

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№1 (34) 2018

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (34) 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Андреев В.В., Гавриш В.Ю., Крутов А.Ф.** Методика вычисления электрослабых характеристик мезонов в пуанкаре-инвариантной квантовой механике 7
- Вакулина Е.В., Максименко Н.В.** Амплитуда комптоновского рассеяния на адронах спина 1 с учетом спиновых поляризуемостей 20
- Гайда Л.С., Матук Е.В., Свистун А.Ч.** Взаимодействие электромагнитного излучения с сфероидальными металлическими наночастицами в жидкости 24
- Капшай В.Н., Фиалка С.И.** Релятивистские сечения рассеяния системы двух частиц с потенциалами взаимодействия, содержащими «барьер» 29
- Окоджи Д.Э., Голосов Д.А., Мельников С.Н., Завадский С.М., Колос В.В., Поплевка Е.А., Жукович Ю.А.** Сегнетоэлектрические свойства пленок танталата стронция-висмута, нанесенных методом ВЧ магнетронного распыления 33
- Семченко А.В., Сидский В.В., Тюленкова О.И.** Исследование сорбционных свойств силикагелей, полученных золь-гель методом 38

МАТЕМАТИКА

- Адарченко Н.М., Близнец И.В., Рыжик В.Н.** О конечных полу- p -разложимых группах 41
- Белоконь Л.М.** Пересечения максимальных θ -подгрупп, содержащих формационные радикалы 45
- Васильева Т.И., Балычев С.В.** О влиянии k -примарных холловых подгрупп на строение конечных разрешимых групп 55
- Каморников С.Ф., Шеметкова О.Л.** Об ξ -субнормальных подгруппах конечной факторизуемой группы 61
- Малинковский Ю.В., Бородин Н.Н.** Сети массового обслуживания с конечным числом потоков отрицательных заявок и с ограниченным временем пребывания 64
- Монахов В.С.** О сверхразрешимом корадикале взаимно перестановочных подгрупп 69
- Сидорцов М.В., Драпеза А.А., Старовойтов А.П.** Скорость сходимости квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде вырожденных гипергеометрических функций 71
- Скиба А.Н.** Об одном обобщении локальных формаций 79

ИНФОРМАТИКА

- Быховцев В.Е., Смородин В.С., Бондарева Ю.Д.** Системный анализ математической модели грунтового основания при оптимизации параметров построения сваи РИТ 83
- Воруев А.В., Демиденко О.М., Левчук В.Д., Четев П.Л.** Инкапсуляция магистрального трафика центра обработки данных 88

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 14.03.18. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,39. Уч.-изд. л. 9,92. Тираж 100 экз. Заказ № 186.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2018
© Проблемы физики, математики и техники, 2018
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2018

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 1 (34) 2018

CONTENTS

PHYSICS

Andreev V.V., Haurysh V.Yu., Krutov A.F. Method of calculation of electroweak characteristics of mesons in the Poincaré invariant quantum mechanics	7
Vakulina E.V., Maksimenko N.V. Amplitude of Compton scattering on hadrons of spin 1 with account of spin polarizables	20
Gaida L.S., Matuk E.V., Svistun A.Ch. Interaction of electromagnetic radiation with spheroidal metal nanoparticles in liquid	24
Kapshai V.N., Fialka S.I. Relativistic scattering cross sections of a two-particle system in the case of interaction potentials containing a “barrier”.	29
Okojie J.E., Golosov D.A., Melnikov S.N., Zavadski S.M., Kolos V.V., Poplevka E.A., Zhukovich Yu.A. Ferroelectric properties of strontium-bismuth tantalate thin film deposited by RF magnetron sputtering method	33
Semchenko A.V., Sidsky V.V., Tyulenkova O.I. The investigation of the sorption properties of silica gels synthesized by sol-gel method	38

MATHEMATICS

Adarchenko N.M., Bliznets I.V., Rizhik V.N. On finite semi- p -decomposable groups	41
Belokon L.M. Intersections of maximal θ -subgroups containing formation radicals	45
Vasilyeva T.I., Balychev S.V. On the influence of k -primary Hall subgroups on the structure of finite soluble groups	55
Kamornikov S.F., Shemetkova O.L. On \mathfrak{F} -subnormal subgroups of a finite factorised group	61
Malinkovsky Yu.V., Borodin N.N. Queuing networks with finite number of flows of negative customers and with limited sojourn time	64
Monakhov V.S. On the supersoluble residual of mutually permutable products	69
Sidortsov M.V., Drapeza A.A., Starovoitov A.P. Speed of convergence of quadratic Hermite – Padé approximations confluent hypergeometric functions	71
Skiba A.N. On one generalization of the local formations	79

INFORMATION SCIENCE

Bykhovtsev V.E., Smorodin V.S., Bondareva Yu.D. System analysis of the mathematical model of ground basis at the optimization of parameters of building RIT-pile	83
Varuyeu A.V., Demidenko O.M., Liauchuk V.D., Chechat P.L. Encapsulation of backbone traffic of data processing center	88

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 539.12

МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕЗОНОВ В ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В.В. Андреев¹, В.Ю. Гавриш², А.Ф. Крутов³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

³Самарский университет

METHOD OF CALCULATION OF ELECTROWEAK CHARACTERISTICS OF MESONS IN THE POINCARÉ INVARIANT QUANTUM MECHANICS

V.V. Andreev¹, V.Yu. Haurysh², A.F. Krutov³

¹F. Scorina Gomel State University

²P.O. Sukhoi Gomel State Technical University

³Samara University

На основе точечной формы пуанкаре-инвариантной квантовой механики в работе представлена методика вычисления форм факторов и констант распадов мезонов, как релятивистских связанных систем кварков. В качестве примера разработанной методики получено интегральное представление константы радиационного распада векторного мезона $V \rightarrow P\gamma$.

Ключевые слова: кварк, пуанкаре-инвариантная квантовая механика, формфактор, константа распада.

On the basis of the point form of Poincaré-invariant quantum mechanics, a method for calculating the formfactors and the decay constants of mesons, as relativistic coupled quark systems, is presented. As an example of the developed technique, an integral representation of the radiative decay constant of a vector meson $V \rightarrow P\gamma$ is obtained.

Keywords: quark, Poincaré-invariant quantum mechanics, form factor, decay constant.

Введение

Атомы, ядра и адроны, как известно, представляют собой составные системы. В этой связи возникает необходимость как в моделях для описания связанных систем, так и в методиках вычисления характеристик с учетом их внутренней структуры. В нерелятивистской динамике составных систем существуют апробированные методы, основанные на применении модельных и феноменологических потенциалов взаимодействия. Точность современных экспериментальных данных требует учета релятивистских эффектов для составных систем в широкой области: от адронов до атомов. Эта необходимость продиктована, в частности, существованием адронов, содержащие легкие u, d и s -кварки. Такие связанные системы являются релятивистскими и вычисление релятивистских электрослабых поправок является важной задачей. Поэтому необходимость релятивистского описания связанных состояний не вызывает сомнений.

Следует отметить, что количественное описание релятивистских систем является нетривиальной задачей, которую вряд ли можно полностью решить в ближайшей перспективе [1]. Попытка применения методов теории поля вызывает существенные трудности при решении данной проблемы, в том числе и для адронов. Так, например,

известно, что пертурбативная квантовая хромодинамика (КХД) не может быть применена для легких адронов, поскольку при шкале с нескольких ГэВ пертурбативные методы неприменимы. КХД-мотивированные модели, тем не менее, могут дать полезную информацию о динамике в этих энергетических масштабах [2], [3].

Метод описания релятивистских составных систем базируется на использовании группы Пуанкаре и ее представлений. Этот подход называют теорией прямого взаимодействия [4], [5], релятивистской гамильтоновой динамикой (РГД) [6]–[9] или пуанкаре-инвариантной квантовой механикой (ПИКМ) [1], [2], [10]. В дальнейшем будем придерживаться последнего названия, которое наиболее точно отражает тот факт, что ПИКМ занимает промежуточное положение между локальной квантовой теорией поля и нерелятивистской квантовой механикой. На простейшем уровне ПИКМ является квантовой механикой с базовой симметрией относительно преобразований Пуанкаре. Хотя инвариантную квантовую механику Пуанкаре можно рассматривать как феноменологию, не зависящую от КХД, она также может быть связана с КХД [11]. Далее в данной работе для описания мезона, как связанной системы, используем ПИКМ.

Отметим, что существует большое количество подходов и моделей для релятивистских связанных систем (см., например, [12]–[18]).

Цель работы состоит в детализации методики расчета характеристик мезонов с учетом их кварковой структуры в рамках различных форм ПИКМ и поэтому анализ на преимуществ и недостатков различных подходов в данной работе не приводится (более подробную информацию можно найти, в частности, в работах [11], [19]).

Вычисление формфакторов (3.6) для матричных элементов (3.3) с учетом внутренней структуры адронов является нетривиальной задачей и в разных моделях решается различными способами.

Параметризация матричного элемента (3.3) включает формфакторы и 4-импульсы частиц. Поэтому возникает вопрос, какие из компонент 4-импульсов необходимо использовать для вычисления формфакторов. Так, в рамках моделей на основе динамики на световом фронте [20]–[25] предлагается для расчета токов, использовать только те компоненты 4-векторов, которые не содержат взаимодействия (“+”-компоненты). Если в случае пространственноподобного квадрата переданного импульса Q^2 , обращение в ноль “–”-компонент тока (содержащих взаимодействие), можно достичь путем выбора специальной системы отсчета, то для времениподобного Q^2 это сделать не удается. Поэтому при вычислении формфакторов с $Q^2 > 0$ используют формфакторы, рассчитанные с $Q^2 < 0$ [25]. Важно отметить, что попытка решить задачу вычисления формфакторов в динамике на световом фронте в системах, отличных от специально выбранной, приводит к результатам, существенно отличающимся от экспериментальных значений [26].

Оригинальная методика вычисления формфакторов в рамках мгновенной формы ПИКМ, основанная на обобщении метода параметризации матричных элементов локальных операторов [27], предложена в работах [28]–[31]. На первом этапе (с использованием базиса приводимого представления группы Пуанкаре) находятся формфакторы для системы без взаимодействия. На втором этапе полученные формфакторы используют для расчетов наблюдаемых формфакторов с помощью интегральных представлений. При этом формфакторы, характеризующие матричный элемент (3.3), трактуются как обобщенные функции.

В рамках точечной формы ПИКМ наивная схема вычислений, основанная только на использовании равенства 4-скоростей для систем с взаимодействием и без него, приводит к результатам, значительно отличающимся от наблюдаемых на эксперименте [32]–[34]. Поэтому авторами

работ [35]–[38] предложена модификация точечной формы ПИКМ, названная дираковской точечной формой динамики (DPF). В данной модификации ПИКМ вводится дополнительный единичный вектор \hat{u} , направление которого фиксируется путем требования равенства 4-импульсов связанной и свободных систем в пределе слабой связи [36], [37].

Как следует из краткого описания методов вычисления, задача получения наблюдаемых с учетом внутренней структуры систем даже в рамках ПИКМ требует дальнейших исследований.

1 Основы ПИКМ

Для того чтобы теория (модель), описывающая элементарные частицы, удовлетворяла требованию пуанкаре-инвариантности, пространство состояний релятивистской частицы должно преобразоваться по некоторому представлению группы Пуанкаре (группа Π). Если частица не имеет структуры, т. е. не содержит подсистем, то в пространстве состояний таких частиц действует неприводимое представление группы Π (см., например [39]).

Поэтому для описания частиц необходимо найти различные неприводимые представления группы Π . Для этого вводят ортогональный базис, состоящий из собственных векторов максимального набора коммутирующих наблюдаемых. Собственные значения полного набора операторов, составленных из генераторов P^μ и $M^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) группы Π удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (1.1)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = -i(g^{\mu\rho}P^\nu - g^{\nu\rho}P^\mu), \quad (1.2)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}). \quad (1.3)$$

Генераторы трансляций P^μ задают компоненты оператора 4-импульса, а $M^{\mu\nu}$ – компоненты оператора 4-мерного углового момента. Для невзаимодействующих частиц набора коммутирующих генераторов имеют простой физический смысл: $J_i = -1/2\epsilon_{ijk}M^{jk}$ – компоненты полного углового момента; $K_i = M_{i0}$ – генераторы лоренцевских бустов; $P^0 \equiv H$ и P_i – операторы полной энергии и полного 3-импульса соответственно.

Если системы отсчета связаны преобразованием Пуанкаре (a, Λ) , то векторы состояния связаны унитарным преобразованием

$$|\Psi'\rangle = U(a, \Lambda)|\Psi\rangle. \quad (1.4)$$

Одним из часто используемых является так называемый канонический набор операторов. В дополнение к операторам Казимира

$$P^\mu P_\mu, \quad (1.5)$$

$$W^\mu W_\mu, \quad W^\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\tau\mu} M^{\rho\tau} P^\nu \quad (1.6)$$

в полный набор входят операторы, составляющие пространственную часть 4-импульса P и имеющие соответственно собственные значения \mathbf{p}^i . Собственные значения операторов (1.5), (1.6) имеют физический смысл квадрата массы m^2 и величины $m^2 s(s+1)$, где $s = 0, 1/2, 1, \dots$ – спиновое квантовое число.

Система координат в этом базисе фиксируется введением пространственно-подобных векторов $e_\mu^j(p)$ ($j = 1, 2, 3$) со следующими свойствами

$$(e^j(p)p) = 0, \quad (e^i(p)e^j(p)) = \delta_{i,j},$$

$$\sum_{j=1}^3 e_\mu^j(p)e_\nu^j(p) = g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m_p^2}.$$

С помощью базиса $e_\mu^j(p)$ и оператора Паули-Любанского W^μ определим операторы проекций спина для релятивистской массивной частицы

$$S_i(p) = \frac{e_\mu^i(p)W^\mu}{m}. \quad (1.7)$$

Оператор \mathbf{S} удовлетворяет стандартным коммутационным соотношениям оператора спина

$$[S_i, S_j] = i \varepsilon_{ijk} S_k,$$

а собственные значения оператора S^2 равны $s(s+1)$.

Таким образом, канонический базис определяется шестью операторами

$$P_\mu P^\mu, \mathbf{P}^i, \mathbf{S}^2 = W_\mu W^\mu / m^2, S_3 \quad (1.8)$$

с соответствующими собственными значениями $m^2, \mathbf{p}^i, s(s+1), \lambda,$

где $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots; \lambda = -s, -s+1, \dots, s$.

Соответствующие набору (1.8) базисные векторы будем обозначать следующим образом:

$$|\mathbf{p}, \lambda, [m, s]\rangle \equiv |\mathbf{p}, \lambda\rangle. \quad (1.9)$$

Собственные вектора (1.9) образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве состояний элементарной частицы. Для условия ортогональности

$$\langle \mathbf{p}, \lambda | \mathbf{p}', \lambda' \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\lambda, \lambda'}$$

условие полноты принимает соответственно вид

$$\sum_{\lambda=-s}^s \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}, \lambda\rangle \langle \mathbf{p}, \lambda| = I.$$

Закон преобразования неприводимого представления (НП-базис) для выбранных условий нормировки и полноты задается соотношением

$$U(a, \Lambda) |\mathbf{p}, \lambda\rangle = \sum_{\lambda'=-s}^s |\mathbf{p}_\Lambda, \lambda'\rangle D_{\lambda', \lambda}^s(\mathbf{n}_W(\Lambda, \mathbf{p})), \quad (1.10)$$

где

$$p_\Lambda = \Lambda p, \quad p = \left(\omega_m(p) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \mathbf{p} \right),$$

а $D(\mathbf{n}_W)$ – D -функция Вигнера. Эта функция, определяемая посредством вектор-параметра \mathbf{n}_W , задает вращение НП-базиса, которое часто называют вигнеровским. Явный вид \mathbf{n}_W для различных преобразований Λ можно найти в работах [40], [41].

Рассмотрим более подробно систему из двух частиц с массами покоя m_1, m_2 и спинами s_1, s_2 . Одним из очевидных базисов двухчастичного приводимого представления является базис прямого произведения

$$|\mathbf{p}_1, \lambda_1\rangle |\mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle = |\mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle, \quad (1.11)$$

удовлетворяющий условию нормировки и полноты:

$$\langle \mathbf{p}'_1, \lambda'_1 | \mathbf{p}_1, \lambda_1 \rangle \langle \mathbf{p}'_2, \lambda'_2 | \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle = \delta(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \delta_{\lambda'_1, \lambda_1} \delta_{\lambda'_2, \lambda_2},$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 |\mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle \langle \mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2| = I.$$

Для физических приложений важно знать коэффициенты разложения базиса приводимого представления (1.11) по базису неприводимых представлений и наоборот. Эти коэффициенты называют коэффициентами Клебша-Гордана группы П.

НП-базис, описывающий систему невзаимодействующих частиц (как целого), записывается в виде, аналогичном одночастичному НП-базису (1.9):

$$|\mathbf{P}, [J, M_0], \mu, [m_1, s_1, m_2, s_2], (\alpha)\rangle. \quad (1.12)$$

Оператор полного импульса \mathbf{P} , квадрата полного собственного момента \mathbf{J}^2 и его проекции \mathbf{J}_3 вместе с инвариантами $(p_i p_i), S_i^2 (i = 1, 2)$

и $M_0 = \sqrt{(p_1 + p_2)^2}$ входят в полный набор наблюдаемых двухчастичной системы. Кроме этого, в полный набор входят также 2 оператора, которые снимают вырождение двухчастичной системы (для их обозначения введен совокупный индекс α).

В двухчастичном пространстве определим полный импульс

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (1.13)$$

и импульс относительного движения \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{M_0} \left(\frac{m_2^2 - m_1^2 - M_0 [\omega_{m_2}(p_2) - \omega_{m_1}(p_1)]}{\omega_{M_0}(P) + M_0} \right). \quad (1.14)$$

В практических приложениях для НП-базиса вместо оператора инвариантной массы свободных частиц M_0 удобно использовать $k = |\mathbf{k}|$, поскольку

$$M_0 = M_0(k) = \omega_{m_1}(k) + \omega_{m_2}(k).$$

В качестве чисел снимающих вырождение системы пуанкаре-инвариантные операторы орбитального ℓ и спинового s моментов. Тогда для НП-базиса можно использовать вектора состояния вида (опуская $[m_1, s_1, m_2, s_2]$):

$$|\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s\rangle, \quad (1.15)$$

которые удовлетворяют следующим условиям полноты и нормировки

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=-J}^J \sum_{\ell=|J-s|}^{J+s} \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \int d\mathbf{P} k^2 dk |\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s\rangle \times \\ & \quad \times \langle \mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s | = I, \\ & \langle \mathbf{P}', k', J'\mu', \ell', s' | \mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s \rangle = \\ & = \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \frac{\delta(k' - k)}{k^2} \delta_{\ell', \ell} \delta_{s', s}. \end{aligned}$$

При использовании схемы с «L-S связью» базисные векторы неприводимого представления выражается через базис приводимого представления посредством:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s\rangle = \\ & = \int d^2 \hat{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_{m_1}(p_1) \omega_{m_2}(p_2) M_0}{\omega_{m_1}(k) \omega_{m_2}(k) \omega_{M_0}(P)}}} \times \\ & \times \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{v_1 v_2} Y_{\ell m}(\theta_k, \varphi_k) \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & s \\ v_1 & v_2 & \lambda \end{matrix} \right\} \times \\ & \quad \times \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} \ell & s & J \\ m & \lambda & \mu \end{matrix} \right\} \times \\ & \quad \times D_{\lambda_1, v_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{m_1}) D_{\lambda_2, v_2}^{1/2}(\mathbf{n}_{m_2}) | \mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $\mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & s \\ v_1 & v_2 & \lambda \end{matrix} \right\}$, $\mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} \ell & s & j \\ m & \lambda & \mu \end{matrix} \right\}$ – коэффициенты Клебша-Гордана группы $SU(2)$, а $Y_{\ell m}(\theta_k, \varphi_k)$ – сферические функции, определяемые углами вектора \mathbf{k} .

Для сокращения записи введем вспомогательную функцию, которая в силу свойств коэффициентов Клебша-Гордана группы $SU(2)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} & \Omega \left\{ \begin{matrix} \ell & s & J \\ v_1 & v_2 & \mu \end{matrix} \right\} (\theta_k, \varphi_k) = \\ & = \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_1 & s \\ v_1 & v_2 & \lambda \end{matrix} \right\} \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} \ell & s & J \\ m & \lambda & \mu \end{matrix} \right\} Y_{\ell m}(\theta_k, \varphi_k) = \\ & = \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & s \\ v_1 & v_2 & v_1 + v_2 \end{matrix} \right\} \times \\ & \quad \times \mathbf{C} \left\{ \begin{matrix} \ell & s & J \\ \mu - (v_1 + v_2) & v_1 + v_2 & \mu \end{matrix} \right\} \times \\ & \quad \times Y_{\ell, \mu - (v_1 + v_2)}(\theta_k, \varphi_k). \end{aligned} \quad (1.17)$$

В частных случаях ($s_1 = s_2 = 1/2$)

$$\begin{aligned} & \Omega \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & \mu \end{matrix} \right\} (\theta_k, \varphi_k) = \delta_{\mu, 0} \delta_{v_1, -v_2} \frac{v_1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (1.18) \\ & \Omega \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & \mu \end{matrix} \right\} (\theta_k, \varphi_k) = \delta_{\mu, v_1 + v_2} \frac{\sqrt{3 + 4v_1 v_2}}{4\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

2 Формы ПИКМ

Рассмотрим на примере двухчастичных систем, каким образом вводится взаимодействие в рамках ПИКМ.

Для этого обратимся к набору из 10 генераторов H , P (пространственно-временных трансляций), J (вращений), K (бустов), удовлетворяющих коммутационным соотношениям соответствующих группе Пуанкаре. Если оператор H содержит взаимодействие V , то вследствие соотношения $[P_j, K_k] = i\delta_{j,k} H$ очевидно, что и другие операторы (или их комбинации) должны также содержать взаимодействие. В работе [42] Дирак показал, что нет однозначного разделения генераторов на динамический набор (генераторы, содержащие взаимодействия) и кинематический набор (генераторы, не содержащие взаимодействия) и представил три способа введения взаимодействия с сохранением коммутационных соотношений группы Π , которые и определяют мгновенную, точечную формы ПИКМ и динамику на световом фронте.

В мгновенной форме ПИКМ операторы трехмерного импульса системы \mathbf{P} и углового момента J не содержат взаимодействия, а операторы H и K содержат взаимодействие. Данный выбор кинематического набора автоматически обеспечивает мгновенной форме вращательную инвариантность, однако возникают проблемы при переходах от одной системы отсчета к другой, так как оператор буста содержит взаимодействие.

В динамике на световом фронте в кинематический набор входят операторы $P^+ = P^0 + P^3$, $P_{1,2}$, K^3 , J^3 , $E_{1,2} = \{K_1 + J_2, K_2 - J_1\}$, а в динамический – $P^- = P^0 - P^3$, $J_{1,2}$. Данная форма динамики наиболее часто используется в физических приложениях, связанных с исследованием характеристик составных релятивистских систем (см., например, [43]–[46]). Однако вследствие того, что оператор углового момента зависит от взаимодействия, имеются определенные трудности с сохранением вращательной инвариантности [20], которые устраняют дополнительными требованиями [9].

Также следует отметить, что ряд операторов дискретных симметрий (пространственной четности) также содержат взаимодействие. Однако «простая» структура вакуума (отсутствие диаграмм, описывающих рождение пар из вакуума) является общепризнанным преимуществом данной формы динамики.

Описание в точечной форме приводит к тому, что операторы $M^{\mu\nu}$ являются такими же как и для невзаимодействующих частиц, т. е. операторы буста K_i и углового момента J не содержат взаимодействий, а члены с взаимодействием содержатся только в операторе 4-импульса P . Точечная форма стала использоваться в приложениях ПИКМ относительно недавно [36], [47]–[49]. В отличие от мгновенной формы, оператор буста не содержит взаимодействия, что не создает проблем с лоренц-инвариантностью теории при переходах от одной системы к другой.

2.1 Описание связанной двухчастичной системы в ПИКМ

Построение релятивистской квантовомеханической модели связанной системы в ПИКМ начинают с построения модели для системы невзаимодействующих частиц, а затем вводят взаимодействие V таким образом, чтобы выполнялось требование пуанкаре-инвариантности, реализуемое в виде алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых системы. На этой основе в работе [6] впервые был дан способ построения пуанкаре-ковариантной модели в случае взаимодействующих частиц.

Рассмотрим, как строится динамическая картина взаимодействия в мгновенной форме ПИКМ для системы двух невзаимодействующих частиц с массами m_1 и m_2 , проекциями спинов λ_1 и λ_2 и соответственно с 4-импульсами

$$p_1 = (\omega_{m_1}(p_1), \mathbf{p}_1), \quad p_2 = (\omega_{m_2}(p_2), \mathbf{p}_2).$$

Для описания состояния двух частиц используется базис приводимого представления (1.11). Для описания системы как целого используем НП-базис (1.15), который задается полным коммутирующим набором операторов

$$\mathbf{J}^2, J_3, \mathbf{P}, M_0(k).$$

Добавим к оператору M_0 взаимодействие V таким образом, что новый оператор

$$M_J = M_0 + V$$

также коммутировал с операторами

$$\mathbf{J}^2, J_3, \mathbf{P},$$

входящих в кинематический набор [6,9]. При этом оператор взаимодействия V удовлетворяет следующим условиям:

$$M_J = M_J^\dagger, \quad M_J > 0,$$

$$[\mathbf{P}, V] = [i\nabla_{\mathbf{p}}, V] = [\mathbf{J}_3, V] = 0.$$

Волновые функции Ψ в ПИКМ вычисляются как собственные значения полного коммутирующего набора

$$\mathbf{J}^2, J_3, \mathbf{P}, M_J.$$

Задача на собственные значения для оператора массы связанного состояния Ψ с полным им-

пульсом \mathbf{Q} , массой M , спином J и проекцией спина μ может быть записана в виде:

$$M_I |\Psi_{\mathbf{Q}, J, \mu}\rangle = (M_0 + V) |\Psi_{\mathbf{Q}, J, \mu}\rangle = M |\Psi_{\mathbf{Q}, J, \mu}\rangle.$$

Поскольку основная цель работы связана с разработкой пуанкаре-ковариантных моделей описания связанных квантовых систем, основанных на мгновенной и точечной формах ПИКМ, то остановимся на этих формах динамики более подробно.

2.2 Мгновенная форма ПИКМ

Вследствие того, что операторы, входящие в кинематический набор для системы с взаимодействием и без него, совпадают, то волновая функция связанной системы в мгновенной форме динамики может быть представлена в виде [9]

$$\langle \mathbf{P}, k, J, \mu', \ell, s | \Psi_{\mathbf{Q}, J, \mu} \rangle = \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \delta_{\mu, \mu'} \Phi_{\ell s}^J(k).$$

Волновая функция $\Phi_{\ell s}^J(k)$ нормирована условием

$$\sum_{\ell, s} \int dk k^2 |\Phi_{\ell s}^J(k)|^2 = 1,$$

которое следует из условия полноты (1.15).

Используя (1.16), находим, что вектор состояния двухчастичной связанной системы определяется как прямое произведение векторов состояний свободных частиц с волновой функцией $\Phi_{\ell s}^J(k)$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{Q} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, J, \mu, M\rangle &= \\ &= \int d\mathbf{k} \sqrt{\frac{\omega_{m_1}(p_1)\omega_{m_2}(p_2)M_0}{\omega_{m_1}(k)\omega_{m_2}(k)\omega_{M_0}(P)}}} \times \\ &\times \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{v_1, v_2} \Omega \left\{ \begin{matrix} \ell & s & J \\ v_1 & v_2 & \mu \end{matrix} \right\} (\theta_k, \varphi_k) \Phi_{\ell s}^J(k) \times \\ &\times D_{\lambda_1, v_1}^{J/2}(\mathbf{n}_{W_1}) D_{\lambda_2, v_2}^{J/2}(\mathbf{n}_{W_2}) |\mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.3 Точечная форма ПИКМ

Точечная форма ПИКМ характерна тем, что оператор 4-скорости системы свободных частиц

$$v_p = \frac{p_1 + p_2}{M_0} = \left\{ \frac{\omega_{M_0}(P)}{M_0}, v_p = \frac{\mathbf{P}}{M_0} \right\} \quad (2.2)$$

и оператор 4-скорости связанной системы

$$V_Q = \frac{Q}{M} = \left\{ \frac{\omega_M(Q)}{M}, v_Q = \frac{\mathbf{Q}}{M} \right\} \quad (2.3)$$

совпадают (см. [9], [38], [42], [50], [51]). Волновая функция двухчастичной связанной системы в точечной форме динамики $\tilde{\Phi}_{\ell s}^J(k)$, по аналогии с мгновенной формой (см. (2)), может быть представлена в виде [9], [51]

$$\begin{aligned} \langle v_p, k, J, \mu, \ell, s | \Psi_{\mathbf{Q}, J, \mu} \rangle &= \\ &= M_0^{-3/2} \delta(v_p - v_Q) \tilde{\Phi}_{\ell s}^J(k), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где базис $|\nu_p, k, J\mu, \ell, s\rangle$ связан с вектором состояния (1.15) простым соотношением

$$|\nu_p, k, J\mu, \ell, s\rangle = M_0^{3/2} |\mathbf{P}, k, J\mu, \ell, s\rangle. \quad (2.5)$$

Вектор состояния двухчастичной связанной системы в точечной форме определяется аналогично (2.1) с учетом соотношения $\mathbf{Q} = M\nu_p$. Отметим, что в системе покоя связанной системы волновые функции в мгновенной и точечной формах ПИКМ совпадают.

3 Постановка проблемы

При изучении реакций с участием адронов h , таких как распады

$$h_i \rightarrow h_f + X, \quad h_i \rightarrow \ell_1 + \ell_2, \quad (3.1)$$

упругое рассеяние лептонов на адронах

$$\ell^+ + h_i \rightarrow \ell^{+'} + h_f \quad (3.2)$$

и др. в S -матричных элементах этих процессов имеется адронная часть S^h , которая может записана в виде

$$I^h(x) = \langle \mathbf{Q}', M', J'\mu' | S^h(x) | \mathbf{Q}, M, J\mu \rangle. \quad (3.3)$$

Здесь вектор $|\mathbf{Q}, M, J\mu\rangle$ определяет состояние адрона спина J с проекцией μ , массы M и импульса \mathbf{Q} .

Отметим, что в адронную часть входит как сильное взаимодействие (индекс *strong*), так и элементы электрослабого взаимодействия (токи и др.), которые мы обозначим $j^{EW}(x)$. Тогда в представлении взаимодействия S -матрица имеет вид [52]:

$$S^h(x) = T \left[j^{EW}(x) \exp \left\{ i \int V^{strong}(t) dt \right\} \right] \quad (3.4)$$

с полным гамильтонианом взаимодействия $H_{tot}^h(x) = H_0^h(x) + V^h(x)$. Символ T означает, что операторы, входящие в гамильтониан взаимодействия упорядочены по времени. Отметим, что сильное взаимодействие учитывается точно, а электрослабое взаимодействие берется в некотором порядке теории возмущений (в зависимости от вида $H_{int}^{EW}(x)$). Трансляционная инвариантность приводит к тому, что

$$I^h(x) = \exp(i\hat{Q}x) I^h(0) \exp(-i\hat{Q}x), \quad (3.5)$$

что дает возможность провести последующие расчеты для оператора $I^h(0)$.

Матричный элемент (3.3) при $x=0$ параметризуют с помощью различных феноменологических формфакторов, которые определяют из экспериментов:

$$I^h(0) = \sum_{i=1}^n F_i(q^2) g_{J\mu}^{J'\mu'}(i, \mathbf{Q}', M', \mathbf{Q}, M). \quad (3.6)$$

Здесь $F_i(q^2)$ – формфакторы, зависящие от переданного импульса $q = \mathbf{Q}' - \mathbf{Q}$; а g – функции,

зависящие от 4-импульсов и спиновых переменных состояний. Количество слагаемых определяется значениями квантовых чисел J, J' , а также выполнением дополнительных требований, из которых следует выделить закон сохранения тока, законы сохранения различных четностей и др.

Для демонстрации методики, развиваемой в работе, достаточно рассмотреть вариант (3.6) с одним форм фактором, т. е.

$$I^h(0) = F(q^2) g(\mathbf{Q}', M', \mathbf{Q}, M), \quad (3.7)$$

поскольку соотношения для каждого формфактора $F_i(q^2)$ можно найти путем выбора поляризованных состояний и построения базиса в пространстве Минковского.

4 Методика вычисления характеристик мезонов в пуанкаре-ковариантной модели, основанной на точечной форме ПИКМ

Ниже приведем оригинальную схему вычисления характеристик мезонов, как двухчастичных кварковых систем, в рамках точечной формы динамики ПИКМ.

Отличительной чертой является использование в матричном элементе (3.3) состояний в представлении Гейзенберга, где сильные взаимодействия учтены точно [52] и факт совпадения 4-скоростей для систем с взаимодействием и без него (см. (2.2) и (2.3)). Важным элементом данной методики является уравнение Липманна-Швингера для векторов состояний.

В предлагаемой схеме вычислений матричного элемента (3.3) можно выделить следующие этапы.

На первом этапе, из соотношения (3.7) получим, что

$$F(q^2) = \langle \mathbf{Q}', M', J'\mu' | S^h(0) g^{-1} \times \left(\hat{\mathbf{Q}}, \hat{M}_I, \hat{\mathbf{Q}}, \hat{M}_I \right) | \mathbf{Q}, M, J\mu \rangle, \quad (4.1)$$

где импульсы и массы мезонов заменены на операторы, так как состояния $|\mathbf{Q}, M, J\mu\rangle$ являются собственными для операторов $\hat{\mathbf{Q}}$ и \hat{M} по определению. При этом из требований релятивистской инвариантности S -матрица коммутирует с генераторами группы П, действующего в гильбертовом пространстве векторов физических состояний $|\mathbf{Q}, M, J\mu\rangle$.

Использование полного набора векторов двухчастичных состояний, образующих базис неприводимого представления группы П для свободных частиц $|\nu_p, k, \ell, s\rangle$ и соотношения (2.4), (2.5) позволяют в точечной форме ПИКМ привести (4.1) к виду

$$F(q^2) = \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int d\nu_p \, d\nu_p k'^2 k^2 dk' \, dk \times \langle \mathbf{Q}', M', J'\mu' | \nu_p, k', \ell', s' \rangle$$

$$\begin{aligned}
 & \langle \nu_{P'}, k', \ell', s' | S^h(0) g^{-1} \left(\widehat{\mathbf{Q}}', \widehat{M}', \widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{M} \right) \\
 & | \nu_P, k, \ell, s \rangle \langle \nu_P, k, \ell, s | \mathbf{Q}, M, J\mu \rangle = \\
 & = \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int k'^2 k^2 dk' dk \Phi_{\ell's'}^J(k) \Phi_{\ell's'}^{*J'}(k') \times (4.2) \\
 & \quad \times \langle \mathbf{P}', k', \ell', s' | S^h(0) g^{-1} \times \\
 & \quad \times \left(\widehat{\mathbf{Q}}', \widehat{M}', \widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{M}_I \right) | \mathbf{P}, k, \ell, s \rangle,
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{P} = M_0 \mathbf{V}_Q$ и $\mathbf{P}' = M_0' \mathbf{V}_{Q'}$.

На втором этапе используем некоторые соотношения из теории рассеяния в квантовой теории поля. В представлении взаимодействия соотношение (3.4) при $x = 0$ представимо в виде [52]:

$$\begin{aligned}
 S^h(0) &= T \left[j^{EW}(0) \exp \left\{ i \int V^{strong}(t) dt \right\} \right] = \\
 &= U^{strong}(\infty, 0) U^{\dagger strong}(t, 0) j^{EW}(0) \times (4.3) \\
 & \quad \times U^{strong}(t, 0) U^{strong}(0, -\infty) = \\
 &= U^{strong}(\infty, 0) J^{EW}(0) U^{strong}(0, -\infty),
 \end{aligned}$$

где унитарный оператор U обладает следующими свойствами:

$$U(t_2, t_1) = U(t_2, t_0) U(t_0, t_1), U^\dagger(t_2, t_1) = U(t_1, t_2). \quad (4.4)$$

В теории рассеяния начальные и конечные состояния $|\mathbf{P}, k, \ell, s\rangle$ без взаимодействия трактуются как состояния при $t = -\infty$ и $t = \infty$ соответственно и являются собственными векторами свободного гамильтониана $H_0(M_0)$ (см. (1.12)), т. е.

$$\widehat{H}_0^{strong} |\mathbf{P}, k, \ell, s\rangle = E_0 |\mathbf{P}, k, \ell, s\rangle. \quad (4.5)$$

С помощью $U(t_2, t_1)$ введем *in* и *out* состояния для $t = 0$ (векторы состояния в представлении Гейзенберга)

$$|\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{in} = U(0, -\infty) |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle, \quad (4.6)$$

$$|\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{out} = U^\dagger(\infty, 0) |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle. \quad (4.7)$$

Вследствие того, что оператор $U^{strong}(t_2, t_1)$ удовлетворяет интегральному уравнению (смотри, например [52], [53])

$$U^{strong}(t_2, t_1) = I - i \int_{t_1}^{t_2} dt' U^{strong}(t', t_0) V^{strong}(t'), \quad (4.8)$$

то *in* и *out* состояния удовлетворяют уравнению Липманна-Швингера, точное решение которого может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{in} = \\
 & = \left[I + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{E_0 - H_{tot}^{strong} + i\varepsilon} V^{strong} \right] |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle, \\
 & |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{out} = \\
 & = \left[I + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{E_0 - H_{tot}^{strong} - i\varepsilon} V^{strong} \right] |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

С помощью (4.9) можно показать, что полный гамильтониан $H_{tot}^{strong} = H_0^{strong} + V^{strong}$ имеет тот же спектр, что и свободный гамильтониан H_0 (см. (4.5)), т. е.

$$H_{tot}^{strong} |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{in, out} = E_0 |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{in, out}. \quad (4.10)$$

Здесь предполагается, что оператор $S^h(0)$ может быть выражен через операторы частиц, составляющих систему (в нашем случае кварков):

$$S^h(0) \approx S^{quark}(0).$$

Поскольку в полный набор для состояния с взаимодействием $|\mathbf{Q}, M, J\mu\rangle$ входят также операторы \mathbf{Q} и M_I , то из (4.10) следует, что

$$M_I |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{in, out} = M_0 |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{in, out}, \quad (4.11)$$

$$\widehat{\mathbf{Q}} |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{in, out} = \mathbf{P} |\mathbf{P}, k, J\mu\rangle_{in, out}. \quad (4.12)$$

Используя соотношения (4.3), (4.6), (4.7) и (4.11), (4.12) запишем (4.2) в виде

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int k'^2 k^2 dk' dk \times \\
 & \times \Phi_{\ell's'}^J(k) \Phi_{\ell's'}^{*J'}(k') g^{-1}(\mathbf{P}', M_0'(k'), \mathbf{P}, M_0(k))_{out} \times (4.13) \\
 & \quad \times \langle \mathbf{P}', k', \ell', s' | J^{EW}(0) | \mathbf{P}, k, \ell, s \rangle_{in}.
 \end{aligned}$$

Переходя от *in* и *out* к состояниям при $t = \pm\infty$ (обратный переход) получим

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int k'^2 k^2 dk' dk \times \\
 & \times \Phi_{\ell's'}^J(k) \Phi_{\ell's'}^{*J'}(k') \times g^{-1}(\mathbf{P}', M_0'(k'), \mathbf{P}, M_0(k)) \times (4.14) \\
 & \quad \times \langle \mathbf{P}', k', \ell', s' | S^h(0) | \mathbf{P}, k, \ell, s \rangle,
 \end{aligned}$$

где $S^h(0)$ задается соотношением (3.4).

Заметим, что поскольку слагаемые, которые возникают в потенциале межкваркового взаимодействия в результате обмена глюонов между кварками, входящих в начальный или конечный мезон, уже учтены введением функции $\Phi_{\ell's'}^J(k)$,

то в операторе V^{strong} остаются только слагаемые, которые соответствуют обмену глюонами между кварками, входящими в начальные и конечные мезоны. Такими слагаемыми (КХД-поправки) можно пренебречь в многих случаях.

Посредством разложения Клебша-Гордана (1.16) оператор (4.14) преобразуется к соотношению:

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\nu_1, \nu_2} \sum_{\lambda_1' \lambda_2'} \sum_{\nu_1', \nu_2'} \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \\
 & \quad \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1) \omega_{m_q}(p_2) M_0}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_q}(k') \omega_{M_0}(P)}} \times \\
 & \quad \times \sqrt{\frac{\omega_{m_q'}(p'_1) \omega_{m_q'}(p'_2) M_0'}{\omega_{m_q'}(k') \omega_{m_q'}(k'') \omega_{M_0'}(P')}} \times \\
 & \quad \times \Omega \left\{ \begin{matrix} \ell & s & J \\ \nu_1 & \nu_2 & \mu \end{matrix} \right\} (\theta_k, \varphi_k) \Omega^* \left\{ \begin{matrix} \ell' & s' & J' \\ \nu_1' & \nu_2' & \mu' \end{matrix} \right\} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (\Theta_{k'}, \Phi_{k'}) \times \Phi_{\ell's'}^{*J'}(k') \Phi_{\ell's}^J(k) \times \\ & \times g^{-1}(\mathbf{V}_{P'}, M'_0, \mathbf{V}_P, M_0) \times \\ & \times \langle \mathbf{p}'_2, \lambda'_2, \mathbf{p}'_1, \lambda'_1 | S^h(0) | \mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \times \\ & \times D_{\lambda'_1, \nu'_1}^{*1/2}(\mathbf{n}'_{W_1}) D_{\lambda'_2, \nu'_2}^{*1/2}(\mathbf{n}'_{W_2}) D_{\lambda_1, \nu_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_1}) D_{\lambda_2, \nu_2}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_2}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь m_q и m_Q – массы первого и второго кварков соответственно, а функция g^{-1} переписана в терминах $\mathbf{V}_P, \mathbf{V}_{P'}$. Таким образом, вычисление адронной части сводится к нахождению матричного элемента для частиц (кварков), составляющих адрон.

Следующий этап состоит в вычислении матричного элемента

$$\langle \mathbf{p}'_2, \lambda'_2, \mathbf{p}'_1, \lambda'_1 | S^h(0) | \mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle$$

в переменных $\mathbf{V}_P, \mathbf{V}_{P'}$ и \mathbf{k}, \mathbf{k}' с последующим интегрированием.

При этом во всех моделях предполагается, что оператор $S^h(0)$ может быть выражен через операторы частиц составляющих систему (в нашем случае кварков):

$$S^h(0) \approx S^{quark}(0) = S^{h_1}(0) + S^{h_2}(0).$$

Дополнительной возможностью для вычисления (4.15) является использование релятивистского импульсного приближения:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}'_2, \lambda'_2, \mathbf{p}'_1, \lambda'_1 | S^h(0) | \mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle = \\ & = \langle \mathbf{p}'_1, \lambda'_1 | S^{h_1}(0) | \mathbf{p}_1, \lambda_1 \rangle \langle \mathbf{p}'_2, \lambda'_2 | \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle + \\ & + \langle \mathbf{p}'_2, \lambda'_2 | S^{h_2}(0) | \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \langle \mathbf{p}'_1, \lambda'_1 | \mathbf{p}_1, \lambda_1 \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

Используя преобразования «бустов» импульсов \mathbf{Q}, \mathbf{Q}' для векторов состояний с приближением (4.16) и соотношением (1.17), перепишем выражение (4.15) так:

$$\begin{aligned} F(q^2) = & \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{\nu_1, \nu_2} \sum_{\lambda'_1, \lambda'_2} \sum_{\nu'_1, \nu'_2} \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \times \\ & \times \Omega \begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ \nu_1 & \nu_2 & \mu \end{Bmatrix} (\Theta_{k'}, \Phi_{k'}) \Omega^* \begin{Bmatrix} \ell' & s' & J' \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \mu' \end{Bmatrix} \times \\ & \times (\Theta_{k'}, \Phi_{k'}) g^{-1}(\mathbf{V}_{P'}, M'_0, \mathbf{V}_P, M_0) \times \\ & \times \sqrt{\frac{1}{V_0} \frac{1}{V'_0}} \Phi_{\ell's'}^{*J'}(k') \Phi_{\ell's}^J(k) \left[\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1) \omega_{m'_q}(p'_1)}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m'_q}(k')}}} \times \right. \\ & \times \langle \mathbf{p}'_1, \lambda'_1 | S^{h_1}(0) | \mathbf{p}_1, \lambda_1 \rangle \times \\ & \times \langle -\mathbf{k}', \nu'_2 | U^\dagger(\mathbf{u}_{Q'}) U(\mathbf{u}_Q) | -\mathbf{k}, \nu_2 \rangle \times \\ & \times D_{\lambda'_1, \nu'_1}^{*1/2}(\mathbf{n}'_{W_1}) D_{\lambda_1, \nu_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_1}) + \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(p_2) \omega_{m'_Q}(p'_2)}{\omega_{m_Q}(k) \omega_{m'_Q}(k')}}} \times \\ & \times \langle \mathbf{p}'_2, \lambda'_2 | S^{h_2}(0) | \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \langle \mathbf{k}', \nu'_1 | U^\dagger(\mathbf{u}_{Q'}) \\ & \left. U(\mathbf{u}_Q) | \mathbf{k}, \nu_1 \rangle \times D_{\lambda'_2, \nu'_2}^{*1/2}(\mathbf{n}'_{W_2}) D_{\lambda_2, \nu_2}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_2}) \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$V_0 = \frac{\omega_{M_0}(P)}{M_0}, \quad V'_0 = \frac{\omega_{M'_0}(P')}{M'_0}. \quad (4.18)$$

Поскольку кварки являются фермионами спина 1/2, то

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}'_1, \lambda'_1 | S^{h_1}(0) | \mathbf{p}_1, \lambda_1 \rangle = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_{m_q}(p_1) \omega_{m'_q}(p'_1)}} \times \\ & \times \bar{w}_{\lambda'_1}(\mathbf{p}'_1, m'_q) \Gamma^{h_1} w_{\lambda_1}(\mathbf{p}_1, m_q), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где конструкция из биспиноров Дирака может быть записана в одном из вариантов в фигурных скобках:

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{\lambda'_1}(\mathbf{p}'_1, m'_q) \Gamma^{h_1} w_{\lambda_1}(\mathbf{p}_1, m_q) = \\ & = \begin{cases} \bar{u}_{\lambda'_1}(\mathbf{p}'_1, m'_q) \Gamma^{h_1} u_{\lambda_1}(\mathbf{p}_1, m_q) \\ \bar{v}_{\lambda'_1}(\mathbf{p}'_1, m'_q) \Gamma^{h_1} v_{\lambda_1}(\mathbf{p}_1, m_q) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.20)$$

или

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{\lambda'_1}(\mathbf{p}'_1, m'_q) \Gamma^{h_1} w_{\lambda_1}(\mathbf{p}_1, m_q) = \\ & = \begin{cases} \bar{v}_{\lambda'_1}(\mathbf{p}'_1, m'_q) \Gamma^{h_1} u_{\lambda_1}(\mathbf{p}_1, m_q), \\ \bar{u}_{\lambda'_1}(\mathbf{p}'_1, m'_q) \Gamma^{h_1} v_{\lambda_1}(\mathbf{p}_1, m_q). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Явный вид матрицы Γ^{h_1} определяется оператором $S^h(0)$.

