x^3} \right] f_2 = 0, \\
 & f''''_4 + \left[\frac{-4\varepsilon\alpha - 4x\varepsilon^2 - 4x}{x^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon x\alpha + \varepsilon^2 x^2} + 14x^{-1} \right] f''''_4 + \\
 & + \left[2\varepsilon^2 - 2 - \frac{8\alpha^2}{(x^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon x\alpha + \varepsilon^2 x^2)^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{-4v^2 + 2\alpha^2 + 52}{x^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{44\alpha\varepsilon^2 - 28\alpha + 36x\varepsilon^3 + 36\varepsilon x}{(x^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon x\alpha + \varepsilon^2 x^2)\alpha} + 4 \frac{\varepsilon(\alpha^2 - 9)}{\alpha x} \right] f''''_4 + \\
 & + \left[\frac{-8\varepsilon^3\alpha + 56\varepsilon\alpha - 8x\varepsilon^4 + 16x\varepsilon^2 + 24x}{(x^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon x\alpha + \varepsilon^2 x^2)^2} + \right. \\
 & + \frac{48 + 10\alpha^2 - 20v^2}{x^3} + \frac{1}{(x^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon x\alpha + \varepsilon^2 x^2)\alpha^2} \\
 & \quad \times (8v^2\varepsilon^3\alpha - 136\varepsilon^3\alpha - 24\varepsilon\alpha v^2 + 8\alpha^3\varepsilon + \\
 & \quad + 184\varepsilon\alpha - 100x\varepsilon^4 + 8xv^2\varepsilon^4 - \\
 & \quad - 40x\varepsilon^2 + 8\alpha^2 x\varepsilon^2 + 60x + 8\alpha^2 x - 8xv^2) + \\
 & \quad \left. + \frac{4\varepsilon(-16 + 5\alpha^2 + 2v^2)}{\alpha x^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{100\varepsilon^2 - 60 + 10\alpha^2\varepsilon^2 - 18\alpha^2 - 8\varepsilon^2 v^2 + 8v^2}{\alpha^2 x} \right] f''_4 + \\
 & + \left[\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 1 + \frac{-20v^2 + \alpha^4 + 6\alpha^2 + 4v^4 - 4\alpha^2 v^2}{x^4} + \right. \\
 & + \frac{48\alpha\varepsilon^2 v^2 + 16\alpha^3 - 16\alpha v^2 + 32\varepsilon^3 x v^2 + 32\varepsilon x v^2}{(x^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon x\alpha + \varepsilon^2 x^2)^2 \alpha} + \\
 & \quad + \frac{32v^2 - 44\alpha^2 + 12\alpha^2\varepsilon^2 + 4\alpha^2 v^2}{x^2 \alpha^2} + \\
 & \quad + \frac{-2\alpha^4 - 4\alpha^2\varepsilon^2 v^2 - 32\varepsilon^2 v^2 + 6\varepsilon^2 \alpha^4}{x^2 \alpha^2} - \\
 & \quad - \frac{4\varepsilon(-\alpha^4 - 5\alpha^2 - 6v^2 + 2\alpha^2 v^2)}{\alpha x^3} - \frac{2\alpha^2 v^2}{x^6} + \\
 & \quad + \frac{1}{(x^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon x\alpha + \varepsilon^2 x^2)\alpha^3} \times \\
 & \quad \times (-48\alpha v^2 \varepsilon^4 - 48\alpha^3 \varepsilon^2 + 240\alpha \varepsilon^2 v^2 + 32\alpha^3 - \\
 & \quad - 32\alpha v^2 - 40x\varepsilon^5 v^2 - 40x\varepsilon^3 \alpha^2 + \\
 & \quad + 80\varepsilon^3 x v^2 - 40\varepsilon x \alpha^2 + 120\varepsilon x v^2) + \\
 & \left. + \frac{4\varepsilon(-30v^2 + 10\alpha^2 - \alpha^4 + 10\varepsilon^2 v^2 + \varepsilon^2 \alpha^4)}{\alpha^3 x} \right] f_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Любую из 4 функций, подчиняющихся уравнению 4-го порядка, можно выбрать как основную, а остальные вычислить из нее.

Пусть основной берется функция f_1 . Учтем шесть уравнений (6.1), (6.2):

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{Bf'_3 - Cf'_4}{AB - CD}, \quad f_2 = \frac{-Df'_3 + Af'_4}{AB - CD}, \\
 f_3 &= \frac{bf'_1 - cf'_2}{ab - cd}, \quad f_4 = \frac{-df'_1 + af'_2}{ab - cd}, \\
 \left(K_2 \frac{d^2}{dx^2} + K_1 \frac{d}{dx} + K_0 \right) f_1 &= \frac{df_2}{dx}, \\
 \left(L_2 \frac{d^2}{dx^2} + L_1 \frac{d}{dx} + L_0 \right) f_2 &= \frac{df_1}{dx},
 \end{aligned}$$

из пятого уравнения находим f_2 , затем из 3-го и 4-го уравнений находим функции f_3, f_4 . Пусть основной берется функция f_2 , тогда из шестого уравнения находим f_1 , затем из 3-го и 4-го уравнений находим функции f_3, f_4 .

Пусть основной берется функция f_3 , тогда используем уравнения

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{Bf'_3 - Cf'_4}{AB - CD}, \quad f_2 = \frac{-Df'_3 + Af'_4}{AB - CD}, \\
 f_3 &= \frac{bf'_1 - cf'_2}{ab - cd}, \quad f_4 = \frac{-df'_1 + af'_2}{ab - cd}, \\
 \left(P_2 \frac{d^2}{dx^2} + P_1 \frac{d}{dx} + P_0 \right) f_3 &= \frac{df_4}{dx}, \\
 \left(Q_2 \frac{d^2}{dx^2} + Q_1 \frac{d}{dx} + Q_0 \right) f_4 &= \frac{df_3}{dx},
 \end{aligned}$$

из пятого уравнения находим f_4 , затем из 1-го и 2-го уравнений находим функции f_1, f_2 . Пусть основной берется функция f_4 , тогда из шестого уравнения находим f_3 , затем из 1-го и 2-го уравнений находим функции f_1, f_2 .

Каждое из уравнений 4-го порядка имеет 4 линейно независимых решений. Из общих физических соображений можно ожидать, что только два из них описывают связанные состояния, порождая тем самым две серии связанных состояний с соответствующими (неизвестными) спектрами энергии.

Заключение

В работе показано, что в системе, описываемой полностью дифференциальными уравнениями 4-го порядка, по-прежнему важную роль играют некоторые связанные с этой системой дифференциальные уравнения 2-го порядка. В частности, комбинированием полученных уравнений удается получить уравнение второго порядка для одной из радиальных функций. Оно может быть отождествлено с вырожденным уравнением Гойна. На основе использования условия, выделяющего так называемые трансцендентные вырожденные функции Гойна, введено условие квантования и найден соответствующий спектр

энергии. Таким образом, установлен второй класс связанных состояний.

Предложенным в работе методом можно получить описание некоторых проекций векторов решений – линий в 4-мерном пространстве $\{f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r)\}$ последовательно на различные плоскости $f_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$. В каждом случае эти проекции состоят из двух частей (ветвей), которые задаются решениями двух разных уравнений второго порядка (в то время как полные решения $\{f_i(r)\}$ определяются дифференциальным уравнением 4-го порядка). С учетом того, что каждое уравнение 4-го порядка имеет 4 независимых решения, установление двух разных уравнений второго порядка с двумя соответствующими независимыми решениями может означать, что тем самым строятся проекции всех этих четырех решений. При этом одна пара решений (по одному из каждой ветви) может отвечать двум дискретным спектрам энергии, а вторая пара может отвечать двум непрерывным спектрам.

При условии, что в каждом случае проекций удастся решить возникающие два уравнения второго порядка, в частности выделив две серии связанных состояний с соответствующими спектрами энергии, остается вопрос – как эти спектры соотносятся с истинными спектрами, которые должны следовать из анализа уравнения 4-го порядка. Кроме того, важным является вопрос, как соотносятся спектры, относящиеся к проекциям на разные плоскости. Эти все вопросы нуждаются в дальнейшем исследовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм, И.Е. Движение мезонов в электромагнитных полях / И.Е. Тамм // Докл. АН СССР. – 1940. – Т. 29. – С. 551–554.
2. Ovsyuk, E.M. Quantum Kepler Problem for Spin 1/2 Particle in Spaces on Constant Curvature. I. Pauli Theory / E.M. Ovsyuk // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2011. – Vol. 14, № 1. – P. 14–26.
3. Kisel, V.V. On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field / V.V. Kisel, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2010. – Vol. 13, № 4. – P. 352–367.
4. Кисель, В.В. Волновые функции и спектр энергии для частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле / В.В. Кисель, В.М. Редьков, Е.М. Овсюк // ДАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 1. – С. 50–55.
5. Ovsyuk, E.M. Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E.M. Ovsyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2014. – 486 p.
6. Ronveaux, A. Heun's differential equation / A. Ronveaux. – Oxford: Oxford University Press, 1995.
7. Slavyanov, S.Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S.Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford University Press, 2000.

Поступила в редакцию 27.11.17.

ФАЗОВЫЙ СОСТАВ И СТРУКТУРА МНОГОСЛОЙНЫХ НАНОРАЗМЕРНЫХ МЕТАЛЛ-УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ

Д.Г. Пилипцов¹, А.А. Рогачев¹, С.А. Чижик²,
А.С. Руденков¹, Е.А. Кулеш¹, Н.Н. Федосенко¹

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, Минск

PHASE COMPOSITION AND STRUCTURE OF MULTILAYER NANOSIZED METAL-CARBON COATINGS

D.G. Pilipstov¹, A.A. Rogachev¹, S.A. Chizik²,
A.S. Rudenkov¹, E.A. Kulesh¹, N.N. Fedosenko¹

¹F. Scorina Gomel State University

²A.V. Lykov Heat and Mass Transfer Institute of the NAS of Belarus, Minsk

Методами КР спектроскопии и атомно-силовой микроскопии определено влияние подслоев различной природы на фазовый состав и морфологию однокомпонентных и композиционных углеродных покрытий. Показано, что при осаждении легированного титаном углеродного покрытия на подслое титана образуются более дисперсные Csp^2 кластеры. При этом легированные углеродные покрытия характеризуются меньшими шероховатостью и размером зерна.

Ключевые слова: углеродные покрытия, легирование, титан, кластер, фазовый состав, морфология.

The influence of sublayers of various nature on the phase composition and morphology of one-component and composite carbon coatings is determined by the methods of Raman spectroscopy and atomic force microscopy. It is shown that when depositing titanium-doped carbon coating on a titanium sublayer, more dispersed Csp^2 clusters are formed. At the same time, doped carbon coatings are characterized by lower roughness and grain size.

Keywords: carbon coatings, alloying, titanium, cluster, phase composition, morphology.

Введение

Основными недостатками углеродных покрытий (УП) являются низкая термостойкость и высокий уровень внутренних механических напряжений [1]–[3]. На практике используются два основных технологических приема снижения степени их проявления: легирование покрытий металлами, азотом и формирование многослойных систем металл-углерод [1], [4]. При формировании таких покрытий значительное влияние на их свойства оказывают структура и химический состав межфазных слоев, природа возникающих химических связей. Введение в состав покрытия металла или азота осуществляется, как правило, одновременно с осаждением на поверхности атомов углерода, при этом легирующие элементы оказывают каталитическое или ингибирующее воздействие на образование углеродных кластеров, их размер и соотношение фаз с sp^2 и sp^3 конфигурацией углерода [5]. Степень влияния металлического наполнителя на фазовое состояние углеродного слоя и его каталитическая активность в значительной степени зависят не только от природы, но и от дисперсности, особенно, если используются наноразмерные кластеры. В свою очередь, многослойные покрытия, состоящие из чередующихся слоев двух типов (мягких и жестких слоев) представляют собой

интерес из-за наличия многочисленных интерфейсов, которые влияют на фазовые свойства покрытий [6], [7]. При этом каталитическая активность слоев металла значительно возрастает при уменьшении их толщины до нескольких нанометров [7]. По этой причине изучение данных процессов, установление закономерностей межфазного взаимодействия, структуры граничных слоев, образующихся при формировании легированных углеродных слоев и многослойных систем на их основе, представляет особый интерес при определении наиболее эффективных технологических приемов улучшения свойств таких материалов.

Основной целью настоящей работы является определение влияния наноразмерных слоев титана и его нитрида на фазовый состав и структуру однокомпонентных и композиционных покрытий на основе аморфного углерода.

1 Методика эксперимента

Многослойные металл-углеродные покрытия осаждали на модернизированной установке вакуумного напыления УВНИПА-1-001. Для осаждения промежуточного слоя металла и его нитрида использовался титан марки ВТ-100. Испарение Ti осуществляли с помощью электродугового разряда с магнитной сепарацией плазменного

потока. При этом на стол с образцами подавали отрицательный потенциал смещения, равный 150÷200 В. Ток электродугового испарения металла составлял 70 А. При осаждении слоев нитрида титана и при легировании азотом углеродных слоев в камере создавалось давление газа 0,1 Па. Толщина подслоев составляла 50±10 нм.

Графитовая мишень химической чистоты 99,5% была использована в качестве одного из электродов импульсного катодно-дугового испарителя. Углеродные покрытия толщиной 250±10 нм наносились при следующих режимах: напряжение разряда 250÷300 В, энергия частиц углеродной плазмы ~ 100 эВ. Частоту и число импульсов выбирали в диапазоне 3÷20 Гц и 370÷3000 соответственно в зависимости от конструкции покрытия. Данные режимы выбирались согласно полученным ранее рекомендациям [8].

С использованием данной методики осаждали покрытия типа $(\text{Ti} / \text{a-C})_n$, $(\text{TiN} / \text{a-C})_n$, $(\text{Ti} / \text{TiN} / \text{a-C})_n$. В качестве подложек использовали кристаллическую пластину из n-Si, вырезанную параллельно кристаллографической плоскости (111). В целях удаления оксидного слоя с поверхности подложки проводили её травление ионами аргона в течение 15 минут. Энергия ионов Ar^+ и плотность ионного тока были равны 4 кэВ и ~ 25 А/м² соответственно.

Морфологию поверхности покрытий изучали методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) в режимах измерения топографии и фазового контраста (площадь сканирования 20×20 мкм) с использованием Solver-PRO P47 (NT-MDT) по методике, описанной в руководстве по эксплуатации. Для анализа полученных результатов использовали программу Gwyddion, позволяющую рассчитать параметры шероховатости R_a поверхности покрытий и определить размер зерна.

Спектры комбинационного рассеивания регистрировались с помощью КР-микроскопа Senterra (Bruker). Регистрация спектров проводилась в спектральном диапазоне 600÷2500 см⁻¹. Спектры возбуждали излучением длиной волны 532 нм и мощностью 20 мВт.

2 Результаты и их обсуждение

Методом КР спектроскопии установлено, что фазовый состав осажденных покрытий зависит от природы подслоя и химического состава углеродного покрытия. Для всех спектров характерно наличие широкого асимметричного пика в области 1000÷2000 см⁻¹ (рисунок 2.1). Полученные спектры с высокой точностью можно описать двумя пиками D и G с центрами вблизи 1370 см⁻¹ и 1580 см⁻¹ соответственно, изменяющимися в зависимости от отношения количества атомов углерода с sp^2 и sp^3 гибридизацией связей атомов углерода.

Форма спектра зависит как от наличия подслоев титана, нитрида титана, так и от природы

легирующих элементов углеродного покрытия. Для покрытий, содержащих внешний композиционный углеродный слой а-C:Ti или а-C:Ti:N, характерно наличие пика D с интенсивностью более высокой, чем интенсивность пика G.

Результаты математической обработки полученных спектров с использованием функций Гаусса приведены в таблице 2.1. В качестве анализируемых параметров использовали отношение интегральных интенсивностей D и G пиков, положение и ширину G пика.

Из таблицы 2.1 видно, что отношение I_D / I_G , координата и ширина G пика для покрытий с внешним а-C слоем изменяется незначительно. Химический состав подслоев легированных титаном или титаном и азотом, не влияет на процессы структурообразования углеродного слоя. Это возможно, если толщина диффузионного слоя (в котором наиболее выражены изменения микроструктуры покрытий, приводящие к искажению связей в слоях углеродной матрицы) намного меньше, чем толщина углеродного слоя.

Координата G пика в КР спектрах Ti/a-C:Ti:N покрытий находится в области меньших волновых чисел по сравнению с Ti/a-C:Ti:N/a-C покрытиями, что указывает на уменьшение концентрации связей типа $\text{Csp}^2\text{-Csp}^3$ или $\text{Csp}^3\text{-Csp}^3$ в покрытии.

Увеличение интенсивности D пика, а, следовательно, и рост отношения I_D / I_G является признаком увеличения содержания sp^2 -фазы и объединения атомов с sp^2 -связями в более дисперсные графитовые кластеры [9]. Таким образом, увеличение отношения I_D / I_G при введении в структуру покрытия атомов титана или азота приводит к увеличению графитоподобной компоненты с последующим объединением в Csp^2 кластеры. Смещение G пика в область высоких волновых чисел указывает на рост Csp^2 кластеров.

Большой интерес представляют результаты анализа данных КР спектроскопии покрытий с внешним а-C:Ti слоем. Покрытия, нанесенные на подслои Ti, характеризуются более высоким отношением I_D / I_G (3,96), чем покрытия, осажденные на подслои TiN (2,28). Уменьшение размера Csp^2 кластеров при осаждении на подслои титана можно связать с его более высокой в сравнении с нитридом титана химической активностью, снижением на такой поверхности подвижности адсорбированных атомов углерода и участием их в процессах образования карбида титана.

Повышение размера Csp^2 кластеров при осаждении покрытия на подслои TiN подтверждается данными атомно-силовой микроскопии (таблица 2.1). Как видно, на поверхности внешнего слоя присутствуют отдельные графитовые включения, образующиеся при распылении графитовой мишени импульсным электрическим разрядом.

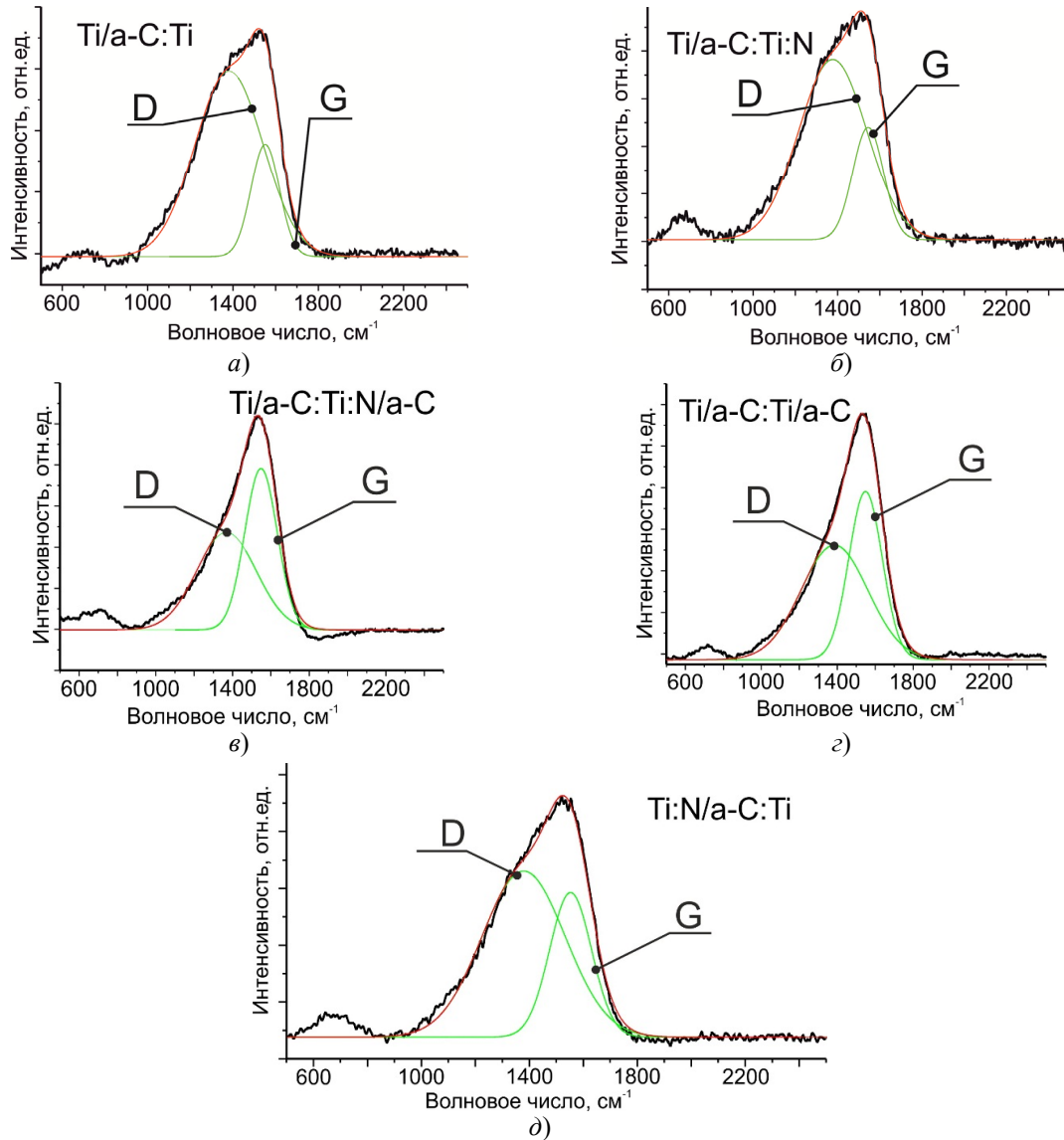


Рисунок 2.1 – КР спектры многослойных покрытий: а) Ti/ a-C:Ti; б) Ti/ a-C:Ti:N; в) Ti/a-C:Ti:N/a-C; г) КР спектр Ti/a-C:Ti/a-C; д) Ti:N /a-C:Ti

Таблица 2.1 – Параметры КР спектров и морфологии покрытий

Образец	I_D / I_G	Положение G пика, см^{-1}	Ширина G пика, см^{-1}	R_a , нм	Диаметра зерна d, нм
Ti/a-C:Ti	3,96	1551,2	133,2	4,9	6,8
Ti/a-C:Ti/a-C	1,26	1549,0	175,8	6,9	7,7
Ti/a-C:Ti:N	3,54	1544,5	145,6	4,4	9,5
TiN/a-C:Ti	2,28	1559,4	155,3	3,9	6,9
Ti/a-C:Ti:N/a-C	1,11	1548,4	179,7	4,1	7,6

Анализ полученных изображений показывает, что наличие подслоя TiN приводит к снижению шероховатости покрытия до значений $R_a = 3,9$ нм (таблица 2.1). Снижение шероховатости покрытий, содержащих в своем составе нитридные фазы TiN или CN, обусловлено особенностями осаждения и роста таких покрытий. В

таких слоях процессы диффузии затруднены и интенсивное образование шероховатости за счет интенсивного структурообразования не происходит. Как показано в работе [10], возникновение аморфной структуры с высокой степенью разориентации (подтверждается данными спектроскопии комбинационного рассеивания) может

определяться дипольным моментом систем Ti–N или Ti–C.

Для многослойных покрытий, содержащих верхний нелегированный слой аморфного углерода, характерно увеличение размера зерна до 7,7 нм. Для покрытий, легированных азотом и титаном, характерно наличие зерен большего размера (9,5 нм), которые по данным КР спектроскопии представляют агломерацию частиц с преобладанием графитовой компоненты.

Выводы

Определено о влияние подслоев титана и нитрида титана на фазовый состав и морфологию однокомпонентных и композиционных покрытий на основе аморфного углерода. Показано, что при осаждении a-C:Ti покрытия на подслое титана в сравнении с подслоем нитрида титана происходит формирование углеродного покрытия с меньшим размером Csp^2 кластеров. При этом легированные углеродные покрытия характеризуются меньшими шероховатостью и размером зерна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогачев, А.В.* Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–292.
2. *Erdemir, A.* Superlubricity / A. Erdemir, J.R. Martin. – Amsterdam: Elsevier Science, 2007. – 512 p.
3. *Donnet, C.* Tribology of Diamond-like Carbon Films: Fundamentals and Applications / C. Donnet, A. Erdemir. – Springer Science & Business Media, 2007. – 680 p.
4. *Механические, свойства и структура композиционных углеродных покрытий* / А.В. Рогачев, А.Н. Попов, В.П. Казаченко, С.С. Сидорский // Материалы, технологии, инструмент. – 2001. – Т. 5, № 2. – С. 77–80.

5. *A perspective on the optimisation of hard carbon and related coatings for engineering applications* / S. Neuville [et al.] // Thin Solid Films. – 2007. – Vol. 515. – P. 6619–6653.

6. *Review of multicomponent and multilayer coatings for tribological applications* / C. Subramanian [et al.] // Wear. – 1993. – Vol. 165. – P. 85–98.

7. *Размерные эффекты в бислойных покрытиях титан углерод. 1. Влияние толщины подслоя титана на структуру и свойства углеродного слоя* / Б. Чжоу, А.В. Рогачев, С. Цзян, Д.Г. Пилипцов, Н.Н. Федосенко, А.С. Руденков // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 4 (17). – С. 38–43.

8. *Влияние природы и концентрации легирующих элементов на морфологию зоны трения углеродных покрытий* / А.В. Рогачев [и др.] // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 100–103.

9. *Casiraghi, C.* Raman spectroscopy of hydrogenated amorphous carbons / C. Casiraghi, A.C. Ferrari, J. Robertson // Physical Review B. – 2005. – Vol. 72. – P. 85401–085414.

10. *Тюменцев, А.Н.* Высокодефектные структурные состояния, поля локальных внутренних напряжений и кооперативные механизмы мезоуровня деформации и переориентации кристалла в наноструктурных металлических материалах / А.Н. Тюменцев, А.Д. Коротаев, Ю.П. Пинжин // Физическая мезомеханика. – 2004. – Т. 7, вып. 4. – С. 35–53.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках договора № Т17КИГ-009 «Разработка технологических приемов управления структурой и механическими свойствами наноконпозиционных многослойных покрытий для узлов трения на основе аморфного углерода».

Поступила в редакцию 27.03.18.

**ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ МАГНИТНАЯ АНИЗОТРОПИЯ,
МЕХАНИЗМЫ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ И СТРУКТУРА МАГНИТНЫХ
ДОМЕНОВ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ Co/Pd**

Ю.А. Федотова, А.А. Максименко, Ю.В. Касюк

Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск

**PERPENDICULAR MAGNETIC ANISOTROPY, MAGNETIZATION
REVERSAL MECHANISMS AND STRUCTURE OF MAGNETIC DOMAINS
IN Co/Pd THIN FILMS**

J.F. Fedotova, A.A. Maximenko, J.V. Kasiuk

Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University, Minsk

Исследовано влияние отжига и присутствия буферного слоя Pd на изменения магнитных свойств (коэрцитивной силы, квадратичности кривых намагниченности, эффективной константы магнитной анизотропии), а также механизмов перемагничивания и структуры магнитных доменов в многослойных пленках Co/Pd с перпендикулярной магнитной анизотропией, наблюдаемой в диапазоне толщин кобальта 0,2–0,4 нм и палладия 0,6–1,0 нм.

Ключевые слова: тонкие пленки Co/Pd, перпендикулярная магнитная анизотропия, механизм перемагничивания, структура магнитных доменов.

The effects of annealing and the presence of the Pd buffer sublayer on the variation of magnetic properties (coercive force, squareness of magnetization curves, effective magnetic anisotropy constant) as well as remagnetization mechanisms and magnetic domain structure in multilayered Co/Pd thin films with perpendicular magnetic anisotropy observed for the thicknesses of Co 0.2–0.4 nm and Pd 0.6–1.0 nm have been investigated.

Keywords: Co/Pd thin films, perpendicular magnetic anisotropy, magnetization reversal mechanisms, structure of magnetic domains.

Введение

Тонкие магнитные пленки, будучи планарными структурами с высокими значениями магнитосопротивления и намагниченности, а также варьируемыми значениями электросопротивления, обладают большим технологическим потенциалом для применения в качестве высокочувствительных магнитных датчиков и сенсоров. Также тонкие пленки используются в качестве сред при создании магнитных устройств для обработки и хранения информации [1].

Отдельным направлением в этой области является исследование пленок и многослойных структур с перпендикулярной магнитной анизотропией (ПМА) [2]–[4], т. е. пленок, в которых магнитные моменты предпочтительно ориентируются вдоль нормали к их поверхности. К таким материалам относятся поликристаллические тонкие многослойные пленки в системах Co/Pd [5], [6], Co/Pt [7], [8] и Co/Ni [9], [10], обладающие большими значениями одноосной анизотропии ($K_U \sim 10^6$ эрг/см³) и намагниченности насыщения ($M_S \sim 500$ э.м.е./см³), и которые, как предполагается, являются перспективными материалами для spin-RAM (Spin-transfer magnetic random access memory) и бит-паттернированных сред (bit-patterned media, BPM). Высокие значения K_U обеспечивают их термическую стабильность при низком критическом токе для spin-RAM и

возможность устанавливать необходимые значения полей переключения для BPM [11].

Тонкие пленки Co/Pd демонстрируют переход от магнитной анизотропии в плоскости к перпендикулярной магнитной анизотропии при уменьшении толщины кобальта и палладия до нескольких атомных монослоев [12], [13]. Несмотря на многочисленные экспериментальные и теоретические исследования, физическая природа и механизмы возникновения перпендикулярной магнитной анизотропии для многослойных пленок Co/Pd до конца не объяснены [14].

Предшествующие исследования показывают, что максимальная перпендикулярная анизотропия для пленок Co/Pd наблюдается при толщине кобальта 0,2–0,4 нм и палладия 0,6–1,0 нм [4], [5]. Толщина слоев Co и Pd влияет на деформацию решетки и магнитостатические взаимодействия, что приводит к изменению их магнитных свойств. ПМА пленок Co/Pd также определяется качеством интерфейсов [15]–[18], а именно, их шероховатостью, а также перемешиванием атомов Co и Pd на границе раздела слоев.

Так как Co и Pd взаиморастворимы и сплав Co-Pd образует неупорядоченную фазу со структурой ГЦК во всем диапазоне концентраций, слои Co и Pd имеют сильную тенденцию спонтанно перемешиваться на границах раздела даже при комнатной температуре [15], [16]. Ким и

Шин [17] показали, что структура квази-сплава доминирует на интерфейсах в типичных многослойных слоях Co/Pd и что нарушение симметрии на границах раздела не обязательно для наличия перпендикулярной магнитной анизотропии в многослойных пленках Co/Pd. Также ранее сообщалось [19], [20], что пленки сплава CoPd сами по себе могут характеризоваться перпендикулярной магнитной анизотропией.

Структура интерфейсов между Co и Pd определяется способом осаждения тонких пленок. Степень перемешивания при напылении магнетроном [21]–[23] или в результате резистивного термического осаждения [15], [24] значительно больше, чем в случае молекулярно-лучевой эпитаксии [13], [25]. Поэтому кристаллическая структура и магнитные свойства многослойных пленок Co/Pd с тем же составом, но нанесенных различными методами, могут заметно отличаться.

В данной работе впервые комплексно исследуется как магнитные свойства многослойных пленок Co/Pd, синтезированных методом термического осаждения, изменяются при варьировании толщин Co ($t_{Co} = 0,2\text{--}0,4$ нм) и Pd ($t_{Pd} = 0,6\text{--}1,0$ нм), при увеличении перемешивания между осажденными слоями Co и Pd в процессе отжига пленок, а также при осаждении пленок на Pd буферный слой. Особое внимание уделено определению механизма перемангничивания, свойственного данным пленкам, а также изменению структуры их магнитных доменов.

1 Методика эксперимента

Предметом исследования служили многослойные тонкие пленки $[Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15$ перед и после их отжига в вакууме при температуре 300°C , а также многослойные тонкие пленки с палладиевым буферным слоем $Pd_{10\text{нм}} / [Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15 / Pd_{2\text{нм}}$ ($t_{Co} = 0,2$ нм; $0,3$ нм; $0,4$ нм и $t_{Pd} = 0,6$ нм; $1,0$ нм). Пленки осаждались на плоские кремниевые подложки Si (100), покрытые аморфным слоем оксида (SiO_2) толщиной 100 нм.

Магнитные характеристики пленок изучались с использованием SQUID-магнетометра (MPMS XL SQUID, Quantum Design). Кривые намагниченности $M(H)$ записывались при комнатной температуре во внешнем магнитном поле H , ориентированном вдоль поверхности пленок (H_{\parallel}), вдоль их нормали (H_{\perp}), а также под разными углами $\varphi = 0\text{--}90^\circ$ относительно нормали пленок. Полученные значения намагниченностей M корректировались путем вычитания вклада от диамагнитной кремниевой подложки и полимерных держателей, в которых крепились образцы.

Измерения морфологии (топографии) пленок и структуры магнитных доменов выполнены на сканирующем зондовом микроскопе XE-120, Park System Corporation. Изображения топографии в бесконтактном режиме (non-contact mode)

и структуры магнитных доменов получены при использовании кантилевера MFM (NanoWorld AG), зонд которого покрыт магнитотвердым сплавом на основе Co толщиной 40 нм и обладает постоянным магнитным моментом, направленным вдоль его оси. Номинальный радиус кривизны зонда составлял 50 нм. Перед измерениями образцы размагничивались переменным, экспоненциально-убывающим синусоидальным магнитным полем, направленным перпендикулярно их поверхности (осцилляционное размагничивание).

2 Магнитные свойства многослойных тонких пленок Co/Pd

Из сопоставления зависимостей $M(H_{\parallel})$ и $M(H_{\perp})$, полученных в параллельной и перпендикулярной геометрии, пленки $[Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15$ ($t_{Co} = 0,2$ нм; $0,3$ нм; $0,4$ нм и $t_{Pd} = 0,6$ нм; $1,0$ нм) перед и после отжига характеризуются выраженной перпендикулярной магнитной анизотропией. Это следует из высоких значений квадратичности петли гистерезиса $M(H_{\perp})$ (отношения остаточной намагниченности к намагниченности насыщения, $M_r(H_{\perp}) / M_S$) (рисунок 2.1), а также коэрцитивной силы ($H_{C\perp}$) (рисунок 2.2). В то же время кривые намагниченности пленок, полученные при приложении внешнего поля вдоль их поверхности, демонстрируют практически линейный рост до насыщения, а также выход на насыщение при достаточно высоких внешних полях H порядка 20–25 кЭ. Пленки с буферным слоем $Pd_{10\text{нм}} / [Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15 / Pd_{2\text{нм}}$ ($t_{Co} = 0,2$ нм; $0,3$ нм; $0,4$ нм и $t_{Pd} = 0,6$ нм; $1,0$ нм) также характеризуются выраженной магнитной анизотропией с осью легкого намагничивания, ориентированной вдоль их нормали. Об этом свидетельствует форма кривой $M(H_{\perp})$ с $M_r(H_{\perp}) / M_S \approx 0,9$ (см. рисунок 2.1), а также увеличение значений H_C при измерениях в перпендикулярной геометрии, по сравнению с кривыми, полученными при приложении поля в плоскости пленки (рисунок 2.2).

С увеличением толщины кобальта t_{Co} увеличивается количество ферромагнитного материала в единице объема пленки, что приводит к увеличению значений намагниченности насыщения (M_S) (рисунок 2.1). Также, как следует из рисунка 2.1, намагниченность насыщения пленок не изменяется с отжигом, что свидетельствует о неизменности степени поляризации атомов палладия в пленках. Намагниченность насыщения для пленок с буфером не значительно отличается от намагниченности насыщения для пленок без буфера, что говорит о незначительной поляризации атомов палладия в буферном слое.

Анализ зависимостей $M_S(t_{Co})$, $M_r / M_S(t_{Co})$ и $H_C(t_{Co})$ для пленок перед и после отжига, а также с буферным слоем показал, что пленки с толщиной кобальта $t_{Co} = 0,3$ нм показывают оптимальное сочетание магнитных параметров. Так, данные

пленки показывают высокие значения M_S , значительно превосходящие M_S для пленок с $t_{Co} = 0,2$ нм и незначительно меньшие, чем M_S для пленок с $t_{Co} = 0,4$ нм. При этом пленки с $t_{Co} = 0,3$ нм показывают стабильность величины $M_r(H_{\perp}) / M_S$, значение которой не изменяется с отжигом пленок. Коэрцитивная сила $H_{C\perp}$ для пленок $[Co_{0,3nm} / Pd_{Pd}] \times 15$ ($t_{Pd} = 0,6$ нм; 1,0 нм) также не изменяется с отжигом и имеет высокое значение для пленок с буферным слоем $Pd_{10nm} / [Co_{0,3nm} / Pd_{Pd}] \times 15 / Pd_{2nm}$ ($t_{Pd} = 0,6$; 1,0).

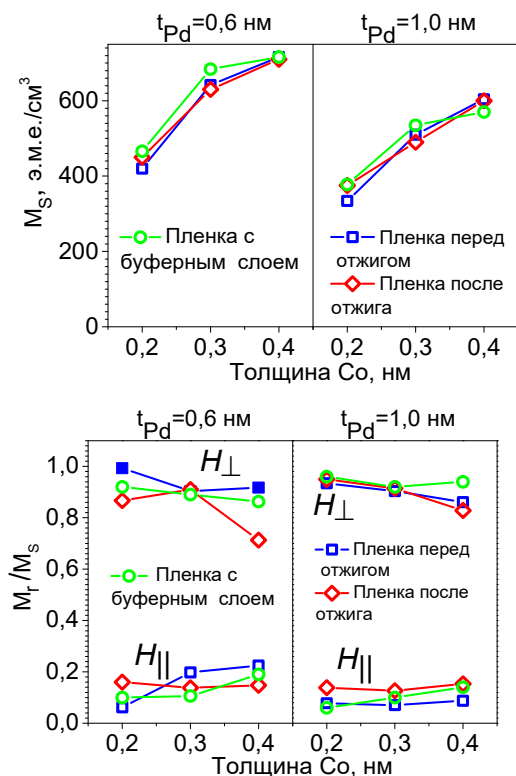


Рисунок 2.1 – Значения намагниченности насыщения M_S и квадратичности кривых гистерезиса (M_r / M_S) в зависимости от толщины слоев кобальта для пленок $[Co_{tCo} / Pd_{Pd}] \times 15$ перед и после отжига, а также пленок с буферным слоем $Pd_{10nm} / [Co_{tCo} / Pd_{Pd}] \times 15 / Pd_{2nm}$ ($t_{Co} = 0,2$ нм; 0,3 нм; 0,4 нм и $t_{Pd} = 0,6$ нм; 1,0 нм)

Для количественного выражения и сравнения как изменяется магнитная анизотропия пленок с отжигом и при наличии буфера рассчитывались эффективные константы магнитной анизотропии ($K_{эфф}$) и константы одноосной магнитной анизотропии (K_U) (рисунок 2.3).

Соответствующие значения $K_{эфф}$ определялись по методу расчета энергии магнитной анизотропии из разности площадей между кривыми намагниченности в двух ортогональных ориентациях внешнего магнитного поля ($M(H_{\perp})$ и $M(H_{\parallel})$). Значения $K_{эфф}$ в таком случае могут быть оценены как [26]–[28]:

$$K_{эфф} = \int_{0_out}^{M_S} HdM - \int_{0_in}^{M_S} HdM,$$

где первый интеграл соответствует ориентации внешнего поля вдоль нормали к пленке (*out*), а второй – вдоль плоскости пленки (*in*).

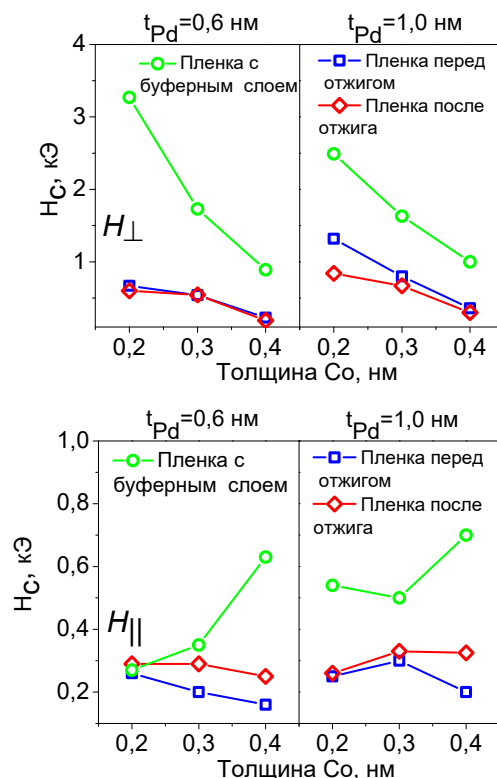


Рисунок 2.2 – Зависимости коэрцитивной силы H_C как функции толщины кобальта в исследуемых пленках $[Co_{tCo} / Pd_{Pd}] \times 15$ перед и после отжига, а также пленках с буферным слоем $Pd_{10nm} / [Co_{tCo} / Pd_{Pd}] \times 15 / Pd_{2nm}$ ($t_{Co} = 0,2$ нм; 0,3 нм; 0,4 нм и $t_{Pd} = 0,6$ нм; 1,0 нм)

Из полученных значений $K_{эфф}$ соответствующие величины эффективных полей магнитной анизотропии ($H_{эфф}$) могут быть рассчитаны по формулам

$$H_{эфф} = \frac{2 \cdot K_{эфф}}{M_S}. \quad (2.1)$$

Принимая во внимание уравнения (2.1), поле одноосной магнитной анизотропии может быть выражено в виде:

$$H_A = H_{эфф} - H_d = H_{эфф} + 4\pi M_S,$$

где H_d – размагничивающее поле, определяемое анизотропией формы тонкой пленки и равное [26], [29]:

$$H_d = -4\pi M_S.$$

Учитывая, что константа одноосной магнитной анизотропии K_U выражается как

$$K_U = \frac{H_A \cdot M_S}{2},$$

то значения K_U можно рассчитать по формуле

$$K_U = K_{эфф} + 2\pi M_S^2.$$

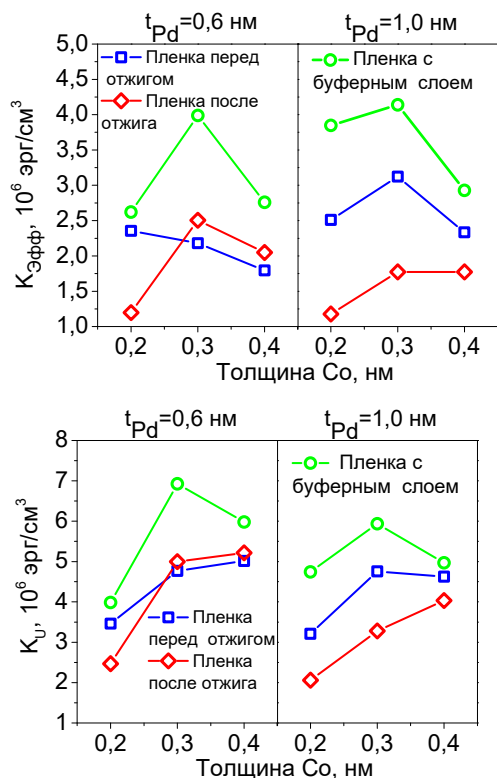


Рисунок 2.3 – Значения эффективной константы магнитной анизотропии ($K_{эфф}$) и константы одноосной магнитной анизотропии (K_U) как функции толщины кобальта в исследуемых пленках $[Co_{tCo} / Pd_{tPd}] \times 15$ перед и после отжига, а также пленок с буферным слоем $Pd_{10nm} / [Co_{tCo} / Pd_{tPd}] \times 15 / Pd_{2nm}$ ($t_{Co} = 0,2$ нм; $0,3$ нм; $0,4$ нм и $t_{Pd} = 0,6$ нм; $1,0$ нм)

Как видно из рисунка 2.3, магнитная анизотропия пленок при наличии буфера значительно выше, что связано с уменьшением толщины так называемого «мертвого слоя» ферромагнитного материала [30]. Данный слой возникает на границе ферромагнитной пленки с немагнитной подложкой и связан с разупорядочением магнитных моментов пленки на малых масштабах. В свою очередь, увеличение одноосной магнитной анизотропии объясняет существенный рост коэрцитивной силы для пленок с буфером.

