ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№2 (31) 2017

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря* 2009 *г.
Выходит 4 раза в год

№ 2 (31) 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

ИНФОРМАТИКА

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– технические (информатика, вычислительная техника и управление);
– физико-математические (физика, математика).

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).
Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.
Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова*, *Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 08.06.17. Формат 60×84 $1/8$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,63. Уч.-изд. л. 10,13. Тираж 100 экз. Заказ № 539.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

***Published since December*, 2009**
There are 4 times a year

№ 2 (31) 2017

CONTENTS

PHYSICS

MATHEMATICS

INFORMATION SCIENCE

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

– Technics (Informatics, Computer Science and Control);

– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 531.51:531.18:530.12

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ДЕФЕКТ МАССИВНОГО ШАРА

Н.А. Ахраменко

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

GRAVITATIONAL DEFECT OF MASSIVE BALL

N.A. Akhramenko

Belarusian State University of Transport, Gomel

Получено выражение, определяющее гравитационный дефект массы массивного шара. Показано, что гравитационный дефект массы растет с увеличением плотности и массы шара. Полученное соотношение является обобщением для величины гравитационного дефекта массы в нерелятивистском случае.

Ключевые слова: *теория тяготения, массивный шар, гравитационный дефект массы.*

The resulting expression defining the gravitational mass defect of massive ball is given. It is shown that the gravitational mass defect increases with increasing density and the mass of the ball. The resulting ratio is a generalization for magnitudes of the gravitational mass defect in the non-relativistic case.

Keywords: *theory of gravitation, massive ball, gravitational mass defect.*

Введение

В теории тяготения Ньютона гравитационная масса является источником гравитационного поля. Напряженность гравитационного поля представляет собой его силовую характеристику. Как известно [1]–[5], в теории тяготения Ньютона напряженность статического поля тяготения определяется величиной силы, действующей на покоящееся пробное тело единичной массы.

Многие небесные тела, в числе которых звезды, планеты и спутники планет, имеют форму близкую к шаровидной. С течением времени эти тела могут изменять как размеры, так и плотность. Например, звезда может превратиться в белый карлик с весьма большой плотностью. Еще большая плотность возникает при образовании нейтронной звезды.

В классической механике считается, что масса системы равна сумме масс составляющих ее тел [1]–[5]. В релятивистской механике масса может быть определена через полную энергию тела E и импульс p [6], [7]

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2,$$

где c – скорость света в вакууме.

Полная энергия включает и энергию взаимодействия частей системы друг с другом. Поэтому масса при изменении конфигурации системы и, соответственно, энергии взаимодействия, может изменяться. В частности масса массивной сферической пылевидной оболочки может зависеть от радиуса, что рассмотрено в [8], [9].

В данной работе предварительно определяется свободная масса (масса, не связанная гравитационным взаимодействием) массивного тела шаровидной формы в зависимости от радиуса и плотности, а затем гравитационный дефект массы. Будем считать, что шар представляет собой пылевидную систему частиц, которые взаимодействуют друг с другом только посредством гравитационного поля.

1 Изменение массы шарового слоя при увеличении его радиуса

Пусть имеется однородный массивный шар радиусом R и массой M. Выделим тонкий поверхностный шаровой слой. Подействуем внешними силами на этот слой в радиальном направлении и распределим его на бесконечность без придания ему кинетической энергии. В этом случае будет совершена некоторая работа против сил тяготения. Принимая во внимание связь массы с энергией можно положить, что масса шарового слоя возрастет соответственно затраченной работе при перемещении его с поверхности шара на бесконечность. После этого выделим следующий шаровой слой и опять, совершая работу внешними силами против сил тяготения, переместим его на бесконечность аналогично предыдущему слою. И так слой за слоем можно весь шар, перемещая его составляющие в радиальном направлении, распределить по бесконечности. Масса каждого шарового слоя при распределении его по бесконечности будет возрастать соответственно затраченной работе. В итоге масса всего шара возрастет до значения M_0.

Величина

$$\Delta M = M_0 - M \tag{1.1}$$

и будет представлять собой гравитационный дефект массы.

Теперь определим ΔM. Для этого выделим промежуточный тонкий шаровой слой массой Δm (рисунок 1.1).

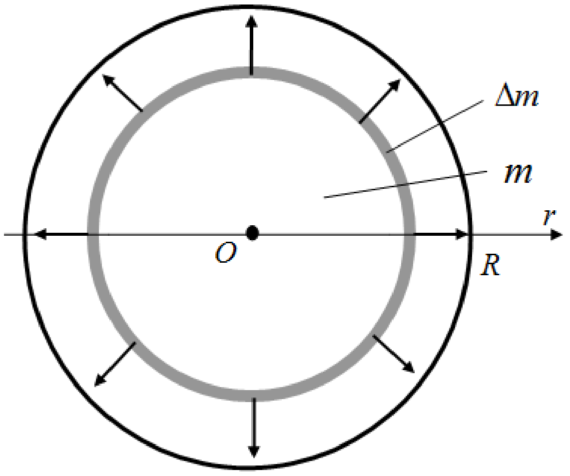


Рисунок 1.1 – Шаровой слой массы Δm

Внутри этого слоя сосредоточена масса m, определяемая радиусом r. При перемещении частиц этого слоя в радиальном направлении на dr будет совершена работа против сил тяготения. При этом будем учитывать взаимодействие только частиц шарового слоя Δm с массой m. Взаимодействием частиц самого слоя между собой пренебрежем ввиду малости величины. В этом случае элементарная работа против сил тяготения

$$\delta A = \frac{Gm\Delta m}{r^2} dr, \qquad (1.2)$$

где G – гравитационная постоянная.

Совершаемая согласно (1.2) работа приводит к росту массы шарового слоя

$$\delta A = c^2 d(\Delta m), \qquad (1.3)$$

где c – скорость света в вакууме.

Тогда приравнивая правые части выражений (1.2) и (1.3), получим

$$\frac{Gm\Delta m}{r^2} dr = c^2 d(\Delta m). \qquad (1.4)$$

Интегрируя выражение (1.4) в пределах от r до бесконечности, получаем

$$\Delta m(\infty) = \Delta m(r) \exp\left(\frac{Gm}{c^2 r}\right), \qquad (1.5)$$

где $\Delta m(\infty)$ и $\Delta m(r)$ – масса шарового слоя распределенного по бесконечности и в исходном положении.

2 Изменение массы всего шара

Масса всего шара при распределении его по бесконечности (свободная масса) будет определятся суммой масс всех шаровых слоев его составляющих. Это можно, учитывая выражение (1.5), выразить через интеграл вида

$$M_0 = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \exp\left(\frac{4\pi G \rho r^2}{3c^2}\right) dr, \qquad (2.1)$$

где принято, что масса шарового слоя

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr,$$

масса внутри шарового слоя

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3,$$

dr – толщина шарового слоя.

Следовательно, гравитационный дефект массы согласно (1.1) с учетом (2.1) можно определить выражением

$$\Delta M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \exp\left(\frac{4\pi G \rho r^2}{3c^2}\right) dr - M. \qquad (2.2)$$

Преобразуя последнее выражение путем разложения экспоненты в ряд, получим

$$\Delta M = M\left(\frac{3}{5}\frac{GM}{c^2 R} + \frac{3}{14}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2 + \ldots\right), \qquad (2.3)$$

где масса всего шара выражена через плотность и объем

$$M = V\rho = \frac{4}{3}\pi\rho R^3.$$

Тогда первое приближение для гравитационного дефекта массы, учитывая (2.3) составит

$$\Delta M_H = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{Rc^2}. \qquad (2.4)$$

Выражение (2.4) представляет собой отношение модуля потенциальной энергии шара в ньютоновской механике к величине c^2. Поэтому можно сделать вывод, что полученное соотношение (2.2) является обобщением гравитационного дефекта массы (2.4) для нерелятивистского случая.

3 Оценка величины гравитационного дефекта массы

Из сравнения выражений (2.3) и (2.4) следует, что гравитационный дефект массы (2.4) для нерелятивистского случая является меньшим, чем это следует из (2.2) или (2.3). Величина поправки определяется вторым и последующими слагаемыми в выражении (2.3). С учетом того, что отношение G/c^2 имеет порядок величины $\sim 10^{-28}$, величина поправки может быть ощутимой для тел больших масс и малых радиусов. С учетом этого величина поправки может быть ощутимой для тел больших масс и малых радиусов.

Оценим величину гравитационного дефекта масс для нейтронных звезд. Масса типичной нейтронной звезды $M \sim (1\text{–}2)\, M_\odot$, где $M_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца [10]. При этом звезда обладает радиусом $R \sim (10\text{–}14)$ км. Массовая плотность вещества в такой звезде в среднем $\rho \sim 10^{18}$ кг/м^3. Плотность в центре нейтронной звезды может на порядок превосходить нормальную ядерную плотность $\rho_0 = 2{,}8\cdot 10^{17}$ кг/м^3 [10].

Для звезды с массой равной одной солнечной $M_1 = M_\odot$ получим согласно выражению (2.1) (при $R = 10$ км средняя плотность нейтронной звезды составит величину $\rho = 4{,}78\cdot 10^{17}$ кг/м^3)

$$M_{01} = 2{,}19\cdot 10^{30} \text{ кг}.$$

Дефект массы такой звезды в процентах составит

$$\frac{\left(M_{01}-M_{1}\right)\cdot 100\%}{M_{01}}=8,6\%.$$

Для звезды с массой равной двум солнечным $M_2 = 2M_{\odot}$ получим (при $R = 14$ км средняя плотность нейтронной звезды составит величину $\rho = 3,48\cdot 10^{17}$ кг/м^3) $M_{02} = 4,6\cdot 10^{30}$ кг.

Тогда дефект массы составит

$$\frac{\left(M_{02}-M_{2}\right)\cdot 100\%}{M_{02}}=12\%.$$

Оценим также дефект масс для нейтронных звезд массой $M_{\odot}$ и $2M_{\odot}$ с плотностью $\rho = 10^{18}$ кг/м^3. Для массы $M_3 = M_{\odot}$ получим $M_{03} = 2,22\cdot 10^{30}$ кг.

Соответственно дефект масс будет равен

$$\frac{\left(M_{03}-M_{3}\right)\cdot 100\%}{M_{03}}=10\%.$$

Для массы $M_4 = 2M_{\odot}$ получим $M_{04} = 4,82\cdot 10^{30}$ кг. В этом случае дефект масс будет равен

$$\frac{\left(M_{04}-M_{4}\right)\cdot 100\%}{M_{04}}=17\%.$$

Отсюда следует, что большим в процентном отношении дефектом масс обладают нейтронные звезды большей массы и плотности.

Заключение

Таким образом, определен гравитационный дефект массы массивного шара. Величина гравитационного дефекта массы возрастает с увеличением плотности и массы шара. Эта величина является ощутимой (в процентном выражении) для нейтронных звезд. Из полученного выражения для величины гравитационного дефекта массы массивного шара следует соотношение для гравитационного дефекта массы в нерелятивистском случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сивухин*, *Д.В.* Общий курс физики в 5-ти т. Т. 1. Механика / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2005. – 560 с.

2. *Савельев*, *И.В.* Курс физики в 3 т. Т 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989. – 352 с.

3. *Матвеев*, *А.Н.* Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев – М.: ОНИКС 21 век, 2003. – 432 с.

4. *Детлаф*, *А.А.* Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк., 1989. – 608 с.

5. *Яворский*, *Б.М.* Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

6. *Ландау*, *Л.Д.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

7. *Окунь*, *Л.Б.* Понятие массы (Масса. Энергия. Относительность) / Л.Б. Окунь // Успехи физических наук. – 1989. – Т. 158, вып. 3. – С. 511–530.

8. *Сердюков*, *А.Н.* Калибровочная теория скалярного гравитационного поля / А.Н. Сердюков. – Гомель, Изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.

9. *Ахраменко*, *Н.А.* Масса массивной сферической оболочки с учетом гравитационного дефекта / Н.А. Ахраменко, Л.М. Булавко // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 13–15.

10. *Потехин*, *А.Ю.* Физика нейтронных звезд / А.Ю. Потехин // Успехи физических наук. – 2010. – Т. 180, № 12. – С. 1279–1304.

Поступила в редакцию 10.03.17.

ФИЗИКА

УДК 535.42

ОБОБЩЕННЫЕ АСИММЕТРИЧНЫЕ ПУЧКИ БЕССЕЛЯ – ГАУССА НЕПРЕРЫВНОГО ПОРЯДКА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

GENERALIZED ASYMMETRIC OF BESSEL – GAUSSIAN BEAMS OF THE CONTINUOUS ORDER

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Предложены новые решения параболического уравнения, описывающие обобщенные асимметричные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка. Они характеризуются пятью свободными непрерывными параметрами и обладают спиральным волновым фронтом. Установлены ограничения на эти параметры, при которых исследуемые фракционные пучки переносят конечную мощность. Проведено графическое моделирование таких пучков, которое подтверждает основные аналитические расчеты.

Ключевые слова: *асимметричные пучки, пучки Бесселя – Гаусса, квадратичная интегрируемость.*

The new solutions of the parabolic equation featuring the generalized asymmetric of Bessel – Gaussian beams of the continuous order are offered. They are characterized by five free continuous parametres and possess a spiral wavefront. Restrictions on these parametres at which explored fractional beams transfer terminating power are discovered. Pictorial modeling of such beams which confirms the main analytical calculations is fulfilled.

Keywords: *asymmetric beams*, *beams of Bessel – Gaussian*, *a square intergrability.*

Введение

В последнее время производится поиск и исследования новых типов световых пучков [1]–[5]. Большой интерес привлекают пучки Бесселя и пучки Бесселя – Гаусса (ПБГ) [5]–[11]. Как хорошо известно [6], пучки Бесселя обладают уникальным свойством бездифракционности. Вместе с тем, они переносят бесконечную мощность и не могут быть реализованы практически. Использование гауссовой аподизации функций Бесселя позволяет перейти к скалярным ПБГ [7], которые переносят конечную мощность и могут быть реализованы практически, хотя свойство бездифракционности, строго говоря, при этом нарушается. Свойства векторных ПБГ исследовались нами в [12], [13]. Фракционные обобщенные ПБГ были введены нами в [14] и найдены условия их физической реализуемости.

Недавно, в 2014–2016 годах, в [15]–[18] были введены и экспериментально получены асимметричные ПБГ (aBG-моды). В [19] нами были предложены асимметричные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка. В настоящей работе производится обобщение результатов [14]–[16], [19]. Найден новый тип пучков – обобщенных асимметричных ПБГ непрерывного порядка, сформулированы условия их физической реализуемости и обсуждаются их физические свойства.

1 Новый тип обобщенных асимметричных ПБГ непрерывного порядка

Исходя из 3D параболического уравнения [1], описывающего скалярные параксиальные монохроматические световые пучки, распространяющиеся в направлении оси z, и перейдя к цилиндрической системе координат нами в [14] было получено выражение

$$f=\frac{1}{q}\exp\left[i\left(\frac{k}{2q}\left(\rho^2-\left(\frac{Kz_0}{k}\right)^2\right)\right)\right]\times \\ \times\exp(i\nu\varphi)\,J_\nu\left(\frac{-iK\rho z_0}{q}\right), \quad (1.1)$$

описывающее обобщенные ПБГ непрерывного порядка ν. Здесь и далее фазовый множитель $\exp(ikz-i\omega t)$ опускается. Стандартные обозначения: $\rho^2=x^2+y^2$, азимутальный угол $\varphi=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$; J_ν – функции Бесселя I рода [20]. Постоянные разделения переменных ν и K в (1.1) являются свободными параметрами. В случае классических ПБГ [7] $K=k_\perp$, где $k_\perp$ – вещественная поперечная составляющая волнового вектора $\mathbf{k}=\mathbf{k}_\perp+\mathbf{k}_z$ и, кроме того, порядок (индекс) ν является целочисленным. Амплитуда f ПБГ в (1.1) содержит гауссиан $G=\frac{1}{q}\exp\left[\frac{ik\rho^2}{2q}\right]$, комплексный параметр пучка $q=z-q_0$. Величины w_0 и $z_0=\frac{kw_0^2}{2}$ – характерные размеры пучка вдоль осей OX и OZ соответственно.

Чтобы получить выражения, характеризующие асимметричные ПБГ непрерывного порядка ν, перейдем в (1.1) к новым поперечным переменным соотношениями

$$x_1 = x - x_0,$$
$$y_1 = y - y_0,$$
$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad (1.2)$$

где константы x_0, y_0 – произвольные комплексные параметры смещений поперечных координат x и y. Получаем [19]

$$f = \frac{1}{q}\exp\left[i\left(\frac{k}{2q}\left(r_1^2 - \left(\frac{Kz_0}{k}\right)^2\right)\right)\right]\times \\ \times\left[\frac{x_1 + iy_1}{r_1}\right]^{\nu} J_{\nu}\left(\frac{-iKr_1 z_0}{q}\right). \quad (1.3)$$

Здесь набег комплексной фазы $\exp(i\nu\varphi)$ представлен в другой форме, чем в (1.1), использующей известную формулу

$$arctg(t) = \left(-\frac{i}{2}\right)\ln\left[\frac{1+it}{1-it}\right],$$

которая применялась недавно физиками в [11], [15]–[18] для описания асимметричных мод и ранее в работе [21] для описания 2-D волнового пакета X-волн Бесселя.

Асимметричные ПБГ (1.3) зависят от трех переменных (x, y, z) и семи параметров $(k, K, z_0, q_0, x_0, y_0, \nu)$. Число независимых свободных параметров можно уменьшить, если перейти к безразмерным величинам соотношениями:

$$X_1 = \frac{x_1}{w_0} = X - X_0,\ Y_1 = \frac{y_1}{w_0} = Y - Y_0,$$

$$Z = \frac{z}{z_0},\ K_1 = Kw_0,\ \ R_1 = \frac{r_1}{w_0} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}. \quad (1.4)$$

Введем также безразмерный параметр пучка $Q = \dfrac{q}{z_0} \equiv Z - Q_0$. Теперь асимметричные обобщенные ПБГ (1.3) зависят от трех безразмерных переменных (X, Y, Z), пяти безразмерных свободных параметров $(X_0,\ Y_0,\ Q_0,\ K_1,\ \nu)$ и описываются выражением [19]

$$f = \frac{1}{Q}\exp\left[\frac{i}{Q}\left(R_1^2 - \frac{K_1^2}{4}\right)\right]\times \\ \times\left[\frac{X_1 + iY_1}{R_1}\right]^{\nu} J_{\nu}\left(\frac{-iK_1 R_1}{Q}\right). \quad (1.5)$$

2 Условия физической реализуемости новых асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка

Пучок будем считать физически реализуемым, если его комплексная амплитуда является конечной во всем пространстве, а переносимая им мощность через любое сечение, перпендикулярное оси пучка, также является конечной. Эти требования сводятся к непрерывности и квадратичной интегрируемости (КИ) комплексной амплитуды пучка.

Проанализируем условия физической реализуемости новых асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка (1.5). Основной вклад в КИ ПБГ (1.5) вносит гауссиан *G*. Для стандартного G условие КИ [1]: $\mathrm{Im}(Q_0) > 0$. Множитель $\exp\left(-\dfrac{iK_1^2}{4Q}\right)$ в (1.5) не зависит от поперечных координат и не влияет на КИ. Несложно показать, что комплексные смещения X_0 и Y_0 также не влияют на КИ гауссиана, а лишь приводят к его децентровке. При $Z \to \infty$ гауссиан $G \to 0$.

Стандартные ПБГ характеризуются вещественным параметром K_1. Комплексность масштабирующего параметра K_1 не нарушает КИ амплитуды пучка *f* из-за гауссиана, поэтому на параметр K_1 не накладываются никакие ограничения и он может быть произвольным комплексным числом. Поэтому пучки (1.5) с комплексным параметром K_1 являются обобщенными ПБГ.

При $|u| \to \infty$ функция

$$J_{\nu}(u) \to \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\cos\left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots$$

[20]. Поэтому функция $J_{\nu}(u)$ не нарушает достаточного условия $\mathrm{Im}(Q_0) > 0$ КИ гауссиана в (1.5).

Так как функция Бесселя имеет особенность при $u \to 0$, то отсюда следует необходимость $\mathrm{Re}(\nu) > 0$. Как показывают анализ и графическое моделирование, наличие мнимой части параметра порядка ν приводит к разрывам в графиках интенсивности для функции $f(X, Y, Z)$, что недопустимо. Отсюда следует, что индекс ν должен быть вещественным и неотрицательным, т. е. $\nu \ge 0$.

Итак, общие условия физической реализуемости новых обобщенных асимметричных ПБГ (1.5) непрерывного порядка [19] следующие**:**

$$Q_0'' > 0 \ \text{ и } \ \nu \ge 0. \quad (2.1)$$

Поскольку индекс ν может принимать непрерывные значения, то фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной 2π. Пучки, обладающие таким свойством, называются фракционными [2]–[5], [22]. Поэтому обсуждаемые нами новые обобщенные асимметричные ПБГ являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт.

В давней работе Валдрона [23] использовалась неортогональная спиральная (цилиндрическая вращающаяся) система координат. Для уравнения Гельмгольца было получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя. В отличие от обычных световых полей Бесселя индекс (порядок) ν таких полей не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений: $\nu \geq 0$. Согласно интерпретации Оверфельт [24] в таких случаях непрерывный индекс ν связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волны Бесселя.

Основными результатами настоящей работы являются выражения (1.5) и (2.1). Непрерывный порядок ν дает основание полученные пучки (1.5) трактовать, как фракционные асимметричные обобщенные ПБГ, которые обладают спиральным волновым фронтом. В частных случаях, когда неотрицательный индекс (порядок) ν асимметричных обобщенных ПБГ (1.5) становится целым числом и $X_0 = Y_0 = 0$, наши выражения (1.5) эквивалентны выражениям для обобщенных ПБГ, рассматриваемых в работах [8]–[10]. Заметим, однако, что наши более общие формулы (1.5) имеют в то же время более простую форму, чем соответствующие формулы в [8]–[10].

3 Обсуждение результатов

Известно [7], что для стандартных ПБГ картина интенсивности состоит из светлых колец, амплитуда которых постепенно убывает от оси пучка. Вещественные части параметров X_0 и Y_0 приводят лишь к смещению пучка параллельно оси OZ, без изменения его формы, поэтому нами не рассматриваются. Мнимые же части параметров X_0 и Y_0 приводят к сильному искажению пространственной формы ПБГ и их асимметрии. При непрерывном изменении индекса ν амплитуда пучков (1.5) и их интенсивности изменяются также непрерывно и плавно.

Нами проводилось компьютерное моделирование интенсивности в поперечных сечениях асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка в зависимости от нескольких свободных параметров. В качестве примеров на рисунках 3.1 и 3.2 изображены 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка в поперечном сечении с общими параметрами: $\nu = 1.5;$ $X_0 = 0;$ $Y_0 = 0.05i.$ Полагаем во всех случаях $Q_0 = i,$ что соответствует обычной нормировке гауссиана.

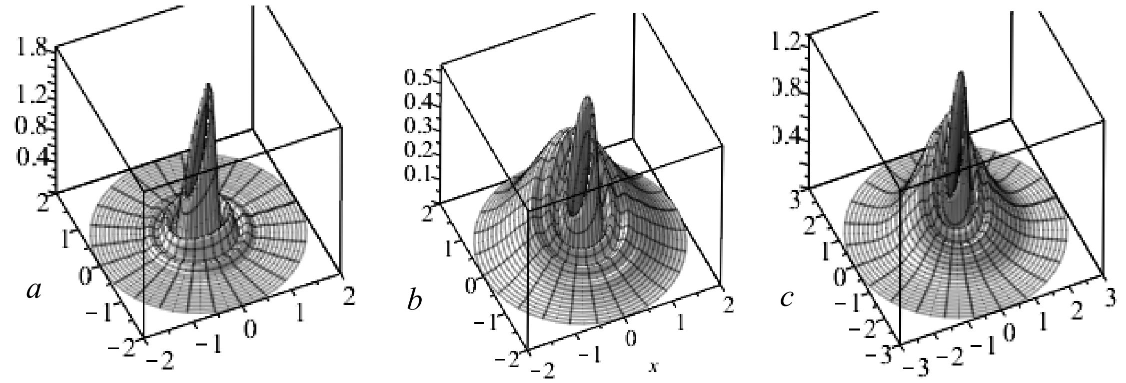


Рисунок 3.1 – 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных пучков Бесселя – Гаусса непрерывного порядка с общими параметрами: $Q_0 = i;$ $\nu = 1.5,$ $X_0 = 0;$ $Y_0 = 0.05i.$
Варианты: *a*) $K_1 = 10;$ $Z = 0;$ *b*) $K_1 = 10 - 2i;$ $Z = 0;$ *c*) $K_1 = 10;.$ $Z = 0.2.$

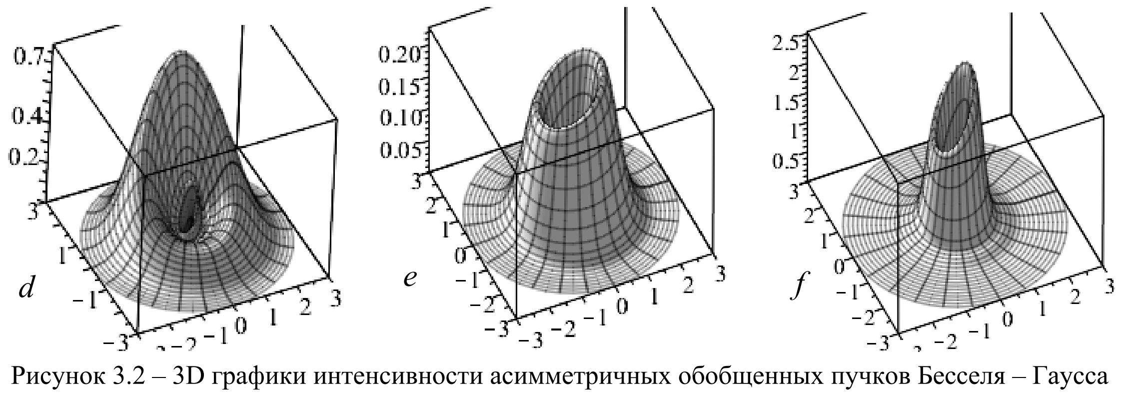


Рисунок 3.2 – 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных пучков Бесселя – Гаусса непрерывного порядка с общими параметрами: $Q_0 = i;$ $\nu = 1.5;$ $X_0 = 0;$ $Y_0 = 0.05i;$ $Z = 0.2.$
Варианты: *d*) $K_1 = 10 - i;$ *e*) $K_1 = -i;$ *f*) $K_1 = -4$

Интенсивность пучка в каждой точке поперечного сечения пропорциональна ординате пространственной фигуры. Так как $\nu > 1$, то все изображенные пучки – полые. На рисунках 3.1 взято $\mathrm{Re}(K_1) = 10$, что соответствует преобладанию вклада функции Бесселя над вкладом функции Гаусса. На рисунке 3.1, *a* видно, что ПБГ с нецелым порядком ведет себя качественно, как обычный асимметричный ПБГ. На рисунке 3.1, *a* и 3.1, *b* видно, что изменение $\mathrm{Im}(K_1)$ приводит к существенному изменению 3D картины интенсивности. Рисунки 3.1, *a* и 3.1, *c* характеризуют влияние роста расстояния *Z*. Рисунки 3.2, *f*, 3.2, *e* и 3.1, *b*, 3.2, *d* иллюстрируют пригодность вещественных отрицательных, чисто мнимых и комплексных параметров K_1.

Как и следовало ожидать, при комплексных K_1, X_0 и Y_0 и нецелых ν картины интенсивности существенно усложняются. Например, с увеличением $\mathrm{Im}(K_1)$ и ростом расстояния Z кольца картины, обусловленные функцией Бесселя, постепенно исчезают; с ростом мнимого смещения $\mathrm{Im}(Y_0)$ пик интенсивности возрастает.

Заключение

Выведены выражения, описывающие новый тип пучков – обобщенные асимметричные ПБГ непрерывного порядка, обладающие спиральным волновым фронтом. Они характеризуются пятью свободными параметрами: одним вещественным непрерывным ν и четырьмя комплексными параметрами (X_0, Y_0, Q_0, K_1). Частными случаями введенных здесь пучков являются известные обобщенные ПБГ с дискретными целочисленными индексами ν, фракционные пучки Бесселя со спиральным волновым фронтом, а также асимметричные ПБГ Котляра и Ковалева.

Найдены условия физической реализуемости новых типов пучков во всем пространстве: $Q_0'' > 0$ и $\nu \geq 0$. Одновременный переход от дискретных значений ν к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям параметра K_1 сильно расширяет класс известных в настоящее время асимметричных ПБГ. Варьирование новых свободных параметров таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

Проведено графическое моделирование интенсивности таких пучков, которое подтверждает основные аналитические результаты.

Для экспериментального получения спиральных обобщенных асимметричных ПБГ непрерывного порядка могут быть использованы некоторые методики получения асимметричных [15]–[18] и фракционных [5] пучков.

В настоящем сообщении обсуждались скалярные асимметричные обобщенные ПБГ непрерывного порядка. Несложно перейти к соответствующим векторным пучкам с произвольной поляризацией, используя, например, формализм, предложенный нами в [25], [26].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев*, *А.П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.

2. *Gutierrez-Vega*, *J.C.* Fractionalization of optical beams: I. Planar Analysis / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 11. – P. 1521–1523.

3. *Gutierrez-Vega*, *J.C.* Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, № 10. – P. 6300–6313.

4. *Gutierrez-Vega*, *J.C.* Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / J.C. Gutierrez-Vega, C. Lopez-Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8 pp).

5. *Tao*, *S.H.* Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, Xiaocong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43, № 1. – P. 122–126.

6. *Durnin*, *J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA A. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.

7. *Gori*, *F.* Bessel – Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics Communications. – 1987. – Vol. 64, № 6. – P. 491–495.

8. *Generalized Bessel – Gauss beams* / V. Bagini [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43, № 6. – P. 1155–1166.

9. *Imaging of generalized Bessel-Gauss beams* / C. Palma [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43, № 11. – P. 2269–2277.

10. *Santarsiero*, *M.* Propagation of general Bessel-Gauss beams throught ABCD optical systems / M. Santarsiero // Optics Communications. – 1996. – Vol. 132. – P. 1–7.

11. *Котляр*, *В.В.* Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, Сойфер В.А. // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 4–9.

12. *Гиргель*, *С.С.* Поляризационные свойства бессель-гауссовых пучков света / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6 (9). – С. 150–154.

13. *Гиргель*, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных бессель-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 1. – С. 49–52.

14. *Гиргель*, *С.С.* Обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (25). – С. 10–15.

15. *Ковалев*, *А.А.* Вращающиеся элегантные пучки Бесселя – Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 162–168.

16. *Kotlyar*, *V.V.* Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // Journ. Opt. Soc. Am. A. – 2014. – Vol. 31, № 9. – P. 1977–1983.

17. *Kotlyar*, *V.V.* Asymmetric Bessel – Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Journ. Appl. Phys. – 2016. – Vol. 120. – P. 023101(5).

18. *Порфирьев*, *А.П.* Оптический захват и перемещение микрочастиц с помощью асимметричных пучков Бесселя – Гаусса / А.П. Порфирьев, А.А. Ковалев, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 2. – С. 152–157.

19. *Гиргель С.С.* Асимметричные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка // Проблемы взаимодействия излучения с веществом. Материалы IV Международной научной конференции, посвященной 90-ю со дня рождения Б.В. Бокутя (Гомель, 9-10 ноября 2016 года). Ч. 1. Электронное издание. – Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины. – 2016. – С. 24–31.

20. *Бейтмен*, *Г.* Высшие трансцендентные функции. II / Г. Бейтмен, А. Эрдейи // М.: Наука, 1974. – 295 с.

21. *Christodoulides*, *D.N.* Bessel X waves in two- and three-dimensional bidispersive optical systems / D.N. Christodoulides, N.K. Efremidis, P.D. Trapani, B.A. Malomed // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29, № 13. – P. 1446–1448.

22. *Berry*, *M.V.* Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003, № 6. – P. 259–268.

23. *Waldron*, *R.A.* A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R.A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. XI, Pt. 4. – P.438–461.

24. *Overfelt*, *P.L.* Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev. A. – 1992. – Vol. 46, № 6. – P. 3516–3522.

25. *Гиргель*, *С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 11–14.

26. *Гиргель*, *С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.

Поступила в редакцию 21.02.17.

УДК 539.12.01

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА О СВЯЗАННЫХ *S*-СОСТОЯНИЯХ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ ПОТЕНЦИАЛОВ «δ-СФЕРА»

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай, М.С. Данильченко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

RELATIVISTIC BOUND *S*-STATES PROBLEM FOR SUPERPOSITION OF TWO POTENTIALS «δ-SPHERE» TYPE

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai, M.S. Danilchenko

F. Scorina Gomel State University

Найдены точные решения релятивистских двухчастичных уравнений квазипотенциального типа для связанных состояний в случае потенциала «δ-сфера» в релятивистском конфигурационном представлении и в случае суперпозиции двух таких потенциалов. На основании анализа полученных условий квантования энергии найдены знаки коэффициентов в δ-потенциалах, при которых возможно существование связанных состояний и определено максимально возможное количество таких состояний.

Ключевые слова: *релятивистское двухчастичное уравнение*, *релятивистское конфигурационное представление*, *дельта-потенциал*, *связанное состояние*, *условие квантования энергии.*

The exact solutions of relativistic two-particle quasipotential type equations for bound states in the case of the potential «δ-sphere» in the relativistic configuration representation and in the case of the superposition of two such potentials are considered. The signs of the coefficients in the δ-potentials that allow the existence of bound states and the maximum possible number of this states are defined on the basis of the analysis of the energy quantization conditions.

Keywords: *relativistic two-particle equation*, *relativistic configurational representation*, *delta-function potential*, *bound state*, *energy quantization condition.*

Введение

В работе [1] были получены точные решения релятивистских двухчастичных уравнений квазипотенциального типа с потенциалами «δ-сфера» в релятивистском конфигурационном представлении и суперпозицией двух таких потенциалов в случае *s*-состояний рассеяния. Эти потенциалы представляют интерес как с точки зрения возможности получения точных решений уравнений квантовой теории, так и с точки зрения их использования для моделирования взаимодействия в реальных физических системах. Например, в недавних работах [2], [3] потенциалы, представленные суперпозицией «δ-сфер», были использованы для описания нуклон-нуклонных взаимодействий в рамках нерелятивистской квантовой теории. Исследование взаимодействий с применением суперпозиции произвольного числа δ-потенциалов в рамках релятивистской теории оказывается намного более сложной задачей. Поэтому следует прежде всего рассмотреть более простые случаи одного и суперпозиции двух потенциалов «δ-сфера». В то же время описание составных систем без рассмотрения связанных состояний является неполным. В настоящей работе найдены точные решения релятивистских двухчастичных уравнений квазипотенциального типа с потенциалом «δ-сфера» и суперпозицией двух таких потенциалов в случае связанных *s*-состояний. Решение аналогичной задачи в одномерном случае было получено в работе [4].

1 Точное решение двухчастичных уравнений в РКП с δ-потенциалом

Уравнения для волновых функций *s*-состояний рассеяния систем двух скалярных частиц одинаковой массы m имеют форму [5], [6]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q m r) + \int\limits_0^\infty G_{(j)}(\chi_q, r, r')V(r')\psi_{(j)}(\chi_q, r')dr', \tag{1.1}$$

где индекс j соответствует одному из четырёх уравнений квазипотенциального типа [7]–[9]: $j=1$ $(j=3)$ – уравнению Логунова – Тавхелидзе (модифицированному), $j=2$ $(j=4)$ – уравнению Кадышевского (модифицированному). В уравнениях (1.1) величина $\chi_q \geq 0$ – быстрота, связанная с энергией для состояний рассеяния как $2E_q = 2m\operatorname{ch}\chi_q$, r − модуль радиус-вектора в РКП, $V(r)$ − потенциал. Парциальные функции Грина $G_{(j)}(\chi_q, r, r')$ имеют вид

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \tag{1.2}$$

где [4], [5]

$$G_{(1)}(\chi_q,r)=\frac{-i}{K_q^{(1)}}\frac{\mathrm{sh}[(\pi/2+i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr/2)},$$

$$G_{(2)}(\chi_q,r)=\frac{(4m\ \mathrm{ch}\chi_q)^{-1}}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)}-\frac{i}{K_q^{(2)}}\frac{\mathrm{sh}[(\pi+i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr)},$$

$$G_{(3)}(\chi_q,r)=\frac{-i}{K_q^{(3)}}\frac{\mathrm{ch}[(\pi/2+i\chi_q)mr]}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)},$$

$$G_{(4)}(\chi_q,r)=\frac{-i}{K_q^{(4)}}\frac{\mathrm{sh}[(\pi+i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr)}.$$

В формулах (1.2) использованы обозначения

$$K_q^{(1)}=K_q^{(2)}=m\ \mathrm{sh}\,2\chi_q;$$

$$K_q^{(3)}=K_q^{(4)}=2m\ \mathrm{sh}\,\chi_q.$$

Для связанных состояний уравнения (1.1) модифицируются к однородному виду, а быстрота становится мнимой ($\chi_q=iw_q$, где $0\le w_q<\pi/2$, $2E_q=2m\cos w_q$):

$$\psi_{(j)}(iw_q,r)=\\=\int_0^\infty G_{(j)}(iw_q,r,r')V(r')\psi_{(j)}(iw_q,r')dr'. \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что в нерелятивистском пределе уравнения (1.1)–(1.3) переходят в соответствующие уравнения квантовой механики, – неоднородное и однородное интегральные уравнения Шрёдингера в координатном представлении [10] для состояний рассеяния и связанных состояний, соответственно.

Рассмотрим решения релятивистских уравнений для связанных состояний (1.3) в случае взаимодействия, задаваемого δ-потенциалом:

$$V(r)=V_0\delta(r-a), \tag{1.4}$$

где V_0 и $a>0$ – вещественные константы. Подстановка потенциала в уравнения и вычисление интегралов приводит к выражениям

$$\psi_{(j)}(iw_q,r)=V_0G_{(j)}(iw_q,r,a)\psi_{(j)}(iw_q,a), \tag{1.5}$$

где величины $\psi_{(j)}(\chi_q,a)$ – неизвестны. Неравенство нулю этих величин возможно только, если выполняются следующие условия:

$$V_{0(j)}=\left[G_{(j)}(iw_q,a,a)\right]^{-1}=\\=\left[G_{(j)}(iw_q,0)-G_{(j)}(iw_q,2a)\right]^{-1}, \tag{1.6}$$

которые являются условиями квантования для величины w_q (по сути, условиями квантования энергии $2E_q=2m\cos w_q$). В условиях (1.6) параметр потенциала V_0 представлен как функция энергетического параметра w_q. Разумеется, было бы удобнее, чтобы величина w_q (или E_q) была функцией V_0, но в рассматриваемых случаях решение соответствующих уравнений в аналитической форме невозможно. Для четырёх рассматриваемых квазипотенциальных уравнений условия (1.6) имеют следующий вид:

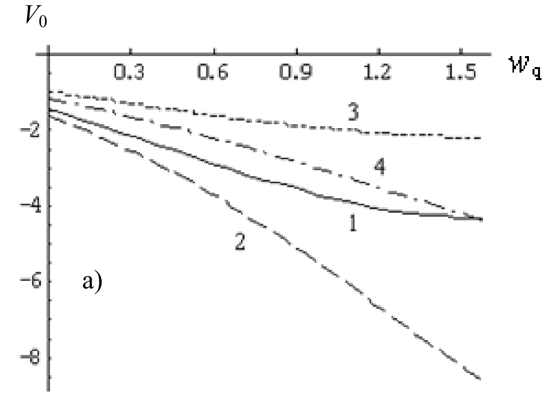
$$V_{0(1)}=\\=\frac{\pi m\sin 2w_q}{2w_q+\pi\left[2\mathrm{sh}^2(w_qma)-\mathrm{sh}(2w_qma)\mathrm{cth}(\pi ma)\right]}; \tag{1.7}$$

$$V_{0(2)}=\left(\pi m\sin 2w_q\right)/\left[w_q+\pi\left[\frac{\mathrm{sh}^2\left(\pi ma/2\right)\sin w_q}{\mathrm{ch}(\pi ma)}+\right.\right.\\\left.\left.+2\mathrm{sh}^2(w_qma)-\mathrm{sh}(2w_qma)\mathrm{cth}(2\pi ma)\right]\right];$$

$$V_{0(3)}=\frac{2m\sin w_q}{2\mathrm{sh}^2(w_qma)-\mathrm{th}(\pi ma)\mathrm{sh}(2w_qma)};$$

$$V_{0(4)}=\frac{2\pi m\sin w_q}{w_q+\pi\left[2\mathrm{sh}^2(w_qma)-\mathrm{sh}(w_qma)\mathrm{cth}(2\pi ma)\right]}.$$

Из выражений (1.7) следует, что связанные состояния могут существовать только, если $V_0<0$. На рисунке 1.1 представлены результаты численных расчётов зависимостей $V_0\left(w_q\right)$, заданных формулами (1.7). На рисунке видно, что при моделировании взаимодействия δ-потенциалом может существовать только один энергетический уровень (одно значение w_q при фиксированных остальных параметрах).