Рассмотрим случай, когда в фермионных конструкциях реализуется вариант (4.20), который справедлив для случая электромагнитного взаимодействия кварка и антикварка в мезоне. Используя трансформационные свойства биспиноров для определенности считая вектор состояния с индексом q частицей, а с индексом Q античастицей, перепишем (4.17) в виде:

$$\begin{aligned} F(q^2) = & \sum_{\nu_1, \nu_2} \sum_{\nu'_1, \nu'_2} \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \frac{1}{2(2\pi)^3} \times \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \times \\ & \times \Omega \begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ \nu_1 & \nu_2 & \mu \end{Bmatrix} (\Theta_{k'}, \Phi_{k'}) \times \\ & \times \Omega^* \begin{Bmatrix} \ell' & s' & J' \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \mu' \end{Bmatrix} (\Theta_{k'}, \Phi_{k'}) \times \\ & \times g^{-1}(\mathbf{V}_{P'}, M'_0, \mathbf{V}_P, M_0) \times \\ & \times \sqrt{\frac{1}{V_0} \frac{1}{V'_0}} \Phi_{\ell's'}^{*J'}(k') \Phi_{\ell's}^J(k) \times \\ & \times \left[\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m'_q}(k')}}} \bar{u}_{\nu_1}(\mathbf{k}', m'_q) \times \right. \\ & \times B^{-1}(\mathbf{u}_{Q'}) \Gamma^{h_1} B(\mathbf{u}_Q) u_{\nu_1}(\mathbf{k}, m_q) \times \\ & \times \langle -\mathbf{k}', \nu'_2 | U^\dagger(\mathbf{u}_{Q'}) U(\mathbf{u}_Q) | -\mathbf{k}, \nu_2 \rangle + \\ & + \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_Q}(k) \omega_{m'_Q}(k')}}} \bar{v}_{\nu_2}(-\mathbf{k}, m_Q) B^{-1} \times \\ & \left. \times (\mathbf{u}_Q) \Gamma^{h_2} B(\mathbf{u}_{Q'}) v_{\nu_2}(-\mathbf{k}', m'_Q) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\times \langle \mathbf{k}', v'_1 | U^\dagger(\mathbf{u}_Q) U(\mathbf{u}_Q) | \mathbf{k}, v_1 \rangle \Big].$$

В представлении Дирака-Паули для γ -матриц, оператор $B(\mathbf{u}_p)$ имеет вид

$$B(\mathbf{u}_p) = \frac{I - (\mathbf{u}_p \boldsymbol{\gamma}) \gamma_0}{\sqrt{1 - \mathbf{u}_p^2}} \quad (4.23)$$

и обладает следующими свойствами:

$$B^{-1}(\mathbf{u}_p) = B(-\mathbf{u}_p), \quad (4.24)$$

$$B(\mathbf{u}_p) B(\mathbf{u}_p) = B(\mathbf{u}_p) = \hat{V}_p \gamma_0 \quad (4.25)$$

с $v_p = \mathbf{p} / \omega_m(p)$. Также очевидно, что

$$\begin{aligned} \hat{V}_p B(\mathbf{u}_p) &= B(-\mathbf{u}_p) \hat{V}_p, \\ B(\mathbf{u}_p) \gamma_5 &= \gamma_5 B(\mathbf{u}_p). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Действие оператора буста (4.23) на биспинор определяется соотношением:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}_Q) u_\lambda(\mathbf{k}, m) &= u_\sigma(\mathbf{p}, m) D_{\sigma, \lambda}^{1/2}(\mathbf{n}_W(\mathbf{k}, \mathbf{Q})), \\ B(\mathbf{u}_Q) v_\lambda(\mathbf{k}, m) &= v_\sigma(\mathbf{p}, m) D_{\sigma, \lambda}^{*1/2}(\mathbf{n}_W(\mathbf{k}, \mathbf{Q})), \\ \begin{pmatrix} \omega_m(p) \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} &= L(\mathbf{u}_Q) \begin{pmatrix} \omega_m(k) \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Для упрощения расчетов во второй части соотношения (4.22) выполним замену $\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. В итоге имеем

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \sum_{v_1, v_2} \sum_{v'_1, v'_2} \sum_{\ell, s} \sum_{\ell', s'} \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \times \\ &\times \Omega \begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ v_1 & v_2 & \mu \end{Bmatrix} (\theta_k, \varphi_k) \times \\ &\times \Omega^* \begin{Bmatrix} \ell' & s' & J' \\ v'_1 & v'_2 & \mu' \end{Bmatrix} (\theta_{k'}, \varphi_{k'}) \times \\ &\times g^{-1}(\mathbf{V}_{p'}, M'_0, \mathbf{V}_p, M_0) \sqrt{\frac{1}{V_0 V'_0}} \Phi_{\ell's'}^{*J'}(k') \Phi'_{\ell,s}(k) \times \\ &\times \left[\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m'_q}(k')}} \bar{u}_{v_1}(\mathbf{k}', m'_q) B^{-1}(\mathbf{u}_Q) \times \right. \\ &\quad \times \Gamma^h B(\mathbf{u}_Q) u_{v_1}(\mathbf{k}, m_q) \times \\ &\quad \times \langle -\mathbf{k}', v'_2 | U^\dagger(\mathbf{u}_Q) U(\mathbf{u}_Q) | -\mathbf{k}, v_2 \rangle + \\ &+ (-1)^{\ell+\ell'} \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_Q}(k) \omega_{m'_Q}(k')}} \bar{v}_{v_2}(\mathbf{k}, m_Q) B^{-1}(\mathbf{u}_Q) \times \\ &\quad \times \Gamma^h B(\mathbf{u}_Q) v_{v'_2}(\mathbf{k}', m'_Q) \times \\ &\quad \left. \times \langle -\mathbf{k}', v'_1 | U^\dagger(\mathbf{u}_Q) U(\mathbf{u}_Q) | -\mathbf{k}, v_1 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Существенного упрощения расчетов можно достичь, если провести вычисления в системе отсчета, где

$$\mathbf{V}_Q + \mathbf{V}_{Q'} = 0, \quad (4.29)$$

которая представляет собой обобщение широко используемой системы Брейта [52]. В этой системе отсчета автоматически выполняется равенство $\mathbf{u}_Q = -\mathbf{u}_{Q'}$ и

$$B(\mathbf{u}_Q) = B(-\mathbf{u}_Q). \quad (4.30)$$

Пространственную систему координат выберем так, чтобы вектор \mathbf{V}_Q был направлен вдоль оси Z, т. е.

$$V_Q = \{V_0, 0, 0, |\mathbf{V}_Q|\}, \quad V_{Q'} = \{V_0, 0, 0, -|\mathbf{V}_Q|\}. \quad (4.31)$$

Тогда (4.28) примет вид

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \sum_{v_1, v_2} \sum_{v'_1, v'_2} \sum_{\ell, s} \sum_{\ell', s'} \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \times \\ &\times \Omega \begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ v_1 & v_2 & \mu \end{Bmatrix} (\theta_k, \varphi_k) \Omega^* \begin{Bmatrix} \ell' & s' & J' \\ v'_1 & v'_2 & \mu' \end{Bmatrix} \times \\ &\quad \times \langle \theta_{k'}, \varphi_{k'} \rangle g^{-1}(\mathbf{V}_{p'}, M'_0, \mathbf{V}_p, M_0) \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{1}{V_0 V'_0}} \Phi_{\ell's'}^{*J'}(k') \Phi'_{\ell,s}(k) \times \\ &\quad \times \left[\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m'_q}(k')}} \bar{u}_{v_1}(\mathbf{k}', m'_q) \times \right. \\ &\quad \times B(\mathbf{u}_Q) \Gamma^h B(\mathbf{u}_Q) u_{v_1}(\mathbf{k}, m_q) \times \\ &\quad \times \langle -\mathbf{k}', v'_2 | U(\mathbf{u}_Q) | -\mathbf{k}, v_2 \rangle + \\ &+ (-1)^{\ell+\ell'} \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_Q}(k) \omega_{m'_Q}(k')}} \bar{v}_{v_2}(\mathbf{k}, m_Q) \times \\ &\quad \times B(-\mathbf{u}_Q) \Gamma^h B(-\mathbf{u}_Q) v_{v'_2}(\mathbf{k}', m'_Q) \times \\ &\quad \left. \times \langle -\mathbf{k}', v'_1 | U(\mathbf{u}_Q) | -\mathbf{k}, v_1 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Используя закон преобразования состояний (1.10) получим

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \sum_{v_1, v_2} \sum_{v'_1, v'_2} \sum_{\ell, s} \sum_{\ell', s'} \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \times \\ &\times \Omega \begin{Bmatrix} \ell & s & J \\ v_1 & v_2 & \mu \end{Bmatrix} (\theta_k, \varphi_k) \Omega^* \begin{Bmatrix} \ell' & s' & J' \\ v'_1 & v'_2 & \mu' \end{Bmatrix} \times \\ &\quad \times \langle \theta_{k'}, \varphi_{k'} \rangle \frac{1}{2(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{V_0 V'_0}} \Phi_{\ell's'}^{*J'}(k') \Phi'_{\ell,s}(k) \times \\ &\quad \times \left[\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m'_q}(k')}} \bar{u}_{v_1}(\mathbf{k}', m'_q) \times \right. \\ &\quad \times B(\mathbf{u}_Q) \Gamma^h B(\mathbf{u}_Q) u_{v_1}(\mathbf{k}, m_q) \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k')}{\omega_{m_Q}(k)}} \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}') D_{v'_2 v_2}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_2}(\mathbf{k}, \mathbf{u}_Q)) + \\ &+ (-1)^{\ell+\ell'} \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_Q}(k) \omega_{m'_Q}(k')}} \bar{v}_{v_2}(\mathbf{k}, m_Q) \times \\ &\quad \times B(-\mathbf{u}_Q) \Gamma^h B(-\mathbf{u}_Q) v_{v'_2}(\mathbf{k}', m'_Q) \times \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\times \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k')}{\omega_{m_q}(k)}} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}') D_{v_1' v_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{w_1}(\mathbf{k}, \nu_Q)) \Big].$$

В соотношении (4.33) вектор-параметр вигнеровского вращения имеет вид

$$\mathbf{n}_{w_{1,2}}(\mathbf{k}, \nu_Q) = -\frac{[\mathbf{u}_{k_{1,2}} \nu_Q]}{1 - (\mathbf{u}_{k_{1,2}} \nu_Q)}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{u}_{k_{1,2}} = \frac{\mathbf{k}}{\omega_{m_{q,Q}}(k) + m_{q,Q}}, \quad (4.35)$$

а 4-импульс k_2 в системе Брейта задается равенствами:

$$k_{1,2} = \begin{pmatrix} \omega_{m_{q,Q}}(k_{1,2}) \\ \mathbf{k}_{1,2} \end{pmatrix} = L_{-\nu_Q} \begin{pmatrix} \omega_{m_{q,Q}}(k) \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

с

$$\mathbf{k}_{1,2} = \mathbf{k} - \nu_Q \left((\varpi_{12} + 1) \omega_{m_{q,Q}}(k) - \sqrt{\varpi_{12}^2 - 1} k \cos \theta_k \right), \quad (4.37)$$

$$\omega_{m_{q,Q}}(k_{1,2}) = \varpi_{12} \omega_{m_{q,Q}}(k) - \sqrt{\varpi_{12}^2 - 1} k \cos \theta_k, \quad (4.38)$$

где

$$\varpi_{12} = \varpi_{12}(k', k) = \frac{M_0'^2(k') + M_0^2(k) + q^2}{2 M_0(k) M_0'(k')}. \quad (4.39)$$

а $M_0(k)$ и $M_0'(k')$ – инвариантные массы системы без сильного взаимодействия в начальном и конечном состоянии. Углы θ_k, φ_k являются сферическими углами вектора относительного движения \mathbf{k} в системе отсчета (4.31).

После интегрирования получаем выражение

$$\begin{aligned} F(q^2) = & \sum_{v_1, v_2} \sum_{v_1', v_2'} \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int d\mathbf{k} \Omega \left\{ \begin{matrix} \ell & s & J \\ v_1 & v_2 & \mu \end{matrix} \right\} \times \\ & \times (\theta_k, \varphi_k) g^{-1}(\mathbf{V}_{P'}, M_0', \mathbf{V}_P, M_0) \times \\ & \times \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{V_0} \frac{1}{V_0'}} \Phi_{\ell', s'}^J(k) \sqrt{\frac{1}{4\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)}} \times \\ & \times \left[\sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}} \bar{u}_{v_1}(\mathbf{k}_2, m_q') B(\mathbf{u}_Q) \Gamma^h B(\mathbf{u}_Q) \times \right. \\ & \times u_{v_1}(\mathbf{k}, m_q) \Omega^* \left\{ \begin{matrix} \ell' & s' & J' \\ v_1' & v_2' & \mu' \end{matrix} \right\} (\theta_{k_2}, \varphi_{k_2}) \times \\ & \times \Phi_{\ell', s'}^{*J'}(k_2) D_{v_2' v_2}^{1/2}(\mathbf{n}_{w_2}(\mathbf{k}, \nu_Q)) + \\ & \left. + (-1)^{\ell+\ell'} \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k_1)}{\omega_{m_Q}(k_1)}} \bar{v}_{v_2}(\mathbf{k}, m_Q) B(-\mathbf{u}_Q) \times \right. \\ & \times \Gamma^{h_2} B(-\mathbf{u}_Q) v_{v_2'}(\mathbf{k}_1, m_Q') \Omega^* \left\{ \begin{matrix} \ell' & s' & J' \\ v_1' & v_2' & \mu' \end{matrix} \right\} \times \\ & \left. \times (\theta_{k_1}, \varphi_{k_1}) \Phi_{\ell', s'}^{*J'}(k_1) D_{v_1' v_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{w_1}(\mathbf{k}, \nu_Q)) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Дальнейшие упрощения возможны после конкретизации процесса взаимодействия между кварками.

5 Радиационные распады мезонов в точечной форме ПИКМ

Рассмотрим применение методики, представленной в работе, для радиационных распадов $V \rightarrow P\gamma$, которые широко используются для исследования структуры адронов.

Существует достаточно большое количество подходов для модельного описания радиационных переходов мезонов. Так в работах [24], [54] используют релятивистские составные кварковые модели, основанные на light-front форме ПИКМ и квазипотенциальном подходе.

Параметризацию матричного элемента для перехода векторного мезона V с вектором поляризации $\varepsilon_\nu(\lambda)$ в псевдоскалярный мезон P посредством испускания виртуального гамма-кванта γ^*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q}', M_P | \hat{J}^\alpha(0) | \mathbf{Q}, 1\lambda, M_V \rangle = \\ = i \frac{g_{VP\gamma^*}(q^2)}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \varepsilon_\nu(\lambda) Q_\rho Q'_\sigma}{\sqrt{4\omega_{M_V}(Q) \omega_{M_P}(Q')}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

перепишем в терминах 4-скоростей V_Q и $V_{Q'}$. Далее, умножая полученное выражение на $K^{*\alpha}(\lambda) = -i\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \varepsilon_\nu^*(\lambda) V_\rho V'_\sigma$ получим, что

$$\begin{aligned} g_{VP\gamma^*}(q^2) = (2\pi)^3 \sqrt{4V_0 V_0'} \times \\ \times \langle \mathbf{Q}', M_P | \frac{(K^*(\lambda) J(0))}{\sqrt{M_P M_V} (K(\lambda) K^*(\lambda))} | \mathbf{Q}, 1\mu, M_V \rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Константа радиационного распада определяется формулой $g_{VP\gamma} = g_{VP\gamma^*}(0)$. Сравнивая соотношения (5.2) и (4.1), приходим к тому, что

$$\begin{aligned} g^{-1} \left(\hat{\mathbf{Q}}, \hat{M}_I, \hat{\mathbf{Q}}, \hat{M}_I \right) = \\ = (2\pi)^3 \frac{\sqrt{4V_0 V_0'} K_\alpha^*(\lambda)}{\sqrt{M_P M_V} (K(\lambda) K^*(\lambda))}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$S^h(0) = J^\alpha(0). \quad (5.4)$$

Процесс распада $V \rightarrow P\gamma^*$ обусловлен электромагнитным взаимодействием кварков q с электрическими зарядами e_q и поэтому ток $\hat{J}^\alpha(0)$ запишется в виде:

$$\hat{J}^\alpha(0) = \sum_{q=u,d,\dots} e_q \psi_q \gamma^\alpha \psi_q. \quad (5.5)$$

Для распада $V \rightarrow P\gamma^*$ в обобщенной системе Брейта (4.29) имеем:

$$J' = \ell' = s' = \ell = 0, \quad J = s = 1,$$

$$\Gamma^{h,2} = \gamma^\alpha, \quad \Phi'_{\ell,s}(k) = \Phi_V(k),$$

$$m_q = m'_q, \quad m_Q = m'_Q,$$

$$K(\lambda) = \frac{\sqrt{\omega^2 - 1}}{\sqrt{2}} \{0, 0, -i\lambda, 1, 0\}, \quad \omega = (V_Q V_Q'). \quad (5.6)$$

Используя соотношения (1.18), (4.40) и то, что в точечной форме ПИКМ $\omega = \omega_{12}$, для величины $g_{VP\gamma}(q^2)$ из (5.2) находим, что

$$g_{VP\gamma}(q^2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{v_1, v_2} \sum_{v'_1, v'_2} \int d\mathbf{k} \sqrt{\frac{3 + 4v_1(\lambda - v_1)}{4}} v'_1 \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{M_0(k)}} \Phi_V(k) \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)}} \times$$

$$\times \left[e_q \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}} \bar{u}_{v_1}(\mathbf{k}_2, m_q) B(v_Q) \times \right.$$

$$\times (\lambda\gamma_1 - i\gamma_2) u_{v_1}(\mathbf{k}, m_q) \frac{1}{\sqrt{M'_0(k_2)}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\omega_{12}^2(k_2, k) - 1}} \Phi_P(k_2) D_{-v_1\lambda - v_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{w_2}(\mathbf{k}, v_Q)) +$$

$$+ e_Q \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k_1)}{\omega_{m_Q}(k_1)}} \bar{u}_{\lambda - v_1}(\mathbf{k}, m_Q) B(-v_Q) \times \quad (5.7)$$

$$\times (\lambda\gamma_1 - i\gamma_2) v_{-v_1}(\mathbf{k}_1, m_Q) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{M'_0(k_1)}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{12}^2(k_1, k) - 1}} \times$$

$$\times \Phi_P(k_1) D_{v_1 v_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{w_1}(\mathbf{k}, v_Q)) \left. \right].$$

Дальнейшие вычисления $g_{VP\gamma}$ связаны расчетами токовых конструкций биспиноров Дирака и предельным переходом $q^2 \rightarrow 0$ в соотношении (5.7). После ряда преобразований и интегрирования по угловым переменным импульса \mathbf{k} находим относительно простое интегральное представление для константы радиационного распада $V \rightarrow P\gamma$:

$$g_{VP\gamma} = \frac{1}{2} \int dk k^2 \Phi_V(k) \Phi_P(k) \times \quad (5.8)$$

$$\times (e_q f(k, m_q, m_Q) - e_Q f(k, m_Q, m_q)),$$

где

$$f(k, m_q, m_Q) =$$

$$= -\frac{1}{3\omega_{m_q}(k)} \left(\frac{m_q + m_Q}{M_0(k)} + 1 + \frac{m_q}{\omega_{m_q}(k)} \right). \quad (5.9)$$

Заключение

В работе представлена методика расчета формфакторов и констант распадов мезонов с учетом их кварковой структуры в рамках точечной формы ПИКМ. В данном подходе

подинтегральные выражения для наблюдаемых не зависят от масс мезонов, в отличие от подходов, разработанных в [32], [55], [56]. В то же время аналогичное свойство наблюдается методами, разработанных в динамике на световом фронте [20]–[24] и в мгновенной форме ПИКМ [1]. В частности, отметим, что интегральное представление константы f_P лептонного распада $(q\bar{Q}) \rightarrow \ell + v_\ell$ для псевдоскалярного мезона $P(q\bar{Q})$ (см. [3], [11], [57]) совпадает с выражениями аналогичной константы в работах [24], [30]. Отличие в методиках расчета возникает при вычислении зависимости форм факторов от переданного импульса q^2 .

Разработанная методика практически без изменений может быть применена к мгновенной форме ПИКМ (см. (2.1)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krutov, A.* Instant form of Poincare-invariant quantum mechanics and description of the structure of composite systems / A. Krutov, V. Troitsky // *Physics of Particles and Nuclei*. – 2009. – Vol. 40, № 2. – P. 136–161.
2. *Mini review of Poincaré invariant quantum theory* / W. N. Polyzou [et al.] // *Few Body Syst.* – 2011. – Vol. 49. – P. 129–147.
3. *Andreev, V.V.* QCD coupling constant below 1 GeV in the Poincare-covariant model / V.V. Andreev // *Physics of Particles and Nuclei Letters*. – 2011. – Vol. 8, № 4. – P. 347–355.
4. *Coester, F.* Relativistic quantum mechanics of particles with direct interactions / F. Coester, W.N. Polyzou // *Phys. Rev.* – 1982. – Vol. D26. – P. 1348–1367.
5. *Polyzou, W.N.* Relativistic two-body models / W.N. Polyzou // *Annals of Physics*. – 1989. – Vol. 193, №2. – P. 367–418.
6. *Bakamjian, B.* Relativistic Particle Dynamics. II / B. Bakamjian, L.H. Thomas // *Phys. Rev.* – Dec 1953. – Vol. 92, № 5. – P. 1300–1310.
7. *Bakamjian, B.* Relativistic Particle Dynamics / B. Bakamjian // *Phys. Rev.* – 1961. – Vol. 121, № 6. – P. 1849–1851.
8. *Соколов, С.Н.* Релятивистское сложение прямых взаимодействий в точечной форме динамики / С.Н. Соколов // *ТМФ*. – 1978. – Т. 36, № 2. – С. 193–207.
9. *Keister, B.D.* Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // *Adv. Nucl. Phys.* – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.
10. *First Order Relativistic Three-Body Scattering* / T. Lin, C. Elster, W.N. Polyzou, W. Glockle // *Phys. Rev.* – 2007. – Vol. C76. – P. 014010.
11. *Андреев, В. В.* Электрослабые характеристики квантовых систем в пуанкаре-ковариантных моделях / В. В. Андреев. – Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 320 с.

12. *Bete, H.A.* A relativistic equation for bound-state problems / H.A. Bete, E.E. Salpeter // *Phys. Rev.* – 1951. – Vol. 84, № 2. – P. 1232–1242.
13. *Salpeter, E.E.* Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms / E.E. Salpeter // *Phys. Rev.* – 1952. – Vol. 87, № 2. – P. 328–343.
14. *Логунов, А.А.* Вероятностное описание рассеяния при высоких энергиях и гладкий квазипотенциал / А.А. Логунов, О.А. Хрусталев // *ЭЧАЯ.* – 1970. – Т. 1, № 1. – С. 71–90.
15. *Кадышевский, В.Г.* Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // *ЭЧАЯ.* – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
16. *Spectrum of Charmed Quark-Antiquark Bound States* / E. Eichten [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 1975. – Vol. 34. – P. 369–372.
17. *Dorokhov, A.E.* Spin effects in instanton model / A.E. Dorokhov // *Czech. J. Phys.* – 2002. – Vol. 52. – P. C79–C89.
18. *Meson form-factors and the quark-based linear sigma model* / M.D. Scadron, F. Kleefeld, G. Rupp, E. van Beveren // *Fizika.* – 2004. – Vol. B13. – P. 43–56.
19. *Андреев, В.В.* Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель: УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 2008. – 294 с.
20. *Hard constituent quarks and electroweak properties of pseudoscalar mesons* / F. Cardarelli [et al.] // *Phys. Lett.* – 1994. – Vol. B332. – P. 1–7.
21. *Chung, P.L.* Charge form-factors of quark model pions / P.L. Chung, F. Coester, W.N. Polyzou // *Phys. Lett.* – 1988. – Vol. B205. – P. 545–548.
22. *Coester, F.* Charge form factors of quark-model pions / F. Coester, W.N. Polyzou // *Phys. Rev.* – 2005. – Vol. C71. – P. 028202.
23. *Schlumpf, F.* Charge form-factors of pseudoscalar mesons / F. Schlumpf // *Phys. Rev.* – 1994. – Vol. D50. – P. 6895–6898.
24. *Jaus, W.* Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons / W. Jaus // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D44. – P. 2851–2859.
25. *Jaus, W.* Semileptonic decays of B and D mesons in the light front formalism / W. Jaus // *Phys. Rev.* – 1990. – Vol. D41. – P. 3394.
26. *Simula, S.* Comparison among Hamiltonian light-front formalisms at $q^+ = 0$ and $q^+ \neq 0$: Space-like elastic form factors of pseudoscalar and vector mesons / S. Simula // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. C66. – P. 035201.
27. *Чешков, А.А.* Инвариантная параметризация локальных операторов / А.А. Чешков, Ю.М. Широков // *ЖЭТФ.* – 1963. – Т. 44, № 6. – С. 1982–1992.
28. *Krutov, A. F.* Relativistic instant-form approach to the structure of two-body composite systems / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // *Phys. Rev. C.* – 2002. – P. 045501.
29. *Krutov, A.F.* Relativistic properties of spin and pion electromagnetic structure / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // *J. High Energy Physics.* – 1999. – Vol. 10. – P. 028.
30. *Крутов, А.Ф.* Электрослабые свойства легких мезонов в релятивистской модели составных кварков / А.Ф. Крутов // *ЯФ.* – 1997. – Т. 60, № 8. – С. 1442–1450.
31. *Крутов, А.Ф.* Построение формфакторов составных систем с помощью обобщенной теоремы Вигнера-Эккарта для группы Пуанкаре / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // *Теоретическая и математическая физика.* – 2005. – Т. 143, № 2. – С. 258–277.
32. *Desplanques, B.* Form factors in the 'point form' of relativistic quantum mechanics: Single and two-particle currents / B. Desplanques, L. Theussl // *Eur. Phys. J.* – 2004. – Vol. A21. – P. 93.
33. *Desplanques, B.* Effective boost and 'point-form' approach / B. Desplanques, L. Theussl, S. Noguera // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. C65. – P. 038202.
34. *Comparison of different boost transformations for the calculation of form factors in relativistic quantum mechanics* / L. Theussl, A. Amghar, B. Desplanques, S. Noguera // *Few Body Syst. Suppl.* – 2003. – Vol. 14. – P. 393.
35. *Amghar, A.* The form factor of the pion in 'point-form' of relativistic dynamics revisited / A. Amghar, B. Desplanques, L. Theussl // *Phys. Lett.* – 2003. – Vol. B574. – P. 201–209.
36. *Desplanques, B.* Dirac's inspired point form and hadron form factors / B. Desplanques // *Nucl. Phys.* – 2005. – Vol. A755. – P. 303–306.
37. *Desplanques, B.* Nucleon and pion form factors in different forms of relativistic quantum mechanics / B. Desplanques // *Int. J. Mod. Phys.* – 2005. – Vol. A20. – P. 1601–1606.
38. *Desplanques, B.* Relativistic quantum mechanics: A Dirac's point-form inspired approach / B. Desplanques // *Nucl. Phys.* – 2005. – Vol. A748. – P. 139–167.
39. *Менский, М.Б.* Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц / М.Б. Менский под ред. Г. ред. физ.-мат. лит.-ры. – Наука, 1976. – 145 с.
40. *Новожилов, Ю.В.* Введение в теорию элементарных частиц / Ю.В. Новожилов. – М.: Наука, 1972. – 472 с.
41. *Федоров, Ф.И.* Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
42. *Dirac, P.A.M.* Forms of relativistic dynamics / P.A.M. Dirac // *Rev. of Modern Phys.* – 1949. – Vol. 21. – P. 392–399.
43. *Pauli, H.-C.* On the effective Hamiltonian for QCD: An overview and status report / H.-C. Pauli // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* – 2002. – Vol. 108. – P. 273–280.
44. *Берестецкий, В.Б.* Динамика светового фронта и нуклоны из релятивистских кварков /

- В.Б. Берестецкий, М.В. Терентьев // Ядерная физика. – 1977. – Т. 24, № 5. – С. 1044–1057.
45. Кондратюк, Л.А. Задача рассеяния для релятивистских систем с фиксированным числом частиц в динамике на световом фронте / Л.А. Кондратюк, М.В. Терентьев // Ядерная физика. – 1980. – Т. 31, № 4. – С. 1087–1106.
46. Терентьев, М.В. О структуре волновых функций мезонов как связанных состояний релятивистских кварков / М.В. Терентьев // Ядерная физика. – 1976. – Т. 25, № 1. – С. 207–213.
47. Allen, T.W. Pion charge form factor in point form relativistic dynamics / T.W. Allen, W.H. Klink // Phys. Rev. – 1998. – Vol. C58. – P. 3670–3673.
48. Андреев, В.В. Описание лептонных распадов в рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели / В.В. Андреев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 2. – С. 93–98.
49. Klink, W.H. Point form electrodynamics and the construction of conserved current operators Electronic resource / W.H. Klink. – 2000. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/nucl-th/0012033>. – Date of access: 14.01.2008.
50. Keister, B.D. Heavy quark symmetry and Dirac's point form dynamics / B.D. Keister // Phys. Rev. – 1992. – Vol. D46. – P. 3188–3194.
51. Klink, W.H. Constructing Point Form Mass Operators from Interaction Lagrangians / W.H. Klink // Nucl. Phys. – 2003. – Vol. A716. – P. 123–135.
52. Биленький, С. М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.
53. Lucha, W. Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states / W. Lucha, H. Rupprecht, F.F. Schoberl // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D44. – P. 242–249.
54. Ebert, D. Radiative M1 decays of heavy light mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R. Faustov, V. Galkin // Phys. Lett. – 2002. – Vol. B537. – P. 241–248.
55. Hwang, D.-S. Decay constants of B, B* and D, D* mesons in relativistic mock meson model / D.-S. Hwang, G.-H. Kim // Phys. Rev. – 1997. – Vol. D55. – P. 6944–6951.
56. Negash, H. Radiative decay widths of ground and excited states of vector charmonium and bottomonium / H. Negash, S. Bhatnagar // Adv. High Energy Phys. – 2017. – Vol. 2017. – P. 7306825.
57. Андреев, В.В. Электромагнитные форм-факторы мезонов / В.В. Андреев, А.Ф. Крутов // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 7–19.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований (г. Минск, Беларусь) и Самарского университета (г. Самара, Россия).*

Поступила в редакцию 28.08.17.

УДК 530.1, 539.12

АМПЛИТУДА КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЙНИЯ НА АДРОНАХ СПИНА 1 С УЧЕТОМ СПИНОВЫХ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ

Е.В. Вакулина¹, Н.В. Максименко²

¹Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Новозыбков

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

AMPLITUDE OF COMPUTON SCATTERING ON HADRONS OF SPIN 1 WITH ACCOUNT OF SPIN POLARIZABLES

E.V. Vakulina¹, N.V. Maksimenko²

¹I.G. Petrovsky Bryansk State University, Novozibkov

²F. Scorina Gomel State University

В рамках формализма Даффина – Кеммера – Петью получены в ковариантной форме лагранжианы двухфотонных взаимодействий с адронами спина 1 с учетом спиновых поляризуемостей, которые характерны для частиц спина $\frac{1}{2}$. На основе этих лагранжианов вычислены ковариантные спиновые структуры амплитуды комптоновского рассеяния на адронах спина 1. Установлено, что в низкоэнергетическом приближении спиновые поляризуемости вносят вклад в амплитуду комптоновского рассеяния в третьем порядке по энергии фотонов. Определены тензорно-ковариантные структуры амплитуды рассеяния вперед, которые вносят вклад в спиновые поляризуемости адронов спина 1.

Ключевые слова: адроны, поляризуемость, лагранжиан, комптоновское рассеяние.

Within the framework of the Duffin – Kemmer – Petu formalism the Lagrangians of two-photon interactions with spin 1 hadrons are obtained in covariant form, taking into account the spin-new polarizabilities that are characteristic of spin $\frac{1}{2}$ particles. On the basis of these Lagrangians, the covariant spin structures of the Compton scattering amplitude for spin 1 hadrons have been calculated. It is established that in the low-energy approximation the spin polarizabilities contribute to the Compton scattering amplitude in third order in the photon energy. The tensor-covariant structures of the forward scattering amplitude that contribute to the spin polarizabilities of spin 1 hadrons are determined.

Keywords: hadrons, polarizability, Lagrangian, Compton scattering.

Введение

Правила сумм устанавливают модельно независимую связь экспериментально измеряемых электромагнитных характеристик, куда входят и поляризуемости, связанные со структурными свойствами адронов. В основе их выводов лежат общие принципы квантовой теории поля, такие, например, как унитарность, причинность, симметрии относительно преобразований Лоренца и калибровочных преобразований.

Как свидетельствуют правила сумм для спиновых поляризуемостей нуклона, необходимо определить вклад всех, феноменологически установленных спиновых поляризуемостей в амплитуду комптоновского рассеяния вперед [1]–[3].

Особенности взаимодействия электромагнитного поля с векторными частицами, обладающими электромагнитными характеристиками, более аргументированно и полно могут быть представлены в формализме Даффина – Кеммера – Петью (ДКП) [4].

Однако для практического использования вкладов спиновых поляризуемостей в спиральные амплитуды и сечения рассеяния общепринято использование спиновых структур в ковариантной тензорной форме [5].

Определение эффективных лагранжианов и амплитуды комптоновского рассеяния на частице спина 1 в формализме ДКП позволяет использовать соответствие, между поляризуемостями частиц спина $\frac{1}{2}$ и спина 1, что способствует более полному описанию особенностей этих поляризуемостей [6].

Для совершенствования методов фитирования экспериментальных данных по комптоновскому рассеянию на адронах, с целью получения численных значений о поляризуемостях в области низких и средних энергий, возникает необходимость релятивистского теоретико-полевого определения вкладов этих характеристик в амплитуды и сечения электродинамических процессов [5]–[9].

В данной работе в рамках метода, предложенного в [6] на основе формализма ДКП получен вклад спиновых поляризуемостей в амплитуду комптоновского рассеяния на адронах спина 1.

1 Вклад спиновых поляризуемостей частицы спина 1 в амплитуду комптоновского рассеяния

Для определения вкладов спиновых поляризуемостей в амплитуду комптоновского рассеяния в ковариантной тензорной форме воспользуемся

эффективными лагранжианами двухфотонного взаимодействия с частицами спина 1, установленными на основе матричного 10-мерного формализма ДКП [6]. Уравнение ДКП для свободной частицы спина 1 имеют вид [10]:

$$(\beta_\mu \bar{\partial}_\mu + m)\psi(x) = 0, \quad (1.1)$$

$$\bar{\psi}(x)(\beta_\mu \bar{\partial}_\mu - m) = 0, \quad (1.2)$$

где $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\eta$ – десятимерные функции частиц, $\eta = 2(\beta_4^{(10)})^2 - I$, стрелки над производными $\bar{\partial}_\mu$ указывают направление их действия, а четырехмерный вектор определяется компонентами $a_\mu \{\bar{a}, ia_0\}$. В уравнениях (1.1) и (1.2) β_μ – десятимерные матрицы ДКП, которые удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\rho + \delta_{\rho\nu} \beta_\mu.$$

Эффективный лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина 1 с учетом поляризуемостей в рамках теоретико-полевого ковариантного подхода имеет вид [11], [12]:

$$L = -\frac{\pi}{2m} \bar{\psi} [\beta_\nu \hat{L}_{\nu\sigma} \bar{\partial}_\sigma + \hat{L}_{\nu\sigma} \beta_\nu \bar{\partial}_\sigma] \psi, \quad (1.3)$$

где $\bar{\partial}_\sigma = \bar{\partial}_\sigma - \bar{\partial}_\sigma$.

В лагранжиане (1.3) тензор $\hat{L}_{\nu\sigma}$ выражается через поляризуемости, которые определены в работе [12]:

$$\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_E) = \hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_1}) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_2}), \quad (1.4)$$

$$\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_M) = \hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{M_1}) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{M_2}). \quad (1.5)$$

Тензор $\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_1})$ определяется следующим образом:

$$\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_1}) = F_{\nu\mu} \bar{\partial}_\lambda F_{\rho\sigma} \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_1}), \quad (1.6)$$

а тензор $\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_2})$ в уравнении (1.4) имеет вид:

$$\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_2}) = (F_{\nu\rho} \bar{\partial}_k \bar{F}_{\sigma\rho} + \bar{F}_{\nu\rho} \bar{\partial}_\rho F_{\sigma k}) \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_2}). \quad (1.7)$$

Производные в (1.6)–(1.7) действуют только на тензоры электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Тензоры $\hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_1})$, $\hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_2})$ представляются следующим образом:

$$\hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_1}) = i\gamma_{E_1} \delta_{\mu\rho k\lambda} \hat{W}_k, \quad \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_2}) = -\gamma_{E_2} \hat{W}_k.$$

В этих уравнениях использовано определение ковариантного спинового вектора, который выражается через матрицы β_ν согласно [10]:

$$\hat{W}_\mu = -\frac{i}{4m} \delta_{\mu\kappa\delta\eta} \hat{J}^{[\delta\eta]} \bar{\partial}_\kappa,$$

где $\hat{J}^{[\delta\eta]} = \beta_\delta \beta_\eta - \beta_\eta \beta_\delta$. Все производные и операторы содержащиеся в уравнениях, действуют на волновые функции ψ и $\bar{\psi}$.

Аналогичным образом определяется тензор (1.5), если в (1.6)–(1.7) ввести константы γ_{M_1} и γ_{M_2} , а также сделать замену $F_{\nu\mu} \rightarrow \tilde{F}_{\nu\mu}$, где

$$\tilde{F}_{\nu\mu} = \frac{i}{2} \delta_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad \text{а вместо тензора } \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_2}) \text{ необходимо ввести } \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{M_2}) = \gamma_{M_2} \hat{W}_k.$$

Учитывая вклады спиновых поляризуемостей $L(\gamma_{E_1})$ и $L(\gamma_{M_1})$ в лагранжиан (1.3) в формализме ДКП, получим

$$\begin{aligned} L(\gamma_{E_1}) &= -i \frac{\pi}{2m} \gamma_{E_1} \delta_{\mu\rho k\lambda} \times \\ &\times F_{\nu\mu} \bar{\partial}_\lambda F_{\rho\sigma} \bar{\psi} (\beta_\nu \hat{W}_k + \hat{W}_k \beta_\nu) \bar{\partial}_\sigma \psi, \\ L(\gamma_{M_1}) &= -i \frac{\pi}{2m} \gamma_{M_1} \delta_{\mu\rho k\lambda} \times \\ &\times F_{\nu\mu} \bar{\partial}_\lambda F_{\rho\sigma} \bar{\psi} (\beta_\nu \hat{W}_k + \hat{W}_k \beta_\nu) \bar{\partial}_\sigma \psi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Десятимерные волновые функции в формализме ДКП представлены с помощью элементов полной матричной алгебры ε^{AB} [10]

$$\Psi^{(r)}(p) = \Psi_\mu^{(r)}(p) \varepsilon^{\mu 1} + \frac{1}{2} \Psi_{[\mu\nu]}^{(r)}(p) \varepsilon^{[\mu\nu] 1}.$$

В этом соотношении

$$\Psi_\mu^{(r)}(p) = \frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_\mu^{(r)},$$

$$\Psi_{[\mu\nu]}^{(r)}(p) = -\frac{1}{\sqrt{2}m} (p_\mu \lambda_\nu^{(r)} - \lambda_\mu^{(r)} p_\nu),$$

$\lambda_\mu^{(r)}$ – компоненты векторов поляризации частицы спина 1, а ε^{AB} – элементы полной матричной алгебры [10]:

$$(\varepsilon^{AB})_{CD} = \delta_{AC} \delta_{BD}, \quad \varepsilon^{AB} \varepsilon^{CD} = \delta_{BC} \varepsilon^{AD},$$

для частицы спина 1 индексы $A, B, C, D = \mu, [\rho\sigma]$, квадратные скобки обозначают антисимметрию по индексам ρ и σ .

Волновые функции $\bar{\psi}^{(r)}(p)$ сопряженные $\psi^{(r)}(p)$ с учетом матрицы η имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(r)}(p) &= \psi^\dagger(p) \eta = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[\dot{\lambda}_\mu^{(r)} \varepsilon^{1\mu} + \frac{i}{2m} \varepsilon^{[\mu\nu]} (p_\mu \dot{\lambda}_\nu^{(r)} - p_\nu \dot{\lambda}_\mu^{(r)}) \right], \end{aligned}$$

где $\dot{\lambda}_\mu^{(r)} \{ \lambda_i^{(r)*}, \lambda_4^{(r)} \}$.

В системе покоя мишени в приближении, когда импульс отдачи частицы равен нулю, лагранжины (1.8) принимают вид

$$L(\gamma_{E_1}) = 4\pi \gamma_{E_1} \left(\hat{S} \left[\vec{E} \vec{E} \right] \right), \quad (1.9)$$

$$L(\gamma_{M_1}) = 4\pi \gamma_{M_1} \left(\hat{S} \left[\vec{H} \vec{H} \right] \right).$$

Определим теперь спиновые структуры амплитуды комптоновского рассеяния на частице спина 1 в матричном 10-мерном формализме

ДКП с учетом вкладов поляризуемостей на основе лагранжиана (1.3) следуя работе [10]

$$\langle k_2, p_2 | \hat{S} | k_1, p_1 \rangle = \frac{im\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^2 \sqrt{4\omega_1\omega_2 E_1 E_2}} M,$$

где M – амплитуда комптоновского рассеяния, которая является суммой вкладов поляризуемостей в соответствии с (1.4) и (1.5).

$$M = M(\gamma_{E_1}, \gamma_{M_1}) + M(\gamma_{E_2}, \gamma_{M_2}).$$

Используя слагаемые лагранжиана (1.4) и (1.5) $\hat{L}_{v\sigma}(\gamma_{E_1})$ и $\hat{L}_{v\sigma}(\gamma_{M_1})$, а также предыдущую методику определения вкладов в амплитуду комптоновского рассеяния поляризуемостей, получим спиновую структуру амплитуды в матричном 10-мерном формализме ДКП [6]:

$$\begin{aligned} M(\gamma_{E_1}, \gamma_{M_1}) &= i \frac{\pi}{m} (k_1 + k_2)_\lambda \delta_{\mu\rho\lambda k} \times \\ &\times \left\{ \gamma_{E_1} \left[F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\rho\sigma}^{(1)} - F_{\nu\mu}^{(1)} F_{\rho\sigma}^{(2)} \right] + \right. \\ &+ \gamma_{M_1} \left[\tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(1)} - \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(2)} \right] \left. \right\} \times \\ &\times \bar{\psi}^{(r_2)}(p_2) \left[\beta_\nu \hat{W}_k + \hat{W}_k \beta_\nu \right] P_\sigma \psi^{(r_1)}(p_1). \end{aligned} \quad (1.10)$$

В уравнении (1.10) введены обозначения:

$$F_{\nu\mu}^{(2)} = k_{2\nu} e_\mu^{(\lambda_2)^*} - k_{2\mu} e_\nu^{(\lambda_2)^*}, \quad F_{\mu\sigma}^{(1)} = k_{1\mu} e_\sigma^{(\lambda_1)} - k_{1\sigma} e_\mu^{(\lambda_1)},$$

в свою очередь

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} &= \frac{i}{2} \delta_{\nu\mu\alpha\delta} F_{\alpha\delta}^{(1)} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} = \frac{i}{2} \delta_{\nu\mu\alpha\delta} F_{\alpha\delta}^{(2)}, \\ P_\sigma &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2)_\sigma, \end{aligned}$$

p_1 и p_2 – импульсы начальной и конечной частицы спина единица.

В системе покоя мишени и в пренебрежении отдачей частицы мишени амплитуда (1.10) принимает вид:

$$\begin{aligned} M(\gamma_{E_1}, \gamma_{M_1}) &= -4i\pi(\omega_1 + \omega_2)\omega_1\omega_2 \bar{\lambda}^{(r_2)^*} \times \\ &\times \left\{ \gamma_{E_1} \left(\hat{S} \left[\bar{e}^{(\lambda_2)^*} \bar{e}^{(\lambda_1)} \right] \right) + \right. \\ &\left. \gamma_{M_1} \left(\hat{S} \left[\left[\bar{n}_2 \bar{e}^{(\lambda_2)^*} \right] \left[\bar{n}_1 \bar{e}^{(\lambda_1)^*} \right] \right] \right) \right\} \bar{\lambda}^{(r_1)}, \end{aligned}$$

где $\bar{n}_2 = \frac{\bar{k}_2}{\omega_2}$ и $\bar{n}_1 = \frac{\bar{k}_1}{\omega_1}$.

Если в выражении (1.10) перейти к ковариантному тензорному представлению амплитуды рассеяния вперед, то получим

$$\begin{aligned} M(\gamma_{E_1}, \gamma_{M_1}) &= -\frac{2\pi}{m^3} k_\lambda P_\varepsilon P_\nu P_\sigma \delta_{\mu\rho\lambda k} \delta_{k\varepsilon\delta\eta} \times \\ &\times \left\{ \gamma_{E_1} \left[F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\rho\sigma}^{(1)} - F_{\nu\mu}^{(1)} F_{\rho\sigma}^{(2)} \right] + \right. \\ &+ \gamma_{M_1} \left[\tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(1)} - \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(2)} \right] \left. \right\} \left(\lambda_\eta^{(2)*} \lambda_\delta^{(1)} - \lambda_\delta^{(2)*} \lambda_\eta^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Поскольку рассматривается рассеяние вперед, то в тензорах $F_{\nu\mu}^{(n)}$, $n = 1, 2$ нужно положить $k_1 = k_2 = k$.

В рамках вышеприведенного подхода определим теперь релятивистски-инвариантный лагранжиан и амплитуду, в которых, как было показано в работе [3], учитываются вклады спиновых поляризуемостей, связанных с электрическим квадрупольным моментом комптоновского рассеяния:

$$\begin{aligned} L(\gamma_{E_2}) &= \frac{\pi\gamma_{E_2}}{2m} \left[\left(F_{\nu\rho} \bar{\partial}_k \tilde{F}_{\sigma\rho} + \tilde{F}_{\nu\rho} \bar{\partial}_k F_{\sigma k} \right) \right] \times \\ &\times \bar{\psi} \left[\beta_\nu \hat{W}_k + \hat{W}_k \beta_\nu \right] \bar{\partial}_\sigma \psi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Используя лагранжиан (1.11) и определение S – матричного элемента, получим амплитуду M в матричном 10-мерном формализме ДКП:

$$\begin{aligned} M(\gamma_{E_2}) &= \frac{\pi\gamma_{E_2}}{2m} P_\sigma \bar{\psi}^{(r_2)}(p_2) \times \\ &\times \left[\beta_\nu \hat{W}_k + \hat{W}_k \beta_\nu \right] \psi^{(r_1)}(p_1) \times \\ &\times \left[\delta_{\sigma\rho\alpha\beta} \left(k_{2k} F_{\nu\rho}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} - k_{1k} F_{\nu\rho}^{(1)} F_{\alpha\beta}^{(2)} \right) + \right. \\ &+ \delta_{\nu\rho\alpha\beta} \left(k_{2\rho} F_{\sigma k}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} - k_{1\rho} F_{\sigma k}^{(1)} F_{\alpha\beta}^{(2)} \right) \left. \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В системе покоя мишени и в пренебрежении отдачей частицы мишени, лагранжиан (1.11) принимает вид:

$$L(\gamma_{E_2}) = -4\pi\gamma_{E_2} E_{ik} H_i \hat{S}_k, \quad (1.13)$$

а амплитуда (1.12) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} M(\gamma_{E_2}) &= -4\pi\gamma_{E_2} \bar{\lambda}^{(r_2)^*} \times \\ &\times \left[\omega_1 \left(\hat{S} \bar{e}^{(\lambda_1)} \right) \left(\bar{e}^{(\lambda_2)^*} \left[\bar{k}_2 \bar{k}_1 \right] \right) + \right. \\ &+ \omega_2 \left(\hat{S} \bar{e}^{(\lambda_2)^*} \right) \left(\bar{e}^{(\lambda_1)} \left[\bar{k}_2 \bar{k}_1 \right] \right) - \\ &- \omega_1 \left(\hat{S} \bar{k}_1 \right) \left(\bar{k}_2 \left[\bar{e}^{(\lambda_2)^*} \bar{e}^{(\lambda_1)} \right] \right) - \\ &- \omega_2 \left(\hat{S} \bar{k}_2 \right) \left(\bar{k}_1 \left[\bar{e}^{(\lambda_2)^*} \bar{e}^{(\lambda_1)} \right] \right) \left. \right] \bar{\lambda}^{(r_1)}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

В уравнениях (1.13) и (1.14) $\bar{\lambda}^{(r_2)^*}$ и $\bar{\lambda}^{(r_1)}$ векторы поляризации конечной и начальной частицы, а $\bar{e}^{(\lambda_2)^*}$ и $\bar{e}^{(\lambda_1)}$ – аналогичные векторы поляризации фотонов, тензор $E_{ik} = \frac{1}{2} (\partial_i E_k + \partial_k E_i)$.

Амплитуда рассеяния вперед в ковариантном тензорном представлении с учетом вклада γ_{E_2} имеет вид:

$$\begin{aligned} M(\gamma_{E_2}) &= \frac{i\pi\gamma_{E_2}}{2m^3} P_\sigma P_\varepsilon P_\nu \delta_{k\varepsilon\delta\eta} \left(\lambda_\eta^{(2)*} \lambda_\delta^{(1)} - \lambda_\delta^{(2)*} \lambda_\eta^{(1)} \right) \times \\ &\times \left[\delta_{\sigma\rho\alpha\beta} \left(k_k F_{\nu\rho}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} - k_k F_{\nu\rho}^{(1)} F_{\alpha\beta}^{(2)} \right) + \right. \\ &+ \delta_{\nu\rho\alpha\beta} \left(k_\rho F_{\sigma k}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} - k_\rho F_{\sigma k}^{(1)} F_{\alpha\beta}^{(2)} \right) \left. \right], \end{aligned}$$

где в тензорах $F_{\nu\mu}^{(n)}$, $n = 1, 2$ нужно положить $k_1 = k_2 = k$.

Эффективный лагранжиан двухфотонного взаимодействия с частицей спина 1 с учетом

вклада спиновой поляризуемости, связанной с магнитным квадрупольным моментом комптоновского рассеяния [3], в данном подходе определяется следующим образом:

$$L(\gamma_{M_2}) = -i \frac{\pi \gamma_{M_2}}{2m} \left[\left(\vec{F}_{\nu\rho} \vec{\partial}_k F_{\sigma\rho} + F_{\nu\rho} \vec{\partial}_\rho \vec{F}_{\sigma\rho} \right) \right] \times \quad (1.15)$$

$$\times \vec{\Psi} \left[\beta_\nu \hat{W}_k + \hat{W}_k \beta_\nu \right] \vec{\partial}_\sigma \Psi.$$

Как следует из (1.15), в системе покоя мишени и в пренебрежении отдачей частицы, эффективный лагранжиан принимает вид:

$$L(\gamma_{M_2}) = 4\pi \gamma_{M_2} H_{ki} \hat{S}_k E_i, \quad (1.16)$$

тензор H_{ki} в уравнении (1.16) имеет вид:

$$H_{ki} = \frac{1}{2} (\partial_k H_i + \partial_i H_k).$$

Используя лагранжиан (1.15), получим вклад спиновой поляризуемости γ_{M_2} в амплитуду в 10-мерном формализме ДКП:

$$M(\gamma_{M_2}) = -\frac{\pi \gamma_{M_2}}{m} P_\sigma \vec{\Psi}^{(r_2)}(p_2) \times \left[\beta_\nu \hat{W}_k + \hat{W}_k \beta_\nu \right] \times \quad (1.17)$$

$$\times \Psi^{(r_1)}(p_1) \left[\delta_{\nu\rho\alpha\beta} \left(k_{2k} F_{\alpha\beta}^{(2)} F_{\sigma\rho}^{(1)} - k_{1k} F_{\sigma\rho}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} \right) + \right.$$

$$\left. + \delta_{\sigma k \alpha \beta} \left(k_{2\rho} F_{\alpha\beta}^{(2)} F_{\nu\rho}^{(1)} - k_{1\rho} F_{\nu\rho}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} \right) \right].$$

В нерелятивистском приближении эта амплитуда определяется следующим образом:

$$M(\gamma_{M_2}) = -4\pi \gamma_{M_2} \vec{\lambda}^{(r_2)} \left[\omega_1 \left(\hat{S} \vec{k}_2 \right) \left(\vec{k} \left[\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)} \right] \right) + \right.$$

$$+ \omega_2 \left(\hat{S} \vec{k}_1 \right) \left(\vec{k}_1 \left[\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)} \right] \right) + \omega_1 \left(\vec{k}_2 \vec{e}^{(\lambda_1)} \right) \left(\hat{S} \left[\vec{k}_2 \vec{e}^{(\lambda_2)*} \right] \right) -$$

$$\left. - \omega_2 \left(\vec{k}_1 \vec{e}^{(\lambda_2)*} \right) \left(\hat{S} \left[\vec{k}_1 \vec{e}^{(\lambda_1)} \right] \right) \right] \vec{\lambda}^{(r_1)}.$$

Из (1.17) следует амплитуда рассеяния вперед в ковариантном тензорном представлении:

$$M(\gamma_{M_2}) = -\frac{i\pi \gamma_{M_2}}{m^3} P_\sigma p_\varepsilon p_\nu \delta_{k\varepsilon\delta\eta} \left(\lambda_\eta^{(2)*} \lambda_\delta^{(1)} - \lambda_\delta^{(2)*} \lambda_\eta^{(1)} \right) \times$$

$$\times \left[\delta_{\nu\rho\alpha\beta} \left(k_k F_{\alpha\beta}^{(2)} F_{\sigma\rho}^{(1)} - k_k F_{\sigma\rho}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} \right) + \right.$$

$$\left. + \delta_{\sigma k \alpha \beta} \left(k_\rho F_{\alpha\beta}^{(2)} F_{\nu\rho}^{(1)} - k_\rho F_{\nu\rho}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} \right) \right].$$

где в тензорах $F_{\nu\mu}^{(n)}$, $n=1,2$ нужно положить $k_1 = k_2 = k$.

2 Выводы

Таким образом, в рамках формализма ДКП получены в ковариантной форме лагранжианы двухфотонных взаимодействий с адронами спина 1 с учетом спиновых поляризуемостей, которые характерны для частиц спина $\frac{1}{2}$.

На основе этих лагранжианов вычислены ковариантные спиновые структуры амплитуды комптоновского рассеяния на адронах спина 1.

Установлено, что в низкоэнергетическом приближении спиновые поляризуемости вносят вклад в амплитуду комптоновского рассеяния в третьем порядке по энергии фотонов.

Определены тензорно-ковариантные структуры амплитуды рассеяния вперед, которые вносят вклад в спиновые поляризуемости адронов спина 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Drechsel, D. Dispersion Relations in Real and Virtual Compton Scattering / D. Drechsel, B. Pasquini, M. Vanderhaeghen // Physics Repots. – 2003. – Vol. 378. – P. 99–205.
2. Holstein, B.R. Hadron polarizabilities / B.R. Holstein, S. Scherer [Electronic resource]. – 2013. – Mode of access: <http://hep-ph/1401.0140v1>. – Date of access: 31.12.2013.
3. Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons / D. Babusci [et al.] // Phys. Rev. C. – 1998. – Vol. 58. – P. 1013–1041.
4. Кисель, В.В. Квантовая механика частицы со спином 1 и квадрупольным моментом во внешнем однородном магнитном поле / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 18–27.
5. Максименко, Н.В. Дейтронный комптон-эффект / Н.В. Максименко, Л.Г. Мороз // Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий, Гомель, Беларусь, 20–31 августа, 1971. – ОИЯИ. – Дубна, 1972. – С. 67–86.
6. Vakulina, E.V. Spin Polarizabilities and Characteristics of Spin-1 Hadrons Related to Parity Nonconservation in the Duffin – Kemmer – Petiau Formalism / E.V. Vakulina, N.V. Maksimenko // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2017. – Vol. 14, № 5. – P. 713–718.
7. Ilyichev, A. Static polarizability vertex and its applications / A. Ilyichev, S. Lukashevich, N. Maksimenko // [Electronic resource]. – 2006. – Mode of access: [arXiv://hep-ph/0611327v1](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0611327v1). – Date of access: 27.11.2006.
8. Zhang, Y. Proton Compton scattering in a unified proton – Δ^+ Model / Y. Zhang, K. Savvidy // Phys. Rev. C. – 2013. – Vol. 88. – P. 064614–1–12.
9. Krupina, N. Separation of proton polarizabilities with the beam asymmetry of Compton scattering / N. Krupina, V. Pascalutsa // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110. – № 26. – P. 262001–1–4.
10. Богуш, А.А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш. – Минск: Наука и техника, 1987. – 359 с.
11. Максименко, Н.В. Ковариантное определение поляризуемости адронов спина единица / Н.В. Максименко // Доклады Академии наук Беларуси. – 1992. – Т. 36, № 6. – С. 508–510.
12. Maksimenko, N.V. Spin1 Particle Polarizability in the Duffin – Kemmer – Petiau Formalism / N.V. Maksimenko, E.V. Vakulina, S.M. Kuchin // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2015. – Vol. 12, № 7. – P. 807–812.

Поступила в редакцию 23.11.17.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С СФЕРОИДАЛЬНЫМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ НАНОЧАСТИЦАМИ В ЖИДКОСТИ

Л.С. Гайда, Е.В. Матук, А.Ч. Свистун

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC RADIATION WITH SPHEROIDAL METAL NANOPARTICLES IN LIQUID

L.S. Gaida, E.V. Matuk, A.Ch. Svistun

Y. Kupala Grodno State University

Приведены результаты теоретических исследований действия сил светового давления на сфероидальные серебряные наночастицы находящиеся в жидкости. Получены зависимости градиентной силы, сил поглощения и рассеяния от размера и расположения сфероидальных наночастиц в поле сфокусированного лазерного пучка гауссовской формы.

Ключевые слова: сфероидальная металлическая наночастица, гауссов пучок, градиентная сила, силы рассеяния и поглощения.