3 Механизмы перемагничивания многослойных тонких пленок Co/Pd

Для определения механизма перемагничивания в пленках перед и после отжига, а также пленках с буферным слоем кривые намагниченности $M(H)$ измерялись для разных углов φ между магнитным полем H и нормалью к пленке. Из кривых намагниченности $M(H)$, измеренных для различных углов φ , получены соответствующие

зависимости $H_C(\varphi)$, нормированные на $H_C(0)$ при угле $\varphi = 0$ (рисунок 3.1). Сравнение экспериментальных угловых зависимостей коэрцитивной силы $H_C(\varphi)$ с теоретическими зависимостями $H_C(\varphi)$, предсказанными из модели Кондорского, модифицированной модели Кондорского и модели Стонера – Вольфарта позволяет определить механизмы перемагничивания свойственные для исследуемых магнитных систем.

Для систем, состоящих из однодоменных магнитных частиц с одноосной анизотропией, перемагничивание может происходить за счет когерентного вращения магнитных моментов в данных частицах. Перемагничивание такой системы может быть описано при помощи модели Стонера – Вольфарта (СВМ) [31]–[33]. Угловая зависимость H_C , согласно этой модели, где угол φ определяется как угол между осью легкого намагничивания и направлением прикладываемого магнитного поля H , описывается выражениями

$$\begin{cases} H_C^{СВМ}(\varphi) = H_A (\cos^{\frac{2}{3}} \varphi + \sin^{\frac{2}{3}} \varphi)^{-\frac{3}{2}}, & (0 < \varphi \leq 45^\circ) \\ H_C^{СВМ} = \frac{H_A}{2} \sin 2\varphi, & (45^\circ < \varphi \leq 90^\circ), \end{cases}$$

где H_A – поле анизотропии.

В диапазоне углов ($0 < \varphi \leq 45^\circ$) кривая намагниченности $M(H)$ пересекает ось полей H практически под углом 90° . Таким образом, в случае когерентного вращения (модель Стонера – Вольфарта) H_C это монотонно убывающая функция от φ .

Для описания механизма перемагничивания многодоменных магнитных систем может использоваться модель Кондорского либо модифицированная модель Кондорского (МКМ) [33]–[35]. В последнем случае механизм перемагничивания описывается зарождением и движением доменной стенки при приложении внешнего магнитного поля вдоль легкой оси намагничивания и когерентным вращением магнитных моментов при приложении внешнего магнитного поля вдоль трудной оси. Для данного механизма перемагничивания угловая зависимость $H_C(\varphi)$ описывается выражением:

$$H_C^{МКМ}(\varphi) = H_C(0) \frac{(N_x + N_N) \cos \varphi}{N_z \sin^2 \varphi + (N_x + N_N) \cos^2 \varphi},$$

где N_z и N_x – размагничивающие факторы пленки в двух ортогональных ориентациях, лежащие в одной плоскости с внешним магнитным полем и намагниченностью. N_N – это формальный параметр, соответствующий эффективному размагничивающему фактору и характеризующий анизотропию, отличную от анизотропии формы пленки (например, магнитокристаллическую). Подобная «модификация» механизма Кондорского дополнительным вкладом когерентного вращения хорошо описывает процессы перемагничивания для различных систем (ферромагнитных

сплавов [34], [36], пленок магнитных сплавов [33], [37], [38], многослойных тонких пленок, демонстрирующих ПМА [39]).

Модельные угловые зависимости коэрцитивной силы $H_C(\varphi)$, соответствующие различным механизмам перемагничивания, представлены на рисунке 3.1. Из сравнения модельных и экспериментальных кривых можно сделать вывод о том, что перемагничивание сплошных пленок перед и после отжига может быть корректно описано в рамках модифицированной модели Кондорского.

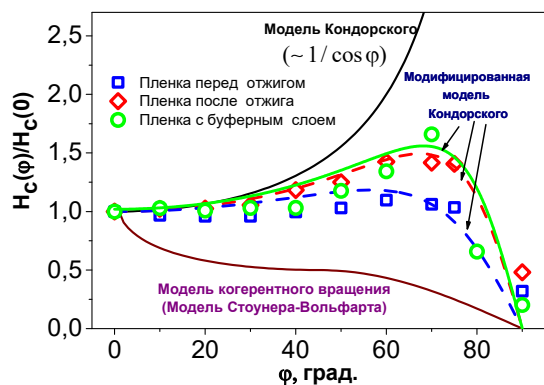


Рисунок 3.1 – Нормализованные зависимости $H_C(\varphi) / H_C(0)$ пленки $[\text{Co}_{0,3\text{нм}} / \text{Pd}_{0,6\text{нм}}] \times 15$ перед и после отжига, а также пленки с буферным слоем $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{0,3\text{нм}} / \text{Pd}_{0,6\text{нм}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$

Соотношения $(M_r(\varphi) / M_S)$, полученные из кривых намагниченности $M(H)$, измеренных для различных углов между внешним магнитным полем H и нормалью пленок перед и после отжига, а также многослойных тонких пленок с палладиевым буферным слоем уменьшаются с ростом угла φ прямо пропорционально зависимости $\cos(\varphi)$ и максимальные значения лежат в пределах $\varphi = 0^\circ$ ($M_r / M_S \approx 0,9$), что подтверждает перпендикулярную магнитную анизотропию исследуемых пленок [35], [40], [41].

4 Структура магнитных доменов многослойных тонких пленок Co/Pd

На рисунке 4.1 представлены изображения магнито-силовой микроскопии (МСМ) для исследуемых магнитных пленок $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{0,6\text{нм}}] \times 15$ перед и после отжига, а также пленок с буферным слоем $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{0,6\text{нм}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$ ($t_{\text{Co}} = 0,2 \text{ нм}; 0,3 \text{ нм}; 0,4 \text{ нм}$). Средняя шероховатость для пленок перед и после отжига составляла $\sim 1\text{--}3 \text{ нм}$. Учитывая, что рабочее расстояние между микроострием кантиливера и поверхностью образцов сохранялось постоянным и составляло 100 нм , влияние топографии на получаемый магнитный контраст отсутствовало. Области темного и светлого контраста на изображениях МСМ (рисунок 4.1) представляют зоны, в которых магнитные моменты ориентированы в двух противоположных направлениях относительно

ориентации намагниченности микроострия. Видно, что ширина доменов изменяется с изменением толщины кобальта и палладия. Это объясняется тем, что размер и форма доменов определяется минимизацией суммы энергий доменной стенки и энергии размагничивания. Энергия доменной стенки уменьшается, когда домены большие, а энергия размагничивания уменьшается по мере уменьшения магнитных доменов. Вклад каждой из этих энергий изменяется при изменении толщины магнитной пленки, что приводит к изменению доменной структуры пленок [42]. Кроме того, ширина доменов различна для пленок перед и после отжига, а также при наличии буферного слоя.

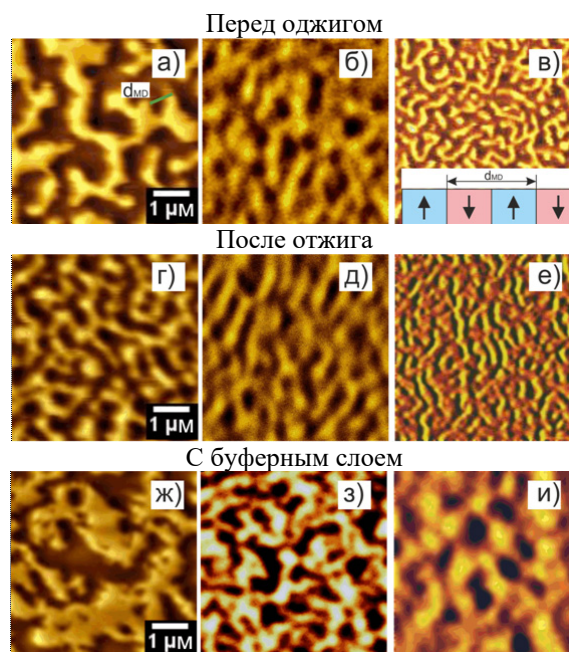


Рисунок 4.1 – Изображения магнито-силовой микроскопии пленок $[\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{0,6 \text{ нм}}] \times 15$ ($t_{\text{Co}} = 0,2$ (а, з, ж); 0,3 (б, д, з); 0,4 (в, е, и) нм) перед (а, б, в) и после (з, д, е) отжига, а также пленок с буферным слоем $\text{Pd}_{10\text{нм}} / [\text{Co}_{t_{\text{Co}}} / \text{Pd}_{0,6 \text{ нм}}] \times 15 / \text{Pd}_{2\text{нм}}$ (ж, з, и)

Для количественной оценки доменной структуры пленок был измерен характеристический период (d_{MD}) магнитных доменов в пленках. Данные периоды были измерены от случайных сечений, взятых в перпендикулярном направлении полосовых доменов (рисунок 4.1, а и в). Вариация в периодах магнитных доменов возникает из-за локального пиннинга стенок магнитных доменов. Принимая во внимание случайное распределение центров пиннинга статистическое распределение d_{MD} может быть описано нормальным распределением. Размеры доменов, представленные в таблице 4.1, представляют среднее значение, а ошибка – стандартное отклонение, вычисленное для порядка десяти измерений для каждой пленки. Как видно из рисунка 4.1,

Таблица 4.1 – Характеристический период магнитных доменов (d_{MD}), измеренных для пленок $[Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15$ перед и после отжига, а также пленок с буферным слоем $Pd_{10nm} / [Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15 / Pd_{2nm}$ ($t_{Co} = 0,2; 0,3; 0,4$ нм и $t_{Pd} = 0,6; 1,0$ нм), d_{MD} – среднее значение для случайно выбранных сечений, а ошибка – одно стандартное отклонение

t_{Co} , нм	d_{MD} , нм					
	$t_{Pd} = 0,6$ нм			$t_{Pd} = 1,0$ нм		
	Без буферного слоя		С буферным слоем	Без буферного слоя		С буферным слоем
Перед отжигом	После отжига	Перед отжигом		После отжига		
0,2	970±170	534±61	–	–	506±73	–
0,3	641±128	563±44	653±83	512±63	351±49	490±90
0,4	331±39	305±55	–	331±57	300±42	320±50

структура доменов существенно изменяется для пленки $[Co_{0,2nm} / Pd_{0,6nm}] \times 15$ после отжига, что также проявляется в существенном изменении эффективной константы магнитной анизотропии (см. рисунки 2.3) данной пленки. Подобная тенденция наблюдается и для пленок $[Co_{t_{Co}} / Pd_{1,0nm}] \times 15$ ($t_{Co} = 0,2$ нм и $0,3$ нм). Для пленок $[Co_{t_{Co}} / Pd_{0,6nm}] \times 15$ ($t_{Co} = 0,3$ нм и $0,4$ нм) и $[Co_{0,4nm} / Pd_{1,0nm}] \times 15$ с отжигом доменная структура остается подобной и значения их эффективной константы магнитной анизотропии также совпадают. Переход от кластерной структуры доменов к полосовой для пленок $[Co_{t_{Co}} / Pd_{1,0nm}] \times 15$ ($t_{Co} = 0,2$ нм и $0,3$ нм) и уменьшение периода магнитных доменов d_{MD} для пленок $[Co_{0,2nm} / Pd_{0,6nm}] \times 15$ и $[Co_{0,3nm} / Pd_{1,0nm}] \times 15$ с отжигом свидетельствует об увеличении роли размагничивающей энергии и об увеличении диполь-дипольного взаимодействия в данных пленках. Следует отметить, что для пленки $[Co_{0,3nm} / Pd_{1,0nm}] \times 15$ после отжига структура доменов становится подобной на структуру доменов пленки $[Co_{0,4nm} / Pd_{1,0nm}] \times 15$ (см. таблицу 4.1) и данные пленки имеют практически равные значения эффективной константы магнитной анизотропии ($K_{эфф} \approx 1,8$ эрг/см³).

Для пленок с буферным слоем $Pd_{10nm} / [Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15 / Pd_{2nm}$ ($t_{Co} = 0,2$ нм; $0,3$ нм; $0,4$ нм и $t_{Pd} = 0,6$ нм; $1,0$ нм) при увеличении толщины кобальта от $0,2$ нм до $0,3$ нм наблюдается переход от доменов кластерного типа к доменам с полосовой структурой, где характеристический период d_{MD} далее уменьшается с увеличением толщины кобальта (см. рисунок 4.1 ж и з). Следует также отметить, что данный переход сопровождается существенным ростом магнитной анизотропии (рисунок 2.3). Подобное увеличение эффективной константы магнитной анизотропии наблюдалось при переходе от доменов кластерного типа к доменам с полосовой структурой для пленок $[Co_{t_{Co}} / Pd_{1,0nm}] \times 15$ ($t_{Co} = 0,2$ и $0,3$ нм) перед отжигом.

Заключение

Все исследуемые тонкие пленки характеризуются магнитной анизотропией с ориентацией

оси легкого намагничивания вдоль нормали пленки (перпендикулярной магнитной анизотропией), высокой квадратичностью кривых намагниченности $M_r(H_{\perp}) / M_S \approx 0,9$, измеренных в данном направлении, и увеличением коэрцитивной силы H_C (до $3,2$ кЭ) для кривых намагниченности, измеренных в перпендикулярной геометрии, по сравнению с кривыми, полученными для поля, направленного вдоль плоскости пленки. Пленки $Pd_{10nm} / [Co_{0,3nm} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15 / Pd_{2nm}$ ($t_{Pd} = 0,6$ нм и $1,0$ нм) показывают оптимальное сочетание таких магнитных параметров, как M_S и $H_{C\perp}$. Также для данных пленок наблюдаются максимальные значения эффективных констант магнитной анизотропии $K_{эфф}$ ($3,9$ эрг/см³ и $4,2$ эрг/см³ для пленок с $t_{Pd} = 0,6$ нм и $1,0$ нм, соответственно). Процесс перемагничивания в исследуемых пленках можно описать движением доменных стенок с учетом вклада когерентного вращения магнитных моментов в области больших углов ϕ . Доменная структура (тип доменов, а также их размер) для исследуемых сплошных пленок может варьироваться путем отжига данных пленок или путем их осаждения на палладиевый буферный слой. Для пленок с буферным слоем $Pd_{10nm} / [Co_{t_{Co}} / Pd_{t_{Pd}}] \times 15 / Pd_{2nm}$ при увеличении толщины кобальта от $0,2$ нм до $0,3$ нм наблюдается переход от доменов кластерного типа к доменам с полосовой структурой, при увеличении толщины кобальта от $0,3$ нм до $0,4$ нм характеристический период полосовой структуры уменьшается, что согласуется с литературными данными. Переход от доменов кластерного типа к доменам с полосовой структурой сопровождается существенным ростом магнитной анизотропии пленок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Piramanayagam, S.N. Perpendicular recording media for hard disk drives / S.N. Piramanayagam // J. Appl. Phys. – 2007. – Vol.102, № 1. – P. 011301-1–011301-22.
2. Enhancement of magnetic properties of Co/Pd multilayered per-pendicular magnetic recording media by using Pd/Si dual seedlayer / J. Kawaji, T. Asahi, T. Onoue, J. Sayama, J. Hokyoku, T. Osaka, K. Ouchi // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – Vol. 251. – P. 220–228.

3. *Analysis of microstructures for Co/Pd multilayer perpendicular magnetic recording media with carbon underlayer* / T. Asahi, K. Kuramochi, J. Kawaji, T. Onoue, T. Osaka, M. Saigo // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2001. – Vol. 235. – P. 87–92.
4. *Coercivity tuning in Co/Pd multilayer based bit patterned media* / O. Hellwig, T. Hauet, T. Thomson, E. Dobisz, J.D. Risner-Jamgaard, D. Yaney, B.D. Terris, E.E. Fullerton // *Appl. Phys. Lett.* – 2009. – Vol. 95. – P. 232505-1–232505-3.
5. *Study of Co/Pd multilayers as a candidate material for next generation magnetic media* / B. Hu, N. Amos, Y. Tian, J. Butler, D. Litvinov, S. Khizroev // *J. Appl. Phys.* – 2011. – Vol. 109, № 1. – P. 034314-1–034314 1-4. 1
6. *Barton, C.W. Magnetisation reversal in anisotropy graded Co/Pd multilayers* / C.W. Barton, T. Thomson // *J. Appl. Phys.* – 2016. – Vol. 118. – P. 063901-1–063901-6.
7. *Effect of coherent to incoherent structural transition on magnetic anisotropy in Co/Pt multilayers* / P. Chowdhury, P.D. Kulkarni, M. Krishnan, H.C. Barshilia, A. Sagdeo, S.K. Rai, G.S. Lodha, D.V. Sridhara Rao // *J. Appl. Phys.* – 2012. – Vol. 112. – P. 023912-1–023912-8.
8. *Magnetic domain replication in interacting bilayers with out-of-plane anisotropy: Application to Co/Pt multilayers* / V. Baltz, A. Marty, B. Rodmacq, B. Dieny // *Phys. Rev. B – Condens. Matter Phys.* – 2007. – Vol. 75. – P. 014406-1–014406-6.
9. *Anomalous Hall effect in Co/Ni multilayers with perpendicular magnetic anisotropy* / P. Zhang, K. Xie, W. Lin, D. Wu, H. Sang // *Appl. Phys. Lett.* – 2014. – Vol. 104. – P. 082404-1–082404-4.
10. *Co/Ni multilayers with perpendicular anisotropy for spintronic device applications* / L. You, R.C. Sousa, S. Bandiera, B. Rodmacq, B. Dieny // *Appl. Phys. Lett.* – 2017. – Vol. 100. – P. 172411-1–172411-5.
11. *Influence of ion irradiation on switching field and switching field distribution in arrays of Co/Pd-based bit pattern media* / T. Hauet, O. Hellwig, S.H. Park, C. Beigne, E. Dobisz, B.D. Terris, D. Ravelosona // *Appl. Phys. Lett.* – 2011. – Vol. 98. – P. 172506-1–172506-3.
12. *den Broeder, F.J.A. Magnetic anisotropy of multilayers* / F.J.A. den Broeder, W. Hoving, P.J.H. Bloemen // *J. Magn. Magn. Mater.* – 1991. – Vol. 93. – P. 562–570
13. *Interface magnetic anisotropy in epitaxial superlattices* / B.N. Engel, C.D. England, R.A. Van Leeuwen, M.H. Wiedmann, C.M. Falco // *Phys. Rev. Lett.* – 1991. – Vol. 67. – P. 1910–1913.
14. *The relationship between interface structure, conformality and perpendicular anisotropy in Co/Pd multilayers* / A.S.H. Rozatian, C.H. Marrows, T.P.A. Hase, B.K. Tanner // *J. Phys. Condens. Matter.* – 2005. – Vol. 17. – P. 3759–3770.
15. *Kim, S.-K. Evidence for diffuse interfaces and tensile in-plane strains in evaporated (1 1 1) multilayers and their role in perpendicular magnetic anisotropy* / S.-K. Kim, V.A. Chernov, Y.-M. Koo // *J. Magn. Magn. Mater.* – 1997. – Vol. 170. – P. L7–L12.
16. *Comparison of atomic structure anisotropy between Co-Pd alloys and Co/Pd multilayer films* / S. Kim, Y. Koo, V. Chernov, J. Kortright, S. Shin // *Phys. Rev. B.* – 2000. – Vol. 62. – P. 3025–3028.
17. *Kim, S.K. Alloy-like co environment in Co/Pd multilayer films having perpendicular magnetic anisotropy* / S.K. Kim, S.C. Shin // *J. Appl. Phys.* – 2001. – Vol. 89. – P. 3055–3057.
18. *Influence of interface alloying on the magnetic properties of Co/Pd multilayers* / J. Carrey, A.E. Berkowitz, W.F. Egelhoff, D.J. Smith // *Appl. Phys. Lett.* – 2003. – Vol. 83. – P. 5259–5261.
19. *Hiroshi, T. Measurement of magnetostriction constants in (111)-oriented polycrystalline PdCo alloy and multilayered films* / T. Hiroshi // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 1993. – Vol. 32. – P. L1328–L1331.
20. *Hashimoto, S. Perpendicular magnetic anisotropy and magnetostriction of sputtered Co/Pd and Co/Pt multilayered films* / S. Hashimoto, Y. Ochiai, K. Aso // *J. Appl. Phys.* – 1989. – Vol. 66. – P. 4909–4916.
21. *Structure characterization of Pd/Co/Pd trilayer films epitaxially grown on MgO single-crystal substrates* / K. Tobar, M. Ohtake, K. Nagano, M. Futamoto // *Thin Solid Films.* – 2011. – Vol. 519. – P. 8384–8387.
22. *Carcia, P.F. Perpendicular magnetic anisotropy in Pd/Co thin film layered structures* / P.F. Carcia, A.D. Meinhardt, A. Suna // *Appl. Phys. Lett.* – 1985. – Vol. 47. – P. 178–180.
23. *Improvement of signal to noise ratio for Co/Pd multilayer perpendicular magnetic recording media by the addition of an underlayer* / T. Asahi, K. Kuramochi, J. Kawaji, T. Homma, T. Osaka // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2001. – Vol. 235. – P. 40–44.
24. *Shin, S.-C. Magneto-optical Effects in Compositionally Modulated Co/Pd Thin Films* / S.-C. Shin // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 1989. – Vol. 28–3. – P. 11–13.
25. *Origins of switching field distributions in perpendicular magnetic nanodot arrays* / J.M. Shaw, W.H. Rippard, S.E. Russek, T. Reith, C.M. Falco // *J. Appl. Phys.* – 2007. – Vol. 101. – P. 023909-1–023909-5.
26. *Cullity, B.D. Introduction to Magnetic Material, 2nd ed.s* / B.D. Cullity, C.D. Graham. – New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2008. – 544 p.
27. *Magnetic anisotropy in metallic multilayers* / M.T. Johnson, P.J.H. Bloemen, F.J. a Den Broeder, J.J. De Vries // *Reports Prog. Phys.* – 1996. – Vol. 59. – P. 1409–1458.
28. *Ordered Ni nanohole arrays with engineered geometrical aspects and magnetic anisotropy* / D. Navas, M. Hernández-Vlez, M. Vázquez, W. Lee,

- K. Nielsch // *Appl. Phys. Lett.* – 2007. – Vol. 90. – P. 192501-1–192501-4.
29. *Thickness dependent magnetization dynamics of perpendicular anisotropy Co/Pd multilayer films* / Z. Liu, R. Brandt, O. Hellwig, S. Florez, T. Thomson, B. Terris, H. Schmidt // *J. Magn. Mater.* – 2011. – Vol. 323. – P. 1623–1626.
30. *Ultrathin Co/Pt and Co/Pd superlattice films for MgO-based perpendicular magnetic tunnel junctions* / K. Yakushiji, T. Saruya, H. Kubota, A. Fukushima, T. Nagahama, S. Yuasa, K. Ando // *Appl. Phys. Lett.* – 2010. – Vol. 97. – P. 232508-1–232508-3.
31. *Wohlfarth, E.P.* The Effect of Particle Interaction on the Coercive Force of Ferromagnetic Micropowders / E.P. Wohlfarth // *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* – 1955. – Vol. 232. – P. 208–227.
32. *Oh, D.Y.* Crystallographic texture and angular dependence of coercivity of ordered CoPt thin film / D.Y. Oh, J.K. Park // *J. Appl. Phys.* – 2005. – Vol. 97. – P. 10N105-1–10N105-3.
33. *Magnetization reversal mechanism in $\text{La}_{0.67}\text{Sr}_{0.33}\text{MnO}_3$ thin films on NdGaO_3 substrates* / M. Mathews, E.P. Houwman, H. Boschker, G. Rijnders, D.H.A. Blank // *J. Appl. Phys.* – 2010. – Vol. 107. – P. 013904-1–013904-5.
34. *Angular dependence of coercive field in (Sm, Zr) (Co, Cu, Fe) alloys* / N.P. Suponev, R.M. Grechishkin, M.B. Lyakhova, Y.E. Pushkar // *J. Mag. Mag. Mat.* – 1996. – Vol. 157–158. – P. 376–377.
35. *Tunable in-plane uniaxial anisotropy and the magnetization reversal mechanism of patterned high-frequency soft magnetic FeTa strips* / X.M. Han, J.H. Ma, Z. Wang, Y.L. Yao, Y.L. Zuo, L. Xi, D.S. Xue // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2013. – Vol. 46. – P. 485004-1–485004-10.
36. *Angular dependence of coercivity in Sm – Fe – N permanent magnets* / P. Pawlik, J.J. Wys, W. Kaszuwara, M. Leonowicz // *J. Magn. Mater.* – 2002. – Vol. 242–245. – P. 1344–1346.
37. *Evolution of magnetization reversal mechanism in Fe-Cr alloy films* / T.R. Gao, S.P. Hao, S.M. Zhou, L. Sun // *J. Appl. Phys.* – 2006. – Vol. 100. – P.073909-1–073909-6.
38. *Self-organized magnetic assemblies of (001) oriented FePt nano-particles with SiO_2 additive* / D.H. Wei, F.T. Yuan, H.W. Chang, K.L. You, Y. Liou, T.S. Chin, C.C. Yu, Y.D. Yao // *Nanotechnology* – 2007. – Vol. 18. – P. 335603-1–335603-5.
39. *Coercivity mechanism of nanocomposite Sm-Co/Fe multilayer films* / J. Zhang, Y.X. Li, F. Wang, B.G. Shen, J.R. Sun // *J. Appl. Phys.* – 2010. – Vol. 107. – P. 043911-1–043911-4.
40. *Perpendicular magnetic anisotropy in Nd-Co alloy films nanostructured by di-block copolymer templates* / F. Valdes-Bango, F.J. Garcia Alonso, G. Rodriguez-Rodriguez, L.M. Fernandez, A. Anillo, L. Ruiz-Valdepenas, E. Navarro, J.L. Vicent, M. Velez, J.I. Martin, J.M. Alameda // *J. Appl. Phys.* – 2012. – Vol. 112. – P. 083914-1–083914-6.
41. *Ultrathin Magnetic Structures I* / J.A.C. Bland, B. Heinrich, eds. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994. – 350 p.
42. *Magnetic force microscopy of Co-Pd multilayers with perpendicular anisotropy* / J.R. Barnes, S.J. O'Shea, M.E. Welland, J.Y. Kim, J.E. Evetts, R.E. Somekh // *J. Appl. Phys.* – 1994. – Vol. 76. – P. 2974–2980.

Поступила в редакцию 07.04.18.

О ЯДРЕ p -ПРЕФРАТТИНИЕВОЙ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

С.Ф. Каморников

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON CORE OF p -PREFRATTINI SUBGROUP OF A FINITE SOLUBLE GROUP

S.F. Kamornikov

F. Scorina Gomel State University

Пусть p – некоторое простое число и H – p -префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G . В работе доказывается, что существуют элементы $x, y, z \in G$, для которых выполняется равенство $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Phi_p(G)$.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, p -префраттиниева подгруппа, ядро подгруппы, обобщенная подгруппа Фраттини.

Let p be a prime, and H is a p -prefrattini subgroup of a finite soluble group G . In the paper it is proved that there exist elements $x, y, z \in G$ such that the equality $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Phi_p(G)$ holds.

Keywords: finite soluble group, p -prefrattini subgroup, core of subgroup, generalized Frattini subgroup.

Введение

В [1] показано, что если \mathfrak{F} – насыщенная формация, H – \mathfrak{F} -префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G и $\Delta_{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных подгрупп из G , то справедливы следующие утверждения:

- 1) $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Delta_{\mathfrak{F}}(G)$ для некоторых x, y и z из G ;
- 2) если либо группа G является S_4 -свободной, либо формация \mathfrak{F} состоит из S_3 -свободных групп, то $H \cap H^x \cap H^y = \Delta_{\mathfrak{F}}(G)$ для некоторых x и y из G .

Частные аспекты приведенного выше результата рассматривались в работах автора [2] (\mathfrak{F} – формация единичных групп, $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G) и [3] (\mathfrak{F} – формация всех нильпотентных групп, $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \Delta(G)$ – подгруппа Гашюца группы G , т. е. пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G).

Поскольку $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \text{Core}_G(H) = \bigcap_{x \in G} H^x$ для любой \mathfrak{F} -префраттиниевой подгруппы H группы G , то, по сути, речь идет о возможности представления ядра \mathfrak{F} -префраттиниевой подгруппы в виде пересечения ограниченного числа (трех или четырех) сопряженных с ней подгрупп.

Отметим, что постановка такой задачи иницирована центральными результатами работ [4] и [5]. В [4] Пассман доказал, что в каждой p -разрешимой группе G найдутся три силовские

p -подгруппы, пересечение которых равно $O_p(G)$. В.И. Зенков в [5] показал, что аналогичный результат имеет место для любой конечной группы.

В данной работе результат об \mathfrak{F} -префраттиниевых подгруппах конечной разрешимой группы G распространяется на ее p -префраттиниевы подгруппы. Отметим, что в общем случае множество всех p -префраттиниевых подгрупп группы G не совпадает с множеством всех ее \mathfrak{F} -префраттиниевых подгрупп.

Пусть p – некоторое простое число и $\Phi_p(G)$ – пересечение всех максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на p . Наша главная цель – доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть p – некоторое простое число. Если H – p -префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G , то для некоторых x, y и z из G справедливо равенство

$$H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Phi_p(G).$$

1 Предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы, поэтому термин «группа» всегда означает «конечная разрешимая группа». Нами используются определения и обозначения, принятые в [6].

Концепция префраттиниевой подгруппы разрешимой группы предложена Гашюцем [7] в 1962 году. В оригинальном изложении префраттиниева подгруппа определяется как пересечение дополнений корон всех дополняемых главных

факторов некоторого фиксированного главного ряда группы. Такой подход в дальнейшем широко исследовался и многократно обобщался. Наиболее яркое развитие он получил в работе Хоукса [8], который для насыщенной формации \mathfrak{F} ввел понятие \mathfrak{F} -префраттиниевой подгруппы, рассматривая дополнения корон не всех дополняемых главных факторов, а лишь \mathfrak{F} -эксцентральные.

Отметим, что в теории конечных разрешимых групп известны и подходы (см., например, [9]–[12]), не использующие понятие «корона дополняемого главного фактора». Один из таких подходов, рассматривающий обобщенно префраттиниеву подгруппу группы G как пересечение некоторых ее максимальных подгрупп, мы используем при определении p -префраттиниевой подгруппы.

Определение 1.1. Пусть p – некоторое простое число, $1 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = G$ – главный ряд группы G и $\{A_i / A_{i-1} \mid i \in I\}$ – множество всех дополняемых главных p' -факторов этого ряда. Пусть M_i ($i \in I$) – максимальная подгруппа группы G , которая дополняет главный фактор A_i / A_{i-1} . Тогда подгруппа $\bigcap_{i \in I} M_i$ называется p -префраттиниевой подгруппой группы G (если в G нет дополняемых главных p' -факторов, то p -префраттиниевой подгруппой группы G считается сама группа G).

Проверка показывает, что определение p -префраттиниевой подгруппы является корректным: оно не зависит от выбора главного ряда группы. Из определения следует также, что p -префраттиниева подгруппа существует в любой группе.

Нам понадобится далее информация о свойствах подгруппы $\Phi_p(G)$. Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Лемма 1.1. Для любой группы G и любого простого числа p справедливы следующие утверждения:

- 1) $O_p(G) \subseteq \Phi_p(G)$ и $\Phi_p(G) / O_p(G) = \Phi(G / O_p(G))$;
- 2) если $N \triangleleft G$, то $\Phi_p(G)N / N \subseteq \Phi_p(G / N)$;
- 3) если $N \triangleleft G$ и $N \subseteq \Phi_p(G)$, то $\Phi_p(G / N) = \Phi_p(G) / N$;
- 4) $\Phi_p(G / \Phi_p(G)) = 1$.

Основные свойства p -префраттиниевых подгрупп мы приведем в виде лемм. Напомним только, что если H – подгруппа группы G и A / B – ее нормальная секция, то говорят, что:

- 1) H покрывает A / B , если $HB \supseteq A$;
- 2) H изолирует A / B , если $H \cap A \subseteq B$.

Лемма 1.2 [13, теорема 2]. Пусть H – p -префраттиниева подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $N \triangleleft G$, то HN / N – p -префраттиниева подгруппа группы G / N ;
- 2) H покрывает все главные p -факторы и все фраттиниевы главные факторы группы G ;
- 3) H изолирует все дополняемые главные p' -факторы группы G ;
- 4) $\text{Core}_G(H) = \Phi_p(G)$;
- 5) любые две p -префраттиниевые подгруппы группы G сопряжены.

Лемма 1.3. Пусть N – минимальная нормальная p' -подгруппа группы G . Если M – максимальная подгруппа группы G , дополняющая N , то каждая p -префраттиниева подгруппа из M является p -префраттиниевой подгруппой группы G .

Доказательство. Пусть H – p -префраттиниева подгруппа из M . Пусть

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = M$$

– главный ряд группы M и $\{A_i / A_{i-1} \mid i \in I\}$ – множество всех дополняемых главных p' -факторов этого ряда. По определению 1.1 $H = \bigcap_{i \in I} M_i$, где M_i ($i \in I$) – максимальная подгруппа группы M , которая дополняет главный p' -фактор A_i / A_{i-1} .

Рассмотрим нормальный ряд

$$1 \subset N = A_0N \subset A_1N \subset \dots \subset A_nN = MN = G \quad (1.1)$$

группы G . Так как

$$\begin{aligned} A_jN / A_{j-1}N &= A_j / A_j \cap A_{j-1}N = \\ &= A_j / A_{j-1}(A_j \cap N) = A_j / A_{j-1} \end{aligned}$$

для каждого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то этот ряд является главным рядом группы G . Так как отображение $\alpha: mN \mapsto m$ является изоморфизмом групп G / N и M , то фактор $A_jN / A_{j-1}N$ является p' -фактором тогда и только тогда, когда фактор A_j / A_{j-1} является p' -фактором. Поэтому в ряду (1.1) p' -факторами будут только факторы N и $A_jN / A_{j-1}N$ для всех $j \in I$. Кроме того, все эти факторы являются дополняемыми: подгруппа N дополняется подгруппой M по условию, а дополнением к $A_jN / A_{j-1}N$ ($j \in I$) является подгруппа M_jN .

Отсюда следует, что $M \cap (\bigcap_{i \in I} M_iN)$ – p -префраттиниева подгруппа группы G . Очевидно, $H = \bigcap_{i \in I} M_i \subseteq M \cap (\bigcap_{i \in I} M_iN)$. Так как по лемме 1.2 подгруппы H и $M \cap (\bigcap_{i \in I} M_iN)$ изолируют все дополняемые p' -главные факторы ряда (1) и покрывают все его остальные главные факторы, то ввиду леммы А.1.7 из [6] имеем, что $|H| = |M \cap (\bigcap_{i \in I} M_iN)|$. Отсюда и из $H \subseteq M \cap (\bigcap_{i \in I} M_iN)$ следует, что $H = M \cap (\bigcap_{i \in I} M_iN)$, т. е. H – p -префраттиниева подгруппа группы G . \square

Лемма 1.4. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G и M – максимальная подгруппа группы G , дополняющая N . Тогда для любой подгруппы $H \subseteq M$ и любых элементов m_1, m_2, \dots, m_k из M справедливо равенство $\bigcap_{i=1}^k H^{m_i} N = (\bigcap_{i=1}^k H^{m_i}) N$.

Доказательство. Ввиду леммы Фраттини имеем

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^k H^{m_i} N &= H^{m_1} N \cap H^{m_2} N \cap \dots \cap H^{m_k} N = \\ &= (H^{m_1} \cap (H^{m_2} N \cap \dots \cap H^{m_k} N)) N = \\ &= (H^{m_1} \cap M \cap (H^{m_2} N \cap \dots \cap H^{m_k} N)) N = \\ &= (H^{m_1} \cap (M \cap H^{m_2} N) \cap \dots \cap (M \cap H^{m_k} N)) N = \\ &= (H^{m_1} \cap H^{m_2} (M \cap N) \cap \dots \cap H^{m_k} (M \cap N)) N = \\ &= (\bigcap_{i=1}^k H^{m_i}) N. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 1.5. Пусть N – нормальная p' -подгруппа группы G , содержащаяся в $\text{Soc}(G)$. Если H – такая подгруппа группы G , что $G = NH$ и $N \cap H = 1$, то $\Phi_p(G) = C_{\Phi_p(H)}(N)$.

Доказательство. Пусть T – пересечение всех максимальных подгрупп группы G , которые содержат N и индексы которых не делятся на p . Тогда $\Phi_p(G) \subseteq T$ и $T/N = \Phi_p(G/N)$. Ввиду естественного изоморфизма $H \cong HN/N = G/N$ имеем равенство $\Phi_p(G/N) = \Phi_p(H)N/N$. Теперь из $\Phi_p(G)N/N \subseteq \Phi_p(G/N)$ следует включение $\Phi_p(G) \subseteq \Phi_p(H)N$.

Пусть W – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в N . Тогда $N = W \times W^*$, где W^* – нормальная подгруппа группы G . Так как подгруппа W дополняема в G максимальной подгруппой W^*H , индекс которой не делится на p , то $\Phi_p(G) \cap N = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_p(G) &\subseteq C_G(N) \cap \Phi_p(H)N = \\ &= (C_G(N) \cap \Phi_p(H))N = C_{\Phi_p(H)}(N) \times N. \end{aligned}$$

Пусть $K = C_{\Phi_p(H)}(N)$. Ясно, что

$$N_G(K) \supseteq \langle H, N \rangle = G,$$

т. е. K – нормальная подгруппа группы G . Предположим, что найдется не содержащая K максимальная подгруппа M группы G , индекс которой не делится на p . В этом случае $KM = G$. Если $N \subseteq M$, то M/N – максимальная подгруппа группы G/N , а значит, $M \cap H$ – максимальная подгруппа группы H . Кроме того, индекс $|H : M \cap H| = |G : M|$ не делится на p . Но тогда $K \subseteq \Phi_p(H) \subseteq M \cap H \subseteq M$, что противоречит предположению.

Итак, N не содержится в M . Пусть $D = M \cap N$. Так как $N \subseteq \text{Soc}(G)$, то найдется

минимальная нормальная подгруппа V группы G такая, что $N = V \times D$. Значит, M и DH – максимальные подгруппы группы G , дополняющие V . Подгруппы M и DH не сопряжены в G , так как DH содержит нормальную подгруппу K , а M не содержит K ввиду предположения. Тогда на основании утверждения А.16.9 из [6] $M \cap DH$ – максимальная подгруппа группы DH . А так как $M \cap DH = (M \cap H)D$, то подгруппа $M \cap H$ максимальна в H . Так как подгруппы M и H не сопряжены, то $MH = G$. Отсюда

$$|G| = |MH| = \frac{|M||H|}{|M \cap H|},$$

а значит

$$|G : M| = \frac{|G|}{|M|} = \frac{|H|}{|H \cap M|} = |H : H \cap M|$$

не делится на p . Поэтому имеем

$$K \subseteq \Phi_p(H) \subseteq M \cap H \subseteq M.$$

Снова пришли к противоречию.

Итак, каждая максимальная подгруппа группы G , индекс которой не делится на p , содержит K . Поэтому $K \subseteq \Phi_p(G)$. Теперь окончательно имеем

$$\Phi_p(G) = \Phi_p(G) \cap NK = (\Phi_p(G) \cap N)K = K. \quad \square$$

Мы будем опираться на следующие результаты, которые приведем в виде лемм.

Лемма 1.6 [14, теорема 1.4]. Пусть G – разрешимая группа и V – конечный точный G -модуль. Если V вполне приводим, то существуют такие элементы $v_1, v_2, v_3 \in V$, для которых справедливо равенство $C_G(v_1) \cap C_G(v_2) \cap C_G(v_3) = 1$.

Лемма 1.7 [6, лемма А.16.3]. Пусть $G = NH$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы N и подгруппы H . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $n \in N$, то $H \cap H^n = C_H(n)$;
- 2) $\text{Core}_G(H) = C_H(N)$.

Пусть H и K – подгруппы группы G , причем $K = \text{Core}_G(H)$. Следуя [1], будем говорить, что тройка (G, H, K) является k -сопряженной системой, если в G существуют такие элементы $g_1 = e, g_2, \dots, g_k$, что $K = H^{g_1} \cap H^{g_2} \cap \dots \cap H^{g_k}$.

В терминологии k -сопряженных систем основной результат данной работы утверждает, что если H – p -префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G , то тройка $(G, H, \Phi_p(G))$ является 4-сопряженной системой.