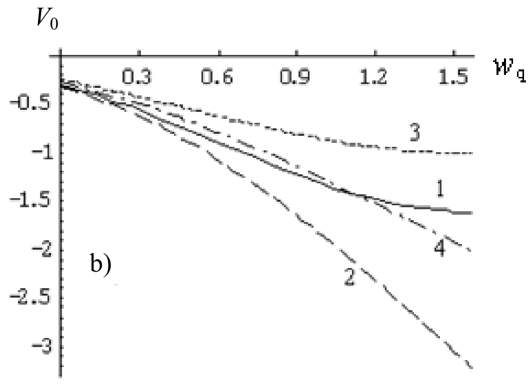


Рисунок 1.1 – Условия квантования энергии связанных состояний для δ-потенциала (a – условия квантования при $m=1$, $a=1$; b – условия квантования при $m=0,5$, $a=2$)

Неизвестные величины $\psi_{(j)}(iw_q, a)$ в волновых функциях (1.5) легко определяются из условия нормировки, которое может быть выбрано в нерелятивистской форме:

$$\int_0^\infty \psi^2_{(j)}(iw_q, r)dr = 1, \quad (1.8)$$

одинаковой для всех четырёх уравнений.

2 Решение в случае суперпозиции двух δ-потенциалов

Найдём теперь решения уравнений для связанных состояний (1.3) в случае суперпозиции двух δ-потенциалов:

$$V(r) = V_1\delta(r-a_1) + V_2\delta(r-a_2), \quad (2.1)$$

где $V_{1,2}$, $a_{1,2}$ – вещественные постоянные и $a_2 > a_1 > 0$. Подстановка потенциала (2.1) в уравнения (1.3) приводит к равенствам

$$\psi_{(j)}(iw_q, r) = \sum_{s=1}^{2} V_s G_{(j)}(iw_q, r, a_s)\psi_{(j)}(iw_q, a_s), \quad (2.2)$$

содержащим две неизвестные величины $\psi_{(j)}(iw_q, a_1)$, $\psi_{(j)}(iw_q, a_2)$. Взяв эти равенства в точках $r = a_1$ и $r = a_2$, получим однородную систему двух линейных алгебраических уравнений относительно $\psi_{(j)}(iw_q, a_1)$, $\psi_{(j)}(iw_q, a_2)$. Условия существования ненулевых решений являются условиями квантования энергии. Можно показать, что для всех четырёх рассматриваемых квазипотенциальных уравнений они представляются в виде

$$\prod_{s=1}^{2}\left[1 - V_s G_{(j)}(iw_q, a_s, a_s)\right] - \\ -V_1V_2G^2_{(j)}(iw_q, a_2, a_1) = 0. \quad (2.3)$$

Эти условия при $a_2 \to \infty$ преобразуются в условия квантования (1.6) для одного δ-потенциала.

На рисунке 2.1 приведены некоторые численные результаты для уравнений (2.3). Из него видно, что для суперпозиции двух δ-потенциалов могут существовать один или два энергетических уровня.

Для более детального анализа выражений (2.3) определим $V_2 = \alpha V_1$, где α – безразмерный параметр ($\alpha \neq 0$). Тогда равенства (2.3) принимают форму квадратных уравнений относительно V_1, решая которые, можно получить следующие два выражения для каждого *j*:

$$V^{\pm}_{1(j)} = \Big[\alpha G_{(j)}(iw_q, a_2, a_2) + G_{(j)}(iw_q, a_1, a_1) \pm \\ \pm\sqrt{D_{(j)}(iw_q, a_1, a_2)}\Big] / \Big[2\alpha\Big(G_{(j)}(iw_q, a_1, a_1)\times \\ \times G_{(j)}(iw_q, a_2, a_2) - G^2_{(j)}(iw_q, a_2, a_1)\Big)\Big], \quad (2.4)$$

где

$$D_{(j)}(iw_q, a_1, a_2) = \\ = \Big[G_{(j)}(iw_q, a_1, a_1) - \alpha G_{(j)}(iw_q, a_2, a_2)\Big]^2 + \\ +4\alpha G^2_{(j)}(iw_q, a_2, a_1).$$

Численные результаты для выражений (2.4) при $V_1 = V_2$ ($\alpha = 1$) и при $V_1 = -V_2$ ($\alpha = -1$) показаны на рисунках 2.2 и 2.3 соответственно.

На рисунках видно, а из выражений (2.4) следует, что для каждого значения w_q при фиксированных значениях параметров m, a_1, a_2, α существуют два значения величины V_1. При этом, связанные состояния могут существовать, если выполняется одно из условий: 1) $V_1 < 0$, $V_2 < 0$; 2) $V_1 < 0$, $V_2 > 0$; 3) $V_1 > 0$, $V_2 < 0$. Если $V_1 > 0$, $V_2 > 0$, то связанные состояния не существуют.

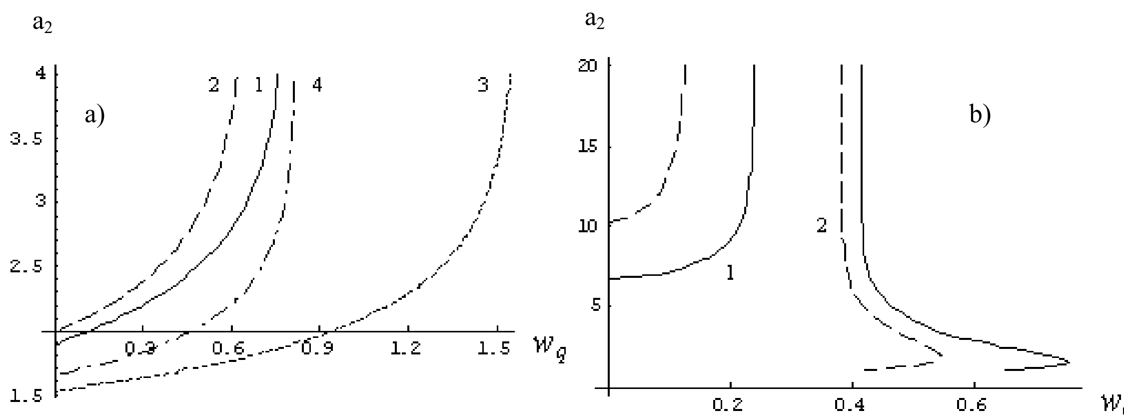


Рисунок 2.1 – Условия квантования энергии связанных состояний для суперпозиции двух δ-потенциалов
(a – условия квантования при $m = 1$, $a_1 = 1$, $V_1 = 7$, $V_2 = -2$;
b – условия квантования при $m = 1$, $a_1 = 1$, $V_1 = -2$, $V_2 = -1$)

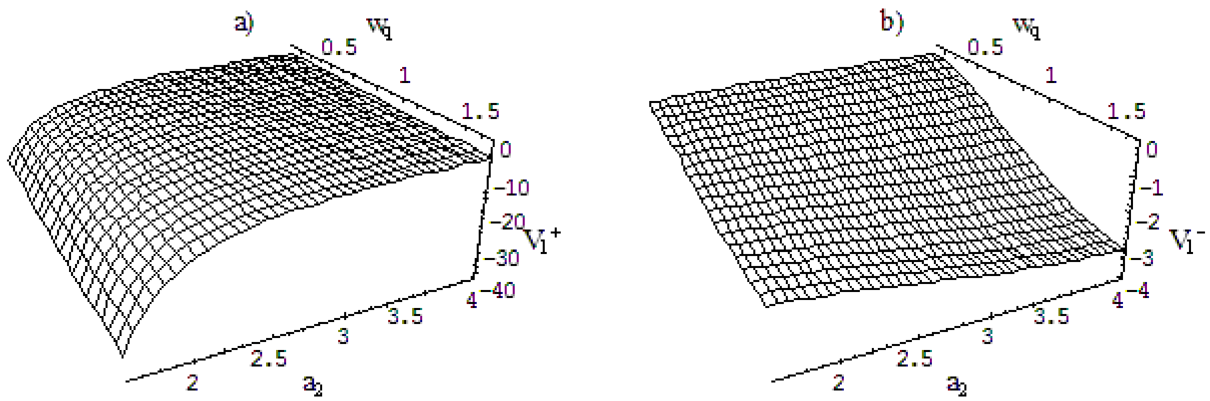


Рисунок 2.2 – Условия квантования энергии в случае $j = 1$ для суперпозиции двух δ-потенциалов (a – для V_1^{+}; b – для V_1^{-} при $m = 1$, $a_1 = 1$, $\alpha = 1$)

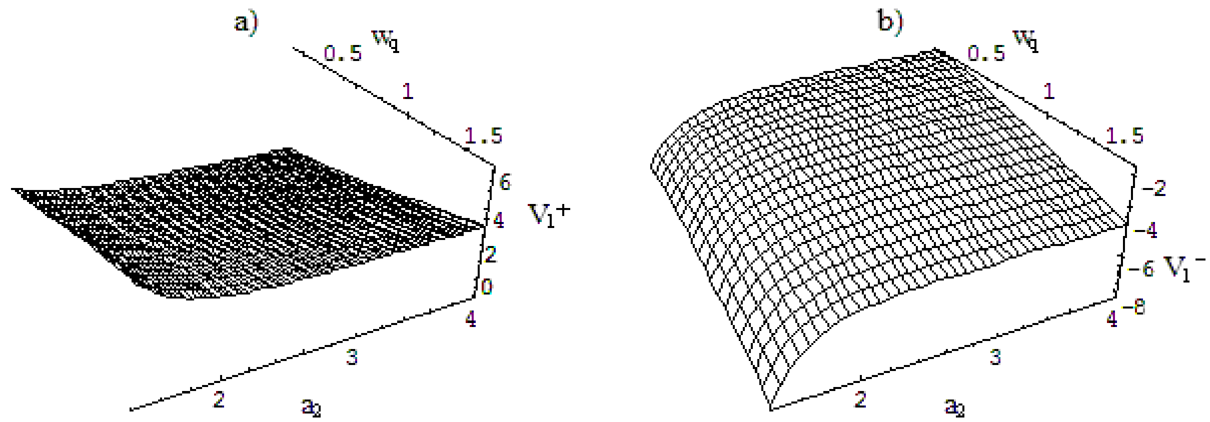


Рисунок 2.3 – Условия квантования энергии в случае $j = 4$ для суперпозиции двух δ-потенциалов (a – для V_1^{+}; b – для V_1^{-} при $m = 1$, $a_1 = 1$, $\alpha = -1$)

3 Нерелятивистский предел

Определим теперь нерелятивистский предел полученных результатов. В этом пределе ($w_q \to 0$, $m \to \infty$) полученные условия квантования (1.7), (2.4) имеют одинаковый для всех рассматриваемых уравнений вид

$$\lim_{\substack{w_q \to 0 \\ m \to \infty}} V_{0(j)}(w_q) = = V_{0(0)}(\kappa) = \frac{-2\kappa}{1-\exp(-\kappa a)}, \tag{3.1}$$

$$1 + \frac{1}{\kappa}\sum_{s=1}^{2} V_s \exp(-\kappa a_s)\,\mathrm{sh}(\kappa a_s) + + \frac{V_1 V_2}{\kappa^2}\exp(-\kappa a_2)\,\mathrm{sh}(\kappa a_1)\,\mathrm{sh}(\kappa a_2 - \kappa a_1) = 0, \tag{3.2}$$

где $\kappa = w_q m$. Выражения (3.1), (3.2) совпадают с условиями, полученными при решении уравнения Шрёдингера с потенциалом «δ-сфера» в координатном представлении и суперпозицией двух таких потенциалов.

Заключение

В данной работе получены точные решения релятивистской задачи о связанных s-состояниях системы двух скалярных частиц одинаковой массы. Решение задачи найдено на основании четырёх вариантов двухчастичных уравнений квазипотенциального типа в случае моделирования взаимодействия δ-потенциалом и суперпозицией двух таких потенциалов в релятивистском конфигурационном представлении. В ходе анализа найденных аналитических выражений для условий квантования энергии были определены знаки коэффициентов в δ-потенциалах, при которых возможно существование связанных состояний, а также максимально возможное число этих состояний. Нерелятивистский предел полученных выражений совпадает с соответствующими выражениями, полученными при решении аналогичных задач квантовой механики. Эти результаты будут полезны при решении задач о связанных состояниях систем двух частиц в случае моделирования взаимодействий суперпозициями большего числа потенциалов «δ-сфера», что представляется перспективным для релятивистского описания нуклон-нуклонных взаимодействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капшай*, *В.Н.* Релятивистская задача о *s*-состояниях рассеяния для суперпозиции двух потенциалов «δ-сфера» / В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 7–12.

2. *Navarro-Perez*, *R*. Effective Interactions in the delta-shells potential / R. Navarro-Perez, J.E. Amaro, E. Ruiz-Arriola // Few Body Syst. – 2013. – Vol. 54, № 7–10. – P. 1487–1490.

3. *Navarro-Perez*, *R*. Phenomenological high precision neutron-proton delta-shell potential / R. Navarro-Perez, J.E. Amaro, E. Ruiz-Arriola // Phys. Lett. B. – 2013. – Vol. 724, № 1–3. – P. 138–143.

4. *Kapshai*, *V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

5. *Капшай*, *В.Н.* Разложение по матричным элементам УНП группы Лоренца и интегральные уравнения для релятивистских волновых функций / В.Н. Капшай, Т.А. Алфёрова // Ковариантные методы в теоретической физике: Сб. ст. // Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 1997. – Вып. 4. – С. 88–95.

6. *Alferova*, *T.A*. Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Nonlinear phenomena in complex systems: Proced. of the Sixth Annual Seminar NPCS'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk, 1998. – P. 78–85.

7. *Logunov*, *A.A*. Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

8. *Kadyshevsky*, *V.G*. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.

9. *Кадышевский*, *В.Г.* Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

10. *Тейлор*, *Дж.* Теория рассеяния / Дж. Тейлор. – М.: Мир, 1975. – 568 с.

Поступила в редакцию 28.02.17.

УДК 537.87

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕШЕТОК С ВОЗМОЖНОСТЬЮ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЭНЕРГИИ В СПЕКТРЕ РАССЕЯННОГО СВЧ И ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Л.А. Калоша[1], **Л.С. Гайда**[2], **В.Н. Комар**[2], **Д.В. Заерко**[2]

[1]*Гродненский государственный колледж техники, технологий и дизайна*
[2]*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы*

MODELING OF DIELECTRIC GRATINGS TO CONTROL THE REDISTRIBUTION OF ENERGY IN THE SPECTRUM OF THE SCATTERED MICROWAVE OPTICAL AND ELECTROMAGNETIC FIELDS

L.A. Kalosha[1], **L.S. Gaida**[2], **V.N. Komar**[2], **D.V. Zaerko**[2]

[1]*Grodno State College of Engineering, Technology and Design*
[2]*Y. Kupala Grodno State University*

Приведены методика построения модели и обоснование выбора построения периодических структур на основе диэлектрических брусьев с возможностью изменения коэффициента диэлектрической проницаемости. Представлены результаты моделирования рассеяния электромагнитных волн СВЧ и оптического диапазонов в периодических структурах на основе диэлектрических брусьев с изменяемыми электрофизическими параметрами. Показано влияние изменения диэлектрической проницаемости компонентов структуры на перераспределение энергии между гармониками рассеянного электромагнитного излучения.

Ключевые слова: *периодические диэлектрические структуры, коэффициент диэлектрической проницаемости, изменения S-параметров, управление характеристиками распространения СВЧ и оптического излучения.*

The choice of the periodic structures based on hollow dielectric rods with filling, which offer the possibility to vary the dielectric constant is considered. The simulation results obtained for scattering of microwave and optical ranges electromagnetic radiation in equidistant structures based on dielectric rods with variable electrophysical parameters are given. The effect of variations in the dielectric constant of the structural components on the energy redistribution of harmonics of the scattered electromagnetic radiation is demonstrated.

Keywords: *periodic dielectric structures, dielectric constant, s-parameter changes, control of the propagation characteristics of microwave and optical ranges electromagnetic radiation.*

Введение

Создание материалов с определенными электрофизическими свойствами служит основанием для создания нового класса электронной аппаратуры [1]–[3]. Современные средства связи требуют высоких скоростей обработки информации, поэтому в качестве альтернативной элементной базы для электроники и систем связи рассматривают оптическую, основанную на фотонах. Управление потоком электронов изучено и реализовано, в то время как для оптики и фотоники управление пучком передаваемого излучения с помощью наноразмерных объектов является одной из самых сложных проблем. Изготовить нанообъект возможно, но детальное изучение особенностей их работы на практике чрезвычайно сложно. В идеале средства, контролирующие направление распространения световых волн, должны быть близки по размерам к длине контролируемых волн.

В качестве перспективных элементов, позволяющих управлять распространением электромагнитных волн, рассматриваются и исследуются периодические структуры с изменяющимися электрофизическими характеристиками. Эти структуры составляют основу новых устройств обработки сигналов и активно применяются в опто- и СВЧ-электронике [1]. Примером могут служить переключающие и управляющие СВЧ-элементы. Модельные объекты на основе материалов с изменяющимся коэффициентом диэлектрической проницаемости позволяют изучить особенности распространения электромагнитных волн в пространстве с целью выработки рекомендаций по разработке управляющих устройств на основе периодических систем, работающих в оптическом диапазоне, и радиоэлектронной аппаратуры [1]–[6].

Целью данной работы является исследование возможностей управления распространением в периодических структурах электромагнитных волн сантиметрового и нанометрового диапазонов.

1 Методика моделирования

Для построения модели была выбрана решетка из диэлектрических брусьев с изменяемыми электрофизическими характеристиками.

Предметом исследований является изучение закономерностей рассеяния электромагнитных волн сантиметрового и нанометрового диапазонов в решетке из управляемых диэлектрических брусьев с изменяемыми электрофизическими характеристиками.

Влияние диэлектрической проницаемости периодических структур рассматривалось для СВЧ и оптического диапазонов.

При построении модели исследуемых объектов учитывались особенности взаимодействия электромагнитного поля со структурами различных размеров и обладающих различными электрофизическими параметрами. Параметры структуры в оптическом диапазоне рассчитывались аналогично соответствующим значениям для СВЧ-диапазона [3].

Исследуемые структуры представляют собой периодические диэлектрические решетки из сегнетоэлектрических стержней в виде брусьев прямоугольного сечения (рисунок 1.1).

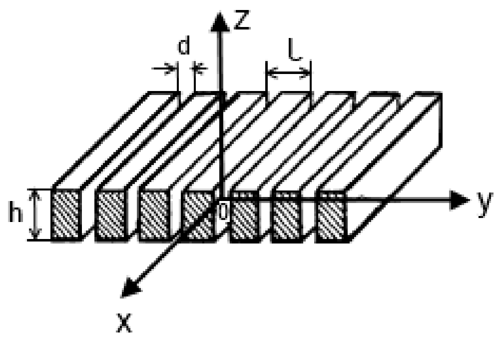


Рисунок 1.1 – Решетка из диэлектрических брусьев (*l*– период, *d* – расстояние между брусьями решетки, *h* – высота брусьев решетки)

Математическое решение данной задачи привело к уравнениям, которые позволяют провести достаточно эффективное аналитическое и численное исследование задачи. Результаты анализа показали наличие зависимости модулей амплитудных коэффициентов отражения и прохождения от диэлектрической проницаемости брусьев периодической структуры [7]. При этом интерференция волн внутри решетки приводит к тому, что в отдельных случаях возникает изменение модулей амплитудных коэффициентов отражения и прохождения от 1 до 0. Это позволяет провести численное исследование влияния изменения диэлектрической проницаемости брусьев решетки на рассеяние электромагнитного излучения [7].

В качестве среды моделирования использовался программный продукт CST MICROWAVE STUDIO, в котором для расчета пространственных распределений поля используется метод конечных интегралов, имеющий высокую эффективность в задачах анализа нестационарных процессов в неоднородном, анизотропном пространстве для объектов с произвольной формой границ. Метод может быть реализован как во временной, так и в частотной области. Решение во временной области используется для решения задач с большим числом ячеек. Частотные методы, использующие вместо прямоугольной тетраэдральную сетку разбиения, предлагают лучшую аппроксимацию геометрии структуры [5].

Задачу получения параметров, характеризующих взаимодействие электромагнитного СВЧ-излучения с плоской бесконечной периодической решеткой, возможно рассматривать как задачу получения параметров, характеризующих взаимодействие излучения с фрагментом, качественно совпадающим с фрагментом решетки. При проведении моделирования рассматривалось влияние изменения диэлектрической проницаемости элементов решетки на амплитуду прошедших и отраженных электромагнитных волн при различных размерах, периодах решетки и нормальном падении электромагнитного излучения в диапазоне облучающих частот.

Для проведения исследования были разработаны модели периодической структуры на основе диэлектрических брусьев с периодами, обеспечивающими распространение, как только основных гармоник, так и гармоник высших порядков. Модели располагались между излучающим портом, расположенным в точке *Zmin*, и принимающими портами, расположенными в точке *Zmax*, для регистрации прошедшего излучения, и в точке *Zmin*, для регистрации отраженного поля.

Рассматриваемые периодические решетки анизотропны для облучающего излучения. Исследовались зависимости амплитуды гармоник от диэлектрической проницаемости брусьев решетки и наличие перераспределения энергий между гармониками постоянного спектра рассеянного поля.

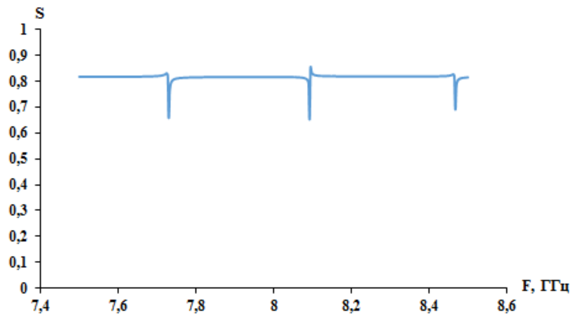
Взаимодействие решетки и излучения описывается с помощью падающих и рассеянных волн, связь между которыми отражает волновая матрица рассеяния или матрица *S*-параметров. В процессе моделирования были получены значения амплитуд для каждой из пространственных гармоник. Значения *S*-параметров, характеризующих передачу энергии гармоник при распространении электромагнитных волн из точки *Zmin* в точку *Zmax*, в диапазоне частот при всех значениях диэлектрической проницаемости для каждой из гармоник представлены в графическом виде.

Для рассмотренных периодов структур характерно изменение значений *S*-параметров основных гармоник *TE*(0,0) и *TM*(0,0) в диапазоне частот, причем характер изменений не одинаков для различных значений диэлектрической проницаемости.

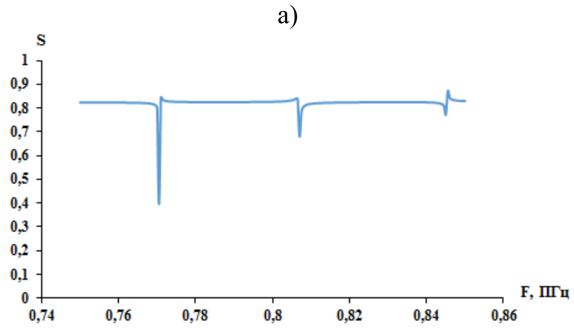
2 Результаты моделирования

Модель периодической структуры на основе диэлектрических брусьев с периодом 4,5 см для СВЧ-излучения и 450 нм для оптического диапазона обеспечивает распространение гармоник высших порядков.

Установлено изменение перераспределения энергии гармоники TE(0,0) в спектре прошедшего и отраженного поля в зависимости от значений диэлектрической проницаемости брусьев структуры. На рисунках 2.1 и 2.2 представлены графики изменения *S*-параметров гармоники *TE*(0,0) для рассматриваемых диапазонов при различных значениях диэлектрической проницаемости.



а)



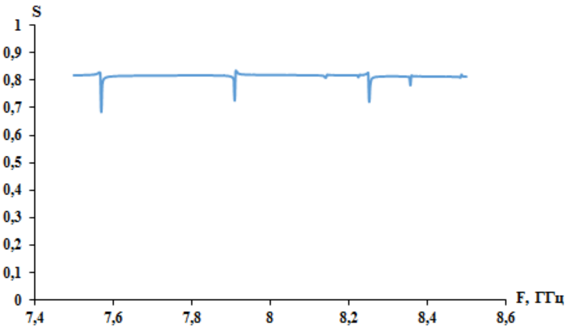
б)

Рисунок 2.1 – Изменение значений *S*-параметров TE(0,0) для а) – СВЧ-диапазона и б) – оптического диапазона при значениях ε = 150

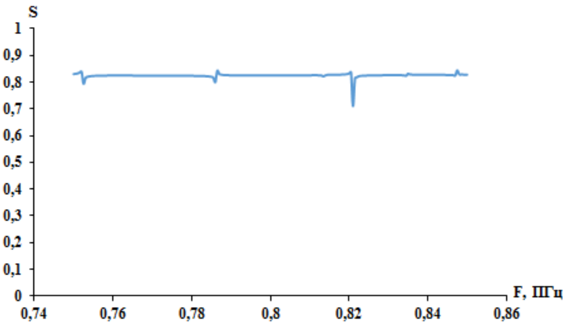
Распространение электромагнитных волн рассматриваемых диапазонов частот в периодических решетках носит аналогичный характер: при одном значении диэлектрической проницаемости брусьев изменения значений *S*-параметров гармоники TE(0,0) происходит на одинаковых численных значениях частот с учетом исследуемого диапазона.

Уменьшение амплитуды гармоники TE(0,0) сопровождается передачей энергии остальному спектру. Перераспределение энергии в спектре зависит от диэлектрической проницаемости компонентов структуры.

Диаграмма распределения энергии TE(0,0) в гармоники рассеянного спектра при различных значениях диэлектрической проницаемости вставок периодической структуры для СВЧ и оптического диапазонов представлена на рисунках 2.3 и 2.4.

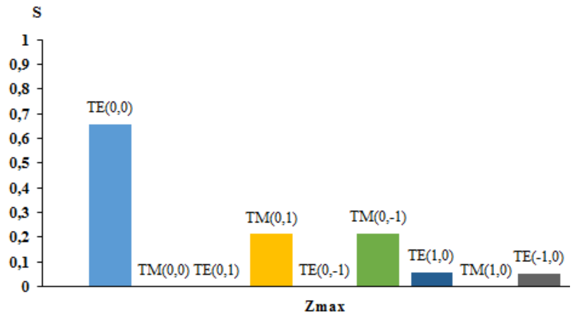


а)

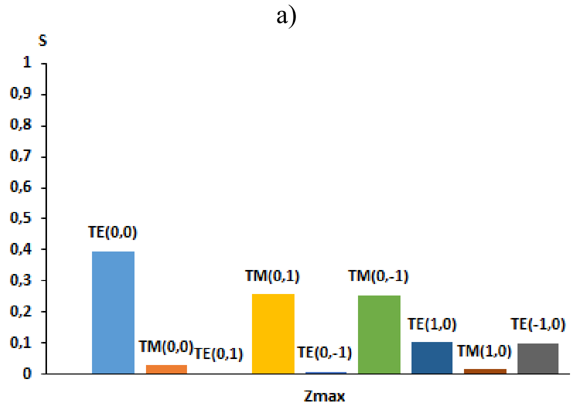


б)

Рисунок 2.2 – Изменение значений *S*-параметров TE(0,0) для а) – СВЧ-диапазона и б) – оптического диапазона при значениях ε = 250



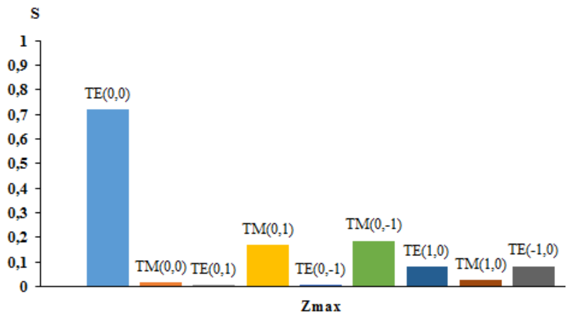
а)



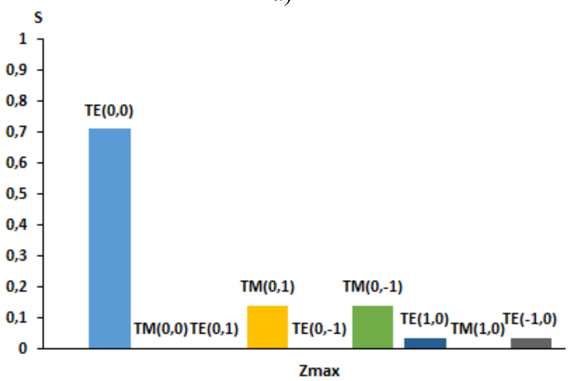
б)

Рисунок 2.3 – *S*-параметры прошедшего излучения для TE(0,0) при и ε = 150 для: а) – СВЧ диапазона на частоте *f* = 7,7 ГГц и б) – оптического диапазона на частоте *f* = 0,77 ПГц

При сохранении постоянных значений *S*-параметров TE(0,0) в диапазоне частот перераспределение энергии по гармоникам отсутствует.



а)



б)

Рисунок 2.4 – *S*-параметры прошедшего излучения для TE(0,0) при и ε = 250 для:
а) – СВЧ диапазона на частоте *f* = 8,2 ГГц и
б) – оптического диапазона на частоте *f* = 0,82 ПГц

Значения *S*-параметров спектра гармоник отраженного поля сохраняются постоянными с незначительными колебаниями в пределах 0,1.

Перераспределение энергии наблюдается между модами с различной поляризацией. Причем на разных частотах и при различной диэлектрической проницаемости изменяется как перечень гармоник высших порядков, получивших энергию, так и количество перераспределенной энергии.

Заключение

Численно исследован спектр рассеяния электромагнитного поля периодической решетки из параллельных диэлектрических брусьев с управляемой диэлектрической проницаемостью в СВЧ и оптическом частотных диапазонах.

Установлено, что при конструктивных параметрах решетки, обеспечивающих существование мод различных порядков, фиксированных частоте и направлении распространения падающей электромагнитной волны управление диэлектрической проницаемостью элементов решетки приводит к изменению амплитуд гармоник спектра.

Проведенное моделирование демонстрирует возможность опосредованного переноса результатов изучения рассеяния электромагнитного поля СВЧ-диапазона в оптический диапазон и наоборот.

Возможность перераспределения энергии поля между пространственными гармониками может использоваться при создании устройств для управления рассеянием электромагнитных волн СВЧ и оптического частотных диапазонов.

Полученные результаты моделирования позволяют определить требования к электрофизическим свойствам материалов, использование которых позволит осуществить контроль и управление распространением электромагнитных волн в системах с регулируемыми электрофизическими параметрами. Такие структуры могут быть использованы при разработке новых электронно-управляемых устройств в опто- и СВЧ-электронике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поплавко*, *Ю.М.* Физика активных диэлектриков : учеб. пособие / Ю.М. Поплавко, Л.П. Переверзева, И.П. Раевский ; под ред. В.П. Сахненко. – Ростов н/Д : Изд-во Юж. Федер. ун-та, 2009. – 480 с.

2. *Gaponenko*, *S.* Introduction to Nanophotonic / S. Gaponenko. – UK: Cambridge UniverSityPreS, 2010. – 484 p.

3. *Моделирование рассеяния электромагнитных волн СВЧ-диапазона на структурах с изменяемыми электрофизическими параметрами* / Д.В. Заерко [и др.] // Вестн. Беларус. Дзярж. ун-та. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2016. – № 2. – С. 90–96.

4. *Электрически управляемые компоненты на основе керамики BST-Mg* / Е.А. Ненашева [и др.] // Физика твердого тела. – 2009. – Т. 51, вып. 8. – С. 1468–1471.

5. *Курушин*, *А.А.* Проектирование СВЧ устройств в среде CST Microwave Studio / А.А. Курушин, А.Н. Пластиков. – М. : Издательство МЭИ, 2010. – 160 с.

6. *Распространение электромагнитных волн СВЧ-диапазона в управляемых двумерных периодических структурах* / Ю.М. Рычков [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 1. – С. 50–53.

7. *Дифракция волн на решетках* / В.П. Шестопалов [и др.]. – Харьков: Издательство Харьковского университета, 1973. – 288 с.

Поступила в редакцию 02.12.16.

УДК 669.14.018.8: 621.45.038.72

ВЛИЯНИЕ ПРИРОДЫ КАРБИДООБРАЗУЮЩИХ МЕТАЛЛОВ НА ФАЗОВЫЙ СОСТАВ И СТРУКТУРУ ЛЕГИРОВАННЫХ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ

А.С. Руденков[1], А.В. Рогачев[1], Д.Г. Пилипцов[1], Сянь Хун Джанг[2], Н.Н. Федосенко[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Нанкинский университет науки и технологии*

INFLUENCE OF CARBIDE-FORMING METALS NATURE ON THE PHASE COMPOSITION AND STRUCTURE OF ALLOYED CARBON COATINGS

A.S. Rudenkov[1], A.V. Rogachev[1], D.G. Piliptsov[1], Xiaohong Jiang[2], N.N. Fedosenko[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Nanjing University of Science and Technology*

Определены структурно-фазовые особенности осаждаемых из импульсной катодной плазмы углеродных покрытий, легированных титаном, хромом. Установлено, что при электродуговом испарении металлов в объеме аморфной углеродной матрицы формируются металлсодержащие образования со средним размером 40..90 нм. Введение хрома в углеродную матрицу, приводит к росту содержания атомов углерода sp^3 фазы, легирование же углеродного покрытия титаном способствует снижению количества атомов с sp^3 гибридизацией, увеличению размера и упорядоченности Csp^2 кластеров.

Ключевые слова: *углеродные покрытия*, *легирование*, *хром*, *титан*, *фазовый состав*, *морфология*.

Structural-phase features of carbon coatings deposited from impulse cathode plasma doped with titanium and chromium are determined. It is established that metal-containing formations with an average size of 40..90 nm are formed in the volume of an amorphous carbon matrix during electric arc evaporation of metals. The introduction of chromium into the carbon matrix leads to an increase in the content of carbon atoms in the sp^3 state, doping the same carbon coating with titanium helps reduce the number of atoms with sp^3 hybridization, increase in the size and ordering of Csp^2 clusters.

Keywords: *carbon coatings*, *alloyed*, *titanium*, *chromium*, *phase composition*, *morphology*.

Введение

Покрытия из аморфного углерода (a-C) обладают высокими механическими свойствами и находят применение при решении различных технических проблем [1]–[3]. Вместе с тем актуальной является разработка технологических методов снижения в них уровня внутренних механических напряжений, повышения термостойкости, прочности адгезионного соединения с подложкой. В числе наиболее эффективных приемов отмечают легирование покрытий металлами [2], [4], азотом [5], [6], фтором и другими элементами [3], [7], [8], активационную обработка поверхности подложки, включающую, в частности, нанесение промежуточных адгезионно активных слоев [9], формирование на основе a-C покрытий многослойных систем [10], [11].

При введении в углеродную матрицу карбидообразующих металлов формируются в значительной степени более гетерогенные слои, образование карбидов металла сопровождается изменением соотношения sp^2 и sp^3 гибридизированных атомов углерода. Образующиеся карбидные нанофазы разрыхляют матрицу, способствуют релаксации внутренних напряжений и при трении формируют на поверхности слои, определяющие в ряде случаев снижение коэффициента трения, повышение износостойкости [7], [8]. При этом характер влияния металлов на структуру и свойства покрытий определяется в значительной степени их каталитическим влиянием на фазовый состав углеродной матрицы, их химической активностью по отношению к углероду, условиями и режимом формирования легированных слоев. Важным является и учет фазового состава таких систем: соотношения sp^2 и sp^3 фаз углерода, наличия легирующего металла в составе твердого раствора, соответствующего карбида или же в виде отдельных наночастиц. Так, при имплантации ионов титана в углеродные слои в сравнение с нелегированными покрытиями возрастает доля sp^2 фазы, снижаются внутренние напряжения, шероховатость поверхности, коэффициент трения, что объясняется содержанием титана в покрытии преимущественно в виде карбида [12], [13]. При допировании углеродных покрытий хромом увеличиваются твердость и износостойкость покрытия вследствие образования в нём нанокристаллов карбида хрома Cr_3C_2 [14].

Значительное влияние на свойства тонких покрытий оказывают процессы адгезионного взаимодействия, зависящие от природы материала подложки [9]–[11]. Установленное в [11] повышение прочности адгезионного соединения покрытия с подложкой, содержащей промежуточный слой титана или нитрида титана, также объясняется протеканием на границе раздела фаз диффузионных и химических процессов, приводящих к образованию карбидов титана. Вместе с тем открытым остается вопрос о характере влияния природы подложки на структурно-морфологические параметры покрытий, степени каталитического влияния на их фазовый состав.

Основной целью работы является установление особенностей влияния природы карбидообразующих металлов (титана, хрома), использующихся в качестве легирующих элементов, материала подложки, на фазовый состав и структуру углеродных покрытий.

1 Методика эксперимента

Нанесение углеродной компоненты покрытия осуществляли из плазмы, формируемой методом импульсного испарения графитового катода (чистотой 99,9 %) искровым разрядом с напряжением 350 В, частотой следования импульса 15 Гц, током в импульсе около 3500 А с помощью установки вакуумного напыления, схе-ма которой представлена на рисунке 1.1.

Легирование углеродных покрытий металлами осуществляли путем их электродугового испарения (ток дуги 60–100 А, напряжение 40 В) в процессе нанесения углеродного слоя. В качестве подложек для нанесения покрытий использовали пластины монокристалла кремния с предварительно нанесенным слоем титана, хрома и без них.

С целью удаления поверхностных углеводородных и гидроксильных загрязнений, абсорбирующихся при контакте с воздушной атмосферой, углеродные покрытия перед их анализом подвергались травлению потоком ионов аргона с энергией 5 кэВ. Установлено, что содержание кислорода в покрытиях после обработки не превышает 0,5 ат.%.

Толщину покрытия определяли по величине ступеньки с помощью профилографа-профилометра Ambios Tech. XP-2.

Концентрацию элементов в покрытии устанавливали с использованием сканирующего электронного микроскопа Hitachi S-4800, оснащенного анализатором Energy Dispersion Spectroscopy (EDS). Определение концентрации проводили в 5 различных точках на поверхности образца.

Морфологию поверхности покрытий исследовали методами атомно-силовой микроскопии (АСМ) в полуконтактном режиме, размер поля сканирования составлял 10×10 мкм, скорость сканирования – 1,0 мкм/с. Для изучения объемной структуры использовали просвечивающий электронный микроскоп JEOL JEM-2010.

Фазовый состав, дисперсность и относительное содержание sp^3 и sp^2 кластеров оценивались методом спектроскопии комбинационного рассеяния (СКР). Спектры комбинационного рассеивания возбуждали излучением с длиной волны 532 нм и мощностью 10 мВт (Senterra, Bruker).

Химический состав и энергию связей в покрытиях устанавливали методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) с помощью PHI Quanta (Japan). Полученный спектр калибровали по линии C1s с энергией связи 284,6 эВ. Математическую обработку спектров проводили с помощью программного обеспечения Origin 7.0. Разложение спектров было выполнено с использованием функций Гаусса.

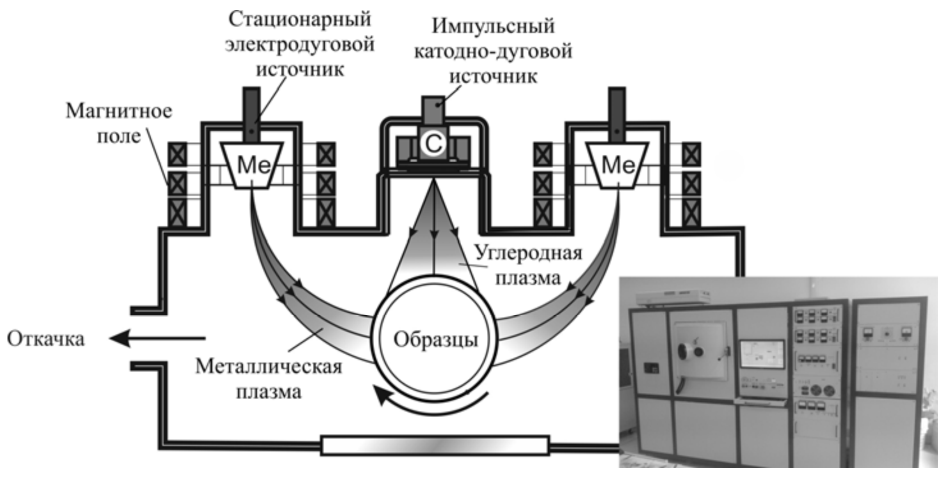


Рисунок 1.1 – Схема вакуумной установки для получения металлсодержащих углеродных покрытий

2 Результаты и их обсуждение

Однокомпонентные углеродные покрытия, как показали результаты просвечивающей электронной микроскопии, являются достаточно однородными, аморфными, содержащими образования размеров около 1 нм (рисунок 2.1).

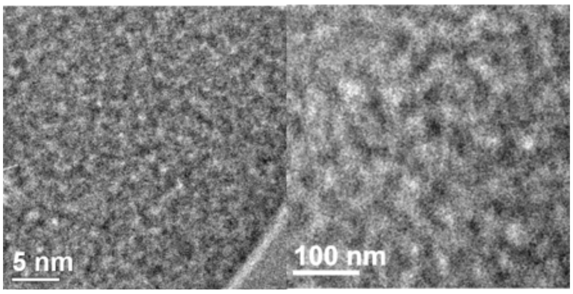


Рисунок 2.1 – Электронно-микроскопическое изображение углеродного покрытия толщиной 150 нм

При легировании a-C покрытий металлами структурная однородность нарушается, в его объеме регистрируются частицы неправильной формы, представляющие собой скопление легирующих атомов или же продуктов взаимодействия металла с углеродом (рисунок 2.2).