Results of theoretical researches of the effect of forces of light pressure upon spheroidal silver nanoparticles which are in liquid are given in work. Dependences of gradient force, forces of absorption and dispersion on the size and arrangement of spheroidal nanoparticles in the field of the focused laser beam of a Gaussian form are received.

Keywords: spheroidal metal nanoparticle, Gaussian beam, gradient force, forces of dispersion and absorption.

Введение

Движение и управление локализацией наночастиц в электромагнитном поле становится возможным благодаря воздействию на наночастицы силы светового давления. Управление локализацией наночастиц с помощью лазерного излучения широко используется при исследовании вирусов и бактерий, молекул ДНК, процессов, происходящих внутри живой клетки, и др. [1].

На сегодняшний день существует множество работ, посвященных перемещению наночастиц сферической формы под действием сил светового давления лазерным излучением (назовем лишь некоторые из них [1]–[4]). В этих же работах можно найти ссылки и на результаты исследований других авторов.

Более интересным является случай несферических наночастиц (сфероидов). Для сфероидов значение компонент силы светового давления значительно отличается от тех же компонент, действующих на сферические наночастицы, что связано с ориентацией частиц в электромагнитном поле падающей волны. Сфероиды являются более адекватными, чем сферы, моделями для многих биологических частиц, в частности, эритроцитов и их линейных агрегатов [5], [6]. Правильный выбор фазовой функции рассеяния света, как отдельным эритроцитом, так и эритроцитарными агрегатами и другими сфероидальными частицами важен при моделировании распространения света в крови и в содержащих кровь тканях [6].

Несмотря на большое число работ по оптической манипуляции сфероидальными наночастицами, процесс динамики их движения, насколько нам известно, не нашел должного рассмотрения. Поэтому в данной работе нами предпринята попытка устранить данный пробел.

1 Основные соотношения

При рассмотрении сил светового давления, действующих на наночастицу, условно выделяют две составляющие: компоненту силы, действующую вдоль градиента интенсивности поля и отличную от нуля только в неоднородном электрическом поле, т. е. градиентную силу F^{grad} ($F^{grad,x}$ и $F^{grad,y}$ – компоненты силы, действующие поперек лазерного луча, и $F^{grad,z}$ – компонента, действующая вдоль лазерного луча), и силу, действующую вдоль направления распространения излучения, являющуюся суммой сил поглощения F^{abs} и рассеяния F^{scat} . Таким образом, полную силу светового давления можно представить в виде [2], [4]:

$$F^{light} = F^{grad} + F^{abs} + F^{scat}. \quad (1.1)$$

Для сферических наночастиц общий вид для всех компонент силы светового давления можно найти в работах [4], [2], для частиц произвольной формы и объема задача вычисления силы светового давления является весьма сложной. Поэтому в настоящей работе мы будем рассматривать частицу в форме сфероида.

Для получения явного вида выражений для компонент силы светового давления рассмотрим сфокусированный тонкой линзой пучок гауссовой формы распространяющийся вдоль оси z в декартовой системе координат (x, y, z) . В случае поглощающей наночастицы в приближении Рэлея, когда размеры наночастицы малы по сравнению с длиной волны излучения, компоненты силы светового давления имеют вид [7], [8]:

$$\begin{aligned} F^{grad} &= \frac{2\pi n_m |\alpha(x, y, z)|}{c} \nabla I(x, y, z), \\ F^{abs} &= \frac{n_m I(x, y, z) \sigma_{abs}(z)}{c}, \\ F^{scat} &= \frac{n_m \sigma_{scat}(z) I(x, y, z)}{c}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\alpha(x, y, z) = \alpha'(x, y, z) + i\alpha''(x, y, z)$ – поляризуемость металлической наночастицы, $I(x, y, z)$ – интенсивность излучения, действующего на наночастицу, ∇ – оператор градиента, $\sigma_{abs}(z)$ и $\sigma_{scat}(z)$ – сечение поглощения и рассеяния, c – скорость света в вакууме, n_m – показатель преломления жидкости.

Выражение для интенсивности падающего электромагнитного поля имеет вид [9]:

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \frac{I_0}{(1 - z/f)^2 + (z/z_0)^2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{\rho_0^2 [(1 - z/f)^2 + (z/z_0)^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где f – фокусное расстояние линзы, I_0 – входная интенсивность излучения в центре пучка, $z_0 = k_m \rho_0^2$ – дифракционная длина пучка, ρ_0 – радиус пучка, k_m – волновое число.

2 Зависимость сечения поглощения и рассеяния от формы сфероида

С точки зрения практического применения больший интерес имеют наночастицы в форме сплюснутых или вытянутых сфероидов, которые получаются вращением эллипса вокруг короткой или длинной осей соответственно (рисунок 2.1). В случае вытянутого сфероида две его малые полуоси равны друг другу, тогда как в случае сплюснутого сфероида две его большие полуоси равны друг другу. На рисунке 2.1, а) изображен вытянутый сфероид $R_{\perp} < R_{\parallel}$, где R_{\perp} – малая полуось сфероида, R_{\parallel} – большая полуось. В случае сплюснутого сфероида (рисунок 2.1, б), $R_{\parallel} < R_{\perp}$ где R_{\perp} – большая полуось сфероида, R_{\parallel} – малая полуось [10].

Значение поляризуемости для сфероида изменяет свое значение в зависимости от положения частицы. Выражения для поляризуемости вдоль оси $x = y$ и z имеют вид [10]:

$$\begin{aligned} \alpha(x) = \alpha(y) &= \frac{R_{\parallel} R_{\perp}^2}{3} \frac{\varepsilon_p(\omega) - \varepsilon_m}{\varepsilon_m + L_{\perp}(\varepsilon_p(\omega) - \varepsilon_m)}, \\ \alpha(z) &= \frac{R_{\parallel} R_{\perp}^2}{3} \frac{\varepsilon_p(\omega) - \varepsilon_m}{\varepsilon_m + L_{\parallel}(\varepsilon_p(\omega) - \varepsilon_m)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где L_{\parallel} и L_{\perp} геометрические факторы деполаризации [11] удовлетворяют соотношению $L_{\parallel} + 2L_{\perp} = 1$ и для сфер $L = \frac{1}{3}$, ε_m – диэлектрическая проницаемость среды, в которой расположен сфероид, $\varepsilon_p(\omega)$ – диэлектрическая проницаемость металлической наночастицы, зависящая от частоты падающего излучения (ω).

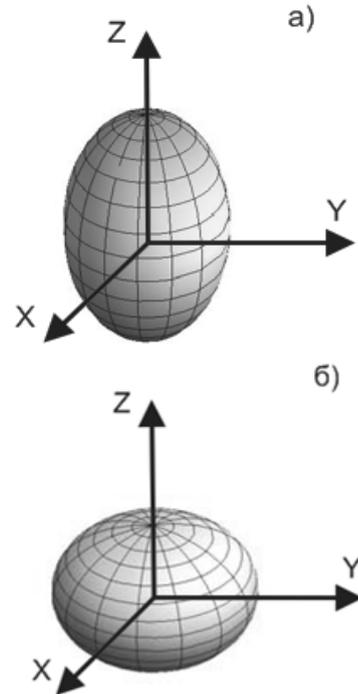


Рисунок 2.1 – Геометрия вытянутой сфероидальной наночастицы (а) и сплюснутой сфероидальной наночастицы (б)

Геометрический фактор деполаризации сфероида L_{\parallel} , в случае $R_{\perp} < R_{\parallel}$, имеет вид [12]:

$$L_{\parallel} = (e_s^2 - 1) \left(\frac{e_s}{2} \ln \frac{1 + e_s}{e_s - 1} - 1 \right), \quad (2.2)$$

где $e_s = \sqrt{1 - R_{\perp} / R_{\parallel}}$ – эксцентриситет сфероида.

В случае $R_{\parallel} < R_{\perp}$ геометрический фактор деполаризации L_{\parallel} имеет вид

$$L_{\parallel} = (1 + e_s^2)(1 - e_s \operatorname{arctg} e_s). \quad (2.3)$$

Выражения для сечения поглощения и рассеяния имеют вид [10]:

$$\begin{aligned} \sigma_{abs} &= \frac{4}{3} \pi k_m \operatorname{Im}(\alpha(x, y, z)), \\ \sigma_{scat} &= \frac{8\pi}{9} k_m^4 \alpha^2(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.4)$$

3 Колебания сфероида на оси лазерного луча

Из (1.2)–(2.4) для декартовых компонент силы рассеяния находим выражения

$$\begin{aligned}
 F_x &= -4\pi \frac{n_m}{c} \alpha(x) \frac{2I_0 x}{r_0^2 \left[(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2 \right]^2} \times \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2 \left[(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2 \right]} \right), \\
 F_y &= -4\pi \frac{n_m}{c} \alpha(y) \frac{2I_0 y}{r_0^2 \left[(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2 \right]^2} \times \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2 \left[(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2 \right]} \right), \\
 F_z &= F^{grad,z} + F^{scat} + F^{abs}, \\
 F^{grad,z} &= \frac{4\pi |\alpha(z)| I_0}{cf} \frac{1-z/z_w}{\left[(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2 \right]^2} \times \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r_0^2 \left[(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2 \right]} \right) \times \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2 \left[(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2 \right]} \right), \\
 F^{scat} &= \frac{8}{3} \pi \frac{n_m}{c} k_m^4 \alpha^2(z) \frac{I_0}{(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2} \times \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2 \left[(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2 \right]} \right), \\
 F^{abs} &= \frac{4}{3} \pi \frac{n_m}{c} k_m \operatorname{Im}(\alpha(z)) \frac{I_0}{(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2} \times \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2 \left[(1-z/f)^2 + (z/z_0)^2 \right]} \right),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $z_w = \frac{f}{1+(f/z_0)^2}$ – точка перетяжки лазерного пучка.

Отклонение сфероида от центра лазерного пучка будем определять тремя углами

$$\begin{aligned}
 \alpha(x, y, z) &= \arccos \frac{F_x}{F(x, y, z)}, \\
 \beta(x, y, z) &= \arccos \frac{F_y}{F(x, y, z)}, \\
 \gamma(x, y, z) &= \arccos \frac{F_z}{F(x, y, z)}, \\
 F(x, y, z) &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

где $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ – углы отклонения сфероида от осей координат x, y, z соответственно.

4 Результаты и их обсуждения

Для оценки компонент сил светового давления, действующих на сфероид, рассмотрим некоторые частные случаи. В качестве материальных параметров возьмем следующие. Лазерное излучение на длине волны 532 нм с мощностью 30 мВт и радиусом пучка $0.5 \cdot 10^{-3}$ м, фокусируется на кювету с жидкостью ($n_m = 1,33$), содержащей сфероида, линзой с фокусным расстоянием, равным $f = 0.1$ м. Исследуемыми объектами являются серебряные наночастицы с комплексным показателем преломления

$$n_p(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} = 0.06 + i3.586,$$

соответствующим длине волны 532 нм [13], плотность материала наночастицы $\rho = 10500$ кг/м³ [14].

На рисунке 4.1 представлены графики зависимости компонент сил светового давления, действующих на сфероид вдоль оси лазерного пучка от его перемещения для случая $R_{\perp} < R_{\parallel}$, рассчитанные по формулам (3.1) для радиусов сфероида $R_{\parallel} = 120$ нм (1), 150 нм (2), 180 нм (3) и $R_{\perp} = 50$ нм.

На рисунке 4.2 представлены графики зависимости компонент сил светового давления, действующих на сфероид вдоль оси лазерного пучка от его перемещения для случая $R_{\parallel} < R_{\perp}$, рассчитанные по формулам (3.1) для радиусов сфероида $R_{\perp} = 120$ нм (1), 150 нм (2), 180 нм (3) и $R_{\parallel} = 50$ нм.

Анализируя полученные зависимости компонент сил светового давления, действующих на металлическую наночастицу, имеющую форму сфероида, расположенного в жидкости, от перемещения, можно сделать следующие заключения:

1. Преимущественное смещение сфероида происходит под действием силы рассеяния, которое связано с прямо пропорциональной зависимостью между поляризуемостью и объемом сфероида.

2. Кривые зависимости компонент сил светового давления от перемещения сфероида имеют схожую форму для вытянутого и сплюснутого сфероида. Однако компоненты сил значительно возрастают в случае $R_{\parallel} < R_{\perp}$, что связано с отличием коэффициента деполяризации для продольного и поперечного расположения сфероида на оси лазерного луча.

3. В области за точкой перетяжки продольная компонента градиентной силы изменяет знак и становится противоположно направленной силе рассеяния [15].

На рисунке 2.4 представлена зависимость угла отклонения $\gamma(x, y, z)$ вытянутого сфероида относительно декартовой оси z . Полученная зависимость имеет схожую кривую и для сплюснутого сфероида.

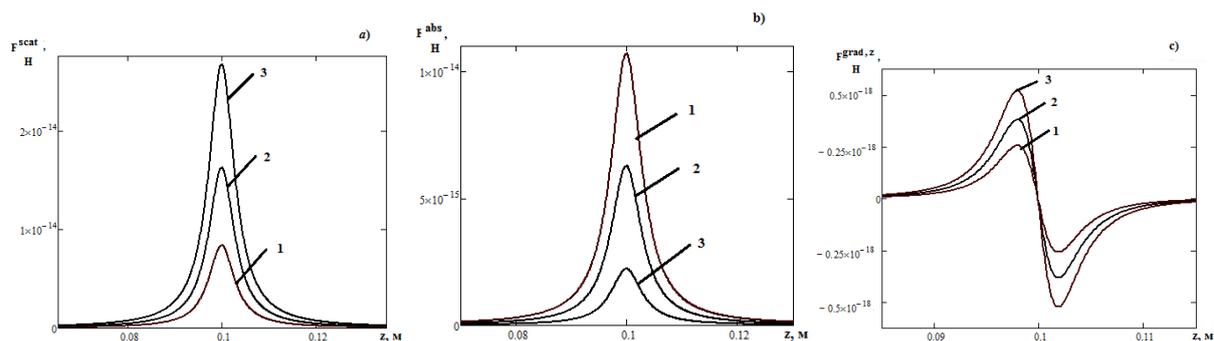


Рисунок 4.1 – Графики зависимости силы рассеяния (a), силы поглощения (b) и градиентной силы (c) от перемещения сфероида в случае $R_{\perp} < R_{\parallel}$, рассчитанные по формулам (3.1) для трех радиусов сфероида $R_{\parallel} = 120$ нм (1), 150 нм (2), 180 нм (3) и $R_{\perp} = 50$ нм

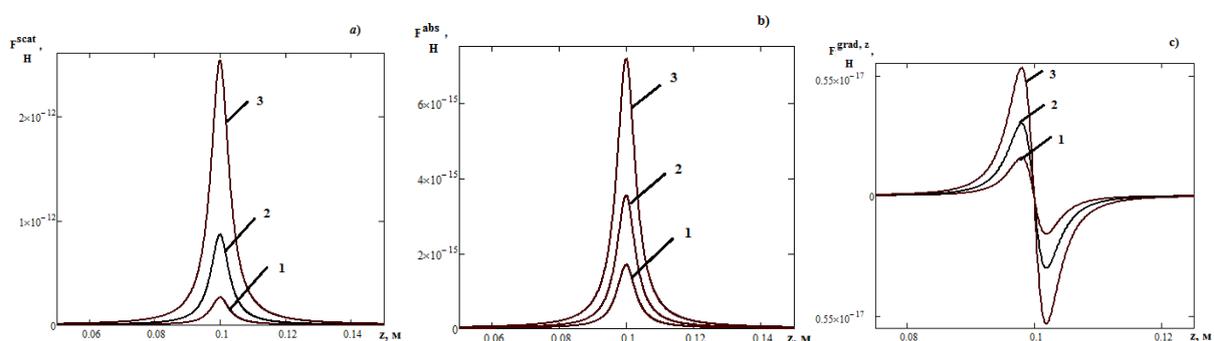


Рисунок 4.2 – Графики зависимости силы рассеяния (a), силы поглощения (b) и градиентной силы (c) от перемещения сфероида в случае $R_{\parallel} < R_{\perp}$, рассчитанные по формулам (3.1) для трех радиусов сфероида $R_{\perp} = 120$ нм (1), 150 нм (2), 180 нм (3) и $R_{\parallel} = 50$ нм

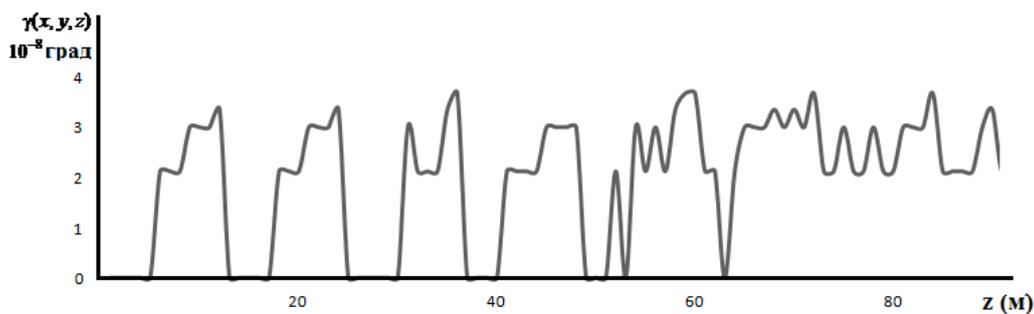


Рисунок 4.3 – Зависимость угла отклонения $\gamma(x, y, z)$ от перемещения вытянутого сфероида вдоль оси z , полученная на основе математического моделирования выражения (3.2)

Из рисунка 4.3 видно, что отклонение сфероида от оси лазерного луча является незначительным. Максимальное значение угла наклона $\gamma(x, y, z)$ составляет $3,4 \cdot 10^{-8}$ град. Приближенное значение углов $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, характеризующих отклонение сфероида от осей x и y составляет ~ 1.57 град.

Следует отметить, что теоретические значения компонент сил светового давления лазерного излучения, действующих на металлические сфероиды, могут отличаться от экспериментальных значений, т. к. в расчетах не учитывались процессы

образования парового облака в окрестности наночастиц и процессы вскипания жидкости, которые возникают в результате длительного воздействия лазерным излучением на наночастицу и среду [16].

Заключение

В работе теоретически исследованы особенности сил светового давления, действующих на металлическую наночастицу в форме сфероида в поле сфокусированного лазерного пучка с гауссовым распределением интенсивности в жидкости.

Показано, что силы светового давления существенно зависят от формы частицы, а также от ее ориентации по отношению к направлению падающего излучения.

Получены численные значения для трех компонент силы светового давления, действующей на серебряную сфероидальную наночастицу, находящуюся на оси лазерного пучка, и показано, что до точки перетяжки пучка продольная компонента градиентной силы, как и сила рассеяния, действует в направлении его распространения. В области за точкой перетяжки продольная компонента градиентной силы изменяет знак и становится противоположно направленной силе рассеяния.

Результаты работы могут стать основой для дальнейших теоретических и экспериментальных исследований по влиянию сил светового давления лазерного излучения гауссовой формы на металлические сфероидальные наночастицы в жидкостях.

Авторы признательны А.А. Афанасьеву за обсуждение полученных результатов и замечания при подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайда, Л.С. Сила светового давления, действующая на металлическую сферическую наночастицу в интерференционном поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн / Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов, А.А. Афанасьев // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. – Сер. 2. – 2008. – № 3 (73). – С. 84–89.

2. Кац, А.В. Радиационная сила, действующая на частицу в электромагнитном поле при произвольном соотношении между размером частицы и длиной волны / А.В. Кац // Изв. высш. уч. зав. Радиофизика. – 1975. – Т. XVIII, № 4. – С. 566–575.

3. Эшкин, А. Давление лазерного излучения / А. Эшкин // УФН. – 1973. – Т. 110, № 1. – С. 101–116.

4. Гузатов, Д.В. Теоретическое исследование силы светового давления, действующей на сферические наночастицы в поле лазерного излучения / Д.В. Гузатов, Л.С. Гайда // Вестник БГУ. – Серия 1. – 2010. – № 3. – С. 29–33.

5. Оптическая биомедицинская диагностика / А.Н. Ярославская [и др.]. – М.: Физматлит. – 2007. – Гл. 2. – С. 157–196.

6. Луговцов, А.Е. Лучеволновое приближение для расчета рассеяния лазерного излучения прозрачной диэлектрической сфероидальной частицей / А.Е. Луговцов, С.Ю. Никитин, А.В. Приезжев // Квантовая электроника. – 2008. – Т. 38. – № 6. – С. 606–611.

7. Bosanac, L. Efficient Optical Trapping and Visualization of Silver Nanoparticles / L. Bosanac, T. Aabo, P.M. Bendix, L.B. Oddershede // NANO LETTERS. – 2008. – Vol. 8, № 5. – P. 1486–1491.

8. Матук, Е.В. Движение металлической наночастицы вблизи поверхности пузырька воздуха в жидкости под действием силы светового давления / Е.В. Матук, Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 17–20.

9. Ахманов, С.А. Физическая оптика / С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин. – М.: Наука, 2004. – 654 с.

10. Климов, В.В. Наноплазмоника / В.В. Климов. – М.: Физматлит, 2009. – 480 с.

11. Хлебцов, Н.Г. Оптика и биофотоника наночастиц с плазмонным резонансом / Н.Г. Хлебцов // Квантовая электроника. – 2008. – № 38 (6). – С. 504 с.

12. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.

13. Johnson, P.B. Optical constants of the noble metals / P.B. Johnson, R.W. Christy // Phys. Rev. B. – 1973. – Vol. 6, №12. – P. 4370–4379.

14. Таблицы физических величин / под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.

15. О радиационных силах, действующих на прозрачную наночастицу в поле сфокусированного лазерного пучка / А.А. Афанасьев, Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов, А.Н. Рубинов, А.Ч. Свистун // Квантовая электроника. – 2015. – Т. 45. – № 10. – С. 604–607.

16. Движение серебряных наночастиц в жидкости с различной вязкостью под действием сил светового давления / А.А. Афанасьев, Л.С. Гайда, Е.В. Матук, А.Ч. Свистун // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 7–12.

Поступила в редакцию 09.07.17.

УДК 539.12.01

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СЕЧЕНИЯ РАССЕЙНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ С ПОТЕНЦИАЛАМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ, СОДЕРЖАЩИМИ «БАРЬЕР»

В.Н. Капшай, С.И. Фиалка

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

RELATIVISTIC SCATTERING CROSS SECTIONS OF A TWO-PARTICLE SYSTEM IN THE CASE OF INTERACTION POTENTIALS CONTAINING A "BARRIER"

V.N. Kapshai, S.I. Fialka

F. Scorina Gomel State University

Квазипотенциальные уравнения для состояний рассеяния системы двух частиц с произвольным орбитальным моментом исследуются в релятивистском конфигурационном представлении. Рассмотрен случай сферически-симметричных потенциалов взаимодействия, содержащих «барьер». Представлены результаты численных расчётов сечений рассеяния, детально обсуждается их резонансное поведение. Проведён сравнительный анализ решений релятивистских и нерелятивистской задач.

Ключевые слова: квазипотенциальный подход, уравнение Логунова – Тавхелидзе, уравнение Гросса, уравнение Кадышевского, релятивистское конфигурационное представление, резонансные состояния.

Quasipotential equations for scattering states of a two-particle system with arbitrary angular momentum are investigated in the relativistic configuration representation. The case of spherically symmetric interaction potentials containing a "barrier" is considered. Scattering cross sections obtained from numerical calculations are presented, their resonant behavior is discussed in detail. Relativistic and non-relativistic results are compared.

Keywords: quasipotential approach, Logunov – Tavkhelidze equation, Gross equation, Kadyshevsky equation, relativistic configuration representation, resonant states.

Введение

В нерелятивистской квантовой теории широко используются интегральные уравнения Липпмана – Швингера и Шрёдингера в конфигурационном (координатном) представлении как универсальный инструмент для наиболее наглядного описания процессов взаимодействия частиц. В то же время, всё чаще возникает необходимость использования более глубоких и физически строгих подходов – релятивистских. Использование уравнений квазипотенциального типа позволяет перейти от хорошо разработанной нерелятивистской теории к релятивистской наиболее безболезненно, но только в импульсном представлении (ИП). В случае отличного от нуля орбитального момента системы частиц, интегральные квазипотенциальные уравнения в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) долгое время практически не исследовались, так как эта задача представлялась чрезвычайно громоздкой. Тем не менее, такой подход представляет большой интерес, так как имеет ряд преимуществ по сравнению с подходом, основанным на решении интегральных квазипотенциальных уравнений в ИП.

В настоящей работе непосредственно в РКП решены интегральные квазипотенциальные уравнения с потенциалами взаимодействия, содержащими «барьер». При решении использованы

результаты работы [1], где предложено удобное для расчётов определение релятивистских парциальных волн, найден явный вид и определены свойства парциальных свободных функций Грина в РКП для различных вариантов квазипотенциальных уравнений.

1 Квазипотенциальные уравнения с суперпозицией δ -потенциалов

В рамках квазипотенциального подхода рассмотрим релятивистскую задачу о рассеянии двух бесспиновых частиц одинаковой массы m в системе центра масс. В РКП в случае локального сферически-симметричного квазипотенциала задачу можно свести к решению радиальных интегральных уравнений для волновой функции относительного движения частиц [1] ($\hbar = c = 1$):

$$\psi_\ell(\chi_q, r) = s_\ell(\chi_q, r) + \int_0^\infty G_\ell(\chi_q; r, r') V(\chi_q, r') \psi_\ell(\chi_q, r') dr'. \quad (1.1)$$

Здесь χ_q – быстрота, которая связана с энергией двухчастичной системы соотношением $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$; $V(\chi_q, r')$ – оператор взаимодействия (квазипотенциал). В отсутствие взаимодействия решением радиальных уравнений (1.1) являются релятивистские парциальные волны [1]:

$$s_\ell(\chi, r) = (-i)^{\ell+1} \frac{\exp(mr\pi)}{\Gamma(imr)} Q_\ell^{imr}(\text{ch } \chi) =$$

$$= \frac{1}{2i} (e_\ell^+(\chi, r) - e_\ell^-(\chi, r));$$

$$e_\ell^\pm(\chi, r) = i^\ell \frac{\Gamma(imr - \ell)\Gamma(\mp imr + \ell + 1)}{\Gamma(imr)} P_\ell^{\pm imr}(\text{ch } \chi).$$

В ИП было предложено множество вариантов квазипотенциальных уравнений, разница между которыми – вид свободной функции Грина. Парциальные свободные функции Грина в РКП связаны со свободной функцией Грина в ИП формулой [1]:

$$G_\ell(\chi_q; r, r') =$$

$$= \frac{1}{m\pi} \int_0^\infty s_\ell(\chi_p, r) G_0(\chi_q, \chi_p) s_\ell^*(\chi_p, r') d\chi_p.$$

Здесь рассмотрим три варианта квазипотенциальных уравнений, полученных изначально в ИП: уравнение Логунова – Тавхелидзе, уравнение Гросса и уравнение Кадышевского. Соответствующие парциальные свободные функции Грина в РКП были найдены и исследованы в работе [1]:

$$G_\ell(\chi_q; r, r') = \tilde{G}_{\pm, \ell}^{(LT)}(\chi_q; r, r') - \tilde{G}_{-, \ell}(\chi_q; r, r'),$$

где $(K_q = (m \text{ sh } \chi_q \text{ ch } \chi_q)^{-1})$

$$\tilde{G}_{\pm, \ell}^{(LT)}(\chi_q; r, r') =$$

$$= \frac{K_q}{2i} \left(\frac{e_\ell^+(\chi_q, r) e_\ell^{\pm*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[-\pi m(r \mp r')]} + \frac{e_\ell^-(\chi_q, r) e_\ell^{\mp*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[\pi m(r \mp r')]} \right);$$

$$\tilde{G}_{\pm, \ell}^{(Gr)}(\chi_q; r, r') =$$

$$= \frac{K_q}{2i} \left(\frac{e_\ell^+(\chi_q, r) e_\ell^{\pm*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[-2\pi m(r \mp r')]} + \frac{e_\ell^-(\chi_q, r) e_\ell^{\mp*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[2\pi m(r \mp r')]} \right);$$

$$\tilde{G}_{\pm, \ell}^{(K)}(\chi_q; r, r') =$$

$$= \frac{K_q}{2i} \left(\frac{e_\ell^+(\chi_q, r) e_\ell^{\pm*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[-2\pi m(r \mp r')]} + \frac{e_\ell^-(\chi_q, r) e_\ell^{\mp*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[2\pi m(r \mp r')]} + \frac{e_\ell^+(i\pi/2, r) e_\ell^{\mp*}(-i\pi/2, -r')}{1 + \exp[-\pi m(r \mp r')]} i \text{ sh } \chi_q \right).$$

Уравнения (1.1) допускают точное решение в случае оператора взаимодействия в виде суперпозиции N δ -функций, отличных от нуля в точках ρ_τ :

$$V(\chi_q, r) = \sum_{\tau=1}^N D_\tau(\chi_q) \delta(r - \rho_\tau). \quad (1.2)$$

Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к уравнениям вида:

$$\Psi_\ell(\chi_q, r) = s_\ell(\chi_q, r) +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^N G_\ell(\chi_q; r, \rho_\tau) D_\tau(\chi_q) \Psi_\ell(\chi_q, \rho_\tau). \quad (1.3)$$

Используя в (1.3) вместо переменной r значения

ρ_τ ($\tau = 1, 2, \dots, N$), получаем обычную матричную задачу относительно значений радиальных волновых функций $\Psi_\ell(\chi_q, r)$ при $r = \rho_\tau$:

$$\left[\delta_{\tau\tau'} - G_\ell(\chi_q; \rho_\tau, \rho_{\tau'}) D_{\tau'}(\chi_q) \right]_{\tau\tau'} \times$$

$$\times \left[\Psi_\ell(\chi_q, \rho_{\tau'}) \right]_{\tau'} = \left[s_\ell(\chi_q, \rho_\tau) \right]_{\tau}. \quad (1.4)$$

На основе асимптотического поведения волновой функции на больших расстояниях можно определить парциальные амплитуды и сечения рассеяния [1]:

$$f_\ell(\chi_q) =$$

$$= \frac{-K_q}{m \text{ sh } \chi_q} \sum_{\tau=1}^N s_\ell^*(\chi_q, \rho_\tau) D_\tau(\chi_q) \Psi_\ell(\chi_q, \rho_\tau); \quad (1.5)$$

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^\infty \sigma_\ell = 4\pi \sum_{\ell=0}^\infty (2\ell + 1) |f_\ell(\chi_q)|^2.$$

Выбирая специальным образом коэффициенты D_τ при δ -функциях, можно получить приближённое решение для широкого класса квазипотенциалов.

2 Численное решение задачи с гладкими модельными потенциалами

Если функция гладкого квазипотенциала $V(\chi_q, r)$ убывает с ростом r , то диапазон изменения переменной r ($0 \leq r \leq \infty$) можно разделить на две части: конечную $0 \leq r \leq r_N$, где суперпозиция δ -потенциалов используется вместо гладкого потенциала $V(\chi_q, r)$ и полубесконечную $r > r_N$, где потенциальное поле пренебрежимо мало и полагается равным нулю. Выбрав затем

$$D_\tau(\chi_q) = h_\tau V(\chi_q, \rho_\tau), \quad h_\tau = (r_\tau - r_{\tau-1});$$

$$\rho_\tau = (r_\tau + r_{\tau-1})/2; \quad \tau = 1, 2, \dots, N,$$

формулы (1.4), (1.5) можно использовать для численного решения задачи с гладким квазипотенциалом $V(\chi_q, r)$. Отметим, что к аналогичному результату приводит использование в (1.1) квадратурной формулы центральных прямоугольников с переменным шагом.

В качестве оператора взаимодействия рассмотрим не зависящий от энергии $2E_q$ потенциал, содержащий «барьер»

$$(v = \mu/m; \quad \varphi = \arccos(v^2/2 - 1)):$$

$$V_{Rel}(r) =$$

$$= A \frac{4}{m^2} \left(\frac{2(4 - v^2)m^2 r^2 + 2 + v^2}{(4 - v^2)^{5/2}} \frac{\text{sh}(mr\varphi)}{\text{sh}(mr\pi)} - \right. \quad (2.1)$$

$$\left. - \frac{3vmr}{(4 - v^2)^2} \frac{\text{ch}(mr\varphi)}{\text{sh}(mr\pi)} \right).$$

Потенциал (2.1) получен нами в результате релятивистского обобщения модельного квантовомеханического потенциала:

$$V_{NR}(r) = Ar^2 \exp(-\mu r). \quad (2.2)$$

Процедура релятивистского обобщения заключалась в замене в импульсном представлении квадрата переданного импульса в евклидовом пространстве на квадрат переданного импульса в пространстве Лобачевского.

Множество различных методов численного решения задач квантовой механики и квантовой химии отработано на потенциале (2.2) [2]–[5]. Данный потенциал, в случае положительного параметра A , исключает присутствие связанных состояний и позволяет наблюдать узкие резонансы. В отличие от (2.2), потенциал (2.1) в начале координат принимает некоторое положительное ненулевое значение, а с увеличением r переходит в нерелятивистский потенциал. В нерелятивистском пределе, когда $m \rightarrow \infty$, потенциалы (2.1) и (2.2) совпадают во всей области изменения переменной r .

На рисунке 2.1 приведены численные расчёты парциальных сечений рассеяния при $\ell = 0$, которые получены на основе радиального уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалами (2.1) и (2.2) с параметрами $A=15$, $\mu=1$ при $m=1$. В данном случае частицы могут на некоторое время образовать связанное состояние с резонансным значением энергии $2E_q \approx 6$, что хорошо видно на рисунке 2.1 а на примере потенциала (2.1): функция парциального сечения имеет скачок в окрестности резонансного значения энергии $2E_q = 5,818\dots$, а волновая функция в начале координат имеет такое же поведение как в случае связанного состояния двухчастичной системы. Зависимость парциального сечения от количества используемых δ -функций N , приведённая на рисунке 2.1 б, позволяет наглядно оценить точность численного метода. На рисунке 2.1 в видно, что описание взаимодействия с использованием релятивистского «барьера» (2.1) приводит к меньшей ширине и энергии резонансов, чем при использовании потенциала (2.2).

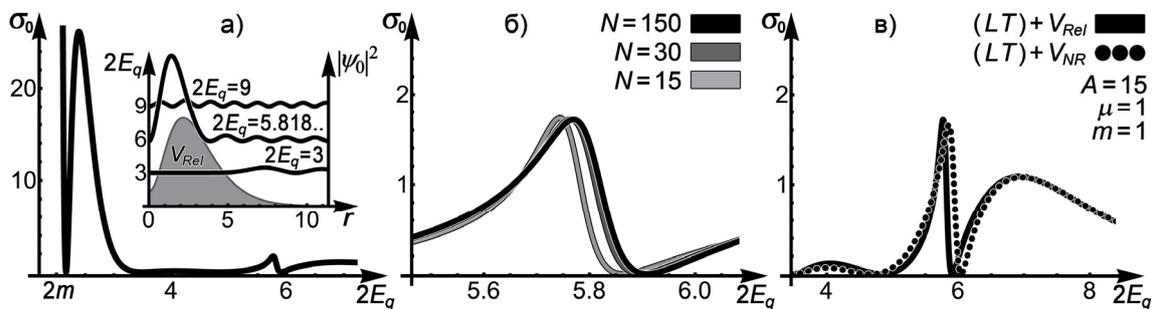


Рисунок 2.1 – Зависимость парциального сечения σ_0 от энергии $2E_q$ для уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалами V_{Rel} и V_{NR} при $A=15$
 (а – дополнительно зависимость квадрата модуля волновой функции;
 б – при разном количестве δ -функций N ; в – для двух вариантов потенциала)

На рисунке 2.2 приведены численные расчёты парциальных сечений рассеяния при $\ell = 0$ в зависимости от импульса $q = m \operatorname{sh} \chi_q$, которые получены на основе трёх вариантов квазипотенциальных уравнений с потенциалом (2.1) и уравнения Липпмана – Швингера с потенциалом (2.2) (нерелятивистский предел квазипотенциальных уравнений). Видно, что увеличение параметра A (увеличение высоты барьера) приводит к росту энергии и уменьшению ширины резонансов, а также к увеличению разницы между результатами решения разных уравнений. Аналогичные расчёты для случая $\ell = 1$ представлены на рисунке 2.3.

На рисунках 2.2 и 2.3 видно, что при увеличении параметра A резонансная энергия растёт быстрее в случае релятивистских уравнений по сравнению с нерелятивистским случаем, а резонансная энергия в случае уравнения Логунова – Тавхелидзе всегда принимает некоторое промежуточное значение по отношению к соответствующим значениям для уравнений Кадышевского и Гросса.

При рассматриваемом типе взаимодействия, полное сечение рассеяния не представляет интереса с точки зрения наглядности резонансных эффектов, однако позволяет оценить разницу между релятивистским подходом и нерелятивистским. На рисунке 2.4 видно, что функция полного сечения рассеяния, рассчитанная на основе уравнения Логунова – Тавхелидзе с релятивистским потенциалом (2.1), принимает меньшее значение при $q = 0$ и убывает быстрее с ростом энергии, по сравнению с функцией полного сечения рассеяния, рассчитанной на основе нерелятивистского уравнения Липпмана – Швингера с потенциалом (2.2). Это согласуется с тем, что нерелятивистский подход применим для случаев низких энергий. Разница между результатами решения разных вариантов квазипотенциальных уравнений в выбранном масштабе практически не заметна и поэтому не приводится.

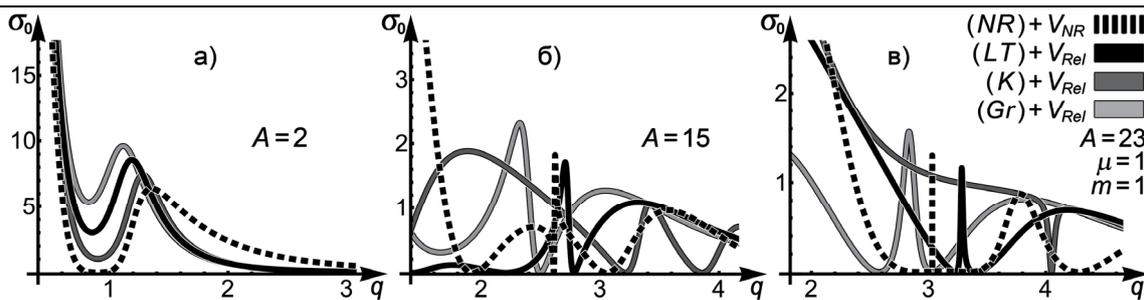


Рисунок 2.2 – Зависимость частичного сечения σ_0 ($\ell = 0$) от импульса q для квазипотенциальных уравнений и уравнения Липпмана – Швингера (а – при $A = 2$; б – при $A = 15$; в – при $A = 23$)

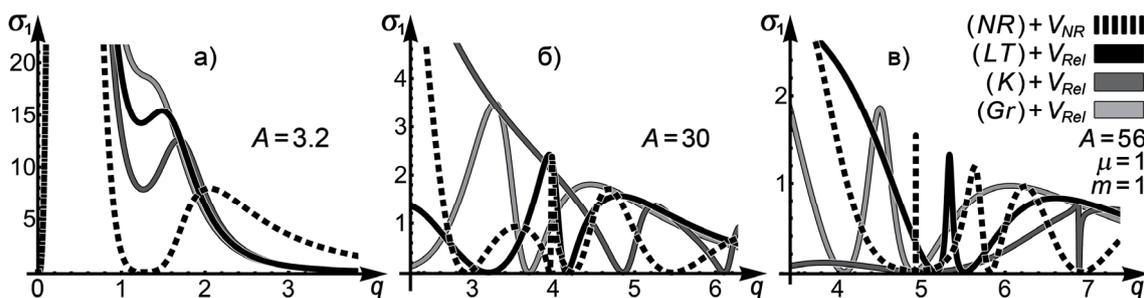


Рисунок 2.3 – Зависимость частичного сечения σ_1 ($\ell = 1$) от импульса q для квазипотенциальных уравнений и уравнения Липпмана – Швингера (а – при $A = 3.2$; б – при $A = 30$; в – при $A = 56$)

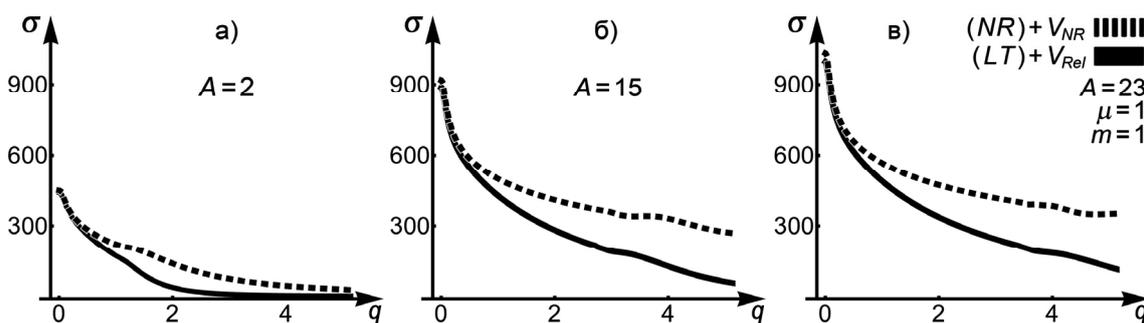


Рисунок 2.4 – Зависимость полного сечения рассеяния от импульса q для уравнений Логунова – Тавхелидзе и Липпмана – Швингера (а – при $A = 2$; б – при $A = 15$; в – при $A = 23$)

Заключение

Рассмотрен релятивистский аналог популярной квантовомеханической задачи о рассеянии, где взаимодействие описывается модельным потенциалом, содержащим «барьер». Потенциал рассмотрен в классическом виде и его релятивистское обобщение. Получено численное решение трёх вариантов квазипотенциальных интегральных уравнений в РКП для системы двух бесспиновых частиц с ненулевым орбитальным моментом. Исследовано резонансное поведение частичных сечений рассеяния. Выявлены отличия между релятивистским подходом и нерелятивистским. Проверена эффективность численного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kapshai, V.N. Partial quasipotential equations in the relativistic configuration representation / V.N. Kapshai, S.I. Fialka // Russ. Phys. Journal. – 2018. – Vol. 60, № 10. – P. 1696–1704.

2. Kapshai, V.N. Numerical determination of complex resonance energies by using a superposition of δ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova, N. Elander // International journal of quantum chemistry. – 2003. – Vol. 91, № 4. – P. 533 – 540.

3. Brändas, E. Titchmarsh–Weyl theory and its relations to scattering theory: Spectral densities and cross sections. Theory and applications / E. Brändas, M. Rittby, N. Elander // Journal of mathematical physics. – 1985. – Vol. 26, № 10. – P. 2648 – 2658.

4. Tolstikhin, O.I. Siegert pseudostate formulation of scattering theory: One-channel case / O.I. Tolstikhin, V.N. Ostrovsky, H. Nakamura // Physical Review A. – 1998. – Vol. 58, № 3. – P. 2077–2096.

5. Shilyaeva, K. Identifying resonance structures in a scattering cross section using the N3++ $H \rightarrow NH_3^+ \rightarrow N_2^{++} H^+$ reaction as an example / K. Shilyaeva, E. Yarevsky, N. Elander // Journal of Physics B. – 2009. – Vol. 42, № 4. – P. 044011.

Поступила в редакцию 29.01.18.

УДК 621.3.049.77: 621.793

СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛЕНОК ТАНТАЛАТА СТРОНЦИЯ-ВИСМУТА, НАНЕСЕННЫХ МЕТОДОМ ВЧ МАГНЕТРОНОГО РАСПЫЛЕНИЯ

Д.Э. Окоджи¹, Д.А. Голосов¹, С.Н. Мельников¹,
С.М. Завадский¹, В.В. Колос², Е.А. Поплевка¹, Ю.А. Жукович²

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

²ОАО «Интеграл», Минск

FERROELECTRIC PROPERTIES OF STRONTIUM-BISMUTH TANTALATE THIN FILM DEPOSITED BY RF MAGNETRON SPUTTERING METHOD

J.E. Okojie¹, D.A. Golosov¹, S.N. Melnikov¹,
S.M. Zavadski¹, V.V. Kolos², E.A. Poplevka¹, Yu.A. Zhukovich²

¹Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

²JSC "Integral", Minsk

Исследованы характеристики сегнетоэлектрических тонких пленок танталата стронция-висмута (SBT), нанесенных методом ВЧ магнетронного распыления на Pt/TiO₂/SiO₂/Si подложки. Установлены зависимости диэлектрической проницаемости, остаточной поляризации и коэрцитивной силы пленок SBT от режимов последующего отжига. При температуре отжига 800° С получены пленки с остаточной поляризацией $2P_r = 3,02$ мкКл/см², коэрцитивной силой $2E_c = 140$ кВ/см. Диэлектрическая проницаемость и тангенс угла диэлектрических потерь на частоте 1,0 МГц составляли соответственно $\epsilon = 125$ и $\text{tg}\delta = 0,067$. Температура Кюри пленок достигала 310–315° С.

Ключевые слова: энергонезависимая память, FeRAM, сегнетоэлектрики, танталат стронция-висмута, SBT, ВЧ магнетронное распыление.

Characteristics of ferroelectric thin films of strontium-bismuth tantalate (SBT), which were deposited by means of HF magnetron sputtering on Pt/TiO₂/SiO₂/Si substrates, are investigated. The dependences of permittivity, residual polarization, and coercitivity of SBT films on the modes of subsequent annealing are established. Films with the residual polarization of $2P_r = 3.02$ $\mu\text{C}/\text{cm}^2$ and coercitivity of $2E_c = 140$ kV/cm are obtained at the annealing temperature of 800° C. The dielectric constant and loss tangent at the frequency of 1.0 MHz were accordingly equal to $\epsilon = 125$ and $\text{tg}\delta = 0.067$. The Curie temperature of the films reached 310–315° C.

Keywords: non-volatile memory, FeRAM, ferroelectric, strontium-bismuth tantalate, SBT, HF magnetron sputtering.

Введение

Сегнетоэлектрическая энергонезависимая память с произвольным доступом (*Ferroelectric Random Access non-volatile Memory* или *FeRAM*) является одной из наиболее перспективных типов репрограммируемой памяти [1]. FeRAM имеет ряд преимуществ перед другими разновидностями памяти: высокая скорость чтения – записи, большое количество циклов перезаписи, длительное время хранения информации и низкое напряжение питания. Однако до сих пор существует ряд проблем, которые сдерживают крупномасштабное производство FeRAM. Ключевым этапом технологии FeRAM является формирование сегнетоэлектрических конденсаторных структур. Первоначально в качестве сегнетоэлектрического материала FeRAM рассматривался цирконата-титаната свинца (PZT), который обладает высокими значениями остаточной поляризации ($2P_r = 20\text{--}40$ мкКл/см²) и относительно низкой температурой формирования сегнетоэлектрической фазы (550–650° С). Однако дальнейшие исследования показали, что пленки PZT

значительно снижают количество накапливаемого заряда после $10^6\text{--}10^8$ циклов переполяризации [2]. Поэтому в дальнейшем исследования сосредоточились на альтернативных сегнетоэлектрических материалах на основе висмут слоистых перовскитов, например, танталат стронция-висмута (SBT), который имеет хорошую устойчивость к эффекту усталости (до 10^{12} циклов переполяризации) и низкие токи утечки [3]–[4].

Таким образом, целью работы являлось исследование диэлектрических и сегнетоэлектрических свойств пленок танталат стронция-висмута, нанесенных методом ВЧ магнетронного распыления, с целью определения возможности их использования в FeRAM высокой плотности.

1 Экспериментальная часть

Схема экспериментальной установки нанесения сегнетоэлектрических тонких пленок методом ВЧ магнетронного распыления приведена на рисунке 1.1. Установка выполнена на базе вакуумного поста Leybold-Heraeus A550 VZK. Камера вакуумной установки была оборудована

внешним фланцевым ионным источником с замкнутым дрейфом электронов на основе ускорителя с анодным слоем (ИИ), который использовался для предварительной очистки подложек. Для распыления сегнетоэлектрических мишеней использовалась ВЧ магнетронная распылительная система RIF.039 с мишенью \varnothing 39 мм (МРС). Для питания магнетрона использовался ВЧ источник питания (частота 13,56 МГц) с максимальной выходной мощностью 1300 Вт. В качестве мишени использовались диски из сегнетоэлектрической керамики $\text{SrBi}_2\text{Ta}_2\text{O}_9$ \varnothing 39 мм и толщиной 4 мм. В качестве подложек использовались структуры Pt (150 нм)/ TiO_2 (50 нм)/БФСС/ SiO_2 (500 нм)/Si. До нанесения слоя сегнетоэлектрика структура нижнего Pt электрода подвергалась предварительному отжигу при температуре 800 °С в атмосфере O_2 . Время отжига 30 мин.

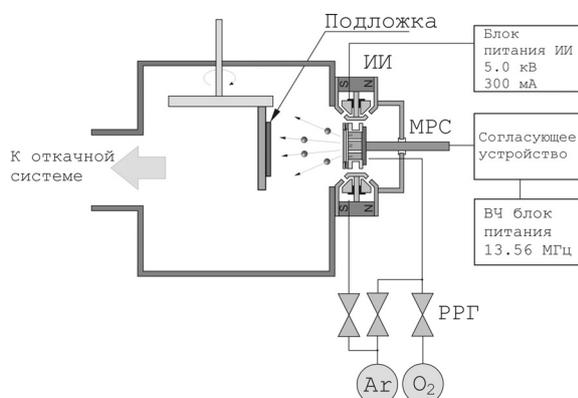


Рисунок 1 – Схема экспериментальной установки для нанесения сегнетоэлектрических тонких пленок методом ВЧ магнетронного распыления

В ходе экспериментов подложки устанавливались на расстоянии 82 мм от поверхности мишени магнетрона. Камера вакуумной установки откачивалась до остаточного давления 8×10^{-4} Па. Предварительно производилась очистка подложек ионным пучком. Для этого рабочий газ Ar подавался ионным источником до рабочего давления 0,02 Па. Время очистки, энергия ионов и ток разряда во всех экспериментах были постоянными и составляли 5 мин (режим вращения подложкодержателя), 500 эВ, 70 мА соответственно.

После очистки подложек производилось нанесение слоев. Распыление сегнетоэлектрической мишени осуществлялось в Ar/O_2 смеси газов. Расход рабочих газов во всех процессах поддерживался постоянным и составлял $Q_{\text{Ar}} = 35$ мл/мин, $Q_{\text{O}_2} = 25$ мл/мин. При этом давление в камере составляло 0,2 Па. Расход рабочих газов контролировался с помощью автоматических регуляторов расхода газа РРГ-1 (РРГ). В процессе нанесения мощность разряда магнетрона поддерживалась постоянной и составляла 80 Вт. Уровень отраженной мощности не превышал 3 Вт. Время

нанесения во всех экспериментах было постоянным и составляло 120 мин. При этом толщина нанесенных пленок составляла порядка 500 нм.

Для формирования сегнетоэлектрической структуры нанесенные пленки подвергались последующему кристаллизационному отжигу в установке ИК нагрева «Изоприн». Температура отжига $T_{\text{отж}}$ изменялась от 700 до 800 °С. Время отжига составляло 10 мин.

Толщина нанесенных слоев определялась с помощью оптического интерферометрического профилометра ПОИ-08. Структура и фазовый состав пленок SBT определялись методом рентгеновской дифракции на рентгеновском дифрактометре Ultima IV в $\text{CuK}\alpha$ -излучении. Рентгенограммы снимались при комнатной температуре в диапазоне углов $2\theta = 20\text{--}90^\circ$. СЭМ изображения получены с помощью высокоразрешающего автоэмиссионного растрового электронного микроскопа Hitachi S-4800.

Для измерения электрофизических характеристик сегнетоэлектрических тонких пленок создавались конденсаторные структуры. Для этого на отожженную сегнетоэлектрическую пленку методом ионно-лучевого распыления через маску наносился верхний Ni электрод. Площадь конденсаторов составляла 0,096 мм². Емкость, тангенс угла диэлектрических потерь и вольт-фарадные характеристики получены с использованием измерителя иммитанса Е7-20 на частотах $25\text{--}10^6$ Гц. Значения диэлектрической проницаемости рассчитывались исходя из толщины диэлектрического слоя и емкости конденсаторной структуры по формуле

$$\varepsilon = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S},$$

где C – емкость конденсатора, d – толщина слоя сегнетоэлектрика, $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м, S – площадь конденсатора.

Для измерения гистерезиса использовался метод Соьера – Тауэра. Кривые гистерезиса регистрировались с помощью цифрового осциллографа С8-46. Кривые гистерезиса получены при напряженности поля 250 кВ/см на частоте 50 Гц.