2 Доказательство теоремы

Предположим, что теорема не верна и G – контрпример минимального порядка. Тогда тройка $(G, H, \Phi_p(G))$, где H – p -префраттиниева

подгруппа группы G , не является 4-сопряженной системой.

2.1. $\Phi_p(G) = 1$. В частности, $\Phi(G) = 1$.

Предположим сначала, что $\Phi_p(G) \neq 1$. Тогда ввиду леммы 1.2

$$H\Phi_p(G)/\Phi_p(G) = H/\Phi_p(G)$$

– p -префраттиниева подгруппа группы $G/\Phi_p(G)$.

Так как $|G/\Phi_p(G)| < |G|$, то

$$(G/\Phi_p(G), H/\Phi_p(G), \Phi_p(G/\Phi_p(G)))$$

– 4-сопряженная система. Кроме того, ввиду утверждения 4) леммы 1.1 справедливо равенство $\Phi_p(G/\Phi_p(G)) = 1$. Поэтому

$$(G/\Phi_p(G), H/\Phi_p(G), 1)$$

– 4-сопряженная система. Отсюда следует, что тройка $(G, H, \Phi_p(G))$ является 4-сопряженной системой. Пришли к противоречию с выбором группы G .

2.2. В G существуют минимальная нормальная p' -подгруппа N и максимальная подгруппа M такие, что $G = MN$, $M \cap N = 1$ и тройка $(M, N, \Phi_p(M))$ является 4-сопряженной системой. При этом $\Phi_p(M) \neq 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как ввиду утверждения 2.1 $\Phi_p(G) = 1$, то $O_p(G) = 1$ и $\Phi(G) = 1$. Поэтому из разрешимости группы G имеем, что N – дополняемая p' -подгруппа группы G и существует такая максимальная подгруппа M группы G , что $G = MN$ и $M \cap N = 1$. Ввиду леммы 1.3 можем полагать, что $H \subseteq M$. Так как $|M| < |G|$, то ввиду выбора группы G тройка $(M, N, \Phi_p(M))$ является 4-сопряженной системой, т. е. в M найдутся такие элементы $m_1 = e, m_2, m_3$ и m_4 для которых выполняется равенство

$$\Phi_p(M) = H \cap H^{m_2} \cap H^{m_3} \cap H^{m_4}.$$

Если $\Phi_p(M) = 1$, то имеем, что

$$\Phi_p(G) = 1 = \Phi_p(M) = H \cap H^{m_2} \cap H^{m_3} \cap H^{m_4},$$

т. е. тройка $(G, H, \Phi_p(G))$ является 4-сопряженной системой. Пришли к противоречию.

2.3. Подгруппа N является точным вполне приводимым $\Phi_p(M)$ -модулем над полем F_q из q элементов, где $q \neq p$. В частности, имеет место равенство $\text{Core}_{\Phi_p(M)N}(\Phi_p(M)) = 1$.

Так как N – минимальная нормальная p' -подгруппа группы G , то из разрешимости группы G следует, что N – абелева q -подгруппа для некоторого простого q , отличного от p . Очевидно, N – неприводимый M -модуль над полем F_q . По теореме Клиффорда [6, теорема В.7.3] подгруппа N

является вполне приводимым $\Phi_p(M)$ -модулем. Ввиду леммы 1.5 и утверждения 2.1 имеет место равенство $C_G(N) = 1$. Поэтому $\Phi_p(M)$ -модуль N является точным. Отсюда следует, что $\text{Core}_{\Phi_p(M)N}(\Phi_p(M)) = 1$.

2.4. Тройка $(\Phi_p(M)N, \Phi_p(M), 1)$ не является 4-сопряженной системой.

Предположим, что тройка

$$(\Phi_p(M)N, \Phi_p(M), 1)$$

является 4-сопряженной системой. Тогда по определению найдутся такие элементы $h_1 = e, h_2, h_3$ и h_4 из $\Phi_p(M)N$, что $\bigcap_{i=1}^4 (\Phi_p(M))^{h_i} = 1$. Так как элемент h_i представим в виде $h_i = f_i n_i$ для некоторых $f_i \in \Phi_p(M)$ и $n_i \in N$ ($i = 1, 2, 3, 4$), то справедливо равенство $\bigcap_{i=1}^4 (\Phi_p(M))^{n_i} = 1$.

Рассмотрим подгруппу $D = \bigcap_{i=1}^4 H^{m_i n_i}$. Тогда ввиду леммы 1.4 имеем

$$\begin{aligned} D &\subseteq \bigcap_{i=1}^4 H^{m_i n_i} N = \bigcap_{i=1}^4 H^{m_i} N = \\ &= (\bigcap_{i=1}^4 H^{m_i}) N = \Phi_p(M)N. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D &= D \cap \Phi_p(M)N = \bigcap_{i=1}^4 H^{m_i n_i} \cap \Phi_p(M)N = \\ &= \bigcap_{i=1}^4 (H^{m_i} \cap \Phi_p(M)N)^{n_i} = \\ &= \bigcap_{i=1}^4 \Phi_p(M)^{n_i} = 1 = \Phi_p(G). \end{aligned}$$

Таким образом, тройка $(G, H, \Phi_p(G))$ является 4-сопряженной системой, что противоречит предположению.

2.5. *Заключительное противоречие.*

Ввиду утверждения 2.3 $\Phi_p(M) \cap N = 1$ и N – точный вполне приводимый $\Phi_p(M)$ -модуль над полем F_q из q элементов. Тогда ввиду леммы 1.6 существуют такие элементы $n_1, n_2, n_3 \in N$, для которых выполняется равенство

$$C_{\Phi_p(M)}(n_1) \cap C_{\Phi_p(M)}(n_2) \cap C_{\Phi_p(M)}(n_3) = 1.$$

Отсюда ввиду леммы 2.7 имеем, что

$$\Phi_p(M) \cap (\Phi_p(M))^{n_1} \cap (\Phi_p(M))^{n_2} \cap (\Phi_p(M))^{n_3} = 1.$$

Но тогда тройка $(\Phi_p(M)N, \Phi_p(M), 1)$ является 4-сопряженной системой, что противоречит утверждению 2.4. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Ballester-Bolinches, A. On two questions from the Kourovka Notebook / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, S.F. Kamornikov, H. Meng // J. Algebra. – 2018. – Vol. 499. – P. 438–449.
2. Kamornikov, S.F. Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups / S.F. Kamornikov // Int. J. Group Theory. – 2017. – Vol. 6, № 2. – P. 1–5.
3. Каморников, С.Ф. Об одной характеристизации подгруппы Гашюца конечной разрешимой

группы / С.Ф. Каморников // Фунд. и прикл. мат. – 2015. – Т. 20, № 6. – С. 65–75.

4. *Passman, D.S.* Groups with normal solvable Hall p' -subgroups / D.S. Passman // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 123, № 1. – P. 99–111.

5. *Зенков, В.И.* Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах / В.И. Зенков // Фунд. и прикл. мат. – 1996. – Т. 2, № 1. – С. 1–92.

6. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. *Gaschütz, W.* Praefrattinigruppen / W. Gaschütz // Arch. Math. – 1962. – Vol. 13, № 3. – P. 418–426.

8. *Hawkes, T.* Analogues of prefrattini subgroups / T. Hawkes // Proc. Internat. Conf. Theory of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1965). – New York – London – Paris: Gordon and Breach, 1967. – P. 145–150.

9. *Kurzweil, H.* Die Praefrattinigruppe im Intervall eines Untergruppenverbandes / H. Kurzweil // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 235–244.

10. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

11. *Каморников, С.Ф.* О префраттиниевых подгруппах конечных разрешимых групп / С.Ф. Каморников // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 1310–1318.

12. *Каморников, С.Ф.* Разрешимые ЕТ-функции групп / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 59–62.

13. *Каморников, С.Ф.* Проекторы разрешимых конечных групп: редукция к подгруппам префраттиниева типа / С.Ф. Каморников, Л.А. Шеметков // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 440, № 3. – С. 306–309.

14. *Dolfi, S.* Large orbits in coprime actions of solvable groups / S. Dolfi // Trans. Amer. Math. Soc. – 2008. – Vol. 360, № 1. – P. 135–152.

Поступила в редакцию 20.04.18.

УДК 539.3

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА В ИЗОТРОПНУЮ ВЯЗКОУПРУГУЮ ПОЛОСУ НА ОРТОТРОПНОМ ОСНОВАНИИ

В.В. Можаровский, Н.А. Марьина, Д.С. Кузьменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

REALIZATION OF SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM ON INDENTATION OF RIGID CYLINDRICAL INDENTER IN ISOTROPIC VISCOELASTIC STRIP ON THE ORTHOTROPIC BASIS

V.V. Mozharovsky, N.A. Maryina, D.S. Kuzmenkov

F. Scorina Gomel State University

Предлагается математическая модель расчета изменяющегося давления при контакте жесткого цилиндрического индентора с вязкоупругой изотропной полосой жестко скрепленной с ортотропным основанием. Решение контактной задачи сводится к интегральному уравнению. Представлена реализация численного решения интегрального уравнения.

Ключевые слова: математическая модель, вязкоупругая полоса, ортотропное основание, цилиндрический индентор, контактная задача.

The mathematical model of calculation of the changing pressure at contact of a rigid cylindrical indenter with a viscoelastic isotropic strip rigidly fastened to an orthotropic basis is offered. The solution of the contact problem is reduced to integral equation. The realization of the numerical solution of the integral equation is presented.

Keywords: mathematical model, viscoelastic strip, orthotropic base, cylindrical indenter, contact problem.

Введение

Широкое применение новых конструкционных материалов с вязкоупругими свойствами, повышенными прочностными характеристиками в различных отраслях машиностроения, строительства ставит перед исследователями проблему решения новых задач расчета напряженного состояния взаимодействующих тел. Несмотря на то, что новейшие композиты нашли применение в качестве конструкционных материалов и были разработаны эффективные инженерные методы оценки поведения этих материалов в конструкциях при статических нагрузках [1]–[3], но в настоящее время очень мало эффективных методов расчета поведения конструкций из композитов при контакте с учётом вязкоупругости. Поэтому решение данной проблемы является актуальной задачей.

Теория вязкоупругости является одним из разделов математической теории механики деформированного твердого тела. Процесс изучения этой теории необходим для разработки инженерных методик расчета элементов конструкции из различных современных материалов на основе композитов, обладающих наследственными свойствами, т. е. учет их упругих и прочностных характеристик изменяющихся во времени. Основные концепции теории вязкоупругости изложены в монографиях академика Ю.Н. Работнова [2], А.А. Ильюшина [3], Б.Е. Победри [4], Р. Кристенсена [5], Э.И. Старовойтова [6].

Техническое применение теории вязкоупругости при решении контактных задач применительно к расчету зубьев зубчатых колес представлено В.В. Можаровским [7].

Исследование явления вязкоупругости в композиционных материалах при контактном взаимодействии тел возможно при использовании эмпирических экспериментальных методов, но нежелательно из-за обширности и дороговизны мероприятий, требуемых при этом для охвата множества разнообразных комбинаций структур материалов, заполнителей, способов плетения волокна, последовательности укладки слоев, типов конструкций. Несмотря на то, что существует большое количество методов расчета задач подобного типа, возникает необходимость совершенствовать методики расчета и автоматизировать их на базе современных достижений науки и технологий. В связи с этим есть необходимость в разработке математических моделей и программ расчета напряжений при контактном взаимодействии тел из композитов с учетом различных физических и вязкоупругих параметров. Для решения задачи вязкоупругости для вязкоупругой полосы (покрытия) применяется метод Вольтерра, согласно которому упругие постоянные заменяем на интегральные операторы [2], [7]. Для создания алгоритмов расчета слоистых конструкций с учетом явления вязкоупругости следует рассматривать разные варианты сочетания реономных свойств материалов, например,

вязкоупругое анизотропное покрытие и анизотропное вязкоупругое основание или вязкоупругое изотропное покрытие и упругое анизотропное основание и другие варианты и комбинации с основанием и покрытием. В этой работе рассмотрим расчет для вязкоупругого изотропного покрытия (полосы) и жестко скрепленного с ортотропным основанием. В связи с этим возникает необходимость в разработке математической модели и программы численного расчета напряжений при контакте жесткого индентора с телом (или слоистым основанием) при различных физических параметрах. Описанный здесь аналитический подход и направлен на решение этой проблемы.

В данном случае особенно важно исследовать механические свойства армированных материалов, работающих в процессе:

- контактного взаимодействия цилиндрического тела и слоистого основания;
- зависимость контактного давления от изменяющихся упругих свойств изотропной полосы (покрытия) от времени;
- исследовать изменения напряженного состояния ортотропного основания.

В представленной работе внимание акцентируется на теоретических исследованиях по описанию вязкоупругого поведения тел из композитов или моделей, описывающих свойства композита с учетом временных факторов, что выполняется с целью дальнейшей автоматизации при реализации численных расчетов применительно к контактному взаимодействию. Методики расчета могут быть применены при исследовании контактного взаимодействия элементов деталей машин из композиционных материалов, а также при расчетах качения цилиндрических тел, моделирующих работу пневматических и массивных шин.

Некоторые концепции подхода и применения результатов расчета на производстве представлены в работах [8]–[17]. Построение модели и расчет параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) осуществляли в среде специализированных программных комплексов на базе разработок [1], [10], [13] в ГГУ им. Ф. Скорины, численных расчетов с применением современных информационных технологий.

1 Основные элементы теории вязкоупругости

При решении контактной задачи для вязкоупругого покрытия (полосы) используем элементы теории вязкоупругости. Описание временной зависимости деформационных свойств вязкоупругого тела в линейной теории вязкоупругости можно производить по результатам работ [2]–[4], например, релаксации напряжений, ползучести и др. Для случая одноосного растяжения – сжатия интегральные уравнения Больцмана – Вольтерра запишутся в виде:

$$\frac{\sigma(t)}{E} = \varepsilon(t) - \int_0^t R(t-s)\varepsilon(s)ds;$$

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_0^t K(t-s)\sigma(s)ds.$$

Здесь $\sigma(t)$ – напряжение, $\varepsilon(t)$ – деформация; E – модуль упругости; $R(t-s)$, $K(t-s)$ – функция влияния (ядро релаксации, ядро ползучести); t – время наблюдения.

Техника вычисления интегральных операторов при решении задач теории вязкоупругости с использованием данного ядра представлена в [7], [8]. Введем интегральные операторы \tilde{R} и \tilde{K} :

$$\tilde{R}f(t) = \int_0^t R(t-s)f(s)ds;$$

$$\tilde{K}f(t) = \int_0^t K(t-s)f(s)ds.$$

Тогда физические уравнения линейной теории вязкоупругости, например, для одноосного растяжения и сжатия, в операторной форме запишем следующим образом:

$$\sigma(t) = \tilde{E}\varepsilon(t);$$

$$\varepsilon(t) = \tilde{E}^{-1}\sigma(t).$$

Здесь операторы имеют вид

$$\tilde{E} = E_0(1 - \tilde{R});$$

$$\tilde{E}^{-1} = E_0^{-1}(1 + \tilde{K}).$$

Рассмотрим случай о нагружении образцов композитного материала, например, когда нагрузка постоянная. В этом случае закон деформирования можно выразить следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(t-s)ds \right].$$

Тогда используя [7] и значения интеграла $\int_0^t K(s)ds$, получаем

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \frac{A^*}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\lambda^\alpha} \right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \lambda t)}{\Gamma(\alpha n)} \right].$$

При времени $t \rightarrow \infty$ деформация асимптотически приближается к значению

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(s)ds \right] = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \frac{A^*}{\lambda^\alpha - \beta} \right]$$

для обобщенного ядра ползучести и релаксации [7]

$$K(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda\tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta\tau^\alpha; \alpha),$$

$$R(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda\tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta^* \tau^\alpha; \alpha).$$

Здесь $\beta, \beta^*, \lambda, A^*, \alpha$ – реологические постоянные, $\Gamma(x)$, $\gamma(\alpha n, \lambda\tau)$ – гамма и неполная гамма функции. Аналогично можно записать физические соотношения при постоянной деформации:

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 \left[1 - \int_0^t R(t-s)ds \right].$$

2 Постановка контактной задачи

Рассматривается статическая контактная задача о вдавливании силой F жесткого штампа в упругое однородное вязкоупругое покрытие, находящееся на основании из волокнистого композиционного материала (рисунок 2.1). Необходимо определить изменения давления в зоне контакта при изменяющемся модуле упругости изотропного покрытия для дискретных временных моментов.

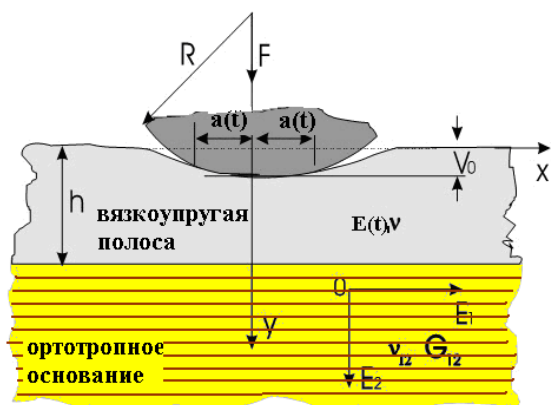


Рисунок 2.1 – Контактная задача для вязкоупругой полосы

Метод решения строится с помощью подхода, основанного на суперпозиции решений для «точечных сил», так называемый, метод функций Грина. Задача состоит в том, чтобы в момент времени t по заданным механическим характеристикам упругого покрытия (E, ν) и композиционного основания $(E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12})$, нормальной линейной силе F , радиусу индентора R , толщине покрытия h определить давление в зоне контакта $p(x, t)$. Для штампа цилиндрической формы уравнение его контура $f(x)$ принимается в виде параболы

$$f(x) = x^2 / (2R).$$

Пусть жесткий цилиндрический штамп вдавливается в вязкоупругую полосу на упругом основании. Тогда граничные условия примут вид

$$\sigma_{yy} = 0; \quad |x| > a(t);$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{для всех } x;$$

$$V = d_0(t) - \frac{x^2}{2R}; \quad |x| < a(t).$$

Задача об учете влияния фактора времени на напряженное состояние вязкоупругой полосы может быть решена на основе принципа Вольтерра [2] для монотонно возрастающих областей контакта. Будем считать, что действующая сила $F(t) = F = const$ и коэффициент Пуассона $\nu_1(t) = \nu_1 = const$.

3 Методика определения напряженно-деформированного состояния в вязкоупругой полосе и упругом основании

С учетом приведенной постановки задачи и с использованием методик, представленных в работах [7], [18], [19] построим алгоритм реализации расчета НДС вязкоупругой полосы. Вид уравнений обобщенного закона Гука зависит не только от упругих свойств анизотропного тела, но и от выбора направления осей координат. Рассмотрим случай, когда исследуемый материал имеет три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии, перпендикулярные осям x, y, z . Тела, обладающие такими свойствами, называются ортотропными.

Определим зависимость между напряжениями и деформациями для ортотропного тела в двумерном случае:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix},$$

или обратную зависимость:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}.$$

В обобщенном законе Гука постоянные S_{ij} можно выразить через технические константы. Для плоской деформации:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1},$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31}}{E_1},$$

$$S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}},$$

где E_1, E_2 – модули Юнга вдоль главных направлений упругости Ox, Oy ; ν_{ij} – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечную деформацию в направлении j при действии напряжений в направлении i ; G_{12} – модуль сдвига, характеризующий изменение угла между направлениями, параллельными главным осям упругости Ox и Oy соответственно.

С помощью преобразования Фурье и используя функции напряжений Эри, а также граничные условия сопряжения полоса – основание [7], [18], [19] находим Функцию Грина для решения контактной задачи

По зависимостям для перемещения на верхней границе ($y = 0$) слоистой системы при действии нормальной сосредоточенной единичной силы строим функцию Грина, а затем, учитывая граничные условия, составляем интегральное уравнение. Нормальное перемещение, согласно [18], [19], при $y = 0$ выражается следующим образом:

$$v_{(1)}^p(x, 0) = -\frac{1+\nu}{\tilde{E}} \int_0^\infty \left[\tilde{B}_1(\alpha) + \frac{\nu-1}{\nu+1} \frac{1}{\alpha} \tilde{C}(\alpha) \right] \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha.$$

Так как перемещения определяются после процедуры интегрирования выражений Коши и, следовательно, определены с точностью до постоянной, то чтобы избавиться от этой неопределенности, воспользуемся приемом из [7], т. е. рассмотрим разность $v(x, 0) - v(a, 0)$.

Задача сводится к решению интегрального уравнения, имеющего следующий вид:

$$\int_{-a}^a \left\{ K\left(\frac{x-x'}{h}\right) - K\left(\frac{a-x'}{h}\right) \right\} p(x') dx' = f(a) - f(x), \quad (3.1)$$

где

$$K(\eta) = -\frac{1+\nu}{\tilde{E}} \int_0^\infty \left[\tilde{B}_1(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \frac{\nu-1}{\nu+1} \tilde{C}(\alpha) \right] \frac{\cos(\alpha \eta)}{\alpha} d\alpha.$$

Решение интегрального уравнения производилось численно, аналогично тому, как это было сделано в работе [7]. При вычислении интеграла (3.1) с бесконечным верхним пределом интегрирования производилась его замена на «усеченный» с конечным пределом $a = 40$, причем верхний предел выбирался так, чтобы остаточной частью можно было пренебречь. Методика вычисления интегралов и оценка погрешности производилась аналогично [7].

Метод решения интегрального уравнения (3.1) базировался на методе граничных элементов, при котором зона контакта разбивается на n интервалов, считая, что давление постоянно на каждом интервале (решение строилось аналогично работе [20]). Получаем систему n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_j, j = 1..n$:

$$\sum_{j=1}^n C_{ij} p_j = \frac{a}{2R} (1 - x_i^2), \quad i = 1..n,$$

где C_{ij} определяются следующим образом:

$$C_{ij} = \int_0^A \left[\tilde{B}_1(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \frac{\nu-1}{\nu+1} \tilde{C}(\alpha) \right] \frac{1}{\alpha} \times \left[\cos\left(\alpha \frac{a}{h} (x_i - x_j)\right) - \cos\left(\alpha \frac{a}{h} (1 - x_j)\right) \right] d\alpha.$$

Неизвестные коэффициенты \tilde{B}_1 и \tilde{C} , входящие в функцию Грина и в интегральное уравнение представлены в виде интегральных операторов, (где символ \sim обозначает интегральный оператор) определяются из решения системы алгебраических уравнений для упругой задачи [7], [18] для полосы, в котором модули упругости заменяем на интегральные операторы.

С учетом граничных условий получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$M \times (A_1 \ B_1 \ C \ D \ A_2 \ B_2)^T = (\tilde{p} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (3.2)$$

где матрица, M имеет следующий вид:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & s_1 & hc_1 & hs_1 & -e_1 & -e_2 \\ s_1 & c_1 & M_{43} & M_{44} & \frac{e_1}{\beta_1} & \frac{e_2}{\beta_2} \\ c_1 & s_1 & M_{53} & M_{54} & e_1 R_1 \tilde{\delta} & e_2 R_2 \tilde{\delta} \\ s_1 & c_1 & M_{63} & M_{64} & e_1 Q_1 \tilde{\delta} \beta_1 & e_2 Q_2 \tilde{\delta} \beta_2 \end{pmatrix},$$

где $M_{43} = \frac{c_1}{\alpha} + hs_1, \quad M_{44} = \frac{s_1}{\alpha} + hc_1,$

$$M_{53} = \frac{2s_1}{\alpha(1+\nu)} + hc_1, \quad M_{54} = \frac{2c_1}{\alpha(1+\nu)} + hs_1,$$

$$M_{63} = \alpha hs_1 - c_1 + \frac{2c_1\nu}{\alpha}, \quad M_{64} = \alpha hc_1 - s_1 + \frac{2s_1\nu}{\alpha},$$

$$c_i = \text{ch}(\alpha h); \quad s_i = \text{sh}(\alpha h); \quad e_i = e^{-\frac{\alpha y}{\beta_i}};$$

$$R_i = S_{12} - \frac{S_{11}}{\beta_i^2}; \quad Q_i = S_{22} - \frac{S_{21}}{\beta_i^2}; \quad i = 1, 2.$$

Тогда вязкоупругое решение можно упростить и в инженерных расчетах заменяем параметр δ на интегральный оператор [8], считая для упрощения расчетов, что коэффициент Пуассона ν – постоянен, $\tilde{\delta} = \frac{1+\nu}{\tilde{E}}$. Здесь коэффициенты $\beta_i = 1/\gamma_i$. Из свойства корней характеристического уравнения имеем

$$\beta_1^2 \beta_2^2 = \frac{S_{11}}{S_{22}}, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2S_{12} + S_{66}}{S_{22}},$$

$\gamma_i, \quad i = 1, 2$ – действительные корни характеристического уравнения:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}},$$

для изотропного материала $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

В правой части системы (3.2) используется интегральное преобразование Фурье функции нагрузки $p(x)$, которая применяется для определения функций Грина при действии сосредоточенных сил (или распределенных нагрузок в пределах одного конечного элемента).

4 Основные результаты

Исследуем влияние характеристик покрытия на распределение контактного давления в слоистой системе «изотропное вязкоупругое покрытие – ортотропное основание» в зависимости от относительного значения модуля упругости покрытия, т. е. отношение $k = E(t)/E_2$ (рисунок 4.1, применяя алгебру вязкоупругих операторов и считая, что модуль упругости покрытия изменяется во времени). В дальнейшем будем использовать при расчетах слабосингулярное ядро Ржаницына – Колтунова $R(t) = Ae^{-\lambda t^{\alpha-1}}$ и резольвенту

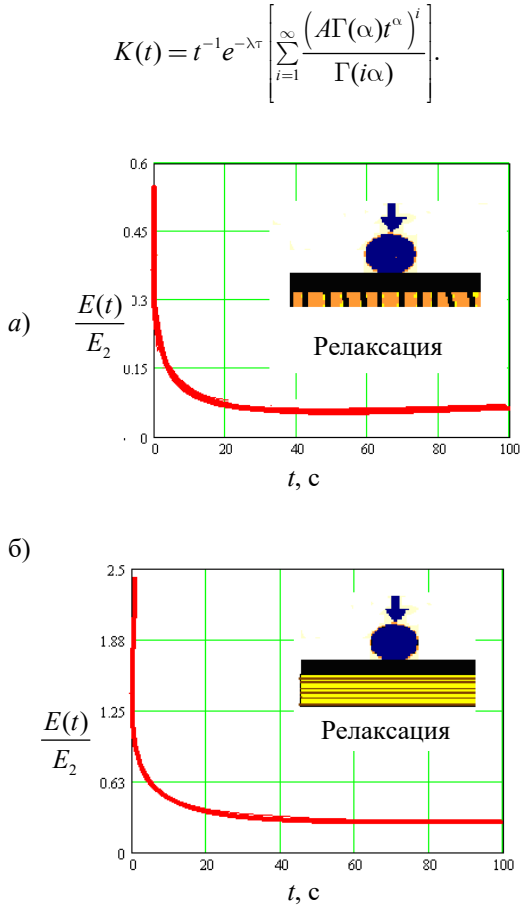


Рисунок 4.1 – Относительное изменение модуля упругости полосы во времени
 а) нормальное расположение волокон,
 б) продольное расположение волокон

Для оценки влияния анизотропии основания расчеты проводились (рисунок 4.1) для нормального (*Norm* – $E_x = 11.2$ GPa, $E_y = 52.8$ GPa, $\nu_{xy} = 0.25$, $G_{xy} = 4.1$ GPa), продольного (*Long* – $E_x = 52.9$ GPa, $E_y = 11.2$ GPa, $\nu_{xy} = 0.25$, $G_{xy} = 5.69$ GPa) и поперечного (*Trans* – $E_x = E_y = 7.53$ GPa, $\nu_{xy} = 0.56$, $G_{xy} = 4.06$ GPa) расположения волокон. Рассматривались случаи плоского напряженного состояния.

Примем, что материалом покрытия является боропластик с модулем упругости $E = 200$ МПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.4$ и с реологическими постоянными $\alpha = 0.0105$, $A = 0.01$, $\lambda = 0.0231$.

Техника вычисления интегральных операторов при решении задач теории вязкоупругости с использованием данного ядра представлена в [7], например, для интегральных операторов \tilde{R} и \tilde{K} , описание которых представлено выше.

Когда в направлении оси Oy модуль упругости меньше в несколько раз модуля упругости покрытия, то характер распределения получаемых эпюр давления значительно отличается от «герцевского» и имеет полиэкстремальный характер (рисунок 4.2). В этом случае точки максимального давления смещаются из центра площадки контакта к границам. Отметим случай,

при котором под штампом цилиндрической формы давление принимает почти постоянно-распределенный вид. Каждому модулю упругости покрытия соответствует свое распределение давления (рисунок 4.2), где показано изменение профилей давления при различных значениях k , $R/a = 5$, $a/h = 2$. При расчетах коэффициента k принималось конечное значение модуля упругости E для определенного времени. Если материал покрытия проявляет вязкоупругие свойства, то происходит релаксация и эпюра давления, естественно, изменяется, например, от двух максимальных значений в точках контакта ближе к краям зоны контакта до эпюр давления параболического типа с максимальным значением в центре контакта.

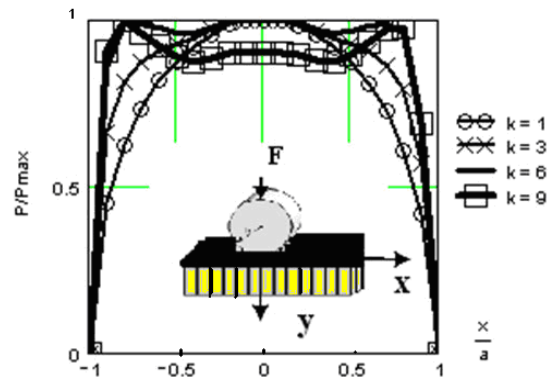


Рисунок 4.2 – Распределение давления при контакте жесткого цилиндра с вязкоупругой полосой (нормальное направление волокон)

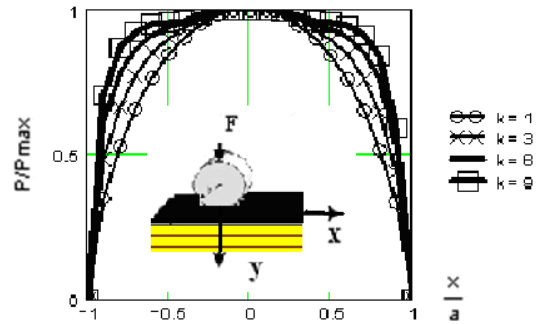


Рисунок 4.3 – Распределение давления при контакте жесткого цилиндра с вязкоупругой полосой (касательное направление волокон)

Исследуется более детально распределение давления при различных способах расположения волокон. Проанализирован случай, при котором возникает именно «негерцевский» характер распределения давлений. Отметим преобладающее влияние на профили давления нормальной схемы армирования (рисунок 4.2), при которой описанный эффект наблюдается особенно ярко. Если же исследуемый в основании композит армирован волокнами в касательном направлении, то эпюра давления существенно изменяется (рисунок 4.3).

Заключение

В статье рассматривается контактная задача о вдавливании жесткого цилиндрического индентора в изотропную вязкоупругую полосу на ортотропном основании. Описана методика определения напряженно-деформированного состояния в вязкоупругой полосе и упругом основании. Предлагается реализация решения исследуемой контактной задачи, её решение сводится к интегральному уравнению. В статье представлена реализация численного решения интегрального уравнения.

Описанная в статье методика расчёта может быть использована при решении задач контактного взаимодействия элементов машин из современных композиционных материалов (зубчатых, фрикционных передач). Также описанную в статье методику можно применить при решении задач качения цилиндрических тел, которые моделируют работу пневматических и массивных шин, а также в других отраслях техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можаровский, В.В. Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 74–82.
2. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1974. – 744 с.
3. Ильюшин, А.А. Упругопластичные деформации / А.А. Ильюшин. – М.: Гостех-издат., 1948. – 376 с.
4. Победря, Б.Е. Математическая теория нелинейной вязкоупругости / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 95 с.
5. Кристенсен, Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1974. – 58 с.
6. Старовойтов, Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости: учебник для студентов строительных специальностей вузов / Э.И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 195 с.
7. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов: плоские контактные задачи / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – М.: Наука, 1988. – 271 с.
8. Колтунов, М.А. Ползучесть и релаксация / М.А. Колтунов. – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
9. Можаровский, В.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния массивных шин из армированных материалов / В.В. Можаровский // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2008. – № 3. – С. 14–21.
10. *Определение сопротивления качению автомобильных шин в зависимости от условий*

эксплуатации / В.В. Можаровский, С.В. Шилько, С.Б. Анфиногенов, А.В. Хотько // *Трение и износ*. – 2007 – № 2. – С. 151–157.

11. Можаровский, В.В. Исследование напряженного состояния волокнистого композиционного материала с однородным покрытием при контакте с цилиндрическим индентором / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачева // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2000. – № 2. – С. 5–10.

12. Pleskachevsky, Yu.M. Mathematical models of quasi-static interaction between fibrous composite bodies / Yu. M. Pleskachevsky, V.V. Mozharovsky, Yu.F. Rouba // *Computational methods in contact mechanics III: Proc. Int. Conf., Madrid, July 3–5, 1997*. – Madrid, 1997. – P. 363–372.

13. Можаровский, В.В. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В.В. Можаровский, С.В. Шилько // *Доклады Белорусского конгресса по механике*. – Мн., 2007. – С. 135–142.

14. *Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах* / В.В. Можаровский [и др.] // *Трение и износ*. – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379–385.

15. Argatov, I.I. Small-scale indentation of an elastic coated half-space: influence of poisson's ratios on the substrate effect / I.I. Argatov, F.J. Sabina // *International Journal of Engineering Science*. – 2014. – № 81. – P. 33–40.

16. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

17. Малмейстер, А.К. Сопротивление жестких полимерных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1967. – 394 с.

18. Рогачева, Н.А. Моделирование контактного взаимодействия жесткого индентора со слоистой системой с учетом трения / Н.А. Рогачева // *Трение и износ*. – 2000. – Т. 21, № 4. – С. 345–348.

19. Можаровский, В.В. Исследование напряженного состояния волокнистого композиционного материала с однородным покрытием при контакте с цилиндрическим индентором / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачева // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2000. – Т. 5, № 2. – С. 5–10.

20. Conway, H.D. Normal and shearing contact stresses in indented strips and slabs / H.D. Conway, S.M. Vogel, K.A. Farnham, S. So // *International Journal of Engineering Science*. – 1966. – Vol. 4, № 1.4. – P. 343–359.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ – ГКН Арм., Грант Т17АРМ-034.

Поступила в редакцию 10.05.18.

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ПАРОЙ НЕСОПРЯЖЕННЫХ ПОДГРУПП ПРИМАРНЫХ ИНДЕКСОВ

В.С. Монахов, Д.А. Ходанович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE SOLVABILITY OF A FINITE GROUP WITH A PAIR OF NON-CONJUGATE SUBGROUPS OF PRIMARY INDICES

V.S. Monakhov, D.A. Khadanovich

F. Scorina Gomel State University

Доказана разрешимость конечной группы G с двумя несопряженными максимальными подгруппами A и B , которые удовлетворяют следующим требованиям: подгруппы A и B имеют примарные индексы в G ; все собственные подгруппы в A и в B сверхразрешимы.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, сверхразрешимая подгруппа, несопряженные подгруппы, примарный индекс.

The solvability of a finite group G with two non-conjugate maximal subgroups A and B has been proved. It satisfies the following requirements: subgroups A and B have primary indices in G ; all proper subgroups of A and B are supersoluble.

Keywords: finite group, solvable group, maximal subgroup, supersoluble subgroup, non-conjugate subgroups, primary index.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые терминология и обозначения стандартны и соответствуют [1]–[2]. Натуральное число, являющееся степенью некоторого простого числа, называется примарным.

Разрешимость группы с двумя несопряженными сверхразрешимыми максимальными подгруппами примарных индексов установлена в [3, теорема 4.1]. В разрешимой группе индекс каждой максимальной подгруппы примарен. Структура разрешимой группы с двумя несопряженными сверхразрешимыми максимальными подгруппами изучили Л.С. Казарин и Ю.А. Корзюков [4]. Отсюда, как отмечается в [4], вытекает описание некоторых классов разрешимых групп [5]–[10]. Другие приложения статьи [4] имеются в работах А.В. Бузланова [11]–[13].

В работе [14, теорема 3.5] получена разрешимость группы со сверхразрешимой подгруппой нечетного примарного индекса и установлено [14, теорема 4.5] достаточное условие разрешимости группы G , при условии, что все собственные подгруппы в некоторой максимальной подгруппе A сверхразрешимы и индекс подгруппы A в G примарен.

В настоящей статье без использования классификации конечных простых групп доказано достаточное условие разрешимости конечной группы с двумя несопряженными максимальными подгруппами примарных индексов, все собственные подгруппы которых сверхразрешимы.

Полученный результат охватывает [3, теорема 4.1]. Доказательство достаточного условия

существенно отличается от доказательства [3, теорема 4.1], оно базируется на результатах [14, теоремы 3.5 и 4.5].

1 Вспомогательные результаты

Пусть p – простое число. Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой. Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс которой совпадает с порядком силовской p -подгруппы, называется p -нильпотентной. Через $Z(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр и подгруппа Фраттини группы G соответственно, $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Если $|\pi(G)|=1$, то группа G называется примарной, при $|\pi(G)|=2$ – бипримарной. Если $\pi \subseteq \pi(G)$, то $\pi' = \pi(G) \setminus \pi$.

Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так: $G = A \rtimes B$.

Лемма 1.1 [15], [16]. Пусть S – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $S = P \rtimes Q$, где P – нормальная силовская p -подгруппа, Q – ненормальная силовская q -подгруппа, p и q – различные простые числа;

(2) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(S)$;

(3) $|P/\Phi(P)| = p^m$, где m – показатель числа p по модулю q ;

(4) если P абелева, то она элементарная абелева порядка p^m ;

(5) если t – нечетное число, то $\Phi(P) = 1$ и P – элементарная абелева порядка p^m ;

(6) если t – четное число, то $|P| = p^a$ и $m \leq a \leq \frac{3m}{2}$.

Лемма 1.2. Пусть $S = P \rtimes R$ – 2-замкнутая $\{2, r\}$ -группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если $r = 3$, то P – элементарная абелева порядка 4 или группа кватернионов порядка 8;

(2) если $r = 7$, то P – элементарная абелева порядка 8.

Доказательство. 1. Показатель 2 по модулю 3 равен 2. Из леммы 1.1 (5) следует, что $|P| = p^a$ и $a \in \{2, 3\}$. Поэтому P – элементарная абелева группа порядка 4 либо неабелева группа порядка 8. Хорошо известно, что неабелева группа порядка 8 является диэдральной группой или группой кватернионов [2, I.14.10]. По лемме 1.1 (2) элемент y , $Q = \langle y \rangle$, осуществляет сопряжением автоморфизм порядка 3 на группе P . Согласно [17, лемма 1] диэдральная группа порядка 8 не обладает автоморфизмом порядка 3, поэтому она исключается.

2. Показатель 2 по модулю 7 равен 3. Из леммы 1.1 (5) следует, что P – элементарная абелева группа порядка 8. \square

Лемма 1.3. Если все собственные подгруппы в группе G сверхразрешимы, то либо G 2-нильпотентна, либо является 2-замкнутой группой Шмидта.

Доказательство. Сверхразрешимая группа p -нильпотентна для наименьшего $p \in \pi(G)$ [2, VI.9.1]. В частности, каждая сверхразрешимая группа 2-нильпотентна. Поэтому в группе G каждая собственная подгруппа 2-нильпотентна. Применяя теорему Ито [2, IV.5.4] для $p = 2$ получаем, что либо G 2-нильпотентна, либо G является 2-замкнутой группой Шмидта. \square

Лемма 1.4 [18, следствие 3.5.1]. Пусть группа $G = AB$, где A – группа Шмидта, B – примарная подгруппа. Если порядок ненормальной силовской подгруппы из A не равен 3 и 7, то группа G разрешима.

Лемма 1.5 [14, теорема 3.5]. Пусть H – подгруппа группы G и $|G : H| = p^a$, где p – нечетное простое число. Если подгруппа H сверхразрешима, то группа G разрешима.

Лемма 1.6 [14, теорема 4.5]. Пусть H – подгруппа группы G и $|G : H| = p^a$, где p – нечетное простое число. Если все собственные подгруппы в H сверхразрешимы и H не является 2-замкнутой группой Шмидта, то группа G разрешима.

Лемма 1.7 [19, теорема 3], [20, теорема 2]. Если группа $G = AB$, где A – 2-группа с нормальными

в A собственными подгруппами из A , а B – группа нечетного порядка, то G разрешима.

Лемма 1.8 [21, теорема A]. Предположим, что в группе G существует π -холлова подгруппа. Если $2 \notin \pi$, то любые две π -холловы подгруппы сопряжены.

2 Достаточное условие разрешимости группы с двумя несопряженными подгруппами примарных индексов

Теорема. Пусть A и B – несопряженные максимальные подгруппы в группе G . Предположим, что выполняются следующие требования:

(1) A и B имеют примарные индексы в G ;

(2) все собственные подгруппы в A и в B сверхразрешимы.

Тогда группа G разрешима.

Доказательство. Предположим, что группа неразрешима и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть

$$|G : A| = p^a, |G : B| = q^b, p \geq q,$$

тогда $G = AP = BQ$, где P и Q – силовские p - и q -подгруппы группы G .

Предположим, что $q > 2$. Если подгруппа B сверхразрешима, то G разрешима по лемме 1.5, противоречие. Поэтому B – минимальная несверхразрешимая группа и $B = B_2 \rtimes R$ – 2-замкнутая группа Шмидта четного порядка по лемме 1.6. Теперь B_2 – силовская 2-подгруппа группы G . Аналогично, $A = A_2 \rtimes T$ – 2-замкнутая группа Шмидта четного порядка и A_2 – силовская 2-подгруппа группы G . Поскольку группа G не 2-замкнута, подгруппы A , B максимальны, то

$$A = N_G(A_2), B = N_G(B_2), A = B^g, g \in G,$$

противоречие. Следовательно, $q = 2$.