Средний размер этих частиц составляет в зависимости от значения тока электродугового испарителя 10–100 нм, что согласуется с данными, приведенными в [15]. При этом средний размер структурных образований, содержащихся в покрытиях a-C:Cr, несколько больший в сравнение с размером кластеров a-C:Ti покрытий. При увеличении тока дуги с 60 до 90А размер частиц возрастает с 10 до 100 нм (для Ti/a-C:Ti покрытий) и с 40 до 100 нм (для Cr/a-C:Cr покрытий) (рисунок 2.3).

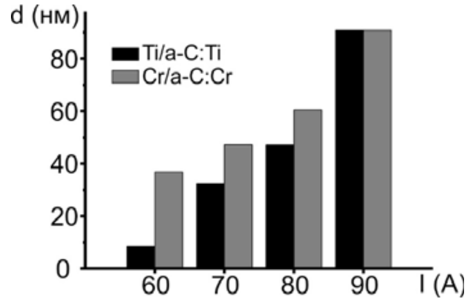


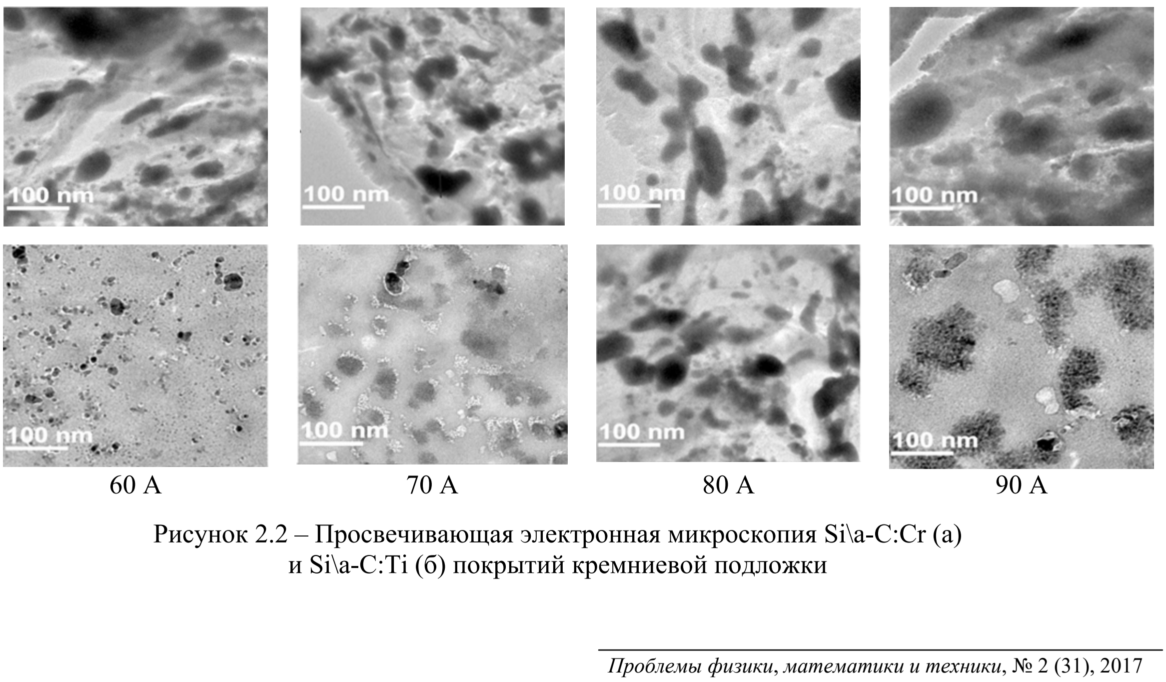
Рисунок 2.3 – Средний размер структурных неоднородностей при различных значениях тока электродугового испарителя

Характер зависимости размера наночастиц от тока дуги дает основание считать, что их образование, в основном, связано с особенностями генерации металлической плазмы при электродуговом испарении, наличием в потоке наночастиц металлов. Отметим, что с увеличением тока дуги возрастает скорость испарения и, соответственно, концентрация металла в покрытии, что, в свою очередь, может также влиять на размер образований.

Морфология поверхности покрытий, поверхностное распределение зерен представлены на рисунке 2.4. Данные атомно-силовой микроскопии показывают, что покрытия имеют гладкую поверхность и характеризуются наличием на ней небольшого количества зерен разных размеров. В зависимости от структуры покрытия (наличия легирующего элемента или подслоя), зерна могут состоять из металлических кластеров и карбида с углеродом, который является типичным для покрытий типа Ti/a-C:Ti, Si/a-C:Ti, Cr/a-C:Cr и Si/a-C:Cr, и только графитовых кластеров, что характерно для покрытий типа Ti/a-C и Cr/a-C.

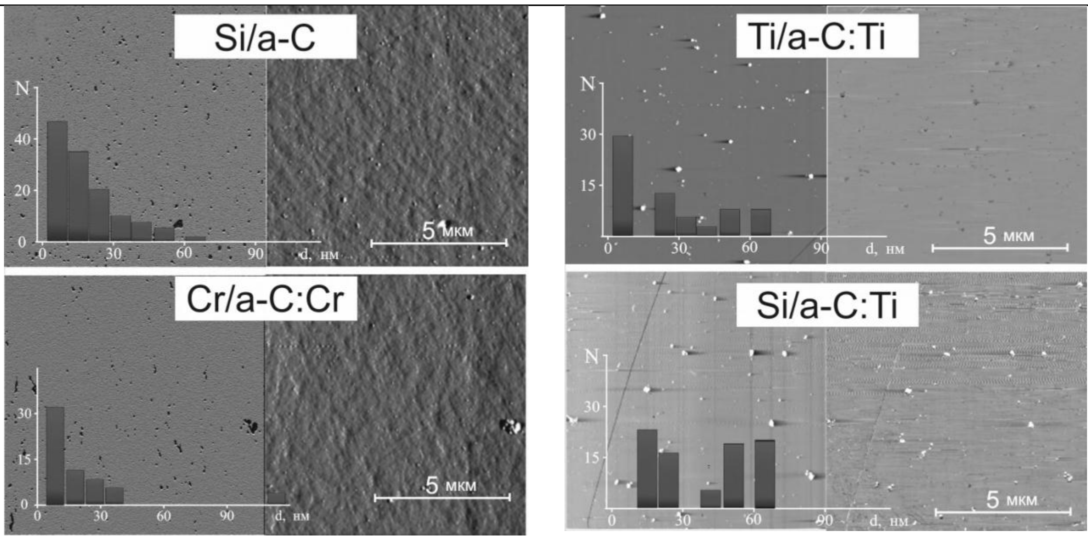
а

б



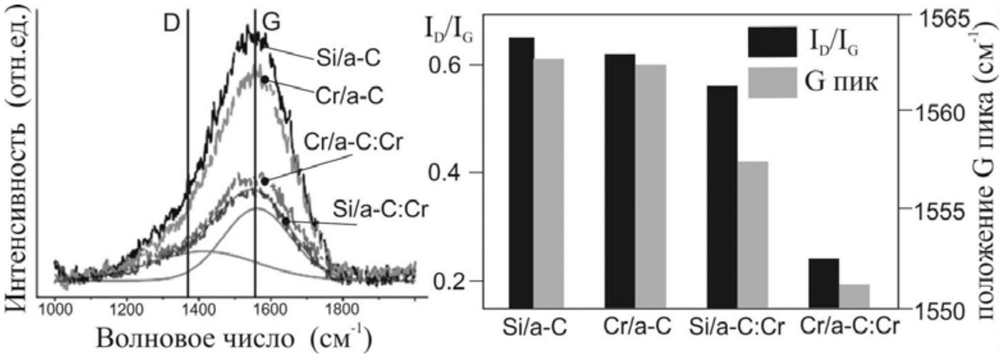
60 А 70 А 80 А 90 А

Рисунок 2.2 – Просвечивающая электронная микроскопия Si\a-C:Cr (а) и Si\a-C:Ti (б) покрытий кремниевой подложки



а б а б

Рисунок 2.4 – АСМ изображения углеродных покрытий (фазовый контраст и распределение зерен по диаметрам (а), топография (б))



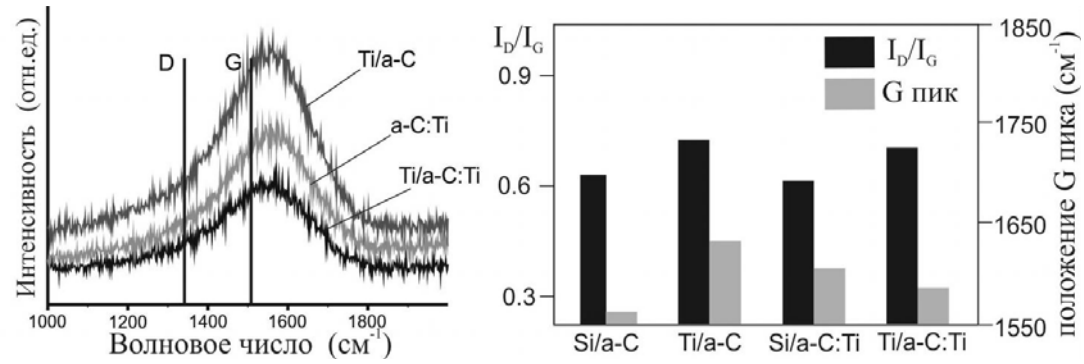
а б

Рисунок 2.5 – КР спектры (а) и I_D/I_G отношение и положение G-пик (б) для Si/a-C, Cr/a-C, Si/a-C:Cr, Cr/a-C:Cr покрытий

Видно, что поверхность легированных покрытий имеет все признаки аморфной структуры и содержит некоторое количество крупных, достаточно равномерно распределенных по поверхности частиц. Анализируя изображения фазового контраста, можно сделать вывод о том, что эти частицы являются графитовыми агломератами, образующимися при электродуговой генерации потока испаренных частиц.

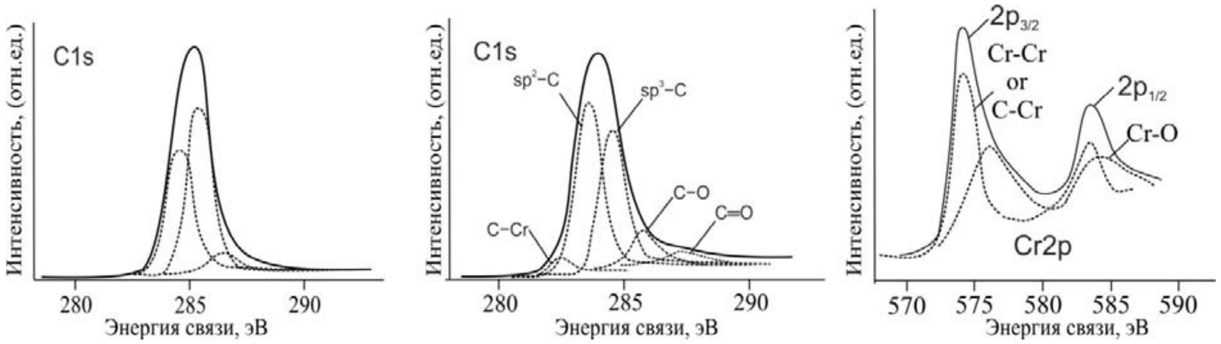
Результаты анализа поверхностного распределения зерен показывают, что на поверхности покрытий, легированных титаном, количество зерен больше, чем на поверхности хромсодержащих покрытий. Следует отметить, что шероховатость легированных покрытий практически не зависит от материала подложки и в 1,4–2,0 раза выше шероховатости однокомпонентных a-C слоев (17,7 нм). Наиболее высокая шероховатость регистрируется при легировании углеродных покрытий титаном.

Методом КР спектроскопии определены особенности фазового состояния металлсодержащих углеродных покрытий. Для КР спектров всех типов покрытий характерно наличие широкого пика с центром вблизи 1520 $см^{-1}$ (рисунки 2.5, а и 2.6, а). На основании представления этого пика как суперпозиции D и G пиков с центрами при 1370 $см^{-1}$ и 1580 $см^{-1}$ соответственно определены значения отношения интенсивности пиков I_D / I_G, характеризующего относительное количество атомов углерода в состояниях с sp^2 и sp^3 конфигурацией, и координаты G-пика, зависящий от концентрации атомов углерода Csp^3 фазы (рисунки 2.5, б и 2.6, б) [16], [17]. Из рисунка 2.5, б видно, что найденное отношение интегральных интенсивностей I_D / I_G для углеродных покрытий, содержащих хром, снизилось с 0,63 до 0,19, а положение G-пика сдвинулось к меньшим волновым числам, что указывает на рост количества атомов углерода в состоянии с sp^3 гибридизацией. При этом наличие подслоя хрома не оказывает заметного влияния на изменение фазового состава углеродного покрытия.



а б

Рисунок 2.6 – КР спектры (а) и I_D/I_G отношение и положение G-пик (б) для Si/a-C, Ti/a-C, Si/a-C:Ti, Ti/a-C:Ti покрытий



а б в

Рисунок 2.7 – РФЭ спектр: а – C1s покрытия Si/a-C; б – C1s покрытия Cr/a-C:Cr; в – Cr2p покрытия Cr/a-C:Cr

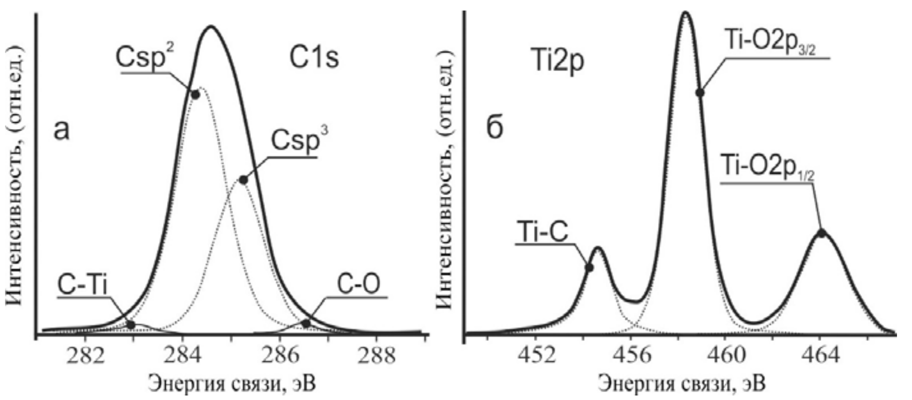


Рисунок 2.8 – РФЭ спектр C1s и Ti2p покрытия Ti/a-C:Ti

В отличие от хромсодержащих углеродных покрытий, для a-C:Ti покрытий в сравнении с a-C слоями характерен рост отношения I_D / I_G и G пик смещается в область более высоких волновых чисел, что свидетельствует о снижении количества атомов с sp^3 гибридизацией, увеличение размера и упорядоченность Csp^2 кластеров [11], [18].

Сделанные выводы в полной мере согласуются с результатами рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии. На рисунке 2.7 представлены РФЭ спектры C1s и Cr2p состояний атомов углерода и хрома.

Спектры C1s состояний таких покрытий можно представить в виде суммы пиков при 283,3, 284,3, 285,1, 286.1 и 287.0 эВ, которые соответствуют химическим связям типа C-Cr, Csp^2, Csp^3, C–O, C=O соответственно. В спектре C1s нелегированных a-C и Cr/a-C покрытий наблюдаются пики, характерные для Csp^2, Csp^3, C–O, C=O связей. При этом РФЭ спектр легированных хромом покрытий идентичен спектру a-C:Cr покрытий, осажденных на подслое хрома. Для энергетического спектра Cr2p атомов хрома, определяющего $2P_{3/2}$ состояние, характерно наличие двух пиков, расположенных при 574,4 эВ и 575,6 эВ, соответствующих связям Cr-C (Cr-Cr), Cr-O. Как установлено в работе [19], анализ данных РФЭС для пика Cr2p не позволяет однозначно дифференцировать различие в химических связях между металлическим хромом (Cr-Cr) и карбидом хрома (C-Cr) (рисунок 2.7). Поэтому для анализа процессов химического взаимодействия, проходящего в покрытии, необходимо комплексно оценивать наличие пиков как в спектре C1s, так и в Cr2p.

На основании полученных данных можно заключить, что химическое взаимодействие хрома осуществляется с углеродом, имеющим преимущественно sp^2 конфигурацию.

РФЭ спектр C1s, характерный для Ti/a-C:Ti покрытий, может быть представлен как сумма четырех спектральных полос, максимумы которых локализованы при 284,4 эВ (Csp^2), 285,3 эВ (Csp^3), 286,6 эВ (C-O), 283,2 эВ (C-Ti) (рисунок 2.8). Его анализ показывает, что для Ti/a-C:Ti покрытий заметно небольшое смещение пика C1s в направлении более низкой энергии связи, в сравнении с C1s пиком для a-C покрытия (рисунок 2.7), что обусловлено наличием Ti-подслоя, и объясняется изменением относительной доли межатомных связей углерод-углерод и углерод-титан. Эти результаты являются признаком того, что подслои Ti ограничивают связывание атома титана с углеродом sp^3-гибридизации, что может быть следствием перегруппировки атомов в a-C:Ti-покрытии в результате диффузии и реакции между слоями Ti и a-C:Ti.

Выводы

Определены закономерности влияния природы карбидообразующих металлов (титана, хрома), использующихся в качестве легирующих элементов, материала подложки, на фазовый состав, структуру углеродных покрытий, осаждаемых из импульсной катодной плазмы. Показано, что легированные покрытия представляют собой аморфную структурную матрицу, в которой формируются металлсодержащие образования с размером 40..90 нм, значение которого возрастает при увеличении тока дуги электродугового испарителя. Введение хрома в углеродную матрицу, приводит к росту содержания атомов углерода в sp^3 состоянии, легирование же покрытия титаном вызывает снижение количества атомов с sp^3 гибридизацией, увеличение размера и упорядоченности Csp^2 кластеров. Влияние природы подложки на фазовый состав покрытий проявляется при легировании их титаном и заключается в усилении графитизации углеродной матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bewilogua*, *Kl.* History of diamond-like carbon films – From first experiments to worldwide applications / Kl. Bewilogua, D. Hofmann // Surface and Coatings Technology. – 2014. – Vol. 242. – P. 214–225.

2. *Рогачев*, *А.В.* Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.

3. *Donnet*, *C.* Tribology of Diamond-like Carbon Films: Fundamentals and Applications / C. Donnet, A. Erdemir. – Springer Science & Business Media, 2007. – 680 p.

4. *Mechanical properties and performance of magnetron-sputtered graded diamond-like carbon films with and without metal additions* / C. Bauer [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2002. – Vol. 11. – P. 1139–1142.

5. *Mechanical and tribological properties of* CN_x *films deposited by reactive magnetron sputtering* / E. Broitman [et al.] // Wear. – 2001. – Vol. 248. – P. 55–64.

6. *Microstructure, mechanical, and tribological properties of* CN_x *thinfilms prepared by reactive magnetron sputtering* / X. Chen [et al.] // Acta Matallurgic Sinica. – 2014. – Vol. 27. – P. 31–36.

7. *Bull*, *S.J.* Tribology of carbon coatings: DLC, diamond and beyond / S.J. Bull // Diamond and Related Materials. – 1995. – Vol. 4. – P. 827–836.

8. *Donnet*, *C.* Recent progress on the tribology of doped diamond-like and carbon alloy coatings: a review / C. Donnet // Surface and Coatings Technology. – 1998. – Vol. 100–101. – P. 180–186.

9. *Zhang*, *W.* Study on the diamond-like carbon multilayer films for tribological application / W. Zhang, A. Tanaka, B. Xu, Y. Koga // Diamond and Related Materials. – 2005. – Vol. 14. – P. 1361–1367.

10. *Structure and characterization of the multilayered Ti-DLC films by FCVA* / Y-H. Lin [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2010. – Vol. 19. – P. 1034–1039.

11. *Synthesis of diamond-like carbon film on copper and titanium interlayer by vacuum cathode arc evaporation* / B. Zhou [et al.] // Applied Mechanics and Materials. – 2012. – Vol. 189. – P. 167–171.

12. *Preparation and mechanical properties of composite diamond-like carbon thin films* / Q. Wei [et al.] // Vac. Sci. Technol. A. – 1999. – Vol. 17. – P. 3406–3414.

13. *Jiang*, *X.H.* Structure and mechanical properties of Ti alloyed DLC films / X.H. Jiang [et al.] // Chinese J. Inorg. Mater. – 2002. – Vol. 17. – P. 771–776.

14. *Chromium-doped DLC for implants prepared by laser-magnetron deposition* / M. Jelinek [et al.] // Materials Science and Engineering C. – 2015. – Vol. 46. – P. 381–386.

15. *Cheng*, *Y.-T.* Relationships between hardness, elastic modulus, and the work of indentation / Y.-T. Cheng, C.-M. Cheng // Applied Physics Letters. – 1998. – Vol. 73. – P. 614–616.

16. *Dai*, *W.* Microstructure and property evolution of Cr-DLC films with different Cr content deposited by a hybrid beam technique / W. Dai, P. Ke, A. Wang // Vacuum. – 2011. – Vol. 85. – P. 792–797.

17. *Influence of the microstructure on the mechanical and tribological behavior of TiC/a-C nanocomposite coating* / D. Martínez-Martínez [et al.] // Thin Solid Films. – 2009. – Vol. 517. – P. 1662–1671.

18. *The microstructure and mechanical properties of multilayer diamond-like carbon films with different modulation ratios* / Zh. Xu [et al.] // Applied Surface Science. – 2013. – Vol. 264. – P. 207–212.

19. *Peng*, *X.* Surface roughness of diamond-like carbon films prepared using various techniques / X. Peng, Z. Barber, T. Clyne // Surface and Coatings Technology. – 2001. – Vol. 138. – P. 23–32.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках договора Т16КИГ-007 *«Модификация поверхности машиностроительных деталей методом нанесения композитных покрытий на основе нанофункционального наполнителя и аморфного углерода, сформированных из вакуумной плазмы», и частично Министерства образования РБ в рамках задания* 3.5.01 *ГПНИ «Физическое материаловедение, новые материалы и технологии».*

Поступила в редакцию 04.04.17.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ В СВЯЗИ С ЛОКАЛЬНЫМИ ФОРМАЦИЯМИ И ОБОБЩЁННО АБНОРМАЛЬНО ПОЛНЫМ ПОДГРУППОВЫМ *m*-ФУНКТОРОМ

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия

INTERSECTIONS OF MAXIMAL SUBGROUPS IN A FINITE GROUP IN CONNECTION WITH THE LOCAL FORMATIONS AND A GENERALLY ABNORMALLY FULL SUBGROUP *m*-FUNCTOR

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies

Пусть π − некоторое множество простых чисел. Установлены достаточные условия, предъявляемые к локальной формации $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$, конечной группе G и подгрупповому m-функтору θ, при которых $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$, а также $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}}\subset G$ в случае радикальности $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$. В качестве следствий получены утверждения для случая $\pi=\varnothing$ и соответствующих локальных формаций.

Ключевые слова: *максимальные подгруппы конечных групп, локальные и радикальные локальные формации, подгрупповой m-функтор.*

Let π be a set of primes. The sufficient conditions that must satisfy a local formation $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$, a finite group G and a subgroup m-functor θ, under which $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$ also $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)=\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)=\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}}\subset G$, if $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ is radical, are achieved. As the consequences of the main results there were obtained the assertions for $\pi=\varnothing$ and corresponding local formations.

Keywords: *maximal subgroups of finite groups, local and local radical formations, subgroup m-functor.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1]. Пусть π − некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π'-групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. В работе [2] доказано, что если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π и в G существуют $\mathfrak{F}$-абнормальные, не принадлежащие $\mathfrak{F}$ и имеющие с числами из π взаимно простые индексы, максимальные подгруппы, то пересечение $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ всех таких подгрупп совпадает с пересечением $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ всех $\mathfrak{F}$-абнормальных, имеющих с числами из π взаимно простые индексы, максимальных подгрупп, причём $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)\in\mathfrak{F}$. При дополнительном условии радикальности для формации $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ были установлены условия, при которых $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ совпадает с пересечением $\overline{\Delta}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ всех $\mathfrak{F}$-абнормальных, не принадлежащих $\mathfrak{F}$, имеющих с числами из π взаимно простые индексы и не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$, максимальных подгрупп группы G. Из полученных результатов как следствия вытекают утверждения относительно локальной S_n-замкнутой (локальной радикальной) формации $\mathfrak{F}$, содержащей формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, и пересечений $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\overline{\Delta}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ соответствующих максимальных подгрупп без ограничений на их индексы в группе. Настоящая работа расширяет эти результаты, используя понятия $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полного, радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полного, а также $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полного и радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полного подгрупповых m-функторов. Исследование пересечений максимальных подгрупп с привлечением функторного метода восходит к работе [3]. В работе [4] изучались пересечения $\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\overline{\Phi}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}^{\mathfrak{F}}(G)$, θ − абнормально полный регулярный подгрупповой m_s-функтор.

1 Предварительные сведения

Под подгрупповым m-функтором понимают всякое отображение θ, которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и некоторых её максимальных подгрупп. Подгруппы множества $\theta(G)$ называют θ-подгруппами группы G, через $\Phi_\theta(G)$ обозначают пересечение всех θ-подгрупп группы G. Подгрупповой m-функтор θ, обладающий свойством: если $H \in \theta(G)$, то $H^x \in \theta(G)$ для всех $x \in G$, рассматривался в работах [4], [5]. Такой функтор будем называть подгрупповым m_s-функтором [6], [7].

Обозначаем через π некоторое множество простых чисел, $\pi' = \mathrm{P} \setminus \pi$, где P – множество всех простых чисел, считаем, что $\pi \neq \mathrm{P}$. Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая формация, θ − подгрупповой m-функтор, G − группа. Через $\mathrm{M}(G)$ будем обозначать множество всех максимальных подгрупп группы G; $\mathrm{M}_\theta(G)$ − множество всех максимальных θ-подгрупп группы G. В отношении некоторых конкретных подгрупповых m-функторов используются следующие обозначения.

$\mathrm{M}_\pi(G)$ − множество всех максимальных подгрупп группы G, имеющих взаимно простые с числами из π индексы, $\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G)$ − множество всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G)$ − множество всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, не принадлежащих $\mathfrak{F}$; $\Phi_\pi(G)$, $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$ − пересечения всех подгрупп множеств $\mathrm{M}_\pi(G)$, $\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G)$, соответственно,

$\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_\pi(G)$, $\overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_\pi(G)$;

$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \cap H, H \in \mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \cap H, H \in \overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$.

Для формации всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ используется обозначение $\Delta_\pi^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_\pi(G)$, $\Delta(G)$ − подгруппа Гашюца, пересечение всех абнормальных (неинвариантных) максимальных подгрупп группы G.

Пусть φ − некоторое множество групп. Обозначаем:

$(\Delta^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ − пересечение всех групп из $\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G)$, не принадлежащих φ; $(\Delta^{\mathfrak{N}})^{\overline{\varphi}}(G) = (\Delta)^{\overline{\varphi}}(G)$;

$(\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ − множество всех групп из $\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, не принадлежащих множеству φ;

$(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ − пересечение всех групп из $(\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$; $(\Delta_\pi^{\mathfrak{N}})^{\overline{\varphi}}(G) = (\Delta_\pi)^{\overline{\varphi}}(G)$;

Пусть N − нормальная подгруппа группы G. Тогда:

$(\mathrm{M}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ − множество всех групп из $(\mathrm{M}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$, не содержащих N;

$(\mathrm{M}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ − множество всех групп из $(\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$, не содержащих N;

$(\Delta_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ − пересечение всех групп из $(\mathrm{M}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$; $(\Delta_{\overline{N}})^{\overline{\varphi}}(G) = (\Delta_{\overline{N}}^{\mathfrak{N}})^{\overline{\varphi}}(G)$;

$(\Delta_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$ − пересечение всех групп из $(\mathrm{M}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G)$; $(\Delta_{\pi,\overline{N}})^{\overline{\varphi}}(G) = (\Delta_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{N}})^{\overline{\varphi}}(G)$.

Кроме того,

$\mathrm{M}_{\overline{N}}(G)$ − множество всех групп из $\mathrm{M}(G)$, не содержащих N;

$\mathrm{M}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_{\overline{N}}(G)$; $\Delta_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ − пересечение всех групп из $\mathrm{M}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$;

$\mathrm{M}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ − множество всех групп из $\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, каждая из которых не содержит N;

$\Delta_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ − пересечение всех групп из $\mathrm{M}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$;

$\overline{\Delta}_{\pi,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ − пересечение всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, не содержащих N;

$\overline{\mathrm{M}}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_{\overline{N}}(G)$; $\overline{\Delta}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ − пересечение всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_{\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$;

$\overline{\Delta}_{\pi,N}^{\mathfrak{F}}(G)$ − пересечение всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, содержащих N,

$$(\Delta_{\overline{N}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) = (\Delta_{\overline{N}}^{\mathfrak{N}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G).$$

Пусть θ − некоторый подгрупповой m-функтор. Обозначаем:

$\mathrm{M}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ − множество всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп группы G;

$\Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ − пересечение всех групп из $\mathrm{M}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$;

$\overline{\Phi}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ − пересечение всех групп из

$$\overline{\mathrm{M}}_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \mathrm{M}_\theta(G);$$

$\overline{\mathrm{M}}_{\theta,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$ − множество всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$, не содержащих N;

$\overline{\Phi}_{\theta,\overline{\mathrm{N}}}^{\mathfrak{F}}(G)$ − пересечение всех групп из $\overline{\mathrm{M}}_{\theta,\overline{N}}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Через θ_π обозначаем подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе G множество $\mathrm{M}_{\theta_\pi}(G)$ всех максимальных θ-подгрупп, имеющих взаимно простые индексы с числами из π; пересечение всех максимальных θ_π-подгрупп в G обозначаем $\Phi_{\theta_\pi}(G)$. Кроме того,

$$\mathrm{M}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{M}_{\theta_\pi}(G) \cap \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G);$$

$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)$ − пересечение всех групп из $M^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)$;

$$M^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G) = M^{\mathfrak{F}}_{\overline{N}}(G) \cap M_{\theta_\pi}(G);$$

$$\overline{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G) = \overline{M}^{\mathfrak{F}}_{\overline{N}}(G) \cap M_{\theta_\pi}(G);$$

$\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)$ и $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)$ обозначают пересечения всех групп из $M^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)$ и $\overline{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{N}}(G)$, соответственно.

Для $\pi = \{p\}$, p − простое число, в обозначениях используем p вместо $\{p\}$: θ_p, $\Delta_p(G)$ и т. д. В случае отсутствия в группе G максимальных подгрупп, отвечающих требуемым условиям, соответствующие пересечения полагаем совпадающими с G.

$$\tilde{F}_N(G)/N = Soc(G/N);$$

$$\tilde{F}_N(G) \in \left\{\tilde{F}_\Delta(G), \tilde{F}_{\Delta_\pi}(G), \tilde{F}_{\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi}(G), \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)\right\}$$

в соответствующих случаях для

$$N \in \left\{\Delta(G), \Delta_\pi(G), \Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G), \Phi_\pi(G)\right\}.$$

Сформулируем в виде леммы некоторые результаты, которые будут использованы в настоящей работе.

***Лемма* 1.1.** *Имеют место следующие утверждения.*

(1) [6, лемма 1.1] *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ − непустые формации, $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) = \varnothing$, $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$. Для всякой формации $\mathfrak{F}_3$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_3 \subseteq \mathfrak{F}_0$, и максимальной, $\pi(\mathfrak{F}_2)$-индекса подгруппы H в группе G равносильны условия: подгруппа H $\mathfrak{F}_i$-абнормальна в G, $i \in \{0,2,3\}$. В частности, если максимальная в группе G подгруппа H имеет индекс, взаимно простой с числами из множества простых чисел π, то условие абнормальности H в G равносильно условию $\mathfrak{N}_{\pi'}$-абнормальности и условию $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$-абнормальности H в G.*

(2) [8]. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − локальная S_n-замкнутая формация, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π. Тогда $\Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.*

(3) [9]. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ − радикальная локальная формация, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π; L − субнормальная подгруппы группы G, K − нормальная подгруппа L. Если $K \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$, то*

$$(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K.$$

(4) [6]. I. *Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π, то $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi}(G)$.*

II. *Для любой группы G справедливо равенство $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_\Delta(G)$.*

Простая проверка показывает справедливость следующего утверждения.

(5) *Пусть $\mathfrak{F}_o$ − непустая формация, θ − $\mathfrak{F}_o$-абнормально полный подгрупповой m-функтор. Тогда θ является $\mathfrak{F}$-абнормально полным подгрупповым m-функтором для всякой формации $\mathfrak{F}$, содержащей $\mathfrak{F}_o$.*

В частности, [7], *всякий абнормально полный подгрупповой m-функтор является $\mathfrak{F}$-абнормально полным для любой формации $\mathfrak{F}$, содержащей формацию всех нильпотентных групп.*

Согласно определению [6], [7], подгрупповой *m*-функтор θ называется $\mathfrak{F}$-абнормально полным, $\mathfrak{F}$ − непустая формация, если $\theta(G) \supseteq M^{\mathfrak{F}}(G)$ для любой группы *G*.

***Определение* 1.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая формация. Подгрупповой *m*-функтор θ назовём $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным ($\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным) подгрупповым *m*-функтором, если $\theta(G) \supseteq \overline{M}^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$ ($\theta(G) \supseteq \overline{M}^{\mathfrak{F}}(G)$, соответственно) для любой группы *G*.

Отметим, что ввиду $\overline{M}^{\mathfrak{F}}_\pi(G) \subseteq M^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$ для любой группы *G*, $\mathfrak{F}$ − непустая формация, условие, определяющее $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор, является более слабым, чем условие, определяющее $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор θ [7], согласно которому $\theta(G) \supseteq M^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$; всякий $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор является и $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным. Всякий $\mathfrak{F}$-абнормально полный подгрупповой *m*-функтор является $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным.

***Определение* 1.2.** Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация. Подгрупповой *m*-функтор θ назовём радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным (радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным) подгрупповым *m*-функтором, если $\theta(G) \supseteq \overline{M}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ ($\theta(G) \supseteq \overline{M}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$, соответственно) для любой группы *G*.

Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация. Так как для любой группы *G* справедливы включения $\overline{M}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \overline{M}^{\mathfrak{F}}_\pi(G)$ и $\overline{M}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \overline{M}^{\mathfrak{F}}(G)$, то $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор является и радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным подгрупповым *m*-функтором, а $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полный подгрупповой *m*-функтор является радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным подгрупповым *m*-функтором.

Заметим, что ввиду леммы 4.2[1] локальная формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда содержит формацию всех нильпотентных групп (равносильно − всех нильпотентных π'-групп для локальной формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$), когда $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$ − множество всех простых чисел.

2 Пересечения максимальных подгрупп конечных групп в связи с локальной S_n-замкнутой формацией $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$) и $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным ($\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным, соответственно) подгрупповым *m*-функтором

***Лемма* 2.1.** *Пусть G − группа, $\mathfrak{F}$ − непустая формация, θ − подгрупповой m_s-функтор. Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) \neq G,$ *то* $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G);$

(2) *если* $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) \neq G,$ *то* $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G).$

Доказательство. (1) Предположим, что $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) \subset \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G).$ Тогда в G существует хотя бы одна максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная θ-подгруппа H, принадлежащая формации $\mathfrak{F}$, такая, что $H\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) = G.$ Следовательно, $G\big/\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) \cong$ $\cong H\big/H \cap \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) \in \mathfrak{F},$ откуда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G),$ что невозможно. Значит, $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G).$

Так как для подгруппового m_s-функтора θ подгрупповой *m*-функтор θ_π является подгрупповым m_s-функтором, то утверждение (2) следует из (1). □

Утверждение (1) леммы 2.1 усиливает теорему 2 из [4] и теорему 1 из [10].

Полагая для подгруппового m_s-функтора θ и любой группы G $\theta(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}(G),$ из леммы 2.1 получаем следующий результат.

***Следствие* 2.1.1** [2, теорема 3.4(1)]. *Пусть G − группа, $\mathfrak{F}$ − непустая формация. Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G,$ *то* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G);$

(2) *если* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) \neq G,$ *то* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G).$

***Следствие* 2.1.2.** *Пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π. Если* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\pi}(G) \neq G,$ *то* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\pi}(G) = \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}.$

Следствие 2.1.2 леммы 2.1 вытекает из следствия 2.1.1 леммы 2.1 с применением утверждения (1) леммы 1.1, согласно которому $\Delta_\pi(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}(G),$ и утверждения (2) леммы 1.1.

***Следствие* 2.1.3.** *Пусть G − группа, p − простое число. Если* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{p}(G) \neq G,$ *то*

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{p}(G) = \Delta_p(G) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}.$$

Следствие 2.1.3 леммы 2.1 включает следствие 5 из [11].

***Следствие* 2.1.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, θ − подгрупповой m_s-функтор, G − группа. Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G,$ *то*

$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G);$$

(2) *если* $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G,$ *то*

$$\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Доказательство. Рассмотрим подгрупповые *m*-функторы ψ и ψ_π, определяющие множества

$$\psi(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \text{ и}$$

$$\psi_\pi(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$$

соответственно, состоящие из группы G и всех её максимальных θ-подгрупп (максимальных θ_π-подгрупп, соответственно), не содержащих $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$. Очевидно, ψ и ψ_π − подгрупповые m_s-функторы. Поэтому утверждения следствия 2.1.4 вытекают из леммы 2.1. □

***Следствие* 2.1.5.** *Пусть G − группа, $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация. Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G,$ *то*

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G);$$

(2) *если* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G,$ *то* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$

***Лемма* 2.2.** *Пусть G − группа, $\mathfrak{F}$ − непустая формация. Имеют место следующие утверждения*:

(1) *если θ − $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор и* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) \neq G,$ *то*

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G);$$

(2) *если θ − $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полный подгрупповой m-функтор и* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G,$ *то*

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G).$$

Доказательство. (1) По следствию 2.1.1 леммы 2.1 $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G).$ Понятно, что $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) =$ $= \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)$ для $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полного подгруппового *m*-функтора θ. Кроме того,

$$\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) \subseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) \subseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G),$$

откуда $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Значит, $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Утверждение (2) вытекает из (1), если положить $\pi = \varnothing$. □

***Пример* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая формация, содержащая некоторое множество групп* φ. *Тогда*:

(1) *если* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G);$$

(2) *если* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то*

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G).$$

В самом деле, нетрудно заметить, что

$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq (\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G) \subseteq \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$$

для всякой группы G и множества групп φ, содержащегося в непустой формации $\mathfrak{F}$. Причём: *a*) если $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = G$, то и $(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G) = \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = G$; *b*) если $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, то $(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ в случае $\varphi = \varnothing$ и $(\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G) = \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ в случае $\varphi = \mathfrak{F}$. На основании утверждения (2) следствия 2.1.1 леммы 2.1, $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, если $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Аналогичная ситуация возникает для соответствующих пересечений максимальных подгрупп без ограничений на их индексы в группе.

Утверждения (1) и (2) могут быть обоснованы функторно. Действительно, пусть $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Определим подгрупповой *m*-функтор θ на каждой группе G следующим образом: $\theta(G) = \{G\} \cup (\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G)$. Понятно, что

$$\overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq (\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G),$$

т. е. функтор θ является $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным. А так как, очевидно,

$$(\mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G) = \mathrm{M}_\theta(G) = \mathrm{M}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G),$$

то утверждение (1) вытекает из утверждения (1) леммы 2.2. Утверждение (2) − частный случай утверждения (1).

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ *− локальная* S_n*-замкнутая формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы* G *обладает свойством* C_π. *Если* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то справедливы следующие утверждения*:

(1) $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякого* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякого* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π' *полного подгруппового* m_s*-функтора* θ.

Доказательство. Утверждение (1) вытекает из утверждения (2) леммы 1.1 и утверждения (1) леммы 2.2. Утверждение (2) вытекает из утверждения (1) и S_n-замкнутости формации $\mathfrak{F}$, так как $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ − нормальная в G подгруппа $\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$. □

***Пример* 2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ *− локальная* S_n*-замкнутая формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы* G *обладает свойством* C_π. *Если* $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, *то справедливы следующие утверждения.*

(1) *Для всякого множества групп* φ, *содержащегося в формации* $\mathfrak{F}$,

$$\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta_\pi^{\mathfrak{F}})^{\bar{\varphi}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}.$$

(2) $(\Delta_\pi^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякой непустой подформации* φ *формации* $\mathfrak{F}$. *В частности*,

$$(\Delta_\pi)^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}.$$

Действительно, утверждение (1) вытекает из утверждения (1) теоремы 2.1 (из утверждения (1) примера 2.1 с учётом утверждения (2) леммы 1.2). Утверждение (2) можно обосновать, рассматривая подгрупповой *m*-функтор θ, определённый на каждой группе G следующим образом: $\theta(G) = \{G\} \cup (\mathrm{M}_\pi^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$, φ − непустая подформация формации $\mathfrak{F}$. Так как

$$\theta(G) = \theta_\pi(G) \supseteq \overline{\mathrm{M}}_\pi^{\mathfrak{F}}(G),$$

то θ является $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным подгрупповым m_s-функтором;

$$\Phi_{\theta_\pi}(G) = (\Delta_\pi^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G).$$

Следовательно, ввиду утверждения (2) теоремы 2.1 для группы G и формации $\mathfrak{F}$, удовлетворяющих условию, $(\Delta_\pi^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$.