2 Результаты и обсуждение

Исследованы характеристики сегнетоэлектрических тонких пленок SBT, нанесенных методом ВЧ магнетронного распыления на Pt/ TiO_2 /БФСС/ SiO_2 /Si подложки (БФСС – борфосфоросиликатное стекло). Установлено, что непосредственно после нанесения пленки имели аморфную структуру с гладкой поверхностью (рисунок 2.1, а). Анализ нанесенных пленок методом рентгеновской дифракции также подтвердил аморфную структуру пленок (рисунок 2.2). На спектре присутствовали интенсивные пики платины (111) $2\theta = 39,80^\circ$, (200) $2\theta = 46,29^\circ$, (311) $2\theta = 81,35^\circ$, (222) $2\theta = 85,81^\circ$ и кремния (200) $2\theta = 32,96^\circ$, (400) $2\theta = 69,13^\circ$.

При кристаллизационном отжиге первоначально формировалась фаза пирохлора. При увеличении температуры фаза пирохлора превращалась в промежуточную фазу флюорита. Формирование фазы Ауривиллиуса наблюдалось только при температуре отжига более 760°C . При формировании сегнетоэлектрической фазы структура пленок SBT становилась зернистой в виде квазисферических кристаллитов размером 200–300 нм (рисунок 2.1, б). При увеличении температуры отжига размеры зерен увеличивались, что приводило к формированию на поверхности пленки пор размером до 50–70 нм.

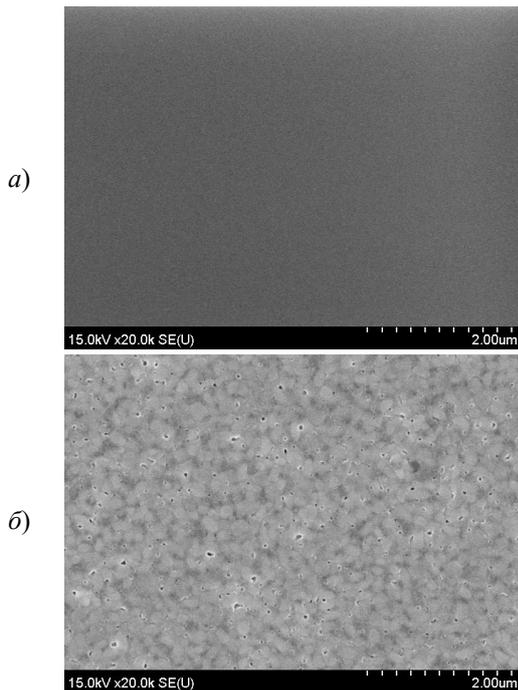


Рисунок 2.1 – СЭМ изображение поверхности пленки SBT непосредственно после нанесения (а), и после отжига при температуре 780°C (б)

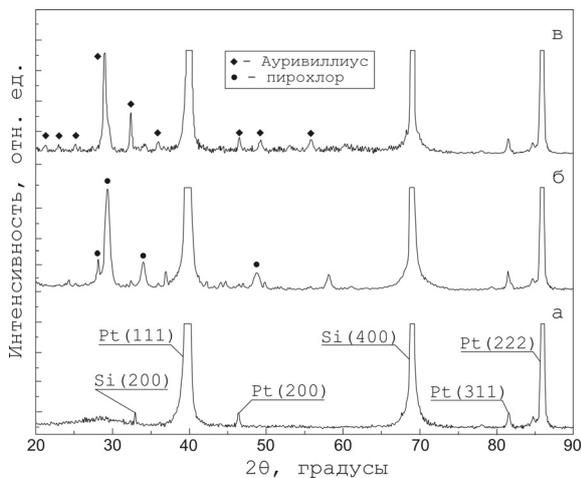


Рисунок 2.2 – Дифрактограммы пленок SBT непосредственно после нанесения (а) и после отжига при различной температуре: б – 740°C , в – 800°C

Нанесение верхнего электрода производилось после кристаллизационного отжига пленок SBT. На рисунке 2.3 представлено поперечное сечение сформированного сегнетоэлектрического конденсатора. Установлены зависимости диэлектрической проницаемости, поляризации и коэрцитивной силы пленок SBT от режимов кристаллизационного отжига. Непосредственно после нанесения пленки SBT являлись линейными диэлектриками. Среднее значение диэлектрической проницаемости пленок на частоте 1,0 МГц составляло $\epsilon = 22$ при тангенсе угла диэлектрических потерь $\text{tg}\phi$ порядка 0,04 (рисунок 2.4). При уменьшении частоты отмечалось увеличение ϵ и снижение $\text{tg}\phi$.

Для пленок SBT, отожженных при температурах $600\text{--}740^{\circ}\text{C}$, и имеющих структуру пирохлора, были характерны высокие значения тангенса угла диэлектрических потерь на низких частотах, до 0,8. При более высоких температурах и формировании структуры Ауривиллиуса диэлектрическая проницаемость резко увеличивалась до 90–100 единиц и далее росла с увеличением температуры (рисунок 2.5). Для образцов отожженных при температуре 800°C диэлектрическая проницаемость пленок достигала 124 единиц. При этом тангенс угла диэлектрических потерь составлял порядка 0,067. При повышении температуры более $820\text{--}840^{\circ}\text{C}$ происходила деградация нижнего электрода, при которой на пленке Pt появлялись разрывы и формирующиеся на поверхности Pt пленки шипы закорачивали конденсаторы.

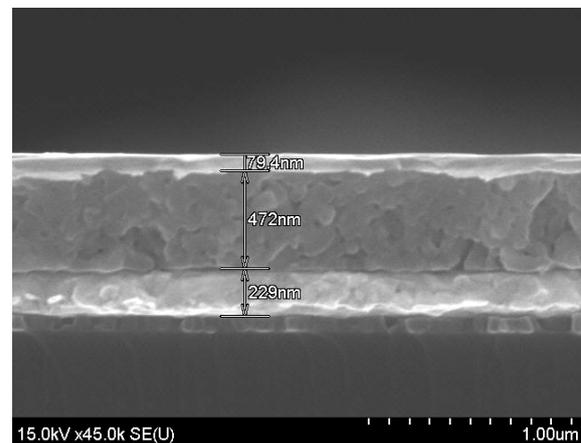


Рисунок 2.3 – СЭМ изображение поперечного сечения структуры Ni/SBT/Pt после отжига пленки SBT при температуре 780°C

Формирования гистерезиса поляризации также наблюдалось при температурах отжига более 740°C . При увеличении температуры площадь гистерезиса увеличивалась как за счет увеличения остаточной поляризации, так и коэрцитивного поля (рисунок 2.6). На рисунке 2.7 представлены зависимости остаточной и максимальной

поляризации от температуры отжига. При температуре отжига 800°С и напряженности поля 250 кВ/см значения максимальной поляризации, остаточной поляризации и коэрцитивной силы составили соответственно $2P_{max} = 9,98$ мкКл/см², $2P_r = 3,02$ мкКл/см², $2E_c = 140$ кВ/см.

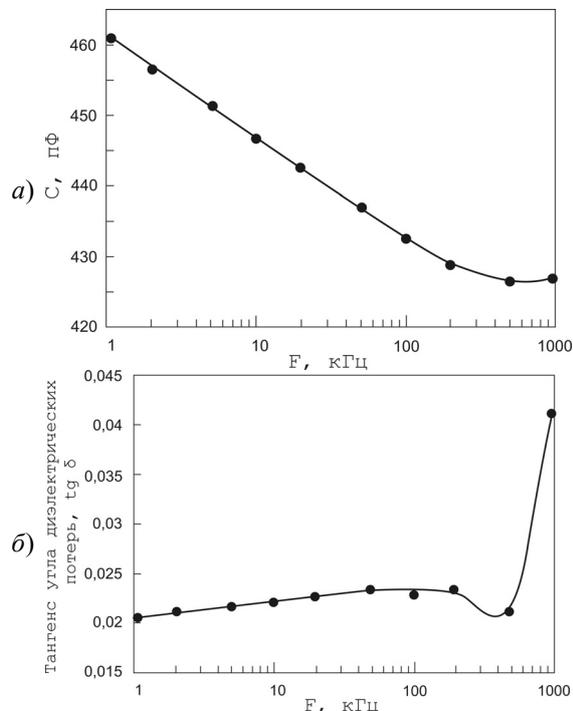


Рисунок 2.4 – Частотные зависимости емкости (а) и тангенса угла диэлектрических потерь (б) сформированных конденсаторных структур Ni/SBT/Pt (без отжига SBT)

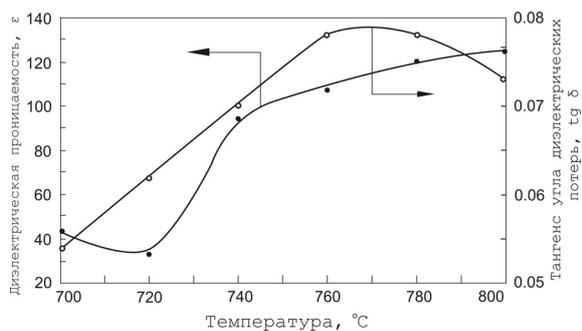


Рисунок 2.5 – Зависимость диэлектрической проницаемости (а) и тангенса угла диэлектрических потерь (б) сформированных конденсаторных структур Ni/SBT/Pt от температуры

Плотность тока утечки J_L пленок SBT при нулевом смещении для всех температур отжига составляла порядка 10^{-6} А/см². При напряженности электрического поля 100 кВ/см² для пленок SBT со структурой пирохлора плотность токов утечки достигала 10^{-5} А/см² и резко увеличивалась до 5×10^{-3} А/см² при формировании смешанной фазы. При дальнейшем увеличении температуры

отжига и формировании фазы Ауривиллиуса J_L опять снижалась до 5×10^{-4} А/см².

Температура Кюри нанесенных пленок определялась по максимуму на зависимости емкости конденсаторной структуры от температуры. Анализ температурных зависимостей емкости показал, что при температурах отжига менее 740°С фазовый переход отсутствовал, что свидетельствовало об отсутствии сегнетоэлектрической фазы в пленках. Фазовый переход появлялся при формировании сегнетоэлектрической фазы. Температура Кюри пленок SBT составляла порядка 310–315°С (рисунок 2.8) и незначительно изменялась в зависимости от температуры отжига образцов. Это примерно на 20–25°С меньше, чем сообщалось для объемных образцов SBT, T_K которых составляет 338°С [5]. Характеристика имела широкий температурный интервал фазового перехода.

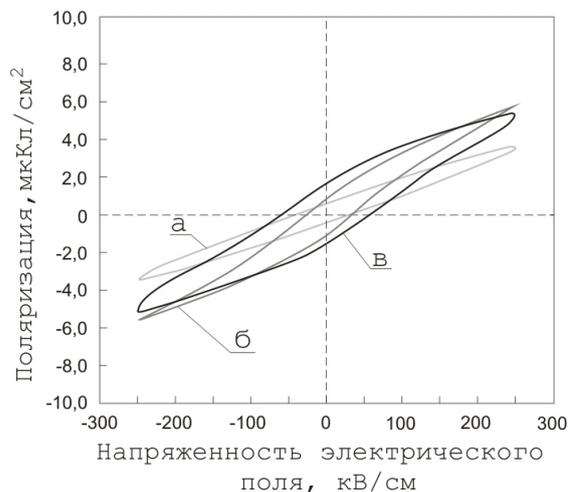


Рисунок 2.6 – Кривые гистерезиса конденсаторных структур Ni/SBT/Pt отожженных при различной температуре: а – 740°С, б – 780°С, в – 800°С

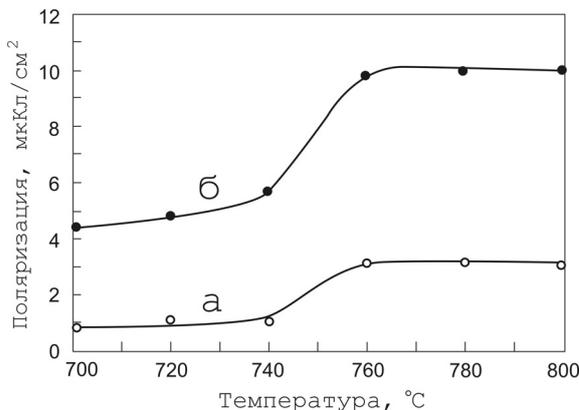


Рисунок 2.7 – Зависимость остаточной $2P_r$ (а) и максимальной поляризации $2P_{max}$ (б) пленок SBT от температуры отжига

Исследования усталости показали, что нанесенные пленки практически не были подвержены процессам усталости. Пленки выдерживали до

10^{10} циклов перполяризации, при этом уменьшение остаточной поляризации не превышало 6%.

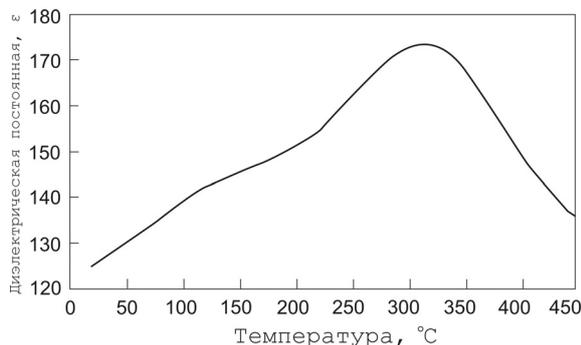


Рисунок 3.1 – Зависимость диэлектрической проницаемости пленок SBT от температуры (температура отжига 800° C)

Заключение

Исследованы характеристики сегнетоэлектрических тонких пленок танталата стронция-висмута (SBT), нанесенных методом ВЧ магнетронного распыления на Pt/TiO₂/SiO₂/Si подложки. Анализ пленок методом рентгеновской дифракции показал, что после нанесения пленки имели аморфную структуру. Формирование сегнетоэлектрической фазы наблюдалось только при температуре отжига более 760° C. При температуре отжига 800° C диэлектрическая проницаемость пленок достигала 125 единиц при тангенсе угла диэлектрических потерь порядка 0,067. Остаточная поляризация пленок составила 3,02 мкКл/см² и коэффциентная сила 140 кВ/см. Температура Кюри пленок достигала 310–315° C. Исследования усталости показали, что нанесенные пленки выдерживали до 10^{10} циклов перполяризации, при этом уменьшение остаточной поляризации не превышало 6%.

Полученные сегнетоэлектрические характеристики пленок SBT позволяют использовать данные пленки в конденсаторных модулях FeRAM. Однако для формирования однофазных пленок необходима температура отжига более 740–760° C, а для получения хороших поляризационных характеристик порядка 800° C. Также недостатком пленок SBT является сравнительно низкое значение остаточной поляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujisaki, Y. Current status of nonvolatile semiconductor memory technology / Y. Fujisaki // Jpn. J. Appl. Phys. – 2010. – Vol. 79. – P. 100001–1.
2. Characteristics of bismuth layered SrBi₂Ta₂O₉ thin-film capacitors and comparison with Pb (Zr, Ti)O₃ / T. Mihara [et al.] // Jpn. J. Appl. Phys. – 1995. – Vol. 34, № 9B – P. 5233.
3. Shrivastava, V. Structural distortion and phase transition studies of aurivillius type Sr_{1-x}Pb_xBi₂Nb₂O₉ ferroelectric ceramics / V. Shrivastava, A.K. Jha, R.G. Mendiratta // Solid State Commun. – 2005. – Vol. 133, Issue 2 – P. 125–129.
4. Thermal Stability and Electrical Properties of SrBi₂Ta_{2-x}Nb_xO₉/IrO_x Capacitors with Pt Top Electrode / S.Y. Kweon [et al.] // Jpn. J. Appl. Phys. – 2001. – Vol. 40, № 9A – P. 5275–5280.
5. Growth and characterization of ferroelectric SrBi₂Ta₂O₉ single crystals via high-temperature self-flux solution method / Amorin H. [et al.] // ФТТ. – 2006. – № 3 – P. 501–507.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-57-00028-Бел_а, и БРФФИ в рамках научного проекта № T16P-094.

Поступила в редакцию 01.02.18.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОРБЦИОННЫХ СВОЙСТВ СИЛИКАГЕЛЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМ

А.В. Семченко, В.В. Сидский, О.И. Тюленкова

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE INVESTIGATION OF THE SORPTION PROPERTIES OF SILICA GELS SYNTHESIZED BY SOL-GEL METHOD

A.V. Semchenko, V.V. Sidsky, O.I. Tyulenкова

F. Scorina Gomel State University

Проведены исследования сорбционных свойств силикагелей, полученных золь-гель методом. Синтезированные золь-гель методом силикагели с магнитными свойствами обладают высокой сорбционной ёмкостью по отношению к ионам Sn^{2+} и небольшой сорбционной ёмкостью по отношению к ионам Sr^{2+} и Cu^{2+} и обеспечивают глубокое извлечение ионов Sn^{2+} из жидких сред. С увеличением концентрации карбоната железа сорбционные свойства синтезированных образцов снижаются, что связано с возникновением десорбции.

Ключевые слова: золь-гель метод, сорбционная ёмкость, ионы стронция, ионы меди, ионы свинца, жидкие среды, глубокое извлечение.

The sorption properties of silica gels synthesized by sol-gel method were studied. Silica gel with magnetic properties possesses high sorption capacity in relation to Sn^{2+} ions and small sorption capacity to Sr^{2+} and Cu^{2+} ions and provides deep extraction of Sn^{2+} ions from liquid phases. With increasing of the concentration of iron carbonate the sorption properties of the synthesized samples are reduced, which is associated with the appearance of desorption.

Keywords: sol-gel method, sorption capacity, strontium ions, copper ions, plumbum ions, liquid phases, deep extraction.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется использованию неорганических сорбентов. Данные материалы превосходят органические смолы по своей механической, термической и радиационной стойкости, а также проявляют высокую селективность по отношению к различным радионуклидам. В качестве сырья для синтеза сорбентов могут использоваться акриловая и метакриловая кислоты и их эфиры, а также фенолоальдегидные полимеры, полиамины и др. Посредством направленного синтеза удаётся придавать ионам точно рассчитанные технологические характеристики. Технология получения смол из кислот и их эфиров довольно сложна, что приводит к увеличению стоимости конечного продукта. Кроме того, использование указанных исходных реагентов является экологически небезопасным.

Среди большого числа неорганических сорбентов, отличающихся друг от друга сорбционными, поверхностными свойствами и соответственно областью применения, особое место занимают пористые сорбенты с магнитными свойствами. Для мониторинга водной и парогазовых сред требуются адсорбенты с различной пористой структурой, среди которых магнитные пористые вещества, полученные золь-гель методом, занимают основное положение. Во-первых, они во много раз дешевле, доступны и их синтез [1] не требует специального оборудования и

дефицитного сырья, не наносит вреда окружающей среде. Во-вторых, методы получения данных адсорбентов, в том числе и с магнитными свойствами, позволяют в широких пределах регулировать их структуру. Это свидетельствует о необходимости расширения исследований по синтезу адсорбентов, выявлению закономерностей механизма их структурообразования, природы поверхности, магнитных и адсорбционно-структурных свойств. Данная работа посвящена синтезу и изучению свойств магнитных сорбентов, полученных золь-гель методом.

1 Методы исследования

Исследования сорбционной ёмкости полученных золь-гель методом силикагелей с магнитными свойствами проводили на спектрофлуориметре СМ 2203 путём определения концентрации веществ в анализируемом растворе. Для этого в дистиллированной воде растворяли азотнокислые соли металлов стронция, свинца и меди, затем в полученные растворы равными долями вводили силикагели с магнитными свойствами. Измерения проводили до добавления силикагелей с магнитными свойствами и через сутки после введения силикагелей.

2 Экспериментальная часть

Технология получения материалов с определёнными химическими и физико-механическими свойствами, включающая получение золя и последовательное перевод его в гель.

Рассмотрим процесс подробнее [2]–[3]:

1. На первой стадии золь-гель процесса формируется продукт определенного состава в виде высокодисперсного коллоидного раствора – золя. Размер частиц дисперсной фазы в стабильном золе 10^9 – 10^7 м. Увеличение концентрации дисперсной фазы приводит к появлению коагуляционных контактов между частицами и началу структурирования – гелеобразованию.

2. Коагуляционные структуры характеризуются низкой прочностью, определяемой ван-дер-ваальсовыми силами, при этом взаимодействие частиц осуществляется через равновесную по толщине прослойку дисперсионной среды. В этом случае сила взаимодействия частиц составляет 10^{11} – 10^{10} Н/контакт, а расстояние между ними – 10^8 – 10^7 м. Такие структуры характеризуются полным самопроизвольным восстановлением после механического разрушения. Дальнейшее повышение объёмной концентрации и поверхности дисперсной фазы приводит к постепенному исчезновению способности к тиксотропному восстановлению, а по мере снижения содержания дисперсионной среды теряются также эластичные и пластичные свойства.

3. Далее в полученный золь при постоянном перемешивании добавляли аэросил А175 и тонкодисперсный порошкообразный углерод. После полного прохождения реакции поликонденсации в золь был добавлен карбонат железа. Всего были изготовлены три образца с различным содержанием карбоната железа: 7,5 масс. % (образец № 1), 12,5 масс. % (образец № 2), 17,5 масс. % (образец № 3).

В качестве катализатора процесса гелеобразования был выбран аммиак.

4. Сушка гелей – наиболее критичная и самая длительная стадия в технологической цепочке получения ксерогелей (рисунок 2.1). Для проведения сушки контейнер с силикагелем помещали в сушильный шкаф и выдерживали при температуре $55 \pm 5^\circ \text{C}$ (в зависимости от размера заготовок) 5–0 часов. Об окончании операции сушки судили по изменению цвета заготовки и достижению ею постоянной массы.



Рисунок 2.1 – Внешний вид ксерогеля, полученного золь-гель методом, с использованием карбоната железа

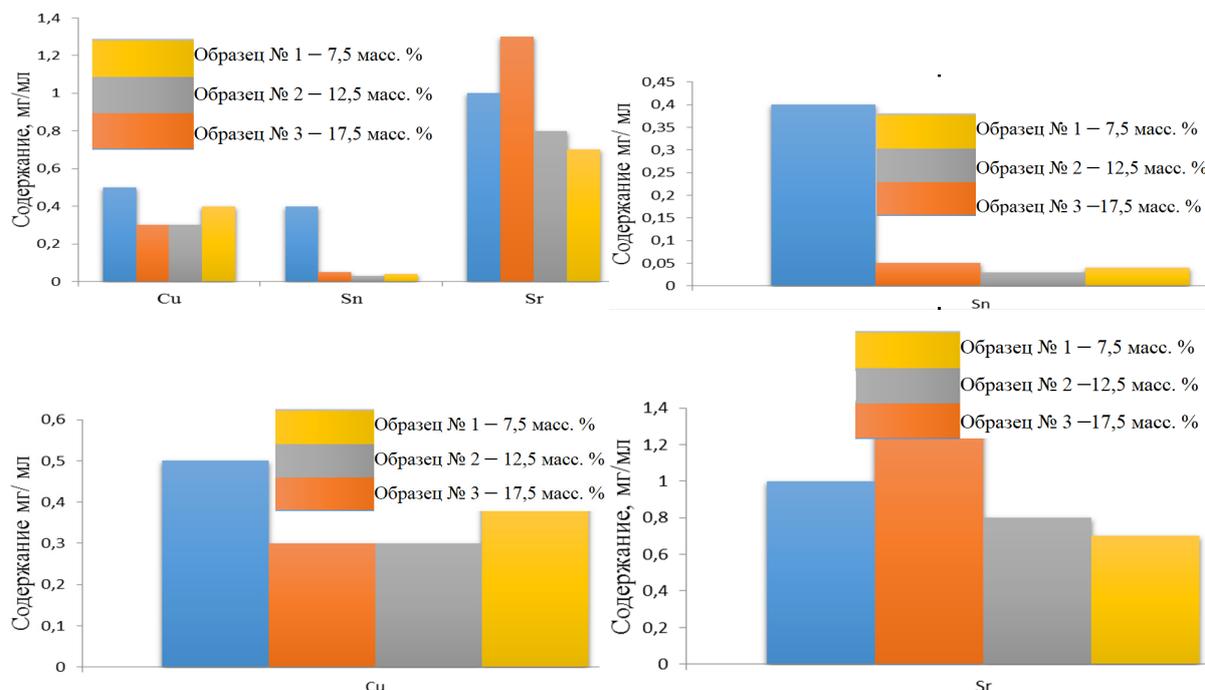


Рисунок 3.1 – Зависимость содержания металлов до сорбции и после сорбции (выдержка в растворе сорбентов в течение одних суток)

3 Результаты и обсуждение

Полученные золь-гель методом силикагели с магнитными свойствами обладают высокой сорбционной ёмкостью по отношению к ионам Sn^{2+} и небольшой сорбционной ёмкостью по отношению к ионам Sr^{2+} и Cu^{2+} и обеспечивают глубокое извлечение ионов Sn^{2+} из жидких сред (рисунок 3.1).

Атомы металлов, входящие в матрицу сорбента, определяющим образом влияют на состояние входящих в сорбент гидроксильных и аквагрупп, могут также участвовать в реакциях обмена с ионами других металлов, находящихся в жидкой среде, тем самым не очищая, а загрязняя воду. В процессе формирования частиц оксигидратных сорбентов возможно образование структурных пустот, заполненных катионами (в том числе H_3O^+) или анионами. Пустоты могут включать атомы, имеющие некомпенсированный электростатический заряд или координационную ненасыщенность. В некоторых случаях возникновение заряда может быть сопряжено с изменением степени окисления элемента, входящего в состав матрицы сорбента. Изоморфное замещение ионов матрицы на ионы, отличающиеся от них величиной заряда, могут также изменить заряд поверхности частиц [3].

Как видно из рисунка 3.1, с увеличением концентрации карбоната железа сорбционные свойства синтезированных образцов снижаются. Это связано с тем, что при высоких концентрациях примесей часть металлов, входящих в матрицу сорбента, диффундируют в воду, то есть наблюдается явление десорбции.

Заключение

Полученные золь-гель методом силикагели с магнитными свойствами обладают высокой сорбционной ёмкостью по отношению к ионам Sn^{2+} и небольшой сорбционной ёмкостью по отношению к ионам Sr^{2+} и Cu^{2+} и обеспечивают глубокое извлечение ионов Sn^{2+} из жидких сред. С увеличением концентрации карбоната железа сорбционные свойства синтезированных образцов снижаются, что связано с возникновением десорбции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hehch, L.L.* The Sol-Gel Process / L.L. Hehch, J.K. West // Chem. Rev. – 1990. – Vol. 90. – P. 33–72.
2. *Влияние условий обработки на структуру и сегнетоэлектрические свойства SBTN-плёнок, полученных золь-гель методом* / В.В. Сидский, А.В. Семченко, В.В. Колос, А.Н. Петлицкий, В.А. Солодуха, Н.С. Ковальчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 17–21.
3. *Нано-структурированные фотокаталитические золь-гель покрытия на основе титана* / В.В. Васильевич, Д.Л. Коваленко, А.В. Семченко, В.В. Сидский, М.А. Ковалевич // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 7–10.

Поступила в редакцию 04.12.17.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ПОЛУ- p -РАЗЛОЖИМЫХ ГРУППАХН.М. Адарченко¹, И.В. Близнец¹, В.Н. Рыжик²¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины²Брянский государственный аграрный университетON FINITE SEMI- p -DECOMPOSABLE GROUPSN.M. Adarchenko¹, I.V. Bliznets¹, V.N. Rizhik²¹F. Scorina Gomel State University²Bryansk State Agrarian University

Конечная группа G называется p -разложимой, если $G = O_{p'}(G) \times O_p(G)$. Будем говорить, что конечная группа G полу- p -разложима, если нормализатор каждой ненормальной p -разложимой подгруппы группы G p -разложим. Доказана следующая: Теорема. Предположим, что конечная группа G полу- p -разложима. Если силовская p -подгруппа P группы G не является нормальной в G , то выполняются следующие условия: (i) G является p -разрешимой и имеет нормальную холловскую p' -подгруппу H . (ii) $G/F(G)$ p -разложима. (iii) $O_{p'}(G) \times O_p(G) = H \times Z_\infty(G)$ – максимальная p -разложимая подгруппа группы G , а $G/H \times Z_\infty(G)$ – абелева.

Ключевые слова: p -разрешимая группа, p -разложимая группа, силовская подгруппа, Холловская подгруппа.

A finite group G is called p -decomposable if $G = O_{p'}(G) \times O_p(G)$. We say that a finite group G is semi- p -decomposable if the normalizer of every non-normal p -decomposable subgroup of G is p -decomposable. We prove the following Theorem. Suppose that a finite group G is semi- p -decomposable. If a Sylow p -subgroup P of G is not normal in G , then the following conditions hold: (i) G is p -soluble and G has a normal Hall p' -subgroup H . (ii) $G/F(G)$ is p -decomposable. (iii) $O_{p'}(G) \times O_p(G) = H \times Z_\infty(G)$ is a maximal p -decomposable subgroup of G , and $G/H \times Z_\infty(G)$ is abelian.

Keywords: finite group, p -soluble group, p -decomposable group, Sylow subgroup, Hall subgroup.

Введение

Все рассматриваемые группы в статье конечны. Если n – целое число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n , как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$, множество всех простых чисел, делящих порядок группы G . Группа G называется p -разложимой, если $G = O_{p'}(G) \times O_p(G)$.

Напомним, что группа G называется *полунильпотентной* [1] если нормализатор каждой ненормальной *нильпотентной* подгруппы группы G *нильпотентен*. Аналогично с этим будем говорить, что G является *полу- p -разложимой*, если нормализатор каждой ненормальной p -разложимой подгруппы G является p -разложимым.

Замечание 0.1. Покажем, что G является полу- p -разложимой тогда и только тогда, когда нормализатор каждой ненормальной подгруппы A из G , которая является либо p -группой, либо p' -группой, является p -разложимым. Так как каждая такая подгруппа p -разложима, достаточно показать, что если нормализатор любой ненормальной подгруппы A из G , которая является либо p -группой или p' -группой, является p -разложимым, то G полу- p -разложима.

Пусть H – некоторая ненормальная p -разложимая подгруппа в G . Тогда $H = O_{p'}(H) \times O_p(H)$ и $N_G(H) = N_G(O_{p'}(H)) \cap N_G(O_p(H))$. Более того, поскольку H ненормальна в G , по крайней мере одна из подгрупп $O_{p'}(H)$ или $O_p(H)$ не является нормальной в G . Но тогда, по крайней мере, одна из подгрупп $N_G(O_{p'}(H))$ или $N_G(O_p(H))$ является p -разложимой и следовательно $N_G(H)$ p -разложима.

Строение *полунильпотентных* групп хорошо известно (см. [1] или [2, гл. 4, раздел 7]). В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 0.2. *Предположим, что группа G полу- p -разложима. Если силовская p -подгруппа из G не является нормальной в G , то выполняются следующие условия:*

(i) G – p -разрешима и имеет нормальную холловскую p' -подгруппу.

(ii) $G/F(G)$ – является p -разложимой.

(iii) $O_{p'}(G) \times O_p(G) = H \times Z_\infty(G)$ является максимальной p -разложимой подгруппой группы G , а $G/H \times Z_\infty(G)$ является абелевой.

1 Предварительные сведения

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – класс всех p -разложимых групп. Тогда:

(1) Если $G \in \mathfrak{F}$, тогда $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой нормальной подгруппы N из G .

(2) Если $G \in \mathfrak{F}$, тогда $E \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы E из G .

(3) Если $G/N, G/L \in \mathfrak{F}$, тогда

$$G/N \cap L \in \mathfrak{F}.$$

(4) Если $G/\Phi \in \mathfrak{F}$, тогда $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1.2. Предположим, что группа G p -разрешима и пусть P – её p -силовская подгруппа и пусть C – p' -холловская подгруппа группы G . Если $N_G(P)$ и $N_G(C)$ являются p -разложимыми, то G является p -разложимой.

Доказательство. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G . Тогда R является либо p -группой, либо p' -группой, так как G является p -разрешимой по условию. Кроме того, PR/R является силовской p -подгруппой и CR/R является холловской p' -подгруппой в G/R и

$$N_G(PR/R) = N_G(P)R/R \simeq N_G(P)/N_G(P) \cap P$$

и

$N_G(CR/R) = N_G(C)R/R \simeq N_G(C)/N_G(C) \cap C$ являются p -разложимыми по лемме 2.1 (1). Поэтому

$$G/R = O_{p'}(G/R) \times O_p(G/R)$$

является p -разложимой по индукции. Предположим, что R является p -группой. Тогда $O_p(G/R) = O_p(G)/R = P/R$ нормальна в G/R , а P является нормальной в G . Но тогда $G = N_G(P)$ p -разложима по условию. Аналогично можно показать, что $G = N_G(C)$ является p -разложимой в случае, когда R является p' -группой. \square

Лемма 1.3 [4, Ch. V, Theorem 26.1]. Если G группа Шмидта, тогда $G = P \rtimes Q$, где $P = G^N = G'$ является силовской p -подгруппой из G и Q – силовская q -подгруппа из G для любых простых чисел $p \neq q$.

Лемма 1.4. Если G – минимальная не- p -разложимая группа, тогда G – группа Шмидта.

Доказательство. Предположим, что это неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда G является p -нильпотентной группой. Действительно, если G не является p -нильпотентной, то это – минимальная не p -нильпотентная группа, а значит, G – группа Шмидта [5, IV, Satz 5.4], что противоречит нашему предположению о G . Таким образом $G = V \rtimes P$, где V – нормальное p -дополнение из G и P является силовской p -подгруппой группы G . Более того

$|\pi(G)| > 2$, поскольку в противном случае всякая собственная подгруппа G нильпотентна и, следовательно, G является группой Шмидта.

Пусть теперь $q \in \pi(V)$ и Q есть силовская q -подгруппа из V . Тогда $G = VN_G(Q)$ по аргументу Фраттини и для некоторого $x \in G$ мы имеем $P \leq N_G(Q^x)$. Но тогда $Q^x \rtimes P = Q^x \times P$ поскольку $2 = |\pi(Q^x \rtimes P)| < |\pi(G)|$ и всякая собственная подгруппа из G является p -разложимой. Поэтому $|G : C_G(P)|$ является q' -числом для каждого $q \in \pi(V)$. Следовательно $G = V \times P$ p -разложима, противоречие. \square

2 Доказательство теоремы 0.2

Предположим, что эта теорема неверна и пусть G является контрпримером минимального порядка. Тогда G не p -разложима.

(1) Всякая собственная подгруппа E группы G является полу- p -разложимой. Следовательно, утверждение теоремы имеет место для E .

Пусть V – ненормальная p -разложимая подгруппа в E . Тогда V не является нормальной в G , так что $N_G(V)$ p -разложима по условию. Следовательно, $N_E(V) = N_G(V) \cap E$ – p -разложима по лемме 1.1 (2). Поэтому, E полу- p -разложима. Следовательно, утверждение (1) верно, согласно выбору группы G .

(2) Каждая собственная фактор-группа G/N в G (т.е. $N \neq 1$) является полу- p -разложимой. Следовательно, утверждение теоремы имеет место для G/N .

Ввиду замечания 0.1 и выбора группы G , достаточно показать, что если U/N – любая ненормальная подгруппа из G/N такая что U/N является либо p -группой или p' -группой, то $N_{G/N}(U/N)$ является p -разложимым. Без ограничения общности можно считать, что N – минимальная нормальная подгруппа в G .

Поскольку U/N не является нормальной в G/N , $U/N < G/N$ и U не является нормальной в G . Следовательно, U – собственная подгруппа в G , что означает, что U p -разрешима в утверждении (1). Следовательно, N является либо p -группой, либо p' -группой. Сначала предположим, что N – p' -группа.

Если U/N – p' -группа, то U является p' -группой и поэтому $N_G(U)$ p -разложима по предположению. Следовательно,

$$N_{G/N}(U/N) = N_G(U)/N$$

p -разложима по лемме 1.1 (1). Предположим теперь, что U/N это p -группа для некоторых $j \neq i$. Тогда N имеет дополнение V в U , и

каждые два дополнения к N в U сопряжены в U , так как V – силовская p -подгруппа в U . Следовательно, $N_G(U) = N_G(NV) = NN_G(V)$. Так как $U = NV$ не является нормальной в G , то V не является нормальной в G и $N_G(V)$ p -неразложим. Следовательно,

$N_{G/N}(U/N) = N_G(U)N/N \simeq N_G(U)/N_G(U) \cap N$ является p -разложимым. Точно так же можно доказать, что $N_{G/N}(U/N)$ p -разложим в случае, когда N – p -группа.

(3) Если A – минимальная не- p -разложимая подгруппа в G , то $A = R \times Q$, где $R = A^N = A' –$ силовская r -подгруппа A и Q является силовской q -подгруппой A для некоторых различных простых чисел r и q . Более того, R нормальна в G и $R \leq O_r(G)$.

Первая часть утверждения непосредственно следует из лемм 1.3 и 1.4. Так как A не является p -разложимой, то по условию R нормальна в G . Следовательно, $R \leq O_r(G)$.

(4) G – p -разрешима.

Предположим, что это неверно. Тогда G – неабелева простая группа, так как каждая собственная секция G p -разрешима в соответствии с утверждениями (1) и (2). Более того, G не является p -разложимой и поэтому имеет минимальную не- p -разложимую подгруппу A . Из утверждения (3) следует, что для некоторого простого r и для некоторой силовской r -подгруппы R из A имеем $1 < R \leq O_r(G) < G$. Это противоречие показывает, что условие (4) справедливо.

(5) Утверждение (i) выполняется для G .

Так как G p -разрешима, согласно условия (4), то G обладает холловской p' -подгруппой H . Так как P не является нормальной в G по условию, $N_G(P)$ является p -разложимой. Поэтому, поскольку G не является p -разложимой, из леммы 1.2 следует, что H нормальна в G . Следовательно, мы имеем (5).

(6) Утверждение (ii) справедливо для G .

Ввиду леммы 1.1 (1) достаточно показать, что $D = G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, где \mathfrak{F} – класс всех p -разложимых групп. Предположим, что это неверно. Тогда $D \neq 1$, и для любой минимальной нормальной подгруппы R группы G группа

$$(G/R)^{\mathfrak{F}} = RD/R \simeq D/D \cap R$$

нильпотентна, по условию (2) и лемме 1.1 (1). Кроме того, R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $R \leq D$ и $R \not\leq \Phi(G)$ по лемме 1.1 (3, 4).

Так как G не является p -разложимой, из утверждения (3) и [3, гл. А, 15.6] следует, что $R = C_G(R) = O_r(G) = F(G)$ для некоторого простого r .

Тогда $R < D$ и $G = R \times M$, где M не является p -разложимой, поэтому имеет минимальную не- p -разложимую подгруппу A . Из утверждения (3) следует, что для некоторого простого q делящего $|A|$ и для силовской q -подгруппы Q из A мы имеем $1 < Q \leq F(G) \cap M = R \cap M = 1$. Это противоречие завершает доказательство (6).

(7) $O_{p'}(G) \times O_p(G) = O_{p'}(V) \times O_p(V)$ для каждой подгруппы группы G , содержащей $O_{p'}(G) \times O_p(G)$.

Действительно, поскольку $H = O_{p'}(G)$ согласно утверждению (5), каждая подгруппа группы G , содержащая $O_{p'}(G) \times O_p(G)$, является субнормальной в G . Поэтому V является субнормальной в G , значит

$$O_{p'}(V) \times O_p(V) \leq O_{p'}(G) \times O_p(G) \leq O_{p'}(V) \times O_p(V).$$

Таким образом, мы имеем (7).

(8) Утверждение (iii) справедливо для G .

Прежде всего заметим, что $O_{p'}(G) \times O_p(G)$ – максимальная p -разложимая подгруппа группы G по условию (7). Более того,

$$O_{p'}(G) \times O_p(G) = H \times O_p(G)$$

и $G/C_G(O_p(G))$ является p -группой и, следовательно, $O_p(G) \leq Z_\infty(G)$. Следовательно

$$O_{p'}(G) \times O_p(G) = HZ_\infty(G).$$

Теперь мы покажем, что

$$G/O_{p'}(G) \times O_p(G) = G/H \times Z_\infty(G)$$

является абелевой. Ввиду леммы 1.1 (1) достаточно показать, что G' является p -разложимым. Предположим, что это неверно.

(a) $R = C_G(R) = O_q(G) = F(G) \not\leq \Phi(G)$ для некоторого простого q и $|R| > q$.

Из утверждения (2) следует, что для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G ,

$$(G/N)' = G'N/N \simeq G'/G' \cap N$$

является p -разложимой. Если $R \neq N$, то

$$G'/((G' \cap N) \cap (G' \cap R)) = G'/1$$

p -разложима по лемме 1.1 (3). Поэтому R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $R \leq D$ и $R \not\leq \Phi(G)$ по лемме 1.1 (4). Следовательно,

$$R = C_G(R) = O_q(G) = F(G)$$

для некоторого простого q по теореме 15.6 в [3, гл. А], поэтому $|R| > q$, так как в противном случае $G/R = G/C_G(R)$ является циклической, откуда следует, что $G' = R$ является p -разложимым.

(b) $Z_\infty(G) = 1$. Следовательно,

$$O_{p'}(G) \times O_p(G) = H$$

(это следует из утверждений (5), (8) и (a)).

(c) P – минимальная не абелева группа.

Пусть $W = HV$, где V – максимальная подгруппа группы P . Тогда

$$H = O_{p'}(G) \times O_p(G) = O_{p'}(W) \times O_p(W)$$

Из условий (b) и (7), поэтому

$$W / O_{p'}(W) \times O_p(W) = W / H \simeq V$$

является абелевой по условию (1). Поэтому P не является абелевой, но каждая собственная подгруппа в P абелева. Следовательно, мы имеем (c).

(d) $H = R$ – силовская q -подгруппа группы G , и всякая подгруппа $V \neq 1$ из P действует неприводимо на R . Следовательно, каждая собственная подгруппа V группы V циклическая.

Предположим, что $|\pi(H)| > 1$. Существует силовская q -подгруппа Q из H такая, что $P \leq N_G(Q)$ по утверждению (b) и лемме Фраттини. Пусть $K = QP$. Тогда $K < G$ и $Q = H \cap K$ нормальны в K , поэтому

$$R \leq Q = O_{p'}(K) \times O_p(K),$$

так как $C_G(R) = R$ по утверждению (a). Поэтому

$$K / O_{p'}(K) \times O_p(K) = K / Q \simeq P$$

абелева по утверждению (1), противоречие. Следовательно, H – нормальная силовская q -подгруппа группы G . Следовательно

$$H \leq F(G) \leq C_G(R) = R,$$

в силу [3, гл. А, 13.8 (b)], поэтому $H = R$.

Пусть теперь $S = RV$. По теореме Машке $R = R_1 \times \dots \times R_n$, где R_i – минимальная нормальная подгруппа S для всех i . Тогда

$$R = C_S(R) = C_S(R_1) \cap \dots \cap C_S(R_n).$$

Следовательно, для некоторого i подгруппа $R_i V$ не является нильпотентной и поэтому имеет минимальную не- p -разложимую подгруппу A такую, что $1 < A'$ нормальна в G по утверждению (3). Но тогда $R \leq A$. Поэтому $i = 1$, значит мы имеем (d), поскольку V абелева по условию (c).

Окончательное противоречие для (8). Так как каждая максимальная подгруппа группы P циклическая по утверждению (d), $q = 2$ по

[6, гл. 5, теоремы 4.3, 4.4]. Следовательно, $|R| = p$, вопреки утверждению (a). Таким образом, имеем (8).

Из утверждений (5), (6) и (8) следует, что выводы теоремы выполнены для G вопреки нашему выбору G . Это окончательное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

В заключение, отметим следующий открытый вопрос.

Вопрос. Можно ли обобщить основной результат данной работы в рамках теории σ -свойств групп, построенной в работах [7]–[9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Chih-Han, Sah. On a generalization of finite nilpotent groups / Sah Chih-Han // Math. Z. – 1957. – Vol 68, № 1. – P. 189–204.
2. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Polygonal Publishing House, 1982.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer – Verlag. Berlin – Heidelberg – New York, 1967.
6. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – Harper & Row Publishers, New York – Evanston – London, 1968.
7. Скиба, А.Н. On σ -properties of finite groups I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.
8. Скиба, А.Н. On σ -properties of finite groups II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.
9. Скиба, А.Н. On σ -properties of finite groups III / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 52–62.

Поступила в редакцию 26.01.18.

УДК 512.542

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ θ -ПОДГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ ФОРМАЦИОННЫЕ РАДИКАЛЫ

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия

INTERSECTIONS OF MAXIMAL θ -SUBGROUPS CONTAINING FORMATION RADICALS

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies

Для непустых радикальных формаций \mathfrak{F} и абнормально полного подгруппового m_s -функтора θ изучаются пересечения $\Phi_{\theta, G_s}(G)$ всех максимальных θ -подгрупп конечной группы G , содержащих G_s .

Ключевые слова: радикальные формации конечных групп, \mathfrak{F} -радикалы, подгрупповой m -функтор, пересечения максимальных θ -подгрупп.

Intersections $\Phi_{\theta, G_s}(G)$ of all maximal θ -subgroups of a finite group G , containing G_s , for nonempty radical formations \mathfrak{F} and the abnormally full subgroup m_s -functor θ are studied.

Keywords: radical formations of finite groups, \mathfrak{F} -radicals, subgroup m -functor, intersections of maximal θ -subgroups.

1 Предварительные сведения и результаты

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1]. Изучение пересечений максимальных подгрупп с привлечением функторного метода восходит к работе [2]. Под подгрупповым m -функтором понимают всякое отображение θ , которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и некоторых её максимальных подгрупп. Подгруппы множества $\theta(G)$ называют θ -подгруппами группы G , через $\Phi_{\theta}(G)$ обозначают пересечение всех θ -подгрупп группы G ; $M_{\theta}(G)$ – множество всех максимальных θ -подгрупп группы G . Подгрупповой m -функтор θ , обладающий свойством: если $H \in \theta(G)$, то $H^x \in \theta(G)$ для всех $x \in G$, будем называть подгрупповым m_s -функтором [3], [4]. Подгрупповой m -функтор θ называется регулярным, если для любой нормальной подгруппы N группы G выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ всегда следует

$$HN/N \in \theta(G/N);$$

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $H \in \theta(G)$.

Подгрупповой m -функтор θ называют абнормально полным, если для любой группы G множество $\theta(G)$ включает все абнормальные (ненормальные) максимальные подгруппы группы G .

Определения регулярного и абнормально полного подгруппового m -функтора θ в смысле подгруппового m_s -функтора приводились и использовались в работах [5], [6].

Пусть θ – подгрупповой m -функтор, G – группа, N_1 , N_2 и N – нормальные подгруппы группы G . Обозначаем:

$M(G)$ – множество всех максимальных подгрупп группы G ;

$\Phi_{N_1, N_2}(G)$ – пересечение всех максимальных подгрупп группы G , содержащих N_1 , но не содержащих N_2 ;

$M^{\text{ab}}(G)$ – множество всех абнормальных максимальных подгрупп группы G ;

$M_N^{\text{ab}}(G)$ – множество всех абнормальных максимальных подгрупп группы G , содержащих N ;

$\Delta(G)$ – подгруппа Гашюца, пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G ;

$\Delta_N(G)$ ($\Delta_N^{\text{ab}}(G)$) – пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G , содержащих N (не содержащих N , соответственно);

$\Delta_{N_1, N_2}(G)$ – пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G , содержащих N_1 , но не содержащих N_2 ;

$M_{\theta, N_1}(G)$ ($M_{\theta, N_1}^{\text{ab}}(G)$) – множество всех максимальных θ -подгрупп группы G , содержащих N_1 (не содержащих N_1 , соответственно);

$\Phi_{\theta, N_1}(G) (\Phi_{\theta, \overline{N_1}}(G))$ – пересечение всех групп из $M_{\theta, N_1}(G)$ (из $M_{\theta, \overline{N_1}}(G)$, соответственно);

$\Phi_{\theta, N_1, \overline{N_2}}(G)$ – пересечение всех максимальных θ -подгрупп группы G , содержащих N_1 , но не содержащих N_2 ;

$\tilde{F}_N(G)/N = Soc(G/N)$; в случае $N = \Phi(G)$ принято обозначение $\tilde{F}(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$ [1, с. 79].

В статье встречаются общепринятые обозначения: \mathfrak{S} – формация всех разрешимых групп; \mathfrak{N}_π – формация всех нильпотентных π -групп, \mathfrak{N}^* – формация всех квазинильпотентных групп, $F^*(G)$ – квазинильпотентный радикал группы G . Обозначим через \mathfrak{M} некоторое множество линейных упорядочений множества всех простых чисел, через \mathfrak{F}_φ – формацию всех φ -дисперсивных групп, $\varphi \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}} = \bigcap_{\varphi \in \mathfrak{M}} \mathfrak{F}_\varphi$ – радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} .

Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, θ – подгрупповой m_s -функтор. Используем обозначения $\tilde{F}_N(G) \in \{\tilde{F}_{\Phi_\theta}(G), \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_\mathfrak{S}}}(G), \tilde{F}_{\Phi_{G_\mathfrak{S}}}(G), \tilde{F}_{\Delta_{G_\mathfrak{S}}}(G), \tilde{F}_\Delta(G), \tilde{F}_{F^*}(G)\}$ в соответствующих случаях для $N \in \{\Phi_\theta(G), \Phi_{\theta, G_\mathfrak{S}}(G), \Phi_{G_\mathfrak{S}}(G), \Delta_{G_\mathfrak{S}}(G), \Delta(G), \Phi_{F(G)}(G)\}$. В обозначениях пересечений максимальных подгрупп группы G вместо $F(G)$, $F^*(G)$ и $\tilde{F}_{\Phi_{G_\mathfrak{S}}}(G)$ в нижних индексах используются символы F , F^* и $\tilde{F}_{\Phi_{G_\mathfrak{S}}}$ (соответственно); например, $\Delta_F(G)$, $\Delta_{\tilde{F}}(G)$, $\Delta_{F, \overline{G_\mathfrak{S}}}(G)$, $\Phi_{\theta, F^*}(G)$, $\Phi_{\theta, G_\mathfrak{S}, \tilde{F}_{\Phi_{G_\mathfrak{S}}}}(G)$ обозначают $\Delta_{F(G)}(G)$, $\Delta_{\tilde{F}(G)}(G)$, $\Delta_{F(G), \overline{G_\mathfrak{S}}}(G)$, $\Phi_{\theta, F(G), F^*}(G)$, $\Phi_{\theta, G_\mathfrak{S}, \tilde{F}_{\Phi_{G_\mathfrak{S}}}}(G)$, соответственно.

В случае отсутствия в группе G максимальных подгрупп, удовлетворяющих требуемым условиям, соответствующие пересечения полагаем совпадающими с G .

Приведём в виде леммы 1.1 некоторые используемые в статье утверждения.

Лемма 1.1. (1) [7, лемма 1.1]. Пусть M и K нормальные подгруппы группы G , $K \subseteq M$. Тогда $\tilde{F}_M(G)/K = \tilde{F}_{M/K}(G/K)$.

(2) [8, лемма 3.3]. Пусть A и B – нормальные подгруппы группы G , $A \subseteq B$. Тогда $\tilde{F}_A(G) \subseteq \tilde{F}_B(G)$.

(3) [7, лемма 1.4]. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \dots, \mathfrak{F}_n$ – непустые радикальные формации. Тогда

$$\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \mathfrak{F}_3 \dots \mathfrak{F}_n = (\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \mathfrak{F}_3 \dots \mathfrak{F}_{n-1}) \mathfrak{F}_n, \quad n \geq 3.$$

(4) [7, лемма 2.4]. Пусть \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 – непустые радикальные формации, G – группа. Тогда $(G/G_{\mathfrak{F}_1})_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2}/G_{\mathfrak{F}_1}$.

(5) [7, лемма 2.1]. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа. Тогда

$$\Phi_{G_\mathfrak{S}}(G)/G_\mathfrak{S} = \Phi(G/G_\mathfrak{S}); \quad \Phi_{G_\mathfrak{S}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}.$$

Ввиду теоремы 13.8 X из [9] и леммы 4.14 A из [10] справедливо следующее утверждение.

(6) [11, с. 155]. Если в группе G подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, то $Soc(G) = F^*(G)$.

(7) [8, следствие 3.2.1 теоремы 3.2]. Для всякой группы G справедливо равенство $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_\Delta(G)$.