Предположим, что $p > q = 2$. Если подгруппа A сверхразрешима, то G разрешима по лемме 1.5, противоречие. Поэтому A – минимальная несверхразрешимая группа и $A = A_2 \rtimes T$ – 2-замкнутая группа Шмидта четного порядка по лемме 1.6. Теперь $A = N_G(A_2)$ и A_2 – силовская 2-подгруппа группы G . Согласно лемме 1.4 $|T| = 3$ или 7. Из леммы 1.2 следует, что $A_2 \in \{E_4, E_8, Q\}$, где Q – группа кватернионов порядка 8, а E_n – элементарная абелева группа порядка n . Поэтому все подгруппы из A_2 нормальны в A_2 . По лемме 1.7 группа $G = BQ = B_2 A_2$ разрешима, противоречие. Поэтому предположение неверно и $p = q = 2$.

Теперь P и Q – силовские 2-подгруппы группы G . Если A – 2-замкнутая группа Шмидта четного порядка, то из равенства $G = AP$ следует, что группа G бипримарна и по теореме

Бернсайда разрешима, противоречие. Поэтому A – 2-нильпотентная группа по лемме 1.3. Аналогично, B – 2-нильпотентная группа. Пусть $A = A_2 \rtimes A_2$, $B = B_2 \rtimes B_2$. Если A_2 нормальна в G , то G/A_2 будет 2-группой и G разрешимой, противоречие. Поэтому $N_G(A_2) = A$. Аналогично, $N_G(B_2) = B$. Так как A_2 и B_2 – 2'-холловы подгруппы группы G , то по лемме 1.8 они сопряжены. Но тогда и их нормализаторы сопряжены, т. е. подгруппы A и B сопряжены. Противоречие с условием. \square

Пример 2.1. В простой группе $PSL(2,7)$ есть две максимальные подгруппы примарных индексов: симметрическая группа S_4 степени 4 и подгруппа порядка 21. В S_4 имеется знакопеременная группа степени 4, которая не сверхразрешима. Поэтому в теореме требование сверхразрешимости собственных подгрупп даже в одной из подгрупп A или B отбросить нельзя.

Пример 2.2. В простой группе $PSL(2,31)$ есть сверхразрешимые максимальные подгруппы порядков 2^5 и $31 \cdot 5 \cdot 3$. Их индексы равны $31 \cdot 5 \cdot 3$ и 2^5 соответственно. Поэтому в теореме требование примарности индексов даже одной из подгрупп A или B отбросить нельзя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 796 p.
3. Corradi, K. Miscellaneous results on supersolvable groups / K. Corradi, P.Z. Hermann, L. Hetehelyi, E. Nortvath // London Mathematical Society. Lecture Note Series 387. Groups St Andrews 2009 in Bath: Vol. 1. – P. 198–212.
4. Казарин, Л.С. Конечные разрешимые группы со сверхразрешимыми максимальными подгруппами / Л.С. Казарин, Ю.А. Корзюков // Изв. вузов. Матем. – 1980. – № 5. – С. 22–27.
5. Нагребецкий, В.Т. Инвариантные накрытия подгрупп / В.Т. Нагребецкий // Матем. зап. Уральск. ун-та и Уральск. матем. о-ва. – 1966. – Т. 5, тетр. 3. – С. 91–100.
6. Нагребецкий, В.Т. О конечных минимальных несверхразрешимых группах / В.Т. Нагребецкий // В сб.: Конечные группы. Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 104–108.
7. Nyhoff, L.R. The influence on a finite group of the cofactors and subcofactors of its subgroups /

L.R. Nyhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 154. – P. 459–492.

8. Шидов, Л.И. О максимальных подгруппах конечных групп / Л.И. Шидов // Сиб. матем. журн. – 1971. – Т. XII, № 3. – С. 682–683.

9. Маланьина, Г.А. Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы / Г.А. Маланьина, В.И. Хлебутина, Г.С. Шевцов // Матем. зам. – 1972. – Т. 12, №2. – С. 157–162.

10. Маланьина, Г.А. Одно обобщение конечных минимальных несверхразрешимых групп / Г.А. Маланьина, Г.С. Шевцов // Изв. вузов. Матем. – 1973. – № 7. – С. 59–62.

11. Бузланов, А.В. Конечные разрешимые группы с заданными максимальными подгруппами / А.В. Бузланов // Вопросы алгебры. Минск: Университетское. – 1993. – Вып. 6. – С. 35–45.

12. Бузланов, А.В. Конечные разрешимые группы с нормальной максимальной метанильпотентной подгруппой / А.В. Бузланов // Вопросы алгебры. Минск: Университетское. – 1995. – Вып. 8. – С. 22–30.

13. Бузланов, А.В. Конечные разрешимые группы с несопряженными метанильпотентными максимальными подгруппами / А.В. Бузланов // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 52–57.

14. Монахов, В.С. Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп / В.С. Монахов // В сб.: Конечные группы. Минск: Наука и техника. – 1978. – С. 50–63.

15. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

16. Гольфанд, Ю.А. О группах, все подгруппы которых специальные / Ю.А. Гольфанд // ДАН СССР. – 1948. – Т. 60, № 8. – С. 1313–1315.

17. Мазуров, В.Д. О конечных группах с метациклическими силовскими 2-подгруппами / В.Д. Мазуров // Сиб. матем. журн. – 1967. – Т. 8, № 5. – С. 966–982.

18. Княгина, В.Н. О произведении B -группы и примарной группы / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 52–57.

19. Монахов, В.С. К двум теоремам Ведерникова / В.С. Монахов // ДАН БССР. – 1971. – Т. 15, № 10. – С. 877–880.

20. Ведерников, В.А. О конечных факторизуемых группах / В.А. Ведерников // Матем. зам. – 1968. – Т. 3, № 2. – С. 201–210.

21. Gross, F. Conjugacy of odd order Hall Subgroups / F. Gross // Bull. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 19, № 4. – P. 311–319.

Поступила в редакцию 15.03.18.

УДК 512.542

НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ НЕПРОСТОТЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Э.М. Пальчик, С.Ю. Башун

Полоцкий государственный университет, Новополоцк

SOME CRITERIA FOR THE NONSIMPLICITY OF FINITE GROUPS

E.M. Palchik, S.Yu. Bashun

Polotsk State University, Novopolotsk

Пусть $|G| = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$, где p_i – простые числа, $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$. Пусть $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$, $s \in \pi(G)$ и пусть \mathfrak{T} – множество некоторых силовских подгрупп группы G , взятых по одной для каждого $p_i \in \pi(G) \setminus \{s\}$, $i = \overline{1, n-1}$. Доказывается, что если каждая подгруппа из множества \mathfrak{T} нормализует неединичную s -подгруппу из G , $s > 3$, то G имеет разрешимую нормальную подгруппу R и s делит $|R|$.

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, s -разрешимая группа.

Let $|G| = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$, where p_i are prime numbers, $p_i \neq p_j$ for $i \neq j$. Let $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$, $s \in \pi(G)$ and let \mathfrak{T} is the set of some Sylow subgroups of the group G , that are taken one at a time for every $p_i \in \pi(G) \setminus \{s\}$, $i = \overline{1, n-1}$. It is proved that if every subgroup from the set \mathfrak{T} normalises some non-identity s -subgroup from G , $s > 3$, then G has solvable normal subgroup R and s divide $|R|$.

Keywords: finite group, Sylow subgroup, s -solvable group.

Введение

В настоящей работе используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в [1]–[3]. Некоторые обозначения приводятся для удобства чтения ниже. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Символом π' будем обозначать множество тех простых чисел, которые не принадлежат π . Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначим множество его простых делителей, а для конечной группы G через $\pi(G)$ – множество $\pi(|G|)$. Группа G , для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется π -группой. Под π -разрешимой группой будем понимать конечную группу, каждый индекс композиционного ряда которой либо не делится ни на одно из простых чисел из π , либо совпадает с некоторым числом из π .

Определение 0.1. Пусть G – конечная группа и $\pi \subset \pi(G)$. Без ограничения общности будем считать, что $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_k\}$ и $\pi = \{p_1, \dots, p_i\}$ для $i < k$. Для каждого $i+1 \leq j \leq k$ выберем по одной силовской p_j -подгруппе G_{p_j} группы G . Кроме того, пусть в группе G существует некоторая π -холлова подгруппа G_π . Тогда $\mathfrak{T} := \{G_{p_{i+1}}, \dots, G_{p_k}\}$, $\mathfrak{S} := \{G_\pi\} \cup \mathfrak{T}$ и \mathfrak{T} называется π' -частью множества \mathfrak{S} .

Определение 0.2. Пусть G , π и \mathfrak{S} как в определении 0.1.

Множество \mathfrak{S} назовем s' -специальной силовской системой группы G (кратко: \mathfrak{S} есть s' СС-система), если $\pi = \{s\}$ и каждая подгруппа из s' -части \mathfrak{T} множества \mathfrak{S} нормализует некоторую неединичную s -подгруппу группы G (не обязательно лежащую в G_s).

Целью этой работы является доказательство следующих двух теорем.

Теорема 0.1. Пусть G – конечная неразрешимая группа с s' СС-системой, $s \geq 3$. Пусть $L^* := L(G)$ – слой группы G , $1 \neq S$ – наибольшая s -подгруппа в G , которую нормализует некоторая силовская 2-подгруппа группы G . Тогда:

(1) если все компоненты группы G являются простыми группами лиева типа с полями определения одной и той же характеристики $r \neq s$ и порядки их делятся на s , то либо $O_s(G) \neq 1$, либо $[S, L^*] = 1$;

(2) если $s = 3$, все компоненты группы G являются простыми спорадическими группами или изоморфны группам из множества A^* (см. обозначения ниже) и их порядки делятся на 3, то либо $O_3(G) \neq 1$, либо $[S, L^*] = 1$;

(3) если $s > 3$, все компоненты группы G являются простыми спорадическими группами

или изоморфны группам из множества $\{A_n \mid n \geq s\}$ и их порядки делятся на s , то $O_s(G) \neq 1$, либо $[S, L^*] = 1$;

(4) если все компоненты группы G являются простыми спорадическими s' -группами или изоморфны s' -группам из множества $\{A_n \mid n \geq 5\}$, то $O_s(G) \neq 1$ или $[S, L^*] = 1$;

(5) если все компоненты группы G являются простыми s' -группами, то $[S', L^*] = 1$.

Теорема 0.2. Пусть G – конечная группа с s' СС-системой, $s > 3$. Если $s = 3$, то пусть группа G $cf(B)$ -свободна, где $B \in A_n^0$ (см. обозначения ниже). Тогда G имеет разрешимую нормальную подгруппу $R(G)$ и s делит $|R(G)|$.

1 Определения, обозначения и предварительные результаты

Ниже для удобства чтения приводим некоторые, в том числе и стандартные, определения и обозначения, используемые при доказательстве теорем.

Пусть p – некоторое простое число, а π – некоторое множество простых чисел. Группа называется π -замкнутой, если у неё есть нормальная π -холловая подгруппа, (в частности, p -замкнутая группа – группа с нормальной силовой p -подгруппой) и называется r -нильпотентной, если у неё p -дополнение является нормальной подгруппой. Запись $G \in E_\pi$ для конечной группы G означает, что группа G имеет холлову π -подгруппу. Под компонентой L группы G будем понимать субнормальную квазипростую подгруппу группы G такую, что $L' = L$ и $L/Z(L)$ – простая группа. Через $F(G)$ ($F^*(G)$) будет обозначаться подгруппа (обобщенная подгруппа) Фиттинга группы G , через $L(G)$ – слой группы G – центральное произведение всех компонент группы G ($F^*(G) = F(G)L(G)$). Пусть G – группа лиева типа, тогда m -делитель группы G – простой делитель числа $|G|$, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G . Φ_G (Γ_G) – группа полевых (графовых) автоморфизмов группы L лиева типа.

Положим

$$\mathfrak{M} := \{L_2(q), Sz(q), U_3(q), {}^2G_2(q) \mid q > 3\}$$

и

$$\mathfrak{N} := \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Через $e(q, t)$ обозначим наименьшее натуральное число e , такое, что $q^e \equiv 1 \pmod{t}$, где t – нечетное простое число, q – целое число и $(q, t) = 1$ (t – примитивный простой делитель числа $q^e - 1$).

$e(q, 2) = 1$, если 4 делит $q - 1$, и $e(q, 2) = 2$, если 4 не делит $q - 1$. n_π – наибольший делитель m числа n такой, что $\pi(m) \subseteq \pi$. $cf(A)$ -свободная группа – это конечная группа, у которой нет композиционных факторов, изоморфных группе A . Также будем иметь ввиду, что A_n^0 – множество знакопеременных групп, у которых число n удовлетворяет условиям: $n > 26$, $n = 4k + 3$, 3 делит n . Также $A^* := \{A_n \mid n \geq 5\} \setminus A^0$.

Лемма 1.1. Пусть p – простое число и m, n – натуральные числа, $n > 2$. Если t – простой примитивный делитель числа $p^n - 1$ и t делит $p^m - 1$, то n делит m .

Доказательство. Существует натуральное число k такое, что $kn \leq m$, но $(k+1)n > m$. Тогда $[m/kn] = 1$, t делит число p^{kn} ($p^{m-kn} - 1$). Из $(t, p) = 1$ следует противоречие с определением числа t , если $m \neq kn$. \square

Лемма 1.2. (1) Пусть t есть m -делитель группы $G \in Chev(q)$ и G – простая группа, $q = r^f$. Тогда нетривиальная t -подгруппа группы G не может нормализовать нетривиальную r -подгруппу группы G .

(2) Пусть группа G имеет s' СС-систему для $s \geq 3$, $s \in \pi(G)$. Тогда G – не простая группа, если $G \notin A^0$.

Доказательство. (1). Предположим, что t -подгруппа $T \neq 1$ группы G нормализует r -подгруппу $R \neq 1$ группы G . По теореме Бореля – Титса [4, теорема 3.1.3] имеем $T \subseteq N_G(R) \subseteq P$, $R \subseteq O_r(P)$, где P – параболическая подгруппа группы G . Но тогда t делит $|P|$, что противоречит определению m -делителя группы G . Этим (1) доказано.

(2). Докажем утверждение методом от противного.

Предположим, что G – простая группа лиева типа над полем $GF(q)$, $q = r^f$. Из [2, теорема 4.254] следует, что $r = s$. По условию леммы подгруппы G_i из \mathfrak{T} (определение 0.1) нормализуют неединичные s -подгруппы. Тогда по (1) группа G не имеет m -делителей. По [5, лемма 3] группа G изоморфна группе из \mathfrak{N} . Но $r = s \geq 3$. Противоречие.

Предположим, что G – знакопеременная группа. По [6, теорема 2] $G_2 \notin \mathfrak{T}$, либо $n \equiv 3 \pmod{4}$. Пусть $n = 4k + 3$. Если 3 не делит n , то $G_3 \cong X_3$, где $X \cong A_{4k+2}$. Кроме того $G_2 \cong X_2$. Но в подгруппе X группы G по теореме 2 в [6] G_2 не нормализует 3-подгруппу. Поэтому 3 делит n . У групп A_n с $n \leq 26$ нет 3'СС-систем (проверяется непосредственно). Например, у группы $G = A_5$,

нет холловых $\{3, 7\}$ -подгрупп, 7 не делит $|GL(5, 3)|$, 7^2 не делит $|C_G(y)|$, если $y^3 = 1$ (это следует из [4, лемма 5.2.2(d)]).

Предположим, что G – простая спорадическая группа. По [6, теорема 3] $G_2 \notin \mathfrak{T}$, либо $G \in \{M_{11}, Ly\}$. Но в группе $G = M_{11}$ имеем $G_{11} \notin \mathfrak{T}$ [7, с. 183], а в группе $G = Ly$ имеем $G_{67} \notin \mathfrak{T}$. В самом деле, по [7, с. 191, 192] G_3 содержит единственную элементарную абелеву подгруппу E порядка 3^5 , $|N_G(E)| = 3^7 \cdot 2^5$. Если G_{67} нормализует 3-подгруппу $S_0 \neq 1$, то G_{67} нормализует и элементарную абелеву подгруппу $S \neq E$. Пусть $G_{67} \triangleleft S = A$. $C_A(G_{67}) = G_{67}$ [7, с. 192]. Поэтому $G_{67} \subseteq GL_n(3)$, $n \leq 4$. Но 67 не делит $|GL_n(3)|$ с $n \leq 7$. Противоречие. \square

Лемма 1.3. Пусть группа $L \cong {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2m+1} > 3$.

(1) Пусть t – m -делитель группы L . Тогда t можно выбрать из множества $\pi(q^2 - q + 1)$ со свойствами $t > 3$ и $e(q, t) = 6$.

(2) Пусть группа G имеет вид $\langle y \rangle \triangleleft L$, где $q = 3^f$, $q_0 = 3^{f_1}$, $f = 3f_1$, $y \in \Phi_L$, $y^3 = 1$. Тогда G не имеет 3'СС-систем.

Доказательство. (1) Из доказательства леммы 1.3 в [5] следует, что существует m -делитель t группы L из множества $\pi(q^2 - q + 1)$. По [8, теорема 4.2] получаем t не делит $q - 1$. Если $e(q, t) \neq 6$, то по лемме 1.1 имеем $e(q, t) \in \{2, 3\}$. Если $e(q, t) = 3$, то t делит $q^3 - 1$ и t делит $q^3 + 1$. Следовательно, $t = 2$. Если $e(q, t) = 2$, то t делит $q^2 - 1$, t делит $q^2 - q + 1$, t делит $-q + 2$. Тогда t делит $(q + 1 - q + 2) = 3$. Во всех случаях t не больше 3. Этим случай (1) доказан.

(2) Если G имеет 3'СС-систему, то по лемме 1.2 (1) получаем, что группа $L_t = G_t$ нормализует подгруппу группы G порядка 3 вне L . Не нарушая общности, можно считать, что L_t нормализует $\langle y \rangle$. Тогда $[y, L_t] = 1$, $L_t \subseteq C_G(y) =: C$. Пусть $C^* := C \cap L$, $C^0 := O^3(C^*)$. Из леммы Фраттини [1, теорема I.7.8] и леммы 1.2 (1) следует, что $L_t \subset C^0$. По [4, предложение 4.9.1 (a)] $C^0 \cong {}^2G_2(3^{f_1})$. Поскольку t есть m -делитель и группы C^0 , t делит $q_0^3 + 1$, имеем, что t делит $q_0^6 - 1$, а это противоречит (1) ввиду $e(q, t) = 6$ и $q_0^6 < q^6$. Этим случай (2) доказан. \square

Лемма 1.4 [9, лемма 11.1]. Пусть H – некоторая подгруппа конечной группы G . Среди подгрупп, порождающих вместе с H всю группу G ,

выберем наименьшую по включению подгруппу L . Тогда $H \cap L \subseteq \Phi(L)$.

Лемма 1.5. Пусть G , \mathfrak{S} и \mathfrak{T} из определений 0.1, 0.2. Если каждая подгруппа из \mathfrak{T} нормализует некоторую неединичную s -подгруппу из G , то существует фиксированная силовская подгруппа G_s^* и набор \mathfrak{T}^* такие, что подгруппы из \mathfrak{T}^* нормализуют нетривиальные s -подгруппы из G_s^* .

Доказательство. Пусть $G_t \in \mathfrak{T}$ и существует $\{s, t\}$ -подгруппа $G_t \triangleleft T$, где s -подгруппа $T \neq 1$. Если $T \not\subseteq G_s$, то по теореме Силова $T \subseteq G_s^g$ для некоторого элемента $g \in G$. Тогда $gTg^{-1} \subseteq G_s$ и группа gG_tg^{-1} нормализует s -подгруппу gTg^{-1} , лежащую в G_s . Формируем множество \mathfrak{T}^* , состоящее из групп gG_tg^{-1} для подходящих элементов $g \in G$. \square

Следующая лемма вытекает из [9, следствие 4.1.4].

Лемма 1.6. Пусть G – конечная группа, $1 \neq M \triangleleft G$, $M \subseteq \Phi(G)$. Если G/M есть p -замкнутая или p -нильпотентная группа, то и G соответственно есть p -замкнутая или p -нильпотентная группа.

Лемма 1.7. Пусть группа G имеет вид $\langle z \rangle \triangleleft L$, где L – простая группа лиева типа с полем определения $GF(q)$, $q = r^f$, $z^s = 1$, где s – простые числа, $s \neq r$, $s \geq 3$. Если z есть диагональный, или полевой, или графо-полевой автоморфизм порядка 3 группы L , $C := C_G(z)$, $C^* := C \cap L$, то $G_r = L_r \not\subseteq C$.

Доказательство. Если $z \in \text{Outdiag}(L)$, то интерпретируем L как $O^r(C_{\bar{X}}(\sigma))$ для эндоморфизма Стейнберга σ подходящей полупростой алгебраической группы \bar{X} над алгебраическим замыканием \bar{F}_r поля F_r из r элементов. Из теоремы 2.5.1(b) и леммы 2.5.6 в [4] получаем, что $C_{\langle z \rangle}(C_r) = 1$.

Если $z \in \Phi_L$ или z – графо-полевой автоморфизм группы L и $L \cong {}^d\Sigma(q)$, то по [4, предложение 4.9.1 (a)] $C^0 = O^r(C^*) \cong {}^d\Sigma(q^{1/s})$ [4, определение 2.2.4]. Но тогда $|L_r| > |C_r^*| = |C_r|$. \square

Лемма 1.8 [10, лемма 6]. Пусть G – одна из групп:

$$L_n(q), \quad n \geq 3;$$

$$PSp_{2n}(q), \quad n \geq 3;$$

$$P\Omega_{2n+1}(q), \quad n \geq 2;$$

$$P\Omega_{2n}^\pm(q), \quad n \geq 4;$$

$$U_n(q), \quad n \geq 3, \text{ при этом } G \text{ не из } \mathfrak{M} \text{ и } \mathfrak{N}.$$

Положим $b(G) := q^n - 1$ при $G = L_n(q)$,
 $b(G) := q^{2n} - 1$ при $G \in \{PSp_{2n}(q), P\Omega_{2n+1}^+(q),$
 $P\Omega_{2n}^-(q), U_n(q)$ с нечетным n , $b(G) := q^{2(n-1)} - 1$
 при $G \in \{U_n(q)$ с четным n ; $P\Omega_{2n}^+(q)\}$. Тогда

(1) каждый примитивный простой делитель t числа $b(G)$ является m -делителем группы G ;

(2) каждый m -делитель t группы G является примитивным делителем числа $b(G)$.

Лемма 1.9. Пусть $G = \langle y \rangle \ltimes L$, где L – простая группа лиева типа с полем определения $GF(q)$ характеристики $s \geq 3$, $q = s^f$, $f = f_1 \cdot s$, $y \in \Phi_L$, $y^s = 1$, или y – графо-полевой автоморфизм порядка $s = 3$ группы L . Пусть t есть m -делитель группы L , $C = C_G(y)$, $C^* = C \cap L$, $C^0 = O^s(C^*)$. Тогда $L_t \not\subseteq C$. В частности, G не имеет s' СС-систем.

Доказательство. По [4, теорема 7.1.4] $F^*(C^*) = F^*(C^0)$ – простая группа и $C_G(C^0) = \langle y \rangle = F(C)$. По [4, предложение 4.9.1 (а)]

$$\text{если } L = {}^d\Sigma(q), \text{ то } C^0 \cong {}^d\Sigma(q_0), q_0 = s^{f_1}, \quad (1.1)$$

где символ ${}^d\Sigma(q)$ приведен в [4, определение 2.2.4].

Если t есть m -делитель в G , то по [4, теорема 3.1.3] он является и m -делителем в C^0 . Предположим, что $L_t \subseteq C$. По лемме 1.2 (1) подгруппа L_t не может нормализовать нетривиальных s -подгрупп в L . Поэтому $L_t \ltimes \langle y \rangle = L_t \times \langle y \rangle$ и $L_t \subset C$, $L_t \subset C^*$. Так как $L_s \subset C^0 \triangleleft C^*$, то из леммы 1.4, леммы Фраттини [1, лемма I.7.8] и леммы 1.6 и 1.2(1) следует, что $L_t \subset C^0$.

Рассмотрим все возможности для L и C^0 согласно (1.1).

1. $L \cong L_n(q)$, $C^0 \cong L_n(q_0)$. Если $n > 2$, то по лемме 1.8 имеем $e(q, t) = n = e(q_0, t)$. Противоречие. Если $n = 2$, то рассуждения аналогичны.

2. $L \cong U_n(q)$, $C^0 \cong U_n(q_0)$, $n > 2$. По лемме 1.8 имеем $e(q, t) = 2n = e(q_0, t)$ или $e(q, t) = 2(n-1) = e(q_0, t)$. Противоречие.

3–6. L изоморфна одной из групп: $PSp_{2n}(q)$ при $n > 2$, $P\Omega_{2n+1}(q)$ при $n > 1$, $P\Omega_{2n}^+(q)$ при $n > 3$, $P\Omega_{2n}^-(q)$ при $n > 3$. Соответственно C^0 изоморфна одной из групп: $PSp_{2n}(q_0)$, $P\Omega_{2n+1}(q_0)$, $P\Omega_{2n}^+(q_0)$, $P\Omega_{2n}^-(q_0)$. Эти случаи исключаются аналогично случаям 1 и 2 с использованием леммы 1.8.

7. $L = C_2(q)$, $C^0 \cong G_2(q_0)$. Из строения параболических подгрупп группы L [8, табл. 4.1, с. 127] и определения m -делителя t группы следует, что

$$t \text{ не делит } q^2 - 1. \quad (1.2)$$

Поэтому t делит

$$(q^6 - 1) = (q^2 - 1)(q^4 + q^2 + 1) = \\ = (q^2 - 1)(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1),$$

где $|L|_s = (q^6 - 1)(q^2 - 1)$. Отсюда следует, что $e(q, t) = 6$ или 3. Но тогда t не делит $q_0^6 - 1$, следовательно, t не делит $q_0^3 - 1$, так как $q^3 - 1 = s^{3f_1s} - 1 > s^{6f_1} - 1 = q_0^6 - 1$ ввиду $s \geq 3$. Поэтому группа G вида $\langle y \rangle \ltimes G_2(q)$ не может иметь s' СС-систем для $s \geq 3$.

8. $L \cong F_4(q)$, $C^0 \cong F_4(q_0)$. В этом случае имеем $|L|_s = (q^{12} - 1)(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$. Из строения параболических подгрупп группы L [8, теорема 4.4] и определения m -делителя t следует, что

$$t \text{ не делит } (q^2 - 1)(q^4 - 1)(q^6 - 1). \quad (1.3)$$

Поэтому t делит $q^{12} - 1$ или t делит $q^8 - 1$.

Отсюда следует, что $e(q, t) = 12$ или 8. В самом деле, если t делит $q^{12} - 1$ и t – не примитивный делитель числа $q^{12} - 1$, то t – примитивный делитель числа $q^n - 1$ с $n < 12$. По лемме 1.1 получаем, что n делит 12. Тогда $n \in \{2, 3, 4, 6\}$. Но это противоречит (1.3). Поэтому $e(q, t) = 12$.

Если t делит $q^8 - 1$ и $e(q, t) \neq 8$, то $e(q, t) = m < 8$ и $m = 2, 4$. Противоречие с (1.3). Тогда t не делит $q_0^{12} - 1$ и t не делит $q_0^8 - 1$. В самом деле, если $e(q, t) = 8$, то $s^{8f_1s} - 1 > s^{12f_1} - 1$ ввиду $s \geq 3$. Противоречие.

9–11. L не изоморфна группам ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^2F_4(q)$ ввиду того, что $s \geq 3$ не делит q и по лемме 1.3.

12. $L \cong {}^3D_4(q)$, $C^0 \cong {}^3D_4(q_0)$. Тогда $|L|_s = (q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$. Из строения параболических подгрупп группы L (см. [8, теорема 4.3]) и определения m -делителя t следует, что

$$t \text{ не делит } q^6 - 1. \quad (1.4)$$

Поэтому t делит

$$(q^8 + q^4 + 1) = (q^4 - q^2 + 1)(q^4 + q^2 + 1)$$

и поэтому t делит $q^4 - q^2 + 1$. Так как t делит $(q^{12} - 1) = (q^4 - 1)(q^8 + q^4 + 1)$, то $e(q, t) = 12$. В самом деле, если $e(q, t) \neq 12$, то $e(q, t) = n < 12$ и по лемме 1.1 получаем, что n делит 12. Значит, $n \in \{2, 3, 4, 6\}$, но $n \notin \{2, 3, 6\}$ по (1.4). Если t делит $q^4 - 1$, то t делит $q^2 + 1$ ввиду (1.4). Кроме того, t делит $-(q^2 + 1) + (q^4 - q^2 + 1) = q^4 - 2q^2$, t делит $q^2 - 2$, t делит 3. Но $t > 3$ по [10, лемма 4].

Поэтому t не делит $q^4 - 1$, $e(q, t) = 12$ и t не делит $q_0^{12} - 1$. Противоречие.

13. $L \cong E_6(q)$, $C^0 \cong E_6(q_0)$. Тогда

$$|L|_s = (q^{12} - 1)(q^9 - 1)(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)(q^2 - 1).$$

В L имеются параболические подгруппы, порядки которых делятся на

$$(q^5 - 1)(q^2 - 1)(q^4 - 1)(q^6 - 1)(q^8 - 1)$$

(см. [8, с. 169, 171]) и на

$$(q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1)(q^6 - 1)$$

(см. [2, с. 76]). По определению m -делителя отсюда следует, что

t не делит

$$(q^2 - 1)(q^3 - 1)(q^4 - 1)(q^5 - 1)(q^6 - 1)(q^8 - 1). \quad (1.5)$$

Поэтому t делит $(q^{12} - 1)(q^9 - 1)$. Если t делит $q^{12} - 1$ и $e(q, t) = n < 12$, то n делит 12 по лемме 1.1. Тогда $n \in \{2, 3, 4, 6\}$, что противоречит (1.5). Поэтому если t делит $q^{12} - 1$, то $e(q, t) = 12$.

Если t делит $q^9 - 1$ и $e(q, t) = m < 9$, то $m = 3$ по лемме 1.1. Это противоречит (1.5). Итак, либо $e(q, t) = 9$, либо $e(q, t) = 12$. В любом случае t не делит $(q_0^{12} - 1)(q_0^8 - 1)$ ввиду $s \geq 3$, $q = s^{9f_1s}$, $q_0 \leq s^{12f_1}$. Противоречие.

14. $L \cong E_6(q)$, $C^0 \cong E_6(q_0)$. По [5, с. 53]

t не делит

$$(q^2 - 1)(q^3 + 1)(q^4 - 1)(q^5 + 1)(q^6 - 1)(q^4 + 1). \quad (1.6)$$

Учитывая значение числа $|L|_s$ (см. [2, с. 145]), получаем, что t делит $(q^{12} - 1)(q^9 + 1)$. Если t делит $q^{12} - 1$ и $e(q, t) = n < 12$, то по лемме 1.1 $n \in \{2, 3, 4, 6, 9\}$. Это противоречит (1.6). Поэтому $e(q, t) = 12$.

Если t делит $q^9 + 1$, то t делит $q^{18} - 1$ и, если $e(q, t) = n < 18$, то по лемме 1.1 $n \in \{2, 3, 6, 9\}$. Это невозможно ввиду (1.6) и $t > 2$. Поэтому $e(q, t) = 18$. Даже если $e(q, t) = 12$, то t не делит $q_0^{18} - 1$, так как $s^{12f_1s} - 1 > s^{18f_1} - 1$ и $s \geq 3$. Противоречие.

15. $L \cong E_7(q)$, $C^0 \cong E_7(q_0)$. По [2, с. 76] в L есть параболические подгруппы, порядки которых делятся на $|E_6(q)|$ и на $|A_6(q)|$. Поэтому

$$t \text{ не делит } (q^{12} - 1) \cdot \prod_{i=2}^9 (q^i - 1). \quad (1.7)$$

Исходя из значения числа $|L|$, получаем, что t делит $(q^{18} - 1)(q^{14} - 1)(q^{10} - 1)$. Если t делит $q^{18} - 1$ и $e(q, t) = n < 18$, то по лемме 1.1 имеем $n \in \{2, 3, 6, 9\}$, что противоречит (1.7). Поэтому $e(q, t) = 18$. Если t делит $q^{14} - 1$, то, аналогично, $e(q, t) = 14$. Если t делит $q^{10} - 1$, то опять по

(1.7) и лемме 1.1 имеем $e(q, t) = 10$. В любом из этих случаев t не делит $q_0^k - 1$, $k \in \{10, 14, 18\}$, ввиду $s \geq 3$. Противоречие.

16. $L \cong E_8(q)$, $C^0 \cong E_8(q_0)$. По [2, с. 76] и [8, с. 176] группа L имеет параболические подгруппы, порядки которых делятся на $|E_6(q)|$, $|E_7(q)|$, $|A_7(q)|$. По определению m -делителя t получаем

t не делит

$$\prod_{i=1}^{10} (q^i - 1)(q^{12} - 1)(q^{14} - 1)(q^{18} - 1). \quad (1.8)$$

Исходя из значения числа $|L|$ (см. [2, с. 145]),

получаем, что t делит $(q^{30} - 1)(q^{24} - 1)(q^{20} - 1)$. Если t делит $q^{30} - 1$ и $e(q, t) = n < 30$, то по лемме 1.1 имеем $n \in \{2, 3, 5, 6, 10\}$, что противоречит (1.8). Если t делит $q^{24} - 1$ и $e(q, t) = m < 24$, то $m \in \{2, 4, 6, 8, 12\}$, что противоречит (1.8). Если t делит $q^{20} - 1$ и $e(q, t)l < 20$, то, как и выше, $l \in \{2, 4, 5, 10\}$, что, опять же противоречит (1.8). Итак, $e(q, t) = 20$, или 24, или 20. В любом случае, t не делит $q_0^{30} - 1 = s^{30f_1} - 1$, поскольку $q^{20} - 1 = s^{20f_1s} - 1 > s^{30f_1} - 1$ ввиду $s \geq 3$. Противоречие. \square

Лемма 1.10. Пусть группа $G = L_1 \times \dots \times L_n$, где L_i – изоморфные простые группы, $1 \leq i \leq n$. Пусть G_i нормализует s -подгруппу $S \neq 1$ из G_s , $\{s, t\} \subseteq \pi(G)$. Тогда и в каждой компоненте L_i , $1 \leq i \leq n$, группы G подгруппа $L_i \cap G_i$ нормализует s -подгруппу $L_i \cap S \neq 1$.

Доказательство. Пусть $L := L_1 \times \dots \times L_{n-1}$, $M := L_n$. Предположим, что $L \cap S =: S_0 \neq 1$. Тогда $(S \rtimes G_i) \cap L = S_0 \rtimes L_i$. Поэтому к подгруппе $L \subset G$ можно применить предположение индукции и получить, что компонента L_i удовлетворяет заключению леммы. Из изоморфизма компонент следует утверждение для всех L_i , $1 \leq i \leq n$.

Если $L \cap S = 1$, то пусть $\bar{G} := G/L \cong \cong L_n = M$. В группе \bar{G} есть подгруппа $\bar{S} \rtimes \bar{G}_i \cong S \rtimes M_i$, где $M_i = G_i \cap M$. Из изоморфизма компонент следует утверждение. \square

Лемма 1.11. Пусть группа $G = G_s M$, где $M \triangleleft G$. Если S есть s -подгруппа группы G , которую нормализует подгруппа $G_i = M_i$, $t \neq s$ и $S \not\subseteq M$, то в S есть подгруппа $S^* \neq 1$ такая, что $S = (S \cap M) \cdot S^*$ и $[S^*, M_i] = 1$.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $X = S \rtimes M_i$ группы G . $X \cap M = S_0 \rtimes M_i$, где

$S_0 = S \cap M \triangleleft S$. Поэтому $S_0 \triangleleft X$. $M_t S_0 \triangleleft X$. По лемме Фраттини [1, теорема I.7.8]

$$X = M_t S_0 \cdot N_X(M_t).$$

Поэтому $|S/S_0|$ делит $|N_X(M_t)|$. По леммам 1.4, 1.6 и по [1, теорема VI.4.6] $S = S_0 \cdot S_1$, где $S_1 \subseteq N_X(M_t)$. Поэтому

$$[S_1, M_t] \subseteq [S, M_t] \subseteq S \cap M = S_0.$$

Поэтому $S_0 \cdot S_1 M_t / S_0 \cong S_1 M_t / S_0 \cap S_1 M_t$ – нильпотентная группа. Пусть $S_0 \cap S_1 M_t =: S_{00} S_1 M_t$. По лемме 1.4 в группе $S_1 M_t$ есть подгруппа N такая, что $S_1 M_t = N S_{00}$ и $N \cap S_{00} \subseteq \Phi(N)$. По лемме 1.6 получаем, что N – нильпотентная группа. Тогда $[N_s, M_t] = 1$ и $N_s S_0 = S_1 S_0 = S$. \square

Лемма 1.12. Пусть неразрешимая группа $G = G_s \cdot F^*(G)$ и подгруппа G_t , $t \neq s$, нормализует подгруппу $S \subseteq G_s$. Если $S \not\subseteq F^*(G)$, то S нормализует все простые неабелевы компоненты L группы $F^*(G)$, для которых $L \cap G_t \neq 1$.

Доказательство. Пусть M – минимальная нормальная неразрешимая подгруппа группы G , t делит $|M|$, $M = L_1 \times \dots \times L_k$, где $L_i \cong L_1 = L$ для всех $1 \leq i \leq k$. Предположим, что в группе $G_s M$ выполняется $S \not\subseteq M$. По лемме 1.11 в S существует подгруппа $S^* \neq 1$ такая, что

$$[S^*, M_t] = 1 = [S^*, M_t \cap L] = [S^*, L_t],$$

$S = (S \cap M) \cdot S^*$. Пусть $1 \neq y \in S^*$. Если $y \notin N_G(L)$, то $L_t = L_t^y \subset L \cap L^y$, что невозможно. Поэтому $y \in N_G(L)$, $S^* \subseteq N_G(L)$, $S \cap M \subseteq N_G(L)$, $S \subseteq N_G(L)$. \square

Лемма 1.13. Пусть группа G имеет вид $G_s \triangleleft L$, где L – простая неабелева группа, $s \geq 3$, s не делит $|L|$. Если $F(G) \neq G_s$, то L – группа лиева типа над полем $GF(r)$ для некоторого простого числа r и $G_s / F(G)$ – циклическая группа. В частности, если G имеет s' CC-систему с $s \geq 3$, то $O_s(G) \neq 1$.

Доказательство. Пусть $Q := F(G)$ и $Q \subset G_s$. Тогда $Q = C_G(L)G$, G_s / Q изоморфна подгруппе группы $Out(L)$. Так как $s \geq 3$, то по [3, (7–3)] получаем, что M – группа лиева типа над полем $GF(r)$. По [3, (7–13) (1)] G_s / Q – циклическая группа. Поэтому, если $Q = O_s(G) = 1$, то G_s – циклическая группа и она имеет точно по одной подгруппе каждого порядка. Тогда все подгруппы из множества \mathfrak{T} нормализуют единственную подгруппу $T \neq 1$ наименьшего порядка. Поэтому $[T, L] = 1$, $T \triangleleft G$. \square

Лемма 1.14. Пусть $G = \langle y \rangle \triangleleft L$, где L – простая группа лиева типа с полем определения

$GF(q)$ характеристики r , $q = r^f$, $y \in \Gamma_L$, $y^3 = 1$. Пусть $C = C_G(y)$, $C^* = C \cap L$, $C^0 = O^*(C^*)$. Пусть t есть t -делитель группы L . Тогда G не имеет $3'$ CC-систем, так как

(1) $r = 3$, $L_t \not\subseteq C$, если $L \cong {}^3D_4(q)$; $L_2 \not\subseteq C$, если $L \cong D_4(q)^a$;

(2) $r \neq 3$, $L_r \not\subseteq C$.

Доказательство. (1). По [4, предложение 4.9.2] $L \in \{D_4(q)^a, {}^3D_4(q)\}$, где

$$D_4(q)^a = D_4(q) / Z(D_4(q)), \quad C^* \cong G_2(q).$$

Если $L = {}^3D_4(q)$, то $e(q, t) = 12$ (пункт 12 в доказательстве леммы 1.9). Но для C^* $e(q, t) \leq 6$ (пункт 7 в доказательстве леммы 1.9). Противоречие.

Если $L = D_4(q)^a$, то $|L_2| \neq |C_2^*| = |G_2(q)_2|$ (по [6, теорема 4 (г)] $L_2 \in \mathfrak{T}$ нормализует 3-подгруппу вне L). Противоречие. Этим (1) доказано.

(2). Пусть теперь $r \neq 3$, $q \equiv \varepsilon \pmod{3}$.

Если $L_r \subseteq C$, то и $L_r \subseteq C^0$. По [3, (9–1)] $L \in \{D_4^a, {}^3D_4(q)\}$. В обоих случаях $|L_r| = r^{12f}$. В то же время по [4, табл. 4.7.3A] $|C_r^0| < q^7 = r^{7f}$. Поэтому предположение $L_r \subseteq C$ неверно. \square

Лемма 1.15. Пусть группа

$$G = (M_1 \times \dots \times M_n) \cdot G_s,$$

где M_i – простые неабелевы группы для всех $i = \overline{1, n}$ имеет s' CC-систему, $s > 2$. Тогда

$$F(G) = O_s(G) = F \neq 1.$$

Доказательство. Используем индукцию по порядку группы. Пусть $G_s = S$, \mathfrak{X} , \mathfrak{X} – множества, удовлетворяющие заключению леммы 1.5. Пусть $X = \{T_j \neq 1 \mid s\text{-группы, } j = \overline{1, |\mathfrak{X}|}\}$, $M = M_1 \times \dots \times M_n$.

Пусть $\langle T_j / T_j \in \mathfrak{X} \rangle = Q$, $j = \overline{1, |\mathfrak{X}|}$. Тогда группа QM удовлетворяет условию. Если $Q \subset S$, то по индуктивному заключению $F(QM) \neq 1$. Тогда $F(QM) \triangleleft QM \triangleleft G$ и все доказано. Поэтому пусть $Q = S$. По лемме 1.12 тогда $M_j \triangleleft G$ для всех $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим группу SM_i . Если $SM_i \subset G$, то по индуктивному заключению $R = O_s(SM_i) \neq 1$. Тогда

$$C = C_G(M_i) \supseteq \langle R, M_1 \times \dots \times M_{i-1} \times M_{i+1} \times \dots \times M_n \rangle,$$

$C \subset G$, $CS \subset G$ ($C \triangleleft G$). По индуктивному заключению $O_s(CS) = D \neq 1$. Если $D \cap C = D_0 \neq 1$, то $D_0 \triangleleft C \triangleleft G$ и все доказано. Поэтому пусть $D \cap C = 1$. Группа $X = S(M_2 \times \dots \times M_i \times \dots \times M_n)$ имеет порядок меньший, чем $|G|$. По индуктивному

заклучению $O_s(X) = E \neq 1$. Тогда $[E, M_i] = 1$. Так как $C_s = R$, то $E \subseteq R$. Тогда $[E, M] = 1$ и $1 \neq E \subseteq O_s(G)$.