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть подгруппа* $\Phi_\pi(G)$ *группы* G *обладает свойством* C_π. *Если* $(\Delta_\pi)^{\overline{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) \neq G$, *то*

$$(\Delta_\pi)^{\overline{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = (\Delta_\pi)^{\bar{\varphi}}(G) =$$

$$= \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_\pi(G) \subseteq \mathrm{F}_{\pi'}(G) \subset G$$

для любого множества групп φ, *содержащегося в формации всех* π'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$.

Доказательство. Согласно утверждению (1) леммы 1.1 $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}}(G) = \Delta_\pi(G)$, $(\Delta_\pi)^{\overline{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = \overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}}(G)$. Так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$, то, применяя утверждение (1) примера 2.2, получаем требуемое. □

***Следствие* 2.2.2.** *Пусть* G *− группа*, p *− простое число. Если* $(\Delta_p)^{\overline{\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_{p'}}}(G) \neq G$, *то*

$$(\Delta_p)^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) = (\Delta_p)^{\overline{\varphi}}(G) =$$
$$= \overline{\Delta}_p^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_p(G) \subseteq \mathrm{F}_{p'}(G) \subset G$$

для любого множества групп φ, *содержащегося в формации всех* p'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$.

В случае $\pi = \varnothing$ из теоремы 2.1 вытекает следующий результат.

***Теорема* 2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− локальная* S_n*-замкнутая формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть G − группа,* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякого* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякого* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально полного подгруппового* m_s*-функтора* θ.

***Пример* 2.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− локальная* S_n*-замкнутая формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *И пусть G − группа,* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. *Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) *Для всякого множества групп* φ, *содержащегося в формации* $\mathfrak{F}$,
$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) = (\Delta^{\mathfrak{F}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}.$$

(2) $(\Delta^{\varphi})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$ *для всякой непустой подформации* φ *формации* $\mathfrak{F}$. *В частности,* $(\Delta)^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Так как согласно результату Шлыка В.В. [1, теорема 8.11] $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G) \neq G$, если G − неразрешимая группа, то следующее утверждение укладывается в рамки утверждения (1) примера 2.3.

***Следствие* 2.3.1.** *Для всякого множества групп* φ, *содержащегося в формации всех нильпотентных групп* $\mathfrak{N}$, *пересечение* $(\Delta)^{\overline{\varphi}}(G)$ *всех ненормальных, не принадлежащих* φ *максимальных подгрупп неразрешимой группы G совпадает с* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta(G) \in \mathfrak{N}$.

3 Пересечения максимальных подгрупп конечной группы в связи с радикальной локальной формацией $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$) и радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным (радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полным, соответственно) подгрупповым *m*-функтором

***Теорема* 2.3.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ *− радикальная локальная формация,* $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, *G − группа. И пусть* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G$. *Если подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ π'*-разрешима (в частности, подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ π'*-разрешима, либо подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ π'*-разрешима), то имеют место следующие утверждения.*

I [2]. $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$.

II. (1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_\phi}}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_\varphi}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) =$
$$= \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}$, *и радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ *− нормальная в G подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$, *если* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор.*

Доказательство. I. Так как
$$\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G,$$
то по следствию 2.1.1 леммы 2.1 и ввиду утверждения (2) леммы 1.1 $\overline{\Delta}_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Так как
$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq (\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G))_{\mathfrak{F}} =$$
$$= \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G),$$
то $(\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G))_{\mathfrak{F}} = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, ввиду утверждения (3) леммы 1.1
$$(\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = (\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G))_{\mathfrak{F}} \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = 1.$$

А так как группа $A = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ π'-разрешима и формация $\mathfrak{F}$ содержит все π'-нильпотентные группы, то
$$A \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{F}_{\pi'}(A \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq (\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = 1.$$

Значит, в группе $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ нет неединичных нормальных подгрупп группы $G \big/ \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, следовательно, $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Утверждение I доказано.

II. (1). Пусть θ − радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор. Тогда
$$\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq$$
$$\subseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) \subseteq \mathrm{M}_\pi^{\mathfrak{F}}(G).$$

Следовательно,
$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

А так как по утверждению I $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$, то
$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Согласно условию $\mathfrak{F} \subseteq \varphi$, поэтому $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G)$. А так как $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \in \theta(G)$, то $\overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) \subseteq \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G)$. Отсюда

$$\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) \subseteq \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Из $\Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) \subseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G)$ и $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G)$ теперь следует $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\varphi}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G)$. Утверждение II. (1) доказано.

II. (2). Так как функтор θ является подгрупповым m_s-функтором, то $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ нормальна в G, а значит, и в $\Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G)$, следовательно, $\Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$. Утверждение II доказано. □

***Следствие* 2.3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ *− радикальная локальная формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$. *Если* G *−* π'*-разрешимая группа и* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G$, *то имеют место следующие утверждения.*

I [2]. $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$.

II. (1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\phi}}}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\phi}}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) =$

$$= \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}$, *и радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ *− нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$, *если* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой* m_s*-функтор.*

***Следствие* 2.3.2.** *Пусть* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой m-функтор*, G *− группа*, $(\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) \neq G$. *Если подгруппа* $(\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\pi}(G)$ π'*-разрешима, то*

$$(\Delta_{\pi,\overline{G_{\phi}}})^{\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = (\Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\phi}}})^{\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) =$$
$$= (\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}}(G) =$$
$$= \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G) \subset \mathrm{F}_{\pi'}(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию всех* π'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$.

В случае, когда радикально $\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её максимальные подгруппы, следствие 2.3.2 включает, с учётом утверждения (1) леммы 1.1, следствие 3.6.2 теоремы 3.6 из [2].

***Следствие* 2.3.3.** *Пусть* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}$*-абнормально* π'*-полный подгрупповой m-функтор. И пусть группа* G π'*-разрешима. Если* $(\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) \neq G$, *то*

$$(\Delta_{\pi,\overline{G_{\varphi}}})^{\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = (\Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi,\overline{G_{\varphi}}})^{\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) =$$
$$= (\Delta_{\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi,\overline{\mathrm{F}_{\pi'}(G)}}(G) =$$
$$= \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G) \subset \mathrm{F}_{\pi'}(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию всех* π'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_{\pi'}$.

***Следствие* 2.3.4.** *Пусть* θ *−* $\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}$*-абнормально* p'*-полный подгрупповой m-функтор*, p *− простое число. И пусть* $(\Delta_{p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) \neq G$. *Если подгруппа* $(\Delta_{p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_p}(G)$ *разрешима*, (*в частности, подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_p}(G)$ *разрешима, либо подгруппа* $(\Delta_{p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G)$ *разрешима*), *то*

$$(\Delta_{p,\overline{G_{\varphi}}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) = (\Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_p,\overline{G_{\varphi}}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) =$$
$$= (\Delta_{p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}})^{\overline{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_p,\overline{\mathrm{F}_{p'}(G)}}(G) =$$
$$= \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta_p}(G) = \Delta_p(G) \subset \mathrm{F}_{p'}(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию всех* p'*-нильпотентных групп* $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$.

Следующая теорема 2.4 − также следствие теоремы 2.3.

***Теорема* 2.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− радикальная локальная формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, G *− группа*, $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \neq G$. *Если группа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta^{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима* (*в частности, подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta^{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима, либо подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ *разрешима*), *то имеют место следующие утверждения*:

I [2]. $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$.

II. (1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\varphi}}}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta,\overline{G_{\varphi}}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) =$

$$= \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi^{\mathfrak{F}}_{\theta}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}$, *и радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально полного подгруппового m-функтора* θ;

(2) $\Phi_\theta(G)$ *− нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$, *если* θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{F}}$*-абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор.*

Заметим, что согласно утверждению (5) леммы 1.1 абнормально полный подгрупповой m-функтор является $\mathfrak{F}$-абнормально полным, а значит, и радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полным для всякой радикальной формации $\mathfrak{F}$, содержащей формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$. Для абнормально полного подгруппового m-функтора θ, локальной формации $\mathfrak{F}$, удовлетворяющей условию $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, и любой группы G справедливо равенство $\Phi_{\theta}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ ввиду

$$\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{N}}(G) \in \theta(G).$$

Если к тому же $\mathfrak{F}$ − радикальная формация, то $\overline{\Phi}^{\mathfrak{F}}_{\theta,\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G)$ как для абнормально полного, так и для радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально полного подгруппового m-функтора θ. Таким образом, следствие 5.1 теоремы 5 из [4] равносильно утверждению самой теоремы 5 [4] в условиях предъявляемых в ней требований к функтору θ, формации $\mathfrak{F}$ и к группе G, а утверждение II. (1) теоремы 2.4 обобщает и усиливает теорему 5 [4], доказанную для абнормально полного регулярного m_s-функтора и разрешимой группы G. Напомним: подгрупповой m_s-функтор θ называется регулярным [5], если для любой нормальной подгруппы N группы G выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ всегда следует
$$HN/N \in \theta(G/N);$$

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $H \in \theta(G)$.

Возможные приложения теоремы 2.3 и теоремы 2.4 могут быть проиллюстрированы следующим примером.

***Пример* 2.4.** *Справедливы следующие утверждения*:

I. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ *− радикальная локальная формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, G *− группа. И пусть* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, *подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}}(G)$ π'*-разрешима. Тогда*:

(1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) = (\Delta^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$

для всякого множества групп φ, *содержащегося в формации* $\mathfrak{F}$;

(2) $(\Delta^{\varphi}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ *− нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$ *для всякой непустой подформации* φ *формации* $\mathfrak{F}$; *в частности*, $(\Delta_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ *− нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$.

II. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− радикальная локальная формация*, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{P}$, G *− группа. И пусть* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, *подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta^{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима. Тогда:*

(1) $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G) = (\Delta^{\mathfrak{F}}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\varphi}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$

для всякого множества групп φ, *содержащегося в формации* $\mathfrak{F}$;

(2) $(\Delta^{\varphi}_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ *− нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$ *для всякой непустой подформации* φ *формации* $\mathfrak{F}$; *в частности*, $(\Delta_{\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ *− нормальная в* G *подгруппа из* $G_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. I. (1) Определим подгрупповой m-функтор θ на каждой группе G следующим образом: $\theta(G) = \{G\} \cup (\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\varphi}}(G)$, φ − некоторое подмножество групп формации $\mathfrak{F}$. Так как $(\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\varphi}}(G) \supseteq \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G)$, то θ − радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m-функтор. А так как, очевидно,

$$(\mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\varphi}}(G) = \mathrm{M}_{\theta}(G) = \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\pi}}(G) = \mathrm{M}^{\mathfrak{F}}_{\theta_{\pi},\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G),$$

то утверждение (1) вытекает из утверждения II. (1) теоремы 2.3.

I. (2) Рассмотрим подгрупповой m-функтор θ, определённый на каждой группе G следующим образом: $\theta(G) = \{G\} \cup (\mathrm{M}^{\varphi}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$, φ − непустая подформация формации $\mathfrak{F}$. Так как $\theta(G) = \theta_{\pi}(G) \supseteq \overline{\mathrm{M}}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G)$, то θ − радикально $\overline{\mathfrak{F}}$-абнормально π'-полный подгрупповой m_s-функтор; $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = (\Delta^{\varphi}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}}(G)$. Следовательно, $(\Delta^{\varphi}_{\pi,\overline{G}_{\mathfrak{F}}})^{\overline{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$ по утверждению II.(2) теоремы 2.3. Утверждения I обоснованы, утверждения II − следствия утверждений I.

Из следствия 2.3.2 теоремы 2.3, с учётом утверждения (4) II леммы 1.1, вытекает следующий результат.

***Теорема* 2.5.** *Пусть* G *− группа*, θ *− радикально* $\overline{\mathfrak{N}}$*-абнормально полный подгрупповой m-функтор. И пусть* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\mathrm{F}(G)}(G) \neq G$, *причём подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\mathrm{F}(G)}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}(G)$ *разрешима* (*в частности, подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ *разрешима*, *либо подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\mathrm{F}(G)}(G)$ *разрешима*). *Тогда* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{G_{\varphi}}(G) = \overline{\Phi}^{\mathfrak{N}}_{\theta,G_{\varphi}}(G) =$

$$= \overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\mathrm{F}(G)}(G) = \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta,\overline{\mathrm{F}(G)}}(G) = \Phi^{\mathfrak{N}}_{\theta}(G) = \Delta(G) \subset \mathrm{F}(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации φ, *содержащей формацию всех нильпотентных групп* $\mathfrak{N}$.

Полагая $\theta(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}(G)$ для $\overline{\mathfrak{N}}$-абнормально полного подгруппового m-функтора θ и любой группы G, из теоремы 2.5 получаем

***Следствие* 2.5.1.** *Пусть* G − *группа*, $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G) \neq G$. *Если подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G) \cap \tilde{\mathrm{F}}(G)$ *разрешима* (*в частности*, *подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ *разрешима*, *либо подгруппа* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G)$ *разрешима*), *то* $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{G_\phi}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G) = \Delta_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G) = \Delta(G) \subset \mathrm{F}(G) \subset G$ *для всякой радикальной формации* φ, *содержащей формацию всех нильпотентных групп* $\mathfrak{N}$.

Следствие 2.5.1 теоремы 2.5 усиливает следствие 5.2 работы [4] и включает следствие 3.6.3 теоремы 3.6 [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.

3. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. навука, 2003. – 254 с.

4. *Селькин*, *М.В.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / М.В. Селькин, Р.В. Бородич // Вестник СамГУ − Естественнонаучная серия. – 2009. – № 8 (74). – С. 67–76.

5. *Бородич*, *Е.Н.* О пересечениях $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич // Весці Нацыянальнай Акадэміі Навук Беларусі. – 2007. – № 3. – С. 47–52.

6. *Белоконь*, *Л.М.* К вопросу о пересечениях максимальных θ-подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 46–50.

7. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных θ_π-подгрупп конечных групп и $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 50–58.

8. *Белоконь*, *Л.М.* Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 3–10.

9. *Белоконь*, Л.М. Нормальная факторизуемость субнормальной в конечной группе подгруппы в связи с локальными формациями и обобщёнными подгруппами Фраттини. Формационные радикалы / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 26–36.

10. *Бородич*, *Р.В.* О некоторых свойствах $\mathfrak{F}$-абнормальных подгрупп конечных групп / Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 197–201.

11. *Селькин*, *М.В.* Пересечение максимальных подгрупп в конечных группах / М.В. Селькин, В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 67–72.

Поступила в редакцию 30.01.17.

Problems of Physics, Mathematics and Technics, № 2 (31), 2017

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, *n*-МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ОБОБЩЕННО *S*-КВАЗИНОРМАЛЬНЫМИ

Бин Ху[1], Цзяньхун Хуан[1], А.Н. Скиба[2]

[1]*Цзянсуский педагогический университет, Сюйчжоу*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

FINITE GROUPS WHOSE *n*-MAXIMAL SUBGROUPS ARE GENERALIZED *S*-QUASINORMAL

Bin Hu[1], Jianhong Huang[1], A.N. Skiba[2]

[1]*Jiangsu Normal University, Xuzhou*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Пусть G – конечная группа и M – подгруппа из G. Тогда M называется: *модулярной* в G, если выполняются следующие условия: (i) $\langle X, M\cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X\le G, Z\le G$ таких, что $X\le Z$, и (ii) $\langle M, Y\cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle\cap Z$ для всех $Y\le G, Z\le G$ таких, что $M\le Z$; *квазинормальной* (соответственно *S-квазинормальной*) в G, если $MP = PM$ для всех подгрупп (соответственно для всех силовских подгрупп) P из G. Мы говорим, что M является *обобщенно субнормальной* (соответственно *обобщенно S-квазинормальной*) подгруппой G, если $H=\langle A, B\rangle$ для некоторой модулярной подгруппы A и субнормальной (соответственно S-квазинормальной) подгруппы B из G. Если $M_n < M_{n-1} < \ldots < M_1 < M_0 = G$, где M_i – максимальная подгруппа в M_{i-1} для всех $i=1,\ldots,n,$ то M_n $(n>0)$ является *n-максимальной подгруппой* в G. В работе изучаются конечные группы, n-максимальные подгруппы которых являются обобщенно субнормальными или обобщенно S-квазинормальными.

Ключевые слова *конечная группа, S-квазинормальная подгруппа, модулярная подгруппа, обобщенно субнормальная подгруппа, обобщенно S-квазинормальная подгруппа.*

Let G be a finite group and M a subgroup of G. Then M is called: *modular* in G if the following conditions are held: (i) $\langle X, M\cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ for all $X\le G, Z\le G$ such that $X\le Z$, and (ii) $\langle M, Y\cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle\cap Z$ for all $Y\le G, Z\le G$ such that $M\le Z$; *quasinormal* (respectively *S-quasinormal*) in G if $MP = PM$ for all subgroups (respectively for all Sylow subgroups) P of G. We say that M is a *generalized subnormal* (respectively *generalized S-quasinormal*) subgroup of G if $H=\langle A, B\rangle$ for some modular subgroup A and subnormal (respectively S-quasinormal) subgroup B of G. If $M_n < M_{n-1} < \ldots < M_1 < M_0 = G$, where M_i is a maximal subgroup of M_{i-1} for all $i=1,\ldots,n,$ then M_n $(n>0)$ is an *n-maximal subgroup* of G. In this paper, we study finite groups whose n-maximal subgroups are generalized subnormal or generalized S-quasinormal.

Keywords: *finite group, S-quasinormal subgroup, modular subgroup, generalized subnormal subgroup, generalized S-quasinormal subgroup.*

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, $\pi(G)$ is the set of all primes dividing the order $|G|$ of G. The symbol H_G denotes the largest normal subgroup of G contained in $H\le G$. We use $\mathfrak{N}$ and $\mathfrak{U}$ to denote the classes of all nilpotent and of all supersoluble groups, respectively. We use C_n to denote a cyclic group of order n.

A subgroup M of G is called *modular* if M is a modular element (in the sense of Kurosh [1, p. 43]) of the lattice $L(G)$ of all subgroups of G, that is,

(i) $\langle X, M\cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ for all $X\le G$, $Z\le G$ such that $X\le Z$, and

(ii) $\langle M, Y\cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle\cap Z$ for all $Y\le G$, $Z\le G$ such that $M\le Z$.

A subgroup H of G is said to be *quasinormal* (respectively *S-quasinormal*) in G if H permutes with every subgroup (respectively with every Sylow subgroup) P of G, that is, $HP = PH$.

Note in passing that, in view of Theorem 5.1.1 in [1] and the Kegel results about the S-quasinormal subgroups (see [2] or [3, Theorem 1.2.14]), H is quasinormal in G if and only if H is both modular and S-qusinormal in G.

We say that G is: *nearly nilpotent* if G is supersoluble and G induces on any its non-Frattini chief factor H/K (that is, $H/K\nleq \Phi(G/K)$) an automorphism group of order dividing a prime; *srtongly supersoluble* if G is supersoluble and G induces on any its chief factor H/K an automorphism group of square free order. Nearly nilpotent and strongly supersoluble groups were studied respectively in [4] and [5], [6].

It is clear that the group $C_7 \rtimes \mathrm{Aut}(C_7)$ is strongly supersoluble but it is not nearly nilpotent; the group $C_{13} \rtimes \mathrm{Aut}(C_{13})$ is supersoluble but it is not strongly supersoluble; the group S_3 is nearly nilpotent but it is not nilpotent.

Recall that if

$$M_n < M_{n-1} < \ldots < M_1 < M_0 = G, \qquad (0.1)$$

where M_i is a maximal subgroup of M_{i-1} for all $i = 1, \ldots, n$, then the chain (0.1) is said to be a *maximal chain of* G *of length* n and M_n $(n > 0)$ is an *n-maximal subgroup* of G.

The relationship between n-maximal subgroups (where $n > 1$) of G and the structure of G was studied by many authors (see, in particular, the recent papers [7]–[14] and Chapter 4 in the book [15]). One of the earliest results in this line research was obtained by Huppert in the article [16] who established the supersolubility of the group whose all second maximal subgroups are normal. In the same article Huppert proved also that if all 3-maximal subgroups of G are normal in G, then the commutator subgroup G' of G is a nilpotent group and the principal rank of G is at most 2. These two results were developed by many authors. In particular, Schmidt proved [4] that if all 2-maximal subgroups of G are modular in G, then G is supersoluble. Spencer studied [17] the groups G whose every n-maximal chain includes at least one proper subnormal subgroup of G. Mann proved [18] that if all n-maximal subgroups of a soluble group G are subnormal and $n \leq |\pi(G)| - 1$, then G is nilpotent; but if $n \leq |\pi(G)| + 1$, then G is ϕ-dispersive for some ordering ϕ of the set of all primes $\mathbb{P}$. Finally, in the case $n \leq |\pi(G)|$ Mann described G completely.

Our main goal here is to obtain generalizations of some of these results on the base of the following

***Definition* 0.1.** Let H be a subgroup of G. Then we say that H is:

(1) *generalized subnormal* in G if $H = \langle A, B \rangle$ for some modular subgroup A and subnormal subgroup B of G.

(2) *generalized S-quasinormal* in G if $H = \langle A, B \rangle$ for some modular subgroup A and S-quasinormal subgroup B of G.

1 Main results

It is clear that every modular and every subnormal subgroup are generalized subnormal. Every S-quasinormal subgroup is generalized S-quasinormal. Every generalized S-quasinormal subgroup is a generalized subnormal subgroup in view of Lemma 2.4 (4) below.

Consider the following

***Example* 1.1.** Let p, q, r, t be distinct primes, where q divides $p-1$ and t divides $r-1$. Let $V = Q \rtimes C_p$, where Q is a simple $\mathbb{F}_q C_p$-module which is faithful for C_p. Let P be a simple $\mathbb{F}_p V$-module which is faithful for V, and let $C_r \rtimes C_t$ be a non-abelian group of order rt. Let $A = C_t$.

(i) Let $G = (Q \rtimes C_p) \times (C_r \rtimes C_t)$. Let B be a subgroup of order q in Q. Then $B < Q$ since $p > q$. Let $H = \langle A, B \rangle$. In view of [1, Theorem 5.1.9], A is modular in G. Hence H is generalized subnormal in G.

Assume that H is modular in G. Then $B = H \cap (Q \rtimes C_p)$ is modular in $(Q \rtimes C_p)$ by [1, p. 201]. Hence Q is cyclic by Lemma 2.1 (i) below. This contradiction shows that H is not modular in G. Similarly, if H is subnormal in G, then $C_t = H \cap (C_r \rtimes C_t)$ is subnormal in $C_r \rtimes C_t$ by [19, A, 14.1] and so C_t is normal in $C_r \rtimes C_t$. But then $C_r \rtimes C_t$ is abelian. This contradiction shows that H is not subnormal in G.

(ii) Now, let $G = (P \rtimes (Q \rtimes C_p)) \times (C_r \rtimes C_t)$. Since q divides $p-1$, PQ is supersoluble. Hence for some normal subgroup B of PQ we have $1 < B < P$. Then for every Sylow p-subgroup G_p of G we have $B \leq P \leq G_p$, so $BG_p = G_p = G_p B$. On the other hand, for every Sylow q-subgroup Q^x of G we have $Q^x \leq PQ$, so $BQ^x = Q^x B$. Hence B is S-quasinormal in G. In view of [1, Theorem 5.1.9], $A = C_t$ is modular in G. Then $H = \langle A, B \rangle$ is generalized S-quasinormal in G. Moreover, H is neither modular nor S-quasinormal in G.

Observe that if G is nilpotent, then every subgroup of G is generalized quasinormal in G. In the case of non-nilpotent groups we obtain the following useful facts.

***Theorem* A** (Huang, Hu, Skiba [20]). *Suppose that G is non-nilpotent. Then every maximal chain of length* 2 *in G includes a proper generalized subnormal subgroup of G if and only if G is either nearly nilpotent or a Schmidt group* (*that is, a non-nilpotent group all of which subgroups are nilpotent*) *with abelian Sylow subgroups.*

***Corollary* 1.2.** *If either every maximal subgroup of G is generalized subnormal in G or every* 2*-maximal subgroup of G is generalized S-quasinormal in G*, *then G is nearly nilpotent. Hence G is strongly supersoluble.*

***Corollary* 1.3** (Schmidt [4]). *If every* 2*-maximal subgroup M of G is modular*, *then G is nearly nilpotent.*

***Corollary* 1.4** (Agrawal [21]). *If every* 2*-maximal subgroup of G is S-quasinormal in G*, *then G is supersoluble.*

Note that Theorem A and Corollary 1.3 are the basis in the proofs of all other results of this paper.

In particular, being based on Corollary 1.3 we obtain the following modular analogue of the first among the above-mentioned Mann results.

***Theorem* B** (Huang, Hu, Skiba [20]). *Suppose that G is soluble and every n-maximal subgroup of G is generalized S-quasinormal in G. If $n \leq |\pi(G)|$, then G is strongly supersoluble and G induces on any its non-Frattini chief factor H/K an automorphism group of order dividing $p_1 \cdots p_m$, where $m \leq n$ and $p_1, \ldots, p_m$ are distinct primes.*

The example of the alternating group A_4 of degree 4 shows that the restrictions on $|\pi(G)|$ in Theorem B cannot be weakened.

***Corollary* 1.5** (Huang, Hu, Zheng [22]). *Suppose that G is soluble and every n-maximal subgroup of G is modular in G. If $n \leq |\pi(G)|$, then G is strongly supersoluble.*

As another application of Theorem B, we prove also the following

***Theorem* C** (Huang, Hu, Skiba [20]). *Suppose that every 3-maximal subgroup of G is generalized S-quasinormal in G. If G is not supersoluble, then either G is a group of order pq^2 for some distinct primes p and q, or $G = Q \rtimes P$, where $Q = C_G(Q)$ is a quaternion group of order 8 and $|P| = 3$.*

***Corollary* 1.6** (Schmidt [4]). *If every 3-maximal subgroup M of G is modular in G and G is not supersoluble, then either G is a group of order pq^2 for some distinct primes p and q or $G = Q \rtimes P$, where $Q = C_G(Q)$ is a quaternion group of order 8 and $|P| = 3$.*

As a first step in the proof of Theorem C, we prove the following

***Theorem* D** (Huang, Hu, Skiba [20]). (i) *If every maximal chain of G of length 3 includes a proper generalized subnormal subgroup of G, then G is soluble.*

***Corollary* 1.7** (Spencer [17]). *If every maximal chain of G of length 3 includes a proper subnormal subgroup of G, then G is soluble.*

Recall that the *rank* $r(G)$ of a soluble group G is the maximal integer k such that G has a chief factor of order p^k for some prime p (see [23, p. 685]).

***Theorem* E** (Huang, Hu, Skiba [20]). *Suppose that G is soluble and each n-maximal subgroup of G $(n > 1)$ is generalized S-quasinormal in G. Then $r(G) \leq n-1$.*

***Corollary* 1.8.** *Suppose that G is soluble and each n-maximal subgroup of G $(n > 1)$ is either modular or S-quasinormal in G. Then $r(G) \leq n-1$.*

***Corollary* 1.9** (Mann [18]). *Suppose that G is soluble and each n-maximal subgroup of G $(n > 1)$ is quasinormal in G. Then $r(G) \leq n-1$.*

2 Properties of generalized subnormal and generalized S-quasinormal subgroups

The proofs of Theorems A, B, C, D and E are based on the properties of generalized subnormal and generalized S-quasinormal subgroups which we investigate in the given section.

A normal subgroup A of G is said to be *hypercyclically embedded* in G [1, p. 217] if either $A = 1$ or $A \neq 1$ and every chief factor of G below A is cyclic. We use $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ to denote the product of all normal hypercyclically embedded subgroups of G. It is clear that a normal subgroup A of G is hypercyclically embedded in G if and only if $A \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$.

Recall that G is said to be a *P-group* [1, p. 49] if $G = A \rtimes \langle t \rangle$ with an elementary abelian p-group A and an element t of prime order $q \neq p$ induces a non-trivial power automorphism on A.

The following two lemmas collect the properties of modular subgroups which we use in our proofs.

***Lemma* 2.1** (See Theorems 5.1.14 and 5.2.5 in [1]). *Let M be a modular subgroup of G.*

(i) *M/M_G is nilpotent and*

$$M^G / M_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/M_G).$$

(ii) *If $M_G = 1$, then*

$$G = S_1 \times \cdots \times S_r \times K,$$

where $0 \leq r \in \mathbb{Z}$ and for all $i, j \in \{1, \ldots, r\}$,

(a) *S_i is a non-abelian P-group,*

(b) *$(|S_i|, |S_j|) = 1 = (|S_i|, |K|)$ for all $i \neq j$,*

(c) *$M = Q_1 \times \cdots \times Q_r \times (M \cap K)$ and Q_i is a non-normal Sylow subgroup of S_i,*

(d) *$M \cap K$ is quasinormal in G.*

***Lemma* 2.2** [1, p. 201]. *Let A, B and N be subgroups of G, where A is modular in G and N is normal in G.*

(1) *If B is modular in G, then $\langle A, B \rangle$ is modular in G.*

(2) *AN/N is modular in G/N.*

(3) *N is modular in G.*

(4) *If $A \leq B$, then A is modular in B.*

(5) *If φ is an isomorphism of G onto $\overline{G}$, then A^{φ} is modular in $\overline{G}$.*

(6) *If $N \leq B$ and B/N is modular in G, then B is modular in G.*

(7) *A maximal subgroup M of G is modular in G if and only if $|G/M_G|$ divides pq for some primes $p \neq q$* (see [1]).

***Lemma* 2.3.** *Let A, B and N be subgroups of G, where A is generalized subnormal in G and N is normal in G.*

(1) *AN/N is generalized subnormal in G/N.*

(2) *If* $A \le B$, *then* A *is generalized subnormal in* B.

(3) *If* $N \le B$ *and* B/N *is generalized subnormal in* G/N, *then* B *is generalized subnormal in* G.

(4) *If* φ *is an isomorphism of* G *onto* $\overline{G}$, *then* A^{φ} *is generalized subnormal in* $\overline{G}$.

(5) *If* B *is generalized subnormal in* G, *then* $\langle A, B\rangle$ *is generalized subnormal in* G.

(6) *If* A *is a maximal subgroup of* G, *then* $|G/A_G|$ *divides* pq *for some primes* $p \ne q$.

Proof. Let $A = \langle L, T\rangle$, where L is a modular and T is a subnormal subgroups of G.

(1) $AN/N = \langle LN/N, TN/N\rangle$, where LN/N is modular in G/N by Lemma 2.2 (2) and TN/N is subnormal in G/N by [19, A, 14.1]. Hence AN/N is generalized subnormal in G/N.

(2) This follows from Lemma 2.2 (4) and Lemma 14.1 in [19, A].

(3) Let $B/N = \langle V/N, W/N\rangle$, where V/N is modular in G/N and W/N is subnormal in G/N. Then $B = \langle V, W\rangle$, where V is modular in G by Lemma 2.2 (6) and W is subnormal in G, so B is generalized subnormal in G.

(4) This follows from Lemma 2.2 (5).

(5) Let $B = \langle V, W\rangle$, where V is a modular and W is a subnormal subgroups of G. Then

$$\langle A, B\rangle = \langle\langle L, T\rangle, \langle V, W\rangle\rangle = \langle\langle L, V\rangle, \langle T, W\rangle\rangle,$$

where $\langle L, V\rangle$ is modular in G by Lemma 2.2 (1) and $\langle T, W,\rangle$ is subnormal in G by [19, A, 14.4]. Hence $\langle A, B\rangle$ is generalized subnormal in G.

(6) First note that A/A_G is a maximal generalized subnormal subgroup of G/A_G by Part (1). Hence we can assume without loss of generality that $A_G = 1$, so $G = RA$ for some minimal normal subgroup R of G. Then $T^G = T^{RA} = T^A \le A_G = 1$ by [19, A, 14.3]. Hence $A = L$ is a modular subgroup of G, so we have (6) by Lemma 2.2 (7). □

***Lemma* 2.4** (See Chapter 1 in [3]). *Let* A, B *and* N *be subgroups of* G, *where* A *is S-quasinormal in* G *and* N *is normal in* G.

(1) AN/N *is S-quasinormal in* G/N.

(2) *If* $A \le B$, *then* A *is S-quasinormal in* B.

(3) *If* $N \le B$ *and* B/N *is S-quasinormal in* G/N, *then* B *is S-quasinormal in* G.

(4) A *is subnormal in* G *and* A^G/A_G *is nilpotent.*

(5) *If* B *is S-quasinormal in* G, *then* $\langle A, B\rangle$ *is S-quasinormal in* G.

***Lemma* 2.5.** *Let* A, B *and* N *be subgroups of* G, *where* A *is generalized S-quasinormal in* G *and* N *is normal in* G.

(1) AN/N *is generalized S-quasinormal in* G/N.

(2) *If* $A \le B$, *then* A *is generalized S-quasinormal in* B.

(3) *If* $N \le B$ *and* B/N *is generalized S-quasinormal in* G/N, *then* B *is generalized S-quasinormal in* G.

(4) *If* φ *is an isomorphism of* G *onto* $\overline{G}$, *then* A^{φ} *is generalized S-quasinormal in* $\overline{G}$.

(5) *If* B *is generalized S-quasinormal in* G, *then* $\langle A, B\rangle$ *is generalized S-quasinormal in* G.

Proof. See the proof of Lemma 2.3 and use Lemma 2.4 instead of Lemma 14.1 in [19, A].

***Lemma* 2.6.** *Suppose that* G *is soluble, and let* $N \ne G$ *be a minimal normal subgroup of* G. *Suppose also that every n-maximal subgroup of* G *is generalized subnormal* (*respectively generalized S-quasinormal*) *in* G, *where* $n \le |\pi(G)| + r$ *for some integer* r. *Then there is a natural number* $m \le n$ *such that every m-maximal subgroup of* G/N *is generalized subnormal* (*respectively generalized S-quasinormal*) *in* G/N *and* $m \le |\pi(G/N)| + r$.

Proof. First assume that N is not a Sylow subgroup of G. Then $|\pi(G/N)| = |\pi(G)|$. Moreover, if H/N is an *n*-maximal subgroup of G/N, then H is an *n*-maximal subgroup of G, so H is generalized subnormal (respectively generalized *S*-quasinormal) in G by hypothesis. Consequently, H/N is generalized subnormal (respectively generalized *S*-quasinormal) in G/N by Lemma 2.3 (1) (respectively by Lemma 2.5 (1)). On the other hand, if G/N includes no *n*-maximal subgroups, then the identity subgroup I of G/N is the unique *m*-maximal subgroup of G/N for some

$$m < n \le |\pi(G)| + r = |\pi(G/N)| + r.$$

Thus the conclusion of the lemma is fulfilled for G/N.

Finally, consider the case that N is a Sylow *p*-subgroup of G. Let E be a *p*-complement of G. It is clear that $|\pi(E)| = |\pi(G)| - 1$ and E is a maximal subgroup of G. Therefore, every $(n-1)$-maximal subgroup of E is generalized subnormal (respectively generalized *S*-quasinormal) in E by Lemma 2.3 (2) (respectively by Lemma 2.5 (2)). Thus, by the isomorphism $G/N \simeq E$, Lemma 2.3 (4) (respectively by Lemma 2.5 (4)) implies that every $(n-1)$-maximal subgroup of G/N is generalized subnormal (respectively generalized *S*-quasinormal) in G/N, and also we have

$$n - 1 \le |\pi(G)| - 1 + r = |\pi(G/N)| + r. \quad \square$$

***Lemma* 2.7.** *Let $G = R \rtimes M$ be a soluble primitive group, where $R = C_G(R) = O_p(G)$ is a minimal normal subgroup of G. Let $T \neq 1$ be a subgroup of G. Suppose that G is not nearly nilpotent.*

(1) *If $T < M$, then T is not generalized subnormal in G.*

(2) *If $T < R$, then some subgroup V of R with $|V| = |T|$ is not generalized S-quasinormal in G.*

Proof. (1) Suppose that $T = \langle A, B \rangle$, where A is modular and B is subnormal in G. Then T is not subnormal in G since otherwise

$$1 < B^G = B^{RM} = B^M \leq M_G = 1$$

by [19, A, 14.3]. Therefore A is not quasinormal in G by Lemma 2.4 (4). Since G is a soluble primitive group, it follows by Lemma 2.1 (ii) that G is a *P*-group since $T_G \leq M_G = 1$. But then G is nearly nilpotent, a contradiction. Hence T is not generalized subnormal in G.

(2) Let V be a subgroup of R with $|V| = |T|$ such that V is normal in a Sylow *p*-subgroup of G. Suppose that $V = \langle A, B \rangle$, where A is modular and B is *S*-quasinormal in G. If $A \neq 1$, then $1 < A \leq R \cap Z_{\mathfrak{U}}(G)$ by Lemma 2.1 (i) since $A_G = 1$ and so $R \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. But then $|R| = p$, contrary to $1 < T < R$. Hence $V = B$ is *S*-quasinormal in G. Then for every Sylow *q*-subgroup Q of G, where $q \neq p$, we have $VQ = QV$ and so $V = R \cap VQ$. Hence $Q \leq N_G(V)$. Thus V is normal in G, which contradicts the minimality of R. □

Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. A group G is called a *minimal non-$\mathfrak{X}$-group* [15] or *$\mathfrak{X}$-critical group* [19] if G is not in $\mathfrak{X}$ but all proper subgroups of G are in $\mathfrak{X}$. An $\mathfrak{N}$-critical group is also called a *Schmidt group*.

***Lemma* 2.8** [15, I, Propositions 1.8, 1.11 and 1.12]. *The following claims hold for every $\mathfrak{U}$-critical (that is, a minimal non-supersoluble) group G*:

(1) *G is soluble and $|\pi(G)| \leq 3$.*

(2) *$G^{\mathfrak{U}}$ is the unique normal Sylow subgroup of G.*

(3) *If S is a complement to $G^{\mathfrak{U}}$ in G, then $S / S \cap \Phi(G)$ is either a cyclic prime power order group or a Miller-Moreno (that is, a minimal non-abelian) group.*

(4) *$G^{\mathfrak{U}} / \Phi(G^{\mathfrak{U}})$ is a non-cyclic chief factor of G.*

(5) *If $G^{\mathfrak{U}}$ is non-abelian, then the center, commutator subgroup, and Frattini subgroup of $G^{\mathfrak{U}}$ coincide with one another.*

(6) *If $p > 2$, then $G^{\mathfrak{U}}$ is of exponent p; for $p = 2$ the exponent of $G^{\mathfrak{U}}$ is at most* 4.

***Lemma* 2.9** [24, Lemma 12.8]. *If H/K is an abelian chief factor of G and M is a maximal subgroup of G such that $K \leq M$ and $MH = G$, then*

$$G / M_G \simeq (H / K) \rtimes (G / C_G(H / K)) \simeq$$
$$\simeq (HM_G / M_G) \rtimes (G / C_G(HM_G / M_G)).$$

We use $\mathfrak{N}_n$ and $\mathfrak{U}_s$ to denote the classes of all nearly nilpotent and of all strongly supersoluble groups, respectively.

Recall that a class of soluble groups $\mathfrak{X}$ is a *Schunck class* [19, III, 2.7] if $G \in \mathfrak{X}$ whenever $G / M_G \in \mathfrak{X}$ for all maximal subgroups M of G.

***Proposition* 2.10.** *The class of all nearly nilpotent groups $\mathfrak{N}_n$ is a Schunck class, and $\mathfrak{N}_n \subseteq \mathfrak{U}_s$. Hence every homomorphic image of any nearly nilpotent group is nearly nilpotent, and G is nearly nilpotent whenever $G / \Phi(G)$ is nearly nilpotent.*

Proof. Suppose that for every maximal subgroup M of G we have $G / M_G \in \mathfrak{N}_n$. Then $G / \Phi(G)$ is supersoluble, so G is supersoluble. If H / K is a non-Frattini chief factor of G and M is a maximal subgroup of G such that $K \leq M$ and $MH = G$, then $G / M_G \simeq (H / K) \rtimes (G / C_G(H / K))$ by Lemma 2.9. Since clearly

$$C_{(H/K)(G/C_G(H/K))}(H / K) = H / K,$$

it follows that $|G / C_G(H / K)| = p$ is a prime. Hence $G \in \mathfrak{N}_n$. Therefore $\mathfrak{N}_n$ is a Schunck class, so every homomorphic image of any nearly nilpotent group is nearly nilpotent, and G is nearly nilpotent whenever $G / \Phi(G)$ is nearly nilpotent by [19, III, 2.7].

Now we show that every nearly nilpotent group G is strongly supersoluble. Assume that this is false and let G be a counterexample of minimal order. Let R be a minimal normal subgroup of G. Then G / R is strongly supersoluble by the choice of G since G / R is nearly nilpotent. Moreover, if $R \leq \Phi(G)$, then G is strongly supersoluble by Theorem A in [6], contrary to the choice of G. Therefore $R \nleq \Phi(G)$, so $G / C_G(R)$ divides a prime since G is nearly nilpotent. Therefore G is strongly supersoluble by the Jordan-Hölder theorem. This contradiction completes the proof of the proposition.

REFERENCES

1. *Schmidt*, *R*. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994.

2. *Kegel*, *O.H*. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

3. *Ballester-Bolinches*, *A*. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2010.

4. *Schmidt*, *R*. Endliche Gruppen mit vilen modularen Untergruppen / R. Schmidt // Abhan.

Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1970. – Vol. 34. – P. 115–125.

5. *Zimmermann*, *I*. Submodular subgroups in finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

6. *Vasilyev*, *V.A*. Finite groups with submodular Sylow subgroups / V.A. Vasilyev // Siberian Math. J. – 2015. – Vol. 56, № 6. – P. 1019–1027.