Доказательство. (7) Пусть G – нильпотентная группа. Тогда по определению $\Delta(G) = G$, $\tilde{F}_\Delta(G) = G$, $\tilde{F}(G) = F(G) = G$. Поэтому считаем, G – ненильпотентная группа. Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $G/\Phi(G)$ ненильпотентна ввиду локальности формации \mathfrak{N} . Обозначим $G/\Phi(G) = \overline{G}$. По индукции $\tilde{F}(\overline{G}) = \tilde{F}_\Delta(\overline{G})$. Так как $\Delta(\overline{G}) = \Delta(G)/\Phi(G)$, то $Soc(\overline{G}/\Delta(\overline{G})) \cong Soc(G/\Delta(G)) = \tilde{F}_\Delta(G)/\Delta(G)$. С другой стороны, $Soc(\overline{G}/\Delta(\overline{G})) = \tilde{F}_\Delta(\overline{G})/\Delta(\overline{G})$. Значит, $\tilde{F}_\Delta(\overline{G})/\Delta(\overline{G}) \cong \tilde{F}_\Delta(G)/\Delta(G)$. Так как $\tilde{F}(\overline{G})/\Phi(\overline{G}) = Soc(\overline{G}/\Phi(\overline{G}))$, $\Phi(\overline{G}) = 1$, то $\tilde{F}(\overline{G}) = Soc(\overline{G}) = \tilde{F}(G)/\Phi(G)$, а потому $\tilde{F}(\overline{G})/\Delta(\overline{G}) \cong \tilde{F}(G)/\Delta(G)$. Ввиду индуктивного предположения $\tilde{F}(\overline{G})/\Delta(\overline{G}) = \tilde{F}_\Delta(\overline{G})/\Delta(\overline{G})$; значит, $\tilde{F}(G)/\Delta(G) \cong \tilde{F}_\Delta(G)/\Delta(G)$. А так как, согласно утверждению (2), $\tilde{F}(G) \subseteq \tilde{F}_\Delta(G)$, то $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_\Delta(G)$. Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда $F(G) \subseteq \tilde{F}(G) = Soc(G)$. По теореме Гашюца [1, теорема 8.8] $\Delta(G) = Z(G)$. Докажем справедливость включения $\tilde{F}_\Delta(G) \subseteq \tilde{F}(G)$.

Пусть $\overline{\overline{N}} = N/Z(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/Z(G)$. Если $\overline{\overline{N}}$ – абелева группа, то N нильпотентна, и

$$N \subseteq F(G) \subseteq \tilde{F}(G).$$

Пусть $\overline{\overline{N}}$ – неабелева группа. Если $Z(G) = 1$, то $\overline{\overline{N}} = N \subseteq \tilde{F}(G)$. Пусть $Z(G) \neq 1$. Тогда $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{N}}_1 \times \overline{\overline{N}}_2 \times \dots \times \overline{\overline{N}}_k$, $\overline{\overline{N}}_i = N_i/Z(G)$ – простая неабелева группа, $\overline{\overline{N}}_i \cong \overline{\overline{N}}_j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Понятно, что N_i централизует каждый свой главный фактор из $Z(G)$. Кроме того, для главного в N_i фактора $N_i/Z(G)$, конечно, справедливо равенство $N_i = N_i C_{N_i}(N_i/Z(G))$. Следовательно,

N_i – квазинильпотентная субнормальная подгруппа группы G . Так как формация \mathfrak{N}^* является радикальной, то, согласно следствию 7.7.2 теоремы 7.7 из [1], $N_i \subseteq F^*(G)$. Так как $\Phi(G) = 1$, то по утверждению (6) $\tilde{F}(G) = F^*(G)$. Следовательно, $N_1 N_2 \dots N_k = N \subseteq \tilde{F}(G)$.

Так как $\tilde{F}(G) \subseteq \tilde{F}_\Delta(G)$, то $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_\Delta(G)$. \square

2 Основные результаты

Лемма 2.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа. Имеют место следующие утверждения.

I. $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \Delta(G/G_{\mathfrak{F}})$; $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

II. Если θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, то $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

III. Пусть θ – регулярный подгрупповой m -функтор, тогда $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \Phi_\theta(G/G_{\mathfrak{F}})$. Если при этом функтор θ является абнормально полным, то $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Доказательство. I. Пусть $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$. Тогда равенство $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \Delta(G/G_{\mathfrak{F}})$ очевидно, и так как $\Delta(G/G_{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{N}$, то ввиду теоремы 2.1[1] $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \in Ext_{\mathfrak{F}}\mathfrak{N} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Пусть $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$, что возможно в следующих двух случаях.

1) $G = F(G)$, т. е. в G нет ненормальных максимальных подгрупп, значит, нет таких и в $G/G_{\mathfrak{F}}$. По определению, $\Delta(G/G_{\mathfrak{F}}) = G/G_{\mathfrak{F}} = \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}}$; $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

2) $G \neq F(G)$, но каждая ненормальная максимальная подгруппа группы G не содержит $G_{\mathfrak{F}}$. Значит, группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ (возможно, единичная) не имеет ненормальных максимальных подгрупп, и по определению $\Delta(G/G_{\mathfrak{F}}) = G/G_{\mathfrak{F}} = F(G/G_{\mathfrak{F}})$; $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

II. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор. По определению, $M^{\mathfrak{N}}(G) \subseteq \theta(G)$, а значит, $M_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{N}}(G) \subseteq M_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$. Так как θ – m_s -функтор, то группа $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$ нормальна в G . Следовательно, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ ввиду утверждения I и S_n -замкнутости радикальной формации $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

III. Пусть θ – регулярный подгрупповой m -функтор. Докажем справедливость равенства $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \Phi_\theta(G/G_{\mathfrak{F}})$. В случае $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$ доказываемое равенство очевидно. Пусть

$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$, что возможно в следующих двух случаях.

1) $\theta(G) = \{G\}$, что равносильно $\Phi_\theta(G) = G$. Тогда $\Phi_\theta(G/G_{\mathfrak{F}}) = G/G_{\mathfrak{F}}$ ввиду регулярности θ . Так как $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$, то $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \Phi_\theta(G/G_{\mathfrak{F}})$.

2) $\theta(G) \neq \{G\}$, что равносильно $\Phi_\theta(G) \neq G$. Таким образом, в G существуют максимальные θ -подгруппы и каждая из таких подгрупп не содержит $G_{\mathfrak{F}}$. Пусть при этом $G \neq G_{\mathfrak{F}}$. Тогда, ввиду регулярности θ , группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ не имеет максимальных θ -подгрупп. По определению, $\Phi_\theta(G/G_{\mathfrak{F}}) = G/G_{\mathfrak{F}}$, что совпадает с $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}}$ ввиду рассматриваемого случая $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$. Пусть $G = G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}}$ – единичная группа. А так как $\Phi_\theta(1) = 1$, ибо $\theta(G) \supseteq \{G\}$ для любой группы G , то и в этом случае $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \Phi_\theta(G/G_{\mathfrak{F}})$.

При условии абнормальной полноты θ из замкнутости формации всех нильпотентных групп \mathfrak{N} относительно подгрупп теперь следует $\Phi_\theta(G/G_{\mathfrak{F}}) \subseteq \Delta(G/G_{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{N}$, а значит,

$$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}. \quad \square$$

Лемма 2.2. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа. Имеют место следующие утверждения.

$$(1) \tilde{F}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

(2) Если θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, то

$$\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \tilde{F}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Доказательство. (1) Обозначим $G/G_{\mathfrak{F}} = \bar{G}$. Применяя утверждение (1) леммы 1.1 для $M = \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$, $K = G_{\mathfrak{F}}$ и утверждение I леммы 2.1, имеем: $\tilde{F}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \tilde{F}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}}}(\bar{G}) = \tilde{F}_\Delta(\bar{G})$ – группа, совпадающая с $\tilde{F}(\bar{G})$ по утверждению (7) леммы 1.1. Применение утверждения (5) леммы 1.1 и утверждения (1) леммы 1.1 для $M = \Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$, $K = G_{\mathfrak{F}}$ даёт

$$\tilde{F}(\bar{G}) = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}}}(\bar{G}) = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/G_{\mathfrak{F}}.$$

Следовательно, $\tilde{F}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$.

(2) Так как функтор θ является абнормально полным, то

$$M_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{N}}(G) \subseteq M_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq M_{G_{\mathfrak{F}}}(G),$$

следовательно,

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G).$$

Ввиду утверждения (2) леммы 1.1 и нормальности подгруппы $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G)$ в G

$$\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Delta_{G_{\mathfrak{S}}}}(G).$$

Из утверждения (1) теперь следует

$$\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}}(G) = \tilde{F}_{\Delta_{G_{\mathfrak{S}}}}(G). \quad \square$$

Следствие 2.2.1 [3, следствие 1.2.2(2) леммы 1.2]. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой t_s -функтор, G – группа. Тогда

$$\tilde{F}_{\Phi_{\theta}}(G) = \tilde{F}(G) = \tilde{F}_{\Delta}(G).$$

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{S}_1 и \mathfrak{S}_2 – непустые радикальные формации, θ – подгрупповой t_s -функтор. Тогда $(\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G))_{\mathfrak{S}_2} = (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G))_{\mathfrak{S}_2}$ для любой группы G .

Доказательство. Если $\theta(G) = \{G\}$, то $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G) = G$, и утверждение теоремы верно. Пусть $\theta(G) \neq \{G\}$, а значит, $G \neq 1$. И предположим, что $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G) = G$, т. е. в неединичной группе G нет максимальных θ -подгрупп, содержащих $G_{\mathfrak{S}_1}$. Тогда в G нет и ни одной максимальной θ -подгруппы, которая бы содержала $G_{\mathfrak{S}_1}$, но не содержала $G_{\mathfrak{S}_2}$. Согласно определению, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G) = G$. Значит, в этом случае утверждение теоремы выполняется.

Пусть $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G) \neq G$, а $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G) = G$. Это означает, что в G существуют максимальные θ -подгруппы, содержащие $G_{\mathfrak{S}_1}$, и все они содержат $G_{\mathfrak{S}_2}$, откуда $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, G_{\mathfrak{S}_2}}(G)$. Так как $G_{\mathfrak{S}_2} \subseteq \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G)$ и $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G)$ – нормальная подгруппа в G , то $(\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G))_{\mathfrak{S}_2} = G_{\mathfrak{S}_2}$. А так как $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G) = G$, то $(\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G))_{\mathfrak{S}_2} = G_{\mathfrak{S}_2}$. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда нормальная в G подгруппа $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G) \neq G$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G))_{\mathfrak{S}_2} &= \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G) \cap G_{\mathfrak{S}_2} = \\ &= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, G_{\mathfrak{S}_2}}(G)) \cap G_{\mathfrak{S}_2} = \\ &= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, G_{\mathfrak{S}_2}}(G))_{\mathfrak{S}_2} = (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G))_{\mathfrak{S}_2}, \end{aligned}$$

т. к. $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, \overline{G_{\mathfrak{S}_2}}}(G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1}, G_{\mathfrak{S}_2}}(G)$. \square

Следствие 2.1.1 [4, теорема 2.2]. Пусть \mathfrak{X} – радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} , θ – абнормально полный подгрупповой t_s -функтор. Тогда

$$\Phi_{\theta}(G) = F(\Phi_{\theta, \overline{F}}(G)) = (\Phi_{\theta, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = F(\Phi_{\theta, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))$$

для любой группы G .

Доказательство. Положим в условии теоремы 2.1 \mathfrak{S}_1 – единичная формация, $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{X}$. Так как $\Phi_{\theta}(G) \subseteq \Delta(G) \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\Phi_{\theta}(G) = (\Phi_{\theta}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}}$ по теореме 2.1. В частности, $\Phi_{\theta}(G) = F(\Phi_{\theta, \overline{F}}(G))$. Значит, $\Phi_{\theta}(G) = F(\Phi_{\theta, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))$. \square

Следствие 2.1.2. Для всякой группы G и любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию всех нильпотентных групп,

$$\Delta(G) = F(\Delta_{\overline{F}}(G)) = (\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = F(\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G)).$$

Соответствующие частные случаи следствий 2.1.1 и 2.1.2 имеют место для $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{N}^*, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{\mathfrak{N}}\}$.

Теорема 2.1 включает теорему 2.1 из [7] и её следствия 2.1.1 – 2.1.8, если для любой группы G и подгруппового t_s -функтора θ положить $\theta(G) = \{G\} \cup M(G)$. Из теоремы 2.1 и утверждения II леммы 2.1 вытекает также

Следствие 2.1.3. Пусть \mathfrak{S} – непустая радикальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой t_s -функтор, G – группа. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G) &= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{N}}}}}(G))_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{N}}} = \\ &= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{N}}} \end{aligned}$$

для любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию $\mathfrak{S}^{\mathfrak{N}}$.

Следствие 2.1.4. Пусть \mathfrak{S} – непустая радикальная формация, G – группа. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{G_{\mathfrak{S}}}(G) &= (\Delta_{G_{\mathfrak{S}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{N}}}}}(G))_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{N}}} = \\ &= (\Delta_{G_{\mathfrak{S}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{G_{\mathfrak{S}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{N}}} \end{aligned}$$

для любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию $\mathfrak{S}^{\mathfrak{N}}$.

Применение леммы 1.1 (3) позволяет распространить следствие 2.1.3 теоремы 2.1 на произведение произвольного числа радикальных формаций \mathfrak{S}_i .

Следствие 2.1.5. Для любой группы G и абнормально полного подгруппового t_s -функтора θ имеют место следующие утверждения.

(1) Пусть $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_{n-1}$ – непустые радикальные формации. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_{n-1}}}(G) &= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_{n-1} \mathfrak{N}} = \\ &= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_{n-1} \mathfrak{N}} \end{aligned}$$

для любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_{n-1} \mathfrak{N}$.

(2) Пусть \mathfrak{S} – непустая радикальная формация. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}(G) &= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}^{\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{S}^{n-1} \mathfrak{N}} = \\ &= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{S}^{n-1} \mathfrak{N}} \end{aligned}$$

для любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию $\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}$, и любого натурального числа n .

Следствие 2.1.6. Для любой группы G имеют место следующие утверждения.

(1) Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_{n-1}$ – непустые радикальные формации. Тогда

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}} (G) = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}} (G))_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} =$$

$$= (\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}$.

(2) Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация. Тогда

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}} (G) = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}} (G))_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} =$$

$$= (\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию $\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}$, и любого натурального числа n .

Следствие 2.1.7. Для всякой группы G , абнормально полного подгруппового t_s -функтора θ и любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию \mathfrak{N}^n , $n \geq 1$,

$$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}} (G) = (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}} (G))_{\mathfrak{N}^n} =$$

$$= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{N}^n}.$$

Следствие 2.1.8. Для всякой группы G и любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию \mathfrak{N}^n , $n \geq 1$,

$$\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}} (G) = (\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}} (G))_{\mathfrak{N}^n} =$$

$$= (\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{N}^n}.$$

Следствие 2.1.9. Для всякой группы G , абнормально полного подгруппового t_s -функтора θ и любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию всех метанильпотентных групп \mathfrak{N}^2 ,

$$\Phi_{\theta, F} (G) = (\Phi_{\theta, F, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}} (G))_{\mathfrak{N}^2} =$$

$$= (\Phi_{\theta, F, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta, F, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

В частности,

$$\Phi_{\theta, F} (G) = (\Phi_{\theta, F, \overline{G_{\mathfrak{E}}}} (G))_{\mathfrak{E}} = (\Phi_{\theta, F, \overline{G_{\mathfrak{E}}}} (G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

Следствие 2.1.10. Для всякой группы G и любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию всех метанильпотентных групп \mathfrak{N}^2 ,

$$\Delta_F (G) = (\Delta_{F, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}} (G))_{\mathfrak{N}^2} = (\Delta_{F, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{F, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

В частности,

$$\Delta_F (G) = (\Delta_{F, \overline{G_{\mathfrak{E}}}} (G))_{\mathfrak{E}} = (\Delta_{F, \overline{G_{\mathfrak{E}}}} (G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

Следствие 2.1.11. Для всякой группы G и абнормально полного подгруппового t_s -функтора θ справедливо равенство $F^*(\Phi_{\theta, F^*} (G)) = F(G)$.

Доказательство. По теореме 2.1

$$F^*(\Phi_{\theta, F^*} (G)) = F^*(\Phi_{\theta, F} (G)).$$

Так как по утверждению II леммы 2.1 $\Phi_{\theta, F} (G) \in \mathfrak{N}^2$, а значит, группа $\Phi_{\theta, F} (G)$ разрешима, то $F^*(\Phi_{\theta, F} (G)) = F(\Phi_{\theta, F} (G)) = F(G)$. \square

Следствие 2.1.12. Для всякой группы G справедливо равенство $F^*(\Delta_{F^*} (G)) = F(G)$.

Следствие 2.1.13. Для всякой группы G , любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей формацию $\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$, и абнормально полного подгруппового t_s -функтора θ

$$\Phi_{\theta, F^*} (G) = (\Phi_{\theta, F^*, \overline{G_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}}} (G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}} =$$

$$= (\Phi_{\theta, F^*, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta, F^*, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}.$$

Следствие 2.1.14. Для любой радикальной формации \mathfrak{X} , содержащей $\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$, и всякой группы G

$$\Delta_{F^*} (G) = (\Delta_{F^*, \overline{G_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}}} (G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}} =$$

$$= (\Delta_{F^*, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{F^*, \overline{G_{\mathfrak{X}}}} (G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}.$$

Полагая в теореме 2.1 \mathfrak{F}_1 – единичная формация, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$, получаем следующее следствие, учитывающее в частном случае (2) нильпотентность подгруппы $\Phi_{\theta} (G)$ ввиду $\theta(G) \supseteq M^{\mathfrak{N}} (G)$.

Следствие 2.1.15. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой t_s -функтор, G – группа. Тогда

$$(\Phi_{\theta} (G))_{\mathfrak{F}} = (\Phi_{\theta, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G))_{\mathfrak{F}}.$$

В частности:

(1) для любого простого числа p справедливо равенство $O_p(\Phi_{\theta} (G)) = O_p(\Phi_{\theta, O_p(G)} (G))$;

$$(2) O_{\pi}(\Phi_{\theta} (G)) = O_{\pi}(\Phi_{\theta, O_{\pi}(G)} (G)) =$$

$$= (\Phi_{\theta, \overline{G_{\mathfrak{N}_{\pi}}}} (G))_{\mathfrak{N}_{\pi}} = (\Phi_{\theta, O_{\pi}(G)} (G))_{\mathfrak{N}_{\pi}}$$

для произвольного множества простых чисел π ; если, в частности, $\pi = \pi(\Phi_{\theta} (G))$, то

$$\Phi_{\theta} (G) = O_{\pi}(\Phi_{\theta, O_{\pi}(G)} (G)) =$$

$$= (\Phi_{\theta, \overline{G_{\mathfrak{N}_{\pi}}}} (G))_{\mathfrak{N}_{\pi}} = (\Phi_{\theta, O_{\pi}(G)} (G))_{\mathfrak{N}_{\pi}}.$$

Следствие 2.1.16. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа. Тогда

$$(\Delta(G))_{\mathfrak{F}} = (\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G))_{\mathfrak{F}}.$$

В частности:

(1) для любого простого числа p справедливо равенство $O_p(\Delta(G)) = O_p(\Delta_{O_p(G)} (G))$;

$$(2) O_{\pi}(\Delta(G)) = O_{\pi}(\Delta_{O_{\pi}(G)} (G)) =$$

$$= (\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{N}_{\pi}}}} (G))_{\mathfrak{N}_{\pi}} = (\Delta_{O_{\pi}(G)} (G))_{\mathfrak{N}_{\pi}}$$

для произвольного множества простых чисел π ; если, в частности, $\pi = \pi(\Delta(G))$, то

$$\Delta(G) = O_\pi(\Delta_{O_\pi(G)}(G)) = (\Delta_{G_{\mathfrak{N}_\pi}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi} = (\Delta_{\overline{O_\pi(G)}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi}.$$

Пусть подгрупповой m_s -функтор θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её абнормальные максимальные подгруппы. Тогда из теоремы 2.1 вытекает

Теорема 2.2. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – непустые радикальные формации, G – группа. Тогда

$$(\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1}, G_{\mathfrak{F}_2}}(G))_{\mathfrak{F}_2}.$$

Заметим, что следствия 2.1.2*n*, $1 \leq n \leq 8$, теоремы 2.1 вытекают также из теоремы 2.2 с применением утверждения I леммы 2.1.

Лемма 2.3. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа. Имеют место следующие утверждения.

$$(1) [7] \text{ Soc}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = F^*(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)).$$

$$(2) [7] F(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G);$$

$$G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)}.$$

$$(3) \text{ Soc}(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = F^*(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)).$$

$$(4) F(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G).$$

Доказательство. Обозначим $G/G_{\mathfrak{F}} = \overline{G}$.

(3) Так как по утверждению I леммы 2.1 $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \Delta(\overline{G})$, то $G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \cong \overline{G}/\Delta(\overline{G})$. Так как $\Phi(\overline{G}/\Delta(\overline{G})) \subseteq \Delta(\overline{G}/\Delta(\overline{G})) = 1$, то по лемме 1.1

$$(6) \text{ Soc}(\overline{G}/\Delta(\overline{G})) = F^*(\overline{G}/\Delta(\overline{G})). \text{ Значит,}$$

$$\text{ Soc}(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = F^*(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)).$$

(4) Применяя утверждение I леммы 2.1 и следствие 3.2.4 теоремы 3.2 [12], имеем

$$F(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) \cong F(\overline{G}/\Delta(\overline{G})) = F(\overline{G})/\Delta(\overline{G}) =$$

$$= G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/G_{\mathfrak{F}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} \cong G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$$

ввиду утверждения (4) леммы 1.1. А так как, очевидно, $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq F(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$, то

$$F(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G). \quad \square$$

Лемма 2.4. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, G – группа. Имеют место следующие утверждения.

$$(1) \text{ Soc}(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = F^*(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)).$$

$$(2) F(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G).$$

(3) Тогда и только тогда $\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)} = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, когда $\text{ Soc}(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешим.

Доказательство. (1) Пусть θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор. По лемме 2.2 (2) $\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)} = \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)} = \tilde{F}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)}$. Так как $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$, то ввиду утверждения (1) леммы 2.3 $\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)}/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{N}^*$. Предположим, что

$$\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)}/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subset F^*(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = R/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G).$$

Тогда R не входит в $\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)}$. А так как $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$, то

$$R\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \cong R/R \cap \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{N}^*,$$

и, следовательно, $R\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq F^*(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$.

Из утверждения (3) леммы 2.3 следует $R \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)}$. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства

$$\text{ Soc}(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = F^*(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)).$$

$$(2) \text{ Пусть } F(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = N/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G). \text{ Так}$$

как $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$, то из утверждения (2) леммы 2.3 следует $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{N}$, откуда $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} \subseteq N$. Кроме того, $N\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{N}$; ввиду утверждения (4) леммы 2.3 $N \subseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$. Значит, $N = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$.

Утверждение (3) вытекает из утверждений (1) и (2) с учётом утверждения (2) леммы 2.2. \square

Следствие 2.4.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, G – группа. Тогда следующие четыре утверждения: $\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)} = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, $\text{ Soc}(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешим, $\text{ Soc}(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешим и $\text{ Soc}(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешим – равносильны.

Лемма 2.5. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор. Если факторгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)} \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G)/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$ разрешима, то равносильны следующие три утверждения:

$$(1) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G) \neq G;$$

$$(2) \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)} \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G) \neq G;$$

$$(3) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G.$$

Доказательство. Докажем равносильность утверждений (1) и (3). Так как $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G)$, то из утверждения (1) следует утверждение (3). Пусть выполняется утверждение (3), т. е. $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, что равносильно

$$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subset \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)}.$$

И предположим, что $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G) = G$. Тогда $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G) \supseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$. Согласно условию, факторгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)}/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \text{ Soc}(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешима. По утверждению (3) леммы 2.4 $\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)} = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, что противоречит

$$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) \subset \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}} (G) = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G).$$

Таким образом, из утверждения (3) следует утверждение (1).

Докажем равносильность утверждений (2) и (3). Так как $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G)$, то из утверждения (2) следует утверждение (3). Пусть выполняется утверждение (3). Как было показано, утверждение (3) равносильно утверждению (1). А из утверждения (1) следует утверждение (2). Значит, утверждения (2) и (3) равносильны. \square

Замечание 2.1. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой m -функтор, \mathfrak{F} – непустая радикальная формация. Справедливы следующие утверждения.

(1) Условие $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) \neq G$ ($\Phi_{\theta} (G) \neq G$ в случае, если $\mathfrak{F} = \{1\}$) равносильно условию $G \neq G_{\mathfrak{F}}$ ($G \neq 1$, соответственно), если θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её максимальные подгруппы.

(2) Условие $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) \neq G$ ($\Phi_{\theta} (G) \neq G$ в случае, если $\mathfrak{F} = \{1\}$) равносильно условию $G \neq G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}}$ ($G \neq F(G)$, соответственно), если θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её максимальные абнормальные подгруппы.

Действительно, если абнормально полный подгрупповой m -функтор θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её максимальные абнормальные подгруппы (случай (2)), то $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}}} (G)$. В соответствии с леммой 1.1 (4) $F(G/G_{\mathfrak{F}}) = G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}}/G_{\mathfrak{F}}$. Поэтому условие $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}} (G) \neq G$, очевидно, равносильно условию $G \neq G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}}$.

Таким образом, из леммы 2.5 вытекают следующие следствия.

Следствие 2.5.1 [7, лемма 2.6]. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа, и пусть факторгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) / \Phi_{G_{\mathfrak{F}}} (G)$ разрешима. Тогда равносильны следующие три утверждения:

- (1) $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \neq G$;
- (2) $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \neq G$;
- (3) $G \neq G_{\mathfrak{F}}$.

Следствие 2.5.2. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа, и пусть факторгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \cap \Delta_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) / \Delta_{G_{\mathfrak{F}}} (G)$ разрешима. Тогда равносильны следующие три утверждения:

- (1) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \neq G$;

$$(2) \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \cap \Delta_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \neq G;$$

$$(3) G \neq G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}}.$$

Теорема 2.3. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, G – группа, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) \neq G$.

Тогда:

$$(1) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \subset G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G),$$

если факторгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) / \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G)$ разрешима;

$$(2) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \subset G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G),$$

если $\text{Soc}(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешим.

Доказательство. (1) Пусть $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) \neq G$, $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) = N$, факторгруппа $N/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$ разрешима. Тогда

$$N/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq F(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}}/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$$

ввиду леммы 2.4. Применение следствия 2.1.3 теоремы 2.1 даёт $N \subseteq (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G))_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}} = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$.

Значит, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) \subset G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G)$, учитывая лемму 2.3 (2).

Утверждение (2) – частный случай утверждения (1); по лемме 2.4 (3) $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G) = G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}}$. \square

Замечание 2.2. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа, θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор. И пусть $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) \subset \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}} (G) = G$. Тогда

$$G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}} \subseteq \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}}} (G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) \subset \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}} (G) = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}} (G).$$

Значит, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) = G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}} \subset G$, так как $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}} (G) \subseteq G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}}$ по лемме 2.1(II). Таким образом, согласно лемме 2.4 (2), $F(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{R}}}/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$ – единичная группа, а значит, по лемме 2.4 (1) $\text{Soc}(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = F^*(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G))$ – прямое произведение простых неабелевых групп.

Отметим следствие теоремы 2.3 для случая \mathfrak{F} – единичная формация.

Следствие 2.3.1. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, G – группа, $\Phi_{\theta}(G) \neq G$. Тогда:

$$(1) \Phi_{\theta}(G) = \Phi_{\theta, \overline{F}}(G) \subset F(G) \subseteq \tilde{F}(G),$$

если подгруппа $\tilde{F}(G) \cap \Phi_{\theta, \overline{F}}(G)$ разрешима;

$$(2) \Phi_{\theta}(G) = \Phi_{\theta, \overline{F}}(G) \subset F(G) = \tilde{F}(G),$$

если подгруппа $\tilde{F}(G)$ разрешима.

Применяя лемму 1.1 (3), распространим теорему 2.3 на произведение произвольного числа радикальных формаций \mathfrak{F}_i .

Следствие 2.3.2. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой t_θ -функтор, G – группа. Имеют место следующие утверждения.

I. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_{n-1}$ – непустые радикальные формации, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G) \neq G$. Тогда:

$$(1) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}} \mathfrak{R} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G),$$

если факторгруппа

$$\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) / \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G)$$

разрешима;

$$(2) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}} \mathfrak{R} = \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G),$$

если $\text{Soc}(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G))$ разрешим.

II. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, n – натуральное число. Тогда:

$$(1) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \mathfrak{R} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}}(G),$$

если факторгруппа

$$\tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) / \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$$

разрешима;

$$(2) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \mathfrak{R} = \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}}(G), \text{ если } \text{Soc}(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)) \text{ разрешим.}$$

III. Пусть n – натуральное число, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}}(G) \neq G$. Тогда:

$$(1) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}, \overline{G_{\mathfrak{F}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^n} \mathfrak{R} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}}}(G), \text{ если группа } \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}}}(G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}, \overline{G_{\mathfrak{F}^n}}}(G) \text{ разрешима;}$$

$$(2) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}, \overline{G_{\mathfrak{F}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^n} \mathfrak{R} = \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}}}(G), \text{ если группа } \tilde{F}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}}}(G) \text{ разрешима.}$$

Утверждение III следствия 2.3.2 теоремы 2.3 учитывает разрешимость подгруппы $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^n}}(G)$,

принадлежащей формации \mathfrak{R}^n согласно утверждению II леммы 2.1 и утверждению (3) леммы 1.1.

Из теоремы 2.3 вытекает следующий результат, ввиду следствия 2.5.1 леммы 2.5 равносильный теореме 2.2 из [7].

Следствие 2.3.3. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа, $G \neq G_{\mathfrak{F}}$. Тогда:

$$(1) \Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \mathfrak{R} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G),$$

если факторгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) / \Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ разрешима;

$$(2) \Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \mathfrak{R} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G),$$

если $\text{Soc}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешим.

В случае $\mathfrak{F} = \{1\}$ из следствия 2.3.3 теоремы 2.3 получаем следующее утверждение: $\Phi(G) = \Phi_{\mathfrak{F}}(G) \subset F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$, если $G \neq 1$, подгруппа $\tilde{F}(G) \cap \Phi_{\mathfrak{F}}(G)$ разрешима; в частности, $\Phi(G) = \Phi_{\mathfrak{F}}(G) \subset F(G) = \tilde{F}(G)$, если подгруппа $\tilde{F}(G)$ неединичной группы G разрешима. Это утверждение вытекает также из следствия 2.3.1 с учётом замечания 2.1(1). Для разрешимой неединичной группы G равенство $\Phi(G) = \Phi_{\mathfrak{F}}(G)$ установлено в [13].

В случае \mathfrak{F} – формация всех нильпотентных групп из следствия 2.3.2 теоремы 2.3 с привлечением следствия 2.5.1 леммы 2.5 получаем утверждение: $\Phi_{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \mathfrak{R}^2 \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(G)$,

если $\Phi_{\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G$, подгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \Phi_{\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ разрешима; в частности, если группа G нильпотентна и подгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(G)$ разрешима, то $\Phi_{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \mathfrak{R}^2 = \tilde{F}_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(G)$. Метанильпотентность пересечения $\Phi_{\mathfrak{F}}(G)$ для разрешимой нильпотентной группы G была установлена в [13].

Следствие 2.3.4. Пусть G – группа. Имеют место следующие утверждения.

I. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_{n-1}$ – непустые радикальные формации, $G \neq G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}$. Тогда:

$$(1) \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}} \mathfrak{R} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G), \text{ если факторгруппа}$$

$$\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) / \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G)$$

разрешима;

$$(2) \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}} \mathfrak{R} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G), \text{ если } \text{Soc}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G)) \text{ разрешим.}$$

II. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, $G \neq G_{\mathfrak{F}}$, n – натуральное число. Тогда:

$$(1) \Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}, \overline{G_{\mathfrak{F}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^n} \mathfrak{R} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}}}(G), \text{ если факторгруппа } \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}, \overline{G_{\mathfrak{F}^n}}}(G) / \Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}}(G) \text{ разрешима;}$$

$$(2) \Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}, \overline{G_{\mathfrak{F}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^n} \mathfrak{R} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}}}(G), \text{ если } \text{Soc}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}^n}}(G)) \text{ разрешим.}$$

Утверждение I следствия 2.3.4 теоремы 2.3 равносильно следствию 2.2.2 теоремы 2.2 [7]

ввиду следствия 2.5.1 леммы 2.5. Следующий результат равносильен теореме 2.3 из [7].

Следствие 2.3.5. Пусть G – группа. Для всякого натурального числа n имеют место следующие утверждения.

(1) Если $G \neq G_{\mathfrak{S}^{n-1}}$, подгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^n}}}(G)$ разрешима, то

$$\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^n} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}}(G).$$

(2) Если $G \neq G_{\mathfrak{S}^{n-1}}$ и подгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}}(G)$ разрешима, то

$$\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^n} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}}(G).$$

Полагая $\theta(G) = \{G\} \cup M^{\mathfrak{R}}(G)$ для любой группы G , из теоремы 2.3, с учётом замечания 2.1, получаем

Следствие 2.3.6. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа, $G \neq G_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{R}}}$. Тогда:

(1) $\Delta_{G_{\mathfrak{S}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{S}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{R}}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{R}}} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}(G)$, если факторгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}(G) \cap \Delta_{G_{\mathfrak{S}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{R}}}}}(G) / \Delta_{G_{\mathfrak{S}}}(G)$ разрешима;

(2) $\Delta_{G_{\mathfrak{S}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{S}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{R}}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^{\mathfrak{R}}} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}(G)$, если $\text{Soc}(G / \Delta_{G_{\mathfrak{S}}}(G))$ разрешим.

Следствие 2.3.7. Пусть G – группа. Имеют место следующие утверждения.

I. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_{n-1}$ – непустые радикальные формации, $G \neq G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}^{\mathfrak{R}}}$. Тогда:

(1) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}^{\mathfrak{R}}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}^{\mathfrak{R}}} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G)$, если факторгруппа

$\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \cap \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}^{\mathfrak{R}}}}}(G) / \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G)$ разрешима;

(2) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}^{\mathfrak{R}}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}^{\mathfrak{R}}} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}}(G)$, если $\text{Soc}(G / \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{n-1}}}(G))$ разрешим.

II. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, $G \neq G_{\mathfrak{F}^{n-1\mathfrak{R}}}$, n – натуральное число. Тогда:

(1) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1\mathfrak{R}}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^{n-1\mathfrak{R}}} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G)$, если факторгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G) \cap \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1\mathfrak{R}}}}}(G) / \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G)$ разрешима;

(2) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1\mathfrak{R}}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^{n-1\mathfrak{R}}} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G)$, если $\text{Soc}(G / \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G))$ разрешим.

Следствие 2.3.7 теоремы 2.3 включает следующий результат.

Теорема 2.4. Пусть G – группа. Для всякого натурального числа n имеют место следующие утверждения.

(1) Если $G \neq G_{\mathfrak{S}^n}$ и подгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}}(G) \cap \Delta_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^n}}}(G)$ разрешима, то

$$\Delta_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^n} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}}(G).$$

(2) Если $G \neq G_{\mathfrak{S}^n}$ и подгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}}(G)$ разрешима, то

$$\Delta_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^n} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}}(G).$$

Следствие 2.4.1. Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда:

(1) если подгруппа $\tilde{F}(G) \cap \Delta_{\tilde{F}}(G)$ разрешима, то $\Delta(G) = \Delta_{\tilde{F}}(G) \subset F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$;

(2) если подгруппа $\tilde{F}(G)$ разрешима, то $\Delta(G) = \Delta_{\tilde{F}}(G) \subset F(G) = \tilde{F}(G)$.

Следствие 2.4.1 вытекает также из следствия 2.3.1 теоремы 2.3 с учётом замечания 2.1(2).

Следствие 2.4.2. Пусть нильпотентная длина разрешимой группы G больше натурального числа n . Тогда

$$\Delta_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^n} = \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}^{n-1}}}}(G).$$

Следствие 2.4.3 [14]. Подгруппа Гашиоца $\Delta(G)$ разрешимой ненильпотентной группы G совпадает с пересечением всех максимальных ненормальных подгрупп группы G , не содержащих её подгруппу Фиттинга $F(G)$.

Выделим случай теоремы 2.4, возникающий при $n = 2$.

Следствие 2.4.4. Пусть группа $G \neq G_{\mathfrak{S}^2}$. Тогда:

(1) если подгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \Delta_{\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{S}^2}}}(G)$ разрешима, то $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{S}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^2} \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(G)$;

(2) если подгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(G)$ разрешима, то

$$\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{S}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^2} = \tilde{F}_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(G).$$

Следствие 2.4.5. Пусть G – разрешимая группа, не являющаяся метанильпотентной. Тогда

$$\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{S}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{S}^2} = \tilde{F}_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(G).$$

Теорема 2.5. Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, G – группа. Имеют место следующие утверждения.

I. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой t_s -функтор. Если $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G) \neq G$, то

$$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}, \overline{F_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}}}(G) \subset \tilde{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}(G).$$

II. Если $G \neq G_{\mathfrak{S}}$, то

$$\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{F}\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}}(G) \subset \tilde{\mathfrak{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}(G).$$

III. Если $G \neq G_{\mathfrak{S}^{\text{gr}}}$, то

$$\Delta_{G_{\mathfrak{S}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{F}\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}}(G) \subset \tilde{\mathfrak{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}(G).$$

Доказательство. I. Так как $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G) \neq G$, то $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G) \subset \tilde{\mathfrak{F}}_{\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}}(G) = \tilde{\mathfrak{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}(G)$ ввиду леммы 2.2 (2). Предположим, что $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G) \subset \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{F}\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}}(G)$. Пусть $N/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G)$, $N \subseteq \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{F}\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}}(G)$. Так как $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{F}\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}}(G) \cap \Phi_{\theta, \overline{\mathfrak{F}\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}}(G)$, то $N \subseteq \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G)$, что противоречит сделанному предположению. Значит, $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{F}\Phi_{G_{\mathfrak{S}}}}}(G)$.

Утверждения II и III вытекают из утверждения I ввиду замечания 2.1. \square

Утверждение I теоремы 2.5 обобщает случай (2) теоремы 2.3, который вытекает из теоремы 2.5 с применением леммы 2.4 (3).

Следствие 2.5.1. Пусть G – группа. Имеют место следующие утверждения.

I. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой t_s -функтор. Если $\Phi_{\theta}(G) \neq G$, то

$$\Phi_{\theta}(G) = \Phi_{\theta, \overline{\mathfrak{F}}}(G) \subset \tilde{\mathfrak{F}}(G).$$

II. Если $G \neq 1$, то $\Phi(G) = \Phi_{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \subset \tilde{\mathfrak{F}}(G)$.

III. Если $G \neq \mathfrak{F}(G)$, то $\Delta(G) = \Delta_{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \subset \tilde{\mathfrak{F}}(G)$.

Следствие 2.5.1 включает результаты работы [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.
2. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. Наука, 2003. – 254 с.
3. Белоконь, Л.М. К вопросу о пересечениях максимальных θ -подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 46–50.
4. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных θ_{π} -подгрупп конечных групп и \mathfrak{S} -абнормально π' -полный подгрупповой t -функтор /

Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 50–58.

5. Бородич, Е.Н. О пересечениях \mathfrak{S} -абнормальных максимальных θ -подгрупп / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич // Весті Нацыянальнай Акадэміі Навук Беларусі. – 2007. – № 3. – С. 47–52.

6. Селькин, М.В. О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / М.В. Селькин, Р.В. Бородич // Вестник СамГУ – Естественнаучная серия. – 2009. – № 8 (74). – С. 67–76.

7. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп, содержащих формационные радикалы / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 36–42.

8. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.

9. Huppert, B. Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1982. – 454 p.

10. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

11. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 256 с.

12. Белоконь, Л.М. Нормальная факторизуемость субнормальной в конечной группе подгруппы в связи с локальными формациями и обобщёнными подгруппами Фраттини. Формационные радикалы / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 25–36.

13. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – № 4 (47). – С. 31–33.

14. Монахов, В.С. Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (27) – С. 81.

15. Васильев, А.Ф. Заметка о пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.В. Сыровкашин // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 62–64.

Поступила в редакцию 12.08.17.

УДК 512.542

О ВЛИЯНИИ k -ПРИМАРНЫХ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП НА СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева^{1,2}, С.В. Балычев¹¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ON THE INFLUENCE OF k -PRIMARY HALL SUBGROUPS ON THE STRUCTURE OF FINITE SOLUBLE GROUPS

T.I. Vasilyeva^{1,2}, S.V. Balychev¹¹F. Scorina Gomel State University²Belarusian State University of Transport, Gomel

Пусть t – натуральное число. В классе конечных разрешимых групп найдены свойства класса всех групп, у которых все k -примарные холловы подгруппы для $k \leq t$ принадлежат наследственной насыщенной формации.

Ключевые слова: разрешимая группа, холлова подгруппа, наследственная формация, насыщенная формация.

Let t be a natural number. In the class of finite soluble groups the properties of the class of all groups whose any k -primary Hall subgroups for $k \leq t$ belong to the saturated formation are found.

Keywords: soluble group, Hall subgroup, hereditary formation, saturated formation.

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечные. Пусть π – некоторое множество простых чисел, π' – дополнение к π в множестве всех простых чисел \mathbb{P} , $|\pi|$ – мощность π , $|G|$ – порядок группы G , $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n , $\pi(G) = \pi(|G|)$. Подгруппа K группы G называется: π -подгруппой, если $\pi(K) \subseteq \pi$; π -холловой, если K – π -подгруппа и $\pi(G : K) \subseteq \pi'$.

Если π состоит из одного простого числа p , то π -холлова подгруппа является силовской p -подгруппой. По известной теореме Силова во всякой группе существуют силовские p -подгруппы, они составляют сопряженный класс подгрупп и для каждой p -подгруппы найдется ее содержащая силовская p -подгруппа. Однако группа может не иметь π -холловых подгрупп, если в π входит 2 и более простых чисел. Например, в знакопеременной группе A_5 на 5 символах нет $\{2,5\}$ -холловых подгрупп.

В 1928 году Ф. Холл [1] в классе всех разрешимых групп расширил теорему Силова до случая π -холловых подгрупп.

Теорема (Ф. Холл [1]). Пусть G – разрешимая группа. Для любого множества простых чисел π справедливы следующие утверждения:

- 1) в G существует π -холлова подгруппа,
- 2) любые две π -холловы подгруппы сопряжены в G ,

3) каждая π -подгруппа содержится в некоторой π -холловой подгруппе из G .

Пусть \mathfrak{F} – некоторый класс групп. Через $C_\pi \mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп, у которых имеется по крайней мере одна π -холлова подгруппа, принадлежащая \mathfrak{F} , и любые две π -холловы подгруппы сопряжены. Из теоремы Ф. Холла следует, что этот класс содержит все разрешимые группы, если \mathfrak{F} совпадает с классом всех групп. В 1975 году Блессеноль [2] установил в классе разрешимых групп, что если \mathfrak{F} – насыщенная формация, то $C_\pi \mathfrak{F}$ является насыщенной формацией. В [3] (см. также [4, гл. IV]) этот результат был распространен на случай π -обобщенных групп. В [5] для произвольной насыщенной формации \mathfrak{F} был получен критерий насыщенности $C_\pi \mathfrak{F}$ в предположении, что $C_\pi \mathfrak{F}$ – формация. Там же был приведен пример, показывающий, что формация $C_\pi \mathfrak{N}$ в общем случае не является насыщенной. Тем самым была опровергнута гипотеза [4, проблемы 19]: пусть π – некоторое множество простых чисел, \mathfrak{F} – насыщенная формация, тогда $C_\pi \mathfrak{F}$ – насыщенная формация. В [6, теорема 1] было доказано, что для любой формации \mathfrak{F} и любого множества простых чисел π класс $C_\pi \mathfrak{F}$ является формацией. В этой же работе были найдены условия, при которых формация $C_\pi \mathfrak{F}$ является p -насыщенной или p -разрешимо насыщенной.

Определение 0.1. Пусть t – натуральное число и \mathfrak{F} – класс групп. Обозначим через $H_t\mathfrak{F}$ следующий класс групп: $H_t\mathfrak{F} = \bigcap C_{\pi_i}\mathfrak{F}$ по всем $\pi_i \subseteq \mathbb{P}$ таким, что $|\pi_i| = t$.

Ясно, что класс $H_t\mathfrak{F}$ наследует свойства $C_{\pi_i}\mathfrak{F}$. Из [6, теорема 1] следует, что $H_t\mathfrak{F}$ является формацией, если \mathfrak{F} – формация.

В тоже время $H_t\mathfrak{F}$ имеет более сильные свойства, чем $C_{\pi_i}\mathfrak{F}$. Например, $H_2\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ – насыщенная формация, а в [5] показано, что формация $C_{\{3,11\}}\mathfrak{N}$ является композиционной, но не является насыщенной.

Возникает задача: изучить свойства класса групп $H_t\mathfrak{F}$ в зависимости от свойств \mathfrak{F} .

В классе всех разрешимых групп, учитывая теорему Ф. Холла, можно для определения 0.1 получить равносильное

Определение 0.2. Пусть t – натуральное число и \mathfrak{F} – класс групп. Тогда $H_t\mathfrak{F}$ – класс разрешимых групп, у которых любая k -примарная холлова подгруппа принадлежит \mathfrak{F} для любого натурального числа $k \leq t$.

Под k -примарной подгруппой группы понимается подгруппа H с $|\pi(H)| = k$, где k – некоторое натуральное число.

В настоящей работе в классе всех разрешимых групп найдены свойства $H_t\mathfrak{F}$, в частности, для наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} класс $H_t\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, установлено ее локальное задание. Рассмотрены классы групп $H_t\mathfrak{F}$ для конкретных формаций \mathfrak{F} .

1 Предварительные результаты

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [4], [7].

Для группы G и простого числа p через $O_p(G)$ обозначается наибольшая нормальная p -подгруппа G , $F_p(G)$ – p -нильпотентный радикал G , т. е. наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа G , 1 – единичная группа (подгруппа).

Будем использовать следующие обозначения: \mathfrak{S} – класс всех разрешимых групп, \mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп, \mathfrak{N} – класс всех nilпотентных групп, \mathfrak{N}_p – класс всех p -групп, \mathfrak{S}_π – класс всех разрешимых π -групп, \mathfrak{A} – класс всех абелевых групп, \mathfrak{A} – класс всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами.

Класс групп \mathfrak{F} называется *наследственным*, если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы; *нормально наследственным*, если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит все ее нормальные подгруппы; *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$; *формацией*, если \mathfrak{F} – гомоморф и из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ ($i=1,2$) всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$; *классом Фиттинга*, если \mathfrak{F} нормально наследственный и \mathfrak{F} содержит всякую группу $G = N_1N_2$, у которой $N_i \trianglelefteq G$ и $N_i \in \mathfrak{F}$ ($i=1,2$). Через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих \mathfrak{F} .

Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Через $G^\mathfrak{F}$ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G , для которой $G/G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$.

Функция $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Через $LF(f)$ обозначен класс всех групп G , у которых $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K и каждого $p \in \pi(H/K)$. Формация \mathfrak{F} называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Локальный экран f называется *внутренним*, если $f(p) \subseteq LF(f)$ для любого простого p . Внутренний локальный экран F формации $LF(f)$ называется *максимальным внутренним локальным*, если для любого ее внутреннего локального экрана f имеет место включение $f(p) \subseteq F(p)$ для любого простого p .

Лемма 1.1 [7, гл. I, лемма 3.2]. Пусть K – π -холлова подгруппа группы G , M , N – нормальные подгруппы из G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- K^g – π -холлова подгруппа в G для любого $g \in G$,
- KN/N – π -холлова подгруппа в G/N ,
- $K \cap N$ – π -холлова подгруппа в N ,
- $(K \cap N)(K \cap M) = K \cap NM$ – π -холлова подгруппа в NM .

Теорема 1.1 [2]. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, H – холлова подгруппа разрешимой группы G . Если $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Теорема 1.2 [4, теорема 4.7]. Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Формация \mathfrak{F} наследственна тогда и только тогда, когда для любого p формация $F(p)$ наследственна.

Предложение 1.1 [7, гл. IV, предложение 3.14]. Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$. Если $f(p)$ наследственная формация для любого p , то \mathfrak{F} наследственная формация.

Лемма 1.2 [4, лемма 4.5]. Пусть f – локальный экран формации \mathfrak{F} . Группа G тогда и только тогда принадлежит \mathfrak{F} , когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.

Теорема 1.3 [4, теорема 3.3]. Локальная формация \mathfrak{F} имеет единственный максимальный внутренний локальный экран F , причем F удовлетворяет следующему условию: $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$ для любого простого p .

Теорема 1.4 [7, гл. IV, теорема 4.6]. Формация является насыщенной тогда и только тогда, когда она является локальной.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

Для непустой формации \mathfrak{F} через $w\mathfrak{F}$ [8] (см. также [9]) обозначается класс всех групп G таких, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в G любая силовская подгруппа \mathfrak{F} -субнормальна.

Лемма 1.3 [8, следствие D.1]. Для класса $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ всех групп с нильпотентным коммутантом класс $w(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Подгруппа H группы G называется \mathbb{P} -субнормальной в G [10], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = G$$

такая, что индекс $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$. Группа, у которой любая силовская подгруппа является \mathbb{P} -субнормальной, называется w -сверхразрешимой. Класс $w\mathfrak{A}$ состоит из всех w -сверхразрешимых групп и образует наследственную насыщенную формацию разрешимых групп [10].

Теорема 1.5 (необходимость [10], достаточность [11]). Группа G является w -сверхразрешимой тогда и только тогда, когда G дисперсивна по Оре и любая ее бипримарная подгруппа сверхразрешима.

2 Свойства класса групп с заданными k -примарными холловыми подгруппами

В разделах 2 и 3 рассматриваются только разрешимые группы, в них слово «группа» означает «разрешимая» группа.

Лемма 2.1. Пусть t – натуральное число. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 – классы групп, причем $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $H_t \mathfrak{F}_1 \subseteq H_t \mathfrak{F}_2$;

2) $H_t \mathfrak{F} \subseteq H_{t-1} \mathfrak{F} \subseteq \dots \subseteq H_1 \mathfrak{F}$ для любого класса групп \mathfrak{F} ;

3) $H_t(H_t \mathfrak{F}) = H_t \mathfrak{F}$ для любого класса групп \mathfrak{F} .

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют из определения 0.2.

3) Пусть $G \in H_t \mathfrak{F}$ и K – ее k -примарная холлова подгруппа, $k \leq t$. Тогда $K \in \mathfrak{F}$. Ясно, что любая k_1 -примарная холлова подгруппа S группы K для $k_1 \leq t$ является k_1 -примарной холловой подгруппой группы G . Поэтому $S \in \mathfrak{F}$ и $K \in H_t \mathfrak{F}$. Это означает, что $H_t \mathfrak{F} \subseteq H_t(H_t \mathfrak{F})$. Обратное включение очевидно. \square

Предложение 2.1. Пусть t – натуральное число, \mathfrak{F} – класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если \mathfrak{F} – наследственный класс, то $\mathfrak{F} \subseteq H_t \mathfrak{F}$ и $H_t \mathfrak{F}$ – наследственный класс;

2) если \mathfrak{F} – нормально наследственный класс, то $H_t \mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс;

3) если \mathfrak{F} – гомоморф, то $H_t \mathfrak{F}$ – гомоморф;

4) если \mathfrak{F} – формация, то $H_t \mathfrak{F}$ – формация;

5) если \mathfrak{F} – класс Фиттинга, то и $H_t \mathfrak{F}$ – класс Фиттинга.

Доказательство. Докажем 1) и 2). Пусть K – подгруппа (нормальная подгруппа) группы $G \in H_t \mathfrak{F}$ и R – k -примарная холлова подгруппа из K , $k \leq t$. По теореме Ф. Холла для $\pi = \pi(R)$ в G существует π -холлова подгруппа P такая, что $R \leq P$. Тогда P – k -примарная холлова подгруппа в $G \in H_t \mathfrak{F}$. По определению 0.2 $P \in \mathfrak{F}$. Если \mathfrak{F} – наследственный (нормально наследственный) класс, то $R \in \mathfrak{F}$. Итак, $K \in H_t \mathfrak{F}$.

3) $G \in H_t \mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$ и T/N – k -примарная холлова подгруппа группы G/N , $k \leq t$. Обозначим $\pi = \pi(T/N)$. По теореме Ф. Холла в T существует π -холлова подгруппа R . Так как $|G/N : T/N|$ и $|T : R|$ являются π' -числами, R – π -холлова подгруппа в G . Ввиду того, что $\pi(R) = \pi(T/N)$, подгруппа R является k -примарной. Из $G \in H_t \mathfrak{F}$ следует, что $R \in \mathfrak{F}$. Поскольку T/N есть π -группа и RN/N – π -холлова подгруппа в T/N , по теореме Ф. Холла $T/N = RN/N$. Из того, что \mathfrak{F} – гомоморф, заключаем $T/N \simeq R/R \cap N \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $G/N \in H_t \mathfrak{F}$.

4) Утверждение следует из [6, теорема 1] и того, что $H_t \mathfrak{F} = \bigcap C_{\pi_i} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ по всем $\pi_i \subseteq \mathbb{P}$ таким, что $|\pi_i| = t$.