Пусть далее $SM_i = G = SM$. По лемме 1.13 можно считать, что s делит $|M|$. По леммам 1.2 (2) и 1.10 можно считать, что $S \not\subseteq M$, и что хотя бы один элемент $T \in \mathfrak{X}$ удовлетворяет условию $T \cap M = 1$. Тогда для некоторой подгруппы $M_i \in \mathfrak{X}$ имеем $[T, M_i] = 1$. Пусть $1 \neq y \in T$, $y^s = 1$ и y есть s -автоморфизм группы M . Из [2, теоремы 4.239 и 4.240] следует, что M – группа лиева типа (ввиду $s > 2$).

Если $M \in Chev(s)$, то пусть t – m -делитель группы M . Это противоречит леммам 1.9 и 1.14.

Если $M \in Chev(r)$, $r \neq s$, то пусть $t = r$. Имеем противоречие с леммой 1.7. \square

Лемма 1.16. Пусть G – конечная неразрешимая группа с s' СС-системой $s \in \pi(G)$, $s \geq 3$ и силовская 2-подгруппа нормализует неабелеву s -подгруппу $S \neq 1$. Если все компоненты группы G есть простые s' -группы и $S \not\subseteq L(G)$, то

$$[S', L(G)] = 1.$$

Доказательство. По лемме 1.12 группа S нормализует все компоненты L группы X . По лемме 1.13, если $S \neq F(SL) = F$, то S/F – циклическая группа и $S' \subseteq F$. Из произвольного выбора L и $[S', L] = 1$ следует, что $[S', L(G)] = 1$. \square

Лемма 1.17. Пусть группа $G = L_1 \times \dots \times L_n$, где $L_i \cong L_1$ для всех $1 \leq i \leq n$, L_1 – простая неабелева группа. Пусть $s \in \pi(L_1)$, $s > 3$. Тогда в группе G имеется силовская подгруппа G_t , $t \neq s$, которая не нормализует неединичных s -подгрупп. Если $s = 3$, то предыдущее утверждение также верно когда L_1 – простая группа лиева типа, простая спорадическая группа или знакопеременная группа из множества A^* .

Доказательство. Предположим противное, что для всех $t \in \pi(G) \setminus \{s\}$ найдется t -подгруппа G_t , которая нормализует неединичную s -подгруппу из G . Тогда из леммы 1.5 следует, что в G имеется s' СС-система такая, что её силовские s' -подгруппы G_i нормализуют неединичные s -подгруппы из подгруппы G_s . Из $L_1 \triangleleft G$ и леммы 1.10 следовало бы, что и группа L_1 имела бы s' СС-систему ($L_1 \cap G_i$ есть силовская подгруппа в L_1). Это противоречило бы лемме 1.2 (2). \square

Лемма 1.18. Пусть $G = G_s L$, где L – простая нормальная неабелева группа, $s \in \pi(L)$.

Если G имеет s' СС-систему с $s > 3$, то $F(G) = O_s(G) \neq 1$. Это верно и когда $s = 3$, L – простая группа лиева типа, простая спорадическая группа или знакопеременная группа из множества A^* .

Доказательство. Предположим, что $F(G) = F = 1$. Тогда $C_G(L) = 1$ и группа $\bar{G} = G_s L / L$ изоморфна s -подгруппе группы $Out(L)$. Заметим, что по лемме 1.2 (2) имеем $\bar{G} \neq 1$. Так как $s \geq 3$, то по [3, (7–3)] группа L является простой группой лиева типа над полем $GF(r)$ для некоторого простого числа r .

Предположим, что $r \neq s$. По условию подгруппа L_r из \mathfrak{X} нормализует s -подгруппу $S \neq 1$ такую, что $S \cap L = 1$ (в противном случае L_r содержится в группе вида $(S \rtimes L_r) \cap L$, что противоречит теореме 4.254 в [2]). Тогда $[S, L_r] = 1$. Элемент $y \neq 1$ порядка s из S индуцирует автоморфизм группы L . По [3, (7–3)] и [4, теорема 2.5.12] $y \in Outdiag(L)$, или $y \in \Phi_L$, или $s = 3$ и y – графовый или графо-полевой автоморфизм группы L . Но по леммам 1.7 и 1.15 $[y, L_r] \neq 1$. В случае $G \cong D_4(q) / Z(D_4(q))$ и $y \in \Gamma_L$ по лемме 1.15 группа G не имеет s' СС-систем. Противоречие.

Предположим, что $r = s$. По [3, (7–3)] и [4, теорема 2.5.12 (с)] имеем $y \in \Phi_L$ или $s = 3$ и $y \in \Gamma_L$, или y – графо-полевой автоморфизм группы L . Но тогда по леммам 1.9 и 1.15 группа G не имеет s' СС-систем для $s \geq 3$. Противоречие.

Поэтому предположение о том, что $F(G) = 1$ неверно. \square

Лемма 1.19. Пусть имеют место условия леммы 1.18. Тогда $F(G)$ есть наибольшая s -подгруппа, которую нормализует $L_r \subset L$ – группа лиева типа над полем $GF(r)$, или $L_t \subset L$ – группа лиева типа над полем $GF(s)$, где t – m -делитель группы L . Кроме того, $F(G) \cong G_s / L_s$, если L – простая спорадическая группа или знакопеременная группа из множества A^* .

Доказательство. Пусть $Q := F(G)$ и $QL \neq G$. Тогда $\bar{G} := G / QL \subseteq Out(L)$, $\bar{G} \neq 1$. Пусть L – группа лиева типа над полем $GF(r)$ по [3, (7–3)].

1. Предположим, что $r \neq s$. Пусть L_r нормализует наибольшую s -подгруппу S в G , $Q \subseteq S$. По [2, теорема 4.254] имеем $S \cap L = 1$. Предположим, что $Q \subset S$. Пусть $R \subseteq S$ и $Q \subset R$, $|R:Q| = s$. Тогда R/Q – подгруппа группы автоморфизмов группы $LQ/Q =: \bar{L}$. Положим

$\bar{R} := R/Q = \langle \bar{y} \rangle$. Из $[S, L_r] = 1$ следует, что $[\bar{y}, \bar{L}_r] = 1$. Это противоречит леммам 1.7 и 1.15. Поэтому $S = Q$.

2. Предположим, что $r = s$. Сохраняем обозначения из пункта 1. Тогда $\bar{y} \in \Phi_{\bar{L}}$, или $\bar{y} \in \Gamma_{\bar{L}}$, или \bar{y} – графо-полевой автоморфизм группы \bar{L} по [3, (7–3)] и [4, теорема 2.5.12 (с)]. По [5, лемма 3] G имеет t -делитель t . Из леммы 1.2 (1) следует, что $L_t \in \mathfrak{S}$ нормализует наибольшую s -подгруппу S такую, что $S \cap L = 1$, $Q \subseteq S$. Если $Q \subset S$, то из $[S, L_r] = 1$ следует $[\bar{y}, \bar{L}_r] = 1$. Это противоречит леммам 1.9 и 1.15. Поэтому $Q = S$.

Если L – простая группа лиева типа или простая спорадическая группа или знакопеременная группа из множества A^* , то из теорем 4.239 и 4.240 в [2] и теорем 2 и 3 в [6] следует, что $QL = Q \times L = G$. \square

2 Доказательство теоремы 0.1

Для дальнейшего нам удобно определить следующее условие.

Условие (ω) . Пусть G – неразрешимая группа с s' СС-системой, $s \geq 3$. Множества \mathfrak{S} , G_s и \mathfrak{T} выбраны в соответствии с заключением леммы 1.5. Пусть $G = G_s \cdot F$, где $F = M_1 \times \dots \times M_n$, где M_i – минимальные нормальные неразрешимые подгруппы группы G , $s \in \pi(M_i)$ для $1 \leq i \leq n$. Пусть L – произвольная простая компонента группы G . Пусть силовская 2-подгруппа G_2 из \mathfrak{S} нормализует наибольшую s -подгруппу $S \neq 1$ из G_s . Пусть силовская r -подгруппа G_r из \mathfrak{T} нормализует наибольшую s -подгруппу $S^{(r)}$, если L – группа лиева типа над полем $GF(r)$. Пусть силовская t -подгруппа $G_t \in \mathfrak{S}$ нормализует наибольшую s -подгруппу $S^{(t)}$ из G_s , если L – группа лиева типа над полем $GF(s)$, t – t -делитель группы L . Условимся группу G называть (ω) -группой.

Лемма 2.1. Пусть G есть (ω) -группа. Если все её компоненты только простые группы лиева типа и имеют поле определения одной и той же характеристики $r \neq s$, то $1 \neq S^{(r)} \subseteq F(G)$. В частности, $S \cap F(G) \neq 1$.

Доказательство. Пусть $G_r \cap L = L_r$ (ввиду $L \triangleleft G$). L_r нормализует $S^{(r)}$ и по [2, теорема 4.254] $S^{(r)} \cap L = 1$. Пусть $1 \leq i \leq n$ и $L \subseteq M_i = M$. Тогда подгруппа $S^{(r)}M$ существует и по лемме 1.10 имеем $M \cap S^{(r)} = 1$. Тогда по лемме 1.12 существует и подгруппа $S^{(r)}L$. По лемме 1.19 получаем $S^{(r)} = F(S^{(r)}L)$. Тогда

$[S^{(r)}, L] = 1$. Так как L – произвольная компонента группы G , то $S^{(r)}$ централизует все компоненты группы G и поэтому $S^{(r)} \subseteq F(G)$. Ясно, что $S^{(r)} \subseteq S$. \square

Лемма 2.2. Пусть G есть (ω) -группа. Если $s = 3$ и все её компоненты являются простыми спорадическими группами или знакопеременными группами из множества A^* , то $F(G) \neq 1$, $S \subseteq F(G)$. Если $s > 3$ и все её компоненты являются простыми спорадическими группами или знакопеременными группами A_n , $n \geq 5$, то $F(G) \neq 1$, $S \subseteq F(G)$.

Доказательство. Пусть L – компонента группы G , $1 \leq i \leq n$ и $L \subseteq M_i =: M$. Тогда подгруппа SM существует. Если $S \cap M \neq 1$, то по лемме 1.10 и в L имеется подгруппа $L_2 \cap M_2$, которая нормализует нетривиальную s -подгруппу. Но по [9, теоремы 2 и 3] и лемме 1.2 (2) это невозможно ввиду $s \geq 3$. Поэтому $S \cap M = 1 = S \cap L$. По лемме 1.12 подгруппа SL существует. Из теорем 4.239 и 4.240 в [2] следует, что $C_s(L) = S$. Поэтому $[S, L] = 1$. В силу произвольного выбора подгруппы L получаем $[S, F] = 1$. \square

Приступим к доказательству непосредственно теоремы 0.1.

Пусть $L^* := L(G)$, $F^*(G) = F(G) \cdot L^*$. По условиям теоремы $Z(L^*) = 1$, S – наибольшая s -подгруппа из G , которую нормализует G_2 .

Предположим, что s делит порядки всех компонент группы G .

Предположим, что s не делит $|F(G)|$. Пусть $X := G_s L^*$. Ясно, что X есть (ω) -группа. По леммам 2.1 и 2.2 имеем

$$F(X) \cap O_s(X) =: Q \neq 1.$$

Так как $Q \triangleleft X$, то $[Q, L(G)] = 1$. Заключение (1)–(3) доказаны.

Предположим теперь, что компоненты группы G являются s' -группами. Пусть $L^* = M_1 \times \dots \times M_n$, где M_i – минимальные нормальные подгруппы группы G , $1 \leq i \leq n$. Пусть $M := M_i = L_1 \times \dots \times L_k$, где $L_j \cong L_1 =: L$ для всех $1 \leq j \leq k$. Предположим, что $S \subset F^*(G) = F(G) \times L^*$. Если $S \cap F(G) \neq 1$, то все доказано. Если $S \cap F(G) = 1$, то s делит $|F(G)S \cap L^*|$, что невозможно. Поэтому $S \not\subseteq F^*(G)$. Так как компоненты группы G имеют четный порядок, то по лемме 1.12 группа S нормализует все компоненты группы G . Поэтому подгруппа SL существует и $S \not\subseteq L$. По леммам 1.13 и 1.14 получаем

$S = F(SL)$, если L является простой спорадической группой или знакопеременной группой A_m , $m \geq 5$. Если компонент, являющихся простыми группами лиева типа нет, то $[S, L] = 1$ влечет $[S, L^*] = 1$, ввиду произвольного выбора L . Заключение (4) доказано.

Если же в L^* есть компоненты, являющиеся простыми группами лиева типа, то по леммам 1.14 и 1.16 получаем $[S', F^*] = 1$. Заключение (5) доказано. \square

В связи с леммой 1.2 (2) остался открытым вопрос: пусть G группа из множества A_n^0 , имеет ли она 3'CC -систему?

3 Доказательство теоремы 0.2

Непростота группы следует из леммы 1.2 (2).

Пусть M – минимальная нормальная подгруппа группы G . Используем индукцию по порядку группы. Пусть $G_s = S$.

Если M – разрешимая группа и s не делит $|M|$, то группа $\overline{G} = G/M$ удовлетворяет условию. Применение индукции к группе \overline{G} дает нам результат для \overline{G} и G .

Поэтому впредь считаем, что $R = R(G) = 1$.

Пусть $M = L_1 \times \dots \times L_m$, где $L_i \cong L_1$ для $i = 2, m$ и L_1 – простая неабелева группа. Очевидно, что подгруппа SM удовлетворяет условию. По лемме 1.15 $O_s(SM) = F \neq 1$. Пусть $L(G) = L$ – слой группы G . Из $R = 1$ следует, что $Z(L) = 1$. То есть $L(G)$ есть произведение всех минимальных нормальных подгрупп типа M , $L = N_1 \times \dots \times N_k$, где $N_1 = M$. По лемме 1.15 имеем $O_s(SL) \neq 1$. Если $F^*(G) = L$, то имеем противоречие с [2, предложение 1.27]. Поэтому $F^*(G) = F(X)L$ и $F(X) \neq 1$, что исключено выше. \square

Заключение

Рассмотрены критерии непростоты конечных групп, связанных с перестановочностью силовских подгрупп группы, взятых по одной для

каждого простого числа, делящего порядок группы, с неединичными s -подгруппами группы, где s – простое число, делящее порядок группы.

Отметим, что в теореме 0.2 условия слабее условий теорем 2 (i) и 1 из [11] для $s > 3$, но заключение $O_s(G) \neq 1$ теоремы 1 из [11] сильнее заключения s делит $|R(G)|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert // Berlin – Springer, 1967. – 793 с.
2. Горенштейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенштейн. – М.: Мир, 1985.
3. Gorenstein, D. The local structure of the finite groups of characteristic 2 type / D. Gorenstein, R. Lyons // *Memories AMS.* – 1983. – Vol. 42, № 276. – P. 1–731.
4. Gorenstein, D. The classification of the finite simple groups / D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon // *Math. Surveys and Monographs (AMS. Providence R.I.)*. – 1998. – Vol. 40, № 3. – 419 p.
5. Тютянов, В.Н. Тройные факторизации в конечных группах / В.Н. Тютянов, Л.А. Шеметков // *Доклады НАН Беларуси.* – 2002. – Т. 46, № 4. – С. 52–55.
6. Кондратьев, А.С. 2-сигнализаторы конечных простых групп / А.С. Кондратьев, В.Д. Мазуров // *Алгебра и логика.* – 2003. – Т. 42, № 5. – С. 594–623.
7. Сыскин, С.А. Абстрактные свойства простых спорадических групп / С.А. Сыскин // *Успехи матем. наук.* – 1980. – Т. 35, № 5(215). – С. 181–212.
8. Wilson, R. The Finite simple groups / R. Wilson. – London: Springer-Verlag. – 2009.
9. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. – 1978.
10. Пальчик, Э.М. Конечные простые группы с факторизацией $G = G_n B$, $2 \notin \pi$ / Э.М. Пальчик // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* – 2014. – Т. 20, № 2. – С. 242–249.
11. Aschbacher, M. On a conjecture of Quillen and a lemma of Robinson / M. Aschbacher, P. Kleidman // *Arch. Math.* – 1990. – Vol. 55, № 3. – P. 209–217.

Поступила в редакцию 21.12.17.

УДК 517.925

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ НАЛИЧИЯ СВОЙСТВА ПЕНЛЕВЕ У СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

В.М. Пецевич, В.А. Пронько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

NECESSARY CONDITIONS FOR THE SYSTEM OF TWO SECOND DEGREE DIFFERENTIAL EQUATIONS TO HAVE PAINLEVÉ PROPERTY

V.M. Petsevich, V.A. Pronko

Y. Kupala Grodno State University

Получены необходимые условия принадлежности исследуемой системы к системам типа Пенлеве.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, подвижные критические особые точки, метод малого параметра.

Necessary conditions for the system in the title to be Painlevé type system were given.

Keywords: system of the ordinary differential equations, Painlevé's property, movable critical singularities, method of small parameter.

1 Предварительные результаты

В работе, на предмет отсутствия подвижных критических особых точек, будем рассматривать систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= A_2 \cdot y^2 + A_1 \cdot y + A_0, \\ y'^2 &= B_2 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + B_0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, A_i , $i = \overline{0, 2}$, – полиномы по x с аналитическими по t коэффициентами, B_j , $j = \overline{0, 2}$, – полиномы по y с аналитическими по t коэффициентами,

$$A_2 \neq 0, B_2 \neq 0, \quad (1.2)$$

и правые части не являются одновременно полными квадратами. Запись $P \neq 0$, здесь и далее означает, что коэффициенты полинома P одновременно не обращаются в нуль в некоторой области D .

Пенлеве-анализ дифференциальной системы (1.1) в частных случаях проводился, например, в [1]–[5]. Были получены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек у решений исследованных там дифференциальных систем.

В данной работе найдем необходимые условия отсутствия подвижных критических особых точек для дифференциальной системы (1.1) в общем случае.

2 Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка

Пусть $A_2 = \sum_{i=0}^{m_2} a_{2i} x^i$, $A_1 = \sum_{i=0}^{m_1} a_{1i} x^i$, $A_0 = \sum_{i=0}^{m_0} a_{0i} x^i$,

$$B_2 = \sum_{i=0}^{n_2} b_{i2} y^i, B_1 = \sum_{i=0}^{n_1} b_{i1} y^i, B_0 = \sum_{i=0}^{n_0} b_{i0} y^i.$$

Вводя в (1.1) малый параметр по формулам $x = \varepsilon^p X$, $y = Y$, $t = t_0 + \varepsilon^r \tau$,

получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 &= \sum_{i=0}^{m_2} a_{2i} X^i Y^2 \varepsilon^{ip-2p+2r} + \\ &+ \sum_{i=0}^{m_1} a_{1i} X^i Y \varepsilon^{ip-2p+2r} + \sum_{i=0}^{m_0} a_{0i} X^i \varepsilon^{ip-2p+2r}, \\ \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 &= \sum_{i=0}^{n_2} b_{i2} Y^i X^2 \varepsilon^{2r+2p} + \\ &+ \sum_{i=0}^{n_1} b_{i1} Y^i X \varepsilon^{2r+p} + \sum_{i=0}^{n_0} b_{i0} Y^i \varepsilon^{2r}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим случаи.

Если $m_2 \geq m_1$, $m_2 \geq m_0$, $m_2 > 4$, то в (2.1) положим $p = -2$, $r = m_2 - 2$. При $\varepsilon = 0$ получим упрощенную дифференциальную систему

$$\begin{aligned} \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 &= a_{2m_2} X^{m_2} Y^2 + \lambda_{21} a_{1m_1} X^{m_1} Y + \lambda_{20} a_{0m_0} X^{m_0}, \\ \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $m_2 > 4$,

$$\lambda_{21} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_2 = m_1; \\ 0, & \text{если } m_2 > m_1, \end{cases} \quad \lambda_{20} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_2 = m_0; \\ 0, & \text{если } m_2 > m_0. \end{cases}$$

Если $m_1 \geq m_2$, $m_1 \geq m_0$, $m_1 > 4$, то в (2.1) положим $p = -2$, $r = m_1 - 2$. При $\varepsilon = 0$ получим упрощенную дифференциальную систему

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 = \lambda_{12} a_{2m_2} X^{m_2} Y^2 + a_{1m_1} X^{m_1} Y + \lambda_{10} a_{0m_0} X^{m_0},$$

$$\left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (2.3)$$

где $m_1 > 4$,

$$\lambda_{12} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_1 = m_2; \\ 0, & \text{если } m_1 > m_2, \end{cases} \quad \lambda_{10} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_1 = m_0; \\ 0, & \text{если } m_1 > m_0. \end{cases}$$

Если $m_0 \geq m_2$, $m_0 \geq m_1$, $m_0 > 4$, то в (2.1) положим $p = -2$, $r = m_0 - 2$. При $\varepsilon = 0$ получим упрощенную дифференциальную систему

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 = \lambda_{02} a_{2m_2} X^{m_2} Y^2 + \lambda_{01} a_{1m_1} X^{m_1} Y + a_{0m_0} X^{m_0},$$

$$\left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (2.4)$$

где $m_0 > 4$,

$$\lambda_{02} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_0 = m_2; \\ 0, & \text{если } m_0 > m_2, \end{cases} \quad \lambda_{01} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_0 = m_1; \\ 0, & \text{если } m_0 > m_1. \end{cases}$$

Решения систем (2.2)–(2.4) имеют подвижные критические особые точки [6].

Учитывая, что переменные x и y входят в систему (1.1) симметрично, заключаем, что для отсутствия подвижных критических особых точек у решений дифференциальной системы необходимо требовать, чтобы $n_2 \leq 4$, $n_1 \leq 4$, $n_0 \leq 4$.

Таким образом, имеет место

Лемма 2.1. *Для того, чтобы дифференциальная система (1.1) имела свойство Пенлеве необходимо, чтобы степени полиномов A_i , $i = \overline{0, 2}$, по переменной x и степени полиномов B_j , $j = \overline{0, 2}$, по переменной y были не выше 4.*

3 Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения второго порядка второй степени

Изучение системы (1.1) на предмет отсутствия подвижных критических особых точек очень часто приводит к изучению уравнения второго порядка второй степени вида

$$(x'' - E(x', x, t))^2 = F(x', x, t), \quad (3.1)$$

где E, F – рациональные функции от x', x с аналитическими по t коэффициентами.

Основные результаты по отысканию необходимых условий, а в некоторых случаях и достаточных, содержатся в работах [7], [8]. Приведем некоторые из них.

Лемма 3.1 [7], [8]. *Для наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения (3.1) необходимо, чтобы $E(x', x, t)$, $F(x', x, t)$ были полиномами по x' степени не выше 2 и 4 соответственно, коэффициенты которых являются рациональными по x функциями с аналитическими по t коэффициентами, т. е.*

$$E(x', x, t) = E_2(x, t)x'^2 + E_1(x, t)x' + E_0(x, t),$$

$$F(x', x, t) = F_4(x, t)x'^4 + F_3(x, t)x'^3 + F_2(x, t)x'^2 + F_1(x, t)x' + F_0(x, t).$$

Лемма 3.2 [8]. *Пусть $x' = \mu(x, t)$ – нуль нечетной кратности $F(x', x, t)$ в котором $E(x', x, t)$ голоморфна. Тогда для наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения (3.1) необходимо, чтобы решения дифференциального уравнения $x' = \mu(x, t)$ были особыми для (3.1).*

Лемма 3.3 [8]. *Если (3.1) имеет свойство Пенлеве, то нули $F(x', x, t)$ вида $x = \gamma(t)$ должны быть четной кратности, при условии, что $E(x', x, t)$ голоморфна в этих нулях.*

Уравнение

$$(x'' - E_2(x) \cdot x'^2) = F_4(x) \cdot x'^4 \quad (3.2)$$

инвариантно относительно замены переменных $(t, x) \rightarrow (t_0 + \varepsilon t, x)$ и, следовательно, является упрощенным в смысле Пенлеве для (3.1).

Пусть $x = x_0$ является полюсом хотя бы одной из функций E_2, F_4 . Поскольку подстановка $X = x - x_0$, не изменяя существенно уравнение, изменяет рассматриваемый полюс функции на $X = 0$, то можно принять, что x_0 равно нулю. Таким образом, функции E_2, F_4 могут быть записаны в виде

$$E_2 = \frac{e_{2,-m}}{x^m} + \frac{e_{2,-m+1}}{x^{m-1}} + \dots + e_{2,0} + \dots,$$

$$F_4 = \frac{f_{4,-n}}{x^n} + \frac{f_{4,-n+1}}{x^{n-1}} + \dots + f_{4,0} + \dots, \quad (3.3)$$

где $|e_{2,-m}| + |f_{4,-n}| \neq 0$.

Уравнение (3.2) заменим системой

$$x' = y, \quad (y' - E_2(x) \cdot y^2) = F_4(x) \cdot y^4. \quad (3.4)$$

В (3.4) введем малый параметр λ по формулам $x = \lambda^p X$, $y = \lambda^q Y$. В результате получим

$$X' = \lambda^{q-p} Y,$$

$$\left(Y' - \lambda^{q-mp} \left(\frac{e_{2,-m}}{X^m} + O(\lambda^p) \right) \cdot Y^2 \right) =$$

$$= \lambda^{2q-np} \left(\frac{f_{4,-n}}{X^n} + O(\lambda^p) \right) \cdot Y^4. \quad (3.5)$$

Пусть выполняется хотя бы одно из неравенств $m > 1$, $n > 2$. Рассмотрим случаи.

1. Если $n > 2m$, то, полагая $p = 2$, $q = n$, при $\lambda = 0$ упрощенная система примет вид

$$X' = 0, \quad Y'^2 = \frac{f_{4,-n}}{X^n} \cdot Y^4,$$

из которой имеем $X = X_0$, $Y = \frac{\alpha}{t - t_0}$, где t_0, X_0 –

здесь и далее, произвольные постоянные интегрирования, $\alpha = \mp \sqrt{\frac{X_0^n}{f_{4,-n}}}$.

Разлагая решения системы (3.5) по степеням λ , получим

$$X = X_0 + \lambda^{n-2} X_1 + \lambda^{n-1} X_2 + \dots,$$

$$Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2 + \dots$$

Для нахождения X_1 будем иметь уравнение $\frac{dX_1}{dt} = \frac{\alpha}{t-t_0}$, из которого находим, что

$$X_1 = \alpha \ln(t-t_0) + C,$$

где C – здесь и далее, постоянная интегрирования. Следовательно X_1 , а потому и X , имеют подвижную логарифмическую точку ветвления в рассматриваемом случае.

2. Если $n < 2m$, то, полагая $p = 2$, $q = 2m$, при $\lambda = 0$ упрощенная система примет вид $X' = 0$, $Y' - \frac{e_{2,-m}}{X^m} \cdot Y^2 = 0$, из которой имеем $X = X_0$, $Y = \frac{\alpha}{t-t_0}$, где $\alpha = -\frac{X_0^m}{e_{2,-m}}$.

Разлагая решения системы (3.5) по степеням λ , получим

$$X = X_0 + \lambda^{2m-2} X_1 + \lambda^{2m-1} X_2 + \dots,$$

$$Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2 + \dots$$

Для нахождения X_1 будем иметь уравнение $\frac{dX_1}{dt} = \frac{\alpha}{t-t_0}$, из которого находим, что

$$X_1 = \alpha \ln(t-t_0) + C.$$

Следовательно X_1 , а потому и X , имеют подвижную логарифмическую точку ветвления в рассматриваемом случае.

3. Если $n = 2m$, то, полагая $p = 2$, $q = 2m$, при $\lambda = 0$ упрощенная система примет вид $X' = 0$, $Y' - \frac{e_{2,-m}}{X^m} \cdot Y^2 = \pm \sqrt{f_{4,-2m}} \cdot \frac{Y^2}{X^m}$, из которой имеем $X = X_0$, $Y = \frac{\alpha}{t-t_0}$, где $\alpha = -\frac{X_0^m}{e_{2,-m} \pm \sqrt{f_{4,-2m}}}$.

Разлагая решения системы (3.5) по степеням λ , получим

$$X = X_0 + \lambda^{2m-2} X_1 + \lambda^{2m-1} X_2 + \dots,$$

$$Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2 + \dots$$

Для нахождения X_1 будем иметь уравнение $\frac{dX_1}{dt} = \frac{\alpha}{t-t_0}$, из которого находим, что

$$X_1 = \alpha \ln(t-t_0) + C.$$

Следовательно X_1 , а потому и X , имеют подвижную логарифмическую точку ветвления в рассматриваемом случае.

Таким образом, имеет место

Лемма 3.4. При $m > 1$ или $n > 2$ общее решение дифференциального уравнения (3.2), где E_2, F_4 определяются соотношениями (3.3), имеет подвижные критические особые точки.

Согласно лемме 3.4, для отсутствия подвижных критических особых точек у общего решения уравнения (3.2) необходимо, чтобы

$$E_2 = \frac{e_{2,-1}}{x} + e_{2,0} + e_{2,1}x + \dots, \tag{3.6}$$

$$F_4 = \frac{f_{4,-2}}{x^2} + \frac{f_{4,-1}}{x} + f_{4,0} + f_{4,1}x + \dots$$

Рассмотрим уравнение (3.2) в случае

$$|e_{2,-1}| + |f_{4,-2}| \neq 0. \tag{3.7}$$

Введем в (3.2) малый параметр λ по формуле $x = \lambda^2 X$. При $\lambda = 0$ имеем упрощенное дифференциальное уравнение

$$\left(X'' - e_{2,-1} \cdot \frac{X'^2}{X} \right)^2 = f_{4,-2} \cdot \frac{X'^4}{X^2}.$$

Интегрируя его, получим

$$X = \exp(C_1 t + C_2), \text{ если } \mu = 1;$$

$$X = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{1-\mu}}, \text{ если } \mu \neq 1,$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования,

$$\mu = e_{2,-1} \pm \sqrt{f_{4,-2}}, \tag{3.8}$$

откуда $e_{2,-1} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\gamma} \right)$, $\sqrt{f_{4,-2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\gamma} \right)$,

$\delta, \gamma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Следовательно, имеет место

Лемма 3.5. Для отсутствия у решений дифференциального уравнения (3.2) в случае (3.6), (3.7) подвижных критических особых точек необходимо, чтобы было $\mu = 1$, либо $\mu = 1 - \frac{1}{\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, где μ определяется (3.8).

Пусть $e_{2,-1} = 0$. Тогда, с учетом (3.6), где $f_{4,-2} \neq 0$, уравнение (3.2) запишем в виде

$$\left(x'' - (e_{2,0} + e_{2,1}x + \dots)x'^2 \right)^2 = \left(\frac{f_{4,-2}}{x^2} + \frac{f_{4,-1}}{x} + f_{4,0} + f_{4,1}x + \dots \right) \cdot x'^4.$$

Введем малый параметр λ по формулам $x = \lambda X$, при $\lambda = 0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$X''^2 = f_{4,-2} \cdot \frac{X'^4}{X^2}.$$

В [8], непосредственным интегрированием, найдено общее решение этого уравнения, которое однозначно только при $f_{4,-2} = 0$.

Также F_4 не может иметь простой полюс при значении $x = x_0$, для которого E_2 голоморфна,

поскольку в этом случае $x(t)$ должна допускать сходящееся разложение по возрастающим степеням $(t-t_0)^{\frac{1}{2}}$ в виде

$$x(t) = x_0 + a_1 \cdot (t-t_0) + h_0 \cdot (t-t_0)^{\frac{3}{2}} + a_2 \cdot (t-t_0)^2 + h_1 \cdot (t-t_0)^{\frac{5}{2}} + \dots$$

В этом разложении x_0 и a_1 – постоянные интегрирования, и

$$h_0 = \pm \frac{4}{3} \cdot a_1^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{f_{4,-1}} \neq 0.$$

Следовательно, $x(t)$ имеет подвижную алгебраическую точку ветвления.

Таким образом

$$E_2 = \sum \frac{\alpha_{2k}}{x-\beta_k} + \varphi_{20} + \varphi_{21}x + \dots + \varphi_{2m}x^m,$$

$$F_4 = \sum \frac{\eta_{4k}}{(x-\beta_k)^2} + \sum \frac{\gamma_{4k}}{x-\beta_k} + \psi_{40} + \psi_{41}x + \dots + \psi_{4n}x^n,$$

где $\alpha_{2k} \neq 0$ или $\alpha_{2k} = \eta_{4k} = \gamma_{4k} = 0$.

Подставим полученные выражения для E_2 ,

F_4 в (3.2) и выполним замену $x = \frac{1}{y}$. Получим

$$\left(y'' + \left(\sum \frac{\alpha_{2k}}{y(1-y\beta_k)} - \frac{2}{y} + \frac{\varphi_{20}}{y^2} + \frac{\varphi_{21}}{y^3} + \dots + \frac{\varphi_{2m}}{y^{m+2}} \right) y'^2 \right)^2 =$$

$$= \left(\sum \frac{\eta_{4k}}{y^2(1-y\beta_k)^2} + \sum \frac{\gamma_{4k}}{y^3(1-y\beta_k)} + \frac{\psi_{40}}{y^4} + \frac{\psi_{41}}{y^5} + \dots + \frac{\psi_{4n}}{y^{n+4}} \right) y'^4.$$

Согласно лемме 3.4, для отсутствия подвижных критических особых точек у решений дифференциального уравнения (3.2), необходимо требовать, чтобы $\varphi_{2i} = 0$, $i = 0, m$, и $\psi_{4j} = 0$, $j = 0, n$.

Таким образом, имеет место

Лемма 3.6. Для отсутствия у решений уравнения (3.1) подвижных критических особых точек необходимо, чтобы

$$E_2(x, t) = \sum \frac{\alpha_{2k}(t)}{x-\beta_k(t)},$$

$$F_4(x, t) = \sum \frac{\eta_{4k}(t)}{(x-\beta_k(t))^2} + \sum \frac{\gamma_{4k}(t)}{x-\beta_k(t)},$$

причем, если $\alpha_{2k}(t) = 0$, то должно быть

$$\eta_{4k}(t) = \gamma_{4k}(t) = 0.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(x'' - \left(E_2(x, t)x'^2 + E_1(x, t)x' + E_0(x, t) \right) \right)^2 =$$

$$= F_4(x, t)x'^4 + F_3(x, t)x'^3 + \quad (3.9)$$

$$+ F_2(x, t)x'^2 + F_1(x, t)x' + F_0(x, t),$$

где $E_2, E_1, E_0, F_4, F_3, F_2, F_1, F_0$ – рациональные функции по x с аналитическими по t коэффициентами. Пусть $x = h(t)$ при каждом t будет полюсом рассматриваемых функций. Поскольку подстановка $X = x - h(t)$, не изменяя существенно уравнение, изменяет указанный полюс в рассматриваемых функциях на $X = 0$, то можно принять, что $h(t)$ тождественно равно нулю. Таким образом, с учетом доказанных выше лемм, уравнение (3.9) может быть записано в форме

$$\left(x'' - \left[\frac{x'^2}{x} (e_{2,-1} + O(x)) + \frac{x'}{x^n} (e_{1,-n} + O(x)) + \frac{1}{x^m} (e_{0,-m} + O(x)) \right] \right)^2 = \frac{x'^4}{x^2} (f_{4,-2} + O(x)) + \frac{x'^3}{x^k} (f_{3,-k} + O(x)) + \frac{x'^2}{x^l} (f_{2,-l} + O(x)) + \frac{x'}{x^j} (f_{1,-j} + O(x)) + \frac{1}{x^i} (f_{0,-i} + O(x)).$$

Будем считать, что имеет место (3.7). Введем малый параметр по формулам $x = \lambda X$, $t = t_0 + \lambda' z$. В результате получим

$$\left(\ddot{X} - \left[\frac{\dot{X}^2}{X} (e_{2,-1} + O(\lambda)) + \lambda'^{r-n} \frac{\dot{X}}{X^n} (e_{1,-n} + O(\lambda)) + \lambda^{2r-1-m} \frac{1}{X^m} (e_{0,-m} + O(\lambda)) \right] \right)^2 =$$

$$= \frac{\dot{X}^4}{X^2} (f_{4,-2} + O(\lambda)) + \lambda'^{r+k} \frac{\dot{X}^3}{X^k} (f_{3,-k} + O(\lambda)) + \lambda^{2r-l} \frac{\dot{X}^2}{X^l} (f_{2,-l} + O(\lambda)) + \lambda^{3r-j} \frac{\dot{X}}{X^j} (f_{1,-j} + O(\lambda)) + \lambda^{4r-2-i} \frac{1}{X^i} (f_{0,-i} + O(\lambda)), \quad (3.10)$$

здесь точки обозначают производные по новой независимой переменной z .

Сравнивая выражения $r-n$, $2r-1-m$, $r+1-k$, $2r-l$, $3r-1-j$, $4r-2-i$ при $\lambda = 0$ получим соответствующие упрощенные уравнения. Однако, все эти уравнения можно заменить одним

$$\left(\ddot{X} - \left[e_{2,-1} \cdot \frac{\dot{X}^2}{X} + e_{1,-n} \cdot \frac{\dot{X}}{X^n} + e_{0,-2n+1} \cdot \frac{1}{X^{2n-1}} \right] \right)^2 =$$

$$= f_{4,-2} \cdot \frac{\dot{X}^4}{X^2} + f_{3,-n-1} \cdot \frac{\dot{X}^3}{X^{n+1}} + f_{2,-2n} \cdot \frac{\dot{X}^2}{X^{2n}} +$$

$$+ f_{1,-3n+1} \cdot \frac{\dot{X}}{X^{3n-1}} + f_{0,-4n+2} \cdot \frac{1}{X^{4n-2}}, \quad (3.11)$$

если считать

$$|e_{1,-n}| + |e_{0,-2n+1}| + |f_{3,-n-1}| + |f_{2,-2n}| + |f_{1,-3n+1}| + |f_{0,-4n+2}| \neq 0. \quad (3.12)$$

В (3.11) выполним замену

$$\dot{X}X^{n-1} = \frac{1}{Y}. \quad (3.13)$$

Тогда, находя логарифмическую производную, получим

$$\frac{\ddot{X}}{\dot{X}} = -\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{(n-1)\dot{X}}{X}. \quad (3.14)$$

В силу (3.13), (3.14) уравнение (3.11) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \left(\dot{X} \left(-\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{(n-1)\dot{X}}{X} \right) - \right. \\ & \left. \left[e_{2,-1} \cdot \frac{\dot{X}^2}{X} + e_{1,-n} \cdot \frac{\dot{X}}{X^n} + e_{0,-2n+1} \cdot \frac{1}{X^{2n-1}} \right] \right)^2 = \\ & = f_{4,-2} \cdot \frac{\dot{X}^4}{X^2} + f_{3,-n-1} \cdot \frac{\dot{X}^3}{X^{n+1}} + f_{2,-2n} \cdot \frac{\dot{X}^2}{X^{2n}} + \\ & + f_{1,-3n+1} \cdot \frac{\dot{X}}{X^{3n-1}} + f_{0,-4n+2} \cdot \frac{1}{X^{4n-2}}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -\dot{Y}X^n &= n-1 + e_{2,-1} + e_{1,-n} \cdot Y + e_{0,-2n+1} \cdot Y^2 \pm \\ & \pm \sqrt{f_{4,-2} + f_{3,-n-1} \cdot Y + f_{2,-2n} \cdot Y^2 + f_{1,-3n+1} \cdot Y^3 + f_{0,-4n+2} \cdot Y^4}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Уравнение (3.11) заменим системой

$$\begin{aligned} -\dot{Y}X^n &= n-1 + e_{2,-1} + e_{1,-n} \cdot Y + e_{0,-2n+1} \cdot Y^2 \pm \\ & \pm \sqrt{f_{4,-2} + f_{3,-n-1} \cdot Y + f_{2,-2n} \cdot Y^2 + f_{1,-3n+1} \cdot Y^3 + f_{0,-4n+2} \cdot Y^4}, \end{aligned}$$

$$\dot{X} = \frac{1}{YX^{n-1}}. \quad (3.16)$$

Если $n > 1$, то $n-1 + \mu \neq 0$ в силу леммы

3.5. Поэтому уравнение

$$\begin{aligned} & n-1 + e_{2,-1} + e_{1,-n}Y + e_{0,-2n+1}Y^2 \pm \\ & \pm \sqrt{f_{4,-2} + f_{3,-n-1}Y + f_{2,-2n}Y^2 + f_{1,-3n+1}Y^3 + f_{0,-4n+2}Y^4} = 0 \end{aligned}$$

относительно Y с постоянными коэффициентами имеет не меньше одного не равного нулю корня, например $Y = Y_1$. Тогда $Y = Y_1$ будет частным решением первого уравнения системы (3.16). Но второе уравнение системы имеет решение с подвижной критической особой точкой (поскольку $n > 1$). Следовательно, уравнение (3.11) не обладает свойством Пенлеве. Итак, n должно равняться единице, и соответственно $m = 1$, $k = 2$, $l = 2$, $j = 2$, $i = 2$. Таким образом, если $E_1, E_0, F_3, F_2, F_1, F_0$ имеют полюс $x = h(t)$, то для E_1, E_0 он должен быть первого порядка, а для F_3, F_2, F_1, F_0 – не выше второго порядка.