7. *Li*, *Sh*. Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are *TI*-groups / Sh. Li // Math. Proc. Royal Irish Acad. – 2000. – Vol. 100. – P. 65–71.

8. *Guo*, *X*. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X. Guo, K.P. Shum // J. Pure and Appl. Algebra. – 2003. – Vol. 181. – P. 297–308.

9. *Li*, *B*. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Sci. in China. Series A: Math. – 2008. – Vol. 50. – P. 827–841.

10. *Kniahina*, *V.N*. On the permutability of *n*-maximal subgroups with Schmidt subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. – 2012. – Vol. 18, № 3. – P. 125–130.

11. *Monakhov*, *V.S*. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Mat. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.

12. *Kovaleva*, *V.A*. Finite soluble groups with all *n*-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17. – P. 273–290.

13. *Kovaleva*, *V.A*. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups *U*-subnormal / V.A. Kovaleva, X. Yi // Acta Mat. Hung. – 2015. – Vol. 146. – P. 47–55.

14. *Kovaleva*, *V.A*. Finite groups with given generalized maximal subgroups (review). I. Finite groups with generalized normal *n*-maximal subgroups / V.A. Kovaleva // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2016. – № 4 (29). – P. 48–58.

15. *Guo*, *W*. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015.

16. *Huppert*, *B*. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – 409–434.

17. *Spencer*, *A.E*. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 27, № 1. – P. 167–173.

18. *Mann*, *A*. Finite groups whose *n*-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.

19. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

20. *Huang*, *J*. Finite groups whose *n*-maximal subgroups are generalized subnormal / J. Huang, B. Hu, A.N. Skiba. – Preprint, 2016.

21. *Agrawal*, *R.K*. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.

22. *Huang*, *J*. Finite groups whose *n*-maximal subgroups are modular / J. Huang, B. Hu, X. Zheng // Siberian Math. J. (submitted).

23. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.

24. *Shemetkov*, *L.A*. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow: Nauka, 1989.

Research is supported by an NNSF grant of China (*Grant* № 11401264) *and a TAPP of Jiangsu Higher Education Institutions* (*PPZY* 2015A013).

Поступила в редакцию 05.05.17.

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ НАСЫЩЕННОЙ ФОРМАЦИИ

И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк

Белорусский государственный университет транспорта

A CRITERION FOR A FINITE GROUP TO BELONG A SATURATED FORMATION

I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk

Belarusian State University of Transport

Доказывается следующий результат: *пусть* $\mathcal{F}$ *– такая наследственная насыщенная формация p-разрешимых групп, содержащая все p-сверхразрешимые группы, что* $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{p'}\mathcal{F}$. *Пусть* $G = AT$, *где A – холлова* π*-подгруппа из G,* $p \notin \pi$ *и T – p-сверхразрешимая подгруппа из G. Предположим, что для силовской p-подгруппы P из T мы имеем* $|P| > p$. *Если A перестановочна с холловой* p'*-подгруппой из T и со всеми такими максимальными подгруппами V из P, что* $G^{\mathcal{F}} \cap P \nleq V$, *то* $G \in \mathcal{F}$.

Ключевые слова: *конечная группа, насыщенная формация, p-разрешимая группа, p-сверхразрешимая группа, холлова подгруппа.*

We prove the following result: *Let* $\mathcal{F}$ *be a hereditary saturated formation of p-soluble groups containing all p-supersoluble groups such that* $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{p'}\mathcal{F}$. *Let* $G = AT$, *where A is a Hall* π*-subgroup of G,* $p \notin \pi$ *and T is a p-supersoluble subgroup of G. Suppose that for a Sylow p-subgroup P of T we have* $|P| > p$. *If A permutes with a Hall* p'*-subgroup of T and with all maximal subgroups V of P such that* $G^{\mathcal{F}} \cap P \nleq V$, *then* $G \in \mathcal{F}$.

Keywords: *finite group, saturated formation, p-soluble group, p-supersoluble group, Hall subgroup.*

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, p is always supposed to be a prime and π is a non-empty subset of the set $\mathbb{P}$ of all primes; p' denotes the set of all primes $q \neq p$. A subgroup H of G is said to permute with a subgroup K of G if $HK = KH$.

By the well known Hall theorem [1], G is soluble if every Sylow subgroup P of G has a complement T in G, that is, a subgroup of G such that $PT = G$ and $P \cap T = 1$. The example of the alternating group A_5 shows that such a result is incorrect in general if we consider only the Sylow p-subgroups for some fixed p. Nevertheless, B. Huppert [2] proved that if a Sylow p-subgroup P of G has a complement T in G, $|P| > p$ and T permutes with every maximal subgroup of P, then G is p-soluble. This result was improved in some directions. V. Sergienko [3] on the base of this result proved that if a Sylow p-subgroup P of G has a complement T in G, there is a number p^k such that $1 < p^k < |P|$ and T permutes with all subgroups of P of order p^k and P is abelian in the case $p^k = 2$, then G is p-so-luble and the p-length of G is equal to 1. Further, M. Borovikov [4] proved that under these conditions, G is even p-supersoluble. In [5] W. Guo, K.P. Shum and A.N. Skiba proved that if $G = AT$, where A is a Hall π-subgroup of G, T is nilpotent, and A permutes with all Sylow subgroups of T and with all maximal subgroups of any Sylow subgroup of T, then G is p-supersoluble, for each prime $p \notin \pi$ such that $|T_p| > p$ for a Sylow p-subgroup T_p of T. See also papers [6], [7].

In this paper we prove the following result in this line researches.

Theorem. *Let* $\mathcal{F}$ *be a hereditary saturated formation of p-soluble groups containing all p-supersoluble groups such that* $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{p'}\mathcal{F}$. *Let* $G = AT$, *where A is a Hall* π*-subgroup of G,* $p \notin \pi$ *and T is a p-supersoluble subgroup of G. Suppose that for a Sylow p-subgroup P of T we have* $|P| > p$. *If A permutes with a Hall* p'*-subgroup of T and with all maximal subgroups V of P such that* $G^{\mathcal{F}} \cap P \nleq V$, *then* $G \in \mathcal{F}$.

All unexplained notation and terminology are standard. The reader is referred to [8]–[10] or [11] if necessary.

1 Preliminaries

***Lemma* 1.1.** *Let $\mathcal{F}$ be a hereditary formation. Let $H \le E \le G$ and $E_p \le G_p$, where E_p and G_p are Sylow p-subgroups of E and G, respectively. Suppose also that $H \le E_p$.*

(1) *If N is a normal subgroup of G and $(G/N)^{\mathcal{F}} \cap (PN/N) \nleq HN/N$, then $G^{\mathcal{F}} \cap P \nleq H$.*

(2) *If $E^{\mathcal{F}} \cap E_p \nleq H$, then $G^{\mathcal{F}} \cap G_p \nleq H$.*

Proof. (1) Assume that $G^{\mathcal{F}} \cap P \le H$. Then $N(G^{\mathcal{F}} \cap P) \le NH$, so

$$(G/N)^{\mathcal{F}} \cap (PN/N) =$$
$$= (G^{\mathcal{F}}N/N) \cap (PN/N) = N(G^{\mathcal{F}}N \cap P)/N =$$
$$= N(G^{\mathcal{F}} \cap P)(N \cap P)/N =$$
$$= N(G^{\mathcal{F}} \cap P)/N \le NH/N,$$

a contradiction. Hence we have $G^{\mathcal{F}} \cap P \nleq H$.

(2) Since the formation $\mathcal{F}$ is hereditary, $E/E \cap G^{\mathcal{F}} \simeq EG^{\mathcal{F}}/G^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$. Hence this assertion directly follows from the inclusion $E^{\mathcal{F}} \cap E_p \le G^{\mathcal{F}} \cap G_p$. □

***Lemma* 1.2.** *If G is p-supersoluble and $O_{p'}(G)=1$, then G is supersoluble and $F(G) = O_p(G)$ is normal Sylow p-subgroup of G, where p is the largest prime dividing $|G|$.*

***Lemma* 1.3.** *Let $\mathcal{F}$ be a saturated formation containing supersoluble groups and E a minimal normal subgroup of G such that $G/E \in \mathcal{F}$. If E is abelian and $\mathcal{F}$-central, then $G \in \mathcal{F}$.*

Proof. Clearly, we can suppose that $E \nleq \Phi(G)$. Let M be a maximal subgroup of G such that $G = E \rtimes M$ and let $C = C_G(E)$. Then $M_G = C \cap M$ and so

$$G/M_G = (EM_G/M_G) \rtimes (M/M_G) \in \mathcal{F}$$

since $M/M_G \simeq G/C \in \mathcal{F}$. Thus

$$G \simeq G/E \cap M_G \in \mathcal{F}. \qquad \square$$

***Lemma* 1.4** (O.H. Kegel [12]). *Let A and B be subgroups of G such that $G \ne AB$ and $AB^x = B^xA$ for all $x \in G$. Then G has a proper normal subgroup N such that either $A \le N$ or $B \le N$.*

***Lemma* 1.5** (V.N. Knyagina and V.S. Monakhov [13]). *Let H, K and N be subgroups of G. If H is a Hall subgroup of G and H permutes with K, then*

$$N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K).$$

2 Proof of Theorem

Assume that this theorem is false and let G be a counterexample of minimal order. Then $G^{\mathcal{F}} \ne 1$. We proceed our proof by proving the following claims:

(1) $O_{p'}(G) = 1$.

In view of Lemma 1.1(1), the hypothesis still holds for G/D and so $G/D \in \mathcal{F}$ by the choice of G. But then $G \in \mathcal{F}$ since $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{p'}\mathcal{F}$, a contradiction. Thus we have (1).

(2) $G^{\mathcal{F}} \cap P \ne 1$.

Indeed, if $G^{\mathcal{F}} \cap P = 1$, then $G^{\mathcal{F}}$ is a p'-group. Hence $G^{\mathcal{F}} = 1$ by Claim (1), a contradiction.

(3) *T is supersoluble, $O_{p'}(T) = 1$ and P is normal in T.*

Since $O_{p'}(T)$ is normal in T,

$$(O_{p'}(T))^G = (O_{p'})^{AT} = (O_{p'})^A \le AT_{p'} = T_{p'}A,$$

where $T_{p'}$ is a Hall p'-subgroup of T. Hence $(O_{p'}(T))^G \le O_{p'}(G) = 1$, so $O_{p'}(T) = 1$. Hence, since T is p-supersoluble by hypothesis, T is supersoluble and P is normal in T by Lemma 1.2.

(4) *G is not p-soluble. Hence $G^{\mathcal{F}}$ is not p-soluble.*

Assume that G is p-soluble. Let L be a minimal normal subgroup of G. Then by Claim (1), L is a p-group and so $L \le P$. Next note that $G/L \in F$. Indeed, if $|P/L| \le p$, then the assertion follows from Lemma 1.3. On the other hand, if $|P/L| > p$, the hypothesis is true for G/L by Lemma 1.1 (1). Hence $G/L \in \mathcal{F}$ by the choice of G. Therefore $L \nleq \Phi(G)$. Hence $|L| > p$ and $L \nleq \Phi(T)$. Let M be a maximal subgroup of T such that $LM = T$. Then every Hall p'-subgroup of M is a Hall p'-subgroup of T. Since T is soluble, any two Hall p'-subgroups are conjugate in T. Hence without loss of generality we may suppose that $M = M_pM_{p'}$, where M_p is a Sylow p-subgroup of M and $M_{p'}$ is a Hall p'-subgroup of M such that $M_{p'}A = AM_{p'}$. Since T is supersoluble, $|T:M| = p$, so M_p is a maximal subgroup of P. Note also that $L \le G^{\mathcal{F}}$. Indeed, if $L \nleq G^{\mathcal{F}}$, then from the G-isomorphism

$$G^{\mathcal{F}}L/G^{\mathcal{F}} \simeq L/L \cap G^{\mathcal{F}}$$

we deduce that L is $\mathcal{F}$-central in G and hence $G \in \mathcal{F}$ by Lemma 1.3, contrary to the choice of G. Hence A permutes with M_p. Therefore

$$MA = M_pM_{p'}A = AM = M_pM_{p'}$$

is a subgroup of G with $|G:MA| = p$ and with $L \nleq MA$. But then $|L| = p$, a contradiction. Thus we have (4).

(5) *If H is a minimal normal subgroup of G and $|H| = p$, then $|P| = p^2$.*

Indeed, if $|P| > p^2$, the hypothesis is still true for G/H and so $G/H \in \mathcal{F}$ by the choice of G. Hence $G \in \mathcal{F}$ by Lemma 1.3, contrary to the choice of G.

(6) *If* H *is a normal subgroup of* G *and* $H \cap A \neq A$, *then* H *is p-soluble.*

It is clear that $H = (A \cap H)(T \cap H)$. Let $E = (H \cap A)T$. Let V be a maximal subgroup of P. Suppose that $E^{\mathcal{F}} \cap P \nleq V$. Then, by Lemma 1.1 (2), $G^{\mathcal{F}} \cap P \nleq V$. Hence $AV = VA$ is a subgroup of G. Therefore

$$AV \cap (A \cap H)P =$$
$$= (A \cap H)(AV \cap P) = (A \cap H)V(A \cap T) =$$
$$= (A \cap H)V = V(A \cap H).$$

Thus the hypothesis is still true for E. If $E = G$, then

$$A = A \cap (H \cap A)P = (H \cap A)(A \cap T) = H \cap A,$$

a contradiction. Hence, $E \neq G$ and so $E \in \mathcal{F}$ by the choice of G. Since every group in $\mathcal{F}$ is p-soluble by hypothesis, we conclude that $H \leq E$ is p-soluble.

(7) $O^{p'}(G) = G$.

Suppose that $O^{p'}(G) \neq G$. Since the hypothesis holds for $O_{p'}(G)$ by Lemma 1.1 (2), $O_{p'}(G) \in \mathcal{F}$ by the choice of G. But then G is p-soluble, contrary to Claim (4).

(8) *If* H *is a p-soluble minimal normal subgroup of* G, *then* $|H| = p$ *and* $H \leq Z(G)$.

First note that if $|H| = p$ and $C = C_G(H)$, then G/C, as a group of automorphisms of H, is a cyclic group of order dividing $p-1$. Hence in this case we have $H \leq Z(G)$ by Claim (6). Therefore we need only show that $|H| = p$. Clearly, H is either p'-group or p-group. But the former case is impossible by Claim (1), so $|H| = p^a$ for some natural a. If either $H = P$ or $|P/H| > p$, then G is clearly p-soluble, contrary to Claim (4). Hence H is a maximal subgroup of P. Suppose that $a > 1$. Then P is not cyclic. Therefore for some maximal subgroup V of P we have $P = HV$. Suppose that $G^{\mathcal{F}} \cap P \leq V$. Then $G^{\mathcal{F}} \neq G$ and $H \nleq G^{\mathcal{F}}$. Thus, in view of Claims (1) and (6), $G = G^{\mathcal{F}}H$. Since $G/G^{\mathcal{F}}$ is p-soluble and $O^{p'}(G) = G$, there is a normal maximal subgroup of G such that $G^{\mathcal{F}} \leq M$ and $|G : M| = p$. Since $|H| > p$, it follows that $H \leq M$. Hence $G = G^{\mathcal{F}}H \leq M$, a contradiction. Then $G^{\mathcal{F}} \cap P \nleq V$, which implies that A permutes with V. Now, as in the proof of Claim (4), it may be proved that there is a subgroup W of G such that $|G : W| = p$ and $H \nleq W$. But then $|H| = p$, a contradiction. Hence we have (8).

(9) P *is not cyclic.*

Suppose on the contrary that P is cyclic. First we show that in this case G does not have a proper normal subgroup E with $EP = G$. Indeed, if $EP = G$, where E is normal in G and $E \neq G$, then for any Sylow q-subgroup Q of A we have $G = EN_G(Q)$ by the Frattini argument. Hence $P = D_pN_p$ for some Sylow p-subgroups D_p of D and N_p of $N_G(Q)$. But P is cyclic and so $P \leq N_G(Q)$. Now let W be the Hall p'-subgroup of T such that $AW = AW$. Then

$$Q^G = Q^{AWP} = Q^{AW} \leq QAW = AW,$$

where $AW = WA$ is a p'-subgroup of G. Hence $Q^G \leq O_{p'}(G)$, which contradicts Claim (1). Now suppose that $G^{\mathcal{F}} \neq G$ and let $G^{\mathcal{F}} \leq M \leq G$, where M is a normal subgroup of G with simple quotient G/M. In view of Claim (7), p divides $|G/M|$. But then, since $\mathcal{F}$ consists of p-soluble groups, G/M is a p-group and hence $MP = G$. This contradiction shows that $G^{\mathcal{F}} = G$, so A permutes with the maximal subgroup Z of P. Since T is supersoluble by Claim (3), Z is normal in T. Hence

$$D = Z^G = Z^{AT} = Z^A \leq ZA.$$

By Lemma 1.4, $D = (A \cap D)(T \cap D)$. Assume that either $D \neq AT$ of $T \neq P$. Then D is p-soluble. Indeed, in the former case we have $D \cap A \neq A$ and so, by Claim (6), D is soluble. On the other hand, if $A \leq D$ and $T \neq P$, then the hypothesis still holds on DP. Since $|DP| < |G|$, DP is p-supersoluble by the choice of G. Now, let H be a minimal normal subgroup of G contained in D. Then since D is p-soluble, $|H| = p$ and $H \leq Z(G)$ by Claim (8). Let $N = N_G(P)$. If $P \leq Z(N)$, then G is p-nilpotent by the Burnside theorem [14], which contradicts the choice of G. Hence $N \neq C_N(P)$. Let $x \in N \setminus C_G(P)$ with $(|x|, |P|) = 1$ and $E = P \rtimes \langle x \rangle$. By [8, III, 13.4], $P = [E, P] \times (P \cap Z(E))$. Since $H \leq P \cap Z(E)$ and P is cyclic, it follows that $P = P \cap Z(E)$ and so $x \in C_G(P)$. This contradiction shows that $T = P$ and $D = M$. Let $q \neq p$ be a prime dividing $|A|$ and Q be any Sylow q-subgroup of A. Let $N = N_G(Q)$. Clearly, Q is a Sylow subgroup of D and so by the Frattini argument we have $G = DN$ and so $P = D_pN_p$ for some Sylow subgroup D_p of D and Sylow subgroup N_p of N. But P is cyclic and so $P = N_p$. Hence

$$Q^G = Q^{AP} = Q^A \leq A,$$

which contradicts Claim (1). Hence we have (9).

(10) $|P| \neq p^2$.

Suppose on the contrary that $|P| = p^2$. By Claim (9), P is not cyclic.

If Z is a maximal subgroup of P, then $Z^G \leq AZ$, so $p > 2$ by Claim (3). Therefore T has at least three different subgroups Z_1, Z_2, Z_3 of order p such that $G^{\mathcal{F}} \cap P \nleq Z_i$. Let $N_i = Z_i^G$ be the normal closure of Z_i in G. Then $N_i \leq AZ_i$ and so $N_i \cap N_j$ is contained in $O_{p'}(G) = 1$ for any different $i, j \in \{1,2,3\}$. Hence $P \leq C_i = C_G(N_i)$ for all i. Assume that for some i, $C_i \neq G$. Then C_i is p-soluble by Claim (6), and so G is p-soluble since G/C_i is a p'-group. This contradiction shows that $C_i = G$ for all i. It follows N_1, N_2 and N_3 are abelian groups and so $N_i = Z_i$ for all i and so P is normal in G. It follows that G is p-soluble, which contradicts Claim (4). Thus we have (10).

(11) $O_p(G) = 1$.

Let $D = O_p(G) \neq 1$ and H a minimal normal subgroup of G contained in D. Then $|H| = p$ by Claim (8) and so $|P| = p^2$ by Claim (5), which contradicts Claim (10).

Final contradiction.

Let V be a maximal subgroup of P and $N = V^G$ be the normal closure of V in G. Suppose that $G^{\mathcal{F}} \cap P \nleq V$. Then $N \leq AM$. If $N \cap A \neq A$, then N is p-soluble by Claim (5) and hence $O_p(G) \neq 1$, which contradicts Claim (11). Therefore $N \cap A = A$. Hence $N = AV$ and $|G/N| = p$, so $G^{\mathcal{F}} \leq N$. Therefore

$$G^{\mathcal{F}} \cap P \leq N \cap P = AV \cap P = V.$$

Thus $G^{\mathcal{F}} \cap P \leq \Phi(P)$. But then $G^{\mathcal{F}}$ is p-nilpotent by Tate's theorem [8]. It follows that G is p-soluble, contrary to Claim (4). □

REFERENCES

1. *Hall*, *P*. A characteristic property of soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12, № 2. – P. 188–200.

2. *Huppert*, *B*. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 161–169.

3. *Sergienko*, *V.I*. A criterion for the p-solubility of finite groups / V.I. Sergienko // Mat. Zam. – 1971. – Vol. 9. – P. 375–383.

4. *Borovikov*, *M.T*. Groups with permutable subgroups of mutually simple orders / M.T. Borovikov // Questions of Alg. – 1990. – Vol. 5. – P. 80–82.

5. *Guo*, *W*. Criteria of Existence of Hall Subgroups in Non-soluble Finite Groups / W. Guo, A.N. Skiba // Acta Math. Sinica, English Ser. – 2010. – Vol. 26, № 2. – P. 295–304.

6. *Guo*, *W*. Finite groups with some given systems of X_m-semipermutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Math. Nachr. – 2010. – Vol. 283. – P. 1603–1612.

7. *Yi*, *X*. On some generalizations of permutability and S-permutability / X. Yi, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2013. – № 4 (17). – P. 47–54.

8. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967.

9. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

10. *Guo*, *W*. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing, New York, Dordrecht, Boston, London: Science Press, Kluwer Academic Publishers, 2000.

11. *Ballester-Bolinches*, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006.

12. *Kegel*, *O.H*. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90–93.

13. *Knyagina*, *V.N*. On π'-properties of finite group having a Hall π-subgroup / V.N. Knyagina, V.S. Monakhov // Siberian Math. J. – 2011. – P. 234–243.

14. *Gorenstein*, *D*. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York, Evanston, London: Harper & Row Publishers, 1968.

Поступила в редакцию 29.04.17.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9 + 537.86

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СЛОЖНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.П. Жогаль[1], С.И. Жогаль[2], А.В. Клименко[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта*, *Гомель*

ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF ONE COMPLEX STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEM WITH DELAY

S.P. Zhogal[1], S.I. Zhogal[2], A.V. Klimenko[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Transport*, *Gomel*

Исследованы вопросы существования и единственности решений систем дифференциальных уравнений, содержащих стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа и обыкновенные стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием, связанные между собой запаздывающими связями.

Ключевые слова*: стохастические дифференциальные уравнения*, *запаздывание*, *стохастические дифференциальные уравнения в частных производных*, *звенья с сосредоточенными параметрами*, *звенья с распределенными параметрами.*

Problems of the existence and uniqueness of solutions of systems of differential equations containing a stochastic differential equation in partial derivatives of hyperbolic type and ordinary stochastic differential equations with delay connected with each other by retarded connections are investigated.

Keywords: *stochastic differential equations*, *delay*, *stochastic partial differential equations*, *units with lumped parameters*, *units with distributed parameters.*

Введение

При исследовании многих сложных систем радиотехники и электроники, а также целого ряда других областей современного естествознания, встает задача их наиболее адекватного математического описания. Во многих случаях такие системы трактуются как системы с сосредоточенными, либо как системы с распределенными параметрами. Однако такая трактовка носит зачастую довольно приближенный характер и приводит к существенным погрешностям при исследовании реальных процессов, протекающих в таких системах.

В современной науке и технике, особенно в таких отраслях, как теория управления, радиофизика, радиотехника и электроника необходимо исследовать динамические системы с учетом случайных возмущений. Повышение требований к точности и адекватности математических моделей, описывающих реальные исследуемые системы, привело к интенсивному развитию математического аппарата теории нелинейных случайных колебаний.

При исследовании случайных колебаний различных динамических систем основные результаты были получены для систем с сосредоточенными параметрами [1], [2]. В значительно меньшей степени разработаны методы исследования систем с распределенными параметрами, находящихся под действием различных типов случайных возмущений. Однако существует довольно большой класс реальных сложных систем, которые довольно точно могут быть описаны лишь системами стохастических дифференциальных уравнений, содержащими уравнения в частных производных и уравнения в обыкновенных производных с отклонением по времени, связанные между собой запаздывающими связями. Подобного рода сложные квазилинейные системы с запаздыванием, которые описываются системой уравнений, содержащей взаимосвязанные уравнения в частных производных и обыкновенные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, в детерминированном случае исследованы в монографии [3].

1 Постановка задачи

Сложные динамические системы обычно описываются системами дифференциальных уравнений, содержащими уравнения в частных производных и уравнения в обыкновенных производных с отклоняющимся аргументом, связанные между собой запаздывающими связями и краевыми условиями. При исследовании случайных процессов, протекающих в реальных сложных системах, довольно часто в качестве математических моделей могут быть выбраны системы стохастических дифференциально-функциональных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,\bar{x})}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{L}_{ij}(\bar{x})\right)\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial x_j}\right\} -$$
$$-\beta(\bar{x})u(t,\bar{x}) +$$
$$+F\left[t,\bar{x},u(t-\Delta_r,\bar{x}),y_k(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial x_i},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial t},\frac{dy_k(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right]+ \quad (1.1)$$
$$+\sum_{\mu=1}^{M}\Phi_\mu\left[t,\bar{x},u(t-\Delta_r,\bar{x}),y_k(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial x_i},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{x})}{\partial t},\frac{dy_k(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right]\frac{dw_\mu(t)}{dt};$$
$$\frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} = \sum_{p=1}^{K}\left\{\sum_{l=0}^{R}\left(\alpha_{kpl}y_p(t-\Delta_l)+b_{kpl}\frac{dy_p(t-\Delta_l)}{dt}\right)\right\}+$$
$$+f_k\left[t,u(t-\Delta_r,\bar{\zeta}),y_p(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial x_i},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial t},\frac{dy_p(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right]+ \quad (1.2)$$
$$+\sum_{\eta=1}^{M'}g_{k\eta}\left[t,u(t-\Delta_r,\bar{\zeta}),y_p(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial x_i},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u(t-\Delta_r,\bar{\zeta})}{\partial t},\frac{dy_p(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right]\frac{d\xi_{k\eta}(t)}{dt}$$
$$(k,\ p=\overline{1,K},\ r=\overline{0,R},\ i=\overline{1,n})$$

с начальными условиями

$$u(t,\bar{x})_{|t\in E_0} = \varphi_0(t,\bar{x}), \quad (1.3)$$
$$\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial t}_{|t\in E_0} = \varphi_1(t,\bar{x}), \quad (1.4)$$
$$y_k(t)_{|t\in E_0} = h_{k0}(t),\ k=\overline{1,K}, \quad (1.5)$$
$$\frac{dy_k(t)}{dt}_{|t\in E_0} = h_{k1}(t),\ k=\overline{1,K}, \quad (1.6)$$

и краевым условием

$$p_0 u(t,\bar{x}) + p_1\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial \nu}_{|\bar{x}\in S} = \psi(t,\bar{x}), \quad (1.7)$$

где $t\in[0,T]\subset R$, $T<\infty$, $\bar{x}$ – n-мерный вектор, принадлежащий ограниченной области $\bar{\Gamma}\subset E_n$, E_n – n-мерное евклидово пространство, S – замыкание области $\bar{\Gamma}$, $u(t,\bar{x})$ – случайная функция, определенная на множестве $[0,T]\times\bar{\Gamma}\times\Omega$, $y_k(t)$ – случайные функции, определяемые на $[0,\mathrm{T}]\times\Omega$, $w_\mu(t)$, $\xi_{k\eta}(t)$ – стохастически независимые между собой винеровские процессы единичной интенсивности, F, Φ_μ, f_k, $g_{k\eta}$ – нелинейные функционалы, $\mathcal{L}_{ij}(\bar{x})$, $\beta(\bar{x})$ – детерминирован-ные функции, определяемые в области $\bar{\Gamma}$, a_{kpl}, b_{kpl}, p_0, p_1 – вещественные постоянные, Δ_r, Δ_l, $r,l=0,1,...R$ – неотрицательные постоянные ($\Delta_0=0$), $\bar{\zeta}\in\bar{\Gamma}$ – некоторое фиксированное значение $\bar{x}$, E_0 – начальное множество вида $[-\Delta_{max},0]$, где $\Delta_{max}=\max\{\Delta_0,\Delta_1,...,\Delta_R\}$, $\varphi_0(t,\bar{x})$, $\varphi_1(t,\bar{x})$ – случайные функции, определенные на множестве $E_0\times\bar{\Gamma}\times\Omega$, $h_{k0}(t)$, $h_{k1}(t)$ – случайные функции, определенные на множестве $E_0\times\Omega$, $\psi(t,\bar{x})$ – детерминированная функция, определенная на множестве $[-\Delta_{max},\mathrm{T}]\times S$, выберем $\varepsilon>0$ – малый параметр, ν – направление внешней нормали к поверхности S, $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ – вероятностное пространство с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и вероятностной мерой $P(A)$, в котором выделен некоторый поток (монотонно неубывающее семейство) σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$. Все вводимые случайные функции, как функции аргумента t, предполагаются подчиненными потоку $(\mathcal{F}_t)$, т. е. для каждого t $\mathcal{F}_t$-измеримыми.

Как показано в [3], [4], многие сложные системы вида (1.1)–(1.7), содержащие одно звено с распределенными параметрами и K звеньев с сосредоточенными параметрами, могут быть описаны с высокой степенью точности следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$\frac{dv^m(t,\varepsilon)}{dt} = \mathcal{L}_m v^m(t,\varepsilon) +$$
$$+F_m[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]+ \quad (1.8)$$
$$+\Phi_m[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]\dot{w}(t),$$
$$m=1,2,...;$$
$$\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt} = \sum_{l=0}^{R}A_l z(t-\Delta_l,\varepsilon)+$$
$$+f[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]+ \quad (1.9)$$
$$+g[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]\dot{\xi}(t),$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} v^m(t,\varepsilon)_{|t\in E_0} &= \psi_m(t),\ m=1,2,...\\ \mathrm{z}(t,\varepsilon)_{|t\in E_0} &= H(t), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$z^k(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} z_1^k\\ z_2^k\end{bmatrix},\ v^m(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} v_1^m\\ v_2^m\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{L}_m=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\alpha_m & 0\end{bmatrix},\ F_m(t,v,z,\varepsilon)=\begin{bmatrix} 0\\ \tilde{F}_m\end{bmatrix},$$
$$\Phi_m(t,v,z,\varepsilon)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ \tilde{\Phi}_{1m} & \tilde{\Phi}_{2m} & \dots & \tilde{\Phi}_{Mm}\end{bmatrix},$$
$$v(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} v^1\\ v^2\\ \vdots\\ v^m\\ \vdots\end{bmatrix},\ f[t,v,z,\varepsilon]=\begin{bmatrix} 0\\ f_1\\ \vdots\\ 0\\ f_K\end{bmatrix},$$

$$z(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^K \end{bmatrix}, \dot{w}(t)=\begin{bmatrix} 0 & \dot{w}_1 \\ 0 & \dot{w}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dot{w}_M \end{bmatrix},$$

$$g[t,v,z,\varepsilon]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{K1} & g_{K2} & \cdots & g_{KM'} \end{bmatrix},$$

$$A_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{110} & b_{110} & a_{120} & \cdots & a_{1K0} & b_{1K0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{K10} & b_{K10} & a_{K20} & \cdots & a_{KK0} & b_{KK0} \end{bmatrix},$$

$$H(t)=\begin{bmatrix} h_{10} \\ h_{11} \\ \vdots \\ h_{K0} \\ h_{K1} \end{bmatrix}, \psi_m(t)=\begin{bmatrix} \varphi_{0m} \\ \varphi_{1m} \end{bmatrix},$$

$$A_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{11i} & b_{11i} & \cdots & a_{1Ki} & b_{1Ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{K1i} & b_{K1i} & \cdots & a_{KKi} & b_{KKi} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\xi}(t)=\begin{bmatrix} 0 & \dot{\xi}_{11} & \cdots & \dot{\xi}_{K1} \\ 0 & \dot{\xi}_{12} & \cdots & \dot{\xi}_{K2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dot{\xi}_{1M'} & \cdots & \dot{\xi}_{KM'} \end{bmatrix}.$$

Для вектора $v(t,\varepsilon)$ положим, что

$$|v(t,\varepsilon)|^2=\max_m\left\{\max_i\left|v_i^m(t,\varepsilon)\right|^2, i=1,2,\dots\right\}, \quad (1.11)$$
$$m=1,2,\dots$$

Таким образом, мы свели исследуемую систему (1.1)–(1.7) к системе стохастических обыкновенных дифференциально-функциональных уравнений первого порядка (1.8)–(1.10).

2 Основной результат

Для системы (1.8)–(1.10) справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть система* (1.8)–(1.10) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *вектор-функционалы* F_m, f, *матрицы* g, Φ_m *измеримы по совокупности своих переменных и непрерывны по* t, ε;

2) *существуют такие постоянные* K_{1m}, K_2, K_{3m}, *что справедливы неравенства*

$$\left|F_m(t,v_1,z_1,\varepsilon)-F_m(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|+$$
$$+\left|\Phi_m(t,v_1,z_1,\varepsilon)-\Phi_m(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|\le$$
$$\le K_{1m}\left\{|v_1-v_2|+|z_1-z_2|\right\},$$
$$\left|f(t,v_1,z_1,\varepsilon)-f(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|+$$
$$+\left|g(t,v_1,z_1,\varepsilon)-g(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|\le$$
$$\le K_2\left\{|v_1-v_2|+|z_1-z_2|\right\},$$
$$|\mathcal{L}_m|\le K_{3m},\ m=1,2,\dots;$$

3) *существуют такие постоянные* K_{4m}, K_5, *что*

$$\left|F_m(t,v,z,\varepsilon)\right|^2+\left|\Phi_m(t,v,z,\varepsilon)\right|^2\le K_{4m}\left\{1+|v|^2+|z|^2\right\},$$
$$\left|f(t,v,z,\varepsilon)\right|^2+\left|g(t,v,z,\varepsilon)\right|^2\le K_5\left\{1+|v|^2+|z|^2\right\},$$
$$m=1,2,\dots;$$

4) *компоненты вектор-функций* $H(t)$, $\psi_m(t)$, $m=1,2,\dots$ *непрерывны и ограничены при* $t\in E_0$ *и некоррелированы между собой и с процессами* $\dot{w}(t)$ *и* $\dot{\xi}(t)$;

5) *характеристическое уравнение*

$$\mathrm{Det}\left\{\sum_{l=0}^{R}A_l e^{-\Delta_l\rho}-E\rho\right\}=0$$

имеет все корни с вещественной частью, удовлетворяющей неравенству $\mathrm{Re}\,\rho_j\le-\gamma<0$, *где* $\gamma>0$.

Тогда существует решение системы (1.8)–(1.10), *являющееся случайным процессом, измеримым при каждом* $t\in[0,T]$ *относительно δ-алгебры* $\mathcal{F}_t$, *для которого справедливы следующие утверждения*:

а) решение $\{v(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\}$ *непрерывно с вероятностью единица*;

б) $M\left\{|v(t,\varepsilon)|^2\right\}<\infty, M\left\{|\mathrm{z}(t,\varepsilon)|^2\right\}<\infty,\ t\in[0,T]$;

в) решение $\{v(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\}$ *единственно с точностью до стохастической эквивалентности.*

Доказательство. Представим систему (1.8)–(1.9) с учетом (1.10) в интегральной форме

$$v^m(t,\varepsilon)=v^m(0,\varepsilon)+\int_0^t\left[\mathcal{L}_m v^m(\tau,\varepsilon)+\right.$$
$$\left.+F_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right]d\tau+$$
$$+\int_0^t\Phi_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)dw(\tau);$$
$$z(t,\varepsilon)=V(t)H(0)+$$
$$+\sum_{l=1}^{R}\int_{-\Delta_l}^{0}V(t-\Delta_l-\tau)A_lH(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t V(t-\tau)f(\tau,v(\tau-,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\tau+ \quad (2.1)$$
$$+\int_0^t V(t-\tau)\,\mathrm{g}(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\xi(\tau)$$
$$(m=1,2,\dots;\ r=\overline{0,R}),$$

где $V(t)$ – матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{l=0}^{R} A_l V(t-\Delta_l) \qquad (2.2)$$

с начальным условием

$$V(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & t<0; \\ E, & t=+0; \end{cases}$$

$\mathbf{0}$ – нулевая матрица, E – единичная матрица.

Введем в рассмотрение непрерывные процессы $z_1(t,\varepsilon)$, $z_2(t,\varepsilon)$, $v_1^m(t,\varepsilon)$, $v_2^m(t,\varepsilon)$, $m=1,2,\ldots$, удовлетворяющие (2.1). Исходя из условий теоремы, применяя операцию математического ожидания и используя неравенство Колмогорова – Дуба [5], для квадрата разности процессов $v_1^m(t,\varepsilon)$ и $v_2^m(t,\varepsilon)$ получаем:

$$M\left\{\sup_{s\le t}\left|v_1^m(s,\varepsilon)-v_2^m(s,\varepsilon)\right|^2\right\} \le$$

$$\le 2M\left[\int_0^t\left|\mathcal{L}_m(v_1^m(\tau,\varepsilon)-v_2^m(\tau,\varepsilon))+\right.\right.$$

$$+F_m(\tau,v_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$\left.\left.-F_m(\tau,v_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|d\tau\right]^2+$$

$$+8M\left[\int_0^t\left|\Phi_m(\tau,v_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Phi_m(\tau,v_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|dw(\tau)\right]^2$$

$$\le 2TM\left[\int_0^t\left|\mathcal{L}_m(v_1^m(\tau,\varepsilon)-v_2^m(\tau,\varepsilon))+\right.\right.$$

$$+F_m(\tau,v_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$\left.\left.-F_m(\tau,v_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2 d\tau\right]+$$

$$+8M\left[\int_0^t\left|\Phi_m(\tau,v_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Phi_m(\tau,v_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2\right]d\tau\le$$

$$\le L_{1m}\int_0^t M\left(\sup_{s\le\tau}\left[\left|v_1(s,\varepsilon)-v_2(s,\varepsilon)\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|z_1(s,\varepsilon)-z_2(s,\varepsilon)\right|^2\right)d\tau.$$

Проводя аналогичные выкладки, для второго интегрального уравнения системы (2.1), будем иметь

$$M\left\{\sup_{s\le t}\left|z_1(s,\varepsilon)-z_2(s,\varepsilon)\right|^2\right\}\le$$

$$\le L_2\int_0^t M\left(\sup_{s\le\tau}\left[\left|v_1(s,\varepsilon)-v_2(s,\varepsilon)\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|z_1(s,\varepsilon)-z_2(s,\varepsilon)\right|^2\right]\right)d\tau.$$

Определим непрерывные с вероятностью единица случайные векторные процессы $\omega_i(t,\varepsilon)=\{z_i(t,\varepsilon),v_i^m(t,\varepsilon),m=1,2,\ldots\}$, $i=1,2$ и положим, что

$$|\omega_i(t,\varepsilon)|=\max\{|z_i(t,\varepsilon)|,|v_i^m(t,\varepsilon)|\},\ i=1,2,$$

$$\lambda(t)=M\left\{\sup_{s\le t}\left|\omega_1(s,\varepsilon)-\omega_2(s,\varepsilon)\right|^2\right\}.$$

Исходя из полученных неравенств, для $\lambda(t)$ будем иметь

$$\lambda(t)\le L_3\int_0^t\lambda(\tau)d\tau, \qquad (2.4)$$

где константа $L_3=\max\left\{\max_m 2L_{1m},2L_2\right\}$.

Из неравенства (2.4) вытекает [6], что $\lambda(t)=0$ с вероятностью единица для всех $t\in[0,T]$.

Таким образом, мы доказали, что случайные процессы $\omega_1(t,\varepsilon)$ и $\omega_2(t,\varepsilon)$ стохастически эквивалентны, и, значит, исходя из того, что они непрерывны с вероятностью единица, можно утверждать, что система (1.8)–(1.10) имеет единственное решение с точностью до стохастической эквивалентности.

Докажем существование решения системы (1.8)–(1.10). Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{B}$ непрерывных с вероятностью единица случайных процессов

$$\zeta(t,\varepsilon)=\{\eta(t,\varepsilon),\gamma^m(t,\varepsilon),m=1,2,\ldots\},$$

измеримых при каждом t относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ и таких, что $\sup_t M\left(\left|\zeta(t,\varepsilon)\right|^2\right)<\infty$.