5) По 2) $H_t \mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс. Пусть $R = R_1 R_2$, где $R_i \trianglelefteq R$ и $R_i \in H_t \mathfrak{F}$,

$i=1,2$. Пусть $k \leq t$ и K – k -примарная холлова подгруппа группы R . Для $\pi = \pi(K)$ по (d) леммы 1.1 $K = (K \cap R_1)(K \cap R_2)$. Ввиду (с) леммы 1.1 $K \cap R_i$ является π -холловой подгруппой группы R_i , $i=1,2$. Из того, что $K \cap R_i$ – k_i -примарная подгруппа группы $R_i \in \mathcal{H}_i \mathfrak{F}$, где $k_i = |\pi(K \cap R_i)| \leq k$, заключаем $K \cap R_i \in \mathfrak{F}$, $i=1,2$. Так как \mathfrak{F} – класс Фиттинга, $K = (K \cap R_1)(K \cap R_2) \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $R \in \mathcal{H}_i \mathfrak{F}$. \square

Теорема 2.1. Пусть t – натуральное число, $t \geq 2$, \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация и F – её максимальный внутренний локальный экран. Тогда $\mathcal{H}_i \mathfrak{F}$ также является наследственной насыщенной формацией и имеет максимальный внутренний локальный экран H такой, что $H(p) = H_i F(p)$, причем $H(p) \cap \mathfrak{S}_{p'} = H_{t-1}(F(p) \cap \mathfrak{S}_{p'})$, для любого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $H(p) = \emptyset$ для любого $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Ввиду 1) предложения 2.1 и теоремы 1.1 $\mathcal{H}_i \mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.

Обозначим $\mathfrak{H} = LF(H)$, где $H(p) = H_i F(p)$, причем $H(p) \cap \mathfrak{S}_{p'} = H_{t-1}(F(p) \cap \mathfrak{S}_{p'})$ для любого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $H(p) = \emptyset$ для любого $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathcal{H}_i \mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Вначале установим, что $\mathcal{H}_i \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Предположим, что множество $\mathcal{H}_i \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ непусто. Выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как \mathfrak{H} и $\mathcal{H}_i \mathfrak{F}$ – формации, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Ввиду насыщенности \mathfrak{H} подгруппа $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$, $N = G^{\mathfrak{H}} = C_G(N) = F(G)$ – нормальная p -подгруппа из G для некоторого простого p .

Пусть K – k -примарная холлова подгруппа группы M , где $k \leq t-1$. Рассмотрим $R = NK$. Тогда R является либо $(k+1)$ -примарной, либо k -примарной подгруппой. Обозначим $\pi = \pi(R)$. В G имеется π -холлова подгруппа S такая, что $R \leq S$. Так как $G \in \mathcal{H}_i \mathfrak{F}$, подгруппа $S \in \mathfrak{F}$. По лемме 1.2 $S / F_p(S) \in F(p)$. Из $N = C_G(N) \subseteq F_p(S)$ следует, что $O_{p'}(S) = 1$. Следовательно, $F_p(S)$ – p -группа, причем $N \leq F_p(S)$. Из $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$ заключаем, что $S \in F(p)$. Ввиду теоремы 1.2 $F(p)$ – наследственная формация. Поэтому $R \in F(p)$. Таким образом, для $k \leq t-1$ любая k -примарная холлова подгруппа группы M принадлежит $F(p)$. Это означает, что $M \in \mathcal{H}_{t-1} F(p)$.

Если M – p' -группа, то

$$M \in \mathcal{H}_{t-1}(F(p) \cap \mathfrak{S}_{p'}) = H(p) \cap \mathfrak{S}_{p'}.$$

Тогда из $G / C_G(N) \simeq M \in H(p)$ и $G / N \in \mathfrak{H}$ следует, что $G \in \mathfrak{H}$, противоречие с выбором G .

Предположим, что $p \in \pi(M)$. Так как $G \notin \mathfrak{H}$, подгруппа $M \notin H(p) = H_i F(p)$. Тогда в M найдется k -примарная холлова подгруппа T такая, что $T \notin F(p)$, $k \leq t$.

1. Допустим, что $NT \neq G$. Тогда из наследственности $\mathcal{H}_i \mathfrak{F}$, $G \in \mathcal{H}_i \mathfrak{F}$ и выбора G следует, что $NT \in \mathfrak{H}$. По лемме 1.2 $NT / F_p(NT) \in H(p)$. Из $N \subseteq F_p(NT)$ и $N = C_G(N)$ заключаем, что $O_{p'}(NT) = 1$ и $F_p(NT)$ – p -группа. Тогда $NT / F_p(NT) \simeq T / T \cap F_p(NT) \in H(p) = H_i(F(p))$.

Так как $|\pi(T / T \cap F_p(NT))| \leq |\pi(T)| = k \leq t$, $T / T \cap F_p(NT) \in F(p)$. Поэтому $T \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Получили противоречие с $T \notin F(p)$.

2. Допустим, что $NT = G$. Тогда $M = T$ и $|\pi(M)| = |\pi(G)| = k$. Из $G \in \mathcal{H}_i \mathfrak{F}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G / F_p(G) \in F(p)$. Поскольку $F(G) = N = C_G(N) \subseteq F_p(G)$ заключаем, что $F_p(G) = N$. Следовательно, $G / N \simeq M = T \in F(p)$. Это противоречит с $T \notin F(p)$. Итак, $\mathcal{H}_i \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Докажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathcal{H}_i \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{H} \setminus \mathcal{H}_i \mathfrak{F}$ непусто, G – группа наименьшего порядка из этого множества. Тогда в G существует k -примарная холлова подгруппа, которая не принадлежит \mathfrak{F} , $k \leq t$. Ввиду наследственности \mathfrak{H} и выбора G заключаем, что G является k -примарной группой и $G \notin \mathfrak{F}$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как \mathfrak{H} – гомоморф, $G / N \in \mathcal{H}_i \mathfrak{F}$ по выбору G . Ввиду того, что $\mathcal{H}_i \mathfrak{F}$ – насыщенная формация, заключаем, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$ для некоторой максимальной в G подгруппы M , $N = C_G(N) = F(G)$ и N – p -группа для некоторого простого p . Из $G \in \mathfrak{H}$ следует, что $M \simeq G / C_G(N) \in H(p)$.

Если $p \notin \pi(M)$, то M – p' -группа. Поэтому $M \in H(p) \cap \mathfrak{S}_{p'} = \mathcal{H}_{t-1}(F(p) \cap \mathfrak{S}_{p'})$. Из $|\pi(M)| = k-1 \leq t-1$ следует, что $M \in F(p)$.

Пусть $p \in \pi(M)$. Тогда $|\pi(M)| = |\pi(G)| = k$ и $M \in H(p) = H_i F(p)$. Из $k \leq t$ следует, что $M \in F(p)$. Таким образом,

$$G / C_G(N) \simeq M \in F(p).$$

Заметим, что $G/N \in H_i \mathfrak{F}$ по выбору G . Так как $|G/N| < |G|$ и $|\pi(G/N)| \leq k \leq t$, имеем $G/N \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из $G/C_G(N) \in F(p)$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G . Итак, $\mathfrak{H} \subseteq H_i \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = H_i \mathfrak{F}$ и H – локальный экран формации $H_i \mathfrak{F}$.

Из $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и 1) леммы 2.1 заключаем, что H – внутренний экран формации $H_i \mathfrak{F}$.

Докажем равенство $\mathfrak{N}_p H(p) = H(p)$. Ясно, что $H(p) \subseteq \mathfrak{N}_p H(p)$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_p H(p)$, $p \in \mathbb{P}$. Обозначим $T = O_p(G)$. Так как $G/T \in H(p) \neq \emptyset$, число $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому $G/T \in H_i F(p)$. Возьмем k -примарную холлову подгруппу S группы G , $k \leq t$. Тогда $|\pi(ST/T)| = |\pi(S/S \cap T)| \leq k$. Ввиду того, что ST/T является холловой $\pi(S)$ -подгруппой группы G/T , имеем $S/S \cap T \cong ST/T \in F(p)$. Тогда $S \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$, поскольку F – максимальный внутренний экран формации \mathfrak{F} . Значит, $G \in H_i F(p) = H(p)$. Итак, $\mathfrak{N}_p H(p) = H(p)$.

Теперь H является максимальным внутренним локальным экраном $H_i \mathfrak{F}$ ввиду леммы 3.12 из [4]. \square

3 Класс групп $H_i \mathfrak{F}$ для некоторых заданных формаций \mathfrak{F}

Лемма 3.1. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация. Тогда

- 1) $H_1 \mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$,
- 2) если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то $H_1 \mathfrak{F} = \mathfrak{S}$.

Доказательство. Утверждение 1) справедливо ввиду того, что для насыщенной формации $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Утверждение 2) следует из 1), так как $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. \square

Группа G называется *дисперсивной по Оре*, если для

$$\pi_{p_i} = \{p_1, p_2, \dots, p_i\} \subseteq \pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

где $p_1 > p_2 > \dots > p_n$, G имеет нормальную холлову π_{p_i} -подгруппу, $i = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 3.2. Если группа $G \in H_2 \mathfrak{M}$, то G дисперсивна по Оре.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Пусть $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n \mid p_1 > p_2 > \dots > p_n\}$, $n \geq 1$ и P_1 силовская p_1 -подгруппа группы G . Так как $G \in H_2 \mathfrak{M}$, группа G дисперсивна по Оре для $n = 1, 2$. Рассмотрим $n \geq 3$. Пусть $\pi_i = \{p_1, p_i\}$, $i \in \{2, 3, \dots, n\}$. По теореме Ф. Холла в G найдутся холловы π_i -подгруппы S_i такие, что $P_1 \leq S_i$. Из $G \in H_2 \mathfrak{M}$ следует,

что $S_i \in \mathfrak{M}$. Поэтому S_i дисперсивна по Оре и $P_1 \leq S_i$. Ввиду того, что $S_i = P_1 R_i$ для некоторой силовской p_i -подгруппы R_i группы G , заключаем $R_i \subseteq N_G(P_1)$. Тогда

$$G = \langle P_1, R_2, \dots, R_n \rangle \leq N_G(P_1).$$

Значит, $P_1 \leq G$. Так как $|\pi(G/P_1)| = n - 1$, по индукции G/P_1 дисперсивна по Оре, но тогда и G дисперсивна по Оре. \square

Лемма 3.3. Если группа $G \in H_2 \mathfrak{N}$, то G нильпотентна.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Для $|\pi(G)| \leq 2$ группа $G \in \mathfrak{N}$. Пусть $|\pi(G)| > 2$ и p – наибольший простой делитель $|G|$. По лемме 3.2 G имеет нормальную силовскую p -подгруппу P . Так как $G/P \in H_2 \mathfrak{N}$, G/P нильпотентна. Тогда $QP/P \leq G/P$ для любой силовской q -подгруппы Q группы G . Отсюда $QP \leq G$. Из $QP \neq G$ следует нильпотентность QP . Откуда заключаем, что $Q \leq G$. \square

Следствие 3.1. Если группа $G \in H_2 \mathfrak{A}$, то G абелева.

Лемма 3.4. Если группа $G \in H_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Доказательство. Ввиду леммы 1.3 $w(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Теперь доказательство осуществляется проверкой того, что в G любая силовская подгруппа является $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ -субнормальной. \square

Из лемм 3.1–3.3 и свойств класса групп $H_i \mathfrak{F}$ получаются следующие примеры.

$$H_1 \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad H_t \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \quad \text{для } t \geq 2.$$

$$H_1 \mathfrak{N} = \mathfrak{S}, \quad H_t \mathfrak{N} = \mathfrak{N} \quad \text{для } t \geq 2.$$

Ввиду лемм 3.1, 3.2 и теоремы 1.5. получается

Пример 3.1. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, то

$$1) H_1 \mathfrak{M} = \mathfrak{S},$$

$$2) H_2 \mathfrak{M} = w\mathfrak{M}.$$

Подгруппа M группы G называется *модулярной* в G [12], если она является модулярным элементом в решетке всех подгрупп группы, т. е. если выполняются следующие условия:

$$1) \langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z \quad \text{для всех } X \leq G, Z \leq G \text{ таких, что } X \leq Z;$$

$$2) \langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z \quad \text{для всех } Y \leq G, Z \leq G \text{ таких, что } M \leq Z.$$

Подгруппа H группы G называется *субмодулярной* в G [13], если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{s-1} \leq H_s = G$$

такая, что H_{i-1} – модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \dots, s$. Сверхразрешимая группа называется *сильно сверхразрешимой* [14], если в ней любая силовская подгруппа субмодулярна.

В [14] через $s\mathcal{U}$ и $sm\mathcal{U}$ обозначены следующие классы групп: $s\mathcal{U}$ – класс всех сильно сверхразрешимых групп, $sm\mathcal{U}$ – всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами, и исследованы их свойства. В частности, эти классы являются наследственными насыщенными формациями, $sm\mathcal{U}$ – собственный подкласс из $w\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \neq s\mathcal{U}$ и $s\mathcal{U} \neq sm\mathcal{U}$. По [14, теорема D] группа $G \in sm\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда G дисперсивна по Оре и любая ее бипримарная подгруппа сильно сверхразрешима.

Пример 3.2. Если $\mathfrak{F} = sm\mathcal{U}$, то

- 1) $H_1(s\mathcal{U}) = \mathfrak{S}$,
- 2) $H_2(s\mathcal{U}) = sm\mathcal{U}$.

Ввиду лемм 3.1, 3.4 и 1) предложения 2.1 получается

Пример 3.3. Если $\mathfrak{F} = \mathcal{N}\mathcal{A}$, то

- 1) $H_1(\mathcal{N}\mathcal{A}) = \mathfrak{S}$,
- 2) $\mathcal{N}\mathcal{A} \subset H_2(\mathcal{N}\mathcal{A}) \subset \mathcal{N}\mathcal{A}$.

Отметим, что $H_2(\mathcal{N}\mathcal{A}) \neq \mathcal{N}\mathcal{A}$, так как симметрическая группа S_4 на 4 символах принадлежит $\mathcal{N}\mathcal{A}$, но $S_4 \notin H_2(\mathcal{N}\mathcal{A})$.

Заметим, что $\mathcal{N}\mathcal{A} \neq H_2(\mathcal{N}\mathcal{A})$. Это следует из того, что $w\mathcal{U} = H_2\mathcal{U} \subseteq H_2(\mathcal{N}\mathcal{A})$ и группа из примера 1 [10] принадлежит $w\mathcal{U}$, но ее коммутант не является нильпотентным.

Заключение

В работе в классе всех разрешимых групп изучен класс $H_t\mathfrak{F}$ (t – натуральное число) групп, у которых любая k -примарная холлова подгруппа для $k \leq t$ принадлежит заданному классу \mathfrak{F} . В частности, установлено, если \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, то $H_t\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, найдено ее локальное задание. Показано, что рассмотренная конструкция $H_t\mathfrak{F}$ позволяет для конкретных формаций \mathfrak{F} и t получать как известные формации, так и новые.

В классе всех групп возникает следующая

Проблема. Пусть $t \geq 2$. Будет ли $H_t\mathfrak{F}$ насыщенной формацией, если \mathfrak{F} – насыщенная формация?

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.
2. Bleszenohl, D. Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen / D. Bleszenohl // Math. Z. – 1975. – Vol. 142, № 3. – S. 299–300.
3. Слепова, Л.М. О формациях $E^{\mathfrak{F}}$ -групп / Л.М. Слепова // Доклады АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 7. – С. 587–589.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Шеметков, Л.А. Нелокальные формации конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Ф. Васильев // Доклады АН Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 4. – С. 5–8.
6. Вдовин, Е.П. Формации конечных C_π -групп / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин, Л.А. Шеметков // Алгебра и анализ. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 40–52.
7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.
9. Васильев, А.Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.
10. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
11. Monakhov, V.S., Finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniagina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.
12. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
13. Zimmermann, I. Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.
14. Васильев, В.А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.

Поступила в редакцию 27.11.17.

УДК 512.542

ОБ \mathfrak{F} -СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ

С.Ф. Каморников¹, О.Л. Шеметкова²¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины²Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва

ON \mathfrak{F} -SUBNORMAL SUBGROUPS OF A FINITE FACTORISED GROUP

S.F. Kamornikov¹, O.L. Shemetkova²¹F. Scorina Gomel State University²Plekhanov Russian University of Economics, Moscow

Изучаются свойства \mathfrak{F} -субнормальных и σ -субнормальных подгрупп конечной факторизуемой группы.

Ключевые слова: конечная факторизуемая группа, \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа, σ -субнормальная подгруппа, формация, корадикал.

The properties of \mathfrak{F} -subnormal and σ -subnormal subgroups of a finite factorised group are studied.

Keywords: finite factorised group, \mathfrak{F} -subnormal subgroup, σ -subnormal subgroup, formation, residual.

Введение

Известно (см., например, [1]), что подгруппа H , субнормальная в подгруппах A и B конечной группы G , не обязана быть субнормальной в их порождении $\langle A, B \rangle$. В то же время, как показано в [2] (для разрешимой конечной группы G) и в [3] (для произвольной конечной группы G), если подгруппы A и B перестановочны, то из субнормальности подгруппы H в подгруппах A и B следует, что H субнормальна в произведении AB .

В теории классов групп предложенная Виландтом идея транзитивного замыкания нормальности нашла воплощение в понятиях « \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа», « K - \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа» (или « \mathfrak{F} -субнормальная в смысле Кегеля подгруппа»).

Концепция \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы предложена Картером и Хоуксом в 1967 году [4]: Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппа H конечной группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$$

такая, что $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ (множество всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп группы G далее обозначается $sn_{\mathfrak{F}}(G)$).

Простая проверка показывает, что, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, то любая \mathfrak{N} -субнормальная подгруппа группы G

является субнормальной. Более того, для разрешимой конечной группы G справедливо равенство $sn_{\mathfrak{N}}(G) = sn(G)$.

Другое понятие \mathfrak{F} -субнормальности, развивающее идею субнормальности, предложено Кегелем [5]: Если \mathfrak{F} – непустой класс групп, то подгруппа H конечной группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в смысле Кегеля (или просто K - \mathfrak{F} -субнормальной), если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ (множество всех K - \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп группы G обозначается $sn_{K-\mathfrak{F}}(G)$).

Простая проверка показывает, что для любой конечной группы G справедливо равенство $sn_{K-\mathfrak{N}}(G) = sn(G)$. В связи с этим естественно возникает вопрос о нахождении аналога теоремы Майера – Виландта для K - \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп. В классе разрешимых конечных групп этот вопрос получил положительное решение в работе [6]:

Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация групп. Пусть A и B – подгруппы разрешимой конечной группы $G = AB$. Если подгруппа H из пересечения $A \cap B$ является K - \mathfrak{F} -субнормальной в подгруппах A и B , то она K - \mathfrak{F} -субнормальна в G .

Отметим, что для произвольной конечной группы этот результат не верен. Соответствующий пример приведен в [6] (см. также [7]). Несмотря на это подгруппа H из пересечения подгрупп A и B конечной группы $G = AB$ обладает рядом интересных свойств, которые приводятся в данной работе. Главное из этих свойств состоит в том, что если \mathfrak{F} – непустая наследственная формация и подгруппа H является K - \mathfrak{F} -субнормальной в A и B , причем $AB = BA$, то ее \mathfrak{F} -корадикал субнормален в произведении AB . Кроме того, в работе анализируется возможность доказательства аналога теоремы Майера – Виландта для σ -субнормальных подгрупп.

1 Предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [7], [8].

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если \mathfrak{F} – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется \mathfrak{F} -*корадикалом* группы G).

Далее нам понадобится следующая информация о субнормальных и K - \mathfrak{F} -субнормальных подгруппах.

Лемма 1.1 [7, лемма 3.1.2]. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Пусть A, B и N – подгруппы группы G , причем $A \subseteq B$ и подгруппа N нормальна в G . Тогда:

- 1) если подгруппа A является K - \mathfrak{F} -субнормальной в группе G , то она K - \mathfrak{F} -субнормальна в B ;
- 2) если подгруппа A является K - \mathfrak{F} -субнормальной в группе G , то подгруппа HN/N является K - \mathfrak{F} -субнормальной в G/N ;
- 3) если $N \subseteq A$, то подгруппа A является K - \mathfrak{F} -субнормальной в G тогда и только тогда, когда подгруппа A/N является K - \mathfrak{F} -субнормальной в G/N .

Лемма 1.2 [7, лемма 3.1.5]. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Если подгруппа H является K - \mathfrak{F} -субнормальной в группе G , то подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G .

Лемма 1.3 [9, лемма 7.3.16]. Пусть H – субнормальная подгруппа группы G , содержащаяся в максимальной подгруппе A группы G . Тогда $H \subseteq \text{Core}_G(A)$.

Формация \mathfrak{F} называется *решеточной*, если множество всех \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп в любой группе образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы.

Каждая решеточная формация \mathfrak{F} является наследственной формацией Фиттинга [7], т. е. она замкнута относительно взятия подгрупп и, кроме того, из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Из определения класса Фиттинга следует, что в любой группе G существует \mathfrak{F} -радикал $G_{\mathfrak{F}}$, т. е. наибольшая нормальная подгруппа из G , принадлежащая \mathfrak{F} (она совпадает с произведением всех нормальных \mathfrak{F} -подгрупп из G). В дальнейшем мы будем опираться на следующий результат, устанавливающий связь K - \mathfrak{F} -субнормальных \mathfrak{F} -подгрупп группы с ее \mathfrak{F} -радикалом.

Лемма 1.4 [8, лемма 6.3.8]. Пусть \mathfrak{F} – наследственная решеточная формация. Если подгруппа H является K - \mathfrak{F} -субнормальной в группе G и принадлежит формации \mathfrak{F} , то H содержится в \mathfrak{F} -радикале группы G .

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация групп. Пусть A и B – подгруппы группы $G = AB$. Если подгруппа H из пересечения $A \cap B$ является K - \mathfrak{F} -субнормальной в подгруппах A и B , то справедливы следующие утверждения:

- 1) подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в группе G ;
- 2) если подгруппа A максимальна в G , то $H^{\mathfrak{F}} \subseteq \text{Core}_G(A)$;
- 3) если подгруппа A максимальна в G и $\text{Core}_G(A) = 1$, то $H \in \mathfrak{F}$;
- 4) если формация \mathfrak{F} является решеточной, подгруппа A максимальна в G и $\text{Core}_G(A) = 1$, то H содержится в \mathfrak{F} -радикале подгруппы A .

Доказательство. 1) Ввиду леммы 1.2 подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в подгруппах A и B . Тогда ввиду теоремы Виландта из [3] подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в группе G .

2) Ввиду утверждения 1) подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в группе G . Так как подгруппа A максимальна в группе G , то ввиду леммы 1.3 справедливо включение $H^{\mathfrak{F}} \subseteq \text{Core}_G(A)$.

3) Ввиду утверждения 2) справедливо включение $H^{\mathfrak{F}} \subseteq \text{Core}_G(A) = 1$. Следовательно, $H^{\mathfrak{F}} = 1$, а значит, $H \in \mathfrak{F}$.

4) Ввиду утверждения 3) подгруппа H принадлежит формации \mathfrak{F} . Поэтому по лемме 1.4 имеем $H \subseteq A_{\mathfrak{F}}$. \square

Из теоремы 2.1 и леммы 1.1 с учетом теоремы 8.5 из [10] для наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} легко выводится следующий результат. Напомним, что формация \mathfrak{F} называется

насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Теорема 2.2. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация. Пусть A и B – подгруппы группы $G = AB$, имеющей разрешимый \mathfrak{F} -корадикал. Если подгруппа H из пересечения $A \cap B$ является K - \mathfrak{F} -субнормальной в подгруппах A и B , то она K - \mathfrak{F} -субнормальна в G .

Из теоремы 2.1 имеем также, что при анализе K - \mathfrak{F} -субнормальности в группе $G = AB$ подгруппы H , которая содержится в пересечении $A \cap B$ и K - \mathfrak{F} -субнормальна в подгруппах A и B , в предельном случае следует рассматривать примитивную (в частности, простую) группу G .

Проанализируем этот случай, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\sigma$ – формация всех σ -нильпотентных групп и H – σ -субнормальная подгруппа группы G .

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} , т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Следуя [11], будем говорить, что группа G является:

- σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$;
- σ -нильпотентной, если G является σ_i -замкнутой для всех $i \in I$;
- σ -субнормальной, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо группа $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является σ -примарной.

Как отмечено в [10], класс \mathfrak{N}_σ всех σ -нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга. Кроме того, подгруппа H является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда H является K - \mathfrak{N}_σ -субнормальной в группе G .

Следующий пример показывает, что существует нетривиальное разбиение σ , для которого подгруппа H из пересечения $A \cap B$ подгрупп A и B факторизуемой группы $G = AB$ может быть σ -субнормальной в подгруппах A и B , но не σ -субнормальной в G .

Пример 2.1. Пусть $\pi = \{2, 5\}$ и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. Пусть A и B – подгруппы группы $G \cong A_5$ порядка 12 и 10 соответственно. Простая проверка

показывает, что подгруппа $H = A \cap B$ порядка 2 является σ -субнормальной в подгруппах A и B (подгруппа H σ -субнормальна в A , так как H субнормальна в A ; подгруппа H σ -субнормальна в B , так как B является π -группой). Так как группа G проста, то подгруппа H не является σ -субнормальной в G .

Вопрос 2.1. Пусть p – простое число, $\pi = \{p\}$ и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. Пусть A и B – подгруппы группы $G = AB$. Верно ли, что подгруппа H из пересечения $A \cap B$ является σ -субнормальной в G , если она σ -субнормальна в подгруппах A и B ?

ЛИТЕРАТУРА

1. Wielandt, H. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – Vol. 45. – P. 209–244.
2. Maier, R. Um problema da teoria dos subgrupos subnormais / R. Maier // Bol. Soc. Brasil Mat. – 1977. – Vol. 8, № 2. – P. 127–130.
3. Wielandt, H. Subnormalität in faktorisierten endlichen Gruppen / H. Wielandt // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69, № 2. – P. 305–311.
4. Carter, R. The \mathfrak{F} -normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.
5. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.
6. Каморников, С.Ф. \mathfrak{F} -Достижимость в факторизуемых группах / С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 65–67.
7. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Белорус. наука, 2003. – 256 с.
8. Ballester-Bolinches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.
9. Lennox, J.C. Subnormal subgroups of groups / J.C. Lennox, S.E. Stonehewer. – Oxford: Clarendon Press, 1987. – 348 p.
10. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
11. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

Поступила в редакцию 29.12.17.

СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПОТОКОВ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК И С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ

Ю.В. Малинковский¹, Н.Н. Бородин²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

QUEUEING NETWORKS WITH FINITE NUMBER OF FLOWS OF NEGATIVE CUSTOMERS AND WITH LIMITED SOJOURN TIME

Yu.V. Malinkovsky¹, N.N. Borodin²

¹F. Scorina Gomel State University

²P.O. Sukhoi Gomel State Technical University

Рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания с обычными положительными и так называемыми отрицательными заявками. Время пребывания заявок в узлах сети ограничено случайной величиной, условное распределение которой при фиксированном числе заявок в узле является показательным. Заявки, обслуженные в узлах, и заявки, покидающие узлы из-за завершения времени пребывания, могут оставаться положительными, становиться отрицательными или покидать сеть в соответствии с разными матрицами маршрутизации.

Ключевые слова: сеть, отрицательная заявка, ограниченное время пребывания.

The exponential queueing network with the usual positive and so called negative customers is considered. The sojourn time of customers in the network nodes is limited by the random variable which conditional distribution is exponential when customer quality in node is fixed. The customers serviced in nodes and customers leaving the nodes when sojourn time is completed can stay positive, become negative or leave the network in accordance with different routing matrixes.

Keywords: network, negative customer, limited sojourn time.

Введение

Сети массового обслуживания Джексона и Геленбе с ограничениями на время пребывания рассматривались в [1], [2]. В настоящей статье результаты работы [2] обобщаются на сети, в которых может быть несколько отрицательных потоков заявок, вычеркивающих несколько положительных заявок.

1 Изолированный узел

В систему массового обслуживания с единственным экспоненциальным прибором с интенсивностью обслуживания μ поступает $T+1$ независимых пуассоновских потоков заявок: поток обычных, требующих обслуживания положительных заявок с интенсивностью λ^+ , и T потоков отрицательных заявок с интенсивностями $\lambda_1^-, \dots, \lambda_T^-$. Поступающая отрицательная заявка l -го потока мгновенно уничтожает ровно l положительных заявок (при их наличии), и уничтожает все заявки в системе, если их число меньше l , $l = \overline{1, T}$. После этого она мгновенно пропадает вместе с уничтоженными положительными заявками, не оказывая в дальнейшем никакого влияния. Время пребывания положительной заявки в системе ограничено случайной величиной, условное распределение которой (если в системе

находится n положительных заявок) показательное с параметром $\frac{\nu}{n}$. Другими словами, условная вероятность того, что пребывание в системе каждой положительной заявки закончится в промежутке времени $[t, t+h)$, если в момент t в системе находилось n положительных заявок, равна $\frac{\nu}{n}h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$, а условная вероятность завершения пребывания хотя бы одной из этих положительных заявок равна $\nu h + o(h)$. Если положительная заявка поступает в пустую систему, то она сразу начинает обслуживаться (при этом с интенсивностью ν покидает систему, не закончив обслуживание). Для определенности будем предполагать, что заявки обслуживаются в порядке поступления в систему (дисциплина FCFS).

Состоянием системы в момент времени t будем считать количество положительных заявок $n(t)$ в этот момент времени. Очевидно, $n(t)$ – цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний Z_+ . Ее стационарное распределение $\{p(n), n = 0, 1, \dots\}$, если оно существует, удовлетворяет системе уравнений равновесия

для так называемых вертикальных сечений графа переходов цепи:

$$\lambda^+ p(n) = (\mu + \nu)p(n+1) + \sum_{l=1}^T \left(\sum_{s=l}^T \lambda_s^- p(n+l) \right), n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Это однородное разностное уравнение порядка T . Частное решение (1.1) ищем в виде $p(n) = z^n$. Подставляя его в (1.1), получим характеристическое уравнение:

$$g(z) = (\mu + \nu)z + \sum_{l=1}^T \left(\sum_{s=l}^T \lambda_s^- z^l \right) - \lambda^+ z = 0 \quad (1.2)$$

$$= \sum_{s=1}^T \left(\sum_{l=1}^s \lambda_s^- z^l \right) + (\mu + \nu)z - \lambda^+ z = 0.$$

Докажем достаточность условия

$$\rho = \frac{\lambda^+}{\mu + \nu + \sum_{s=1}^T s \lambda_s^-} < 1 \quad (1.3)$$

для эргодичности процесса $n(t)$. Сначала используем теорему Декарта [3]. В (1.2) ровно одна переменная знака при переходе от $(\mu + \nu)$ к λ^+ . Следовательно (1.2) имеет ровно один положительный корень. При этом $g(0) = -\lambda^+ < 0$ и, в силу (1.3), $g(1) = \sum_{s=1}^T s \lambda_s^- + (\mu + \nu) - \lambda^+ > 0$. Поэтому этот корень $z_0 \in (0, 1)$. Значит уравнение равновесия (1.1) имеет решение $p(n) = z_0^n$. С учетом нормировки $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$, получаем:

$$p(n) = (1 - z_0) z_0^n, n = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

Применим эргодическую теорему Фостера [4]. Для того чтобы неприводимая консервативная регулярная цепь Маркова с непрерывным временем была эргодична, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений равновесия имела ненулевое решение такое, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p(n)| < \infty.$$

При выполнении условия (1.3) уравнение (1.2) имеет корень $z_0 \in (0, 1)$, причем (1.4) – частное решение системы уравнений равновесия (1.2). Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z_0) z_0^n = 1.$$

Неприводимость и консервативность цепи $n(t)$ очевидны, а регулярность следует из того, что интенсивность выхода $q(n)$ процесса $n(t)$ из состояния n ограничена [5]. Значит, условие (1.3) достаточно для эргодичности $n(t)$, а при его выполнении эргодическое распределение имеет форму (1.4).

2 Сеть массового обслуживания

Рассматривается сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных экспоненциальных узлов с интенсивностью обслуживания прибором i -го узла $\mu_i, i = \overline{1, N}$, в которую извне поступает $(T + 1)N$ независимых пуассоновских потоков заявок. При этом в i -й узел поступает поток обычных (положительных, требующих обслуживания) заявок с параметром Λ_i и T потоков отрицательных заявок с параметрами $\lambda_{il}, (i = \overline{1, N}, l = \overline{1, T})$ соответственно. Отрицательные заявки не требуют обслуживания. Отрицательная заявка l -го потока при поступлении в i -й узел мгновенно уничтожает ровно l положительных заявок (при их наличии) и уничтожает все заявки в системе, если их число меньше $l, i = \overline{1, N}, l = \overline{1, T}$. После этого она мгновенно пропадает вместе с уничтоженными положительными заявками, не оказывая в дальнейшем никакого влияния. Если отрицательная заявка поступает в узел, свободный от положительных заявок, то она вообще не оказывает влияния на сеть и мгновенно пропадает. Время пребывания положительной заявки в i -ом узле ограничено случайной величиной, условное распределение которой (если в узле находится n_i положительных заявок) пока-

зательное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i}$. Другими словами,

условная вероятность того, что пребывание в i -ом узле каждой положительной заявки закончится в промежутке времени $[t, t + h)$, если в момент t в i -ом узле находилось n_i положительных заявок,

равна $\frac{\nu_i}{n_i} h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$, а условная вероят-

ность завершения пребывания хотя бы одной из этих положительных заявок равна $\nu_i h + o(h)$.

Если положительная заявка поступает в пустой узел, то она сразу начинает обслуживаться (при этом с интенсивностью ν_i покидает узел, не закончив обслуживание). Число мест для ожидания положительных заявок в узлах сети не ограничено. Для определенности будем предполагать, что заявки обслуживаются в узлах в порядке поступления (дисциплина FCFS). Положительная заявка, обслуженная в i -ом узле, мгновенно и независимо от других заявок переходит в j -й узел как положительная с вероятностью p_{ij}^+ и как отрицательная заявка l -го потока отрицательных заявок с вероятностью p_{ijl}^- и покидает сеть с вероятностью $p_{i0} (i, j = \overline{1, N}, l = \overline{1, T})$. При этом

$$\sum_{j=1}^N \left(p_{ij}^+ + \sum_{l=1}^T p_{ijl}^- \right) + p_{i0} = 1 \quad (i = \overline{1, N}).$$

Положительная заявка, время пребывания которой в i -ом узле закончилось, мгновенно и независимо от других заявок переходит в j -й узел как положительная с вероятностью r_{ij}^+ и как отрицательная заявка l -го потока отрицательных заявок с вероятностью r_{ijl}^- и покидает сеть с вероятностью r_{i0} ($i, j = \overline{1, N}, l = \overline{1, T}$). При этом

$$\sum_{j=1}^N \left(r_{ij}^+ + \sum_{l=1}^T r_{ijl}^- \right) + r_{i0} = 1 \quad (i = \overline{1, N}).$$

Состояние сети описывается случайным вектором $\bar{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число положительных заявок в i -ом узле в момент времени t . В силу предпосылок относительно входящих потоков и распределения длительностей обслуживания $\bar{n}(t)$ – многомерная цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $X = Z_+^N$, где $Z_+ = \{0, 1, \dots\}$.

Изолируем i -ый узел от сети, считая, что в него поступают пуассоновские потоки заявок с теми же интенсивностями, с которыми в этот узел поступают заявки соответствующих потоков сети (которые не являются пуассоновскими). Ко всем обозначениям для изолированного узла добавим в качестве первого индекса индекс i , соответствующий номеру узла. Характеристическое уравнение (1.2) с подставленным в него корнем z_{i0} принимает форму тождества

$$(\mu_i + \nu_i)z_{i0} + \sum_{l=1}^T \left(\sum_{s=1}^T \lambda_{is}^- z_{i0}^s \right) - \lambda_i^+ = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.1)$$

Согласно результатам раздела 1, при выполнении условий эргодичности

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^T s \lambda_{is}^-} < 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.2)$$

стационарное распределение изолированного узла имеет форму

$$p_i(n_i) = (1 - z_{i0})z_{i0}^{n_i}, \quad n_i = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

Отсюда вероятность занятости прибора i -го узла в стационарном режиме равна z_{i0} . Значит, интенсивности потоков положительных и отрицательных заявок в рассматриваемой сети удовлетворяют следующей системе уравнений трафика:

$$\lambda_i^+ = \Lambda_i + \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.4)$$

$$\lambda_{il}^- = \lambda_{il} + \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jil}^- + \nu_j r_{jil}^-), \quad (2.5)$$

$$i = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, T}.$$

С помощью теоремы непрерывности неявной функции и теоремы Брауэра о неподвижной точке можно доказать, что существует строго положительное решение системы уравнений трафика (2.4), (2.5).

Если стационарное распределение $p(\bar{n})$ существует, то оно удовлетворяет уравнениям глобального равновесия

$$\begin{aligned} p(\bar{n}) \sum_{i=1}^N \left[\Lambda_i + (\mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^T \lambda_{il}) I_{\{n_i \neq 0\}} \right] = \\ = \sum_{i=1}^N \left\{ p(\bar{n} - \bar{e}_i) \Lambda_i I_{\{n_i \neq 0\}} + \right. \\ \left. + p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} + \lambda_{i1} + \right. \\ \left. + (\lambda_{i2} + \dots + \lambda_{iT}) I_{\{n_i = 0\}}] + \right. \\ \left. + \sum_{l=2}^T p(\bar{n} + l\bar{e}_i) [\lambda_{il} + (\lambda_{il+1} + \dots + \lambda_{iT}) I_{\{n_i = 0\}}] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N \left[p(\bar{n} + \bar{e}_j - \bar{e}_i) (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) I_{\{n_i \neq 0\}} + \right. \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^T p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i) (\mu_j (p_{jil}^- + (p_{jil+1}^- + \dots + p_{jiT}^-) I_{\{n_i = 0\}}) + \right. \\ \left. + \nu_j (r_{jil}^- + (r_{jil+1}^- + \dots + r_{jiT}^-) I_{\{n_i = 0\}}) + \right. \\ \left. + p(\bar{n} + \bar{e}_j) (\mu_j (p_{jil}^- + \dots + p_{jiT}^-) + \right. \\ \left. + \nu_j (r_{jil}^- + \dots + r_{jiT}^-)) I_{\{n_i = 0\}} \right] \left. \right\}, \quad \bar{n} \in Z_+^N. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь \bar{e}_i – единичный вектор i -го направления, I_A – индикатор события A , равный единице, если событие A происходит, и нулю, если происходит противоположное событие.

Покажем, что при выполнении условия эргодичности (2.2) вероятности, задаваемые формулой

$$p(\bar{n}) = \prod_{i=1}^N p_i(n_i), \quad \bar{n} \in Z_+^N, \quad (2.7)$$

где $p_i(n_i)$ определены равенством (2.3), удовлетворяют уравнениям глобального равновесия (2.6).

Разобьем (2.6) на уравнения локального равновесия. Первое уравнение получается, если подставить $I_{\{n_i = 0\}} = 1 - I_{\{n_i \neq 0\}}$ и приравнять слева и справа части, содержащие множитель $I_{\{n_i \neq 0\}}$, а второе уравнение получается, если приравнять части, не содержащие этот множитель. В результате получим:

$$\begin{aligned} p(\bar{n}) \sum_{i=1}^N \left[(\mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^T \lambda_{il}) \right] = \\ = \sum_{i=1}^N \left\{ p(\bar{n} - \bar{e}_i) \Lambda_i - p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\lambda_{i2} + \dots + \lambda_{iT}] - \right. \\ \left. - \sum_{l=2}^T p(\bar{n} + l\bar{e}_i) [\lambda_{il+1} + \dots + \lambda_{iT}] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N \left[p(\bar{n} + \bar{e}_j - \bar{e}_i) (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) - \right. \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^T p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i) (\mu_j (p_{jil+1}^- + \dots + p_{jiT}^-) + \right. \\ \left. + \nu_j (r_{jil+1}^- + \dots + r_{jiT}^-)) - \right. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 & -p(\bar{n} + \bar{e}_j)(\mu_j(p_{j1}^- + \dots + p_{jT}^-) + \\
 & + \nu_j(r_{j1}^- + \dots + r_{jT}^-)) \Big], \bar{n} \in Z_+^N \\
 & p(\bar{n}) \sum_{i=1}^N \Lambda_i = \\
 = & \sum_{i=1}^N \left\{ p(\bar{n} + \bar{e}_i)[\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} + \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \dots + \lambda_{iT}] + \right. \\
 & \left. + \sum_{l=2}^T p(\bar{n} + l\bar{e}_i)[\lambda_{il} + \lambda_{i,l+1} + \dots + \lambda_{iT}] + \right. \quad (2.9) \\
 & \left. + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^T p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i)(\mu_j(p_{j1}^- + p_{j2}^- + \dots + p_{jT}^-) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \nu_j(r_{j1}^- + r_{j2}^- + \dots + r_{jT}^-)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + p(\bar{n} + \bar{e}_j)(\mu_j(p_{j1}^- + \dots + p_{jT}^-) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \nu_j(r_{j1}^- + \dots + r_{jT}^-)) \right] \right\}, \bar{n} \in Z_+^N.
 \end{aligned}$$

Разобьем (2.8) на более детальные уравнения локального равновесия, приравнявая соответствующие слагаемые в суммах слева и справа:

$$\begin{aligned}
 & p(\bar{n}) \left(\mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^T \lambda_{il} \right) = \\
 = & p(\bar{n} - \bar{e}_i) \Lambda_i - p(\bar{n} + \bar{e}_i)[\lambda_{i2} + \dots + \lambda_{iT}] - \\
 & - \sum_{l=2}^T p(\bar{n} + l\bar{e}_i)[\lambda_{il+1} + \dots + \lambda_{iT}] + \quad (2.10) \\
 & + \sum_{j=1}^N \left[p(\bar{n} + \bar{e}_j - \bar{e}_i)(\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) - \right. \\
 & \left. - \sum_{l=1}^T p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i)(\mu_j(p_{j1}^- + \dots + p_{jT}^-) + \right. \\
 & \left. + \nu_j(r_{j1}^- + \dots + r_{jT}^-)) - \right. \\
 & \left. - p(\bar{n} + \bar{e}_j)(\mu_j(p_{j1}^- + \dots + p_{jT}^-) + \right. \\
 & \left. + \nu_j(r_{j1}^- + \dots + r_{jT}^-)) \right], \bar{n} \in Z_+^N, i = \overline{1, N}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, всякое решение уравнений (2.9), (2.10) является решением уравнений глобального равновесия (2.6).

Проверим (2.10). Разделив (2.10) на $p(\bar{n})$, подставляя в полученное равенство (2.7) и используя характеристическое уравнение (2.1), уравнения трафика (2.4)–(2.5), получим:

$$\begin{aligned}
 \mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^T \lambda_{il} &= \frac{\Lambda_i}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1} \sum_{s=l+1}^T z_{i0}^l \lambda_{is} + \\
 & + \frac{1}{z_{i0}} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) - \\
 & - \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^{T-1} z_{j0} z_{i0}^l (\mu_j(p_{j1}^- + \dots + p_{jT}^-) + \right. \\
 & \left. + \nu_j(r_{j1}^- + \dots + r_{jT}^-)) + \right. \\
 & \left. + z_{j0}(\mu_j(p_{j1}^- + \dots + p_{jT}^-) + \nu_j(r_{j1}^- + \dots + r_{jT}^-)) \right] = \\
 & = \frac{\Lambda_i}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1} \sum_{s=l+1}^T z_{i0}^l \lambda_{is} + \frac{\lambda_i^+ - \Lambda_i}{z_{i0}} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{l=1}^{T-1} z_{i0}^l \sum_{j=1}^N z_{j0} \left(\mu_j \sum_{s=l+1}^T p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=l+1}^T r_{jis}^- \right) - \\
 & - \sum_{j=1}^N z_{j0} \left(\mu_j \sum_{s=1}^T p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=1}^T r_{jis}^- \right) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1} \sum_{s=l+1}^T z_{i0}^l \lambda_{is} - \\
 & - \sum_{l=1}^{T-1} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^T \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) - \\
 & - \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1} \sum_{s=l+1}^T z_{i0}^l \lambda_{is} - \\
 & - \sum_{l=1}^{T-1} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^T (\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) - \sum_{s=1}^T (\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1} \sum_{s=l+1}^T z_{i0}^l \lambda_{is} - \frac{1}{z_{i0}} \sum_{l=2}^T z_{i0}^l \sum_{s=l}^T \lambda_{is}^- + \\
 & + \sum_{l=1}^{T-1} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^T \lambda_{is} - \sum_{s=1}^T (\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \frac{1}{z_{i0}} \left(\lambda_i^+ - (\mu_i + \nu_i) z_{i0} - z_{i0} \sum_{s=1}^T \lambda_{is}^- \right) - \\
 & - \sum_{s=1}^T (\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) = \mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^T \lambda_{is},
 \end{aligned}$$

т. е. (2.10) выполняется.

Лемма 2.1. При выполнении уравнений трафика (2.4)–(2.5) будет иметь место тождество:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N z_{i0} (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) = \\
 = & \sum_{i=1}^N \left(\Lambda_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^T (\lambda_{il} - \lambda_{il}^-) + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) \right). \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Доказательство получается суммированием (2.5) по $l = \overline{1, T}$, затем полученное уравнение вместе с (2.6) суммируются по $i = \overline{1, N}$. Так же учитываем, что

$$\begin{aligned}
 p_{i0} &= 1 - \sum_{j=1}^N \left(p_{ij}^+ + \sum_{l=1}^T p_{ijl}^- \right), \\
 r_{i0} &= 1 - \sum_{j=1}^N \left(r_{ij}^+ + \sum_{l=1}^T r_{ijl}^- \right), \quad (i = \overline{1, N}).
 \end{aligned}$$

Проверим (2.9). Разделив (2.9) на $p(\bar{n})$, подставляя в полученное равенство (2.7) и используя характеристическое уравнение (2.1), уравнения трафика (2.4)–(2.5), а также (2.11), получим:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \Lambda_i = \\
 = & \sum_{i=1}^N \left\{ z_{i0} [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} + \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \dots + \lambda_{iT}] + \right. \\
 & \left. + \sum_{l=2}^T z_{i0}^l [\lambda_{il} + \lambda_{i,l+1} + \dots + \lambda_{iT}] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^T z_{j0} z_{i0}^l (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots + p_{jiT}^-) + \right. \\
 & \quad + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots + r_{jiT}^-)) + \\
 & \quad + z_{j0} (\mu_j (p_{jil}^- + \dots + p_{jiT}^-) + \\
 & \quad \left. + \nu_j (r_{jil}^- + \dots + r_{jiT}^-)) \right] = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ z_{i0} [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}] + \sum_{l=1}^T z_{i0}^l \sum_{s=1}^T \lambda_{is} + \right. \\
 & \quad + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^T z_{j0} z_{i0}^l (\mu_j \sum_{s=1}^T p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=1}^T r_{jis}^-) + \right. \\
 & \quad \left. + z_{j0} \left(\mu_j \sum_{s=1}^T p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=1}^T r_{jis}^- \right) \right] \Big\} = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^T (\lambda_{il} - \lambda_{il}^-) + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) + \right. \\
 & \quad + \sum_{l=1}^T z_{i0}^l \sum_{s=1}^T \lambda_{is} + \sum_{l=1}^T z_{i0}^l \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) + \\
 & \quad \left. + \sum_{s=1}^T \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) \right\} = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^T (\lambda_{il} - \lambda_{il}^-) + \right. \\
 & \quad + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) + \sum_{l=1}^T z_{i0}^l \sum_{s=1}^T \lambda_{is} + \\
 & \quad \left. + \sum_{l=1}^T z_{i0}^l \sum_{s=1}^T (\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) + \sum_{s=1}^T (\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) \right\} = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda_i - \lambda_i^+ + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) + \sum_{l=1}^T z_{i0}^l \sum_{s=1}^T \lambda_{is}^- \right\} = \sum_{i=1}^N \Lambda_i,
 \end{aligned}$$

т. е. (2.9) также выполняется. Теперь воспользуемся одним из вариантов эргодической теоремы Фостера [4], который гласит, что для эргодичности неприводимой консервативной регулярной цепи Маркова с непрерывным временем достаточно существования нетривиального решения $\{p(\vec{n}), \vec{n} \in X\}$ уравнений глобального равновесия такого, что ряд $\sum_{\vec{n} \in X} p(\vec{n})$ абсолютно сходится.

При этом нормированное решение и будет эргодическим распределением. Неприводимость и консервативность цепи $\vec{n}(t)$ очевидны. Поскольку интенсивности выхода из состояний

$$q(\vec{n}) \leq \sum_{i=1}^N \left[\Lambda_i + \mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^T \lambda_{il} \right]$$

ограничены по \vec{n} , то цепь регулярна. Мы показали, что (2.7) является нетривиальным решением уравнений глобального равновесия (2.6). При выполнении условий эргодичности (2.2) ряд $\sum_{\vec{n} \in X} p(\vec{n})$ сходится

как произведение рядов, представляющих суммы геометрических прогрессий со знаменателями

$z_{i0} \in (0,1), i = \overline{1, N}$. При этом найденное решение уравнений глобального равновесия удовлетворяет условию нормировки, поскольку ему удовлетворяют множители $p_i(n_i)$. Следовательно, оно и будет эргодическим распределением. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. При выполнении условий (2.2) цепь Маркова $\vec{n}(t)$ эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения (2.7) с множителями (2.3), где $z_{i0} \in (0,1), i = \overline{1, N}$ – корни уравнений (2.1), а $\{\lambda_i^+, \lambda_{il}^-, i = \overline{1, N}, l = \overline{1, T}\}$ – решение системы уравнений трафика (2.4)–(2.5).

Заключение

В настоящей работе исследовалась сеть массового обслуживания с однолинейными узлами, в которую извне помимо обычных потоков положительных заявок поступает несколько потоков отрицательных заявок. Время пребывания положительных заявок в узлах ограничено случайной величиной. Обслуженные в узлах заявки и заявки, не дождавшиеся обслуживания из-за окончания времени пребывания, переходят в узлы в соответствии с разными матрицами маршрутизации. Возможность варьирования матрицами маршрутизации позволяет учитывать самые разнообразные практические ситуации и снижать необходимым образом нагрузку в узлах сети. Для таких сетей получены условия эргодичности и найдено стационарное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Malinkovski, Yu.V.* Jackson Networks with Single-Line Nodes and Limited Sojourn or Waiting Times / Yu.V. Malinkovski // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, № 4. – P. 603–612.
2. *Malinkovskii, Yu.V.* Stationary Probability Distribution for States of G-Networks with Constrained Sojourn Time / Yu.V. Malinkovskii // Automation and Remote Control. – 2017. – Vol. 78, № 10. – P. 1856–1865.
3. *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
4. *Бочаров, П.П.* Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин – М.: РУДН, 1995. – 529 с.
5. *Гихман, И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
6. *Gelenbe, E.* Product-form Queuing Networks with Negative and Positive Customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

Поступила в редакцию 26.01.18.

УДК 512.542

**О СВЕРХРАЗРЕШИМОМ КОРАДИКАЛЕ
ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП**

В.С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

**ON THE SUPERSOLUBLE RESIDUAL
OF MUTUALLY PERMUTABLE PRODUCTS**

V.S. Monakhov

F. Scorina Gomel State University

Доказывается, что если группа $G = AB$ является произведением взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B , то сверхразрешимый корадикал группы G совпадает с нильпотентным корадикалом коммутанта G' .

Ключевые слова: конечная группа, сверхразрешимая подгруппа, взаимно перестановочные подгруппы, корадикал.

We prove that if a group $G = AB$ is the mutually permutable product of the supersoluble subgroups A and B , then the supersoluble residual of G coincides with the nilpotent residual of the derived subgroup G' .

Keywords: finite group, supersoluble subgroup, mutually permutable product, residual.

1 Preliminaries

All groups in this paper are finite. Formations of all abelian, nilpotent and supersoluble groups is denoted by \mathfrak{A} , \mathfrak{N} and \mathfrak{U} respectively. If \mathfrak{F} is a formation and G is a group, then $G^{\mathfrak{F}}$ is the \mathfrak{F} -residual of G , i. e., the smallest normal subgroup of G with quotient in \mathfrak{F} . If \mathfrak{X} and \mathfrak{F} are hereditary formations, then, according to [1, p. 337–338], the product

$$\mathfrak{X}\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\}$$

is also a hereditary formation. A Fitting class which is also a formation is called a Fitting formation.

We need the following lemmas.

Lemma 1.1 [2, 4.8]. *Let $G = AB$ be the product of two subgroups A and B . Then*

- (1) $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle \triangleleft G$;
- (2) if $A_1 \triangleleft A$, then $A_1[A, B] \triangleleft G$;
- (3) $G' = A'B'[A, B]$.

Lemma 1.2 [1, IV.11.7]. *Let \mathfrak{F} and \mathfrak{H} be formations, G be a group and $K \triangleleft G$. Then*

- (1) $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$;
- (2) $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$;
- (3) if $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, then $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{H}}$.

If H is a subgroup of a group G , then H^G denotes the smallest normal subgroup of G containing H .