Рассмотрим уравнение (3.11) в случае $e_{2,-1} = 0$, при этом $f_{4,-2} = 0$ по лемме 3.6, т. е., когда $X = 0$ является полюсом хотя бы для

одной из функций $E_1, E_0, F_3, F_2, F_1, F_0$, но не является полюсом для E_2, F_4 . Значит (3.11) примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{X} - \left[e_{1,-1} \cdot \frac{\dot{X}}{X} + e_{0,-1} \cdot \frac{1}{X} \right] \right)^2 = \\ & = f_{3,-2} \cdot \frac{\dot{X}^3}{X^2} + f_{2,-2} \cdot \frac{\dot{X}^2}{X^2} + f_{1,-2} \cdot \frac{\dot{X}}{X^2} + f_{0,-2} \cdot \frac{1}{X^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

и будет эквивалентно системе

$$\begin{aligned} & \dot{X} = \frac{1}{Y}, \\ & \left(\dot{Y} + \left[e_{1,-1} \cdot \frac{Y}{X} + e_{0,-1} \cdot \frac{Y^2}{X} \right] \right)^2 = \\ & = f_{3,-2} \cdot \frac{Y}{X^2} + f_{2,-2} \cdot \frac{Y^2}{X^2} + f_{1,-2} \cdot \frac{Y^3}{X^2} + f_{0,-2} \cdot \frac{Y^4}{X^2}. \end{aligned}$$

Введя в эту систему малый параметр λ по формулам $z = \lambda^2 \tau$, $X = u$, $Y = \lambda^2 w$, получим

$$\begin{aligned} & w \frac{dw}{d\tau} = 1, \\ & \left(u \frac{dw}{d\tau} + e_{1,-1} w \lambda^2 + e_{0,-1} w^2 \lambda^4 \right)^2 = \\ & = f_{3,-2} w \lambda^2 + f_{2,-2} w^2 \lambda^4 + f_{1,-2} w^3 \lambda^6 + f_{0,-2} w^4 \lambda^8. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Будем искать решение системы (3.18) в виде ряда по степеням λ :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots, \\ w &= w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в (3.18), найдем системы уравнений для определения функций u_i, w_j . Из

них получим, что $w_0 = const$, $u_0 = \frac{\tau - \tau_0}{w_0}$.

Далее, если $f_{3,-2} \neq 0$, то

$$w_1 = \pm w_0 \sqrt{f_{3,-2} w_0} \ln(\tau - \tau_0).$$

Следовательно, w_1 имеет подвижную логарифмическую точку ветвления. Поэтому требуем, чтобы $f_{3,-2} = 0$. Тогда $w_1 = const$.

Если $|e_{1,-1}| + |f_{2,-2}| \neq 0$, то

$$w_2 = -w_0^2 \left(e_{1,-1} \pm \sqrt{f_{2,-2}} \right) \ln(\tau - \tau_0).$$

Требуем, чтобы $e_{1,-1} = 0$, $f_{2,-2} = 0$. Тогда $w_2 = const$.

Если $f_{1,-2} \neq 0$, то

$$w_3 = \pm w_0^2 \sqrt{f_{1,-2} w_0} \ln(\tau - \tau_0).$$

Следовательно, надо требовать, чтобы $f_{1,-2} = 0$.

Тогда $w_3 = const$.

Если $|e_{0,-1}| + |f_{0,-2}| \neq 0$, то

$$w_4 = -w_0^3 \left(e_{0,-1} \pm \sqrt{f_{0,-2}} \right) \ln(\tau - \tau_0).$$

Значит, надо полагать, что $e_{0,-1} = 0$, $f_{0,-2} = 0$.

Тогда $w_4 = const$.

Таким образом, имеет место

Лемма 3.7. Для отсутствия у общего решения дифференциального уравнения (3.1), подвижных критических особых точек необходимо, чтобы полюс $x = h(t)$ для E_2, E_1, E_0 был первого порядка, а для F_4, F_3, F_2, F_1, F_0 – не выше второго порядка и полюсы функций $E_1, E_0, F_4, F_3, F_2, F_1, F_0$ совпадали с полюсами функции E_2 .

Следовательно, уравнение (3.9) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \left(x'' - \left[\sum \frac{\alpha_{2k}}{x - \beta_k} \cdot x'^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\sum \frac{\alpha_{1k}}{x - \beta_k} + \varphi_{10} + \varphi_{11}x + \dots + \varphi_{1m}x^m \right) \cdot x' + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum \frac{\alpha_{0k}}{x - \beta_k} + \varphi_{00} + \varphi_{01}x + \dots + \varphi_{0n}x^n \right] \right)^2 = \\ & = \left(\sum \frac{\eta_{4k}}{(x - \beta_k)^2} + \sum \frac{\gamma_{4k}}{x - \beta_k} \right) \cdot x'^4 + \\ & + \left(\sum \frac{\eta_{3k}}{(x - \beta_k)^2} + \sum \frac{\gamma_{3k}}{x - \beta_k} + \right. \\ & \left. + \psi_{30} + \psi_{31}x + \dots + \psi_{3r}x^r \right) \cdot x'^3 + \\ & + \left(\sum \frac{\eta_{2k}}{(x - \beta_k)^2} + \sum \frac{\gamma_{2k}}{x - \beta_k} + \right. \\ & \left. + \psi_{20} + \psi_{21}x + \dots + \psi_{2l}x^l \right) \cdot x'^2 + \\ & + \left(\sum \frac{\eta_{1k}}{(x - \beta_k)^2} + \sum \frac{\gamma_{1k}}{x - \beta_k} + \right. \\ & \left. + \psi_{10} + \psi_{11}x + \dots + \psi_{1j}x^j \right) \cdot x' + \\ & + \sum \frac{\eta_{0k}}{(x - \beta_k)^2} + \sum \frac{\gamma_{0k}}{x - \beta_k} + \psi_{00} + \psi_{01}x + \dots + \psi_{0i}x^i, \end{aligned}$$

где коэффициенты – аналитические по t функции. Выполним замену $x = \frac{1}{y}$, получим

$$\begin{aligned} & \left(y'' - 2 \frac{y'^2}{y} + \left[\sum \frac{\alpha_{2k}}{y(1 - y\beta_k)} \cdot y'^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\sum \frac{y\alpha_{1k}}{1 - y\beta_k} + \varphi_{10} + \frac{\varphi_{11}}{y} + \frac{\varphi_{12}}{y^2} + \dots + \frac{\varphi_{1m}}{y^m} \right) \cdot y' + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum \frac{y^3\alpha_{0k}}{1 - y\beta_k} + \varphi_{00}y^2 + \varphi_{01}y + \varphi_{02} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varphi_{03}}{y} + \frac{\varphi_{04}}{y^2} + \dots + \frac{\varphi_{0m}}{y^{m-2}} \right] \right)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \left(\sum \frac{\eta_{4k}}{y^2(1 - y\beta_k)^2} + \sum \frac{\gamma_{4k}}{y^3(1 - y\beta_k)} \right) \cdot y'^4 + \\ & + \left(\sum \frac{\eta_{3k}}{(1 - y\beta_k)^2} + \sum \frac{\gamma_{3k}}{y(1 - y\beta_k)} + \right. \\ & \left. + \frac{\psi_{30}}{y^2} + \frac{\psi_{31}}{y^3} + \dots + \frac{\psi_{3r}}{y^{r+2}} \right) \cdot y'^3 + \\ & + \left(\sum \frac{y^2\eta_{2k}}{(1 - y\beta_k)^2} + \sum \frac{y\gamma_{2k}}{1 - y\beta_k} + \right. \\ & \left. + \eta_{20} + \frac{\psi_{21}}{y} + \frac{\psi_{22}}{y^2} + \frac{\psi_{23}}{y^3} + \dots + \frac{\psi_{2l}}{y^l} \right) \cdot y'^2 + \\ & + \left(\sum \frac{y^4\eta_{1k}}{(1 - y\beta_k)^2} + \sum \frac{y^3\gamma_{1k}}{1 - y\beta_k} + \right. \\ & \left. + \psi_{10}y^2 + \psi_{11}y + \psi_{12} + \right. \\ & \left. + \frac{\psi_{13}}{y} + \frac{\psi_{14}}{y^2} + \frac{\psi_{15}}{y^3} + \dots + \frac{\psi_{1j}}{y^{j-2}} \right) \cdot y' + \\ & + \sum \frac{y^6\eta_{0k}}{(1 - y\beta_k)^2} + \sum \frac{y^5\gamma_{0k}}{1 - y\beta_k} + \\ & + \psi_{00}y^4 + \psi_{01}y^3 + \psi_{02}y^2 + \psi_{03}y + \\ & + \psi_{04} + \frac{\psi_{05}}{y} + \frac{\psi_{06}}{y^2} + \frac{\psi_{07}}{y^3} + \dots + \frac{\psi_{0i}}{y^{i-4}}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1. Для того, чтобы общее решение уравнения (3.1) имело свойство Пенлеве необходимо, чтобы оно имело вид

$$\begin{aligned} & \left(x'' + \sum \frac{\alpha_{2k}}{x - \beta_k} \cdot x'^2 + \left(\varphi_{11}x + \varphi_{10} + \sum \frac{\alpha_{1k}}{x - \beta_k} \right) \cdot x' + \right. \\ & \left. + \varphi_{03}x^3 + \varphi_{02}x^2 + \varphi_{01}x + \varphi_{00} + \sum \frac{\alpha_{0k}}{x - \beta_k} \right)^2 = \\ & = \left(\sum \frac{\gamma_{4k}}{x - \beta_k} + \sum \frac{\eta_{4k}}{(x - \beta_k)^2} \right) \cdot x'^4 + \\ & + \left(\psi_{30} + \sum \frac{\gamma_{3k}}{x - \beta_k} + \sum \frac{\eta_{3k}}{(x - \beta_k)^2} \right) \cdot x'^3 + \\ & + \left(\psi_{22}x^2 + \psi_{21}x + \psi_{20} + \right. \\ & \left. + \sum \frac{\gamma_{2k}}{x - \beta_k} + \sum \frac{\eta_{2k}}{(x - \beta_k)^2} \right) \cdot x'^2 + \\ & + \left(\psi_{14}x^4 + \psi_{13}x^3 + \psi_{12}x^2 + \psi_{11}x + \psi_{10} + \right. \\ & \left. + \sum \frac{\gamma_{1k}}{x - \beta_k} + \sum \frac{\eta_{1k}}{(x - \beta_k)^2} \right) \cdot x' + \\ & + \psi_{06}x^6 + \psi_{05}x^5 + \psi_{04}x^4 + \psi_{03}x^3 + \end{aligned}$$

$$+\psi_{02}x^2 + \psi_{01}x + \psi_{00} + \sum \frac{\gamma_{0k}}{x - \beta_k} + \sum \frac{\eta_{0k}}{(x - \beta_k)^2},$$

где коэффициенты – аналитические по t функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынов, И.П. Системы двух дифференциальных уравнений первого порядка и второй степени типа Пенлеве / И.П. Мартынов, В.М. Пецевич, В.А. Пронько // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1712–1714.

2. Детченя, Л.В. Об одной системе двух дифференциальных уравнений второй степени со специальной правой частью со свойством Пенлеве / Л.В. Детченя, В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. – 2013. – № 3 (159). – С. 48–55.

3. Пецевич, В. М. Аналитические свойства решений системы двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной / В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. – 2015. – № 1 (186). – С. 35–40.

4. Пецевич, В.М. Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка / В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 48–51.

5. Пецевич, В. М. Об одной системе второго порядка без подвижных многозначных особенностей / В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. – 2016. – Т. 6, № 3. – С. 29–34.

6. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 719 с.

7. Bureau, F. Equations differentielles du second ordre en Y et du second degre en \dot{Y} dont l'integrale generale est a points critiques fixes / F. Bureau // Ann. di Math. – 1972. – Vol. 91. – P. 163–281.

8. Cosgrove, C.M. Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / C.M. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. – 1993. – Vol. 88. – P. 25–87.

Поступила в редакцию 13.04.18.

НОВЫЕ КРИТЕРИИ АССОЦИАТИВНОСТИ l -АРНОЙ ОПЕРАЦИИ $\eta_{s, \sigma, k}$

А.Д. Русаков, М.В. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

NEW CRITERIA OF ASSOCIATIVITY OF l -ARY OPERATION $\eta_{s, \sigma, k}$

A.D. Rusakou, M.V. Selkin

F. Scorina Gomel State University

Получены новые критерии ассоциативности операции $\eta_{s, \sigma, k}$ для некоторых конкретных подстановок.

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, группа, ассоциативность.

The new criteria of associativity of the operation $\eta_{s, \sigma, k}$ are found for some specific substitutions.

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, group, associativity.

Введение

Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ была определена в [1]. Если в определении операции $\eta_{s, \sigma, k}$ положить $n = 2$, то получим определение l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2]. Подробному изучению операции $[\]_{l, \sigma, k}$ и некоторых её обобщений посвящена книга [3]. При

$$k = m - 1, l = m, \sigma = (12 \dots m - 1), A = S_n$$

операция $[\]_{l, \sigma, k}$ совпадает с m -арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени S_n^{m-1} симметрической группы S_n , а при $A = GL_n(C)$ и тех же k, l и σ операция $[\]_{l, \sigma, k}$ совпадает с m -арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени $GL_n^{m-1}(C)$ полной линейной группы $GL_n(C)$. Таким образом, и операция $[\]_{l, \sigma, k}$ и обе отмеченные операции Э. Поста являются частными случаями операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

В данной статье получены новые критерии ассоциативности операции $\eta_{s, \sigma, k}$ для некоторых конкретных подстановок, в частности для циклических подстановок

1 Предварительные сведения

Напомним, что n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют *ассоциативной*, если в нём выполняется каждое из следующих $n - 1$ тождеств

$$\begin{aligned} & [[x_1 \dots x_n]x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = \\ & = [x_1[x_2 \dots x_{n+1}]x_{n+2} \dots x_{2n-1}], \\ & [[x_1 \dots x_n]x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = \\ & = [x_1x_2[x_3 \dots x_{n+2}]x_{n+3} \dots x_{2n-1}], \\ & \dots \\ & [[x_1 \dots x_n]x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = \\ & = [x_1 \dots x_{n-2}[x_{n-1} \dots x_{2n-2}]x_{2n-1}], \\ & [[x_1 \dots x_n]x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = \end{aligned}$$

$$= [x_1 \dots x_{n-1}[x_n \dots x_{2n-1}]].$$

Если в $\langle A, \eta \rangle$ выполняется последнее тождество, то n -арную операцию η называют *полуассоциативной*.

Теорема 1.1 [1]. *Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.*

В [5] доказано, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и наличие в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ идемпотента a и отличного от него элемента b такого, что

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} b) \neq a, \tag{1.1}$$

является достаточным условием неполуассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 1.2 [5]. *Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество*

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l)x_{l+1} \dots x_{2l-1}) = \\ & = \eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_{l-1}\eta_{s, \sigma, k}(x_l \dots x_{2l-1})), \end{aligned} \tag{1.2}$$

то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Заметим, что ранее в [6] было доказано, что для неполуассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ достаточно наличия в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$, содержащей более одного элемента, левой нейтральной последовательности и выполнение условия $\sigma^l \neq \sigma$.

Теоремы 1.1 и 1.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.3 [5]. *Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:*

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Напомним, что n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ называют n -арным группоидом с левым сокращением, если для любых $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a, b \in A$ из

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1}a) = \eta(x_1 \dots x_{n-1}b)$$

следует $a = b$.

Теорема 1.4 [5]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (1.2), то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Теоремы 1.1 и 1.4 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.5 [5]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{td + 1 \mid t = 1, 2, \dots, \}; \quad (2.1)$$

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \dots, ; r = 2, \dots, d\}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Множество всех натуральных чисел $l \geq 2$ может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, присутствующих в (2.1) и (2.2).

Так как подстановка σ имеет порядок d , то для всех l из (2.1) верно равенство $\sigma^l = \sigma$, а для всех l из (2.2) верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$.

1) Пусть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (2.1). Тогда l принадлежит множеству из (2.2), и верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 1.3 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ – неассоциативна, что противоречит её ассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (2.1), то верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по

теореме 1.1 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной.

2) Пусть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (2.2). Тогда l принадлежит множеству из (2.1) и верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 1.1 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ – ассоциативна, что противоречит её неассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (2.2), то верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 1.3 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной. \square

Заметим, что в доказательстве теоремы 2.1 вместо теоремы 1.1, может быть использована и теорема 1.3.

Так как любой цикл длины k из S_k имеет порядок k , то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + 1 \mid t = 1, 2, \dots, \}; \quad (2.3)$$

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \dots, ; r = 2, \dots, k\}. \quad (2.4)$$

Полагая в следствии 2.1 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 2.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1). Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Так как для всякого идемпотента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ и отличного от него элемента b верно (1.1), то следующая теорема получается из теоремы 2.1, если в ней n -арную полугруппу заменить n -арной группой.

Теорема 2.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная группа, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Следующие два следствия можно извлечь как из теоремы 2.2, так и из следствий 2.1 и 2.2 соответственно.

Следствие 2.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная группа, обладающая идемпотентом; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Следствие 2.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, обладающая идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Если в теореме 2.1 положить $d = 2$, то множество всех l в (2.1) совпадает с множеством всех нечётных чисел без единицы, а множество всех l в (2.2) совпадает с множеством всех чётных чисел. Если при этом учесть, что порядок любой транспозиции равен двум, то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Аналогично, из теоремы 2.2 или из следствия 2.5 вытекает

Следствие 2.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, обладающая идемпотентом; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Полагая в следствиях 2.5 и 2.6 $\sigma = (12)$, получим ещё два следствия.

Следствие 2.7. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1). Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Следствие 2.8. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, обладающая идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Замечание 2.1. Если в приведённых выше утверждениях этого раздела положить $n = 2$, то получим новые утверждения, отличающиеся от прежних только тем, что в них вместо операции $\eta_{s, \sigma, k}$ будет присутствовать операция $[]_{l, \sigma, k}$. Например, теоремам 2.1 и 2.2 соответствуют следующие два следствия.

Следствие 2.9. Пусть A – полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Следствие 2.10. Пусть A – неединичная группа, σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Так как всякая регулярная полугруппа обладает идемпотентом, то следствие 2.9 позволяет сформулировать

Следствие 2.11. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Следствие 2.12. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Следствие 2.13. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$. Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Случай n -арных группоидов с левым сокращением. Следующая теорема доказывается аналогично теореме 2.1, при этом вместо теоремы 1.3 используется теорема 1.5.

Теорема 2.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.14. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Полагая в следствии 2.14 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 2.15. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Если в теореме 2.3 положить $d = 2$, то из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.16. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Полагая в следствии 2.15 $k = 2$ или в следствии 2.16 $\sigma = (12)$, получим

Следствие 2.17. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Замечание 2.2. Если в теореме 2.3 и следствиях из неё положить $n = 2$, то получим новые утверждения, отличающиеся от прежних только тем, что в них вместо операции $\eta_{s, \sigma, k}$ будет присутствовать операция $[]_{l, \sigma, k}$. Например, теореме 2.3 соответствует

Следствие 2.18. Пусть A – неоднородная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.
2. Гальмак, А.М. Многочестные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Гальмак, А.М. О непочасоциативности полиадического группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2017. – № 2. – С. 38–48.
6. Русаков, А.Д. О непочасоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ / А.Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 68–72.

Поступила в редакцию 05.11.17.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ \mathbb{P} -СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППВ.Н. Тютянов¹, Т.В. Тихоненко², П.В. Бычков³¹Международный университет «МИТСО», Гомель²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого³Гомельский государственный университет им. Ф. СкориныPRODUCT OF TWO \mathbb{P} -SUBNORMAL SUBGROUPSV.N. Tyutyaynov¹, T.V. Tihonenko², P.V. Bychkov³¹International University «MITSO», Gomel²P.O. Sukhoi Gomel State Technical University³F. Scorina Gomel State University

Получены свойства \mathbb{P} -субнормальных подгрупп и свойства групп, которые являются произведением двух своих \mathbb{P} -субнормальных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, простая неабелева группа, факторизуемая группа, \mathbb{P} -субнормальная подгруппа.

Some properties of \mathbb{P} -subnormal subgroups and the groups that are products of two \mathbb{P} -subnormal subgroups are obtained.

Keywords: finite group, simple non-abelian group, factorized group, \mathbb{P} -subnormal subgroup.

Введение

В статье рассматриваются только конечные группы. В работе [1] Л.С. Казарин определил неабелевы композиционные факторы конечной группы G , обладающей рядом подгрупп

$$1 = Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_{n-1} \subset Y_n = G,$$

где $|Y_i : Y_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \dots, n$.

Данная цепь начинается с единичной подгруппы Y_0 . Поэтому в [2] введено следующее естественное определение.

Определение. Подгруппа H группы G называется \mathbb{P} -субнормальной в G (обозначается $H \mathbb{P}$ -sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \dots, n$.

Данное определение оказалось весьма полезным и неоднократно обобщалось [3], [4]. Группам с системами \mathbb{P} -субнормальных подгрупп посвящено достаточно много работ. В частности, в ряде из них изучалось строение факторизуемых групп с \mathbb{P} -субнормальными сомножителями [4], [5], [6].

1 Предварительные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти, например, в [7]. Для удобства приведем некоторые обозначения. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G ; $G = N \rtimes M$ – полупрямое произведение подгрупп

N и M группы G $N \trianglelefteq G$ и $N \cap M = 1$; R^n – прямое произведение n сомножителей, каждый из которых изоморфен группе R ; если $H \leq G$, то $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$.

Нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. Пусть $G = AB$ – конечная группа, где $A \mathbb{P}$ -sn G и $B \mathbb{P}$ -sn G , тогда G не является простой неабелевой группой.

Доказательство. Предположим, что G – простая неабелева группа. По условию существуют подгруппы $M_1 \supseteq A$ и $M_2 \supseteq B$ такие, что $|G : M_1| = p$ и $|G : M_2| = q$, где p и q – простые числа. Так как G – простая неабелева группа, то, очевидно, что G изоморфно вкладывается в симметрические группы S_p и S_q , причем $p = \max \pi(G)$ и $q = \max \pi(G)$. Следовательно, $p = q$, а M_1 и M_2 – p' -подгруппы в группе G . Противоречие с тем, что $G = M_1 M_2$. Таким образом, G не является простой неабелевой группой. \square

Лемма 1.2. Пусть G – конечная группа, $N \trianglelefteq G$ и $R \mathbb{P}$ -sn G . Тогда существует R -инвариантная цепь $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_{n-1} \subset N_n = N$, где $|N_i : N_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \dots, n$. В частности, $R \mathbb{P}$ -sn NR .

Доказательство. Так как R – \mathbb{P} -sn G , то существует цепь

$$R = R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_{t-1} \subset R_t = G,$$

где $|R_i : R_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \dots, t$.

Рассмотрим цепь

$$R \cap N = R_0 \cap N \subseteq \subseteq R_1 \cap N \subseteq \dots \subseteq R_{t-1} \cap N \subseteq R_t \cap N = N.$$

Поскольку для всех $i=1, \dots, t$ $R \leq R_i$ и $R_i \cap N \leq R_i$, то цепь является R -инвариантной. Так как

$$|R_i \cap N : R_{i-1}| = |(R_i \cap N) : R_{i-1}|$$

и

$$|R_i : R_{i-1}| = |R_i : (R_i \cap N)R_{i-1}| \cdot |(R_i \cap N)R_{i-1} : R_{i-1}|,$$

то $|R_i \cap N : R_{i-1} \cap N|$ делит простое число. Следовательно, существует R -инвариантная цепь $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_{n-1} \subset N_n = N$, где $|N_i : N_{i-1}|$ – простое число и $n \leq t$. \square

Лемма 1.3. Пусть $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы $k \geq 2$. Если $H < N$ и $|N : H| = p$ – простое число, то $H = N_{i_1} \times \dots \times N_{i_{k-1}} \times \widetilde{N}_{i_k}$ для некоторой перестановки (i_1, i_2, \dots, i_k) , где $\widetilde{N}_{i_k} < N_{i_k}$ и $|N_{i_k} : \widetilde{N}_{i_k}| = p$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по k . Пусть $k=2$. Если $H_N = 1$, то N изоморфно вкладывается в симметрическую группу S_p . Так как p^2 делит $|N|$, то это невозможно. Значит, $H_N \neq 1$. Очевидно, что $H_N = N_1$ или $H_N = N_2$. Поэтому $H = N_1 \times (H \cap N_2)$ или $H = N_2 \times (H \cap N_1)$ и лемма верна. Следовательно, $k \geq 3$. Ясно, что $H_N \neq 1$. Поэтому $H_N = N_{i_1} \times \dots \times N_{i_t}$. Если $t = k-1$, то лемма верна. При $t < k-1$ рассмотрим фактор-группу N/H_N и применим индукцию.

Лемма 1.4 [5, лемма 3.1]. Пусть H – подгруппа группы G , $N \leq G$. Тогда, если $H \mathbb{P}$ - sn G , то $(H \cap N) \mathbb{P}$ - sn N и $HN/N \mathbb{P}$ - sn G/N .

Лемма 1.5 [8, теорема 1]. Пусть G – простая неабелева группа, $H < G$ и $|G : H| = p^a$, где p – простое число. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

- (a) $G \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$, где $n = p^a$;
- (b) $G \cong PSL_r(q)$, H – параболическая подгруппа в G , $|G : H| = \frac{q^r - 1}{q - 1} = p^a$ и r – простое число;

- (c) $G \cong PSL_2(11)$, $H \cong A_5$;
- (d) $G \cong M_{23}$, $H \cong M_{22}$ или $G \cong M_{11}$, $H \cong M_{10}$;
- (e) $G \cong PSU_4(2)$, H – параболическая подгруппа индекса 27.

Лемма 1.6 [9, лемма 1.1]. Пусть G – простая неабелева группа и $1 \mathbb{P}$ - sn G . Тогда

$$G \in \{SL_3(3); SL_3(5); PSL_2(7); PSL_2(11); SL_2(2^n)\},$$

где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма

Множество групп из леммы 1.6 обозначим \mathcal{D} .

Лемма 1.7 [5, лемма 4.1]. Пусть группа $G = AB$ – произведение подгрупп A и B . Если существуют цепи подгрупп

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = G,$$

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{m-1} \subset B_m = G$$

с простыми индексами $|A_i : A_{i-1}|$, $|B_j : B_{j-1}|$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$, то $(A_{i-1} \cap B) \mathbb{P}$ - sn A_{i-1} и $(B_{j-1} \cap A) \mathbb{P}$ - sn B_{j-1} для всех $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$.

Лемма 1.8. Пусть $G = AB$, где A и B – простые неабелевы группы, \mathbb{P} -субнормальные в G . Если $A \cap B = 1$, то $A \in \mathcal{D}$ и $B \in \mathcal{D}$.

Доказательство. Положив в лемме 1.7 $i=j=0$, получим, что $A \cap B \mathbb{P}$ - sn A и $A \cap B \mathbb{P}$ - sn B . Так как $A \cap B = 1$, то $A \in \mathcal{D}$ и $B \in \mathcal{D}$. \square

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть $G = AB$ – конечная группа, где $A \mathbb{P}$ - sn G и $B \mathbb{P}$ - sn G . Если \mathfrak{R}_A и \mathfrak{R}_B – простые неабелевы композиционные факторы A и B соответственно, то $\mathfrak{R}_G = \mathfrak{R}_A \cup \mathfrak{R}_B$ – простые неабелевы композиционные факторы группы G .

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме. По лемме 1.1 G не является простой неабелевой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как G/N удовлетворяет условию теоремы, то, в силу минимальности контрпримера, N является неразрешимой группой. Следовательно, $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Отметим, $N_1 \notin \mathfrak{R}_A \cup \mathfrak{R}_B$ и, в частности, $N \not\subseteq A$ и $N \not\subseteq B$.

Пусть $A \subset N$, тогда $B \not\subseteq N$. Так как $G = AB$, то $N = A(N \cap B)$ и по лемме 1.4 $A \mathbb{P}$ - sn N , $N \cap B \mathbb{P}$ - sn N . Поскольку G – минимальный контрпример, то $N_1 \in \mathfrak{R}_A \cup \mathfrak{R}_{N \cap B}$, что невозможно. Таким образом, $A \not\subseteq N$ и $B \not\subseteq N$.

Предположим, что $k=1$. Рассмотрим группу NA . По лемме 1.2 в N существует A -инвариантная цепь

$$N \cap A = N_1 \subset \dots \subset N_{t-1} = H \subset N_t = N,$$

где $|N : H| = p$ – простое число. Из леммы 1.5 следует, что это возможно только в случаях пар

$\{N; H\} : \{A_p; A_{p-1}\}$, $\{PSL_r(q)\}$, где $\frac{q^r - 1}{q - 1} = p$ и r – простое число; P_1 или P_{r-1} , $\{M_{23}; M_{22}\}$, $\{M_{11};$

M_{10} }, $\{PSL_2(11); A_5\}$. Аналогично, для подгруппы NB получим точно такие же пары $\{N; U\}$. Рассмотрим последовательно все случаи. Отметим, что факторизации почти простых групп рассмотрены в работе [10], которой мы воспользуемся.

(1) $N \cong A_p$. В этом случае $H \cong U \cong A_{p-1}$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому

$$G = N_G(H)N_G(U).$$

Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

(2) $N \cong PSL_r(q)$. В этом случае $H \in \{P_1, P_{r-1}\}$, $U \in \{P_1, P_{r-1}\}$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому $G = N_G(H)N_G(U)$. Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

(3) $N \cong M_{23}$. В этом случае $H \cong U \cong M_{22}$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому

$$G = N_G(H)N_G(U).$$

Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

(4) $N \cong M_{11}$. В этом случае $H \cong U \cong M_{10}$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому

$$G = N_G(H)N_G(U).$$

Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

(5) $N \cong PSL_2(11)$. В этом случае $H \cong U \cong A_5$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому $G = N_G(H)N_G(U)$. Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

Следовательно, $k \geq 2$. По лемме 1.2 подгруппа N имеет A -инвариантную подгруппу H простого индекса p в N . По лемме 1.3 будем считать, что $H = N_1 \times \dots \times N_{k-1} \times \widetilde{N}_k$, где $|N_k : \widetilde{N}_k| = p$.

Покажем, что группа $N_1 \times \dots \times N_{k-1}$ является A -инвариантной. Так как для всякого $a \in A$ имеем $(N_1 \times \dots \times N_{k-1})^a \subseteq H^a = H$, то, если $N_i^a = N_k$ для некоторого $1 \leq i \leq k-1$, получим, что $N \subseteq H$. Последнее невозможно. Поэтому $N_1 \times \dots \times N_{k-1}$ – A -инвариантна.

Подгруппа N имеет B -инвариантную подгруппу U простого индекса p в N . Если $U = N_1 \times \dots \times N_{k-1} \times N_k^*$, где $|N_k : N_k^*| = p$, то $N_1 \times \dots \times N_{k-1} \triangleleft AB = G$, что невозможно, поскольку N – минимальная нормальная подгруппа в группе G . Без ограничения общности можно считать, что $U = N_2 \times \dots \times N_k \times \widetilde{N}_1$, где $|N_1 : \widetilde{N}_1| = p$. Так как G действует транзитивно на $\{N_1, \dots, N_k\}$, то найдется элемент $g \in G$ такой, что $N_1^g = N_k$.

Тогда

$$U^g = N_2^g \times \dots \times N_k^g \times \widetilde{N}_1^g = N_2^g \times \dots \times N_k^g \times \widehat{N}_k = N_1 \times \dots \times N_{k-1} \times \widehat{N}_k,$$

где $|N_k : \widehat{N}_k| = p$ и $N_1 \times \dots \times N_{k-1} \triangleleft B^g$. Так как

$G = AB^g$, то $N_1 \times \dots \times N_{k-1} \triangleleft G$. Последнее невозможно, так как N – минимальная нормальная подгруппа в G . \square

Следствие 2.2 [5, теорема 4.2]. Пусть группа $G = AB$ – произведение разрешимых подгрупп A и B . Если A и B – \mathbb{P} -субнормальные подгруппы группы G , то G разрешима.

Теорема 2.3. Пусть $G = AB$ – конечная группа, где A – \mathbb{P} -субнормальная в G подгруппа нечетного порядка, B – разрешимая подгруппа. Тогда G является разрешимой группой.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме. Предположим, что G – простая неабелева группа. По теореме Томпсона – Фейта A – разрешимая группа. Так как A – \mathbb{P} -субнормальная в G подгруппа, то 1 – \mathbb{P} -сп G и по лемме 1.6 $G \in \mathcal{D}$. Рассмотрим все случаи.

(1) $G \cong SL_3(3)$. Группа $SL_3(3)$ допускает только следующие факторизации:

$$SL_3(3) = 13(3^2 : 2S_4) = 13(3^2 : 2S_4)^* = (13 : 3)(3^2 : 2S_4) = (13 : 3)(3^2 : 2S_4)^*,$$

где $3^2 : 2S_4$ и $(3^2 : 2S_4)^*$ – несопряженные в $SL_3(3)$ подгруппы. Поскольку подгруппы 13 и $13:3$ не \mathbb{P} -субнормальны в $SL_3(3)$, то группа $SL_3(3)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

(2) $G \cong SL_3(5)$. Группа $SL_3(5)$ допускает только следующие факторизации:

$$SL_3(5) = 31(5^2 : GL_2(5)) = 31(5^2 : GL_2(5))^* = (31 : 3)(5^2 : GL_2(5)) = (31 : 3)(5^2 : GL_2(5))^*,$$

где $5^2 : GL_2(5)$ и $(5^2 : GL_2(5))^*$ – несопряженные в $SL_3(5)$ подгруппы. Поскольку подгруппы 31 и $31:3$ не \mathbb{P} -субнормальны в $SL_3(5)$, то группа $SL_3(5)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

(3) $G \cong PSL_2(7)$. Группа $PSL_2(7)$ допускает только следующие факторизации:

$$PSL_2(7) = NG_2 = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*,$$

где

$$N \cong 7 : 3, \quad G_2 \in Syl_2(PSL_2(7)),$$

$$G_7 \in Syl_7(PSL_2(7)),$$

S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL_2(7)$ подгруппы.

Поскольку подгруппы 7 и 7:3 не \mathbb{P} -субнормальны в $PSL_2(7)$, то группа $SL_2(7)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

(4) $G \cong PSL_2(11)$. Группа $PSL_2(11)$ допускает только следующие факторизации:

$$PSL_2(11) = (11:5)D_{12} = (11:5)A_4 = \\ = (11:5)A_5 = (11:5)A_5^* = 11A_5 = 11A_5^*,$$

где D_{12} – диэдр порядка 12, A_4 – знакопеременная группа степени 4, A_5 и A_5^* – несопряженные в $PSL_2(11)$ знакопеременные группы степени 5. Так как подгруппы 11 и 11:5 не \mathbb{P} -субнормальны в $PSL_2(11)$, то группа $PSL_2(11)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

(5) $G \cong SL_2(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма и $n = 2^k$. Группа $SL_2(2^n)$ допускает только следующие факторизации: $SL_2(2^n) = ND = NZ$, где N – нормализатор силовой 2-подгруппы, D – диэдр порядка $2p$, Z – циклическая группа порядка p . Так как подгруппа p не является \mathbb{P} -субнормальной в $SL_2(2^n)$, то группа $SL_2(2^n)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

Таким образом, группа G не является простой неабелевой группой. Так как условия теоремы наследуются на фактор-группы, то минимальная нормальная подгруппа в G имеет вид $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы и $k \geq 1$.

Пусть $k \geq 2$. Если $A \subset N$, то A \mathbb{P} -sn N и $N = A(N \cap B)$ удовлетворяет условию теоремы, а поэтому разрешима. Последнее невозможно. Следовательно, $A \not\subseteq N$. По условию теоремы существует цепь

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = G,$$

где $|A_i : A_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \dots, n$. Из тождества Дедекинда следует, что $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$. Так как A \mathbb{P} -sn A_{n-1} , то в силу минимальности контрпримера A_{n-1} является разрешимой группой и $|G : A_{n-1}| = p$ – простое число. Ясно, что $G = A_{n-1}N$. Отсюда следует, что $|N| = p|A_{n-1} \cap B|$. Поэтому N содержит разрешимую подгруппу индекса p в N . Это невозможно по лемме 1.3.

Таким образом, $k = 1$ и N – простая неабелева группа. По лемме 1.2 N имеет A -инвариантную цепь: $A \cap N = R_0 \subset \dots \subset R_n = N$. Поскольку $A \cap N$ – разрешимая группа, то 1 \mathbb{P} -sn N

и $N \in \mathfrak{D}$. Так как $Out(N)/N$ имеет порядок 2^k , то $A \subset N$. Выше было показано, что это невозможно. \square

Замечание. Условие нечетности порядка подгруппы A в теореме отбросить нельзя. Симметрическая подгруппа S_4 \mathbb{P} -субнормальна в $PSL_2(7)$ и $PSL_2(7) = S_4Z_7$. Однако $PSL_2(7)$ является простой неабелевой группой.

Лемма 2.4. Пусть $G = AB$, где A и B – простые неабелевы группы, \mathbb{P} -субнормальные в G . Если $G = N \rtimes A$, где N – простая неабелева группа и $A, B \in \mathfrak{D}$, то $G = N \times C$ и $N \cong B$, $C \cong A$, N \mathbb{P} -sn G , C \mathbb{P} -sn G , $N, C \in \mathfrak{D}$.

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что $N \cong B$. Следовательно, $|G| = |A||B|$. Поэтому $A \cap B = 1$ и по лемме 1.8 получим, что $A, B \in \mathfrak{D}$. Если $[N, A] = 1$, то лемма верна. Следовательно, найдется $a_0 \in A$, для которого $[N, a_0] \neq 1$. Так как $Out(N)$ является разрешимой группой, то существует $n_0 \in N$ такой, что $n^{a_0} = n^{n_0}$ для всех $n \in N$. Отсюда следует, что $a_0 n_0^{-1} \in C_G(N)$. Обозначим $C = C_G(N) \triangleleft G$. Имеем, что $N \times C = N((NC) \cap A)$. Поскольку $1 \neq (NC) \cap A \trianglelefteq A$ и A – простая неабелева группа, то $(NC) \cap A = A$ и $A \subseteq NC$. Следовательно, $NC = N \times C = G$, где $C \cong A$ и лемма верна. \square

Теорема 2.5. Пусть $G = AB$, где A и B – простые неабелевы группы, \mathbb{P} -субнормальные в G . Тогда $G = P \times Q \cong A \times B$, где $P \cong A$, $Q \cong B$, P \mathbb{P} -sn G , Q \mathbb{P} -sn G , $A, B \in \mathfrak{D}$.

Доказательство. Будем считать, что G – минимальный контрпример к теореме. По лемме 1.1 G не является простой неабелевой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в группе G . Предположим, что $A \cap N \neq 1$. Так как $A \cap N \trianglelefteq A$, то, поскольку A – простая неабелева группа, имеем $A \subseteq N$ и $G = NB$. Если $B \cap N \neq 1$, то $B \subseteq N$, а значит $G \subseteq N$, что невозможно. Следовательно, $B \cap N = 1$ и $G = N \rtimes B$. Так как $|G| = |N||B|$ и $A \subseteq N$, то $N = A$ и $G = A \rtimes B$. По лемме 1.8 $A, B \in \mathfrak{D}$. Таким образом, по лемме 2.4 теорема верна. Следовательно, $A \cap N = B \cap N = 1$.

Пусть сначала $N \cong \mathbb{Z}_p^k$. Предположим, что $G = N \rtimes A$. Так как A \mathbb{P} -sn G , то по лемме 1.2 в N существует A -инвариантная цепь

$$1 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_{n-1} \subset N_n = N,$$

где $|N_i : N_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что имеется подгруппа $T = N_1 \rtimes A$,

где $N_1 \cong \mathbb{Z}_p$. Если $C_{N_1 A}(N_1) = N_1$, то по теореме Бернсайда $N_1 \rtimes A = N_1 \times A$. Если $C_{N_1 A}(N_1) \supset N_1$, то так как A – простая неабелева группа и $C_{N_1 A}(N_1) \trianglelefteq N_1 A$ получим, что $N_1 A = N_1 \times A$. Поскольку $G = NA$ и N – абелева группа, то $N_1 \triangleleft G$. Так как N – минимальная нормальная подгруппа в G , то $N_1 = N$ и $G = N \times A$. Таким образом, $A \triangleleft G$. Поскольку $G = AB$, то $A \cap B \trianglelefteq B$. Если $A \cap B = 1$, то $G = A \rtimes B$. Данный случай был рассмотрен выше. Значит $A \cap B \neq 1$. Тогда $A \cap B = B$ и $B \subseteq A$, что невозможно.

Поэтому $AN \neq G \neq BN$. Рассмотрим фактор-группу $\bar{G} = G/N = (AN/N)(BN/N) = \bar{A}\bar{B}$. Поскольку $AN/N \cong A/A \cap N = A$ и $BN/N \cong B/B \cap N$, то \bar{A} и \bar{B} – простые неабелевы группы, изоморфные A и B соответственно. По лемме 1.4 \bar{A} \mathbb{P} -сп \bar{G} и \bar{B} \mathbb{P} -сп \bar{G} . Так как G – минимальный контрпример к теореме, то $\bar{G} \cong A \times B$. Тогда $|\bar{G}| \geq |G|$. Следовательно, $N = 1$. Последнее невозможно.

Таким образом, N является неразрешимой группой. Ситуация $AN \neq G \neq BN$ рассматривается точно также как в случае, когда N – разрешимая группа. Поэтому будем считать, что $G = N \rtimes A$.

Пусть сначала N является простой неабелевой группой. Из теоремы 2.1 следует, что $N \cong B$. Следовательно, $|G| = |A||B|$. Значит $A \cap B = 1$ и по лемме 1.8 $A, B \in \mathcal{D}$. Таким образом, по лемме 2.4 теорема верна.

Поэтому будем считать, что $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы и $k \geq 2$. По лемме 1.2 N имеет A -инвариантную подгруппу H простого индекса p в N . По лемме 1.3 можно считать, что

$$H = N_1 \times \dots \times N_{k-1} \times \widetilde{N}_k,$$

где $|N_k : \widetilde{N}_k| = p$. Покажем, что группа $N_1 \times \dots \times N_{k-1}$ является A -инвариантной. Так как для всякого $a \in A$ имеем $(N_1 \times \dots \times N_{k-1})^a \subseteq H^a = H$, то если $N_i^a = N_k$ для некоторого $1 \leq i \leq k-1$, то $N \subseteq H$, что невозможно. Поэтому $N_1 \times \dots \times N_{k-1}$ – A -инвариантна, а, следовательно, нормальна в G . Это противоречит минимальности подгруппы N . \square

Замечание. Отметим, что подгруппы A и B в формулировке теоремы 2.5 могут быть не нормальными в группе G . Пусть $G = T \times T^{t_0}$, где $T \in \mathcal{D}$ и $1 \neq t_0 \in T$. Тогда t индуцирует нетривиальный внутренний автоморфзм на группе T . Положив $A = T$ и $B = \{tt^{t_0} \mid t \in T\}$, получим $G = A \rtimes B$, где B не является нормальной подгруппой в группе G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Казарин, Л.С. О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.
2. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
3. Васильев, А.Ф. О $K - \mathbb{P}$ -субнормальных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.
4. Тютянов, В.Н. Факторизации конечных групп r -разрешимыми подгруппами с заданными вложениями / В.Н. Тютянов, В.Н. Княгина // Укр. матем. журн. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1431–1435.
5. Васильев, А.Ф. О произведениях \mathbb{P} -субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.
6. Monakhov, V.S. Finite factorised groups with partially solvable \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniagina // Lobachevskii Journal math. – 2015. – Vol. 36, № 4. – P. 441–445.
7. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.], – Oxford, 1985. – 252 p.
8. Guralnick, R.M. Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81. – P. 304–311.
9. Тютянов, В.Н. Конечные группы с \mathbb{P} -субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 88–91.
10. Liebeck, M.W. The factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M.W. Liebeck, C.E. Prager, J. Saxl // Mem. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 86, № 432. – P. 1–151.