Введем в пространстве $\mathcal{B}$ норму

$$\|\zeta(t,\varepsilon)\|=\sqrt{\sup_t M\left(\left|\zeta(t,\varepsilon)\right|^2\right)},$$

где

$$\left|\zeta(t,\varepsilon)\right|^2=\max\left\{\left|\eta(t,\varepsilon)\right|^2,\max_m\left|\gamma^m(t,\varepsilon)\right|^2,m=1,2,\ldots\right\}.$$

Введем в рассмотрение операторы P_i, $i=0,1,2,\ldots$

$$P_m\zeta(t,\varepsilon)=\gamma^m(0,\varepsilon)+$$

$$+\int_0^t\left[\mathcal{L}_m\gamma^m(\tau,\varepsilon)+F_m(\tau,\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t\Phi_m(\tau,\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)dw(\tau),$$

$$m=1,2,\ldots;$$

$$P_0\zeta(t,\varepsilon)=V(t)H(0)+$$

$$+\sum_{l=1}^{R}\int_{-\Delta_l}^{0}V(t-\Delta_l-\tau)A_lH(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t V(t-\tau)f(\tau,\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\tau+$$

$$+\int_0^t V(t-\tau)\,\mathrm{g}(\tau,\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\xi(\tau).$$

Используя условие 3) теоремы, получаем

$$M\left|P_m\zeta(t,\varepsilon)\right|^2 \le 4M\left|\gamma^m(0,\varepsilon)\right|^2 +$$

$$+4K_{3m}^2 TM\int_0^t\left|\gamma^m(\tau,\varepsilon)\right|^2 d\tau +$$

$$+4K_{4m}(T+1)M\int_0^t\left(1+\left|\gamma(\tau-\Delta_r,\varepsilon)\right|^2+\left|\eta(\tau-\Delta_r,\varepsilon)\right|^2\right)d\tau \le$$

$$\le 4M\left|\gamma^m(0,\varepsilon)\right|^2 + L_{4m}\left(1+\left\|\zeta(t,\varepsilon\right\|^2\right),\ m=1,2,....$$

Воспользовавшись условиями 3), 4), 5) теоремы, для оператора P_0 имеем

$$M\left|P_0\zeta(t,\varepsilon)\right|^2 \le L_5 + L_6\left(1+\left\|\zeta(t,\varepsilon\right\|^2\right).$$

Таким образом, операторы P_i, $i=0,1,2,...$ действуют из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$. Далее имеем

$$M\left|P_m\zeta_1(t,\varepsilon)-P_m\zeta_2(t,\varepsilon)\right|^2 \le$$

$$\le 2T\int_0^t M\left|F_m(\tau,\gamma_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.$$

$$\left.-F_m(\tau,\gamma_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2 d\tau +$$

$$+2\int_0^t M\left|\Phi_m(\tau,\gamma_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta_1(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.$$

$$\left.-\Phi_m(\tau,\gamma_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\eta_2(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2 d\tau \le$$

$$\le L_{7m}T\left\|\zeta_1(t,\varepsilon)-\zeta_2(t,\varepsilon)\right\|^2.$$

Для оператора P_0 получаем следующее неравенство

$$M\left|P_0\zeta_1(t,\varepsilon)-P_0\zeta_2(t,\varepsilon)\right|^2 \le$$

$$\le L_8T\left\|\zeta_1(t,\varepsilon)-\zeta_2(t,\varepsilon)\right\|^2.$$

Следовательно, операторы P_0 и P_m непрерывны на $\mathcal{B}$. Введем понятие степени операторов P_0 и P_m следующим образом

$$P_i^2\zeta(t,\varepsilon) = P_i\left[P_i\zeta(t,\varepsilon)\right],\ i=1,2,....$$

Для операторов P_i, $i=0,1,2,...$ несложно получить следующие оценки

$$M\left|P_i^n\zeta_1(t,\varepsilon)-P_i^n\zeta_2(t,\varepsilon)\right|^2 \le$$

$$\le \frac{L_9^nT^n}{n!}\left\|\zeta_1(t,\varepsilon)-\zeta_2(t,\varepsilon)\right\|^2,$$

где $L_9=\max\{L_8,\max\limits_m L_{7m}\}$.

Следовательно, для каждого $\zeta(t,\varepsilon)$ из $\mathcal{B}$

$$\left\|P_i^{n+1}\zeta(t,\varepsilon)-P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\right\|^2 \le$$

$$\le \frac{L_9^nT^n}{n!}\left\|P_i\zeta(t,\varepsilon)-\zeta(t,\varepsilon)\right\|^2.$$

Последнее неравенство означает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|P_i^{n+1}\zeta(t,\varepsilon)-P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\right\|,\ i=0,1,2,...,$$

и, следовательно, с вероятностью единица существует предел $\omega(t,\varepsilon)$ процессов $P_i^n\zeta(t,\varepsilon)$, $i=0,1,2,...$ при $n\to\infty$. Из непрерывности P_i вытекает, что

$$P_i\left[P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\right]\to P_i\omega(t,\varepsilon),\ i=0,1,2,....$$

С другой стороны

$$P_i\left[P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\right]=P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\to\omega(t,\varepsilon).$$

Таким образом, получаем

$$\left\|P_i\omega(t,\varepsilon)-\omega(t,\varepsilon)\right\|=0,$$

а это в свою очередь означает, что $\omega(t,\varepsilon)$ – решение системы (1.8)–(1.10).

Из условий

$$\sup_t M\left|\zeta(t,\varepsilon)\right|^2<\infty,$$

$$P_i^n\zeta(t,\varepsilon)\to\omega(t,\varepsilon) \text{ при } n\to\infty$$

следует, что

$$\sup_t M\left|\omega(t,\varepsilon)\right|^2<\infty.$$

Следовательно, мы доказали, что при выполнении условий теоремы существует единственное непрерывное и ограниченное решение системы (1.8)–(1.10) с точностью до стохастической эквивалентности. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *To*, *C.W.S.* Nonlinear random vibration. Analytical techniques and applications / C.W.S. To. – CRC Press, 2012. – 292 p.

2. *Митропольский*, *Ю.А.* Нелинейные колебания в системах произвольного порядка / Ю.А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. – Киев: Навукова думка, 1992. – 344 с.

3. *Рубаник*, *В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. – Мн.: Изд-во «Университетское», 1985. – 143 с.

4. *Акири*, *И.К.* О существовании, единственности и непрерывной зависимости от параметра решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных / И.К. Акири, В.Г. Коломиец. – Киев: Ин-т математики АН УССР, препринт №86.3, 1986. – 19 с.

5. *Ватанабэ*, *С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

6. *Гихман*, *И.И.* Теория случайных процессов. Т. 3 / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

Поступила в редакцию 03.04.17.

Проблемы физики, математики и техники, № 2 (31), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ОБОБЩЕННО МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ (ОБЗОР). II. ОТ МАКСИМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ К МАКСИМАЛЬНЫМ ПАРАМ

В.А. Ковалёва

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH GIVEN GENERALIZED MAXIMAL SUBGROUPS (REVIEW). II. FROM THE MAXIMAL CHAINS TO THE MAXIMAL PAIRS

V.A. Kovaleva

F. Scorina Gomel State University

Пусть G – конечная группа. Напомним, что максимальной цепью длины n в G называется всякая цепь вида $H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G$, где H_i – максимальная подгруппа в H_{i-1} для всякого $i = 1,\ldots,n.$ В данном обзоре продолжен анализ наиболее известных работ, связанных с исследованиями конечных групп с заданными максимальными цепями.

Ключевые слова: *конечная группа*, *максимальная цепь*, *n-максимальная подгруппа*, *максимальная пара подгрупп.*

Let G be a finite group. Recall that a maximal chain of G of length n is a chain $H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G$ such that H_i is a maximal subgroup of H_{i-1} for every $i = 1,\ldots,n.$ In this review we continue the analysis of the most famous papers in which finite groups with given maximal chains are developed.

Keywords: *finite group*, *maximal chain*, *n-maximal subgroup*, *maximal pair of subgroups.*

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными и G обозначает конечную группу. Символ $\pi(G)$ обозначает множество всех простых делителей порядка G, n обозначает некоторое натуральное число.

Напомним, что *максимальной цепью длины* n в G называется всякая цепь вида

$$H_n < H_{n-1} < \cdots < H_1 < H_0 = G,$$

где H_i – максимальная подгруппа в H_{i-1} для всякого $i = 1,\ldots,n.$ Подгруппа H из G называется *n-максимальной подгруппой* в G, если H является последним членом некоторой максимальной цепи длины n.

В [1] автором были рассмотрены наиболее известные работы, в которых авторами изучались группы с обобщенно нормальными n-максимальными подгруппами. В данной статье продолжен анализ работ, связанных с исследованиями групп с заданными максимальными цепями подгрупп. В частности, рассмотрены группы, в каждой максимальной цепи длины n которых содержится собственная (обобщенно) субнормальная подгруппа, а также группы, все n-максимальные подгруппы которых обладают некоторым наследственным теоретико-групповым свойством. Кроме того, рассмотрено такое интересное обобщение максимальной подгруппы, как максимальная пара подгрупп.

Используемые в статье обозначения и терминологию можно при необходимости найти в [2]–[4].

1 Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную субнормальную подгруппу

В работе [5] Манном были изучены группы, все n-максимальные подгруппы которых являются субнормальными. В частности, Манном было доказано, что если все n-максимальные подгруппы разрешимой группы G субнормальны и $|\pi(G)| \geq n+1,$ то G нильпотентна; если $|\pi(G)| \geq n-1,$ то G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. И, наконец, в случае, когда $|\pi(G)| \geq n,$ Манн привел полное описание G [5, теорема 8] (см. также теорему 2.1 в [1]). Поскольку каждая n-максимальная подгруппа является последним членом некоторой максимальной цепи длины n, возникла естественная задача исследования групп, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную субнормальную подгруппу. В данном направлении следует, прежде всего, отметить работы Дескинса [6] и Спенсера [7], [8]. В [6] Дескинсом было введено понятие вариантности группы. При этом под *вариантностью максимальной цепи длины n* группы G понимается отношение n к числу членов цепи, отличных от G, в случае, когда такое число не равно 0, и n в противном случае; *вариантность* G равна наибольшей из вариантностей максимальных цепей из G. Изучая влияние вариантности на строение группы, Дескинс получил следующий результат.

***Теорема* 1.1** [6, теорема 3]. *В каждом из следующих случаев G разрешима:*

(i) *вариантность G меньше* 5 *и* $(|G|,3)=1$;

(ii) *вариантность G меньше* 4.

В дальнейшем Асаадом [9] была установлена разрешимость *G* в случае, когда вариантность *G* меньше 8 и $(|G|,3)=1$. Более того, Асаад показал, что группа *G*, вариантность которой равна 8 и $(|G|,3)=1$, изоморфна $Sz(2^3)$ – простой группе Судзуки над полем из 2^3 элементов.

В работе [7] Спенсер, рассматривая ненильпотентные разрешимые группы *G*, каждая максимальная цепь длины *n* которых содержит собственную субнормальную в *G* подгруппу, показал, что для таких групп $|\pi(G)|\le n$ и нильпотентная длина и ранг *G* не превышают *n*. Более того, в случае, когда $|\pi(G)|=n$, все силовские подгруппы из *G* являются абелевыми; в случае же, когда $|\pi(G)|\ge n-1$, *G* является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. В [7] были также рассмотрены группы, каждая максимальная цепь длины *n* которых содержит собственную субнормальную подгруппу и в которых существует по крайней мере одна максимальная цепь длины $n-1$, не содержащая собственных субнормальных подгрупп. Для этого была введена функция $h(G)$, причем $h(G)=n$, если *G* обладает указанным выше свойством (впоследствии группы с $h(G)=n$ были названы *группами высоты Спенсера n* [10]).

***Теорема* 1.2** [7, теоремы 1–4]. *Для разрешимой группы G справедливы следующие утверждения*:

(i) *нильпотентная длина G не превышает* $h(G)$;

(ii) *если* $h(G)<|\pi(G)|$, *то G нильпотентна;*

(iii) *если* $h(G)-|\pi(G)|\le 1$, *то G является* ϕ-*дисперсивной для некоторого упорядочения* ϕ *множества* $\pi(G)$;

(iv) *если* $h(G)=|\pi(G)|\ge 2$, *то силовские подгруппы из G либо цикличны, либо являются элементарными абелевыми группами. Более того, если в G существуют по крайней мере две неизоморфные ненормальные силовские подгруппы, то все ненормальные силовские подгруппы из G имеют простые порядки.*

***Теорема* 1.3** [7, теорема 7]. *Если* $h(G)\ge 2$, *то ранг G не превосходит* $h(G)$.

Заметим также, что в случае, когда $h(G)=2$, в [7] было установлено, что *G* является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Кроме того, развивая результаты Дескинса [6], Спенсер установил разрешимость *G* при $h(G)\le 3$ и $h(G)\le 4$ с $(|G|,3)=1$ [7, теорема 6].

Исследования работы [7] были продолжены в дальнейшей работе Спенсера [8]. Один из основных результатов этой публикации позволяет обобщить результат Манна [5, теорема 8].

***Теорема* 1.4** [8]. *Если G разрешима и* $h(G)=|\pi(G)|\ge 2$, *то* $G=NH$, *где N – нормальная нильпотентная холлова подгруппа из G, все силовские подгруппы которой являются элементарными абелевыми группами, и H – дополнение к N, причем H является циклической группой и в случае, когда* $|\pi(H)|\ge 2$, $|H|$ *является свободным от квадратов числом.*

В [8] Спенсеру удалось также улучшить границу для нильпотентной длины разрешимой группы *G*. Было доказано, что нильпотентная длина *G* не превосходит $h(G)-|\pi(G)|+2$. В этой же работе Спенсер обобщил результаты работы Янко [11] о группах с нормальными 4-максимальными подгруппами (см. также раздел 1 в [1]), доказав следующую теорему.

***Теорема* 1.5** [8, теорема 4]. *Если G неразрешима и* $h(G)=4$, *то G изоморфна либо группе* $SL(2,5)$, *либо группе* $PSL(2,p)$, *где* $p=5$ *или p – такое простое число, что* $p-1$ *и* $p+1$ *являются произведением не более трех простых чисел и либо* $p\equiv\pm 3(\mathrm{mod}\ 40)$, *либо* $p\equiv\pm 13(\mathrm{mod}\ 40)$.

Среди современных исследований групп, каждая максимальная цепь длины *n* которых содержит собственную субнормальную подгруппу, отметим работы Андреевой, Скибы и В. Го [10], [12]. В [12] изучались группы, каждая максимальная цепь длины два или три которых содержит собственную субнормальную подгруппу. Так, в случае, когда каждая максимальная цепь длины два группы содержит собственную субнормальную подгруппу, было установлено, что группа является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами (из чего, в частности, следует отмеченный выше результат Спенсера). В дальнейшем в [10] было получено полное описание групп, каждая максимальная цепь длины 3 которых содержит собственную субнормальную подгруппу и в которых существует по крайней мере одна максимальная цепь длины 2, не содержащая собственных субнормальных подгрупп (групп высоты Спенсера 3).

***Теорема* 1.6** [12, теорема]. *Пусть* p,q,r – *различные простые числа*, P, Q, R – *соответствующие им силовские подгруппы из G. В том и только в том случае G является группой высоты Спенсера* 3, *когда* $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, *где* $p\ne q$ *и* $3\le\alpha+\beta+\gamma$, *и G является группой одного из следующих типов:*

I. $G=PQ$ *и G удовлетворяет по крайней мере одному из условий:*

(1) *G – группа Шмидта с* $|\Phi(P)|\le p$;

(2) *P – минимальная нормальная подгруппа в G и либо* $|Q:Q_G|=q^2$ *и все максимальные подгруппы из Q являются циклическими*, *либо Q – нециклическая группа*, $|Q:Q_G|=q$ *и любая максимальная подгруппа из Q*, *отличная от* Q_G, *является циклической;*

(3) $G=G^{\mathfrak{N}}\rtimes M$, *где нильпотентный корадикал* $G^{\mathfrak{N}}$ *группы G является минимальной нормальной подгруппой в G*, $M=M_p\times Q$ *– представитель единственного класса ненормальных максимальных подгрупп из G*, $|M_p|=p$, $Q=\langle a\rangle$ *– циклическая группа и* $|Q:Q_G|=q$;

(4) $\Phi(P)=1$ *и G – подпрямое произведение ненормальной максимальной подгруппы A и подгруппы B*, *где* $A=A_p\rtimes Q$ *– группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и* A_p *– минимальная нормальная подгруппа в G*, $B=B_p\rtimes Q$ *и либо B нильпотентна*, $|B_p|=p$ *и* $B_p\le Z(G)$, *либо* $B\simeq A$;

(5) $\Phi(P)\neq 1$, $A=\Phi(P)\rtimes Q$ *– представитель единственного класса ненормальных максимальных подгрупп из G*, *A – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и* $|Q:Q_G|=q$.

II. $G=P\rtimes(R\rtimes Q)$ *и G имеет только три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются ненормальная холлова* r'*-подгруппа A*, *ненормальная холлова* p'*-подгруппа L и нормальная подгруппа M*, *причем* $|G:M|=q$. *Более того, выполнены следующие утверждения*:

(a) *L – либо группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, либо нильпотентная группа с* $|R|=r$;

(b) $A=P\rtimes Q$ *– группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и* $|Q:Q_G|=q$. *Более того*, *если A нормальна в G*, *то L нильпотентна*;

(c) *P – минимальная нормальная подгруппа в G и либо R является минимальной нормальной подгруппой в G*, *либо* $|R|=r$ *и* $|Q|=q$.

2 Группы, каждая максимальная цепь длины *n* которых содержит собственную обобщенно субнормальную подгруппу

Как и в случае обобщенно субнормальных *n*-максимальных подгрупп (см. раздел 3 в [1]), естественно рассмотреть группы, каждая максимальная цепь длины *n* которых содержит собственную обобщенно субнормальную подгруппу.

Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную p-субнормальную подгруппу. Кегелем [13] было введено следующее обобщение субнормальности. Подгруппа *H* из *G* называется *p-субнормальной* в *G*, если для каждой силовской *p*-подгруппы G_p из *G* пересечение $H\cap G_p$ является силовской *p*-подгруппой в *H*. В работах Новицкого и Дуки [14], [15] были рассмотрены группы, все максимальные *pd*-цепи (максимальные цепи, каждый неединичный член которых является *pd*-группой) длины *n* которых содержат хотя бы одну собственную *p*-субнормальную подгруппу. Новицким были рассмотрены только те максимальные *pd*-цепи длины *n*, у которых силовская *p*-подгруппа *n*-го члена имеет наибольший порядок (максимальные *pd-цепи*. В [14] было установлено, что в случае, когда в каждой максимальной *pd*-цепи группы *G* существует собственная *p*-субнормальная подгруппа, *G* является *p*-нильпотентной группой Миллера-Морено; в случае, когда в каждой максимальной *pd*-цепи группы *G* существует собственная *p*-субнормальная подгруппа и в *G* имеется такая максимальная *pd*-цепь длины $n-1$, которая не содержит *p*-субнормальных в *G* подгрупп (*p* – наименьший простой делитель порядка *G*), *G* является *p*-нильпотентной. Кроме того, в [14] был получен следующий результат.

***Теорема* 2.1** [14, теорема 6]. *В том и только в том случае каждая максимальная* 2*d-цепь длины* 4 *неразрешимой группы G содержит собственную* 2*-субнормальную подгруппу и в G имеется максимальная* 2*d-цепь длины* 3, *не содержащая* 2*-субнормальных в G подгрупп*, *когда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) $SL(2,p)$, $PSL(2,p)$, *где p – простое число*, *причем* $p=5,13$ *или* $\lambda(p\pm1)=3$ *и* $p\not\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,10)$;

(2) $SL(2,3^p)$, $PSL(2,3^p)$, *где* $p>2$ *– простое число и* $\lambda(3^p\pm1)\le 3$.

В теореме 2.1, как и в дальнейшем, $\lambda(m)$ – сумма показателей канонического разложения числа *m*. В частности, $\lambda(G)$ – сумма показателей канонического разложения числа $|G|$.

В работе Дуки [15] были исследованы такие *pd*-группы *G*, все максимальные *pd*-цепи длины *n* которых содержат хотя бы одну собственную *p*-субнормальную подгруппу и в *G* существует по крайней мере одна максимальная *pd*-цепь длины $n-1$, не содержащая собственных *p*-субнормальных в *G* подгрупп. Было установлено, что для $n=2$ такие группы ненильпотентны, причем все их собственные подгруппы являются абелевыми. Кроме того, для случая $p=2$ и $n=3$ Дука установил разрешимость *pd*-группы. И, наконец, в случае $p=2$ и $n=4$ было установлено, что *G* изоморфна одной из групп, указанных в теореме 2.1.

Заметим, что следствиями отмеченных результатов Новицкого и Дуки являются результаты Дескинса [6, теорема 3] (см. также выше теорему 1.1) и Спенсера [7, теоремы 5–6].

Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную (обобщенно) модулярную подгруппу. В работе Решко и Харламовой [16] были исследованы группы, все n-максимальные подгруппы которых являются либо модулярными, либо p-субнормальными (подгруппа H из G называется *модулярной*, если $\langle X, H \cap Z \rangle = \langle X, H \rangle \cap Z$ для всех $X \le Z \le G$ и $\langle H, Y \cap Z \rangle = \langle H, Y \rangle \cap Z$ для всех таких подгрупп Y, Z из G, что $H \le Z$). Исследования этой работы были в дальнейшем продолжены в работах [17], [18]. В [17] было доказано, что для всякого $n > 3$ существует такая неразрешимая группа, у которой каждая максимальная $2d$-цепь длины n обладает собственной модулярной подгруппой, а также получена классификация неразрешимых групп, у которых максимальные $2d$-цепи длины 4 содержат собственную модулярную подгруппу. В [18] были описаны группы, у которых максимальные pd-цепи длины n содержат хотя бы одну собственную модулярную подгруппу. Отметим, что в работе Ведерникова и Дуки [19] была найдена точная оценка p-длины групп, каждая максимальная pd-цепь длины n которых содержит собственную модулярную подгруппу.

Обобщением понятия модулярной подгруппы яляется понятие субмодулярной подгруппы, введенное в работе Зиммерманн [20]. Подгруппа H из G называется *субмодулярной* в G, если существует такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_t = G,$$

что H_{i-1} модулярна в H_i для всякого $i = 1, \ldots, t$. Развивая отмеченные выше результаты Дескинса [6] и Асаада [9] (см. раздел 1), Зиммерманн [21] установила разрешимость группы G в случае, когда каждая максимальная цепь длины 3 из G содержит собственную субмодулярную в G подгруппу, а также в случае, когда каждая максимальная цепь длины 7 из G содержит собственную субмодулярную в G подгруппу и $(|G|, 3) = 1$.

Задача Шеметкова для максимальных цепей. Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную K-$\mathfrak{U}$-субнормальную подгруппу. В 2005 году на Гомельском алгебраическом семинаре Шеметковым был поставлен вопрос о строении разрешимых групп, в каждой максимальной цепи длины n которых имеется собственная обобщенно субнормальная подгруппа. Кроме того, Шеметковым была поставлена задача получить полное описание таких групп хотя бы в случае, когда $n = 3$. В связи с этим в упомянутой выше работе Андреевой и Скибы [12] было получено описание групп, каждая максимальная цепь длины два или три которых содержит собственную S-квазинормальную (перестановочную со всеми силовскими подгруппами) подгруппу. Заметим при этом, что авторами была установлена эквивалентность условия существования в каждой максимальной цепи длины три группы собственной S-квазинормальной подгруппы и условия существования в каждой максимальной цепи длины три группы собственной субнормальной подгруппы.

Напомним, что подгруппа H из G называется $\mathfrak{U}$-*субнормальной в смысле Кегеля* [22] или K-$\mathfrak{U}$-*субнормальной* [3] в G, если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_k = G,$$

что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i / (H_{i-1})_{H_i}$ сверхразрешима, $i = 1, \ldots, k$. В случае, когда в качестве обобщения субнормальной подгруппы рассматривается K-$\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа и $n = 2$, решение задачи Шеметкова получено в работе [23], где доказано, что группа, в каждой максимальной цепи длины два которой существует собственная K-$\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа, либо сверхразрешима, либо является минимальной несверхразрешимой группой с абелевым сверхразрешимым корадикалом. Для случая же $n = 3$ вопрос о строении групп, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную K-$\mathfrak{U}$-субнормальную подгруппу, остается открытым до сих пор.

***Задача* 2.2** [24, § 4, задача 5.10]. *Получить описание групп, каждая максимальная цепь длины* 3 *которых содержит собственную K-$\mathfrak{U}$-субнормальную подгруппу.*

Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную ступенчато субнормальную подгруппу. Расмотрим еще одно интересное обобщение понятия субнормальной подгруппы, введенное в работе В. Го и Скибы [25]. Пусть θ – некоторое теоретико-групповое свойство подгрупп. Тогда подгруппа A из G *ступенчато обладает свойством* θ в G, если G имеет такой нормальный ряд

$$1 = G_0 \le G_1 \le \ldots \le G_t = G,$$

что для каждого $i = 1, \ldots, t$ подгруппа $(A \cap G_i)G_{i-1} / G_{i-1}$ обладает свойством θ в G / G_{i-1}. В частности, подгруппа A называется *ступенчато субнормальной* в G, если G имеет такой нормальный ряд

$$1 = G_0 \le G_1 \le \ldots \le G_t = G,$$

что для каждого $i = 1, \ldots, t$ подгруппа $(A \cap G_i)G_{i-1} / G_{i-1}$ является субнормальной в G / G_{i-1}. В [25] было установлено, что для фиксированного $n \le 3$ каждая максимальная цепь длины n из G содержит собственную ступенчато субнормальную в G подгруппу в том и только в том случае, когда G разрешима. В общем случае в [25] была поставлена следующая

***Задача* 2.3** ([25, вопрос 5.4] или [24, § 4, задача 5.21]). *Пусть* $\theta_0(X) = \{A \le X \parallel X : N_X(A)|$ – *простое число или квадрат простого числа*$\}$ *для* *любой группы X. Предположим, что для некоторого фиксированного $1 < n \leq 3$ каждая максимальная цепь длины n из G содержит собственную в G подгруппу, ступенчато обладающую свойством θ_0 в G. Верно ли, что в этом случае G разрешима?*

Группы, каждая максимальная цепь длины n которых содержит собственную σ-субнормальную подгруппу. Одним из новых активно развивающихся направлений современной теории конечных групп является исследование структуры группы с заданными арифметическими свойствами. Начало этому направлению было положено Скибой в работах [26]–[30], где были введены следующие понятия. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Группа G называется: (i) σ*-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$; (ii) σ*-разрешимой*, если каждый ее главный фактор σ-примарен; (iii) σ*-нильпотентной*, если G является прямым произведением некоторых σ-примарных групп. Под σ*-нильпотентной длиной* σ-разрешимой группы G понимается длина самого короткого ряда из G с σ-нильпотентными факторами. Подгруппа A из G называется σ*-субнормальной* в G, если найдется такая цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_l = G,$$

что либо A_{i-1} нормальна в A_i, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ σ-примарна для всех $i = 1,\ldots,l$. Рассматривая группы G с σ*-высотой Спенсера* $h_\sigma(G) = n$ (каждая максимальная цепь длины n из G содержит собственную σ-субнормальную подгруппу и по крайней мере одна максимальная цепь длины $n-1$ из G не содержит собственных σ-субнормальных погрупп), Скиба в [31] установил, что $h_\sigma(G) = 1$ в том и только в том случае, когда G является σ-нильпотентной группой; $h_\sigma(G) = 2$ в том и только в том случае, когда $|\sigma(G)| = |\pi(G)|$ и G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, где

$$\sigma(G) = \{\sigma_i \cap \pi(G) \mid i \in I, \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\};$$

и, наконец, для $h_\sigma(G) \leq 3$ была установлена σ-разрешимость G. Более того, в [31] получен следующий результат.

***Теорема* 2.4** [31, теорема 7.19]. *Пусть G – σ-разрешимая группа и σ^0 – такое разбиение множества $\mathbb{P}$, что $\sigma^0 \leq \sigma$. Справедливы следующие утверждения*:

(i) σ-нильпотентная длина G не превышает $h_\sigma(G)$;

(ii) *если либо $h_\sigma(G) < |\sigma(G)|$, либо G является σ^0-разрешимой и каждая n-максимальная подгруппа из G, где $n < |\sigma^0(G)|$, является σ-субнормальной в G, то G σ-нильпотентна*;

(iii) *если $n = h_\sigma(G) \leq |\sigma(G)|$, то каждая n-максимальная подгруппа из G σ-субнормальна в G.*

Заметим, что полученные Скибой результаты позволяют обобщить отмеченные выше результаты работ Манна [5, теорема 8] и Спенсера [7, теоремы 1–4] (см. также теорему 2.1 в [1] и теорему 1.2 выше).

3 Группы с заданными ограничениями на длины и индексы максимальных цепей

В работе [11] Янко, развивая результаты Хупперта [32] о группах с нормальными *n*-максимальными подгруппами, исследовал группы, все 4-максимальные подгруппы которых нормальны. В частности, им было доказано, что группа $SL(2,5)$ является единственной неразрешимой и непростой группой, в которой все 4-максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Янко установил, что неабелевы простые группы, у которых длины максимальных цепей не превышают 4, изоморфны группе $PSL(2,p)$ для некоторого простого числа *p*. В дальнейшем в работе [33] Янко доказал, что неабелевы простые группы, у которых длины максимальных цепей не превышают 5, также изоморфны группе $PSL(2,q)$ для некоторого простого числа *q*.

Говорят, что группа G *удовлетворяет условию Жордана – Дедекинда относительно цепей*, если для любой ее подгруппы H все максимальные цепи, проведенные к H, имеют одну и ту же длину. В работе Берковича [34] были изучены группы, удовлетворяющие ослабленным условиям Жордана – Дедекинда относительно цепей. Одним из результатов, полученных в работе [34], является следующая

***Теорема* 3.1** [34, теорема 2]. *Пусть для всякой подгруппы H из G с $\lambda(H) = 2$ все максимальные цепи из G, проведенные к H, имеют одну и ту же длину. Тогда справедливо одно из следующих условий*:

(a) *G сверхразрешима*;

(b) *если G разрешима, но не сверхразрешима, то G является группой типа A*;

(c) *если G неразрешима, то она изоморфна одной из групп $PSL(2,p)$, где p – такое простое число, что $\lambda(p \pm 1) = 3$ и $p^2 \equiv 9 \pmod{80}$.*

В работе Полякова [35] была изучена связь между главными рядами и максимальными цепями *p*-разрешимых групп.

***Теорема* 3.2** [35, теорема]. *Пусть p – простое число. p-ранг p-разрешимой группы G совпадает с максимальным p-рангом G.*

В теореме 3.2 под *p-рангом p*-разрешимой группы G [32] понимается показатель наибольшей степени числа *p*, встречающейся среди индексов всех главных рядов из G. Под *максимальным p-рангом p*-разрешимой группы G [32] понимается показатель наибольшей степени числа p, встречающейся среди индексов всех максимальных цепей из G.

Группы с заданными системами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп. Среди современных исследований групп с заданными максимальными цепями подгрупп несомненный интерес представляют исследования, связанные с понятием $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы. Напомним, что собственная подгруппа H из G является *$\mathbb{P}$-субнормальной* в G [36], если найдется максимальная цепь

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_k = G,$$

где индексы $|H_i : H_{i-1}|$ являются простыми числами для всякого $i = 1,\dots,k$. Изучению влияния $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп на строение группы посвящены работы Васильева, Васильевой и Тютянова [36]–[38], Княгиной и Монахова [39], [40], Семенчука и Скибы [41], Мурашко [42]. В [36]–[38] авторами были описаны некоторые свойства групп, силовские подгруппы которых являются $\mathbb{P}$-субнормальными. В частности, в [37] было доказано, что все такие группы ϕ-дисперсивны и класс групп, все силовские подгруппы которых являются $\mathbb{P}$-субнормальными, является наследственной насыщенной формацией. В работе [38] Васильев, Васильева и Тютянов получили новые характеризации групп, являющихся произведением $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп. Так, было доказано, что группа, которая представима в виде произведения двух разрешимых $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп, является разрешимой. Кроме того, в этой же работе была установлена $\mathbb{P}$-субнормальность всех силовских подгрупп из G в случае, когда G содержит две $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы, индексы которых в G взаимно просты.

Отметим, что в [36] были поставлены задачи об описании групп, все 2-максимальные или все примарные циклические подгруппы которых являются $\mathbb{P}$-субнормальными. Решение таких задач получено Монаховым и Княгиной в [39]. Установлено, что группы, все вторые максимальные подгруппы которых являются $\mathbb{P}$-субнормальными, либо сверхразрешимы, либо являются минимальными несверхразрешимыми группами с абелевым сверхразрешимым корадикалом. В случае же, когда все примарные циклические подгруппы группы являются $\mathbb{P}$-субнормальными, в [39] получен следующий результат.

***Теорема* 3.3** [39, теорема B]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп, у которых все примарные циклические подгруппы являются $\mathbb{P}$-субнормальными. Справедливы следующие утверждения*:

(i) *$\mathfrak{X}$ является наследственной насыщенной формацией*;

(ii) *в том и только в том случае $G \in \mathfrak{X}$, когда G дисперсивна по Оре и каждая бипримарная подгруппа из G с циклической силовской подгруппой является сверхразрешимой*;

(iii) *каждая минимальная не $\mathfrak{X}$-группа является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой, у которой все ненормальные силовские подгруппы цикличны.*

В [40] Княгиной и Монаховым получены новые критерии сверхразрешимости групп с заданными системами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп.

***Теорема* 3.4** [40, теоремы 3.1, 3.2 и 3.3]. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *G сверхразрешима.*

(2) *Нормализаторы всех силовских подгрупп из G являются $\mathbb{P}$-субнормальными в G.*

(3) *Все холловы подгруппы из G являются $\mathbb{P}$-субнормальными в G.*

(4) *Все примарные подгруппы из G и все бипримарные нециклические подгруппы из G, все силовские подгруппы которых цикличны, являются $\mathbb{P}$-субнормальными в G.*

Напомним, что подгруппа H из G называется *$\mathfrak{U}$-субнормальной* в G, если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_t = G,$$

что $H_{i-1}/(H_{i-1})_{H_i}$ сверхразрешима для всякого $i = 1,\dots,t$. Заметим, что если G разрешима, то собственная подгруппа H из G является $\mathfrak{U}$-субнормальной в G в том и только в том случае, когда существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 < H_1 < \cdots < H_t = G,$$

что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для всех $i = 1,\dots,t$, т. е. H является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, и H является $\mathfrak{U}$-абнормальной в G в том и только в том случае, когда $|L : K|$ не является простым числом для всех подгрупп K и L из G, для которых $H \le K \le L \le G$.

В работе [41] Семенчуком и Скибой был получен следующий результат.

***Теорема* 3.5** [41, теорема A]. *Если каждая неединичная подгруппа из G является либо $\mathfrak{U}$-субнормальной, либо $\mathfrak{U}$-абнормальной в G, то $G = DH$, где $D = G^{\mathfrak{U}}$ – сверхразрешимый корадикал группы G, и выполнены следующие условия*:

(i) *H является холловой гашюцевой подгруппой в G. Следовательно, если H нильпотентна, то H является картеровой подгруппой в G*;

(ii) *каждый главный фактор из G ниже D является нециклическим. Следовательно, H – сверхразрешимый нормализатор G в смысле* [43];

(iii) *$|G : DG'|$ является степенью простого числа*;

(iv) *если H – нециклическая группа порядка p^n, где p – простое число и $n > 1$, то группа D нильпотентна*;

(v) $H\Phi(G)/\Phi(G)$ *является либо группой Миллера – Морено, либо примарной абелевой группой*;

(vi) *каждая собственная подгруппа из* G, *содержащая* D, *сверхразрешима.*

Обратно, если G *удовлетворяет условиям* (i)–(vi), *то каждая неединичная подгруппа из* G *является либо* $\mathfrak{U}$*-субнормальной, либо* $\mathfrak{U}$*-абнормальной в* G.

Заметим, что в случае, когда каждая неединичная подгруппа из G является либо $\mathbb{P}$-субнормальной, либо $\mathbb{P}$-абнормальной в G, в [41] доказана разрешимость G. Поэтому описание групп, в которых каждая подгруппа либо $\mathbb{P}$-субнормальна, либо $\mathbb{P}$-абнормальна, является следствием теоремы 3.5.

4 Группы, *n*-максимальные подгруппы которых обладают некоторым наследственным теоретико-групповым свойством

Группы с абелевыми n-максимальными подгруппами. Одной из наиболее ранних работ, связанных с изучением максимальных цепей и, в частности, *n*-максимальных подгрупп $(n>1)$, является работа Редеи [44], посвященная описанию неразрешимых группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами. В дальнейшем Берковичем [45] было получено описание неразрешимых групп с абелевыми третьими максимальными подгруппами.

***Теорема* 4.1** [45, следствие]. *Пусть p – простое число. В том и только в том случае все 3-максимальные подгруппы неразрешимой группы G являются абелевыми, когда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) $SL(2,2^p)$, *где* $\lambda(2^p\pm1)<3$, *кроме случаев, когда* $\lambda(p^n-1)=3$ *или* $p^{2n}\equiv1\,(\mathrm{mod}\,5)$ *для* $p>2$.

(2) $PSL(2,3^p)$, $SL(2,3^p)$, *где* $\lambda(3^p\pm1)<4$, $p\neq1$.

(3) $PSL(2,p)$, *где* $\lambda(p\pm1)<4$.

(4) $SL(2,p)$, *где* $\lambda(p\pm1)<4$, $p\neq7$.

(5) $PGL(2,5)$.

(6) $L\times D$, *где* $L\simeq PSL(2,5)$, $|D|=p$.

Исследованию групп, все *n*-максимальные подгруппы которых являются абелевыми, посвящены также работы Шериева [46], [47] и Драганюка [48]–[50]. Так, в работах [46], [47] с точностью до образующих элементов и определяющих соотношений был изучен класс *p*-групп с абелевыми 2-максимальными подгруппами. В [48] изучено строение примарных групп с абелевыми вторыми максимальными подгруппами. В [49] получено описание *p*-групп с неабелевой подгруппой Фраттини, у которых все 3-максимальные подгруппы являются абелевыми. В дальнейшем Драганюком [50] было получено описание регулярных 2-порожденных подгрупп с абелевыми 3-максимальными подгруппами.

Поскольку каждая подгруппа абелевой группы также является абелевой группой, естественно рассмотреть вопрос о том, какими свойствами обладает группа, каждая *n*-максимальная подгруппа которой обладает некоторым наследственным теоретико-групповым свойством θ.

Группы с нильпотентными n-максимальными подгруппами. Среди исследований групп с нильпотентными *n*-максимальными подгруппами следует, прежде всего, отметить работы Судзуки [51], Янко [52] и Берковича [53]. В работе Судзуки были изучены неабелевы простые группы, все собственные подгруппы максимальных подгрупп (в частности, все 2-максимальные подгруппы) которых нильпотентны. Было установлено, что все такие группы изоморфны группе $PSL(2,5)$. Янко и Беркович в свою очередь получили описание неразрешимых групп с нильпотентными вторыми максимальными подгруппами и доказали, что все такие группы изоморфны либо группе $PSL(2,5)$, либо группе $SL(2,5)$. В разрешимом случае описание групп с нильпотентными вторыми максимальными подгруппами было получено Белоноговым [54].

***Теорема* 4.2** [54, теорема]. *Пусть p, q, r – простые числа. В том и только в том случае все 2-максимальные подгруппы разрешимой группы G являются нильпотентными, когда G – группа одного из следующих типов*:

(1) $G=Q\rtimes P$, $|P|=p^{\alpha}$, $|Q|=q^{\beta}$, $|Q:Q'|=q^{\delta}$, $|Q'|<q^{\delta}$, *всякий элемент из P, порядок которого меньше* $p^{\alpha-1}$, *принадлежит* $C_G(Q)$.

(2) $G=Q\rtimes P$, P – *циклическая группа порядка* p^{α}, $|Q|=q^{\beta}$, $C_G(P)=PZ(G)=P\Phi^2(G)$, $|G:Z(G)|=pq^{2\delta}$.

(3) $G=Q\rtimes P$, $P=\langle a\rangle$ – *циклическая группа порядка* p^{α}, $|Q|=q^{\beta}$, $\Phi(G)=\langle a^p\rangle\times G''$, $|G''|<q^{\delta}$, $G/\Phi(G)$ *является прямым произведением группы типа A и группы порядка q*.

(4) $G=\langle b\rangle(Q\rtimes P)$, $|\langle b\rangle|=1+\varepsilon$, $|P|=p$, $|Q|=q^{\delta+\varepsilon}$, $N_G(P)=\langle b\rangle\rtimes P$, $|Q:Q'|=q^{\delta}$, $0\le\varepsilon\le1$.

(5) $G=(Q\times R)\rtimes P$, $P=\langle a\rangle$ – *циклическая группа порядка* p^{α}, $|Q|=q^{\delta}$, $|R|=r^{\sigma}$, $a^p\in Z(G)$, $C_G(a)=P$, σ *является показателем числа r по модулю p*.

(6) $G=R\rtimes(P\times Q)$, $|P|=p$, $|Q|=q$, $|R|=r^{\gamma}$, PR *и* QR – *группы Шмидта*.

(7) $G=H\times R$, $|H|=p^{\alpha}q^{\beta}$, $|R|=r$, H – *группа Шмидта*.

В дальнейшем Манном [55] были изучены простые группы с 3-нильпотентными вторыми максимальными подгруппами. Было установлено, что такие группы G с $(3,|G|)\neq 1$ изоморфны $PSL(2,q)$ для некоторого простого числа q. В свою очередь, Гаген и Янко в работе [56] получили описание простых групп, все 3-максимальные подгруппы которых являются нильпотентными. Оказалось, что все такие группы изоморфны либо $PSL(2,q)$, где $q>3$, либо $Sz(2^3)$.

Заметим, что в случае, когда все n-максимальные подгруппы из G являются группами Шмидта, каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа из G нильпотентна. В этой связи, отметим работу Берковича [57], в которой, в частности, были исследованы группы, все n-максимальные подгруппы которых являются группами Шмидта. Было установлено, что для таких групп $n=1$ и группа изоморфна либо $PSL(2,5)$, либо $SL(2,5)$. Отметим, что работе [57] предшествовала публикация Берковича [58], в которой был рассмотрен вопрос о строении групп, каждая n-максимальная подгруппа которых является обобщенной группой Шмидта.