Lemma 1.3 [2, 5.31]. *Let H be a subnormal subgroup of a group G . If H belongs to a Fitting class \mathfrak{F} , then $H^G \in \mathfrak{F}$. In particular,*

- (1) if H is nilpotent, then H^G is also nilpotent;

(2) if H is p -nilpotent, then H^G is also p -nilpotent.

Lemma 1.4. *Let $G = AB$ be the product of the supersoluble subgroups A and B . Then $G^{\mathfrak{U}} \leq [A, B]$.*

Proof. By Lemma 1.1 (1,3) and Lemma 1.2 (1),

$$\begin{aligned} (G/[A, B])' &= G'[A, B]/[A, B] = \\ &= A'B'[A, B]/[A, B] = \\ &= (A'[A, B]/[A, B])(B'[A, B]/[A, B]). \end{aligned}$$

The subgroups

$$\begin{aligned} (A'[A, B])/[A, B] &= A'/(A' \cap [A, B]), \\ (B'[A, B])/[A, B] &= B'/(B' \cap [A, B]) \end{aligned}$$

are nilpotent [3, VI.9.1] and normal in $G/[A, B]$ by Lemma 1.1 (3), so $(G/[A, B])'$ is nilpotent. By Lemma 1.1 (3), $A[A, B]$ and $B[A, B]$ are normal in G . In view of the Baer Theorem [4], $G/[A, B]$ is supersoluble. Hence, $G^{\mathfrak{U}} \leq [A, B]$. \square

Lemma 1.5 [1, II.2.12]. *Let \mathfrak{X} be a Fitting formation, and let $G = AB$ be the product of normal subgroups A and B . Then $G^{\mathfrak{X}} = A^{\mathfrak{X}}B^{\mathfrak{X}}$.*

2 On the \mathfrak{U} -residual of mutually permutable product

A group $G = AB$ is called the mutually permutable product of subgroups A and B if $UB = BU$ and $AV = VA$ for all $U \leq A$ and $V \leq B$. Such groups were studied in [5]–[8], see also [9].

We prove the following theorem.

Theorem 2.1. *Let $G = AB$ be the mutually permutable product of the supersoluble subgroups A and B . Then $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}} = [A, B]^{\mathfrak{N}}$.*

Proof. By Lemma 1.4, $G^{\mathfrak{U}} \leq [A, B]$. Since $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ [3, VI.9.1], by Lemma 1.2 (2,3), we have $G^{(\mathfrak{N}\mathfrak{N})} = (G^{\mathfrak{N}})^{\mathfrak{N}} = (G')^{\mathfrak{N}} \leq G^{\mathfrak{U}}$.

Verify the reverse inclusion. Since $(G / (G')^{\mathfrak{N}})' = G'(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}} = G' / (G')^{\mathfrak{N}}$

is nilpotent,

$G / (G')^{\mathfrak{N}} = A(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}} \cdot B(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}}$ is supersoluble in view of [5, Theorem 3.8] and $G^{\mathfrak{U}} \leq (G')^{\mathfrak{N}}$. Thus, $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$.

By Lemma 1.1 (3),

$$G' = A'B'[A, B] = (A')^G(B')^G[A, B].$$

The subgroups A' and B' are subnormal in G by [8, Theorem 1] and nilpotent, therefore $(A')^G(B')^G$ is normal in G and nilpotent by Lemma 1.3 (1). In view of Lemma 1.5 with $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, we get

$$G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}} = ((A')^G(B')^G)^{\mathfrak{N}}[A, B]^{\mathfrak{N}} = [A, B]^{\mathfrak{N}}. \quad \square$$

Corollary 2.1.1 *Let $G = AB$ be the mutually permutable product of the supersoluble subgroups A and B . If $[A, B]$ is nilpotent, then G is supersoluble.*

The class of all p -nilpotent groups coincides with the product $\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p$, where \mathfrak{N}_p is the class of all p -groups and \mathfrak{E}_p is the class of all p' -groups. A group G is p -supersoluble if all chief factors of G having order divisible by the prime p are exactly of order p . The derived subgroup of a p -supersoluble group is p -nilpotent [3, VI.9.1. (a)]. The class of all p -supersoluble groups is denoted by $p\mathfrak{U}$. It's clear that $\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p \subseteq p\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_p$.

Theorem 2.2. *Let $G = AB$ be the mutually permutable product of the p -supersoluble subgroups A and B . Then $G^{p\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} = [A, B]^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p}$.*

Proof. By Lemma 1.2,

$$(G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} = (G^{\mathfrak{N}})^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} = G^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}} \leq G^{p\mathfrak{U}}.$$

Verify the reverse inclusion. The quotient group

$$\begin{aligned} G / (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} &= \\ &= (A(G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} / (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p})(B(G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} / (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p}) \end{aligned}$$

is the mutually permutable product of the p -supersoluble subgroups $A(G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} / (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p}$ and $B(G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} / (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p}$. The derived subgroup

$$\begin{aligned} (G / (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p})' &= G'(G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} / (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} = \\ &= G' / (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} \end{aligned}$$

is p -nilpotent. By [8, Corollary 5], $G / (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p}$ is p -supersoluble, consequently, $G^{p\mathfrak{U}} \leq (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p}$. Thus, $G^{p\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p}$.

By Lemma 1.1 (3),

$$G' = A'B'[A, B] = (A')^G(B')^G[A, B].$$

The subgroups A' and B' are subnormal in group G [8, Theorem 1] and p -nilpotent [3, VI.9.1 (a)], hence $(A')^G(B')^G$ normal in G and p -nilpotent by Lemma 1.3 (2). In view of Lemma 1.5 with $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p$, we get

$$\begin{aligned} G^{p\mathfrak{U}} &= (G')^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} = \\ &= ((A')^G(B')^G)^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p}[A, B]^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p} = [A, B]^{\mathfrak{E}_p \mathfrak{N}_p}. \quad \square \end{aligned}$$

Corollary 2.2.1. *Let $G = AB$ be the mutually permutable product of the p -supersoluble subgroups A and B . If $[A, B]$ is p -nilpotent, then G is p -supersoluble.*

REFERENCES

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 892 p.
2. Monakhov, V. S. Introduction to the Theory of Finite Groups and their Classes / V.S. Monakhov. – Minsk: Vyshejschaja shkola, 2006. – 207 p.
3. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 796 p.
4. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
5. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
6. Alejandre, M.J. Permutable products of supersoluble groups / M.J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey // J. Algebra – 2004. – Vol. 276. – P. 453–461.
7. Ballester-Bolinches, A. On products of supersoluble groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M.C. Pedraza-Aguilera // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.
8. Beidleman, J.C. Mutually permutable subgroups and group classes / J.C. Beidleman, H. Heinen // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 18–30.
9. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

Поступила в редакцию 12.06.17.

УДК 517.538.52+517.538.53

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.В. Сидорцов, А.А. Драпеза, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SPEED OF CONVERGENCE OF QUADRATIC HERMITE – PADÉ APPROXIMATIONS CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

M.V. Sidortsov, A.A. Drapeza, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

Найдена скорость сходимости (в том числе и недиагональных) квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода системы $\{ {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) \}_{j=1}^2$, состоящей из двух вырожденных гипергеометрических функций, в случае, когда $\{\lambda_j\}_{j=1}^2$ – произвольные различные комплексные числа, а $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Доказанные теоремы дополняют и обобщают результаты, полученные ранее другими авторами.

Ключевые слова: интегралы Эрмита, многочлены Эрмита – Паде, ряды Тейлора, аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства.

The speed of convergence (including non-diagonal) of quadratic Hermite – Padé approximations of the system of the second kind $\{ {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) \}_{j=1}^2$, is found. It consists of two degenerate hypergeometric functions when $\{\lambda_j\}_{j=1}^2$ are arbitrary distinct complex numbers, and $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. These proved theorems supplement and generalize the results obtained earlier by other authors.

Keywords: Hermite integrals, Hermite – Padé polynomials, Taylor series, Hermite – Padé approximations, asymptotic equality.

Введение

Предполагая, что параметр $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, рассмотрим набор целых функций

$$F_\gamma^j(z) = {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (0.1)$$

где $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа, не равные нулю (при $k=1$ считаем, что $\lambda_1 = 1$). Ряды вида (0.1) принято называть вырожденными гипергеометрическими рядами, а их суммы – вырожденными гипергеометрическими функциями. Определим вектор-функцию

$$\vec{F}_\gamma = \{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z), \dots, F_\gamma^k(z)\}.$$

Если $\gamma = 1$, то вектор \vec{F}_1 является упорядоченным набором экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$.

Для вектор-функции $\vec{f} = \{f_j(z)\}_{j=1}^k$ с голоморфными в нуле координатными функциями $f_j(z)$, существуют (см. [1, гл. 4, §1]) многочлены $Q_m(z) = Q_m(z; \vec{f})$, $P_n^j(z) = P_n^j(z; \vec{f})$, $j = 1, 2, \dots, k$; $\deg Q_m \leq m$, $\deg P_n^j \leq n_j$, для которых в некоторой окрестности нуля

$$R_{n,m}^j(z) = R_{n,m}^j(z; \vec{f}) = Q_m(z) f_j(z) - P_n^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \dots \quad (0.2)$$

Здесь и далее $m = \sum_{i=1}^k m_i$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, а n, m_1, \dots, m_k – целые неотрицательные числа. В частности, если $k=1$, то \vec{f} является функцией $f(z) := f_1(z)$, соответствующие многочлены $Q_m(z)$, $P_n(z) := P_n^1(z)$ определяются с точностью до мультипликативной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z, f) = P_n(z) / Q_m(z)$, которую называют аппроксимацией Паде функции f . При $k \geq 2$ дроби

$$\pi_{n_j, m}^j(z) = \pi_{n_j, m}^j(z; \vec{f}) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

условиями (0.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае, если вектор $\vec{\pi}_{n,m} = \{\pi_{n_j, m}^j(\vec{f})\}_{j=1}^k$ определяется однозначно, то его координатные функции называются аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода (совместными аппроксимациями Паде), а многочлены $Q_m(z)$, $P_n^j(z)$ – многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для $\vec{f} = \{f_j(z)\}_{j=1}^k$. Диагональному

случаю соответствует набор индексов при $n = m_1 = \dots = m_k$.

Вектор $\vec{\pi}_{n,m}$ определяется единственным образом, например, для совершенных систем функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^k$ (см. [1, гл. 4, § 1]). В частности, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю комплексные числа, то система экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ является совершенной. Без формального определения этот факт был установлен Эрмитом [2]. При доказательстве трансцендентности числа e им, в частности, были получены интегральные представления для многочленов $Q_m(z; \vec{F}_1)$, $P_n^j(z; \vec{F}_1)$. Немного позже Паде [4, гл. 3, § 1.1] нашёл явные выражения для числителей и знаменателей дробей $\pi_{n,m}(z, f)$ в детерминантной форме. Представления Эрмита и Паде послужили отправной точкой для многих исследований (см., например, работу К. Малера [3], монографии [1], [4], [5], тематические обзоры и статьи [6]–[15]).

В данной работе при $k = 2$ получен ряд новых результатов, описывающих асимптотическое поведение аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода вектор-функции \vec{F}_γ при произвольном комплексном $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Некоторые из них являются новыми и в случае, когда $\gamma = 1$, и дают ответ на следующий вопрос. Перрон [16] при $k = 1$, А.И. Аптекарев [17] при $k > 1$ показали, что при $n + m \rightarrow \infty$ дроби $\pi_{n,m}^j(z; \vec{F}_1)$ сходятся к $e^{\lambda_j z}$ равномерно на компактах в \mathbb{C} . За исключением очень частных случаев (см. [18]–[20]), до сих пор не известно, какова скорость этой сходимости.

Для $k = 1$ и $f(z) = F_\gamma(z) = {}_1F_1(1, \gamma; z)$ явные выражения для остаточной функции $R_{n,m}(z; F_\gamma)$ и знаменателя $Q_m(z; F_\gamma)$ найдены Ван Россумом [21]: при $n \geq m - 1$

$$Q_m(z; F_\gamma) = {}_1F_1(-m, -n - m - \gamma; -z), \quad (0.3)$$

$$R_{n,m}(z; F_\gamma) := Q_m(z)F_\gamma(z) - P_n(z) = \frac{(-1)^m m! z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} {}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z). \quad (0.4)$$

Напомним, что

$${}_1F_1(\alpha, \beta; z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p} \frac{z^p}{p!}.$$

Де Брюен [22], опираясь на равенства (0.3) и (0.4), доказал, что при $n + m \rightarrow \infty$ дроби $\pi_{n,m}(z; F_\gamma)$ равномерно сходятся к F_γ на компактах в \mathbb{C} . Скорость этой сходимости установлена в [23]: при $n \geq m - 1$ и $n + m \rightarrow \infty$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) =$$

$$= (-1)^m \frac{m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (0.5)$$

В [23] предполагается, что $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Однако предложенный в [23] метод доказательства позволяет обосновать равенство (0.5) и в случае, когда $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Здесь и далее в аналогичных равенствах предполагается, что оценка $o(1)$ равномерна по z на компактах в \mathbb{C} . При $\gamma = 1$ равенство (0.5) ранее было доказано Д. Браессом [24].

Многомерный случай ($k \geq 2$) исследовался в [25]. В этой работе установлено, что при фиксированном $k \geq 1$ в предположении, что $n \geq m_j - 1$, $j = 1, \dots, k$, вектор-функция $\vec{\pi}_{n,m}(\vec{F}_\gamma)$ определяется однозначно, а дроби $\pi_{n,m}^j(z; \vec{F}_\gamma)$ при $n + m \rightarrow +\infty$ равномерно сходятся к $F_\gamma^j(z)$ на компактах в \mathbb{C} . Более того, при $n \geq m_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, k$

$$Q_m(z; \vec{F}_\gamma) = \frac{z^{n+m+\gamma}}{\Gamma(n+m+\gamma)} \int_0^{+\infty} \left[x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-zx} dx, \quad (0.6)$$

$$R_{n,m}^j(z; \vec{F}_\gamma) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{\lambda_j^{\gamma-1} (\gamma)_{n+m}} \int_0^{\lambda_j} \left[x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-zx} dx. \quad (0.7)$$

В (1.6) $\operatorname{Re} z > 0$. В случае $\operatorname{Re} z \leq 0$ значения $Q_m(z; \vec{F}_\gamma)$ определяются с помощью аналитического продолжения. В (0.7) интеграл берётся по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j . Учитывая, что подынтегральные функции в (0.6), (0.7) содержат множитель $x^{n+\gamma-1}$ считаем, что $n \geq n_0$, $n_0 = n_0(\gamma)$.

Если $\gamma \neq 1$, то, по всей видимости, условия $n \geq m_j - 1$ являются необходимыми для справедливости представлений (0.6) и (0.7). Так, в частности, уже при $k = 1$ Де Брюен [22] показал, что если $n < m - 1$, то при $\gamma = 2$, $\gamma = 1 \pm i\sqrt{2}$, а также γ , являющимся действительным корнем уравнения $\gamma^3 - 4\gamma^2 - \gamma + 6 = 0$, существуют индексы (n, m) , которые не являются нормальными. Хорошо известно [1, гл. 4, § 1], что единственность множества $\{\pi_{n,m}^j(z)\}_{j=1}^k$ является следствием нормальности индексов. В связи с этим везде в дальнейшем при $\gamma \neq 1$ предполагается, что $n \geq m_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, k$.

В [25] доказано асимптотическое равенство: при $n + m \rightarrow +\infty$

$$Q_m(z; \{F_\gamma^j\}_{j=1}^k) =$$

$$= \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1} z \right\} (1+o(1)). \quad (0.8)$$

Опираясь на результаты работы [25], легко показать, что при тех же условиях равномерно по z на любом компакте из \mathbb{C}

$$\lim_{n+m \rightarrow +\infty} P_{n_j}^j(z) \exp \left\{ \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1} z \right\} = F_\gamma^j(z). \quad (0.9)$$

Равенства (0.8), (0.9) в совокупности являются одним из первых утверждений об асимптотике многочленов Эрмита – Паде, охватывающих в том числе и недиагональный случай. Вместе с тем, вопрос о том, какова скорость равномерной сходимости дробей $\pi_{n_j, m}^j(z; \vec{F}_\gamma)$ к $F_\gamma^j(z)$, в общей постановке остаётся открытым. Имеющиеся результаты относятся в основном к диагональному случаю, когда $\gamma = 1$. Так в [18] с помощью метода матричной задачи Римана – Гильберта найдена скорость такой сходимости при $\gamma = 1$, $k = 2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. В [19] рассмотрен случай, когда $k > 1$, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ лежат на мнимой оси (см. также работу [20], где при $\gamma = 1$ и $k = 2$ исследуются в том числе и недиагональные аппроксимации).

В данной статье для аппроксимаций Эрмита – Паде 2-рода вектор-функции \vec{F}_γ доказываются аналоги некоторых теорем из работ [27]–[29], описывающих свойства аппроксимаций Эрмита – Паде 1-го рода вектор-функции \vec{F}_1 . В частности, на-ходятся асимптотики разностей

$$F_\gamma^j(z) - \pi_{n_j, m}^j(z; \vec{F}_\gamma)$$

(см. § 2–§ 5) для квадратичных (в том числе и недиагональных) аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода в случае набора из двух функций Миттаг – Леффлера $\{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z)\}$ при произвольных различных комплексных $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. В недиагональном случае методы, применяемые при изучении диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде (в частности, методы Лапласа и перевала), не работают. Поэтому в работе применяется новый подход, который опирается на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала [26]. Отметим, что до настоящего времени в основном исследовались свойства аппроксимаций Эрмита – Паде 1-го рода вектор-функции \vec{F}_1 [27]–[34].

1 Скорость сходимости квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде

В этом параграфе будем исследовать скорость сходимости (в том числе и недиагональных) аппроксимаций Эрмита – Паде для набора, состоящего из двух функций Миттаг – Леффлера

$$\{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z)\} = \{ {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_1 z), {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_2 z) \},$$

где λ_1, λ_2 – произвольные различные отличные от нуля комплексные числа. В общем случае рассматриваемая задача может быть сведена к нахождению асимптотики интеграла Лапласа, определяемого равенством (1) в [26, гл. 7, § 43, п. 1], где вместо $\lambda S(x)$ стоит функция $S(x, n, m_1, \dots, m_k)$, зависящая, вообще говоря, от $k+1$ различных параметров. Далее предполагаем наличие не более трёх параметров. В такой ситуации при исследовании асимптотик соответствующих интегралов несколько иначе, чем при обосновании метода Лапласа [26, гл. 7, § 43, п. 1], будем учитывать известный эвристический вывод о том, что основной вклад в асимптотику интеграла Лапласа вносит интеграл по достаточно малой окрестности точки максимума функции $S(x, n, m_1, m_2)$ (можно показать, что при сделанных предположениях формальное применение метода Лапласа также приводит к верному результату). Докажем вначале следующую теорему.

Теорема 0.1. Пусть $m_2 = n$, $m = n + m_1$, $n_1 = 2n$, $n_2 = n + m_1$, где n, m_1 – произвольные целые неотрицательные числа, а $\pi_{n_j, m}^j(z; \vec{F}_1)$, $j = 1, 2$ – аппроксимации Эрмита – Паде набора из двух экспонент $\{e^z, e^{2z}\}$. Тогда для любого комплексного z при $n \rightarrow +\infty$

$$e^z - \pi_{2n, n+m_1}^1(z; \vec{F}_1) = (-1)^m e^z \frac{z^{2n+m_1+1}}{2 \cdot (2n+m_1)!} B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) \times e^{0(n, m_1)z} (1+o(1)), \quad (1.1)$$

$$e^{2z} - \pi_{n+m_1, n+m_1}^2(z; \vec{F}_1) = (-1)^m e^{2z} \frac{z^{2n+m_1+1}}{2 \cdot (2n+m_1)!} \times B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) \times \{e^{0(n, m_1)z} + (-1)^m e^{-0(n, m_1)z}\} (1+o(1)), \quad (1.2)$$

где $\theta(n, m_1) = \sqrt{m_1 / (2n + m_1)}$, если $m_1 \rightarrow +\infty$; $\theta(n, m_1) = \frac{\Gamma((m_1+2)/2)}{\Gamma((m_1+1)/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, если m_1 – ограничено; $B(u; v)$ – бета-функция Эйлера, а оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leq L$. Здесь и далее L, L_1, \dots – положительные постоянные.

Доказательство. В рассматриваемом случае

$$R_{n, m}^1(z; \vec{F}_1) = \frac{z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!} \int_0^1 x^n (x-1)^{m_1} (x-2)^n e^{z(1-x)} dx.$$

В интеграле

$$I_1(z) = \int_0^1 x^n (x-1)^{m_1} (x-2)^n e^{z(1-x)} dx$$

сделаем замену $x = 1 - u$. В результате получим

$$I_1(z) = (-1)^{n+m_1} \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} e^{zu} du.$$

Рассмотрим интегралы

$$J_1^j = \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1+j} du, j = 0, 1, 2, \dots$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned} J_1^j &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u^2)^n (u^2)^{\frac{m_1+j-1}{2}} du^2 = \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{m_1+j+1}{2}; n+1\right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$. Выражая бета-функцию Эйлера через гамма-функции, получим равенство

$$u_0 = \frac{J_1^1}{J_1^0} = \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_1+2n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_1+2n+4}{2}\right)}.$$

С помощью формулы Стирлинга нетрудно показать, что при $n \rightarrow +\infty$ и $m_1 \rightarrow +\infty$

$$u_0 = \sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}} (1+o(1)). \quad (1.4)$$

В случае, когда m_1 – ограничено и $n \rightarrow +\infty$,

$$u_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} (1+o(1)).$$

Следовательно, при достаточно больших n $u_0 \in (0,1)$. В связи со сказанным вначале этого параграфа, заметим, что $u_0^* = \sqrt{m_1 / (2n+m_1)}$ является точкой максимума функции

$$S(u, n, m_1) = \ln(u^{m_1} (1-u^2)^n), \quad u \in (0,1).$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию $e^{z(u-u_0)}$ в окрестности точки u_0 , получим

$$\begin{aligned} e^{uz} &= e^{u_0 z} e^{z(u-u_0)} = \\ &= e^{u_0 z} \left\{ 1 + z(u-u_0) + \frac{z^2}{2} (u-u_0)^2 + \dots \right\} = \\ &= e^{u_0 z} + z(u-u_0) e^{u_0 z} + \rho_u(z), \end{aligned}$$

где при $|z| \leq L$ и $u \in [0,1]$

$$|\rho_u(z)| \leq |u-u_0|^2 \left\{ \frac{L^2}{2!} + \dots + \frac{L^n}{n!} + \dots \right\} \leq L_1 |u-u_0|^2.$$

Учитывая выбор u_0 и (1.3), приходим к равенству

$$\begin{aligned} I_1(z) &= (-1)^{n+m_1} \left\{ \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} e^{u_0 z} du + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} \rho_u(z) du \right\} = \\ &= (-1)^{n+m_1} \frac{e^{u_0 z}}{2} B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) + A_p(z), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где при $|z| \leq L$

$$\begin{aligned} |A_p(z)| &\leq L_1 \int_0^1 (1-u^2)^n u^n (u^2 - uu_0) du = \\ &= L_1 (J_1^2 - u_0 J_1^1). \end{aligned}$$

С учетом равенств (1.3) и определения u_0 , отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} |A_p(z)| &\leq \frac{L_1}{2} \left\{ \frac{B\left(\frac{m_1+3}{2}; n+1\right)}{B\left(\frac{m_1}{2}+1; n+1\right)} - \frac{B\left(\frac{m_1}{2}+1; n+1\right)}{B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right)} \right\} \times \\ &\quad \times B\left(\frac{m_1}{2}+1; n+1\right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Выражая бета-функции через гамма-функции и опираясь на формулу Стирлинга, получаем, что при $n \rightarrow +\infty$ и $m_1 \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{B\left(\frac{m_1+3}{2}; n+1\right)}{B\left(\frac{m_1}{2}+1; n+1\right)} &\sim \sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}, \\ \frac{B\left(\frac{m_1}{2}+1; n+1\right)}{B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right)} &\sim \sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}. \end{aligned}$$

Если же m_1 ограничено, а $n \rightarrow +\infty$, то

$$\begin{aligned} \frac{B\left(\frac{m_1+3}{2}; n+1\right)}{B\left(\frac{m_1}{2}+1; n+1\right)} &\sim \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+2}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ \frac{B\left(\frac{m_1}{2}+1; n+1\right)}{B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right)} &\sim \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (1.5) и (1.6), при $n \rightarrow +\infty$ будем иметь

$$I_1(z) = (-1)^{n+m_1} \frac{e^{u_0 z}}{2} B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) (1+o(1)).$$

Принимая во внимание равенство (1.4), при $n \rightarrow +\infty$ и $m_1 \rightarrow +\infty$ окончательно получим

$$\begin{aligned} R_{n,m}^1(z; \bar{F}_1) &= (-1)^{n+m_1} \frac{z^{2n+m_1+1}}{2(2n+m_1)!} \times \\ &\times B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) e^{\sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}} z} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Далее, представим $R_{n,m}^2(z; \bar{F}_1)$ в виде

$$\begin{aligned} R_{n,m}^2(z; \bar{F}_1) &= \frac{e^z z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!} \times \\ &\times \int_0^1 x^n (x-1)^{m_1} (x-2)^n e^{z(1-x)} dx + \\ &+ \frac{z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!} \int_1^2 x^n (x-1)^{m_1} (x-2)^n e^{z(2-x)} dx = \\ &= R_1^2(z) + R_2^2(z). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $R_1^2(z) = e^z R_{n,m}^1(z; \bar{F}_1)$. В интеграле, определяющем функцию $R_2^2(z)$, сделаем замену $x-1 = u$. Тогда

$$R_2^2(z) = (-1)^n \frac{z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!} \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} e^{z(1-u)} du.$$

С помощью теоремы Тейлора, получим

$$\begin{aligned} e^{z(1-u)} &= e^{z(1-u_0)} e^{z(u_0-u)} = \\ &= e^{z(1-u_0)} \left\{ 1 - z(u-u_0) + \frac{z^2}{2} (u-u_0)^2 - \dots \right\}. \end{aligned}$$

Опираясь на это разложение и рассуждая аналогично как при доказательстве равенства (1.7), получим, что при $n \rightarrow +\infty$ и $m_1 \rightarrow +\infty$

$$R_2^2(z) = (-1)^n e^z \frac{z^{2n+m_1+1}}{2(2n+m_1)!} \times \quad (1.8)$$

$$\times B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) e^{-\sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}z} (1+o(1)).$$

Из (1.7) и (1.8) при $n \rightarrow +\infty$ и $m_1 \rightarrow +\infty$ следует асимптотическое равенство

$$R_{n,m}^2(z) = (-1)^{n+m_1} e^z \frac{z^{2n+m_1+1}}{2(2n+m_1)!} \times \quad (1.9)$$

$$\times B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) \left\{ e^{\sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}z} + (-1)^{m_1} e^{-\sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}z} \right\} (1+o(1)).$$

Остается заметить, что при $n \rightarrow +\infty$ и $m_1 \rightarrow +\infty$ утверждения теоремы 0.1 являются следствием равенств (1.7), (1.9), если только учесть, что в условиях теоремы равенство (0.8) при $\gamma=1$ и $n \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$Q_m(z; \{e^z, e^{2z}\}) = e^{-z} (1+o(1)).$$

Случай, когда m_1 – ограничено, рассматривается аналогично. \square

Докажем теперь общее утверждение.

Теорема 0.2. Пусть n, m_1, m_2 – целые неотрицательные числа, а рациональные дроби $\pi_{n_j, m}^j(z; \vec{F}_\gamma)$, $j=1, 2$ являются аппроксимациями Эрмита – Паде вектор-функции

$$\vec{F}_\gamma = \{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z)\},$$

где λ_1, λ_2 – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n)}{\sqrt{n}} = 0$, то для любого z равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow +\infty$

$$F_\gamma^1(z) - \pi_{n_1, m}^1(z; \vec{F}_\gamma) = \quad (1.10)$$

$$= (-1)^m \frac{m_1!(\gamma)_n (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \lambda_1^{n+m_1+1} z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m_1+1}} (1+o(1)),$$

$$F_\gamma^2(z) - \pi_{n_2, m}^2(z; \vec{F}_\gamma) = \quad (1.11)$$

$$= (-1)^m \frac{m_2!(\gamma)_n (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} \lambda_2^{n+m_2+1} z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m_2+1}} (1+o(1)),$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leq L$.

Доказательство. Докажем (1.10). Для этого найдём асимптотику остаточной функции

$$R_{n,m}^1(z; \vec{F}_\gamma) = \frac{e^{\lambda_1 z} z^{n+m+1}}{\lambda_1^{\gamma-1} (\gamma)_{n+m}} \times \quad (1.12)$$

$$\times \int_0^{\lambda_1} x^{n+\gamma-1} (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} e^{-zx} dx.$$

В интеграле

$$U_1(z) = \int_0^{\lambda_1} x^{n+\gamma-1} (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} e^{z(\lambda_1-x)} dx$$

сделаем замену $x = \lambda_1 t$. В результате получим

$$U_1(z) = \lambda_1^{n+m_1+1} \int_0^1 t^{n+\gamma-1} (t-1)^{m_1} (\lambda_1 t - \lambda_2)^{m_2} e^{z\lambda_1(1-t)} dt.$$

Перейдем здесь к новой переменной интегрирования $u = 1-t$. Тогда

$$U_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \times$$

$$\times \int_0^1 (1-u)^{n+\gamma-1} u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} e^{\lambda_1 z u} du.$$

При $n \rightarrow \infty$ найдём асимптотику интегралов

$$J_\gamma^p := \int_0^1 (1-u)^{n+\gamma-1} u^{m_1+p} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} du,$$

$$p = 0, 1, 2, \dots$$

Преобразуем подынтегральное выражение в J_γ^0 с помощью формулы бинорма Ньютона:

$$J_\gamma^0 = \sum_{l=0}^{m_2} C_{m_2}^l \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^l B(n+\gamma; m_1+l+1).$$

Справедливо равенство

$$B(n+\gamma; m_1+l+1) =$$

$$= \frac{m_1+l}{n+m_1+l+\gamma} \cdot \frac{m_1+l-1}{n+m_1+l+\gamma-1} \dots \times$$

$$\times \frac{1}{n+\gamma+1} B(n+\gamma; 1).$$

Поэтому

$$J_\gamma^0 = \frac{m_1! \Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+m_1+\gamma+1)} \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{l=1}^{m_2} C_{m_2}^l \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^l \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(m_1+1)(m_1+2)\dots(m_1+l)}{(n+m_1+\gamma+1)\dots(n+m_1+l+\gamma)} \right].$$

Второе слагаемое в скобках предыдущего равенства при достаточно больших n по модулю не превосходит

$$\sum_{l=1}^{m_2} C_{m_2}^l \left| \frac{\lambda_1 m}{(\lambda_2 - \lambda_1)(n+m+\gamma_1)} \right|^l =$$

$$= \left[1 + \frac{|\lambda_1| m}{|\lambda_2 - \lambda_1| (n+m+\gamma_1)} \right]^{m_2} - 1,$$

где $\gamma_1 = \text{Re} \gamma$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n)}{\sqrt{n}} = 0$, то правая

часть последнего соотношения стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно

$$J_\gamma^0 = \frac{m_1!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m_1+1}} (1+o(1)). \quad (1.13)$$

Аналогично показывается, что при $n \rightarrow \infty$ и $p = 1, 2, \dots$

$$J_\gamma^p = \frac{(m_1+p)!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m_1+p+1}} (1+o(1)). \quad (1.14)$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы

$$J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$u_0 = \frac{J_\gamma^1}{J_\gamma^0} = \frac{m_1 + 1}{n + m_1 + \gamma + 1} (1 + o(1)). \quad (1.15)$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию $e^{\lambda_1(u-u_0)z}$ в окрестности точки u_0 , получим

$$e^{\lambda_1 uz} = e^{\lambda_1 u_0 z} e^{\lambda_1(u-u_0)z} = e^{\lambda_1 u_0 z} + \lambda_1 z(u-u_0)e^{\lambda_1 u_0 z} + \rho_u(z),$$

где при $|z| \leq L$ и $u \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & |\rho_u(z)| \leq \\ & \leq L_1 |u - u_0|^2 \left\{ \frac{(|\lambda_1| L)^2}{2!} + \dots + \frac{(|\lambda_1| L)^n}{n!} + \dots \right\} \leq \\ & \leq L_2 (u^2 + 2u|u_0| + |u_0|^2). \end{aligned}$$

Учитывая выбор u_0 , равенства (1.12)–(1.15), получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$U_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+\gamma} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \times \left\{ \frac{m_1!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m_1+1}} e^{\frac{\lambda_1(m_1+1)z}{n+m_1+\gamma}} (1 + o(1)) + A\rho_u(z) \right\},$$

где при достаточно больших n

$$\begin{aligned} & |A\rho_u(z)| \leq \\ & \leq \int_0^1 (1-u)^{n+\gamma_1-1} u^{m_1} \left(1 + \frac{|\lambda_1| |u|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \right)^{m_2} |\rho_u(z)| du \leq \\ & \leq L_3 \left\{ \frac{(m_1 + 2)! \Gamma(n + \gamma_1)}{\Gamma(n + m_1 + \gamma_1 + 2)} + \right. \\ & \left. + \frac{2|u_0| (m_1 + 1)! \Gamma(n + \gamma_1)}{\Gamma(n + m_1 + \gamma_1 + 1)} + \frac{|u_0|^2 m_1! \Gamma(n + \gamma_1)}{\Gamma(n + m_1 + \gamma_1)} \right\}. \end{aligned}$$

При доказательстве последнего неравенства воспользовались равенствами (1.14), учитывая при этом то, что главные члены асимптотики для интегралов J_γ^p не зависят от λ_1 и λ_2 . Из двух последних соотношений и (1.15) окончательно получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$U_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+\gamma} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \frac{m_1!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m_1+1}} (1 + o(1)).$$

Отсюда и из равенств (1.12) и (0.9) следует (1.10). Равенство (1.11) доказывается аналогично. \square

2 Некоторые замечания и следствия

В равенствах, содержащихся в формулировке следствия 1.2 работы [35] (см. также равенства (6.1) из [27]), в качестве множителя в правых частях стоит б.м. $\sqrt{2\pi/9n}[2/3\sqrt{3}]^n$, которая эквивалентна б.м. $B((n+1)/2; n+1)/2$. Поэтому равенства (1.1) и (1.2) при $m_1 = n$ согласуются с равенствами из следствия 1.2 работы [35].

Далее, если в (1.2) положить $m_1 = 0$ и учесть, что при $n \rightarrow \infty$

$$B\left(\frac{1}{2}; n+1\right) \sim \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!},$$

то получим

$$\begin{aligned} e^{2z} - \pi_{n,n}^2(z; e^{2\xi}) &= \\ &= (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2 e^{2z}}{(2n)!(2n+1)!} z^{2n+1} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (0.5) при $\gamma = 1$ следует, что $\pi_{n,n}^2(z; \bar{F}_1) = \pi_{n,n}(z; e^{2\xi})$. Поэтому при $m_1 = 0$ вторая аппроксимация Эрмита – Паде для набора $\{e^z, e^{2z}\}$ совпадает с аппроксимацией Паде для функции e^{2z} . Это вполне согласуется с определениями указанных аппроксимаций.

Далее, по определению $m = m_1 + m_2$, где m_1, m_2 – целые неотрицательные числа. Анализируя доказательство теоремы 1.2, нетрудно заметить, что при ограниченности одного из слагаемых m_j одно из утверждений теоремы 1.2 можно усилить. Например, если m_2 – ограничено, то асимптотическое равенство (1.10) справедливо при $n \rightarrow +\infty$ равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, где $m(n) = o(n)$. Более того, есть основания предполагать, что теорема 1.2 справедлива при $m(n) = o(n)$ и в случае, когда величины m_1 и m_2 одновременно являются неограниченными.

В простейшей ситуации получим

Следствие. Пусть $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, m = m_1, m_2 = 0$. Тогда равномерно по всем $m, 0 \leq m \leq m(n)$, где $m(n) = o(\sqrt{n})$, при $n \rightarrow +\infty$

$$F_\gamma^1(z) - \pi_{n,m}^1(z; \bar{F}_\gamma) = (-1)^m \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)), \quad (2.1)$$

$$F_\gamma^2(z) - \pi_{n+m,m}^2(z; \bar{F}_\gamma) = \frac{2^{n+1}(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (0.5) следует, что $\pi_{n,m}^1(z; \bar{F}_\gamma) = \pi_{n,m}(z; F_\gamma^1)$, т. е. при $m_2 = 0$ первая аппроксимация Эрмита – Паде для набора $\bar{F}_\gamma = \{F_\gamma^1, F_\gamma^2\}$ совпадает с аппроксимацией Паде функции $F_\gamma^1(z)$. При $m(n) = o(n)$ асимптотические равенства (0.5) и (2.1) приводятся к одинаковому виду. Это согласуется с сделанным ранее предположением.

Далее, если через $T_{n+m}(z; F_\gamma^2)$ обозначить многочлен Тейлора порядка $n+m$ для функции $F_\gamma^2(z)$, то

$$F_\gamma^2(z) - T_{n+m}(z; F_\gamma^2) = \frac{2^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)).$$

Из этого равенства и равенства (2.2), в частности, следует, что рациональная дробь $\pi_{n+m,m}^2(z; \bar{F}_\gamma)$ в

сравнении с $T_{n+m}(z; F_\gamma^2)$ существенно лучше приближает функцию $F_\gamma^2(z)$, например, при $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.
2. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
3. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – P. 118–150.
4. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.
5. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2-х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987.
6. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite – Padé polynomials, in “Progress in Approximation Theory” (A.A. Gonchar, E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York – Berlin: Springer-Verlag, 1992.
7. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.
8. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Эрмита – Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс / Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 123–190.
9. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.
10. Суетин, С.П. Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2015. – Т. 70, № 5 (425). – С. 121–174.
11. Аппроксимации Эрмита – Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности / А.В. Комлов, Р.В. Пальвелев, С.П. Суетин, Е.М. Чирка // Успехи матем. наук. – 2017. – Т. 72, № 4 (436). – С. 95–130.
12. Van Assche, W. Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation / W. Van Assche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.
13. Буслаев, В.И. О задачах равновесия, связанных с распределением нулей полиномов Эрмита – Паде / В.И. Буслаев, С.П. Суетин // Труды МИАН им. В.А. Стеклова – 2015. – Т. 290. – С. 272–279.
14. Комлов, А.В. О распределении нулей полиномов Эрмита – Паде / А.В. Комлов, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2015. – Т. 70, № 6 (426). – С. 211–212.
15. О сходимости квадратичных аппроксимаций Шафера / А.В. Комлов, Н.Г. Кружилин, Р.В. Пальвелев, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2016. – Т. 71, № 2 (428). – С. 205–206.
16. Perron, O. Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin: Teubner, 1929.
17. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
18. Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function / A.B. J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207. – P. 227–244.
19. Старовойтов, А.П. Об асимптотике аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 9. – С. 59–68.
20. Старовойтов, А.П. Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, № 1 (2). – С. 88–91.
21. Van Rossum, H. Systems of orthogonal and quasi-orthogonal polynomials connected with the Padé table I, II and III / H. Van Rossum // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – P. 517–534, 675–682.
22. De Bruin, M.G. Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1;c;x)$ / M.G. De Bruin // K. Nederl. Akad. Wetensch. – 1976. – Vol. 79. – P. 408–418.
23. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.
24. Braess, D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x , II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.
25. Аптекарев, А.И. Об аппроксимациях Паде к набору $\{{}_1F_1(1;c;\lambda_i z)\}_{i=1}^k$ / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.
26. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.
27. Астафьева, А.В. Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.
28. Старовойтов, А.П. Асимптотика диагональных многочленов Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов //

Матем. заметки – 2017. – Т. 102, № 2. – С. 302–315.

29. Старовойтов, А.П. О некоторых свойствах аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. – 2017. – Т. 298. – С. 338–355.

30. Driver, K. Nondiagonal Hermite – Padé approximation to the exponential function / D. Braess // J. of Comput. and Appl. Math. – 1995. – Vol. 65. – P. 125–134.

31. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.

32. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function / H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.

33. Kuijlaars, A.B.J. Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function: a Riemann – Hebert approach / A.B.J. Kuijlaars, W. Van Assche, F. Wielonsky // Constr. Approx. – 20025. – Vol. 21. – P. 351–412.

34. Старовойтов, А.П. Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 3. – С. 409–420.

35. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 81–87.

Поступила в редакцию 22.01.18.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON ONE GENERALIZATION OF THE LOCAL FORMATIONS

A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} . Натуральные числа n и m называются σ -*взаимно простыми*, если для всякого такого σ_i , что $\sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset$, мы имеем $\sigma_i \cap \pi(m) = \emptyset$. Пусть $t > 1$ – натуральное число и пусть \mathfrak{F} – класс групп. Тогда мы говорим, что \mathfrak{F} является: (i) S'_σ -*замкнутым* (соответственно *слабо S'_σ -замкнутым*), если \mathfrak{F} содержит всякую конечную группу G , удовлетворяющую следующим условиям: (1) G содержит такие подгруппы $A_1, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$, что $G = A_i A_j$ для всех $i \neq j$; (2) индексы $|G : N_G(A_1)|, \dots, |G : N_G(A_t)|$ (соответственно индексы $|G : A_1|, \dots, |G : A_{t-1}|, |G : N_G(A_t)|$) попарно σ -взаимно просты; (ii) M'_σ -*замкнутым* (соответственно *слабо M'_σ -замкнутым*), если \mathfrak{F} содержит всякую конечную группу G , удовлетворяющую следующим условиям: (1) G содержит такие модулярные подгруппы $A_1, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$, что $G = A_i A_j$ для всех $i \neq j$; (2) индексы $|G : N_G(A_1)|, \dots, |G : N_G(A_t)|$ (соответственно индексы $|G : A_1|, \dots, |G : A_{t-1}|, |G : N_G(A_t)|$) попарно σ -взаимно просты. В работе изучаются свойства и приложения (слабо) S'_σ -замкнутых и (слабо) M'_σ -замкнутых классов конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, формационная σ -функция, σ -локальная формация, (слабо) S'_σ -замкнутый класс групп, (слабо) M'_σ -замкнутый класс групп.

Throughout this paper, all groups are finite. Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be some partition of the set of all primes \mathbb{P} . The natural numbers n and m are called σ -coprime if for every σ_i such that $\sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset$ we have $\sigma_i \cap \pi(m) = \emptyset$. Let $t > 1$ be a natural number and let \mathfrak{F} be a class of groups. Then we say that \mathfrak{F} is: (i) S'_σ -closed (respectively weakly S'_σ -closed) provided \mathfrak{F} contains each finite group G which satisfies the following conditions: (1) G has subgroups $A_1, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$ such that $G = A_i A_j$ for all $i \neq j$; (2) The indices $|G : N_G(A_1)|, \dots, |G : N_G(A_t)|$ (respectively the indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_{t-1}|, |G : N_G(A_t)|$) are pairwise σ -coprime; (ii) M'_σ -closed (respectively weakly M'_σ -closed) provided \mathfrak{F} contains each finite group G which satisfies the following conditions: (1) G has modular subgroups $A_1, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$ such that $G = A_i A_j$ for all $i \neq j$; (2) The indices $|G : N_G(A_1)|, \dots, |G : N_G(A_t)|$ (respectively the indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_{t-1}|, |G : N_G(A_t)|$) are pairwise σ -coprime. In this paper, we study properties and applications of (weakly) S'_σ -closed and (weakly) M'_σ -closed classes of finite groups.

Keywords: finite group, formation σ -function, σ -local formation, (weakly) S'_σ -closed class of groups, (weakly) M'_σ -closed class of groups.

1 Preliminaries

We use the terminology in [1]–[3]. Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, \mathbb{P} is the set of all primes, $\pi = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n ; as usual, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the order of G .

A subgroup M of G is called *modular* if M is a modular element (in the sense of Kurosh [4, p. 43]) of the lattice $\mathcal{L}(G)$ of all subgroups of G , that is,

$$(i) \langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z \text{ for all } X \leq G, Z \leq G \text{ such that } X \leq Z, \text{ and}$$

$$(ii) \langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z \text{ for all } Y \leq G, Z \leq G \text{ such that } M \leq Z.$$

In what follows, σ is some partition of \mathbb{P} , that is, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$; $\Pi \subseteq \sigma$ and $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$.

By the analogy with the notation $\pi(n)$, we write $\sigma(n)$ [5] to denote the set

$$\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}; \quad \sigma(G) = \sigma(|G|)$$

and $\sigma(\mathfrak{M}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{M}} \sigma(G)$. The natural number n and m are called σ -coprime if $\sigma(n) \cap \sigma(m) = \emptyset$.

Recall that a class of groups \mathfrak{F} is called a *formation* if: (i) $G/N \in \mathfrak{F}$ whenever $G \in \mathfrak{F}$, and (ii) $G/(N \cap R) \in \mathfrak{F}$ whenever $G/N \in \mathfrak{F}$ and $G/R \in \mathfrak{F}$.

Following [6], we call any function f of the form

$$f : \sigma \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$$

a *formation σ -function*, and we put

$$LF_\sigma(f) = \{G \mid G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G)\}.$$

Definition 1.1 [6]. (i) If for some formation σ -function f we have $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, then we say that the class \mathfrak{F} is σ -local and f is a σ -local definition of \mathfrak{F} .

(ii) We suppose that every formation is 0-multiply σ -local; for $n > 0$, we say that the formation \mathfrak{F} is n -multiply σ -local provided either $\mathfrak{F} = (1)$ is the class of all identity groups or $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, where $f(\sigma_i)$ is $(n-1)$ -multiply local for all $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

(iii) The formation \mathfrak{F} is said to be *totally σ -local* provided \mathfrak{F} is n -multiply σ -local for all $n \in \mathbb{N}$.

In this paper, we discuss applications of the theory of σ -local formations [6] in the study of factorizations of groups.

Remark 1.2. (i) In view of [7, IV, 3.2], in the classical case when $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, a formation σ -function and a σ -local formation are, respectively, a formation function and a local formation in the usual sense [7, IV, Definition 3.1].

(ii) By definition, the class of all identity groups (1) is totally σ -local and it is contained in $LF_\sigma(f)$. Moreover, $(1) = LF_\sigma(h)$, where $h(\sigma_i) = \emptyset$ for all σ_i .

If $t > 1$ is a natural number, then the class of groups \mathfrak{F} is said to be Σ_t -closed (Shemetkov [8]) provided \mathfrak{F} contains all groups G which satisfy the following condition: G has subgroups $A_1, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$ whose indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_t|$ are pairwise coprime. The theory of Σ_t -closed classes of soluble groups and various its applications were considered by Otto-Uwe-Kramer in [9] (see also [8, Chapter 1]).

In this paper we consider the following generalizations of this concept.

Definition 1.3 [10]. Let $t > 1$ be a natural number and let \mathfrak{F} be a class of groups. Then we say that \mathfrak{F} is S_σ^t -closed (respectively \mathcal{M}_σ^t -closed) if \mathfrak{F} contains every group G for which the following conditions hold:

(1) G has subgroups (respectively modular subgroups) $A_1, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$ such that $G = A_i A_j$ for all $i \neq j$;

(2) The indices $|G : N_\sigma(A_1)|, \dots, |G : N_\sigma(A_t)|$ are pairwise σ -coprime.

Definition 1.4 [10]. Let $t > 1$ be a natural number and let \mathfrak{F} be a class of groups. Then we say that \mathfrak{F} is *weakly S_σ^t -closed* (respectively *weakly \mathcal{M}_σ^t -closed*) if \mathfrak{F} contains every group G for which the following conditions hold:

(1) G has subgroups (respectively modular subgroups) $A_1, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$ such that $G = A_i A_j$ for all $i \neq j$;

(2) The indices $|G : A_1|, \dots, |G : A_{t-1}|, |G : N_\sigma(A_t)|$ are pairwise σ -coprime.

In the case when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, the symbol σ^1 will be omitted. Hence the class \mathfrak{F} is S^t -closed (respectively is *weakly S^t -closed*) if it is S_σ^t -closed (respectively *weakly S_σ^t -closed*); the class \mathfrak{F} is \mathcal{M}^t -closed (respectively is *weakly \mathcal{M}^t -closed*) if it is \mathcal{M}_σ^t -closed (respectively *weakly \mathcal{M}_σ^t -closed*).

2 Main Results

Recall that G is said to be: σ -primary [11] if G is a σ_i -group for some i ; σ -decomposable (Shemetkov [8]) or σ -nilpotent (Guo and Skiba [12]) if $G = G_1 \times \dots \times G_n$ for some σ -primary groups G_1, \dots, G_n ; σ -soluble [11] if every chief factor of G is σ -primary.

We say that G is *meta- σ -nilpotent* if G has a normal subgroup N such that N and G/N are σ -nilpotent.

Our main result is the following

Theorem 2.1 [10]. *The following statements hold:*

(i) *The formation of all meta- σ -nilpotent groups \mathfrak{N}_σ^2 is S_σ^4 -closed and \mathcal{M}_σ^3 -closed.*

(ii) *Every σ -local formation of meta- σ -nilpotent groups is weakly S_σ^4 -closed.*

(iii) *Every 2-multiply σ -local formation of meta- σ -nilpotent groups is weakly \mathcal{M}_σ^3 -closed.*

Before continuing, consider some corollaries of Theorem 2.1. First note that in view of Remark 1.2 (i), we get from this result the following

Corollary 2.2. *The following statements hold:*

(i) *The formation of all meta-nilpotent groups \mathfrak{N}^2 is S^4 -closed and \mathcal{M}^3 -closed.*

(ii) *Every local formation of meta-nilpotent groups is weakly S^4 -closed.*

(iii) *Every 2-multiply local formation of meta-nilpotent groups is weakly \mathcal{M}^3 -closed.*

It is clear that every Σ_t -closed class is also weakly S^4 -closed. Hence we get from Corollary 2.2 the following

Corollary 2.3 (Otto-Uwe-Kramer [9]). Every local formation of meta-nilpotent groups is Σ_4 -closed.

From Corollary 2.2 we get also the following two new results

Corollary 2.4. Suppose that G has supersoluble subgroups A_1, A_2, A_3, A_4 such that $G = A_i A_j$ for all $i \neq j$, and the indices

$|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|, |G : N_G(A_4)|$ are pairwise coprime. Then G is supersoluble.

Corollary 2.5. Suppose that G has subgroups A_1, A_2, A_3, A_4 such that $G = A_i A_j$ and A'_i is nilpotent for all $i \neq j$, and the indices

$|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|, |G : N_G(A_4)|$ are pairwise coprime. Then G' is nilpotent.

From Corollary 2.4 we get

Corollary 2.6 (Doerk [13]). Suppose that G has supersoluble subgroups A_1, A_2, A_3, A_4 such that $G = A_i A_j$ for all $i \neq j$, and the indices

$|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|, |G : A_4|$ are pairwise coprime. Then G is supersoluble.

From Corollary 2.5 we get

Corollary 2.7 (Friesen [14]). Suppose that G has subgroups A_1, A_2, A_3, A_4 such that $G = A_i A_j$ and A'_i is nilpotent for all $i \neq j$, and the indices

$|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|, |G : A_4|$ are pairwise coprime. Then G' is nilpotent.

Let $\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Then G is said to be π -nilpotent (respectively π -decomposable) if $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_\pi(G)$ (if, respectively, if $G = O_\pi(G) \times O_\pi(G)$).

In fact, in the theory of the π -soluble groups we deal with the partition $\sigma = \{\{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \pi'\}$ of \mathbb{P} . In this case we get from Theorem 2.1 the following

Corollary 2.8. Suppose that G has meta- π -nilpotent subgroups A_1, A_2, A_3, A_4 such that $G = A_i A_j$ for all $i \neq j$, and the indices

$|G : N_G(A_1)|, \dots, |G : N_G(A_4)|$ are pairwise coprime and also $|G : N_G(A_i)|$ is either a π -number or a π' -number for all i . Then G is meta- π -nilpotent.

If for a subgroup A of G we have $\sigma(|A|) \subseteq \Pi$ and $\sigma(|G : A|) \subseteq \Pi'$, then A is said to be a Hall Π -subgroup [5] of G . We say that G is Π -closed if G has a normal Hall Π -subgroup.

The proof of Theorem 2.1 consists of many steps and the next three basis theorems and the proposition are the main stages of it.

Theorem 2.9 [10]. (i) The class of all σ -soluble Π -closed groups \mathfrak{F} is \mathcal{S}_σ^3 -closed.

(ii) The class of all σ -nilpotent groups \mathfrak{N}_σ is \mathcal{S}_σ^3 -closed.

(iii) Every formation of σ -nilpotent groups \mathfrak{M} is weakly \mathcal{S}_σ^3 -closed.

In the case when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ we get from Theorem 2.9 the following results.