Поступила в редакцию 14.03.18.

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ n -КРАТНО σ -ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Д. Чи¹, В.Г. Сафонов², А.Н. Скиба³

¹Университет науки и технологии Китая, Хэфэй

²Белорусский государственный университет, Минск

³Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON ONE APPLICATION OF THE THEORY OF n -MULTIPLY σ -LOCAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS

Z. Chi¹, V.G. Safonov², A.N. Skiba³

¹University of Science and Technology of China, Hefei

²Belarusian State University, Minsk

³F. Scorina Gomel State University

Описываются некоторые свойства и примеры n -кратно σ -локальных формаций. Рассматривается одно применение таких формаций в теории конечных факторизуемых групп.

Ключевые слова: конечная группа, формационная σ -функция, n -кратно σ -локальная формация, σ -нильпотентная группа, Σ_i^σ -замкнутый класс групп.

Some properties and examples of n -multiply σ -local formations are described. One application of such formations in the theory of finite factorisable groups are considered.

Keywords: finite group, formation σ -function, n -multiply σ -local formation, σ -nilpotent group, Σ_i^σ -closed class of groups.

1 Main results

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, \mathbb{P} is the set of all primes, $\pi = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n ; as usual, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the order of G . We write \mathfrak{G}_π to denote the set of all π -groups.

For any collection of groups \mathfrak{F} , the symbol (\mathfrak{F}) denotes the class of groups G such that $G \cong A$ for some $A \in \mathfrak{F}$. If $1 \in \mathfrak{F}$, then G^δ denotes the \mathfrak{F} -residual of a group G , that is, the intersection of all normal subgroups N of G with $G/N \in \mathfrak{F}$.

Recall that a class of groups \mathfrak{F} is called a *formation* if: (i) $G/N \in \mathfrak{F}$ whenever $G \in \mathfrak{F}$, and (ii) $G/N \cap R \in \mathfrak{F}$ whenever $G/N \in \mathfrak{F}$ and $G/R \in \mathfrak{F}$. The formation \mathfrak{F} is called: *saturated* or *local* if $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$; (*normaly*) *hereditary* if $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G \leq A \in \mathfrak{F}$ (respectively whenever $G \trianglelefteq A \in \mathfrak{F}$).

If \mathfrak{M} and \mathfrak{H} are non-empty formations, then $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ is the class of groups G such that for some normal subgroup N of G we have $G/N \in \mathfrak{H}$ and $N \in \mathfrak{M}$. The *Gaschütz product* $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ of \mathfrak{M} and

\mathfrak{H} is defined as follows: $G \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ if and only if $G^\delta \in \mathfrak{M}$. It is easy to verify that $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ is a formation, and if \mathfrak{M} is normally hereditary, then $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$. Moreover, for every three formations \mathfrak{M} , \mathfrak{H} and \mathfrak{F} we have $(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F})$ (see [1, Chapter II] or [2, Chapter IV]). Therefore the set $\mathcal{G}\mathcal{F}$ [1, p. 67], of all formations, forms a semigroup with respect to the operation \circ .

Following Shemetkov [3], σ is some partition of \mathbb{P} , that is, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ [4]; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ and $\sigma(\mathfrak{M}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{M}} \sigma(G)$. The integers n and m are called σ -coprime if $\sigma(n) \cap \sigma(m) = \emptyset$.

Recall also that G is called [5]: σ -primary if G is a σ_i -group for some i ; σ -soluble if every chief factor of G is σ -primary; σ -nilpotent if every chief factor H/K of G is σ -central in G , that is, the semidirect product $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ is σ -primary.

Note that in the classical case, when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ (we use here the notation in [4]), G is σ -soluble (respectively σ -nilpotent) if and only if it is soluble (respectively nilpotent).

We call any function f of the form

$f : \sigma \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$

a formation σ -function [6], and we put

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and}$$

$$G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Definition 1.1 [6]. (i) If for some formation σ -function f we have $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, then we say that the class \mathfrak{F} is σ -local and f is a σ -local definition of \mathfrak{F} .

(ii) We suppose that every formation is 0-multiply σ -local; for $n > 0$, we say that the formation \mathfrak{F} is n -multiply σ -local provided either $\mathfrak{F} = (1)$ is the class of all identity groups or $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, where $f(\sigma_i)$ is $(n-1)$ -multiply σ -local for all $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

(iii) The formation \mathfrak{F} is said to be totally σ -local provided F is n -multiply σ -local for all $n \in \mathbb{N}$.

Before continuing, consider some examples.

Example 1.2. (i) In view of [2, IV, 3.2], in the case when $\sigma = \sigma^1$ (we use here the notation in [4]), a formation σ -function and a σ -local formation are, respectively, a formation function and a local formation in the usual sense [2, IV, Definition 3.1] (see also [7, Chapter 2]). We use in this case instead of $LF_\sigma(f)$ the symbol $LF(f)$, as usual [2, IV, Definition 3.1].

(ii) For the formation of all identity groups \mathfrak{J} we have $\mathfrak{J} = LF_\sigma(f)$, where $f(\sigma_i) = \emptyset$ for all i . Therefore, the formation \mathfrak{J} is totally σ -local.

(iii) Let $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ be the class of all σ_i -groups. Then $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, where $f(\sigma_i) = \mathfrak{F}$ and $f(\sigma_j) = \emptyset$ for all $j \neq i$. Therefore, the formation \mathfrak{F} is totally σ -local.

(iv) Let \mathfrak{N}_σ be the class of all σ -nilpotent groups. It is not difficult to show that $G \in \mathfrak{N}_\sigma$ if and only if $G = G_1 \times \dots \times G_i$ for some σ -primary groups G_1, \dots, G_i . Hence \mathfrak{N}_σ is a hereditary formation [5] and, clearly, $\mathfrak{N}_\sigma = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(F)$, where $f(\sigma_i) = \mathfrak{J}$ and $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ for all i . Therefore the formation \mathfrak{N}_σ is totally σ -local.

(v) Let \mathfrak{A} be the class of all abelian groups. Then \mathfrak{A} is a hereditary formation and $\mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{A}$ is the class of all groups G with σ -nilpotent derived subgroups G' . It is not difficult to show that $\mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{A}$ is a hereditary formation and that $\mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{A} = LF_\sigma(f)$, where $f(\sigma_i) = \mathfrak{A}$ for all i , and that this formation is not 2-multiply σ -local for all σ with $|\sigma| > 1$ (see Lemma 2.7 and Proposition 2.8 below).

(vi) The formation of all supersoluble groups \mathfrak{U} is not σ -local for every σ with $\sigma \neq \sigma^1$. Indeed,

suppose that $\mathfrak{U} = LF_\sigma(f)$ is σ -local and for some i we have $|\sigma_i| > 1$. Let $p, q \in \sigma_i$, where $p > q$. Finally, let $G = C_q \wr C_p = K \rtimes C_p$ be the regular wreath product of groups C_q and C_p with $|C_q| = q$ and $|C_p| = p$, where K is the base group of G . Then $C_G(K) = K$ and, also, $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = G$ and $\sigma(G) = \{\sigma_i\}$. Since $C_p \in \mathfrak{U}$, $f(\sigma_i) \neq \emptyset$. Hence $G \in LF_\sigma(f) = \mathfrak{U}$, so $G = C_q \times C_p$ since $p > q$, a contradiction. Hence we have (vi).

We use \mathfrak{N}_σ^r to denote the product $\mathfrak{N}_\sigma \dots \mathfrak{N}_\sigma$ of r copies of \mathfrak{N}_σ ($r \in \mathbb{N}$); \mathfrak{N}_σ^0 is the class of groups of order 1 by definition. The least n such that $G \in \mathfrak{N}_\sigma^n$ is denoted by $l_\sigma(G)$ and called the σ -nilpotent length of G .

Let $t > 1$ be a natural number and let \mathfrak{F} be a class of groups. Then we say: that \mathfrak{F} is Σ_t^σ -closed provided \mathfrak{F} contains each group G with subgroups $A_1, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$ whose indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_t|$ are pairwise σ -coprime; Σ_t -closed (Shemetkov [3]) provided \mathfrak{F} is Σ_t^σ -closed for $\sigma = \sigma^1$.

Our main result here is the following theorem which, in fact, is one of the motivations for introducing the concept of n -multiply σ -local formation.

Theorem 1.3. *Let \mathfrak{F} be an r -multiply σ -local formation contained in $\mathfrak{N}_\sigma^{r+1}$ for some $r \geq 0$. Then the formation \mathfrak{F} and, for any i , the formation $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}$ are Σ_{r+3}^σ -closed.*

The proof of Theorem 1.3 is based on certain facts about the algebra of n -multiply σ -local formations. In particular, we use in it our next three theorems.

Theorem 1.4. *The set S_n^σ , of all n -multiply σ -local formations, forms a subsemigroup of the semigroup of all formations $G\mathfrak{B}$. Moreover, $|S_n^\sigma| = 2^{\aleph_0}$ for every σ with $|\sigma| > 1$, and \mathfrak{G}_{σ_i} is a minimal idempotent in S_n^σ for all $n > 0$ and $i \in I$.*

A formation σ -function f is said to be: *integrated* if $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ for all i ; *full* if $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ for all i .

We prove Theorem 1.4 being based on the following general observation, which may be of independent interest since it generalizes some known results.

Theorem 1.5. *Let $\mathfrak{M} = LF_\sigma(m)$, where m is integrated, $\Pi = \sigma(\mathfrak{M})$, and let \mathfrak{H} be a non-empty formation. Assume that either*

(i) $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, where h is integrated, or

(ii) $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$ for all $\sigma_i \in \sigma \setminus \Pi$.

Then $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = LF_{\sigma}(f)$, where

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} m(\sigma_i) \circ \mathfrak{H}, & \text{if } \sigma_i \in \Pi, \\ h(\sigma_i), & \text{if } \sigma_i \in \sigma \setminus \Pi \text{ in Case (i),} \\ \mathfrak{H}, & \text{if } \sigma_i \in \sigma \setminus \Pi \text{ in Case (ii).} \end{cases}$$

We use $I_n^{\sigma} \text{form}(\mathfrak{X})$ to denote the intersection of all n -multiply σ -local formations containing the collection of groups \mathfrak{X} .

Theorem 1.6. *The semigroup S_n^{σ} is partially ordered with respect to set inclusion. Moreover, $\langle S_n^{\sigma}, \subseteq \rangle$ is a complete algebraic modular lattice in which $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ is the greatest lower bound and $I_n^{\sigma} \text{form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$ is the smallest upper bound of $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq S_n^{\sigma}$ in S_n^{σ} .*

2 Application

The following special case of Theorem 1.3 shows that this theorem remains to new for the classical case $\sigma = \sigma^1$, and in the case when $r = 1$.

Corollary 2.1. *Let \mathfrak{F} be a local formation of metanilpotent groups. Then the class of all groups G which are an extension of a p -group by a group in \mathfrak{F} is Σ_4 -closed for every prime p .*

Theorem 1.3 has also many other corollaries. Some of them we consider here.

First note that in the case when $\sigma = \sigma^1$ and $r = 1$ we get from Theorem 1.3 the following results.

Corollary 2.2 (Doerk [8]). *If G has four supersoluble subgroups A_1, \dots, A_4 whose indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_4|$ are pairwise coprime, then G is itself supersoluble.*

Corollary 2.3. *Suppose that G has four subgroups A_1, \dots, A_4 whose indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_4|$ are pairwise coprime. If the derived subgroup A_i of A_i is nilpotent for all $i = 1, 2, 3, 4$, then G' is nilpotent.*

Corollary 2.4 (Otto-Uwe Kramer [9]). *Every local formation of meta-nilpotent groups is Σ_4 -closed.*

In the case when $\sigma = \sigma^1$ and $r = 2$ we get from Theorem 1.3 the following result.

Corollary 2.5. *Suppose that G has five subgroups A_1, \dots, A_5 whose indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_5|$ are pairwise coprime. If the derived subgroup A_i of A_i is meta-nilpotent for all $i = 1, \dots, 5$, then G' is meta-nilpotent.*

Corollary 2.6 (Kovaleva, Skiba [10]). *Let \mathfrak{M} be an r -multiply saturated formation and $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^{r+1}$ for some $r \geq 0$. Then the formation \mathfrak{M} is Σ_{r+3} -closed.*

In fact, in the theory of the π -soluble groups ($\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$) we deal with the partition $\sigma = \sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \pi'\}$ of \mathbb{P} [4]. Note that G is

$\sigma^{1\pi}$ -soluble if and only if G is π -soluble; $\sigma^{1\pi}$ -nilpotent if and only if G is π -special [11], that is, $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G)$. Hence in this case we get from Theorem 1.3 the following results.

Corollary 2.7. *Suppose that G has four meta- π -special subgroups A_1, \dots, A_4 whose indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_4|$ are pairwise coprime and each of them is either a π -number or a π' -number. Suppose also that at most one of the numbers $|G : A_1|, \dots, |G : A_4|$ is a π' -number. Then G is meta- π -special.*

Corollary 2.8. *Suppose that G has subgroups A_1, \dots, A_4 such that the indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_4|$ are pairwise coprime and each of them is either a π -number or a π' -number. Suppose also that at most one of the numbers $|G : A_1|, \dots, |G : A_4|$ is a π' -number. If the derived subgroup A_i of A_i is π -special for all i , then G' is π -special.*

Corollary 2.9. *Suppose that G has five subgroups A_1, \dots, A_5 whose indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_5|$ are pairwise coprime. Suppose also that at most one of the numbers $|G : A_1|, \dots, |G : A_5|$ is a π' -number. If the derived subgroup A_i of A_i is meta- π -special for all $i = 1, \dots, 5$, then G' is meta- π -special.*

In the case when $\sigma = \sigma^1$ we get from Theorems 1.4 and 1.5 the following well-known results.

Corollary 2.10. *The Gaschütz product $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ of any two totally σ -local formations \mathfrak{M} and \mathfrak{H} is also a totally σ -local formation. Hence the set of all totally σ -local formations forms a subsemigroup of the semigroup of all formations $G\mathfrak{S}$.*

Corollary 2.11 (Gaschütz). *The product $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ of any two saturated formations \mathfrak{M} and \mathfrak{H} is also a saturated formation.*

In view of Corollary 2.6 in [14], every σ -local formation \mathfrak{F} possesses a unique integrated and full σ -local definition F . We call such a function F the canonical σ -local definition of \mathfrak{F} or simply the canonical local definition of \mathfrak{F} if $\sigma = \sigma^1$.

Corollary 2.12 (Doerk and Hawkes [2, IV, Theorem 3.13]). *Let $\mathfrak{M} = LF(M)$, where M is the canonical local definition of \mathfrak{M} , and let \mathfrak{H} be a non-empty formation. Assume that either*

(i) $\mathfrak{H} = LF(H)$, where H is the canonical local definition of \mathfrak{H} , or

(ii) $\mathfrak{G}_p \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$ for all $p \in \pi'(\mathfrak{M})$.

Then $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = LF(f)$, where

$$f(p) = \begin{cases} m(p) \circ \mathfrak{H}, & \text{if } p \in (\mathfrak{M}), \\ h(p), & \text{if } p \in \pi'(\mathfrak{M}) \text{ in Case (i),} \\ \mathfrak{H}, & \text{if } p \in \pi'(\mathfrak{M}) \text{ in Case (ii).} \end{cases}$$

Corollary 2.13 (Shemetkov [12]). Let $\mathfrak{M} = LF(m)$ and $\mathfrak{H} = LF(h)$, where m and h are integrated. Let $\pi = \pi(\mathfrak{M})$.

Then $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = LF(f)$, where

$$f(p) = \begin{cases} m(p) \circ \mathfrak{H}, & \text{if } p \in \pi, \\ h(p), & \text{if } p \in \pi'. \end{cases}$$

From Theorem 1.4 we get also the following known results.

Corollary 2.14 (Shemetkov and Skiba [1, Theorem 7.14]). The set of all n -multiply local formations forms a subsemigroup of the semigroup of all formations $G\mathfrak{E}$.

Corollary 2.15 (Shemetkov and Skiba [1, Theorem 7.15]). The set of all totally local formations forms a subsemigroup of the semigroup of all formations $G\mathfrak{E}$.

In the case when $\sigma = \sigma^l$, we get from Theorem 1.6 the following two known results.

Corollary 2.16 (Shemetkov and Skiba [1, Corollary 9.22]). The lattice of all n -multiply local formations is modular.

Corollary 2.17 (Skiba [13, p. 179]). The lattice of all n -multiply local formations is algebraic.

REFERENCES

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
2. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 901 p.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
4. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
5. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
6. Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.
7. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer-Verlag, 2006. – 391 p.
8. Doerk, K. Minimal nicht uberauflösbare, endlicher Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.
9. Kramer, O. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes / O. Kramer // Math. Z. – 1974. – Vol. 139, № 1. – P. 63–68.
10. Kovaleva, V.A. Finite soluble groups with all n -maximal subgroups \mathfrak{F} -subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 273–290.
11. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – М.: Наука и техника, 1964. – 157 с.
12. Shemetkov, L.A. Screens of the product of formations / L.A. Shemetkov // Doklady AN BSSR. – 1981. – Vol. 25, № 8. – P. 677–680.
13. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1997. – 240 с.
14. Chi, Z. On Σ_i^σ -closed classes of finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Ukrainian Math. J. – submitted.
15. Skiba, A.N. One application of the σ -local formations of finite groups [Electronic resource] / A.N. Skiba, Z. Chi // arXiv, Cornell University Library. – 14 Apr 2018. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/1804.04634>.
16. Skiba, A.N. Multiply \mathcal{L} -composition formations of finite groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainian Math. J. – Vol. 52, № 6. – P. 898–913.
17. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

Поступила в редакцию 13.04.18.

УДК 004.415:621.391.64

КОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИК-ИЗЛУЧЕНИЙ

А.А. Петушков, М.И. Жадан

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

COMPUTER SYSTEM OF INFORMATION TRANSMISSION WITH THE USE OF INFRARED RADIATIONS

A.A. Petushkov, M.I. Zhadan

F. Scorina Gomel State University

Статья посвящена созданию системы передачи и обработки информации, используя ИК-излучение. Реализована система, способная полностью имитировать реальные поведенческие факторы ведения стрельбы из огнестрельного оружия, такие как скорострельность, точность, шанс осечки и т. д., а также предоставляющая возможность идентифицировать попадания по «противнику» с последующей обработкой этого попадания и передачей информации для дальнейшей обработки на сервере. Система может быть использована для проведения военно-тактических игр без применения реального оружия.

Ключевые слова: информация, ИК-излучение, стрельба, оружие, микроконтроллер, конечный автомат, программирование.

The article is devoted to creation of system of transfer and information processing, using infrared radiation. The system capable to completely imitate real behavioural factors of conducting firing from the fire weapon, such as rate of fire, accuracy, chance of a misfire etc., and also the giving opportunity to identify hits on "opponent" with the subsequent processing of this hit and information transfer for further processing on the server is realized. The system can be used for carrying out military and tactical games without use of the real weapon.

Keywords: information, infrared radiation, firing, weapon, microcontroller, finite-state machine, programming.

Введение

Концепция передачи данных, в основе которой использовались инфракрасные каналы (ИК), прорабатывалась довольно долгое время. Интерес к ИК становился все больше, так как росла потребность в беспроводных высокоскоростных каналах связи. Инфракрасный канал – это канал, который используют для передачи данных через ИК-излучение. Эти соединения создают мало помех и у них довольно высокая степень защиты информации [1].

В настоящее время достаточно большие средства тратятся на обучение вооруженных сил, а использование альтернативных средств обучения в состоянии сократить эти расходы. Так же стоит отметить растущий интерес к такому виду активного отдыха как пейнтбол и страйкбол. Поэтому изучение проблем в области передачи информации через ИК-канал и практическая реализация устройств, моделирующих поведение огнестрельного оружия, является перспективным направлением и вызывает научный интерес.

Целью разработки является создание системы, позволяющей воссоздать работу огнестрельного оружия путём передачи ИК-сигналов с последующей их регистрацией в случае попадания. Разработанная система позволит сэкономить средства на обучение военнослужащих, а также позволит осуществлять военно-тактические игры.

Основное преимущество разрабатываемой системы перед существующими аналогами, такими как пейнтбол и страйкбол – отсутствие человеческого фактора, т. е. попадания регистрируются системой без участия пользователя. Также стоит отметить достаточно большую дальность ведения стрельбы – более 600 м, и возможность реализации любых поведенческих факторов оружия, таких как осечка, отдача, скорость стрельбы, скорость перезарядки и многое другое. В системе обеспечена простота добавления новых компонентов, возможность создания дополнительных устройств и их тонкое конфигурирование.

1 Теоретические основы

В компьютерных сетях, за исключением кабельных, могут использоваться и бескабельные каналы. Одно из важных их преимуществ – нет прокладки проводов, а также компьютерные сети становятся легко перемещаемыми.

ИК канал не требует соединительных проводов, он применяется для соединения ИК излучения (похожим образом работает пульт дистанционного управления телевизором). Радиоканал же проигрывает главным образом из-за того, что у него большая чувствительность к различного вида помехам, в том числе и электромагнитным и это не позволяет применять его при некоторых

условиях. ИК связь работает хуже при высокой запыленности воздуха [2].

ИК системы беспроводной передачи обладают следующими преимуществами: использование ИК диапазона, высокая конфиденциальность связи, отсутствие необходимости в разрешениях на использование радиочастотного спектра и отсутствие принципиальных сложностей в ИК технологии с пределом скорости передачи. В радиочастотных системах нужно применить сложное кодирование, оно снижает другие характеристики системы, но в ИК-системах всего этого не требуется. Технологии постоянно развиваются и сейчас самая старая коммерческая беспроводная ИК система имеет скорость до 2.5 Гбит/с [1].

Инфракрасное излучение расположено в электромагнитном спектре перед красным концом видимых лучей (рисунок 1.1).

Электромагнитный спектр определяет полосы частот, используемые для передачи звука, радиоизлучения, инфракрасного излучения, света. Внутри этих, основных, диапазонов выделяются полосы, используемые в применяемых технологиях передачи данных.

Полосы делятся на широкие и узкие (рисунок 1.2). В узкой полосе ширина не превышает

речевую полосу. Данную полосу используют узкополосные каналы. В широкой полосе частота превышает звуковую, зачастую даже в несколько раз. Широкая полоса практически всегда состоит из большого количества узких полос. Канал, который пропускает широкую полосу, называют широкополосным каналом [1]. Для того, чтобы использовать полосы, нужна определенная лицензия, исключением является промышленная, научная, медицинская полоса ISM.

Номенклатура выпускаемых в настоящее время микроконтроллеров (МК) исчисляется тысячами типов изделий различных фирм. Для разработчиков появляется возможность выбора оптимального МК, который не имеет избыточности и функциональности, что благоприятно сказывается на стоимости комплектующих элементов. В связи с этим в работе был выбран микроконтроллер ATMEGA 168 – низкопотребляющий 16 битный микроконтроллер с AVR RISC архитектурой. Выполняя команды за один цикл, ATMEGA168 достигают производительности 16 MIPS при частоте задающего генератора 16 МГц, что позволяет оптимизировать отношение потребления к производительности [3].

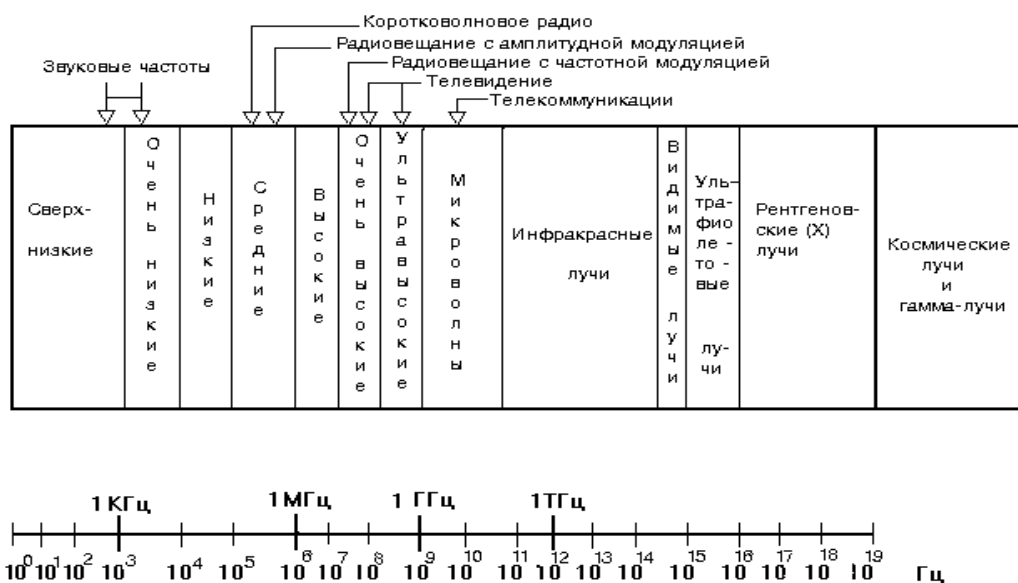


Рисунок 1.1 – Структура электромагнитного спектра

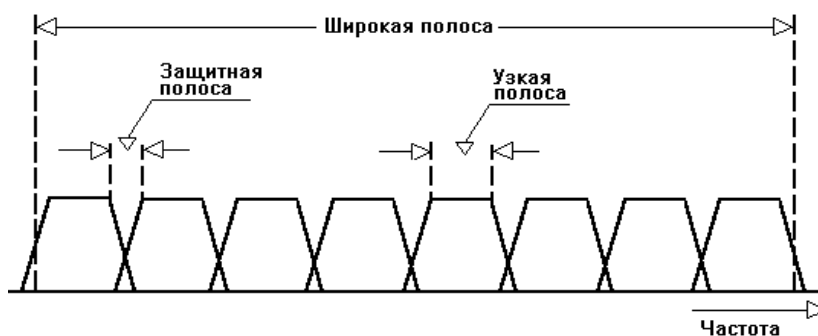


Рисунок 1.2 – Схема выделения логических каналов

Для передачи информации при помощи электромагнитного излучения на радиочастоте используется технология RFID. К возможностям RFID можно отнести идентификацию и учет любых объектов (товаров, времени, количество патронов и т. п.). Самые популярные в наше время RFID-метки представлены в виде небольших наклеек. От штрих-кодов, на которых информация хранится в графическом виде, RFID-метки отличаются тем, что на ней данные записываются и затем считываются при помощи радиоволн. Метка состоит из микроконтроллера, хранящего данные, и небольшой антенны, при помощи которой метка может передавать и получать данные. Система RFID используется в местах, где необходимы контроль перемещения объектов, особая отказоустойчивость в жестких погодных условиях, безошибочность чтения данных, надежность и скорость, автоматизация производства.

2 Реализация «конечных автоматов»

Проектирование системы строилось на перечне следующих требований:

- обработка действий пользователя (нажатие на кнопки);
- отображение на LED дисплее информации для пользователя;
- отправка информации посредством ИК-излучения;
- приём и обработка информации посредством ИК-излучения.

Реализованная система состоит из блоков:

- отправки информации, состоящего из ИК-передатчика;
- приёма информации, состоящего из нескольких ИК-приёмников;
- индикации, состоящего из LED дисплея.

Пользователь взаимодействует с системой посредством нажатия на те, или иные кнопки на модуле.

Для обмена данными между различными устройствами системы разработан протокол передачи информации. Структура разработанного пакета представлена в таблице 2.1. Пакет состоит из трёх полей. Бит чётности в нем необходим для проверки правильности передачи информации.

Таблица 2.1 – Структура пакета передачи данных

Название	Размер поля (значение)	Описание
playerId	7 бит (от 0 до 127)	Номер пользователя
playerDamage	8 бит (от 0 до 255)	Урон от оружия
parityBit	1 бит	Бит четности

Принимая во внимание, что микроконтроллер имеет ограниченную производительность и

очень трудно реализовать систему с множеством модулей, которые будут обрабатывать в нужный момент времени и не занимать много вычислительного времени, было принято решение использовать «конечные автоматы». Они позволяют раздробить работу каждого модуля в отношении вычислительного времени микроконтроллера. Это позволит исполнять все необходимые операции без задержек [4].

В связи с отличительными особенностями каждого микроконтроллера, перед началом работы его необходимо конфигурировать. По этой причине был создан отдельный блок программы, в котором хранятся параметры конкретного микроконтроллера и производится начальная настройка при запуске устройства. В случае необходимости, при замене микроконтроллера, этот программный блок может быть заменён на другой. В результате замены конфигурационного файла никаких изменений в работе основной программы не произойдёт.

Автономной единицей предлагаемой программы является автомат, который можно считать своего рода «кирпичиком». Его связи с остальными автоматами унифицированы и сведены к минимуму. Такой автомат, как и компонент средства быстрой разработки, можно реализовать отдельно, а затем применять в различных вновь создаваемых программных проектах. Для разработки систем со сложным поведением в различных предметных областях применяется SWITCH-технология. Программы, построенные по SWITCH-технологии, легко поддаются модификации [5].

Построение новых автоматов, реализуемых в настоящей работе, будет проведено, следуя идеологии работ А.А. Татарчевского [6]–[8].

Разработанная система передачи информации представляет собой совокупность конечных автоматов (КА). КА обмениваются между собой сообщениями и выполняются параллельно. Каждый конечный автомат имеет две внешние функции и описан в отдельном модуле программы:

```
void InitKA(void);
void ProcessKA(void);
```

Функция InitKA инициализирует автомат (производит соответствующие установки для корректной работы программы), а функция ProcessKA реализует работу автомата, в которой происходит обработка состояний автоматов и проверка условий переходов в другие состояния. Функция ProcessKA не должна выполнять продолжительных во времени действий, связанных с истечением временного интервала или с ожиданием какого-либо флага (например, противник убит). Такое требование вызвано необходимостью не блокировать работу других автоматов и максимально ускорить работу реализуемой системы.

Основной задачей главного цикла программы является поочередный вызов функций ProcessKA всех автоматов, в каждом из которых происходит обработка их текущих состояний. В случае соблюдения необходимых условий происходит переход в другие состояния. На рисунке 2.1 представлен главный модуль программы.

В каждой итерации главного цикла поочередно вызываются Process-функции каждого автомата и каждому автомату выделяется время для выполнения какого-либо элементарного действия (например, проверка заряда батареи, активация игрока и т. п.). Этими действиями объясняется многопоточность разработанной системы передачи информации. Графически конечный автомат представлен на рисунке 2.2 [7].

Чтобы наиболее детально описать условия, при которых происходит переход между состояниями автомата, в работе используется механизм таймеров. Особенно это важно в SWITCH-программировании, если переход должен произойти

по истечении определенного промежутка времени. Таймер можно считать «виртуальным» объектом: он имеет собственный неповторимый идентификатор-переменную, который увеличивает свое значение на единицу после определенного промежутка времени. Этот интервал может быть определен настройками аппаратного таймера.

В разработанной системе для большей согласованности конечных автоматов и уменьшения количества необходимых таймеров были использованы глобальные таймеры, контролирующие работу нескольких автоматов одновременно. Инициализация виртуальных таймеров состоит в их обнулении. Следует отметить две основные функции обработки таймеров. При помощи функции GetTimer происходит получение текущего значения выбранного таймера, а команда ResetTimer позволяет сбросить таймер в начальное (нулевое) состояние.

```

int main(void){
    InitHardware();           // Настройка микроконтроллера
    InitMessages();
    InitTimers();
    InitUartKA();             // Инициализация параллельного порта
    InitKeyKA();              // Инициализация обработчика кнопок
    InitSoundKA();           // Инициализация воспроизведения звука
    InitReceiverKA();         // Инициализация автомата приёма ИК-сигнала
    InitTranceiverKA(); // Инициализация автомата передачи ИК-сигнала
    InitPlayerKA();          // Инициализация автомата обработки состояний оружия
    InitWeaponKA();          // Инициализация автомата обработки состояний игрока
    InitBatteryKA();         // Инициализация автомата проверки заряда батареи
    LedHigh(LED_RELOAD);     // Зажигаем светодиод перезарядки
    SendMessage(MSG_PLAYER_STATUS_ACTIVE); // Активируем игрока
    SendMessage(MSG_SOUNDS_ALL); // Включаем все звуки
    for(;;) {
        ProcessKeyKA();
        ProcessPlayerKA();
        ProcessWeaponKA();
        ProcessBatteryKA();
        ProcessUartKA();
        ProcessSoundKA();
        ProcessMessages();
    }
    return 0;
}
    
```

Рисунок 2.1 – Главный модуль программы

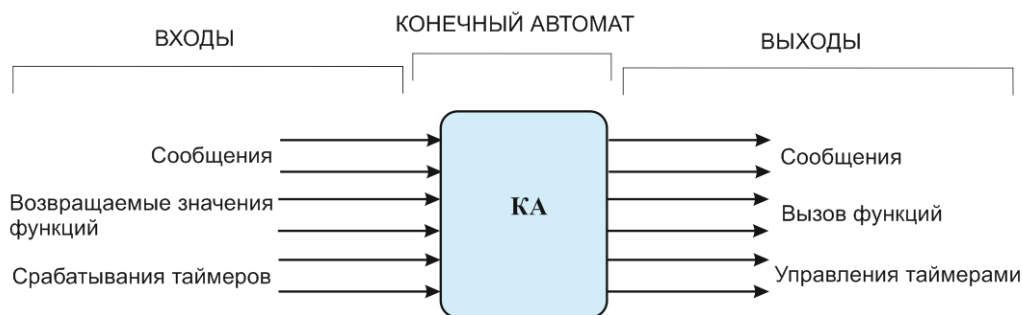


Рисунок 2.2 – Конечный автомат с входами и выходами

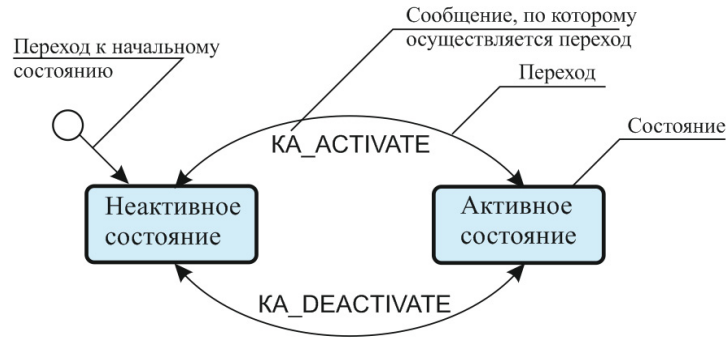


Рисунок 2.3 – Граф автомата

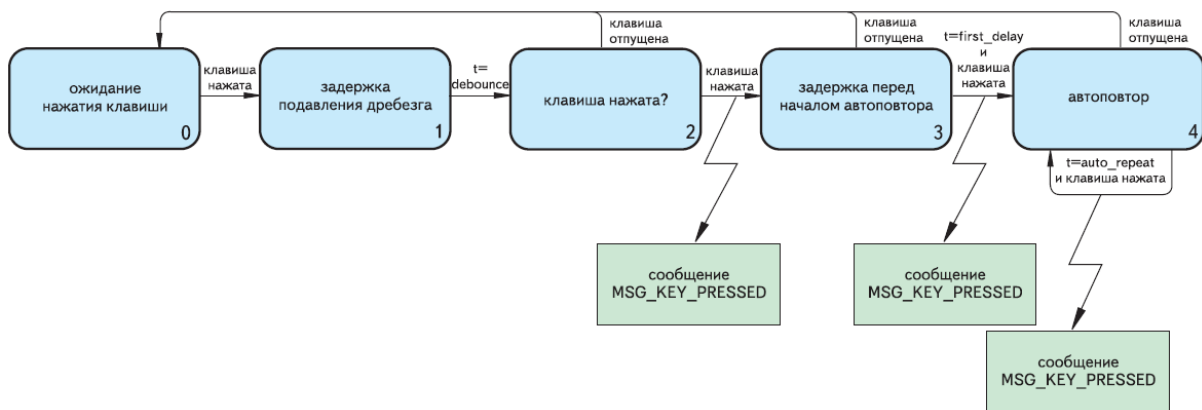


Рисунок 2.4 – Автомат, обрабатывающий нажатие кнопок

В программе реализовано три основных глобальных таймера:

- TIMER_KEY – для корректной обработки нажатия кнопок;
- TIMER_WEAPON – для обработки игровых действий;
- TIMER_BATTERY – для проверки заряда батареи.

Для изменения состояния того или иного автомата необходимы сообщения (рисунок 2.3). Автомат, который соответствует автомату Мили, передающий сообщение, устанавливает соответствующий флаг, а автомат, принимающий сообщение, проверяет состояние этого флага. Чтобы сообщение стало неактивным, автомат, после принятия сообщения, удаляет его.

В подавляющем большинстве устройств на базе микроконтроллеров используются кнопки для ввода информации, нажатие которых необходимо обрабатывать. Поэтому был разработан автомат, опрашивающий все имеющиеся кнопки, осуществляющий подавление дребезга контактов и реализовывающий функцию «автоповтора». Автоповтор сделан для реализации возможности ведения огня в автоматическом режиме, когдажат спусковой крючок, а также для более лёгкой конфигурации системы, когда нужно изменить большие значения параметров. На рисунке 2.4 приведён граф автомата, реализующего перечисленные функции [8].

Реализованный автомат посылает сообщения основной программе при нажатии кнопки, но не сообщает, какая именно кнопка нажата, для получения кода нажатой кнопки используется реализованная функция `GetKeyCode`.

Для удобства работы пользователя с устройством был разработан модуль, отвечающий за отображение всей необходимой информации на дисплее:

- основной интерфейс, отображающий текущую информацию о состоянии игрока и оружия;
- отображение сообщений о смерти или ошибках;
- отображение информации о попадании в игрока;
- возможность входа в меню с настройками.

Для простоты работы было принято решение представить меню в виде структуры, представленной на рисунке 2.5.

В структуре хранятся все необходимые данные для работы меню:

- в поле `Next`, храниться ссылка на следующий пункт меню, на который осуществляется переход при нажатии кнопки «Далее»;
- в поле `Parent` храниться ссылка на родительский элемент;
- в поле `Child` храниться ссылка на первый элемент дочернего меню, на который происходит переход при выборе текущего элемента меню.

```

typedef struct PROGMEM{ // Структура описания меню
void      *Next;        // Следующий пункт меню
void      *Parent;     // Корневое меню
void      *Child;      // Название первого подменю
uint8_t   Select;      // Действие, которое выполнять при выборе
const char Header[3];  // Заголовок пункта меню
unsigned char *Parametr; // Параметр пункта меню (ссылка на переменную)
unsigned char MaxParametr; // Максимальное значение параметра ( 0 - не изменяется)
const char Text[];     // Название меню
} menuItem;
    
```

Рисунок 2.5 – Структура меню

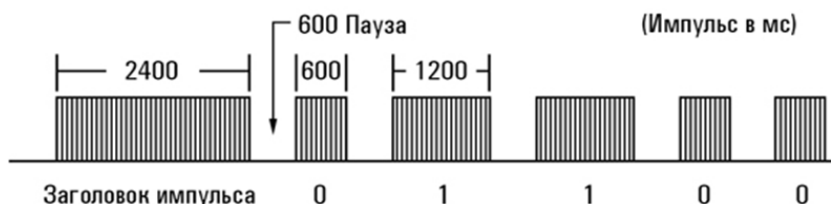


Рисунок 2.6 – Передача пакета данных

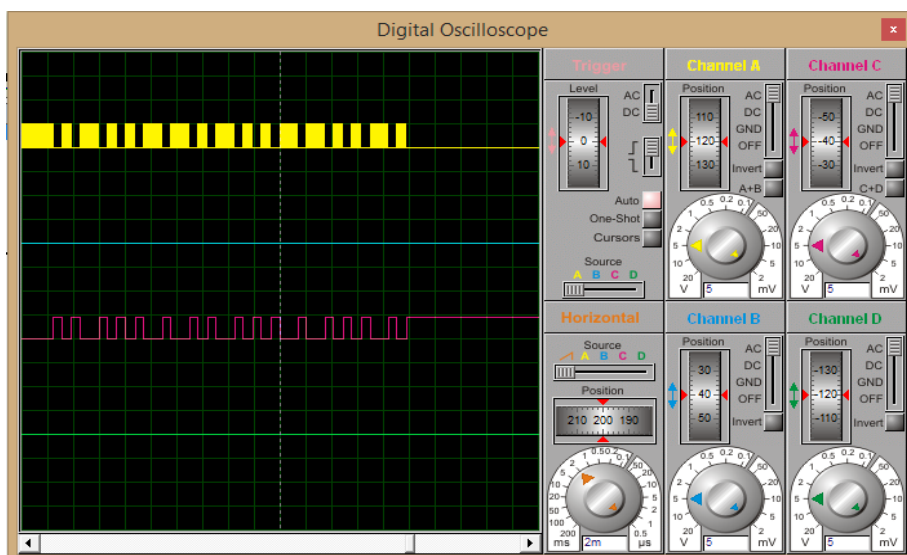


Рисунок 2.7 – Приём ИК-сигнала

Также в структуре предусмотрены поля, отвечающие за отображение названия элемента меню, параметра, который можно изменить текущим элементом и максимальное значение этого параметра, которое можно установить.

Разработанное меню позволяет достаточно легко его изменять и расширять. При помощи указателей имеется возможность вызова сторонних функций.