Группы со сверхразрешимыми или дисперсивными n-максимальными подгруппами. В [4, глава VI, проблема 26] Шеметковым была поставлена задача описания разрешимых групп, у которых все вторые максимальные подгруппы сверхразрешимы. Частично такая задача была решена Семенчуком в работе [59]. Семенчук показал, что несверхразрешимая группа G, у которой все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы и $G/\Phi(G)$ непроста, является разрешимой и $|\pi(G)|\leq 4$. Таким образом, для решения задачи Шеметкова в случае, когда $G/\Phi(G)$ – непростая группа, нужно было рассмотреть лишь несверхразрешимые группы, число простых делителей порядка которых не превышает 4. В частности, если $|\pi(G)|=4$, справедлив следующий результат.

***Теорема* 4.3** [59, теорема 1]. *Пусть* $|\pi(G)|=4$, $p_1>p_2>p_3>p_4$ *– различные простые делители* $|G|$, G_{p_1}, G_{p_2}, G_{p_3}, G_{p_4} *– соответствующие им силовские подгруппы из* G *и* $G/\Phi(G)$ *не является простой группой. Если все вторые максимальные подгруппы из G сверхразрешимы, то справедливы следующие утверждения*:

(i) *G дисперсивна по Оре*;

(ii) G_{p_3}, G_{p_4} *– циклические группы*;

(iii) *если* $G_{p_2}G_{p_3}G_{p_4}$ *сверхразрешима, то* G_{p_2} *является циклической*;

(iv) $G_{p_1}/\Phi(G_{p_1})$,

$$G_{p_1}G_{p_2}...G_{p_{i-1}}G_{p_i}/G_{p_1}...G_{p_{i-1}}\Phi(G_{p_i})$$

– главные факторы в G, *где* $i=2,3,4$;

(v) *G имеет точно четыре класса максимальных сопряженных подгрупп.*

В дальнейшем полученное Семенчуком описание было уточнено в работе Левищенко и Кузенного [60], в которой было найдено 34 типа групп со сверхразрешимыми вторыми максимальными подгруппами. Результаты работ [59], [60] нашли развитие в работе Ш. Ли [61], где были описаны неразрешимые группы со сверхразрешимыми 2-максимальными $3d$-подгруппами.

Заметим, что в случае, когда все 3-максимальные подгруппы из G K-$\mathfrak{U}$-субнормальны в G, все 2-максимальные подгруппы из G сверхразрешимы. Поэтому полученное Ковалевой и С. Йи [62], [63] описание групп с K-$\mathfrak{U}$-субнормальными третьими максимальными подгруппами также является развитием результатов работы Семенчука [59].

Хорошо известно, что сверхразрешимые группы являются дисперсивными по Оре. Этот факт нашел применение в отмеченной выше работе Левищенко и Кузенного [60], в которой авторами для классификации групп, все 2-максимальные подгруппы которых сверхразрешимы, было использовано полученное ими ранее строение групп с дисперсивными по Оре 2-максимальными подгруппами [64]. Отметим, что группы с дисперсивными 2-максимальными подгруппами были также рассмотрены в одной из работ Берковича [65].

Некоторые другие результаты о группах с заданными наследственными теоретико-групповыми свойствами для n-максимальных подгрупп. Рассмотрим еще несколько работ, в которых авторами изучались группы с заданными наследственными теоретико-групповыми свойствами для n-максимальных подгрупп. Так, в двух работах Берковича [57], [66] были описаны неразрешимые группы с циклическими 3-максимальными или 4-максимальными подгруппами.

***Теорема* 4.4** [66, следствие 3]. *Пусть G – неразрешимая группа с циклическими третьими максимальными подгруппами. Тогда* $\lambda(G)\leq 6$ *и выполнены следующие условия*:

(1) *если* $\lambda(G)=4$, *то* $G\simeq PSL(2,5)$;

(2) *если* $\lambda(G)=5$, *то* G *изоморфна одной из групп* $SL(2,5)$, $PSL(2,11)$, $PSL(2,13)$;

(3) *если* $\lambda(G)=6$, *то* $G\simeq PSL(2,p)$, *причем* $\lambda(p-1)=\lambda(p+1)=3$, *где* p *– простое число и* $p\not\equiv\pm 1 \pmod 5$.

Исследованию групп с метациклическими вторыми максимальными подгруппами посвящены работы [67]–[69]. В [67] Левищенко и Семко получили 11 классов несверхразрешимых групп, все 2-максимальные подгруппы которых являются метациклическими. Развивая результаты работы Левищенко и Семко, авторы работы [68] получили 17 типов 2-групп, все вторые максимальные подгруппы которых являются метациклическими и которые содержат хотя бы одну неметациклическую максимальную подгруппу. В дальнейшем в работе [69] с точностью до изоморфизма были определены все такие p-группы (для нечетных простых чисел p), содержащие неметациклическую максимальную подгруппу, все 2-максимальные подгруппы которых являются метациклическими.

Напомним, что группа G называется (A)-*группой*, если каждая подгруппа простого порядка из G является пронормальной (подгруппа H из G называется *пронормальной* в G, если H сопряжена с H^x в $\langle H, H^x \rangle$ для всякого $x \in G$) и либо все силовские 2-подгруппы из G являются абелевыми, либо каждая циклическая подгруппа порядка 4 из G пронормальна в G. Асаадом в работе [70] была получена классификация простых групп, все вторые максимальные подгруппы которых являются (A) -группами.

Отметим также работы, в которых авторы исследовали не π-разложимые группы, все 2-максимальные подгруппы которых являются π-разложимыми. Группа называется π-*разложимой*, если ее можно представить в виде прямого произведения π-группы и π'-группы. Так, в работе Берковича [53] было доказано, что не 2-разложимая неразрешимая группа G, все вторые максимальные подгруппы которой 2-разложимы, изоморфна либо $PSL(2,5)$, либо $SL(2,5)$. В дальнейшем Берковичем [71] были описаны неразрешимые группы G, у которых каждая 2-максимальная подгруппа любой разрешимой подгруппы из G является 2-разложимой. В недавней же работе Белоногова [72] рассмотрена общая ситуация и получено описание не π-разложимых групп, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы.

5 Замечание о группах с заданными системами максимальных пар

Несомненный интерес среди исследований групп с заданными обобщенно максимальными подгруппами представляют исследования групп с заданными системами максимальных пар. Пусть $K \le H$ – подгруппы из G. Напомним, что пара (K, H) называется *максимальной парой в* G, если K является максимальной подгруппой в H. Очевидно, что если (K, H) – максимальная пара из G, то для некоторого n в G существует максимальная цепь длины n

$$K = H_n < H_{n-1} = H < \cdots < H_1 < H_0 = G.$$

Одной из наиболее значимых публикаций, посвященных изучению групп с заданными максимальными парами, является работа В. Го и Скибы [73]. Исследуя группы, некоторые подгруппы которых покрывают или изолируют заданные системы максимальных пар (подгруппа A из G *покрывает пару* (K, H), если $AH = AK$; подгруппа A *изолирует пару* (K, H), если $A \cap H = A \cap K$), в [73] авторы получили характеризации таких важных классов конечных групп, как классы p-разрешимых, разрешимых, p-нильпотентных, метанильпотентных, p-сверхразрешимых и сверхразрешимых групп.

Отметим, что исследования, начатые в [73], продолжены в работах многих авторов (см., например [74]–[77]), которыми были рассмотрены группы, выделенные системы подгрупп которых обладают свойством обобщенного покрытия-изолирования по отношению к заданным системам максимальных пар.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалева*, *В.А*. Конечные группы с заданными обобщенно максимальными подгруппами (обзор). I. Конечные группы с обобщенно нормальными n-максимальными подгруппами / В.А. Ковалева // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 48–58.

2. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

3. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.

4. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.

5. *Mann*, *A*. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.

6. *Deskins*, *W.E*. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // Illinois J. Math. – 1961. – Vol. 2. – P. 306–313.

7. *Spencer*, *A.E*. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 27, № 1. – P. 167–173.

8. *Spencer*, *A.E*. Finite groups with short nonnormal chains / A.E. Spencer // J. Austral. Math. Soc. – 1972. – Vol. 18, № 1. – P. 111–118.

9. *Asaad*, *M*. Generalization of a theorem of Deskins / M. Asaad // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. – 1975. – Vol. 18. – P. 177–179.

10. *Guo*, *W*. Finite groups of Spencer height ≤ 3 / W. Guo, D.P. Andreeva, A.N. Skiba // Algebra Colloquium. – 2015. – Vol. 22. – P. 437–444.

11. *Janko*, *Z*. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 82–89.

12. *Андреева*, *Д.П*. Конечные группы с заданными максимальными цепями длины ≤ 3 / Д.П. Андреева, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 39–49.

13. *Kegel*, *O.H*. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

14. *Новицкий*, *А.И*. Конечные группы с максимальными цепями подгрупп / А.И. Новицкий // Докл. АН БССР. – 1974. – Т. 18, № 5. – С. 389–390.

15. *Дука*, *Н.Г.* Конечные группы, максимальные цепи подгрупп которых содержат *p*-субнормальные подгруппы / Н.Г. Дука // Изв. высших уч. заведений. Матем. – 1979. – № 9. – С. 3–10.

16. *Решко*, *К.А.* О *p*-длине произвольной конечной группы / К.А. Решко, В.И. Харламова // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 419–427.

17. *Решко*, *К.А.* О насыщенности максимальных цепей модулярными подгруппами / К.А. Решко, В.И. Харламова // Докл. АН БССР. – 1973. – Т. 17, № 9. – С. 788–789.

18. *Харламова*, *В.И.* Характеризация конечных групп с определенными максимальными цепями / В.И. Харламова, К.А. Решко // Подгрупповое строение конечных групп: тр. Гомельск. семинара. – Минск, 1981. – С. 185–195.

19. *Ведерников*, *В.А.* О конечных группах с обобщенной подгруппой Фраттини / В.А. Ведерников, Н.Г. Дука // IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум: резюме научных сообщений. – Гомель: Изд-во Гомельского гос. пед. ун-та, 1968. – С. 44.

20. *Zimmermann*, *I.* Submodular Subgroups in Finite Groups // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

21. *Zimmermann*, *I.* On a Theorem of Deskins / I. Zimmermann // Proc. American Math. Soc. – 1989. – Vol. 107, № 4. – P. 895–899.

22. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.

23. *Ковалева*, *В.А.* Конечные разрешимые группы, у которых все *n*-максимальные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Сибир. матем. ж. – 2013. – Т. 54, № 1. – P. 86–97.

24. *Guo*, *W.* Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. – Heidelberg–NewYork–Dordrecht–London: Springer, 2015.

25. *Го*, *В.* О ступенчатых свойствах подгрупп конечных групп / В. Го, А.Н. Скиба // Сибир. матем. ж. – 2015. – Т. 56, № 3. – С. 487–497.

26. *Skiba*, *A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

27. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

28. *Скиба*, *А.Н.* On σ-properties of finite groups I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

29. *Скиба*, *А.Н.* On σ-properties of finite groups II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.

30. *Скиба*, *А.Н.* On σ-properties of finite groups III / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 52–62.

31. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Comm. in Math. and Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

32. *Huppert*, *B.* Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

33. *Janko*, *Z.* Finite simple groups with short chains of subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1964. – Vol. 84. – P. 428–437.

34. *Беркович*, *Я.Г.* Конечные группы, удовлетворяющие ослабленным условиям Жордана-Дедекинда относительно цепей / Я.Г. Беркович // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 14–23.

35. *Поляков*, *Л.Я.* О связи между главными и максимальными рядами в конечных *p*-разрешимых группах / Л.Я. Поляков // Сибир. матем. ж. – 1967. – Т. VII, № 2. – С. 467–470.

36. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.

37. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сибир. матем. ж. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

38. *Васильев*, *А.Ф.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сибир. матем. ж. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

39. *Monakhov*, *V.S.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Mat. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.

40. *Kniahina*, *V.N.* On supersolvability of Finite Groups with $\mathbb{P}$-subnormal Subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Int. J. Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

41. *Semenchuk*, *V.N.* On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups / V.N. Semenchuk, A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2016. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

42. *Мурашко*, *В.И.* Свойства класса конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 1. – С. 5–8.

43. *Carter*, *R.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

44. *Rédei*, *L.* Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1951. – Vol. 84. – P. 129–153.

45. *Беркович*, *Я.Г.* Конечные неразрешимые группы с абелевыми третьими максимальными подгруппами / Я.Г. Беркович // Изв. высш. уч. заведений. Матем. – 1968. – Т. 7, № 74. – С. 10–15.

46. *Шериев*, *В.А.* Описание класса конечных *p*-групп, все дважды максимальные подгруппы которых абелевы. I / В.А. Шериев // Алгебра. Примарные группы. – Красноярск, 1970. – С. 25–53.

47. *Шериев*, *В.А*. Описание класса конечных *p*-групп, все дважды максимальные подгруппы которых абелевы. II / В.А. Шериев // Алгебра. Примарные группы. – Красноярск, 1970. – С. 54–76.

48. *Драганюк*, *С.В*. Конечные *p*-группы с неабелевой подгруппой Фраттини, все 3-максимальные подгруппы которых абелевы ($p > 3$) / С.В. Драганюк. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1989.

49. *Драганюк*, *С.В*. К вопросу о строении конечных примарных групп, все 2-максимальные подгруппы которых абелевы / С.В. Драганюк // Комплексный анализ, алгебра и топология. – Киев: Изд-во АН УССР. Ин-т мат, 1990. – С. 42–51.

50. *Драганюк*, *С.В*. Конструктивное описание конечных регулярных 2-порожденных групп, все 3-максимальные подгруппы которых абелевы / С.В. Драганюк. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1991.

51. *Suzuki*, *M*. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, № 4. – P. 686–695.

52. *Janko*, *Z*. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.

53. *Беркович*, *Я.Г.* О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы / Я.Г. Беркович // Изв. АН СССР. – 1964. – Т. 156, № 6. – С. 1255–1257.

54. *Белоногов*, *В.А*. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.

55. *Mann*, *A*. Simple groups having *p*-nilpotent 2*nd*-maximal subgroups / A. Mann // Israel J. Math. – 1968. – Vol. 6, № 3. – P. 233–245.

56. *Gagen*, *T.M*. Finite simple groups with nilpotent third maximal subgroups / T.M. Gagen, Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. – 1966. – Vol. 6, № 4. – P. 466–469.

57. *Беркович*, *Я.Г.* Подгрупповая характеризация некоторых конечных групп / Я.Г. Беркович // Докл. АН БССР. – 1996. – Т. 169, № 3. – С. 499–502.

58. *Беркович*, *Я.Г.* Конечные группы, у которых все *n*-е максимальные подгруппы являются обобщенными группами Шмидта / Я.Г. Беркович // Матем. заметки. – 1969. – Т. 5, № 1. – С. 129–136.

59. *Семенчук*, *В.Н*. Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 86–96.

60. *Левищенко*, *С.С*. Конечные группы со сверхразрешимыми 2-максимальными подгруппами / С.С. Левищенко, Н.Ф. Кузенный // Строение групп и свойства их подгрупп. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1986. – С. 63–73.

61. *Li*, *Sh*. Finite non-solvable groups with supersoluble second maximal 3*d*-subgroups / Sh. Li // Chinese Ann. Math. – 1988. – Vol. 9, № 1. – P. 32–37.

62. *Kovaleva*, *V.A*. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups $\mathfrak{U}$-subnormal / V.A. Kovaleva, X. Yi // Acta Math. Hung. – 2015. – Vol. 146, №1. – P. 47–55.

63. *Ковалева*, *В.А*. Конечные группы с заданными системами K-$\mathfrak{U}$-субнормальных подгрупп // Укр. матем. ж. – 2016. – Т. 68, № 1. – С. 52–63.

64. *Левищенко*, *С.С*. Конечные группы с условием дисперсивности по Оре для 2-максимальных подгрупп / С.С. Левищенко, Н.Ф. Кузенный. – Киев: изд-во Киев. гос. пед. ин-та, 1986.

65. *Беркович*, *Я.Г.* Конечные группы с дисперсивными вторыми максимальными подгруппами / Я.Г. Беркович // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 158. – С. 1007–1009.

66. *Беркович*, *Я.Г.* О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы II / Я.Г. Беркович // Изв. АН СССР. – 1965. – Т. 29. – С. 527–552.

67. *Левищенко*, *С.С*. Конструктивное описание конечных несверхразрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы метациклические / С.С. Левищенко, Н.Н. Семко // Исследование групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Изд-во Киев. гос. пед. ун-та, 1988. – С. 42–51.

68. *Cepulic*, *V*. Second-metacyclic finite 2-groups / V. Cepulic, M. Ivankovic, E. Kovac-Striko // Glasnik Matemat. – 2005. – Vol. 40, № 1. – P. 59–69.

69. *Cepulic*, *V*. Second-metacyclic finite *p*-groups for odd primes / V. Cepulic, O. Pyliavska, E. Kovac-Striko // Glasnik Matemat. – 2006. – Vol. 41, № 61. – P. 275–282.

70. *Asaad*, *M*. Simple groups all of whose second maximal subgroups are (*A*)-groups / M. Asaad // Arch. Math. – 1988. – Vol. 50, № 1. – P. 5–10.

71. *Беркович*, *Я.Г.* Строение группы и строение ее подгрупп / Я.Г. Беркович // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 179, № 1. – С. 13–16.

72. *Белоногов*, *В.А*. Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы / В.А. Белоногов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 2. – С. 29–43.

73. *Guo*, *W*. Finite groups with systems of Σ-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // Science in China, Serias A: Math. – 2011. – Vol. 54, № 9. – P. 1909–1926.

74. *Го*, *В*. О Σ-вложенных и m-добавляемых подгруппах конечных групп / В. Го, В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 4. – С. 27–30.

75. *Ковалева*, *В.А*. Критерии *p*-разрешимости и *p*-сверхразхрешимости конечных групп / В.А. Ковалева, Юй-Фэн Лю, В. Го, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, № 3. – С. 455–472.

76. *Chen*, *X*. On generalized image-hypercentral subgroups of a finite group / X. Chen, W. Guo, A.N. Skiba // J. of Algebra. – 2015. – Vol. 442. – P. 190–201.

77. *Li*, *B*. On $P_{\mathfrak{F}}$-supplemented subgroups of finite groups / B. Li, Y. Mao, A.N. Skiba // Comm. in Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 4. – P. 1657–1667.

Поступила в редакцию 31.05.16.

Проблемы физики, математики и техники, № 2 (31), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Семенчук, М.В. Селькин, В.М. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON FINITE GROUPS WITH GENERALIZED SUBNORMAL SUBGROUPS

V.N. Semenchuk, M.V. Selkin, V.M. Selkin

F. Scorina Gomel State University

Изучается строение конечных групп с заданными свойствами $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп.

Ключевые слова: *конечная группа*, $\mathfrak{F}$ *-субнормальная подгруппа*, *насыщенная формация*, *наследственная формация*.

The structure of finite groups with $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroup is studed.

Keywords: *finite group*, $\mathfrak{F}$ *-subnormal subgroup*, *saturated formation*, *hereditury formation*.

Введение

Построенная известным немецким математиком Виландтом [1] теория субнормальных подгрупп оказала большое влияние на изучение строения конечных групп. В теории классов конечных групп естественным развитием субнормальности является понятие обобщенной субнормальности. В 1979 году Л.А. Шеметков [2] и Кегель [3] поставили задачу о построении теории обобщенно субнормальных подгрупп, аналогичную теории субнормальных подгрупп. Решению данных задач посвящено большое количество работ в нашей стране и за рубежом [4]–[6]. Данному направлению посвящена настоящая работа.

1 Предварительные сведения

Необходимые определения и обозначения можно найти в [2]. Напомним некоторые из них. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Если $p \in \mathbb{P}$ и $\pi \subseteq \mathbb{P}$, то $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ и $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$.

$\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ – класс групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если она замкнута относительно фраттиниевых расширений.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и G – группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -нормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -абнормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ – формацию всех нильпотентных групп.

$\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$ – произведение формаций $\mathfrak{F}, \mathfrak{X}$.

$\mathfrak{N}^n$ – формация всех разрешимых групп с нильпотентной длиной равной n.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что для любого $i \geq 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$ -нормальна в H_{i-1}.

В следующих леммах приводятся известные свойства $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп.

***Лемма* 1.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда:

1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G;

2) если H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G, K – подгруппа группы G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$ -субнормальна в K;

3) если H_1 и H_2 $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы G, то $H_1 \cap H_2$ – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G;

4) если H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в K, а K $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G, то H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G;

5) если все композиционные факторы группы G принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то каждая субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$ -субнормальной;

6) если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то H^x $\mathfrak{F}$-субнормальна в G для любых $x \in G$.

***Лемма* 1.2.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H – подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа из G. Тогда:

1) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N;

2) если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N.

***Лемма* 1.3.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G.

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Тогда любая группа $G = AB$, где A – разрешимая нормальная подгруппа с нильпотентной длиной $n (n \in N)$, а B – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа принадлежит $\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{F}$.*

Доказательство теоремы проведем индукцией по n. Покажем, что утверждение теоремы верно при $n = 1$, т. е. любая группа $G = AB$, где A – нильпотентная нормальная подгруппа, а B – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Доказательство этого факта проведем индукцией по порядку группы G.

Покажем, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Предположим, что их две N_1 и N_2. Рассмотрим фактор-группу G/N_i $(i = 1,2)$. Очевидно, что

$$G/N_i = AN_i/N_i \cdot BN_i/N_i, i = 1,2.$$

Ясно, что AN_i/N_i – нильпотентная нормальная подгруппа из G/N. По лемме 1.2 BN_i/N_i – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа фактор-группы G/N_i. Так как $B \in \mathfrak{F}$, то, очевидно, что $BN_i/N_i \in \mathfrak{F}$.

Итак, все требования теоремы для G/N_i выполнены. По индукции, $G/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1,2$. Так как $N_1 \cap N_2 = 1$ и $\mathfrak{F}$ – формация, то

$$G = G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Пусть теперь $\Phi(G) \neq 1$. Как и выше, нетрудно показать, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N и $\Phi(G) = 1$. Очевидно, что $F(G) \neq 1$. Отсюда следует, что $N = F(G)$ – цоколь группы G.

Так как $G/N \simeq B$, а подгруппа $B \in F$ и $G \notin F$, то $N = G^{\mathfrak{F}}$. Так как B – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и $B \neq G$, то B содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Так как B – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то M – максимальная $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа G. Тогда $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, что невозможно. Итак, при $n = 1$ теорема доказана.

Пусть теперь теорема верна при $n = k$. Покажем, что она справедлива при $n = k + 1$, т. е. любая группа $G = AB$, где A – нормальная подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{N}^{k+1}$ и B – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа принадлежит $\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}$.

Так как $A \in \mathfrak{N}^{k+1}$, то $A/F(A) \in \mathfrak{N}^k$.

Так как A – нормальная подгруппа группы G и $F(A)$ – характеристическая подгруппа, то $F(A)$ – нормальная подгруппа группы G.

Рассмотрим следующую фактор-группу

$$G/F(A) = A/F(A) \cdot BF(A)/F(A).$$

Очевидно, что $A/F(A) \in \mathfrak{N}^k$. По лемме 1.2 $BF(A)/F(A)$ – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа фактор-группы $G/F(A)$. Ясно, что

$$BF(A)/F(A) \in \mathfrak{F}.$$

Согласно индукции следует, что $G \in \mathfrak{N}^k\mathfrak{F}$. □

***Следствие* 2.1** (Хоукс, [2, теорема 15.10]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, G – группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Пусть H и M – такие подгруппы из G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$, $HF(G) = G$. Если H – $\mathfrak{F}$-субнормальна в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Если $H = M$, то утверждение доказано.

Пусть $H = G$, тогда утверждение следует из доказанной выше теоремы.

Пусть $M \neq G$. Подгруппа M представлена в виде

$$M = H(F(G) \cap M) = HF(M).$$

Поэтому M и ее подгруппы H удовлетворяют условию теоремы. Так как $M \neq G$, то для M утверждение верно по индукции. Значит $M \in \mathfrak{F}$.

***Следствие* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Тогда любая разрешимая группа $G = F(G) \leftthreetimes B$, где B – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Тогда

$$G/\Phi(G) = F(G)/\Phi(G) \leftthreetimes B\Phi(G)/\Phi(G).$$

По индукции $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Итак $\Phi(G) = 1$.

Отсюда следует, что $F(G)$ – цоколь группы G.

Так как B – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа G, то по лемме 1.3 $B^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G. По теореме 7.10 [2] $F(G) \subseteq N(B^{\mathfrak{F}})$. Отсюда следует, что $B^{\mathfrak{F}}$ – нормальная подгруппа G. А это значит, что $B^{\mathfrak{F}} = 1$, т. е. $B \in \mathfrak{F}$. Теперь требуемый результат следует из доказанной выше теоремы. □

Группа называется минимальной $\mathfrak{F}$-группой, если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, но все собственные подгруппы ее принадлежат $\mathfrak{F}$. В частности, не нильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта.

В следующей теореме получена новая характеризация разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп с помощью $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация и G – разрешимая группа, $\Phi(G) = 1$. Тогда и только тогда группа G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, когда*:

1) *в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа M, где $M_G = 1$;*

2) *любая собственная подгруппа из M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа и $\Phi(G) = 1$. Тогда, нетрудно показать, $G = N \leftthreetimes M$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $N = G^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, что и M – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G и $M_G = 1$.

Пусть K – собственная подгруппа группы M. Рассмотрим подгруппу NK. Ясно, что NK – собственная подгруппа группы G. Так как G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $NK\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то K – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа NK. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, то NK – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда по лемме 1.1 K – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Достаточность. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, а M – максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G и $M_G = 1$.

Очевидно, что $G = N \leftthreetimes M$. Так как любая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то по лемме 1.1 она субнормальна в M. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $M \in \mathfrak{F}$.

Пусть H – произвольная максимальная подгруппа группы G. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Если $N \not\subseteq H$, то $G = N \leftthreetimes H$. Тогда $H \simeq M$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть $N \subseteq H$. Тогда

$$H = (N \leftthreetimes M) \cap H = N(M \cap H).$$

Очевидно, что $M \cap H$ – собственная подгруппа M. Согласно условию, $M \cap H \in F$ и $M \cap H$ – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. По лемме 1.1 $M \cap H$ – $\mathfrak{F}$ субнормальна в H. По следствию 2.1 из теоремы 2.1 $H \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то любая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Так как в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная под-группа, то $G \notin \mathfrak{F}$. Итак G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. □

***Теорема* 2.3.** *Пусть в конечной группе G существует ненормальная максимальная подгруппа, у которой все максимальные подгруппы субнормальны в G, тогда G – группа Шмидта.*

Доказательство. Пусть в группе G существует максимальная ненормальная подгруппа M, у которой все максимальные подгруппы субнормальны в G. Покажем, что M – примарная циклическая подгруппа. Предположим, что это не так. Тогда в группе M существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2 такие, что M_1 и M_2 субнормальны в G и $M = \langle M_1, M_2 \rangle$. Так как множество всех субнормальных подгрупп в группе G, согласно результату Кегеля, образует решетку, то M – субнормальная подгруппа группы G, что невозможно. Итак, M – циклическая примарная подгруппа группы G. Согласно результатам Томпсона – Янка G – разрешимая группа. Отсюда следует, что G – бипримарная группа. Теперь, нетрудно показать, что G – группа Шмидта. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt*, *H.* Uber den Normalisator der subnormalen Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1958. – Vol. 69, № 8. – P. 463–465.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. – 1978. – 267 с.

3. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 225–228.

4. *Селькин*, *М.В.* Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами / М.В. Селькин, Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

5. *Семенчук*, *В.Н.* О конечных группах, в которых каждая подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна / В.Н. Семенчук, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 72–74.

6. *Семенчук*, *В.Н.* Конечные группы с заданными свойствами критических подгрупп / В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 89–92.

Поступила в редакцию 10.02.17.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА – ПАДЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.В. Сидорцов, А.А. Драпеза, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины

ASYMPTOTICS OF HERMITE – PADÉ DEGENERATE HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

M.V. Sidortsov, A.A. Drapeza, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

Установлена асимптотика диагональных многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода для системы $\{{}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)\}_{j=1}^k$, состоящей из вырожденных гипергеометрических функций, в случае, когда числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ являются корнями уравнения $\lambda^k = 1$, а γ – комплексное число, принадлежащее множеству $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты Паде, Д. Браесса, А.И. Аптекарева, Г. Шталя, Ф. Вилонского, В. Ван Аше, А.Э. Койэлаарса, А.П. Старовойтова, полученные в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – различные действительные числа.

Ключевые слова: *интегралы Эрмита*, *многочлены Эрмита – Паде*, *аппроксимации Эрмита – Паде*, *асимптотические равенства*, *вырожденные гипергеометрические функции.*

The asymptotic behavior of diagonal Hermite – Padé polynomials and diagonal Hermite – Padé approximations of type II for the system $\{{}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)\}_{j=1}^k$, consisting of degenerate hypergeometric functions in which while the rest $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ are the roots of the equation $\lambda^k = 1$, γ – is a complex number belonging to the set $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ was stated. The theorems complement known results of H. Padé, D. Braess, A.I. Aptekarev, H. Stahl, F. Wielonsky, W. Van Assche, A. B. J. Kuijlaars, A.P. Starovoitov, obtained for the case, where the $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – different real numbers.

Keywords: *Hermite integrals*, *Hermite – Padé polynomials*, *Hermite – Padé approximations*, *asymptotic equality*, *degenerate hypergeometric functions.*

Введение

Пусть k – произвольное фиксированное натуральное число, а

$$f_j(z) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p^j z^p,\ j = 1,2,\ldots,k \qquad (0.1)$$

является набором голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем k-мерный вектор $\vec{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ с целочисленными неотрицательными координатами. Считая, что n также является целым неотрицательным числом, полагаем

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i,\ n_j = n + m - m_j,\ j = 1,2,\ldots,k.$$

Известно [1], что существует набор из $k+1$ многочленов Q_m, $P_{n_1}^1, P_{n_2}^2, \ldots, P_{n_k}^k$, $\deg Q_m \le m$, $\deg P_{n_j}^j \le n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z) = Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \ldots. \qquad (0.2)$$

Если $k = 1$, то множество (0.1) состоит из одной функции $f = f_1$, многочлены Q_m, $P_n := P_n^1$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию

$$\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z,f) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

которую называют *аппроксимацией Паде* для f. При $k \ge 2$ дроби

$$\pi_{n_j,m}^j(z) = \pi_{n_j,m}^j(z; f_j) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)},\ j = 1,2,\ldots,k$$

условиями (0.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n_j,m}^j\}_{j=1}^k$ его элементы называют *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* (*совместными аппроксимациями Паде*) для набора функций $\{f_j\}_{j=1}^k$, а Q_m, $P_{n_j}^j$ называют *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода* (*German polynomials* – в терминологии К. Малера [2]) для набора (0.1).

Если $n = m_1 = m_2 = \ldots = m_k$, то Q_{kn}, P_{kn}^j называют *диагональными многочленами Эрмита – Паде 2-го рода*, а $\pi_{kn,kn}^j$ – *диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* для системы $\{f_j\}_{j=1}^k$.

Единственность имеет место, например, для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [1]). В частности, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю комплексные числа, то система экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ является совершенной. Без формального определения этот факт был установлен Эрмитом. Исследуя арифметические свойства числа *e*, Эрмит [3] ввел интегралы, которые после небольших преобразований (подробнее см. [1]) приводят к решению системы (0.2) для набора $\{f_j(z)=e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$:

$$Q_m(z)=\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^\infty x^n\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}e^{-zx}dx,$$

$$\begin{gathered} P_{n_j}^j(z)=P_{n_j}^j(z;e^{\lambda_j\xi})= \\ =\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^\infty x^n\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}e^{-zx}dx, \\ R_{n,m}^j(z)=R_{n,m}^j(z;e^{\lambda_j\xi})= \\ =\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j} x^n\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}e^{-zx}dx. \end{gathered} \quad (0.3)$$

Многочлены, определяемые равенствами (0.3), соответствующие им аппроксимации и их обобщения привлекали внимание как классиков (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, К. Зигель), так и многих известных современных математиков (см., например, монографии [1], [4] и тематические обзоры [5] –[10]).

Одним из стимулов для изучения асимптотического поведения интегралов Эрмита стала задача Е.М. Никишина [11] об исследовании сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде для системы экспонент. Её полное решение было найдено А.И. Аптекаревым [11], который показал, что при $n+m\to+\infty$ дроби $\pi_{n_j,m}^j(z;e^{\lambda_j\xi})$ сходятся к $e^{\lambda_j z}$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}$. Ранее при $k=1$ равномерная сходимость $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^z была доказана Перроном [12].

Рассмотрим набор вырожденных гипергеометрических функций

$$F_\gamma^j(z)={}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)=\sum_{p=0}^\infty\frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p}z^p,\ j=1,2,\ldots,k, \quad (0.4)$$

где γ – произвольное комплексное число, принадлежащее множеству $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, $(\gamma)_0=1$, $(\gamma)_p=\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа не равные нулю. При $\gamma=1$ набор (0.4) представляет собой систему экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$.

В одномерном случае, когда $F_\gamma(z)={}_1F_1(1,\gamma;z)$, явные выражения для остаточной функции $R_{n,m}$ и знаменателя Q_m были найдены Ван Россумом [13]: при $n\geq m-1$

$$\begin{gathered} Q_m(z;F_\gamma)={}_1F_1(-m,-n-m-\gamma;-z), \\ R_{n,m}(z;F_\gamma):=Q_m(z)F_\gamma(z)-P_n(z)= \\ =\frac{(-1)^m m!z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\,{}_1F_1(m+1,n+m+\gamma+1;z). \end{gathered} \quad (0.5)$$

Напомним, что по определению

$${}_1F_1(\alpha,\beta;z)=\sum_{p=0}^\infty\frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p}\frac{z^p}{p!}.$$

Де Брюен [14], опираясь на представления (0.5), обосновал равномерную сходимость $\pi_{n,m}(z;F_\gamma)$ к F_γ на компактах в $\mathbb{C}$ при $n+m\to\infty$. Асимптотика этой сходимости установлена в [15][1]: при $n\geq m-1$ и $n+m\to\infty$

$$\begin{gathered} F_\gamma(z)-\pi_{n,m}(z;F_\gamma)= \\ =(-1)^m\frac{m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}z^{n+m+1}(1+o(1)). \end{gathered} \quad (0.6)$$

Здесь и далее оценка $o(1)$ равномерна по z на компактах в $\mathbb{C}$.

При $\gamma=1$ равенство (0.6) хорошо известно в теории аппроксимаций Паде и ранее доказано Д. Браессом [16].

Многомерный случай исследован в [17]. В этой работе установлено, что при любом $k\geq1$ и произвольном $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ дроби $\pi_{n_j,m}^j(z;F_\gamma^j)$ равномерно сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ к $F_\gamma^j(z)$, при условии, что $n\geq m_j-1$, $j=1,2,\ldots,k$ и $n+m\to+\infty$. В [17], в частности, показано, что для системы функций $\{F_\gamma^j\}_{j=1}^k$ имеет место следующее интегральное представление знаменателя и остаточных функций: при $n\geq m_j-1$, $j=1,2,\ldots,k$

$$\begin{gathered} \widetilde{Q}_m(z)=\frac{z^{n+m+\gamma}}{\Gamma(n+m+\gamma)}\times \\ \times\int_0^\infty[x^{n+\gamma-1}\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx, \end{gathered} \quad (0.7)$$

$$\begin{gathered} R_{n,m}^j(z;F_\gamma^j)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}}\times \\ \times\int_0^{\lambda_j}[x^{n+\gamma-1}\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx, \end{gathered} \quad (0.8)$$

В равенстве (0.7) считается, что $\operatorname{Re}z>0$. В случае $\operatorname{Re}z\leq0$ значения $\widetilde{Q}_m(z)$ определяются с помощью аналитического продолжения. $\Gamma(\cdot)$ –

[1]В этой работе предполагается, что $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Однако предложенный в [15] метод доказательства позволяет получить аналогичный результат и в общем случае, когда $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$.

гамма-функция Эйлера. В (0.8) интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j.

По всей видимости, условия $n \geq m_j - 1$ являются необходимыми для справедливости представлений (0.7) и (0.8). Так, в частности, при $k = 1$ Де Брюен [14] показал, что если $n < m - 1$, то при $\gamma = 2$, $\gamma = 1 \pm i\sqrt{2}$ и γ, являющимся действительным корнем уравнения

$$\gamma^3 - 4\gamma^2 - \gamma + 6 = 0,$$

существуют индексы (n, m), которые не являются нормальными (определение нормальных индексов см. в [1]). Хорошо известно, что единственность множества $\{\pi^j_{n_j,m}\}_{j=1}^k$ вытекает из нормальности индексов.

Доказательство равномерной сходимости в [17] опирается на следующее асимптотическое равенство, являющееся аналогом соответствующего утверждения Перрона: при $n \geq m_j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$ и $n + m \to +\infty$

$$\widetilde{Q}_m(z) = \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i}{n + m + \gamma - 1} z\right\}(1 + o(1)). \quad (0.9)$$

Если $\gamma \neq 1$, то получить аналог представления (0.7) для многочленов $P^j_{n_j}$ не удаётся. Тем не менее, опираясь на результаты работы [17], нетрудно показать, что при тех же условиях равномерно по z на любом компакте из $\mathbb{C}$

$$\lim_{n+m\to+\infty} P^j_{n_j}(z) \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i}{n + m + \gamma - 1} z\right\} = F^j_\gamma(z). \quad (0.10)$$

К настоящему времени равенства (0.9), (0.10) в совокупности являются одним из самых общих результатов об асимптотике многочленов Эрмита – Паде. Вопрос о том, каково асимптотическое поведение остаточных функций $R^j_{n,m}$ и аппроксимаций $\pi^j_{n_j,m}$, в общей постановке пока остается открытым. Имеется продвижение только в диагональном случае [18]–[22], когда $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ являются либо действительными, либо чисто мнимыми числами (см. [23], где при $k = 2$ рассматривается также и недиагональный случай).

Отметим также, что при $\gamma = 1$ задача об асимптотике остаточной функции и диагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го рода подробно исследовалась в [24]–[26].

В данной статье устанавливаются асимптотики равномерной сходимости диагональных аппроксимаций $\pi^j_{kn,kn}(\cdot; F^j_\gamma)$ к функции F^j_γ при $n \to \infty$ в том случае, когда числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ равномерно распределены на единичной окружности, т. е. являются корнями уравнения $\lambda^k = 1$.

1 Формулировка основных результатов

Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – корни уравнения $\lambda^k = 1$, т. е.

$$\lambda_j = e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}, \ j = 1, 2, \ldots, k. \quad (1.1)$$

Полагаем

$$\varphi(x) := x(1 - x^k) = -x(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_k),$$

а через x_j обозначим нули φ':

$$x_j = \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}} e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}, \ j = 1, 2, \ldots, k,$$

где i – мнимая единица.

Рассмотрим однозначную вещественнозначную функцию

$$S(x) = \ln \varphi(x), \ x \in (0, 1),$$

считая, что выбрана та ветвь логарифма, для которой $\ln e^{-1} = -1$. По определению полагаем, что $S(0) = S(1) = -\infty$.

Справедливы равенства

$$S(x_1) = \ln \frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}},$$

$$S'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \ S''(x) = \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - [\varphi'(x)]^2}{\varphi^2(x)},$$

из которых следует, что

$$S'(x_1) = 0, \ S''(x_1) = \frac{\varphi''(x_1)}{\varphi(x_1)} = -\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}},$$

$$B_n := \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}} \left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}\right)^n.$$

Везде далее считается, что $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, $n = m_1 = m_2 = \ldots = m_k$, а λ_j определяются равенствами (1.1).

***Теорема* 1.1.** *При $n \to +\infty$ равномерно на любом компакте из $\mathbb{C}$:*

а) при $k = 1$

$$P_n(z; F_\gamma) \rightrightarrows F_\gamma(z) e^{-\frac{z}{2}}; \quad (1.2)$$

б) при $k \geq 2$

$$P^j_{kn}(z; F^j_\gamma) \rightrightarrows F^j_\gamma(z).$$

Утверждение (1.2) в случае, когда $\gamma = 1$, доказал Паде, а при других γ – Де Брюен [14].

***Теорема* 1.2.** *При любом фиксированном z и $n \to +\infty$*

$$R^j_{n,kn}(z; F^j_\gamma) = (-1)^n x_1^{\gamma-1} \lambda_j^{n+1} B_n \times$$
$$\times \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j(1-x_1)z}(1 + O(1/n)), \ j = 1, 2, \ldots, k. \quad (1.3)$$

Здесь и далее для комплексных w и τ считаем, что

$$w^\tau = e^{\tau \ln w},$$

где $\ln w = \ln|w| + i\arg_0 w$, $\arg_0 w \in (-\pi, \pi]$.