Corollary 2.10. Suppose that

$$G = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_1 A_3,$$

where A_1, A_2 and A_3 are soluble subgroups of G . If the three indices $|G : N_G(A_1)|, |G : N_G(A_2)|, |G : N_G(A_3)|$ are pairwise coprime, then G is soluble.

Corollary 2.11 (Wielandt [15]). If G has three soluble subgroups A_1, A_2 and A_3 whose indices $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|$ are pairwise coprime, then G is itself soluble.

Corollary 2.12. Suppose that

$$G = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_1 A_3,$$

where A_1, A_2 and A_3 are abelian subgroups of G . If the three indices $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : N_G(A_3)|$ are pairwise coprime, then G is abelian.

Corollary 2.13. Suppose that

$$G = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_1 A_3,$$

where A_1, A_2 and A_3 are nilpotent subgroups of G . If the three indices $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : N_G(A_3)|$ are pairwise coprime, then G is nilpotent.

Corollary 2.14 (Kegel [16]). Suppose that $G = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_1 A_3$, where A_1, A_2 and A_3 are nilpotent subgroups of G . If the three indices $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|$ are pairwise coprime, then G is nilpotent.

Corollary 2.15 (Doerk [13]). Suppose that $G = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_1 A_3$, where A_1, A_2 and A_3 are abelian subgroups of G . If the three indices $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|$ are pairwise coprime, then G is abelian.

In the case when $\sigma = \{\{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \pi'\}$ we get from Theorem 2.9 the following results.

Corollary 2.16. Suppose that G has π -nilpotent subgroups A_1, A_2, A_3 such that $G = A_i A_j$ for all $i \neq j$, and the indices

$$|G : N_G(A_1)|, |G : N_G(A_2)|, |G : N_G(A_3)|$$

are pairwise coprime and also $|G : N_G(A_i)|$ is either a π -number or a π' -number for all i . Then G is π -nilpotent.

Corollary 2.17. Suppose that G has π -nilpotent subgroups A_1, A_2, A_3 such that $G = A_i A_j$ for all $i \neq j$, and the indices

$$|G : A_1|, |G : A_2|, |G : N_G(A_3)|$$

are pairwise coprime and also every of the indices $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : N_G(A_3)|$ is either a π -number or a π' -number. If the Sylow subgroups of A_i are abelian for all i , then the Sylow subgroups of G are also abelian.

Theorem 2.18 [10]. If $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ is a σ -local formation of σ -soluble groups, where for every i the formation $f(\sigma_i)$ is (weakly) S_σ^t -closed, then the class \mathfrak{F} is (weakly) S_σ^{t+2} -closed.

Proposition 2.19 [6]. Every σ -local formation of σ -soluble groups \mathfrak{F} possesses a unique σ -local definition F such that for every σ -local definition f of \mathfrak{F} and for every $\sigma_i \in \sigma$ the following inclusions hold:

$$f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F} \subseteq F(\sigma_i) = \mathfrak{S}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}.$$

In this proposition the symbol \mathfrak{S}_{σ_i} denotes the class of all σ -soluble σ_i -soluble groups, $\mathfrak{S}_{\sigma_i} F(\sigma_i)$ denotes the class of all σ -soluble groups G such that for some normal subgroup N of G we have $G/N \in F(\sigma_i)$.

We call the function F in Proposition 2.19 the canonical σ -local definition of \mathfrak{F} .

Our fourth basic result is the following

Theorem 2.20 [10]. If $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ is a σ -local formation of σ -soluble groups, where F is the canonical σ -local definition of \mathfrak{F} and for every i the formation $F(\sigma_i)$ is (weakly) S_σ^t -closed, then the formation \mathfrak{F} is (weakly) S_σ^{t+1} -closed.

REFERENCES

1. Скиба, А.Н. On σ -properties of finite groups I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.
2. Скиба, А.Н. On σ -properties of finite groups II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.
3. Скиба, А.Н. On σ -properties of finite groups III / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 52–62.
4. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
5. Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.
6. Skiba, A.N. On σ -local formations of finite groups / A.N. Skiba // Preprint, 2017.
7. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
8. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1978.
9. Kramer, O.-U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes / O.-U. Kramer // Math. Z. – 1974. – Vol. 139, № 1. – S. 63–68.
10. Skiba, A.N. A generalization of the Kramer's theory / A.N. Skiba // Preprint, 2017.
11. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. Vol. 436. – P. 1–16.
12. Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2015. – Vol. 18. – P. 191–200.
13. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – S. 198–205.
14. Friesen, D. Products of normal supersoluble subgroups / D. Friesen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 46–48.
15. Wielandt, H. Über die Normalstruktur von mehrfach faktorierbaren Gruppen / H. Wielandt // B. Austral Math. Soc. – 1960. – Vol. 1. – P. 143–146.
16. Kegel, O.H. Zur Struktur mehrfach faktorierbarer endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1965. – Vol. 87. – S. 409–434.

Поступила в редакцию 16.11.17.

УДК 681.3.06:624.131

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПОСТРОЕНИЯ СВАИ РИТ

В.Е. Быховцев, В.С. Смородин, Ю.Д. Бондарева

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SYSTEM ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF GROUND BASIS AT THE OPTIMIZATION OF PARAMETERS OF BUILDING RIT-PILE

V.E. Bykhovtsev, V.S. Smorodin, Yu.D. Bondareva

F. Scorina Gomel State University

На основе разработки математической модели сложной системы, как многопараметрического образа объекта исследования, методом системного анализа получены условия построения РИТ-свай оптимальной материалоемкости под заданную нагрузку.

Ключевые слова: многопараметрический образ, конечное множество математических моделей, грунтовые основания, РИТ-сваи, оптимизация материалоемкости.

Based on the development of a mathematical model of a complex system, as a multiparameter image of an object of investigation, the conditions of constructing a RIT-pile of optimal material capacity for a given load were obtained by the method of system analysis.

Keywords: multiparametric image, finite set of mathematical models, soil bases, RIT-piles, optimization of material consumption.

1 Особенности объекта моделирования

Устойчивость грунтовых оснований фундаментов зданий, как известно, в значительной мере зависит от уровня контакта конструктивных элементов фундамента с грунтовым основанием, что является определяющим фактором при расчете свай, устроенных с применением разрядно-импульсной технологии (РИТ-свай) [1], [2].

При математическом моделировании соответствующих деформационных процессов в твердых деформируемых средах [2], [3] такие системы грунтов и фундаментов характеризуются наиболее высокой степенью связности. В физическом плане РИТ-свая состоит из центральной части (прямой бетонный стержень длиной L см и диаметром d_c см) и уширений (кольцевые элементы с диаметром $d_{yш} > d_c$) высотой $h_{yш} = d_{yш}$. Количество уширений $n \geq 1$, $n_{max} = L / h_{yш}$, в этом случае расстояние между уширениями отсутствует. Вокруг уширений при резонансно-импульсной обработке грунтового основания образуются зоны уплотнения. Особенности конструктивной формы РИТ-свай и возникающие уплотнения грунта в зонах резонансно-импульсной обработки (зоны РИО) значительно повышают несущую способность физической системы в целом.

Следовательно, возникают проблемные задачи по определению рациональной конструктивной формы РИТ-свай и физико-механических характеристик измененного состояния грунта в зонах РИО.

В рамках данной статьи исследуются условия построения РИТ-свай минимальной материалоемкости под заданную нагрузку на основе построения математической модели сложной системы как многопараметрического образа объекта исследования, представленного конечным множеством математических моделей, каждая из которых отражает конкретную группу свойств исходной твердой деформируемой среды.

2 Основы методики исследования материалоемкости РИТ-свай

В формализованной постановке поставленная задача классифицируется как краевая задача нелинейной математической физики с краевыми условиями Дирихле – Неймана [4]. Это может быть осесимметричная задача с особенностями, обусловленными конструктивной формой несущего элемента деформируемой системы. В качестве такого элемента в настоящей работе рассматривается свая, устроенная методом резонансно-импульсной технологии – РИТ-свая. При условии $n = n_{max}$ РИТ-свая может рассматриваться как прямая цилиндрическая свая с радиусом ствола $r_0 = d_{yш} / 2$.

Анализ вычисленных значений горизонтальных U и вертикальных W составляющих перемещений грунтового основания прямой цилиндрической сваи показал, что выше плоскости конца сваи для деформаций имеют место условия

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial W}{\partial r},$$

и, как следствие,

$$U|_{z \leq L} = (0.01 \div 0.001)W,$$

т. е. смещения грунта вокруг ствола сваи $W=f(r)$, это значит, что вокруг ствола сваи выше плоскости её конца существует, так называемый, телескопический сдвиг грунта. При телескопическом сдвиге $U=0$, $W=f(r)$ и состояние равновесия исследуемой системы можно представить только одним уравнением [5], [6]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = 0$$

или в более компактной форме

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) должно отвечать и физическим условиям задачи, т. е. в решении должны содержаться физические параметры сваи и физико-механические характеристики грунтового основания. Решение в виде:

$$W = c_1 \ln \frac{c_2}{r}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > r \quad (2.2)$$

удовлетворяет (2.1) и поставленным требованиям, если константы c_1 и c_2 будут определены посредством указанных параметров. В случае линейного деформирования основания осадка сваи линейно зависит от нагрузки и обратно пропорциональна модулю сдвига грунта основания и длине сваи. Вследствие проведенного компьютерного моделирования при различных значениях r_0 , r_{yui} , L , μ и последующей обработки результатов получено:

– для прямой сваи при учёте радиуса ствола

$$c_1 = \frac{\mu P}{GL}, \quad c_2 = \frac{(1 + \mu)L - 4r_0}{2}; \quad (2.3)$$

– для прямой сваи при учёте радиуса ствола и уширения на её конце:

$$c_1 = \frac{\mu P}{GL}, \quad c_2 = \frac{(1 + \mu)L - 4r_0}{2 \left(1 + 2\mu \frac{r_{yui} - r_0}{r_0} \right)}; \quad (2.4)$$

– для РИТ-свай при $r_0 = r_{yui}$

$$c_1 = \frac{\mu P}{GL}, \quad c_2 = \frac{(1 + \mu)L - 4r_{yui}}{2}, \quad (2.5)$$

G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона, P (кг) – нагрузка.

Как видим, (2.3) и (2.5) являются частным случаем (2.4). Таким образом, для определения осадки прямой одиночной сваи, сваи с уширенным концом и РИТ-свай в линейно-деформируемом грунтовом основании будем иметь общую формулу:

$$W = \frac{\mu P}{GL} \ln \frac{(1 + \mu)L - 4r_0}{2 \left(1 + 2\mu \frac{r_{yui} - r_0}{r_0} \right) r_i}. \quad (2.6)$$

РИТ-свая в общем случае при количестве уширений $1 < n < n_{\max}$ и расположенных на некотором расстоянии друг от друга не является цилиндрической. Вследствие этого возникает вопрос существования телескопического сдвига и применимости изложенного подхода решения поставленной задачи. Удовлетворяя условиям минимизации материалоемкости РИТ-свай необходимо рассмотреть несколько конструктивных вариантов РИТ-свай, $1 < n < n_{\max}$, которые будут отличаться количеством уширений и расстояниями между ними [5], [6].

Моделируемые конфигурации РИТ-свай представлены на рисунках 3.1–3.4. Варьируя расстояниями между уширениями и их количеством можно получить условия, при которых будет существовать телескопический сдвиг. Возле каждого уширения вследствие резонансно-импульсной обработки грунта будет возникать уплотненная зона, повторяющая форму самого уширения, при этом $d_{yul} > d_{yui}$. В [7] показано, что $d_{yul} = (1 + 2\mu) d_{yui}$. Зоны уплотнения грунта вокруг уширений могут не соприкасаться, контактировать или накладываться. Грунт между уширениями будет уплотнен. Степень уплотнения определяется взаимным расположением уширений, физико-механическими характеристиками уплотняемого грунта и энергией уплотнения. При выполнении этих условий вокруг РИТ-свай образуется уплотненная зона и может наблюдаться телескопический сдвиг. Для уплотненной зоны определяется эквивалентный по интегральной прочности модуль деформации.

3 Компьютерное моделирование материалоемкости РИТ-свай

Методом системного анализа исследовано пять вариантов математической модели поставленной задачи. Варьировалось количество уширений и расстояние между ними. Конструктивные схемы РИТ-свай и их осадок в деформируемом грунтовом основании при нагрузке $P = 12$ т представлены на рисунках 3.1–3.4 и в таблицах 3.1–3.4.

Для каждой приведенной модели РИТ-свай методом компьютерного моделирования на основе метода конечных элементов в сочетании с методом энергетической линеаризации используя программный комплекс «Энергия ОС» для заданных условий определены деформации грунтового основания сваи, осадки сваи и условия образования телескопического сдвига. Для телескопического сдвига характерно выполнение условия $U=0$, $W=f(r)$. Для модельных задач (рисунок 3.1, рисунок 3.3 и рисунок 3.4) подтверждается существование телескопического сдвига и отсутствие его для модели РИТ-свай (рисунок 3.2).

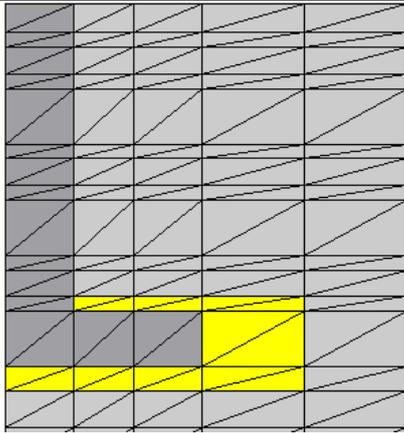


Рисунок 3.1 – РИТ-свая с одним уширением

Таблица 3.1 – Деформации грунтового основания РИТ-свай с одним уширением

№	1	2	3	4	5	6
U	0	-0.121	-0.212	-0.101	-0.054	-0.026
V	1.096	1.100	0.285	0.092	0.049	0.024
№	10	11	12	13	14	15
U	0	-0.090	-0.063	-0.028	-0.013	-0.004
V	1.084	1.110	0.439	0.073	0.037	0.014
№	19	20	21	22	23	24
U	0	-0.086	-0.013	-0.011	-0.005	-0.003
V	1.093	1.119	0.383	0.066	0.034	0.012
№	28	29	30	31	32	33
U	0	-0.097	-0.045	-0.030	-0.014	-0.006
V	1.105	1.131	0.200	0.053	0.027	0.011
№	37	38	39	40	41	42
U	0	-0.050	-0.011	-0.007	-0.003	-0.002
V	1.124	1.134	0.141	0.052	0.026	0.011
№	46	47	48	49	50	51
U	0	-0.059	-0.049	-0.017	-0.010	-0.007
V	1.130	1.141	0.222	0.043	0.027	0.016
№	55	56	57	58	59	60
U	0	-0.088	-0.035	-0.031	-0.023	-0.016
V	1.124	1.151	0.277	0.043	0.032	0.020
№	64	65	66	67	68	69
U	0	-0.099	-0.070	-0.053	-0.038	-0.024
V	1.136	1.163	0.191	0.057	0.045	0.028

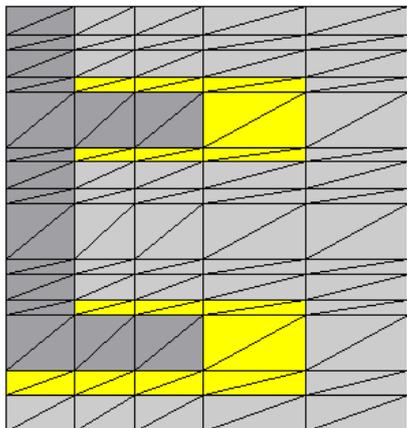


Рисунок 3.2 – РИТ-свая с двумя уширениями

Таблица 3.2 – Деформации грунтового основания РИТ-свай с двумя уширениями

№	1	2	3	4	5
U	0	-0.055	-0.191	-0.158	-0.117
V	0.500	0.501	0.11	0.11	0.117
№	10	11	12	13	14
U	0	-0.041	-0.088	-0.074	-0.054
V	0.498	0.510	0.178	0.163	0.159
№	19	20	21	22	23
U	0	-0.39	-0.113	-0.104	-0.086
V	0.498	0.510	0.178	0.163	0.159
№	28	29	30	31	32
U	0	-0.043	-0.202	-0.231	0.021
V	0.503	0.515	0.394	0.379	0.265
№	37	38	39	40	41
U	0	-0.065	-0.110	-0.130	-0.021
V	0.506	0.521	0.516	0.503	0.255
№	46	47	48	49	50
U	0	-0.010	0.001	0.001	-0.010
V	0.500	0.502	0.502	0.502	0.245
№	55	56	57	58	59
U	0	-0.039	-0.057	-0.008	0.003
V	0.495	0.507	0.423	0.354	0.191
№	64	65	66	67	68
U	0	-0.044	-0.133	-0.089	-0.049
V	0.500	0.512	0.226	0.139	0.107

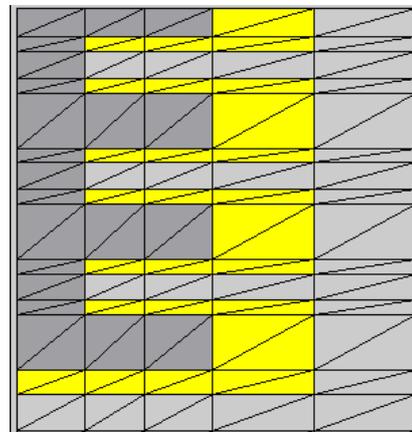


Рисунок 3.3 – РИТ-свая с четырьмя уширениями

Таблица 3.3 – Деформации грунтового основания РИТ-свай с четырьмя уширениями

№	1	2	3	4	5	6
U	0	-0.080	-0.121	-0.142	-0.90	-0.064
V	0.349	0.356	0.350	0.330	0.205	0.108
№	10	11	12	13	14	15
U	0	-0.011	0.001	0.001	-0.023	-0.009
V	0.326	0.329	0.329	0.929	0.237	0.094
№	19	20	21	22	23	24
U	0	-0.026	-0.083	-0.065	-0.045	-0.023
V	0.324	0.332	0.277	0.268	0.241	0.065
№	28	29	30	31	32	33
U	0	-0.028	-0.103	-0.101	-0.082	-0.035
V	0.327	0.335	0.279	0.280	0.241	0.065

Продолжение таблицы 3.3

№	37	38	39	40	41	42
U	0	-0.043	-0.072	-0.085	-0.016	-0.007
V	0.329	0.339	0.336	0.327	0.218	0.061
№	46	47	48	49	50	51
U	0	-0.006	0	0	-0.011	-0.007
V	0.325	0.327	0.327	0.327	0.224	0.068
№	55	56	57	58	59	60
U	0	-0.025	-0.093	-0.080	-0.058	-0.029
V	0.322	0.330	0.268	0.252	0.222	0.069
№	64	65	66	67	68	69
U	0	-0.028	-0.088	-0.100	-0.088	-0.046
V	0.325	0.333	0.281	0.272	0.228	0.068

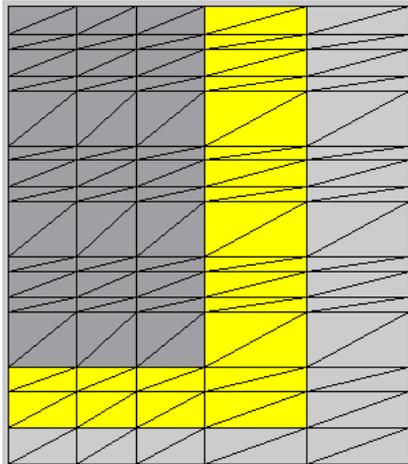


Рисунок 3.4 – РИТ-свая с диаметром ствола $d_c = d_{yu}$

Таблица 3.4 – Деформации грунтового основания РИТ-свай с диаметром ствола $d_c = d_{yu}$

№	1	2	3	4	5	6
U	0	-0.061	-0.098	-0.120	-0.064	-0.53
V	0.303	0.310	0.322	0.334	0.284	0.105
№	10	11	12	13	14	15
U	0	-0.055	-0.080	-0.095	-0.044	-0.019
V	0.272	0.288	0.305	0.328	0.278	0.091
№	19	20	21	22	23	24
U	0	-0.043	-0.067	-0.083	-0.032	-0.024
V	0.289	0.309	0.319	0.331	0.268	0.082
№	28	29	30	31	32	33
U	0	-0.050	-0.074	-0.089	-0.060	-0.034
V	0.298	0.309	0.319	0.332	0.269	0.071
№	37	38	39	40	41	42
U	0	-0.023	-0.037	-0.045	-0.006	-0.005
V	0.313	0.317	0.324	0.334	0.263	0.068
№	46	47	48	49	50	51
U	0	-0.044	-0.064	-0.075	-0.030	-0.017
V	0.309	0.317	0.327	0.341	0.269	0.072
№	55	56	57	58	59	60
U	0	-0.044	-0.069	-0.086	-0.042	-0.031
V	0.308	0.317	0.330	0.350	0.265	0.073
№	64	65	66	67	68	69
U	0	-0.053	-0.078	-0.094	-0.074	-0.048
V	0.315	0.327	0.337	0.351	0.275	0.078

При компьютерном моделировании необходимые исходные данные были приняты по материалам натурального эксперимента, выполненного в БелНИИС, г. Минск [8].

Характеристика сваи:

- буронабивная, выполнена по технологии РИТ с диаметром ствола 151 мм, длина 3 м, с уширением в уровне пяты диаметром 460 мм;
- грунтовые условия: пылеватый суглинок на всю разведанную глубину;
- удельный вес γ , кН/м³ – 19,4;
- угол внутреннего трения ϕ , град – 23;
- сцепление c , МПа – 0,018;
- модуль деформации E , МПа – 6.

Методом компьютерного моделирования были исследованы осадки РИТ-свай в зависимости от физических и геометрических характеристик свай и физико-механических характеристик грунтового основания деформируемой области включая зоны РИО. Результаты проведенного вычислительного эксперимента представлены в таблице 3.5 и в виде графиков на рисунке 3.5.

Таблица 3.5 – Осадка сваи-РИТ при заданной нагрузке с учетом уплотнения и нелинейности деформирования грунтового основания при различном количестве уширений

$P(\tau)$	3	6	9	12	14	Конструкция сваи
n						
опыт	0,2	1,3	5,4	12,1	19,2	1 уширение снизу
1	0,3	1,89	5,2	10,95	18,5	1 уширение снизу
2	0,15	0,85	2,7	5,2	8,8	2 уширения
3	0,1	0,62	1,7	3,4	5,4	3 уширения
4	0,1	0,59	1,4	3,1	4,6	4 уширения
$d_c = d_{yu}$	0,06	0,4	1,16	2,9	4,4	$d_c = d_{yu}$

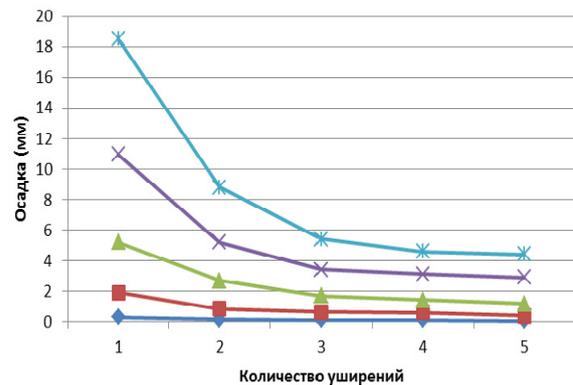


Рисунок 3.5 – Графики осадки сваи-РИТ с различным количеством уширений

Показано, что:

- рациональное количество уширений

$$n \leq \frac{n_{\max}}{2};$$

- рациональное расстояние между уширениями $h \leq d_{yu}$;

– телескопический сдвиг получается при расстоянии между уширениями $h \leq d_{уш}$;

– несущая способность РИТ-свай рациональной конструкции уменьшается не более чем на 5%, а расход материала на устройство уширенных свай может быть уменьшен до 50%.

Таким образом, на основе разработки конечного множества математических моделей объекта исследования методом системного анализа определены параметры построения РИТ-свай оптимальной материалоемкости под заданную нагрузку.

Полученные результаты являются основанием для их применения при проектировании фундаментов на основе РИТ-свай для промышленных и гражданских зданий и сооружений при грунтовых условиях Республики Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быховцев, В.Е.* Методика расчета по предельным состояниям свай, устроенных с применением разрядно-импульсной технологии / В.Е. Быховцев, В.С. Смородин, Д.В. Прокопенко // Доклады БГУИР. – 2016. – № 8 (102). – С. 71–75.

2. *Цытович, Н.А.* Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М.: Стройиздат, 1963. – 542 с.

3. *Журавков, М.А.* Математическое моделирование деформационных процессов в твёрдых

деформируемых средах / М.А. Журавков. – Минск: БГУ, 2002. – 456 с.

4. *Партон, В.З.* Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

5. *Быховцев, В.Е.* Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.

6. *Быховцев, В.Е.* Расчет РИТ-свай по первому предельному состоянию / В.Е. Быховцев, Д.В. Прокопенко, Л.А. Цурганова // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (25). – С. 90–93.

7. *Быховцев, В.Е.* Математическое и компьютерное моделирование осадки РИТ-свай в нелинейно-деформируемом грунтовом основании / В.Е. Быховцев, Ю.Д. Бондарева // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2016. – № 3 (96). – С. 92–95.

8. *Быховцев, В.Е.* Деформации локально-уплотняемого нелинейно-деформируемого грунтового основания РИТ-свай минимальной материалоемкости под заданную нагрузку / В.Е. Быховцев, В.С. Смородин, Ю.Д. Бондарева // Доклады БГУИР. – 2018. – № 1 (111). – С. 51–57.

Поступила в редакцию 12.01.18.

ИНКАПСУЛЯЦИЯ МАГИСТРАЛЬНОГО ТРАФИКА ЦЕНТРА ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

А.В. Воруев, О.М. Демиденко, В.Д. Левчук, П.Л. Чечет

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ENCAPSULATION OF BACKBONE TRAFFIC OF DATA PROCESSING CENTER

A.V. Varuyeu, O.M. Demidenko, V.D. Liauchuk, P.L. Chechat

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается процесс создания виртуальной магистральной линии на базе протоколов оверлейной связи в условиях трансляции трафика через публичные каналы передачи данных.

Ключевые слова: топология, медиа-контент, магистральный трафик, VXLAN, VTEP, EVE-NG, канал передачи данных.

The process of creating a virtual backbone line based on protocols of an overlay communication is considered. The traffic transference is limited to public data channels.

Keywords: topology, media content, backbone traffic, VXLAN, VTEP, EVE-NG, channel of data transference.

Введение

Увеличение количества передаваемых данных в сети связано с развитием IoT среды, когда каждое устройство имеет доступ к сети, например, домашняя онлайн видео-камера, либо домашнее охранное устройство. Большая часть трафика приходится на развлекательный медиа-контент, а именно – на видео. Помимо YouTube, происходит добавление медиа-содержимого в крупнейшие социальные сети, новостные каналы начинают транслировать передачи в режиме реального времени.

Причина этого кроется также в дальнейшем развитии медиа-кодеков и увеличении экранов смартфонов и планшетов, когда есть возможность смотреть видео в 2k/4k-формате. Прогнозируется увеличение доли видео-данных с 70 до 82 процентов, в то время как объём увеличится в 4 раза. За последний год объём трафика видеонаблюдения практически удвоился, а к 2020 г. вырастет десятикратно. Ожидается интенсивное развитие рынка дополненной и виртуальной реальности. За последний год трафик этого вида увеличился в 4 раза и прогнозируется, что к 2020 году он возрастет в 61 раз.

Наметилась тенденция к высокомасштабному увеличению общего объёма передаваемых данных, среди которого будет присутствовать трафик, чувствительный к задержкам. [1], [2] В этом случае рекомендуется разбивать поток данных на несколько меньших и вводить его в облако провайдера на ближайших к абоненту точках. Это необходимо для выполнения балансировки и снижения нагрузки на единый центр обработки данных. В этом случае возможно реализовывать

различные сценарии как работы, так и защиты от увеличивающихся размеров DDoS-атак.

Если два центра обработки данных находятся в одном здании, но в разных его частях, то можно использовать классические методы передачи данных – 1/10/40/100 Гбит Ethernet для обычного сетевого трафика и 8/16/32/128 Гбит Fibre-Channel для сетей хранения данных. Для более сложных случаев можно использовать конвергентные способы передачи данных, т. е. когда транспортная сеть обслуживает одновременно и обычный трафик, и трафик систем хранения данных.

Последовательность шагов по оптимизации сетевой архитектуры может быть следующей:

1. Обновление кабельной инфраструктуры (уменьшение средней длины патч-корда, уменьшение объёма аплинков через использование уплотнительной аппаратуры, либо через использование конвергентных решений).

2. Внедрение оборудования, позволяющего создавать программно-определяемые решения с использованием универсального оборудования.

3. Использование новейших операторских решений по оптимальному использованию оверлейных сетей и протокола BGP.

1 Перспектива развития оверлейных сетей

В данный момент многие архитекторы озабочены созданием нового универсального протокола, который бы объединял все плюсы существующих оверлейных сетей. Название данного проекта – протокол GENEVE (Generic Network Virtualization Encapsulation). Разработчики спецификаций этого протокола стремятся к унификации топологии (рисунок 1.1) [3].

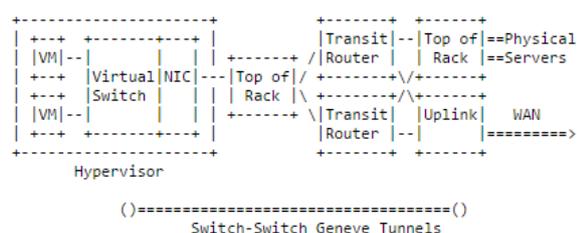


Рисунок 1.1 – Упрощённая схема взаимодействия частей ЦОД

В данный момент самым эффективным механизмом применения всех опций протокола является TLV-формат (type-length-value).

В качестве базового механизма передачи служебных данных GENEVE выбран UDP. Организация IANA также зарезервировала UDP-порт 6081 для работы GENEVE. В связи с тем, что GENEVE есть наследник VXLAN/NVGRE/STT, его интеграция в любое из существующих решений должно пройти достаточно гладко и быстро, т. к. гипервизоры смогут работать одновременно с несколькими протоколами – старым и новым, без какого-либо ущерба в производительности самого канала связи.

Таблица 1.1 – Сравнение протоколов

Название протокола	VXLAN	STT	NVGRE
Инкапсуляция	– Использование UDP-протокола – UDP порт 8472 – Добавляется VXLAN заголовок размером 8 байт – Инкапсуляция IP и не-IP кадров	– Использование TCP-протокола – Добавляется STT заголовок размером 8 байт – Использование нестандартного TCP – Инкапсуляция IP и не-IP кадров	– Использование GRE-инкапсуляции – Использование GRE номера протокола 0x6558 – Инкапсуляция нетегированных IP и не-IP кадров
Идентификатор оверлейной сети	24-битный VNI	64-битный Context ID	24-битный VSID, плюс 8 бит идентификатор потока
Размер служебных заголовков	50 байт	76 байт	42 байта
ЕСМР и балансировка в порт-группе	– Порт источника в VXLAN заголовке в результате хеширования внутренних заголовков – Транспорт должен поддерживать хеширование на базе 5 параметров (src+dst ip, protocol, src+dst port)	– Порт источника в STT заголовке в результате хеширования заголовков – Транспорт должен поддерживать хеширование на базе 5 параметров (src+dst ip, protocol, src+dst port)	– Черновик RFC предлагает 32-битный VSID + 8-битный flow ID – Хеширование GRE не предполагается на аппаратных устройствах
Распространение информации о подключенных узлах	– Flood+Learn – MP-BGP EVPN	На базе OpenFlow	Использование любого механизма (чтение данных из транспорта, использование центрального сервера)
Поддержка виртуальными коммутаторами	Cisco Nexus 1000v и VMware DVS	Nicira, Open vSwitch	Microsoft Hyper-V virtual switch
Масштабируемость	1 млн хостов	1000 хостов	Неизвестно
Поддержка производителями	Cisco, VMware, Arista, Brocade, Citrix, Red Hat, Broadcom	VMware, Broadcom	Microsoft, Arista, Emulex, Huawei, HP
Шлюзы между виртуальными и аппаратными сетями	VMware vShield, Cisco ASA for Nexus 1000V Series Switch, Cisco Cloud Services Router (CSR) 1000V Series, Arista 7150 switch, Brocade ADX	Решение Nicira	Неизвестно
Сервисные цепочки	Cisco vPath в Cisco Nexus 1000v	Неизвестно	Неизвестно
Стандарт	RFC 7348 + RFC 7432	draft-davie-stt-08	RFC 7637

По состоянию на июнь 2017 протокол GENEVE находится в стадии утверждения спецификаций, поэтому на рынке не представлены готовые решения на его основе [3].

Результаты сравнения текущих версий оверлейных протоколов представлены в таблице 1.1.

2 Создание оверлейной схемы в виртуальной среде EVE-NG

Для реализации топологии был использован бесплатный продукт EVE-NG (старое название Unetlab) [4].

Физическая топология представляет собой звезду, центром которой является vHUB, к которому подключены все сетевые устройства – как уровня провайдера (PE, P), так и уровня клиента (CE). Используемая физическая топология представлена на рисунок 2.1.

vHUB, как и следует из названия, транслирует все входящие пакеты во все порты, кроме того, от которого он их получил. Это позволяет прослушивать все проходящие пакеты в топологии будучи подключенным к порту любого из устройств. Для этого используется программный пакет Wireshark. Также это позволяет избавиться от дополнительной настройки коммутатора, чтобы он мог успешно передавать все тегируемые пакеты.

В данной схеме будет реализовано подключение CE-устройств (в виде CSR1000v) к PE (IOL), а также показаны настройки и отсутствие особых требований к транзитной сети, т.к. иначе возможны дополнительные финансовые траты за предоставление услуг сторонним провайдером. Из требований к провайдеру есть лишь предоставление unicast-доступности, а также поддержка BiDir-PIM.

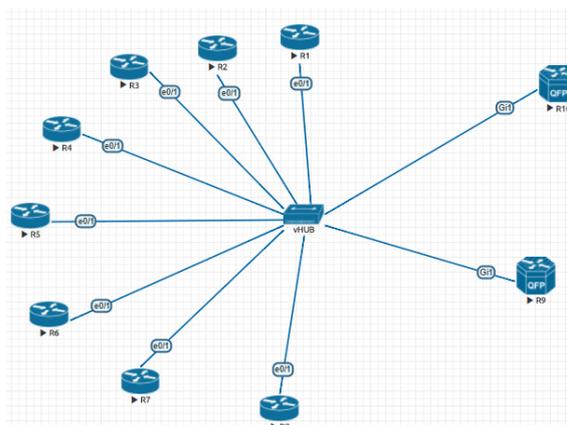


Рисунок 2.1 – Физическая топология

Логическая топология ISP BVB представлена на рисунке 2.2.

Возможно отказаться от использования двунаправленного мультикаст-протокола, в этом случае необходимо указывать расположение всех VTEP-шлюзов, а репликация всего трафика будет происходить на входе, когда один пакет копируется и посылается каждому шлюзу персонально. Это увеличивает нагрузку на сетевую инфраструктуру, но позволяет уйти от требований к наличию мультикаст-протоколов [5].

Клиентские устройства CE (Customer Edge) R9 и R10 будут подключены к PE (Provider Edge) R7 и R8. В качестве RR (Route-Reflector) для протокола BGP будет использован R1. Он будет выполнять Best-Path Selection алгоритм и отдавать своим RR-клиентам NLRI+next-hop+метрику. Хотя RR и скрывает истинную картину путей, он позволяет не создавать избыточных

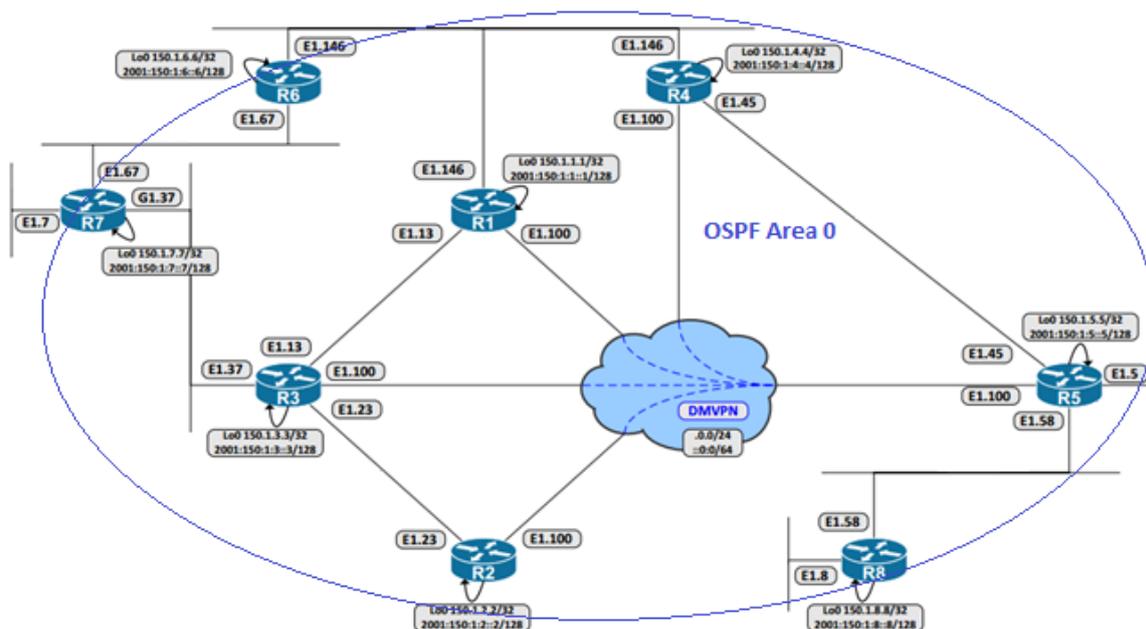


Рисунок 2.2 – Логическая топология оператора связи

Prevention Mechanism для iBGP-соседств. Суть iBGP Loop Prevention Mechanism заключается в том, что маршрут, принятый от iBGP-соседа не анонсируется другому iBGP-соседу. Также в случае с RR не действует другое правило BGP – маршрутизатор не принимает апдейты, если он не использует Route-Target, описываемый в атрибутах NLRI.

Сама же внутренняя сеть ISP BBB будет состоять из единого OSPF-домена. Также, исходя из небольшого размера сети и количества устройств, все они будут помещены в одну зону, для упрощения. На рисунке 2.3 видно OSPF + MPLS топологию провайдера BBB. В данном случае MPLS будет автоматически распространён средствами OSPF, а именно включением функции

«mpls ldp autoconfig». Это макрос, включающий анонсирование служебной информации на интерфейсах, где работает OSPF-процесс. В некоторых случаях можно вручную включать MPLS-процесс на интерфейсе, в этом случае предлагается дополнительная защита от человеческого фактора, когда ошибка в настройке будет весьма ощутима для инфраструктуры [6].

Для банка сегмент, предоставляющий VXLAN-сервис, будет выглядеть следующим образом (рисунок 2.4).

Топологию, которая будет настраиваться, можно увидеть на рисунке 2.5. В качестве PC1 и PC2 будет временно использоваться L2-IOL как сетевая аналогия PC, так как интересует техническая часть.

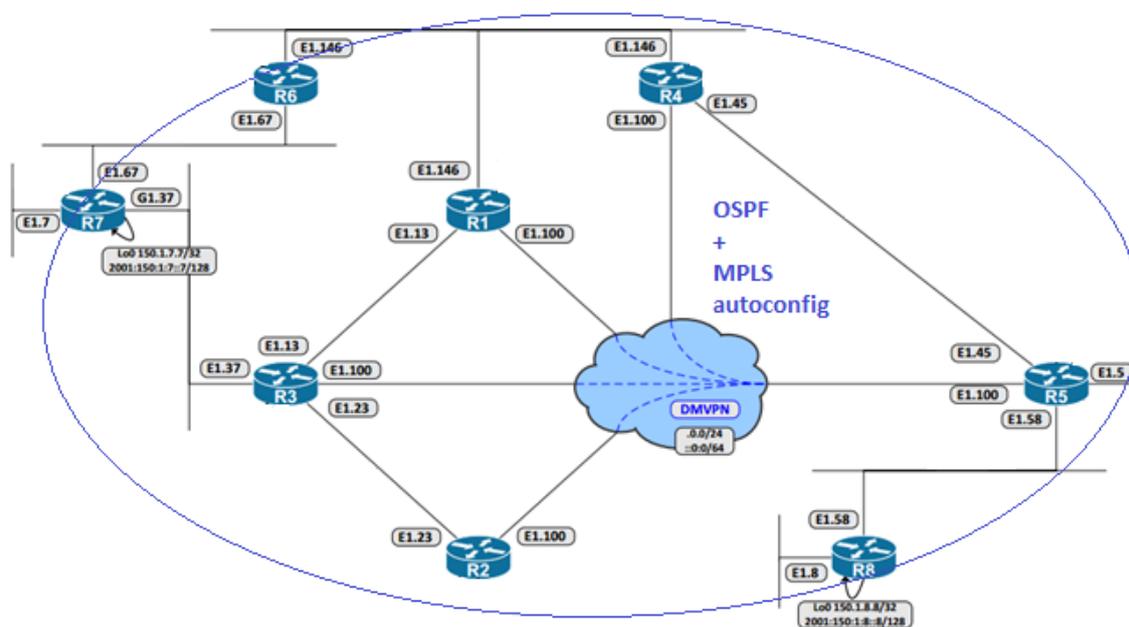


Рисунок 2.3 – Топология MPLS-облака оператора связи

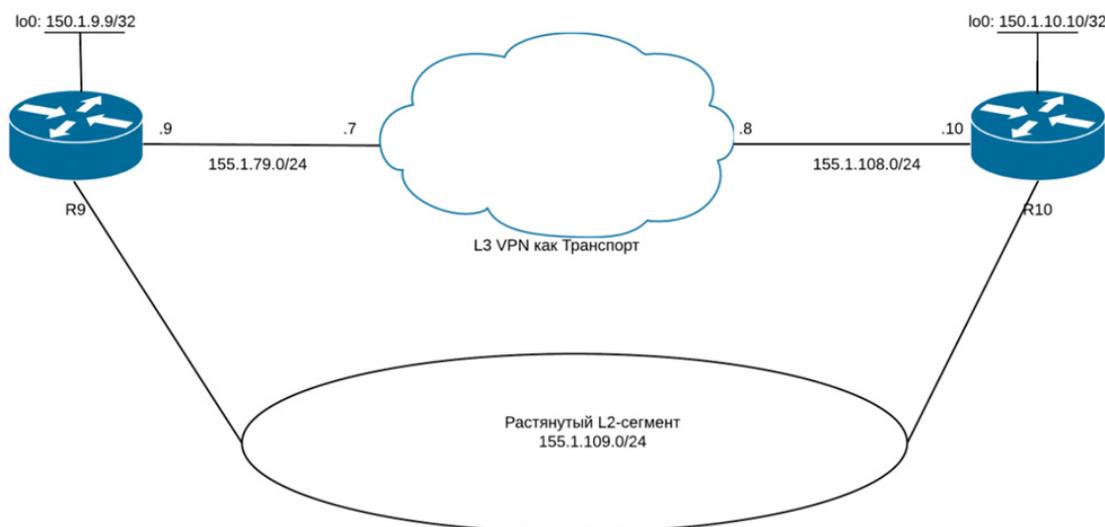


Рисунок 2.4 – Упрощённая схема подключения растянутого L2-сегмента

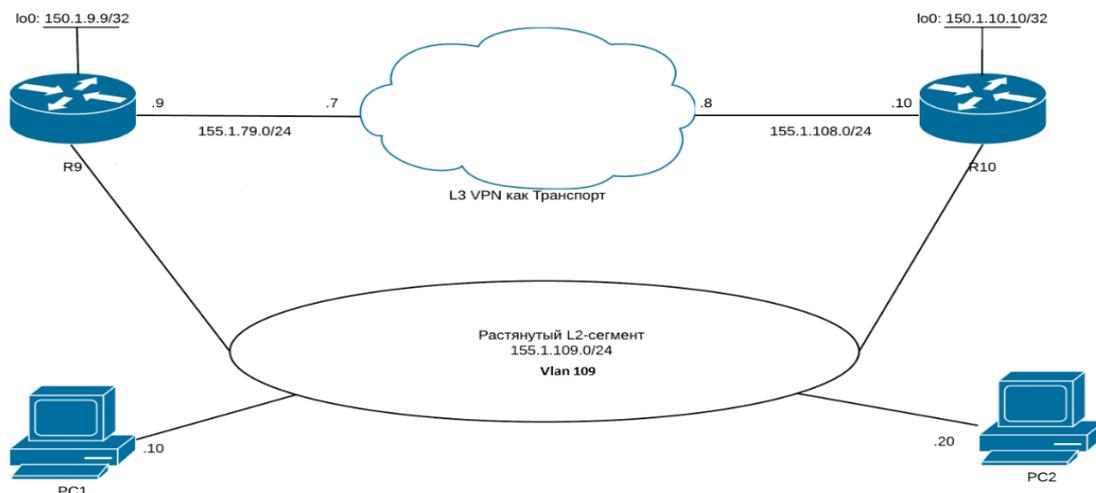


Рисунок 2.5 – Схема растягиваемой сети

3 Конфигурация VXLAN-оверлея

Конфигурация VXLAN-шлюза представлена на рисунке 3.1. В качестве моста между L2-сегментом и L3-транспортом выступает интерфейс NVE1, при его конфигурации указывается интерфейс-источника, привязка VNI (идентификатор расширенного влана) к мультикаст-группе, о которой данное устройство будет сообщать в PIM-Join пакетах в сторону RP (Rendezvous Point – точка к которой строят SharedTree все PIM-устройства). В этой конфигурации указывается, какой именно VLAN «растягивается», что позволяет растянуть большое количество виртуальных сетей (максимальное значение очень зависит от уровня оборудования). Теперь проверим состояние NVE-туннеля (рисунки 3.2, 3.3).

По-умолчанию используется порт UDP 4789 (рисунок 3.4), но его можно при необходимости изменить на любой другой, но делать это необходимо сразу на всех VTEP-устройствах.

Размер передаваемого трафика зависит от MTU на всём пути следования, поэтому для

поддержки Jumbo-frame необходимо настроить MTU на соответствующее значение на всех устройствах сети.

Список переданных пакетов можно увидеть в packet-capture раздела Wireshark (рисунок 3.5).

Wireshark автоматически «разворачивает» внешние заголовки и показывает внутренние данные, поэтому можно увидеть детали пакета (рисунок 3.6). На нём представлена полная структура VXLAN-пакета – полный Layer 2 кадр завернут в VXLAN-заголовок, а дальше инкапсулирован в UDP-сегмент. В адресной информации можно заметить порт получателя (4789, который возможно изменить на любой другой), в качестве адресов отправителя и получателя можно увидеть адреса лупбэков VTEP-устройств. Вывод данного пакета косвенно подтверждает всю конфигурацию, которая была применена на настраиваемых виртуальных устройствах.

На этом локальная настройка узлов сети завершена.

```
R9#sh run | sec Loopback|nve|bridge-domain|GigabitEthernet2|bidir
bridge-domain 109
 member vni 5000
 member GigabitEthernet2 service-instance 109
interface Loopback0
 ip address 150.1.9.9 255.255.255.255
 ip pim sparse-mode
interface nve1
 no ip address
 member vni 5000 mcast-group 225.1.1.1
 source-interface Loopback0
interface GigabitEthernet2
 description "to STRETCHED L2"
 no ip address
 negotiation auto
 service instance 109 ethernet
 encapsulation dot1q 109
 rewrite ingress tag pop 1 symmetric
!
ip pim bidir-enable
ip pim rp-address 100.100.100.100 bidir
R9#
```

Рисунок 3.1 – VXLAN конфигурация на VTEP R9

```
R9#
R9#show nve interface nve 1 detail
Interface: nve1, State: Admin Up, Oper Up Encapsulation: Vxlan
source-interface: Loopback0 (primary:150.1.9.9 vrf:0)
  Pkts In   Bytes In   Pkts Out   Bytes Out
      95     118008     117       145952
R9#
```

Рисунок 3.2 – Информация о транслированных пакетах

```
R9#show nve peers
Interface Peer-IP      VNI      Peer state
  nve1    150.1.10.10    5000     -
R9#
```

Рисунок 3.3 – Вывод VTEP-соседств

```
R9#
R9#show platform software vxlan F0 udp-port
VXLAN UDP Port: 4789
R9#
```

Рисунок 3.4 – Вывод используемого порта для обмена служебной информацией

14 12:56:38.803595	155.1.109.10	155.1.109.20	ICMP	1468 Echo (ping) request	id=0x000b, seq=0/0, ttl=255 (reply in 15)
15 12:56:38.809014	155.1.109.20	155.1.109.10	ICMP	1468 Echo (ping) reply	id=0x000b, seq=0/0, ttl=255 (request in 14)
16 12:56:38.868598	155.1.109.10	155.1.109.20	ICMP	1468 Echo (ping) request	id=0x000b, seq=1/256, ttl=255 (reply in 17)
17 12:56:38.987031	155.1.109.20	155.1.109.10	ICMP	1468 Echo (ping) reply	id=0x000b, seq=1/256, ttl=255 (request in 16)
18 12:56:39.104270	155.1.109.10	155.1.109.20	ICMP	1468 Echo (ping) request	id=0x000b, seq=2/512, ttl=255 (reply in 19)
19 12:56:39.217694	155.1.109.20	155.1.109.10	ICMP	1468 Echo (ping) reply	id=0x000b, seq=2/512, ttl=255 (request in 18)
20 12:56:39.340690	155.1.109.10	155.1.109.20	ICMP	1468 Echo (ping) request	id=0x000b, seq=3/768, ttl=255 (reply in 21)
21 12:56:39.448845	155.1.109.20	155.1.109.10	ICMP	1468 Echo (ping) reply	id=0x000b, seq=3/768, ttl=255 (request in 20)
22 12:56:39.569274	155.1.109.10	155.1.109.20	ICMP	1468 Echo (ping) request	id=0x000b, seq=4/1024, ttl=255 (reply in 23)
23 12:56:39.688860	155.1.109.20	155.1.109.10	ICMP	1468 Echo (ping) reply	id=0x000b, seq=4/1024, ttl=255 (request in 22)

Рисунок 3.5 – Вывод переданных пакетов посредством VXLAN

```

> Frame 22: 1468 bytes on wire (11744 bits), 1468 bytes captured (11744 bits) on interface 0
> Ethernet II, Src: 50:00:00:01:00:00 (50:00:00:01:00:00), Dst: aa:bb:cc:00:02:00 (aa:bb:cc:00:02:00)
> 802.1Q Virtual LAN, PRI: 0, CFI: 0, ID: 79
> Internet Protocol Version 4, Src: 150.1.9.9, Dst: 150.1.10.10
  * User Datagram Protocol, Src Port: 28615, Dst Port: 4789
    Source Port: 28615
    Destination Port: 4789
    Length: 1430
    [Checksum: [missing]]
    [Checksum Status: Not present]
    [Stream index: 2]
  * Virtual eXtensible Local Area Network
    > Flags: 0x0800, VXLAN Network ID (VNI)
    Group Policy ID: 0
    VXLAN Network Identifier (VNI): 5000
    Reserved: 0
  > Ethernet II, Src: aa:bb:cc:80:04:00 (aa:bb:cc:80:04:00), Dst: aa:bb:cc:80:05:00 (aa:bb:cc:80:05:00)
  > Internet Protocol Version 4, Src: 155.1.109.10, Dst: 155.1.109.20
  > Internet Control Message Protocol

```

Рисунок 3.6 – Структура инкапсулированного пакета

Заключение

В статье рассмотрены принципы и технологии построения логических каналов L2 over L3 уровня для организации бесшовной связи удаленных филиалов организации. В результате применения технологии создана модель программно-аппаратной схемы, которая позволяет передавать данные на любое расстояние без дополнительных требований к промежуточному оборудованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко, О.М. Принципы формализации вычислительного процесса в ЛВС / О.М. Демиденко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2017. – № 6 (105). – С. 75–78.
2. Демиденко, О.М. Уровни представления вычислительного процесса и рабочей нагрузки на ЛВС / О.М. Демиденко // Цифровая трансформация. – 2017. – № 1. – С. 11–15.

3. Репозиторий информационных документов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.ietf.org/>. – Дата доступа: 24.06.2017.

4. Демиденко, О.М. Изучение влияния внешних помех на качество сигнала в сетях WI-FI / О.М. Демиденко, В.Н. Кулинченко // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 96–99.

5. Демиденко, О.М. Функциональные возможности программного комплекса адаптивной идентификации пользователей корпоративной сети / О.М. Демиденко, В.Д. Левчук, А.И. Кучеров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 69–73.

6. Архитектура программного инструментария по обеспечению надежности узла ЛВС / А.И. Кучеров, А.В. Воружев, О.М. Демиденко, В.Д. Левчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 100–103.

Поступила в редакцию 07.02.18.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).