Дальность передачи данных при помощи ИК-излучения непосредственно зависит от силы тока, подаваемого на ИК-светодиод. По этой причине был разработан автомат, который проверяет уровень заряда аккумулятора, который должен быть от 3v до 12v. Автомат состоит из следующих состояний:

0 – используя таймер `TIMER_BATTERY`, ожидает наступления времени, при котором необходимо проверить заряд аккумулятора.

1 – с помощью функции `ReadPower` считывает заряд батареи.

2 – в случае падения напряжения батареи до критического уровня посылает сообщение `MSG_BATTERY_POWER_OFF`.

3 – проверяет значение изменения заряда батареи в сравнении с предыдущим значением и отправляет сообщение, затем переходит в состояние «0».

В случае разряда батареи автомат, отвечающий за отображение информации на дисплее, через равные промежутки времени оповещает пользователя.

В компьютерной системе передачи информации данные передаются одним пакетом. Пакет данных состоит из заголовка и 14 бит данных, заголовок и биты данных кодируются на 56кГц несущей инфракрасного сигнала, используя широтную модуляцию (рисунок 2.6).

Заголовок является импульсом длительностью 2400 микросекунд:

- бит со значением «1» — импульс длительностью 1200 микросекунд;
- бит со значением «0» — импульс длительностью 600 микросекунд;
- промежуток – между битами длится 600 микросекунд.

Перед передачей пакета данных, данные системы преобразуются в десятичный вид, после чего происходит их побайтовая отправка с выдержкой соответствующей паузы. Передача данных происходит по одному биту за итерацию. Это позволяет системе обрабатывать другие автоматы без задержки во время передачи информации через ИК-канал.

Автомат, отвечающий за приём ИК-сигнала, работает аналогичным образом, как и автомат, передающий сигнал. Приём сигнала при использовании осциллографа изображен на рисунке 2.7.

Как видно на рисунке, самое длинное значение низкого сигнала означает «Заголовок пакета», затем идут значения разной длины: короткие означают 0, длинные – 1 и суммарное их количество равно 16 штук. Это значит, что отправлен и получен весь пакет необходимых данных.

В связи с тем, что система поддерживает работу по UART, то имеется возможность установки радио модулей, осуществляющих связь с сервером и непосредственное подключение к системе через USB. Для этого было реализована командная оболочка, поддерживающая отображение необходимой информации и конфигурирование системы [9]. Оболочка состоит из нескольких модулей (.c + .h). При этом модуль

интерпретатора отделен от модуля ввода/вывода. В этом случае, при необходимости, он на стадии компиляции может быть отключен для экономии памяти.

Для интеграции в клиент-серверное пространство было предусмотрено два варианта реализации: стандартный – как в любых терминалах с полными описаниями действий и короткой – для более быстрого обмена информацией и упрощения её обработки на стороне сервера. Разработанная оболочка не занимает много аппаратных ресурсов и легко расширяема путём добавления новых значений в существующие массивы.

Помимо описанных выше возможностей в систему добавлена возможность считывания RFID-меток. Выбор был обусловлен тем, что они обладают достаточно компактным размером и позволяют размещать их в дополнительных функциональных элементах, к примеру, таких как обойма, аптечка или же другие бонусы. В связи с этой необходимостью был разработан автомат, отвечающий за считывание данных с RFID меток. Автомат не останавливает работу основной системы при считывании. Основной проблемой при создании автомата являлась невозможность использования каких-либо сторонних библиотек, сильно влияющих на производительность системы. Поэтому реализация всей работы со считывателем представлена через концепцию конечных автоматов.

Автомат состоит из состояний:

- ожидание начала передачи данных со считывателя – проверяется, не изменилось ли значение на ножке считывателя;
- выдержка паузы между битами;

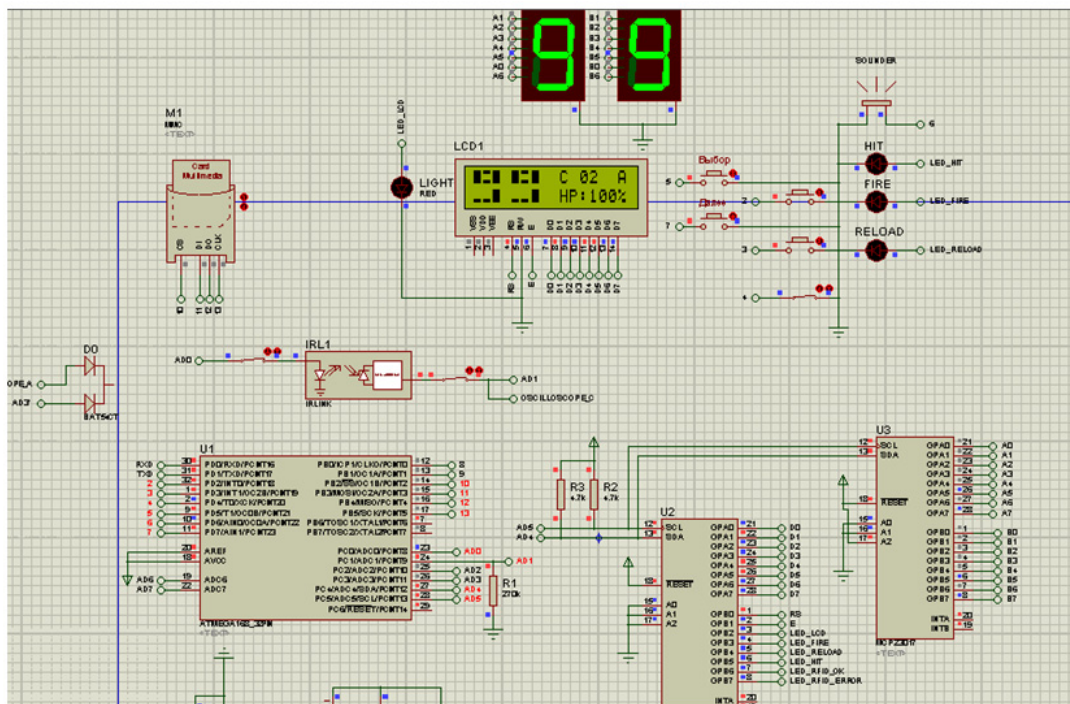


Рисунок 2.8 – Фрагмент собранной схемы

- приём бита данных;
- обработка считанных данных.

Для проверки считанного набора данных в автомате предусмотрена база, представленная в виде массива, состоящего из четырёх полей: два поля идентификатора RFID, тип считываемой метки и поле, характеризующее возможное количество использования этого чипа. После считывания RFID чипа происходит проверка его типа и возможности его использования, в случае соблюдения этих правил происходит вызов функций, отвечающих за его «эффект», например, увеличение количества текущих жизней до максимального значения или обнуление необходимых показателей. Завершающей стадией является уменьшение количества использований метки на единицу. При осуществлении серверной части базу RFID-меток можно переместить на серверную составляющую и посылать на неё запрос при каждом считывании метки.

Таким образом, пользователь осуществляет взаимодействие с устройством передачи информации посредством ИК-излучений через отображение информации на дисплее [10]. Собранный схема симуляции устройства передачи информации посредством ИК-излучений для моделирования работы огнестрельного оружия представлена на рисунке 2.8.

Заключение

Решена задача разработки устройства передачи информации посредством ИК-излучений для моделирования работы огнестрельного оружия с возможностью проведения военно-тактических игр.

Разработка позволяет осуществлять и фиксировать выстрелы с использованием ИК-светодиодов и светочувствительных датчиков. Предусмотрена возможность осуществления тонкой настройки системы и установки необходимых параметров оружия. Конфигурирование системы возможно при использовании терминальной оболочки или непосредственно через ввод данных ее аппаратными средствами.

В предлагаемой системе разработаны автоматы: обработки нажатия клавиш, поведения оружия, передачи информации через параллельный порт, отображения информации на дисплее, поведения игрока и воспроизведения звука.

Достоинство системы в том, что она может быть адаптирована для любых устройств подобного типа, легко расширяема и достаточно бюджетна для успешного внедрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зуев, В.Е. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере / В.Е. Зуев – М.: ИнтерТраст Лтд., 2007. – 473 с.
2. Поляков, К.Ю. Основы теории цифровых 2006. – 161 с.
3. Предко, М. Руководство по микроконтроллерам: в 2 т. / М. Предко; пер. с англ. под ред. И.И. Шагурина и С.Б. Лужанского. – М.: Постмаркет, 2009. – 1 т. – 416 с.
4. Предко, М. Руководство по микроконтроллерам: в 2 т. / М. Предко; пер. с англ. под ред. И.И. Шагурина и С.Б. Лужанского – М.: Постмаркет, 2009. – 2 т. – 488 с.
5. Шальто, А.А. Switch-технология. Алгоритмизация и программирование задач логического управления / А.А. Шальто – СПб.: Наука, 2008. – 250 с.
6. Татарчевский, В.А. Некоторые мысли по поводу программирования встроженных систем / В.А. Татарчевский – СПб.: Питер, 2006. – 280 с.
7. Татарчевский, В.А. Применение Switch-технологии при разработке прикладного программного обеспечения для микроконтроллеров. Часть 1 / В.А. Татарчевский // Компоненты и технологии. – 2006. – № 11. – С. 164–168.
8. Татарчевский, В.А. Применение Switch-технологии при разработке прикладного программного обеспечения для микроконтроллеров. Часть 8 / В.А. Татарчевский // Компоненты и технологии. – 2007. – № 8. – С. 170–172.
9. Заец, Н.В. Электронные самоделки для быта, отдыха и здоровья / Н.В. Заец. – М.: СОЛОН-Пресс, 2009. – 423 с.
10. Петушков, А.А. Разработка системы обучения владением стрелковым оружием / А.А. Петушков, М.И. Жадан // Молодежная наука в XXI веке: традиции, инновации, векторы развития: междуна. науч.-исслед. конф.: в 3 ч. Ч. 1. – Самара – Оренбург: СамГУПС, ОриПС, 2017. – С. 291–292.

Поступила в редакцию 05.04.18.

УДК 519.876.5

МЕТОД АВТОМАТИЗАЦИИ ПОСТРОЕНИЯ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ NGN

А.И. Хобня, О.М. Демиденко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

METHOD OF AUTOMATION OF SIMULATION MODELS CONSTRUCTION OF MULTISERVICE TELECOMMUNICATION NGN NETWORKS

A.I. Khobnia, O.M. Demidenko

F. Scorina Gomel State University

Предлагается метод автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных сетей NGN, основанный на использовании разработанного специального предметно-ориентированного языка описания моделей, позволяющего эффективно комбинировать готовые и определенные пользователем имитационные модели компонентов мультисервисных сетей NGN. Данный метод в первую очередь направлен на моделирование мультисервисных сетей NGN на базе MPLS TE, реализующих конвергенцию сетей коммутации каналов, коммутации пакетов и широкополосных сетей.

Ключевые слова: имитационное моделирование, IPTV, VoIP, AoIP, NGN, MPLS TE, DSL.

The method of multiservice NGN simulation models building automation based on usage of domain specific language which allows to effectively combine predefined and user defined simulation models of multiservice NGN components is presented. This method is tailored mostly for simulation of multiservice NGNs based on MPLS TE that implement convergence of circuit switching packet switching networks and broadcast networks.

Keywords: simulation, IPTV, VoIP, AoIP, NGN, MPLS TE, DSL.

Введение

Имитационное моделирование мультисервисных телекоммуникационных сетей NGN может использоваться для решения научных и практических задач, в том числе планирование и управление рисками при построении и развитии сетевой инфраструктуры. Методом имитационного моделирования могут исследоваться следующие характеристики мультисервисной сети NGN:

- предельное возможное количество потоков трафика с заданными параметрами качества обслуживания на определенном участке сети;
- максимальное число пользователей того или иного сервиса сети;
- особенности работы сети при использовании различных конфигураций;
- особенности работы различных настроек протоколов маршрутизации и резервирования ресурсов;
- влияние подключения новых сервисов с заданными параметрами качества обслуживания на перераспределение загрузки различных участков сети;
- степень влияния трафика с заданными параметрами качества обслуживания на остальные потоки трафика и др.

Существуют различные подходы к построению имитационных моделей сетей: разработка имитационной модели с использованием языка программирования общего назначения,

использование готовых симуляторов и использование инструментальных средств моделирования сетей. Разработка имитационных моделей с использованием языков программирования общего назначения используется исследователями для моделирования мультисервисных и иных сетей достаточно часто [1]–[5], т. к. обладает абсолютной гибкостью. Однако существенным недостатком такого подхода является трудоемкость процесса построения модели. Использование готовых симуляторов позволяет быстро решать определенные задачи, но ограничивает исследователей множеством определенных возможностей конкретного симулятора.

Существующие на данный момент инструментальные средства имитационного моделирования сетей с коммутацией пакетов (например NS-2, NS-3) обладают рядом недостатков, в частности: предполагают необходимость реализации программ на языке программирования низкого уровня [6], [7] (например C++), позволяют моделировать только некоторые предопределенные компоненты механизмов обеспечения качества обслуживания [6], не являются ориентированными на моделирование мультисервисных сетей NGN и т. д. По этой причине актуальной является проблема разработки метода автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных телекоммуникационных сетей NGN, который может быть положен в основу проблемно-ориентированного инструментария.

В данной работе предлагается метод автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных телекоммуникационных сетей NGN, направленный на решение указанных выше проблем. Данный метод в первую очередь направлен на моделирование мультисервисных сетей NGN, т. е. реализующих конвергенцию не только сетей коммутации каналов и коммутации пакетов, но и широкополосных сетей (телевизионные сети и т. д.), а также может быть использован для моделирования сетей NGN с более простыми случаями конвергенции. Прежде всего метод ориентирован на построение имитационных моделей сетей, построенных на базе технологии MPLS TE, но может быть расширен для построения моделей сетей иных типов. Также данный метод направлен в первую очередь на моделирование сетей для решения задач, для которых аппарат имитационного моделирования не применялся ранее либо применялся ограниченно.

1 Анализ особенностей и проблем построения имитационных моделей мультисервисных сетей NGN и синтез требований к методу автоматизации

Построение имитационных моделей, как правило, включает в себя несколько этапов, а именно: исследование объекта моделирования, построение концептуальной модели системы, построение формальной модели системы, программирование и отладка имитационной модели, испытание имитационной модели и ее эксплуатация для решения определенных задач. При моделировании сложной системы проводится ее декомпозиция. При моделировании мультисервисных сетей NGN существует ряд определенных аспектов, затрудняющих представление моделируемой системы в виде графа основных статических элементов теории систем массового обслуживания. Механизмы обеспечения качества обслуживания маршрутизаторов и программируемых коммутаторов реализуют сложные алгоритмы и не могут быть представлены при помощи простейших очередей. Характеристики генерации исходящего трафика зависят от множества факторов. С другой стороны, многие элементы мультисервисных сетей NGN состоят из типовых повторяющихся компонентов. Следовательно, создание имитационных моделей отдельных компонентов мультисервисных сетей NGN с возможностью их комбинирования для построения комплексных имитационных моделей работы сетей позволит автоматизировать процесс программирования и отладки имитационных моделей и упростить процессы декомпозиции и составления формальных моделей. Таким образом, для автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных телекоммуникационных сетей NGN необходимо создать имитационные модели следующих типов компонентов:

- генераторов сетевого трафика;
- каналов передачи сетевых пакетов;
- маршрутизаторов, шлюзов и программных коммутаторов.

При построение имитационных моделей данных компонентов необходимо учитывать ориентацию метода автоматизации на решение определенного типа задач и моделирование в первую очередь мультисервисных сетей на базе технологии MPLS TE.

Т. к. рассматривается имитационное моделирование мультисервисных сетей, модели генераторов сетевого трафика должны поддерживать моделирование трафика сервисов различного типа: IPTV-трафика, AoIP-трафика, VoIP-трафика, HTTP-трафика, FTP-трафика. Также необходимо предусмотреть возможность расширения функциональности моделирования генерации новыми типами сетевого трафика. Учитывая развитие технологий, появление новых алгоритмов кодирования звука и видео, изменение пользовательских паттернов работы с теми либо иными сервисами, необходимо использовать новейшие статистические данные для построения моделей генераторов трафика для получения наиболее актуальных моделей работы мультисервисных сетей.

В реальной сети генератором сетевого трафика является определенная прикладная программа, установленная на подключенном к сети устройстве (видео-сервер, файловый сервер, клиентское приложение и т. д.), либо непосредственно само сетевое устройство (IP-телефон, модем и т. д.). Поскольку для решения практических задач интерес представляет моделирование десятков или сотен устройств, генерирующих трафик одного типа, метод автоматизации построения моделей должен поддерживать возможность создания генераторов, моделирующих группы устройств.

Одним из важнейших компонентов мультисервисных сетей NGN являются механизмы обеспечения качества обслуживания. Метод автоматизации должен позволять эффективно создавать имитационные модели компонентов данного типа. Механизмы обеспечения качества обслуживания состоят из четырех основных типов компонентов: алгоритмов классификации трафика, очередей пакетов, алгоритмов активного управления очередями и алгоритмов сетевого планирования [8]. Метод автоматизации построения моделей должен предлагать как использование готовых реализаций данных компонентов, так и возможность для разработчика имитационной модели сети описывать иные алгоритмы приведенных выше компонентов, т. к. актуальным является класс задач разработки эффективных алгоритмов для управления и предотвращения перегрузки сети.

Важнейшим компонентом мультисервисных сетей NGN являются механизмы резервирования

ресурсов. Механизмы резервирования ресурсов управляют механизмами обеспечения качества обслуживания для предоставления определенным потокам сетевого трафика туннелей (LSP) с заданными характеристиками. Метод автоматизации построения моделей должен предлагать как использование готовых реализаций данных компонентов, так и возможность для разработчика имитационной модели сети описывать иные алгоритмы, т.к. актуальным является класс задач разработки эффективных алгоритмов резервирования ресурсов для обеспечения требуемого качества обслуживания.

Динамическую структуру сети определяют потоки трафика и LSP-каналы. Для моделирования различных вариантов распределения потоков трафика в сети метод автоматизации моделирования должен позволять задавать цепочки узлов сети для различных потоков и LSP.

Метод автоматизации построения имитационных моделей должен включать в себя эффективный способ комбинирования готовых имитационных моделей компонентов мультисервисных сетей NGN и имитационных моделей компонентов, определенных пользователем, для построения комплексных имитационных моделей работы сетей. Способ графического представления модели обладает рядом недостатков: проблема масштабирования данного подхода для описания сложных моделей, реализация поиска элементов модели, необходимость отдельного представления статической и динамической структуры сети и т. д. Использование языка программирования общего назначения усложняет процесс построения моделей и не позволяет эффективно автоматизировать процесс формализации модели. В данной работе предлагается использовать специально разработанный предметно-ориентированный язык для описания имитационных моделей мультисервисных сетей NGN.

2 Основные элементы и принципы метода автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных телекоммуникационных сетей NGN

Разработанный в данной работе метод автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных сетей NGN состоит из следующих элементов:

- использование разработанной библиотеки имитационных моделей компонентов мультисервисных сетей NGN;
- использование разработанного специального предметно-ориентированного языка описания имитационных моделей мультисервисных сетей NGN.

Разработанный предметно-ориентированный язык описания имитационных моделей мультисервисных сетей NGN включает в себя следующие основные типы операторов:

- объявление генератора сетевого трафика;
- объявление генератора группы сетевого трафика;
- объявление механизма обеспечения качества обслуживания;
- объявление механизма резервирования ресурсов;
- объявление маршрутизатора и сетевых интерфейсов;
- объявление получателей сетевого трафика;
- объявление соединений между компонентами;
- объявление потоков сетевого трафика;
- объявление LSP-туннелей;
- объявление откликов модели;
- управление моделированием.

Объявление генератора позволяет описать генераторы сетевого трафика различного типа, требующего различного качества обслуживания. Имена основных типов генераторов трафика: `singleVoIPTrafficGenerator`, `singleAoIPTrafficGenerator`, `singleIPTVTrafficGenerator`, `singleHTTPTrafficGenerator`. Для каждого типа генератора можно задавать атрибуты, влияющие на свойства сетевого трафика. Например, для генераторов VoIP-трафика возможно задавать алгоритм кодирования, алгоритмический интервал (если алгоритм кодирования поддерживает несколько вариантов интервалов) и т. д. Пример объявления генератора AoIP-трафика:

```
(Node of singleAoIPTrafficGenerator
 codec AptX
 loadmode peak
 channelbandwidth 100 *mbps
 name "generator1")
```

Объявление генератора группы позволяет описать генератор сетевого трафика для группы устройств или прикладных программ, генерирующих трафик одного типа. Аналогично генераторам, генераторы групп позволяют моделировать генерацию трафика различного типа, требующего различного качества обслуживания. Для генератора группы необходимо задать количество моделируемых устройств и распределение их поведения во времени при помощи специальных ключевых слов `name` и `timingDistribution`. Пример объявления генератора группы VoIP-трафика:

```
(Node of groupVoIPTrafficGenerator
 number 200
 timingDistribution uniform
 codec SILK
 bitrate 256 *kbps
 interval 25 *ms
 loadmode "peak"
 channelbandwidth 100 *mbps
 name "VoIPGroupGenerator")
```

Объявление получателей сетевого трафика позволяет указать, к каким интерфейсам подключены

устройства, принимающие генерируемые сетевые пакеты. Это необходимо для определения потоков трафика и LSP, а также создает точки для расчета откликов модели. Пример объявления устройства получения трафика:

```
Node of groupTrafficConsumer name
"consumer"
```

Объявление механизмов обеспечения качества обслуживания (QoS) позволяет описать механизмы, используемые маршрутизаторами для обеспечения качества обслуживания для сетевого трафика разного типа. Механизм обеспечения качества обслуживания объявляется путем указания его компонентов и атрибутов. Предметно-ориентированный язык позволяет использовать как готовые реализации данных компонентов, так и возможность для разработчика имитационной модели сети описывать иные алгоритмы компонентов, используя язык общего назначения. Пример объявления механизма обеспечения качества обслуживания:

```
(Mechanism of qos
  queues 3
  defaultQueueSize 32000
  classification byToSPrecedence
  scheduling WFQ(3, 2, 1.5)
  defaultAQM RED(16000)
  name "MainMechanism")
```

Объявление механизмов резервирования ресурсов позволяет описать механизмы, используемые маршрутизаторами для выделения ресурсов для туннелей LSP при помощи управления механизмами обеспечения качества обслуживания. Механизм выделения ресурсов объявляется путем указания его компонентов и атрибутов. Предметно-ориентированный язык позволяет использовать как готовые реализации данных компонентов, так и возможность для разработчика имитационной модели сети описывать иные алгоритмы компонентов, используя язык общего назначения. Пример объявления механизма резервирования ресурсов:

```
(Mechanism of qosReservation
  bandwidth WFQReservation
  dropRateLimitation REDLimitation
  defaultAQM ARED
  defaultQueueSize 32000
  name "MainMechanism")
```

Объявление маршрутизаторов и сетевых интерфейсов позволяет описать маршрутизаторы моделируемой мультисервисной сети NGN и их основные атрибуты. В объявлении маршрутизатора можно определить один или более сетевых интерфейсов. Механизмы обеспечения качества обслуживания или механизмы резервирования ресурсов, используемые в маршрутизаторе, задаются при помощи указания имени, указанного

при объявлении соответствующего механизма. Пример объявления маршрутизатора:

```
(Node of multiserviceNgnRouter
  interface "interfacel"
  channelbandwidth 1 *gbps
  reservationMechanism
  "MainMechanism"
  interface "interface2"
  channelbandwidth 1 *gbps
  reservationMechanism
  "MainMechanism"
  name "router1")
```

Объявление соединений позволяет задать соединения между различными узлами моделируемой сети. Узлы и сетевые интерфейсы задаются при помощи указания имен, использованных при объявлении данных компонентов. Пример объявления соединения:

```
Link from output of "interfacel" to
"router2"
```

Объявление потоков трафика или туннелей LSP позволяет описать цепочку узлов сети от генератора до получателя через различные маршрутизаторы. Для LSP есть возможность указать требуемое качество обслуживания. Потоки сетевого трафика определяют динамическую структуру моделируемой сети. Пример объявления потоков трафика:

```
(Flows from "HTTPGroupGenerator"
  via "router1"
  via "router2"
  to "consumer")
```

Объявление откликов позволяет описать вычисляемые отклики имитационной модели. Как правило откликами являются различные метрики сетевого трафика на различных интерфейсах моделируемой мультисервисной сети. Например, откликами могут быть параметры качества обслуживания для определенного типа трафика: задержка, дрожание задержки и доля потерянных пакетов. Возможно вычисление откликов за все время прогона модели и за определенные интервалы. Сетевые интерфейсы определяются при помощи указания имени, использованного при объявлении узлов сети. Примеры объявления метрик:

```
AllTotalsMetrics on output
of "interfacel"
AllQoSMetrics on output
of "interfacel"
```

```
(AllTotalsPerIntervalMetrics (sec)
on output of "generator1")
(AllQoSPerIntervalMetrics (sec) on
output of "interface2")
```

Операторы управления моделированием позволяют выполнять команды прогона модели и задавать условия завершения. Пример команды управления моделированием:

```
Simulate modelfor 10 *sec
```

Таким образом, использование разработанного предметно-ориентированного языка и библиотеки имитационных моделей компонентов позволяет автоматизировать процесс построения имитационных моделей мультисервисных сетей NGN.

3 Пример использования для построения имитационной модели мультисервисной сети NGN

Рассмотрим для примера задачу определения степени влияния трафика с заданными параметрами качества обслуживания на характеристики остальных потоков трафика. Допустим, рассматривается решение настройки туннелей для двухста потоков VoIP-трафика кодируемого алгоритмом SILK с битрейтом 256 кбит/с и алгоритмическим интервалом 25 мс и пятидесяти потоков IPTV-трафика кодируемого алгоритмом H.264 через маршрут с каналом пропускной способностью 1 Гбит/с, обслуживающий пятьсот потоков HTTP-трафика. Необходимо вычислить показатели качества обслуживания для потоков HTTP-трафика. Пример кода на предметно-ориентированном языке, описывающий модель задачи данного типа:

```
object MultiserviceHighloadModel
  extends Model {
  def main(
    args: Array[String]):Unit={

(Node of
  groupIPTVTrafficGenerator
  number 50
  timingDistribution uniform
  codec H264
  width 1920 *px
  height 1080 *px
  fps 25
  iframe 30
  loadmode normal
  channelbandwidth 100 *mbps
  name "VideoGroupGenerator")

(Node of
  groupVoIPTrafficGenerator
  number 200
  timingDistribution "uniform"
  codec SILK
  bitrate 256 *kbps
  interval 25 *ms
  loadmode peak
  channelbandwidth 100 *mbps
  name "VoIPGroupGenerator")
```

```
(Node of
  groupHTTPTrafficGenerator
  number 500
  timingDistribution normal
  loadmode normal
  channelbandwidth 100 *mbps
  name "HTTPGroupGenerator")

(Node of groupTrafficConsumer
  name "consumer")
(Node of groupTrafficConsumer
  name "httpConsumer")

(Mechanism of qosReservation
  bandwidth WFQReservation
  dropRateLimitation
  REDLimitation
  defaultAQM ARED
  name "MainMechanism")

(Node of multiserviceNgnRouter
  interface "interface1"
  channelbandwidth 1 *gbps
  reservationMechanism
  "MainMechanism"
  name "router1")

(Node of multiserviceNgnRouter
  interface "interface2"
  channelbandwidth 100 *gbps
  interface "interface3"
  channelbandwidth 100 *gbps
  name "router2")

(Link from output of
  "VideoGroupGenerator"
  to "router1")
(Link from output of
  "VoIPGroupGenerator"
  to "router1")
(Link from output of
  "HTTPGroupGenerator"
  to "router1")
(Link from output
  of "interface1" to "router2")
(Link from output
  of "interface2"
  to "consumer")
(Link from output
  of "interface3"
  to "httpConsumer")

(Flows
  from "HTTPGroupGenerator"
  via "router1"
  via "router2"
  to "httpConsumer")

(LSPs
  bandwidth 17 *mbps
  dropRate 0.01
  jitter 20 *ms
```

```

from "VideoGroupGenerator"
via "router1"
via "router2"
to "comsumer")
(LSPs
bandwidth 256 *kbps
dropRate 0.01
jitter 12 *ms
from "VoIPGroupGenerator"
via "router1"
via "router2"
to "comsumer")

(AllTotalsMetrics
on input of "httpConsumer")
(AllQoSMetrics
on input of "httpConsumer")
(AllQoSPerIntervalMetrics
(100 *ms) on input
of "httpConsumer")
Simulate modelfor 5 *sec
}
}

```

Таким образом, с использованием разработанного предметно-ориентированного языка и библиотеки имитационных моделей компонентов описана имитационная модель мультисервисной сети NGN для решения задачи определенного типа.

Заключение

В данной работе описан метод автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных сетей NGN, основанный на использовании разработанного специального предметно-ориентированного языка, позволяющего эффективно комбинировать готовые и определенные пользователем имитационные модели компонентов мультисервисных сетей NGN, приведен пример использования метода для построения имитационной модели сети. Данный метод положен в основу предметно-ориентированного инструментария автоматизации построения имитационных моделей мультисервисных сетей NGN. В качестве развития данного направления исследований предлагается построение имитационных моделей для решения научных задач, например исследования новых алгоритмов механизмов обеспечения качества обслуживания и резервирования ресурсов, исследования способов генерации и оптимизации алгоритмов механизмов

обеспечения качества обслуживания и резервирования ресурсов при помощи машинного обучения с подкреплением или генетического алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahn, G. Simulator for MPLS path restoration and performance evaluation / G. Ahn, W. Chun // High Speed Intelligent Internet Symposium, Joint 4th IEEE International Conference on. – 2001. – С. 32–36.
2. De Mattos, C.I. A New Model for VoIP Traffic Generation / C.I. de Mattos, E.P. Ribeiro, C.M. Pedroso // The 7th International Telecommunications Symposium, ITS 2010. – 2010. – С. 1–5.
3. Ji, L. Conversational Model Based VoIP Traffic Generation / L. Ji, X. Yin, X. Shi, Z. Wang // Networking and Services, 2007. ICNS. Third International Conference on. – 2007. – 14 с.
4. Демиденко, О.М. Имитационное моделирование распределенной обработки информации в ЛВС / О.М. Демиденко, И.В. Максимей, С.Ф. Маслович, В.И. Селицкий // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – С. 140–143.
5. Быченко, О.В. Имитационные модели режимов обработки информации в ЛВС / О.В. Быченко, О.М. Демиденко, В.Д. Левчук, С.Ф. Маслович, В.И. Селицкий // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – С. 3–6.
6. Altman, E. NS Simulator for Beginners / E. Altman, T. Jimenez. – Morgan & Claypool, 2012. – 184 с.
7. Tahiliani, R.P. Implementation of P12 queuing discipline for classic TCP traffic in ns-3 / R.P. Tahiliani, H. Tewari // 2017 IFIP Networking Conference and Workshops. – Stockholm: IFIP. – 2017. – С. 1–6.
8. Хобня, А.И. Концептуальная модель механизмов обеспечения качества обслуживания в сетях с коммутацией пакетов / А.И. Хобня, В.Д. Левчук, О.М. Демиденко // Информатика. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси. – 2016. – № 50. – С. 78–87.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ.

Поступила в редакцию 28.03.18.

УДК 004.353.2

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПРОСТОГО АППАРАТНОГО ГЕНЕРАТОРА СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

П.Л. Чечет, В.Д. Левчук, А.В. Воруйев, Е.А. Левчук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ESTIMATION OF QUALITY OF SIMPLE HARDWARE RANDOM NUMBERS GENERATOR

P.L. Chechat, V.D. Liauchuk, A.V. Varuyeu, A.A. Liauchuk

F. Scorina Gomel State University

Предлагается простая реализация аппаратного генератора случайных чисел, использующего эффект лавинного пробоя перехода биполярного транзистора. По результатам статистических экспериментов сделан вывод о возможности использования данного устройства в различных аппаратно-программных комплексах.

Ключевые слова: аппаратный генератор случайных чисел, генератора шума, лавинный пробой перехода транзистора, статистический критерий.

A simple implementation of a hardware random number generator that uses the avalanche breakdown effect of the bipolar transistor transition is offered. According to the results of statistical experiments, a conclusion is made about the possibility of using this device in various hardware-software systems.

Keywords: hardware random numbers generator, noise generator, avalanche breakdown of a transistor, statistical criterion.

Введение

Вопросы получения псевдослучайных последовательностей, во многом успешно решённые ещё в прошлом веке, в настоящее время снова получили актуальность в связи с широким распространением мобильных вычислительных устройств. С одной стороны, их постоянное повышение производительности позволяет использовать все те алгоритмы и приёмы для получения псевдослучайных последовательностей, что и на стационарных компьютерах. С другой стороны, вопросы снижения стоимости аппаратной части, её упрощения, всё равно остаются актуальными, так как это напрямую влияет на себестоимость устройства, его энергопотребление. А именно эти вопросы всегда являются важными для производителей.

В свете вышесказанного имеются приложения, где есть смысл в использовании не программных генераторов псевдослучайных чисел, а аппаратных датчиков случайных чисел. Использование аппаратных датчиков случайных числовых последовательностей позволяет получить действительно случайную последовательность, которую невозможно предсказать, что недостижимо при использовании псевдослучайных последовательностей. Это может быть критично, например, в мобильных приложениях, использующих шифрование.

1 Выбор аппаратного датчика случайных чисел

Известно, что в качестве аппаратного датчика случайных чисел можно взять практически

любой стохастический процесс и организовать из него выборку значений. В устройствах, требующих наглядности (лотереи, розыгрыши), широко используются механические или электромеханические устройства. В цифровых устройствах по понятным причинам (размеры, быстродействие, энергопотребление) целесообразно использовать чисто электронные датчики случайных чисел. Наиболее популярным вариантом являются различные варианты схем генераторов шума [1].

В качестве исследования был выбран один из самых простых вариантов схемы генератора шума, основанный на лавинном пробое перехода транзистора. Для сопряжения его с компьютером и передачи получаемых значений было задействовано устройство, описанное в [2]. Упрощённо схема генератора шума и части устройства, обеспечивающего интерфейс взаимодействия, приведена на рисунке 1.1.

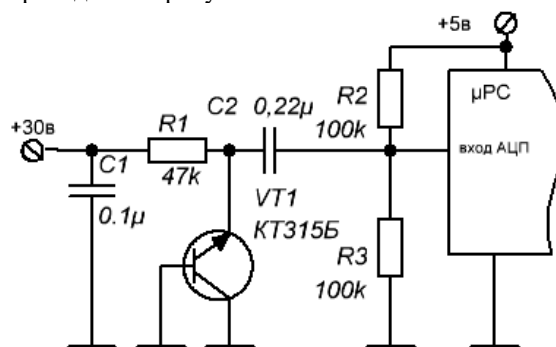


Рисунок 1.1 – Упрощённая схема датчика чисел

Из рисунка видно, что на вход аналогоцифрового преобразователя (АЦП) микроконтроллера через делитель на резисторах R2 и R3 поступает половина напряжения питания. Поступающий шумовой сигнал вызывает смещение этого напряжения в сторону увеличения или уменьшения. Сопротивления резисторов R2 и R3 выбраны таким образом, что амплитуда шума не превышает 2.5 вольт, что позволяет избежать ограничений по измерению напряжения АЦП микроконтроллера. опорное напряжение для АЦП программно сконфигурировано равным напряжению питания – 5 вольт.

АЦП большинства недорогих микроконтроллеров Atmel семейства AVR имеет 10 разрядов, что позволяет получать значения в диапазоне от 0 до 1023. Поступаемое на вход АЦП напряжение измеряется через постоянные интервалы времени, полученные значения передаются в программу на компьютере через последовательный интерфейс. Подробно этот процесс передачи данных описан в [2].

Так как амплитуда измеряемых значений не превышает 2.5 вольт, значения от АЦП не достигают крайних значений 0 и 1023. Для корректного применения критериев проверки качества полученной случайной последовательности был выполнен её сдвиг на величину минимального полученного значения, равного по результатам измерений 21. Что позволило в итоге получать значения в диапазоне от 0 до 981. Для проверки корректности выбора диапазонов значений использовался запуск устройства на продолжительное время (несколько часов) с сохранением в программе экстремальных значений (максимума и минимума) и дальнейшей передачей их в персональный компьютер.

2 Анализ распределения полученных значений

Для определения закона распределения случайной величины, значения которой возвращает выбранный аппаратный датчик случайных чисел, была построена гистограмма распределения частот для десяти равных отрезков. Частоты распределения 2 000 сгенерированных значений по отрезкам представлены на рисунке 2.1.

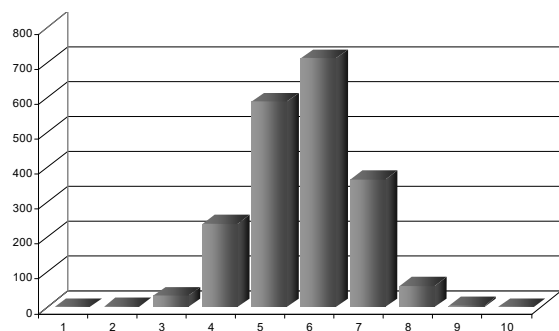


Рисунок 2.1 – Гистограмма распределения частот

Визуально по гистограмме можно предположить, что выборка значений, полученных от аппаратного датчика случайных чисел, имеет нормальное распределение. Среднее значение по выборке равно 506,6. Оценка дисперсии – 10 329,7. Распределение эмпирически полученных значений и теоретическое по отрезкам приведено в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Распределение значений по отрезкам

Отрезок	Эмпирическое значение	Теоретическое значение
1	0	0,1
2	2	2,2
3	32	34,7
4	239	225,9
5	587	615,2
6	711	705,6
7	465	341,1
8	60	69,2
9	4	5,8
10	0	0,2

Используя критерий χ^2 получаем значение 6,07, что меньше критического значения, равного 22,3 для уровня значимости 10%. Следовательно, выдвинутая гипотеза о нормальном распределении согласуется с экспериментальными данными.

Для дальнейшей проверки последовательности, полученной от аппаратного датчика случайных чисел, был применён критерий Колмогорова – Смирнова. Построенные по выборке эмпирическая и теоретическая функции распределения представлены на рисунке 2.2.

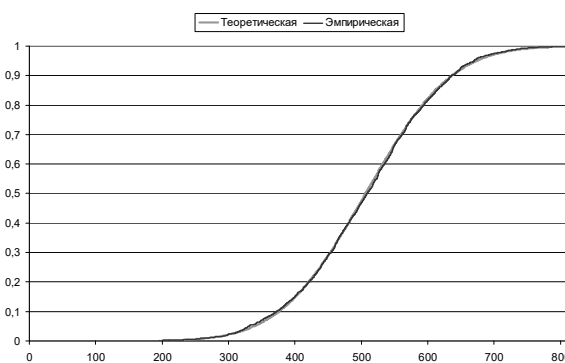


Рисунок 2.2 – График функций распределения

Значения статистик КС-критерия получились следующие:

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} (F_n(x) - F(x)) \approx 0,50, \quad (2.1)$$

$$K_n^- = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < +\infty} (F(x) - F_n(x)) \approx 0,71,$$

где $F(x)$ – теоретическая функция нормального распределения с заданными средним и среднеквадратичным отклонением, $F_n(x)$ – эмпирическая

функция распределения, построенная по выборочным значениям x_i :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \begin{cases} 1, & x_i < x; \\ 0, & x_i \geq x. \end{cases} \quad (2.2)$$

Из (2.1) видно, что значения статистик меньше табличного (критического) для $n = 2\,000$, равного 1,36. Следовательно, гипотеза о нормальности распределения значений, получаемых с помощью выбранного аппаратного датчика, согласуется с экспериментальными данными.

Для проверки также был применён модифицированный вариант критерия Шапиро – Уилка [3], не требующий таблиц, так как $n = 2\,000$. Отсутствие таблиц не освобождает от необходимости вычислять коэффициенты a_j :

$$a_0 = \frac{0.899}{(n-2,4)^{0.4162}} - 0.02,$$

$$a_j = a_0 \left[z + \frac{1483}{(3-z)^{10.845}} + \frac{71.6 \cdot 10^{-10}}{(1.1-z)^{8.26}} \right],$$

$$z = \frac{n-2j+1}{n-0.5}. \quad (2.3)$$

Поэтому коэффициенты a_j были вычислены программно по формулам (2.3). Далее по известной формуле из [3] было вычислено критическое значение W_1 для уровня значимости $\alpha = 0.05$.

$$W_1 = \left(1 - \frac{0.6695}{n^{0.6518}} \right) \frac{s^2}{B},$$

$$B = \left[\sum_{j=1}^{n/2} a_j (x_{n-j+1} - x_j) \right]^2,$$

где s^2 – дисперсия рассматриваемой случайной величины.

Вычисление всех выражений было реализовано программно, по результатам работы значение статистики $W_1 \approx 2.22$, что больше критического значения, равного единице. Следовательно, гипотеза согласуется с экспериментальными данными.

Заключение

Аппаратные датчики случайных чисел при своих недостатках (размеры, энергопотребление, невозможность воспроизведения) позволяют, в отличие от датчиков псевдослучайных чисел, получать действительно случайные числовые последовательности. Есть приложения, где это условие является критическим. Это, например, реализация различных лотерей, генерация случайных ключей для шифрования данных. В данной статье рассмотрен один из простейших вариантов реализации аппаратного датчика случайных чисел, использующего эффект лавинного пробоя перехода биполярного транзистора. Оказалось, что значения, получаемые с помощью этого датчика, можно считать нормально распределёнными и использовать их для соответствующих применений. Данный факт был проверен и подтверждён с помощью нескольких статистических критериев. Простота технической реализации и невысокие требования к микроконтроллеру устройства (современные модели практически всегда имеют встроенный аналогоцифровой преобразователь) позволяют использовать подобные аппаратные датчики случайных чисел во многих устройствах, как стационарных, так и переносных и носимых. Например, в популярных сегодня проектах на Arduino.

ЛИТЕРАТУРА

1. Простая схема генератора шума. – Режим доступа: <http://sxtmns1.appspot.com/prostaya-shema-generatora-shuma.html>. – Дата доступа: 02.10.2015.
2. Чечет, П.Л. Разработка интерфейса взаимодействия электронного устройства с компьютером / П.Л. Чечет // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 200–203.
3. Критерий Шапиро – Уилка. – Режим доступа: www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Критерий_Шапиро-Уилка. – Дата доступа: 30.12.2015.

Поступила в редакцию 16.03.18.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).