***Теорема* 1.3.** *При любом фиксированном* z *и* $n \to +\infty$

$$F_\gamma^j(z) - \pi_{kn,kn}^j(z; F_\gamma^j) =$$
$$= (-1)^n x_1^{\gamma-1} \lambda_j^{n+1} B_n \times$$
$$\times \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j (1-x_1) z} e^{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z} (1 + O(1/n)), \quad (1.4)$$
$$j = 1, 2, ..., k.$$

***Следствие* 1.1.** *Если* $k = 1$, *то при* $n \to +\infty$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,n}(z; F_\gamma) =$$
$$= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}} \frac{z^{2n+1}}{(\gamma)_{2n}} e^z (1 + O(1/n)). \quad (1.5)$$

Напомним, что бесконечно малые (б.м.) последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ называют *эквивалентными* ($\alpha_n \sim \beta_n$), когда $\alpha_n / \beta_n \to 1$ при $n \to +\infty$.

Если $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, то, принимая во внимание равенство $(\gamma)_p = \Gamma(p + \gamma)/\Gamma(\gamma)$, с помощью формулы Стирлинга нетрудно показать, что при $n \to +\infty$

$$\frac{n!(\gamma)_n}{(\gamma)_{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}}. \quad (1.6)$$

Это значит, что при $n = m$ и $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ асимптотические равенства (0.6) и (1.5) полностью согласуются.

Известно [27, § 43, пример 4], что формула Стирлинга

$$\Gamma(z+1) = z^z e^{-z} \sqrt{2\pi z} \left(1 + \frac{1}{z}\right), z \to \infty$$

справедлива также и для комплексных z, если только $z \to \infty$, $z \in U_\varepsilon$, где U_ε – сектор $\{z : \arg|z| \le \pi - \varepsilon\}$. Здесь ε – фиксировано, $0 < \varepsilon < 1$. Поэтому эквивалентность (1.6) имеет место и при $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$. Таким образом установлено, что в диагональном случае равенство (0.6) верно и для комплексных γ.

***Следствие* 1.2.** *Пусть* $k = 2$. *Тогда* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *и при* $n \to +\infty$

$$F_\gamma^1(z) - \pi_{2n,2n}^1(z; F_\gamma^1) =$$
$$= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \frac{z^{3n+1}}{(\gamma)_{3n}} e^{(1-\frac{1}{\sqrt{3}})z} (1 + o(1)).$$
$$F_\gamma^2(z) - \pi_{2n,2n}^2(z; F_\gamma^2) =$$
$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \frac{z^{3n+1}}{(\gamma)_{3n}} e^{-(1-\frac{1}{\sqrt{3}})z} (1 + o(1)).$$

При $\gamma = 1$ из последних соотношений легко получить соответствующие асимптотические равенства для разностей $e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^\xi)$, $e^{-z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{-\xi})$ (в работе [18] асимптотика этих разностей описана в терминах решений некоторых краевых матричных задач Римана – Гильберта). Заметим также, что все утверждения следствия 1.2 согласуются с результатами работ [19]–[21].

2 Предварительные результаты

Интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_I f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (2.1)$$

называют интегралами Лапласа. Здесь I либо отрезок $[a, b]$, либо интервал (a, b), λ – большой параметр. Будем считать, что функция $S(x)$ принимает только действительные значения. Функция $f(x)$ может быть комплекснозначной. Считаем также, что $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны при $x \in I$. Нас интересует асимптотическое поведение интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Следующее утверждение [27, § 4, п. 1, лемма 1] дает грубую экспоненциальную оценку для интеграла Лапласа.

***Утверждение* 2.1.** *Пусть* $I = (a, b)$ *– конечный или бесконечный интервал,* $S(x) \le c$ *при* $x \in I$ *и интеграл* (2.1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda_0 > 0$. *Тогда если* $\mathrm{Re}\lambda \ge \lambda_0$, *то*

$$|F(\lambda)| \le c_1 e^{cRe\lambda},$$

где c_1 *– положительная постоянная.*

В дальнейшем ограничимся случаем, когда $S(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $I = [a, b]$ в единственной точке, лежащей внутри этого отрезка. Справедливо [27, § 43, п. 4, теорема 2] следующее

***Утверждение* 2.2.** *Пусть* $S(x) < S(x_0)$, $x \ne x_0$, $a < x_0 < b$, $S''(x_0) \ne 0$ *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$ *и* $f(x_0) \ne 0$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{\lambda S(x_0)} \left\{ f(x_0) + O(\lambda^{-1}) \right\}. \quad (2.2)$$

3 Доказательства основных теорем

Начнём с доказательства равенств (1.3). Докажем (1.3) при $j = 1$. Пусть z – любое отличное от нуля (при $z = 0$ равенство (1.3) очевидно) фиксированное комплексное число. В условиях теоремы 1.2

$$R_{n,kn}^1(z; F_\gamma^j) = \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^z \int_0^1 \left[x(x^k - 1) \right]^n x^{\gamma-1} e^{-zx} dx.$$

Обозначим интеграл в правой части последнего равенства через $I_n^1(z)$. Тогда его можно записать в виде

$$I_n^1(z) = (-1)^n \int_0^1 x^{\gamma-1} e^{-zx} e^{nS(x)} dx.$$

В интеграле $I_n^1(z)$ разобьём область интегрирования на три промежутка: $(0,\tau)$, $[\tau,1-\tau]$ и $(1-\tau,1)$, где $0<\tau<1$ и выбрано так, чтобы $x_1\in(\tau,1-\tau)$. Соответствующие этому разбиению интегралы обозначим через $J_n^p(z)$, $p=1,2,3$.

На отрезке $[\tau,1-\tau]$ функция $S(x)=\ln[x(1-x^k)]$ принимает наибольшее значение в единственной точке $x=x_1$ и $S''(x_1)\neq 0$. Поэтому асимптотику интеграла

$$J_n^2(z)=\int_\tau^{1-\tau} x^{\gamma-1}e^{-zx}e^{nS(x)}dx$$

можно найти по формуле (2.2), считая в формулировке утверждения 2.2 $f(x)=x^{\gamma-1}e^{-zx}$, а $\lambda=n$. В результате таких вычислений получим, что

$$J_n^2(z)=\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}x_1^{\gamma-1}e^{-zx_1}(1+O(1/n)).$$

Поскольку на интервале (0,1) функция $S(x)$ принимает наибольшее значение в единственной точке $x=x_1$, то, воспользовавшись утверждением 2.1, нетрудно показать, что

$$|J_n^p(z)|\le c_1e^{n(S(x_1)-\delta)},\ p=1,3,$$

где c_1 и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n\to\infty$ интегралы по первому и третьему промежуткам экспоненциально малы по сравнению с $e^{nS(x_1)}$. Следовательно, основной вклад в асимптотику $I_n^1(z)$ вносит интеграл $J_n^2(z)$. Поэтому при $n\to\infty$

$$I_n^1(z)=(-1)^n\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}x_1^{\gamma-1}e^{-zx_1}(1+O(1/n)).$$

Равенство (1.3) при $j=1$ и фиксированном z доказано.

Пусть теперь $j\ge 2$. Тогда

$$R_{n,kn}^j(z;F_\gamma^j)=$$
$$=\frac{z^{kn+n+1}}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{kn+n}}e^{\lambda_j z}\int_0^{\lambda_j}\left[\xi(\xi^k-1)\right]^n\xi^{\gamma-1}e^{-z\xi}d\xi.$$

Будем считать, что кривая интегрирования, соединяющая точку 0 с λ_j, задана параметрически уравнением

$$\xi=\xi(t)=t\lambda_j,\ t\in[0,1].$$

В интеграле

$$I_n^j(z):=\int_0^{\lambda_j}\left[\xi(\xi^k-1)\right]^n\xi^{\gamma-1}e^{-z\xi}d\xi$$

сделаем замену $\xi=\xi(t)$. Тогда

$$I_n^j(z):=(-1)^n\lambda_j^{n+1}\lambda_j^{\gamma-1}\int_0^1\left[t(1-t^k)\right]^n t^{\gamma-1}e^{-zt\lambda_j}dt.$$

Асимптотика интеграла, стоящего в правой части предыдущего равенства, находится также, как и для интеграла $I_n^1(z)$, с той лишь разницей, что $f(t)=t^{\gamma-1}e^{-zt\lambda_j}$. В результате аналогичных рассуждений получим, что

$$R_{n,kn}^j(z;F_\gamma^j)=(-1)^n x_1^{\gamma-1}\lambda_j^{n+1}\frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}}e^{\lambda_j(1-x_1)z}\times$$
$$\times\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}(1+O(1/n)).$$

Теорема 1.2 доказана.

Теорема 1.3 является следствием теоремы 1.2 и равенства (0.9).

Легко показать, что при $k\ge 2$ справедливо равенство $\sum_{i=1}^k\lambda_i=0$. Поэтому теорема 1.1 является следствием асимптотического равенства (0.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

2. *Stahl*, *H.* Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomals associated with the exponential function / H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.

3. *Hermite*, *C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

4. *Клейн*, *Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2-х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987.

5. *Суетин*, *С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.

6. *Суетин*, *С.П.* Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2015. – Т. 70, № 5 (425). – С. 121–174.

7. *Van Assche*, *W.* Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation / W.Van Assche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.

8. *Aptekarev*, *A.I.* Asymptotics of Hermite – Padé polynomials, in “Progress in Approximation Theory” (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York – Berlin: Springer-Verlag, 1992.

9. *Аптекарев*, *А.И.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.

10. *Аптекарев*, *А.И.* Аппроксимации Эрмита – Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 123–190.

11. *Аптекарев*, *А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.

12. *Perron*, *O*. Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin: Teubner, 1929.

13. *Van Rossum*, *H*. Systems of orthogonal and quasi-orthogonal polynomials connected with the Padé table I, II and III / H. Van Rossum // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – P. 517–534, 675–682.

14. *De Bruin*, *M.G*. Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1;c;x)$ / M.G. De Bruin // K. Nederl. Akad. Wetensch. – 1976. – Vol. 79. – P. 408–418.

15. *Старовойтов*, *А.П*. Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.

16. *Braess*, *D*. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x, II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

17. *Аптекарев*, *А.И*. Об аппроксимациях Паде к набору $\left\{{}_1F_1(1,c;\lambda_i z)\right\}_{i=1}^{k}$ / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.

18. *Kuijlaars*, *A.B.J*. Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207. – P. 227–244.

19. *Старовойтов*, *А.П*. Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде системы экспонент / А.П. Старовойтов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 2. – С. 5–10.

20. *Старовойтов*, *А.П*. О свойствах аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 5–10.

21. *Старовойтов*, *А.П*. Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 81–87.

22. *Старовойтов*, *А.П*. Об асимптотике аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 9. – С. 59–68.

23. *Старовойтов*, *А.П*. Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, № 1 (2). – С. 88–91.

24. *Астафьева*, *А.В*. Асимптотические свойства многочленов Эрмита / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 5–11.

25. *Астафьева*, *А.В*. Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.

26. *Старовойтов*, А.П. Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 3. – С. 409–420.

27. *Сидоров*, *Ю.В*. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 09.03.17.

Проблемы физики, математики и техники, № 2 (31), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

ОТКРЫТАЯ СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАРАНТИННЫМ УЗЛОМ

О.В. Якубович[1], Ю.Е. Летунович[1], В.Е. Евдокимович[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

OPEN QUEUEING NETWORK WITH QUARANTINE NODE

O.V. Yakubovich[1], Y.E. Letunovich[1], V.E. Evdokimovich[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Исследуется марковская открытая сеть с карантинным узлом. Заявки поступают в обычные экспоненциальные узлы и проверяются на стандартность. Если заявка признается нестандартной, она направляется в карантинный узел, где осуществляется восстановление ее качеств, после чего заявка продолжает движение по сети. Устанавливаются условия эргодичности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний модели.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания, карантинный узел, эргодичность, стационарное распределение.*

An open Markov queueing network with quarantine node is considered. Customers arrive in usual exponential nodes and are verified for standard. If a customer does not comply with the standard it is sent to the quarantine node, where its quality is restored. After that the customer continues to move through the network. The conditions of ergodicity and an analytical view of stationary distribution of the network states probabilities are found.

Keywords: *queueing network, quarantine node, ergodicity, stationary distribution.*

Введение

Теория сетей массового обслуживания предоставляет мощный математический аппарат для моделирования реальных объектов, имеющих сетевую структуру. В связи со стремительным развитием сферы информационных технологий в последнее время появляется много интересных моделей, позволяющих учитывать требования современности [1]–[5]. Нахождение стационарного распределения вероятностей состояний модели является центральным вопросом и отправной точкой дальнейших исследований.

Сети с карантинным узлом позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети имеют защиту от заявок с нестандартными качествами. Наличие в сети карантинного узла может учитывать ситуацию, когда в сети есть антивирусное программное обеспечение, позволяющее как проверять входящую информацию на наличие вирусов, так и «лечить» зараженные объекты. В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступают пуассоновские потоки заявок. Сеть состоит из обычных узлов и одного карантинного узла. Заявки поступают извне пуассоновским потоком и с заданными вероятностями направляются в очереди обычных узлов. Заявки в обычных узлах получают обслуживание, время которого имеет экспоненциальное распределение. Пребывая в очереди узла, заявки проверяются на стандартность (например, на отсутствие вирусов, дефектность и т. д.). После окончания времени проверки, имеющего показательное распределение, заявка с заданной вероятностью может быть признана нестандартной, после чего мгновенно направляется в карантинный узел. Для марковского процесса, описывающего исследуемую сеть, устанавливаются условия эргодичности и определяется стационарное распределение в мультипликативной форме.

1 Изолированный узел

1.1 *Изолированный узел с проверкой заявок.* Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ.

Каждая заявка, находящаяся в системе, проверяется на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром $\nu(n) = \nu / n$, $n \neq 0$, где n – число заявок в системе, ν – некоторая положительная постоянная. Каждая заявка после окончания проверки либо с вероятностью p признается нестандартной и покидает систему, либо с вероятностью $1-p$ признается стандартной и остается в системе.

Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления, проверки и имеют показательное распределение с параметром μ. Порядок обслуживания заявок произвольный.

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом $n(t)$, где $n(t)$ – количество заявок в системе в момент времени t. Тогда $n(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \{n, n \ge 0\}$.

Предположим, что $\{p(n), n \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(n)\left[\lambda + (\mu + \nu p)I_{\{n \ne 0\}}\right] =$$
$$= p(n-1)\lambda I_{\{n \ne 0\}} + p(n+1)(\mu + \nu p),\ n \in X.$$

***Теорема* 1.1.** *При выполнении неравенства*

$$\frac{\lambda}{\mu + \nu p} < 1$$

марковский процесс $n(t)$ *эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид*:

$$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu + \nu p}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu + \nu p}\right).$$

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия.

1.2 *Изолированный карантинный узел.* Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток нестандартных заявок с параметром λ. В системе производится восстановление качеств нестандартных заявок (обслуживание). Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления и имеют показательное распределение с параметром μ. Порядок обслуживания заявок произвольный.

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом $n(t)$, где $n(t)$ – количество заявок в системе в момент времени t. Тогда $n(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \{n, n \ge 0\}$.

Предположим, что $\{p(n), n \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(n)\left[\lambda + \mu I_{\{n \ne 0\}}\right] =$$
$$= p(n-1)\lambda I_{\{n \ne 0\}} + p(n+1)\mu,\ n \in X.$$

***Теорема* 1.2.** *При выполнении неравенства*

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

марковский процесс $n(t)$ *эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид*:

$$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия.

2 Открытая сеть

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N узлов со структурой, описанной в пункте 1.1, и $(N+1)$-го узла со структурой, описанной в пункте 1.2. В сеть поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ.

Каждая заявка независимо от других заявок направляется в i-ый узел с вероятностью p_{0i} $\left(i = \overline{1, N}\right)$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1$.

Каждая заявка в i-ом узле проверяется на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром $\nu_i(n_i) = \nu_i / n_i$, $n_i \ne 0$, где n_i – число заявок в i-ом узле, ν_i – некоторая положительная постоянная $\left(i = \overline{1, N}\right)$.

В каждом из N узлов находится экспоненциальный прибор, времена обслуживания заявок прибором i-го узла независимы, не зависят от процесса поступления, проверки и имеют показательное распределение с параметром μ_i $\left(i = \overline{1, N}\right)$. Порядок обслуживания заявок произвольный. Каждая заявка после завершения обслуживания в i-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел с вероятностью p_{ij}, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} + p_{i0} = 1,\ i = \overline{1, N}\right)$. Каждая заявка после окончания проверки в i-ом узле с вероятностью p_i признается нестандартной и независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь $(N+1)$-го узла, а с вероятностью $1 - p_i$ признается стандартной и остается в i-ом узле.

В $(N+1)$-ом узле, который назовем карантином, осуществляется восстановление качеств (лечение) нестандартных заявок. Времена обслуживания заявок в $(N+1)$-ом узле независимы, не зависят от процессов поступления и имеют показательное распределение с параметром μ_{N+1}. Порядок обслуживания заявок произвольный. Каждая заявка после обслуживания в $(N+1)$-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь j-го узла с вероятностью p_{N+1j}, т. е. «вылечивается» и продолжает движение по сети, а с вероятностью p_{N+10} покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{N+1j} + p_{N+10} = 1\right)$.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{N+1}(t)\right)$, где $x_i(t)$ – число заявок в i-ом узле в момент времени t $\left(i = \overline{1, N+1}\right)$.

Процесс $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным пространством состояний

$$X = \left\{ x = \left(n_1, n_2, ..., n_{N+1}\right) : n_i \geq 0, i = \overline{1, N+1}\right\}.$$

Уравнения трафика имеют вид

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \frac{\mu_j}{\mu_j + \nu_j p_j} p_{ji} + \varepsilon_{N+1} p_{N+1i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\varepsilon_{N+1} = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \frac{\nu_j}{\mu_j + \nu_j p_j} p_j.$$

Введем следующие обозначения:

$$p_{0i}^* = p_{0i}, \quad p_{ji}^* = \frac{\mu_j}{\mu_j + \nu_j p_j} p_{ji},$$

$$p_{jN+1}^* = \frac{\nu_j p_j}{\mu_j + \nu_j p_j}, \quad p_{N+1i}^* = p_{N+1i}.$$

Будем предполагать, что матрица маршрутизации $P^* = \left(p_{ji}^*, i, j = \overline{0, N+1}\right)$, где $p_{00}^* = p_{0N+1}^* = 0$, неприводима. Система уравнений трафика имеет единственное положительное решение $\left(\varepsilon_i, i = \overline{1, N+1}\right)$, что можно доказать, записав уравнения трафика через введенные обозначения вероятностей переходов. В результате получаем систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [3].

Пусть $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$p(x)\left(\lambda + \sum_{i=1}^{N} \left(\mu_i + \nu_i p_i\right) I_{\{n_i \neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1} \neq 0\}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p(x - e_i) \lambda p_{0i} I_{\{n_i \neq 0\}} + \sum_{i=1}^{N+1} p(x + e_i) \mu_i p_{i0} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} p(x + e_i - e_{N+1}) \nu_i p_i I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p(x + e_i - e_j) \mu_i p_{ij} I_{\{n_j \neq 0\}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} p(x + e_{N+1} - e_i) \mu_{N+1} p_{N+1i} I_{\{n_i \neq 0\}}, \; x \in X.$$

Здесь e_i – единичный вектор размерности $N+1$ с единицей в i-ой позиции.

***Теорема* 2.1.** *Пусть для любых* $i = \overline{1, N}$ *выполняются неравенства*

$$\frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i p_i} < 1, \quad \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} < 1,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ *эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид*:

$$p(x) = p_1(x_1)\, p_2(x_2) \ldots p_{N+1}(x_{N+1}), \; x \in X,$$

где $p_i(x_i) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i p_i}\right)^{n_i} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i p_i}\right), \; i = \overline{1, N},$

$$p_{N+1}(x_{N+1}) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right)^{n_{N+1}} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right),$$

$(\varepsilon_i, i = \overline{1, N})$ *– решение системы уравнений трафика.*

Доказательство теоремы проводится стандартным образом: подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

Рассматриваемая модель является обобщением модели сети, исследуемой в [3], на случай наличия карантинного узла и проверки заявок на стандартность. Если не вводить проверку на стандартность, т. е. положить параметр ν_i равным нулю $\left(i = \overline{1, N}\right)$, то полученный результат совпадет с результатом, рассматриваемым в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дудовская*, *Ю.Е.* Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок / Ю.Е. Дудовская, О.В. Якубович // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 74–77.

2. *Дудовская*, *Ю.Е.* Исследование многорежимной сети массового обслуживания с абстрактным описанием состояний / Ю.Е. Дудовская, О.В. Якубович // Проблемы физики, математики и техники.– 2014. – № 1 (18). – С. 85 – 89.

3. *Jackson*, *J.R.* Jobshop-like Queueing Systems / J.R. Jackson // Manag. Sci. – 1963. – Vol. 10, № 1. – P. 131–142.

4. *Дудовская*, *Ю.Е.* Открытая марковская сеть массового обслуживания с «карантинным» узлом / Ю.Е. Дудовская, О.В. Якубович // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 5–10 сентября 2016 г. в 5 ч. / Ред. С.Г. Красовский. – Часть 4. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016. – С. 5–6.

5. *Якубович*, *О.В.* Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания сигналов / О.В. Якубович, Ю.Е Дудовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 71–74.

Поступила в редакцию 05.04.17.

Проблемы физики, математики и техники, № 2 (31), 2017

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННЫХ НАГРУЗКАХ

А.В. Яровая

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

FORCED VIBRATIONS OF CIRCULAR SANDWICH PLATES UNDER LOCAL SUDDENLY APPLIED LOADS

A.V. Yarovaya

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Рассмотрены осесимметричные поперечные колебания круглой упругой трехслойной пластины под действием локальных поверхностных, а также погонных силовых и моментных нагрузок. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной линии. В несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В сравнительно толстом легком заполнителе нормаль остается прямолинейной, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Аналитические решения получены с помощью разложения в ряды по системе собственных ортонормированных функций. Проведен их численный анализ.

Ключевые слова: *трехслойная круговая пластина*, *осесимметричные колебания*, *локальные внезапно приложенные нагрузки.*

Axisymmetric transverse vibrations of a circular elastic three-layer plate under the influence of local surface, force and torque loads are considered. The hypothesis of a broken normal is accepted for the kinematics description of asymmetrical on the thickness of package. Kirchhoff's hypotheses are valid in the carrier layers. In a comparatively thick lightweight aggregate, the normal remains straight, but rotates by some additional angle. Analytical solutions are obtained by expanding the series in terms of a system of proper orthonormal functions. Their numerical analysis is made.

Keywords: *three-layer circular plate*, *axisymmetric vibrations*, *local suddenly applied loads.*

Введение

Широкое применение в современных отраслях промышленности трехслойных элементов конструкций обуславливает необходимость разработки методов их расчета. В монографиях [1]–[4] приведены математические модели слоистых элементов конструкций, включающие постановки краевых задач и методы их расчета. Результаты, связанные с колебаниями стержней прямоугольного сечения и круговых трехслойных пластин, включая вязкоупругие, содержатся в работах [5]–[11]. Свободные колебания трехслойных пластин, вызванные терморадиационным ударом, рассмотрены в статьях [12], [13]. Динамическое и квазистатическое термосиловое нагружения круговой трехслойной оболочки исследованы в статьях [13], [14]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трехслойных стержней, пластин и цилиндрических оболочек рассмотрено в статьях [14]–[19]. Резонансные колебания круговых трехслойных пластин при равномерно распределенной нагрузке изучены в [20]. Здесь рассматриваются малые осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной круговой пластины, возбужденные локальными поверхностными нагрузками, погонными и моментными силовыми нагрузками.

1 Постановка начально-краевой задачи

Постановка задачи и ее решение приводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z (рисунок 1.1). Предполагается, что в тонких несущих слоях выполняются гипотезы Кирхгофа. Сравнительно толстый заполнитель считается легким, т. е. в нем пренебрегается работой касательных напряжений в тангенциальном направлении. Внешняя вертикальная нагрузка осесимметричная, т. е. не зависит от координаты φ: $q = q(r, t)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

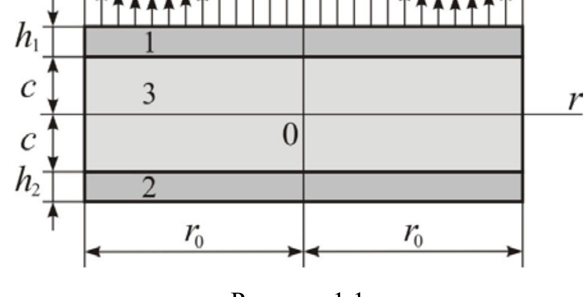


Рисунок 1.1

В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ, т. е. $u\,(r,\,t)$, $\psi\,(r,\,t)$, $u\,(r,\,t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластинки отнесены к ее радиусу r_0; силовые характеристики – к 1 Па; через h_k ($h_3 = 2c$) и ρ_k – обозначены толщина и плотность материала k-го слоя.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания круглой трехслойной пластины без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Гамильтона [4]:

$$L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w,_r) = 0;$$
$$L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w,_r) = 0;$$
$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w,_r) - M_0\ddot{w} = -q, \qquad (1.1)$$

где $M_0 = (\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \rho_3h_3)r_0^2$; коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_kK_k^+;$$
$$a_2 = c(h_1K_1^+ - h_2K_2^+);\quad K_k^+ \equiv K_k + \tfrac{4}{3}G_k;$$
$$a_3 = h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+;$$
$$a_4 = c^2\left(h_1K_1^+ + h_2K_2^+ + \tfrac{2}{3}cK_3^+\right);$$
$$a_5 = c\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2K_3^+\right];$$
$$a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ +$$
$$+h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3K_3^+;$$
$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2};$$
$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Задача определения функций $u\,(r,\,t)$, $\psi\,(r,\,t)$, $u\,(r,\,t)$ замыкается присоединением к (1.1) граничных и начальных условий

$$w(r,0) \equiv f(r),\quad \dot{w}(r,0) \equiv g(r). \qquad (1.2)$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластинки следует из (1.1) при $q = 0$. Ее решение рассмотрено в [4]. В результате построена система собственных ортонормированных функций $v_n\,(,\,r)$, которая для сплошных пластин имеет вид

$$v_n(\beta_n, r) \equiv \frac{1}{d_n}\left[J_0(\beta_nr) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}I_0(\beta_nr)\right], \qquad (1.3)$$

где β_n – собственные числа; J_0, I_0 – функция Бесселя и модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; d_n – нормировочные коэффициенты

$$d_n^2 = \int_0^1\left[J_0(\beta_nr) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}I_0(\beta_nr)\right]^2 rdr =$$
$$= \frac{1}{2}\left[J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n) + I_0^2(\beta_n) - I_1^2(\beta_n)\right] -$$
$$-\frac{J_0(\beta_n)}{\beta_n}\left[J_1(\beta_n) + \frac{I_1(\beta_n)J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}\right].$$

где J_1, I_1 – указанные ранее функции Бесселя первого порядка.

В результате для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластинки внешняя нагрузка $q\,(r,\,t)$ и искомое решение $u\,(r,\,t)$, $\psi\,(r,\,t)$, $w(r,\,t)$ представляются в виде разложений в следующие ряды:

$$q(r,t) = M_0\sum_{n=0}^{\infty} v_nq_n(t);$$
$$w(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_nT_n(t);$$
$$\psi(r,t) = b_2\sum_{n=0}^{\infty} \phi_nT_n(t);$$
$$u(r,t) = b_1\sum_{n=0}^{\infty} \phi_nT_n(t), \qquad (1.4)$$

где

$$\phi_n = \frac{\beta_n}{d_n}\left[J_1(\beta_n)r - J_1(\beta_nr) + \right.$$
$$\left. + \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}(I_1(\beta_n)r - I_1(\beta_nr))\right],$$
$$b_1 = \frac{a_3a_4 - a_2a_5}{a_1a_4 - a_2^2},\quad b_2 = \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{a_1a_4 - a_2^2}.$$

Алгебраические уравнения для определения собственных чисел β_n следуют из граничных условий. При заделке или шарнирном опирании контура пластины ($r = 1$) должны выполняться требования

$$u = \psi = w = w,_r = 0;$$
или $u = \psi = w = M_r = 0$.

Удовлетворяя по два последних из них с помощью разложений (1.4), получим следующие трансцендентные уравнения для нахождения собственных чисел

$$\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} = -\frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)};$$
$$\frac{J_0(\beta)}{a_7(\beta J_0(\beta) - J_1(\beta)) + a_8J_1(\beta)} =$$
$$= -\frac{I_0(\beta)}{a_7(\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)) + a_8I_1(\beta)}. \qquad (1.5)$$

После вычисления β_n собственные частоты колебаний ω_n будут

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \qquad (1.6)$$

где

$$a_{60} = h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^- +$$
$$+h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^- + \tfrac{2}{3}c^3K_3^-;$$

$$K_k^- \equiv K_k - \tfrac{2}{3}G_k;$$

$$a_7 = a_6 - a_2 b_1 - a_5 b_2,$$

$$a_8 = a_{60} + a_2 b_1 + a_5 b_2,$$

$$M^4 = \frac{M_0 a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

В качестве примера численно исследовано первое из уравнений (1.5), которое соответствует заделке контура пластины. Полученные первые 15 корней вычислены с точностью до 0,001 и сведены в таблицу 1.1.

Таблица 1.1 – Собственные числа при заделке контура пластины

Номер n	Собственное число β_n
0	3,196
1	6,306
2	9,439
3	12,577
4	15,716
5	18,856
6	21,997
7	25,138
8	28,279
9	31,420
10	34,561
11	37,702
12	40,844
13	43,985
14	47,126

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд $q_n(t)$ получим, умножив первое из соотношений в (1.4) на v_n и проинтегрировав по площади пластины. В силу ортонормированности системы собственных функций (1.3) имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0}\int_0^1 q(r,t)\, v_n r\, dr. \qquad (1.7)$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени $T_n(t)$ следует из третьего уравнения системы (1.1) после подстановки в него выражений (1.4) и использования линейной связи функций v_n, φ_n:

$$\ddot{T}_n + \omega^2 T_n = q_n. \qquad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.8) можно принять в виде

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n (t-\tau) q_n(\tau)\, d\tau. \qquad (1.9)$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из начальных условий движения (1.2)

$$A_n = \int_0^1 f(r) v_n r dr,\ B_n = \frac{1}{\omega_n}\int_0^1 g(r) v_n r dr, \qquad (1.10)$$

так как интеграл в (1.9) при $t = 0$ обращается в нуль.

2 Частные решения при вынужденных колебаниях

Рассмотрим несколько примеров локального внешнего осесимметричного силового воздействия на пластину. Задача, как правило, сводится к отысканию параметров $q_n(t)$ разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени $T_n(t)$.

Численные исследования проводились для защемленной по контуру пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт – Д16Т. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [4]. Собственные частоты колебаний ω_n вычислялись по формуле (1.6) с использованием собственных чисел из приведенной таблицы и геометрических параметров слоев $h_1 = h_2 = 0{,}01$, $c = 0{,}05$. Начальные условия (1.2) предполагались однородными $w(r,0) \equiv \dot{w}(r,0) \equiv 0$, что, в соответствии с (1.10), позволяет получить нулевые константы интегрирования $A_n = 0$, $B_n = 0$.

2.1. Предположим, что на рассматриваемую пластину действует внезапно приложенная динамическая поверхностная нагрузка, равномерно распределенная по кругу относительного радиуса $b \le 1$. Тогда ее аналитический вид можно представить с помощью функции Хевисайда нулевого порядка $H_0(b - r)$:

$$q(r,t) = q_0(t) H_0(b - r). \qquad (2.1)$$

Подставив нагрузку (2.1) в формулу (1.7) получим интегральное выражение для вычисления параметров разложения нагрузки в ряд $q_n(t)$:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n}\int_0^1 r H_0(b-r) \times \left(J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r)\right) dr.$$

После взятия интегралов от произведения функций Хевисайда и Бесселя, имеем

$$q_n(t) = \frac{q_0(t) b}{M_0 d_n \beta_n}\left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b)\right). \qquad (2.2)$$

После чего решение рассматриваемой задачи определяется соотношениями (1.4), а функция $T_n(t)$ вычисляется по формуле (1.9) с учетом коэффициентов (2). Для внезапной нагрузки с постоянной интенсивностью $q_0 = \text{const}$ имеем

$$T_n(t) = \frac{q_0 b}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2} \times \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b)\right)\left(1 - \cos(\omega_n t)\right). \qquad (2.3)$$

При $b = 1$ нагрузка распределена по всей поверхности пластинки.

Изменение прогиба (*а*) и сдвига в заполнителе (*б*) по радиусу пластины показаны на рисунке 2.2. Они вычислены с использованием формулы (2.3) в момент времени $t = \pi/\omega_0 = 0{,}0333$,

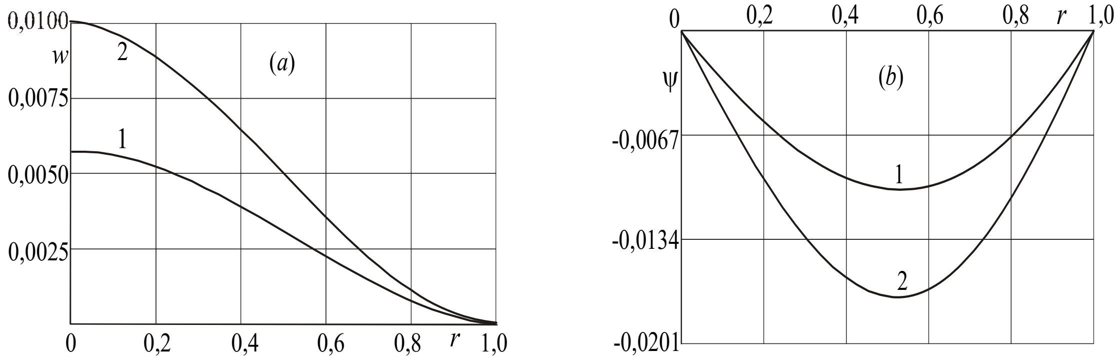


Рисунок 2.1

который соответствует максимальному значению функции (2.3) при основной собственной частоте колебаний ω_0. Кривые 1 получены при $b = 0,5$; 2 – $b = 1$, т. е. когда равномерно нагружена вся поверхность внешнего несущего слоя пластины.

При подсчете прогиба и сдвига по формулам (1.4) суммировались первые 8 членов ряда. Следует отметить хорошую сходимость этих рядов в данном случае. В их максимальные величины 92 последующих слагаемых суммарно вносят поправку менее 0,1 %. Однако в дальнейших числовых расчетах ограничение длины суммируемого ряда исследовано в каждом случае отдельно и приводится лишь конечный числовой результат.

2.2. Пусть на рассматриваемую круглую трехслойную пластину действует внезапно приложенная нагрузка, равномерно распределенная по кольцу, относительный радиус которого изменяется в пределах $a \le r \le b$. Тогда ее аналитический вид можно представить как разность двух нагрузок (2.1):

$$q(r,t) = q_0(t)(H_0(b-r) - H_0(r-a)). \quad (2.4)$$

Решение задачи представим в виде разности двух решений (2.2), (2.3). Тогда коэффициенты разложения нагрузки (2.4) в ряд по системе собственных функций будут

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n \beta_n}\left(bJ_1(\beta_n b) - aJ_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}(bI_1(\beta_n b) - aI_1(\beta_n a))\right).$$

После чего для стационарной динамической нагрузки $q_0 = \text{const}$ получим

$$T_n(t) = \frac{q_0(1-\cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2}\left(bJ_1(\beta_n b) - aJ_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}(bI_1(\beta_n b) - aI_1(\beta_n a))\right). \quad (2.5)$$

При $a = 0$ из (2.5) следует решение (2.3).

На рисунке 2.2 показано изменение формы и величины прогиба по мере продвижения кольцевого пятна нагрузки к контуру пластины. Толщина кольца принята $r = b - a = 0,25$; интенсивность нагрузки $q_0 = 7000$; момент времени $t = \pi / \omega_0$ соответствует максимальному значению функции (2.5) при основной собственной частоте ω_0. Кривая 1 – прогиб при воздействии нагрузки по кольцу $a = 0$, $b = 0,25$; 2 – $a = 0,25$, $b = 0,5$; 3 – $a = 0,5$, $b = 0,75$; 4 – $a = 0,75$, $b = 1$. Наименьший прогиб возникает при нагрузке с минимальной равнодействующей, т. е. когда пятно нагрузки расположено около центра пластины (1). Если нагрузка примыкает к контуру, то прогиб в центре пластины немногим больше, но существенно отличается по форме. Максимальный прогиб наблюдается при нагрузке, распределенной вдоль второй четверти радиуса (2).

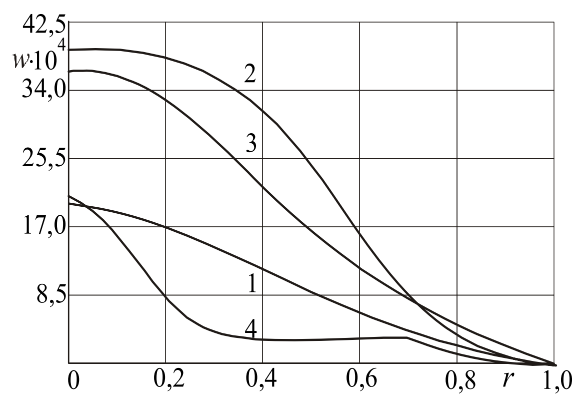


Рисунок 2.2

2.3. Рассмотрим круговую трехслойную пластину, на которую воздействует мгновенно приложенная вдоль окружности $r = a$ погонная сила постоянной интенсивности Q_0. Воспользуемся решением, полученным для распределенной по кольцу $a - d \le r \le a + d$ поверхностной нагрузки q_0. Введем в (2.5) замену $q_0 = Q_0 / 2d$ и устремим параметр d к нулю. После вычисления предела получим следующую функцию времени:

$$T_n(t) = \frac{Q_0 a\left(1-\cos(\omega_n t)\right)}{M_0 d_n \omega_n^2} \times \left(J_0(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n a)\right). \quad (2.6)$$

Функция (2.6) не описывает поведение пластины при приложении сосредоточенной силы в ее центре. В этом случае $a = 0$ и решение вырождается. Чтобы этого избежать, предположим, что равнодействующая погонной силы $Q = 2\pi a Q_0$ остается постоянной при изменении радиуса a окружности, вдоль которой она приложена. Это возможно, если интенсивность Q_0 будет переменной, компенсируя изменения a. Тогда

$$T_n(t) = \frac{Q\left(1-\cos(\omega_n t)\right)}{2\pi M_0 d_n \omega_n^2}\left(J_0(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n a)\right).$$

Отсюда, при $a = 0$, получаем функцию времени, соответствующую приложению силы в центре пластины

$$T_n(t) = \frac{Q\left(1-\cos(\omega_n t)\right)}{2\pi M_0 d_n \omega_n^2}\left(1 - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}\right). \qquad (2.7)$$

Кривые на рисунке 2.3 отражают изменение максимального прогиба пластины ($r = 0$) во времени t при различных радиусах окружности приложения нагрузки с равнодействующей $Q = 7$ кН: 1 – $a = 0$; 2 – $a = 0{,}2$; 3 – $a = 0{,}4$; 4 – $a = 0{,}6$; 5 – $a = 0{,}8$. Колебательный процесс здесь носит отнулевой характер.

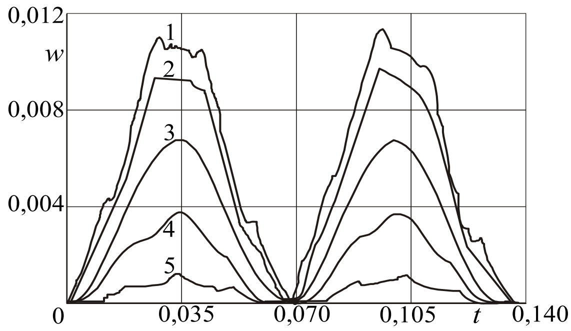


Рисунок 2.3

2.4. Пусть на исследуемую пластину воздействуют внезапно приложенные погонные моменты, распределенные по окружности $r = a$. Для решения задачи воспользуемся суммой решений (2.6) для двух погонных сил, направленных в противоположные стороны и действующих по окружностям радиусов $r = a - d$ и $r = a + d$. В этой сумме произведем замену $Q_0 = m_0 / 2d$ и устремим d к нулю. После вычисления предела получим

$$T_n(t) = \frac{m_0\left(1-\cos(\omega_n t)\right)}{M_0 d_n \omega_n^2} \times$$
$$\times\left(J_0(\beta_n a) - a\beta_n J_1(\beta_n a) - \right. \qquad (2.8)$$
$$\left. - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}\left(I_0(\beta_n a) + a\beta_n I_1(\beta_n a)\right)\right).$$

Функция (2.8) формально описывает случай воздействия сосредоточенного момента, приложенного и в центре пластины. При $a = 0$ решение будет следующим

$$T_n(t) = \frac{m_0\left(1-\cos(\omega_n t)\right)}{M_0 d_n \omega_n^2}\left(1 - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}\right). \qquad (2.9)$$

Теперь примем постоянство равнодействующей внезапно приложенных погонных моментов $m = 2\pi a m_0$ при изменении радиуса окружности, вдоль которой они действуют. Интенсивность m_0 будет при этом переменной, компенсируя изменения a. Тогда из (2.9), с помощью замены $m_0 = m / (2\pi a)$, получим

$$T_n(t) = \frac{m\left(1-\cos(\omega_n t)\right)}{2\pi M_0 d_n \omega_n^2}\left(\frac{J_0(\beta_n a)}{a} - \right.$$
$$\left. - \beta_n J_1(\beta_n a) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}\left(\frac{I_0(\beta_n a)}{a} + \beta_n I_1(\beta_n a)\right)\right). \qquad (2.10)$$

Решение (2.10) справедливо всюду, кроме центра пластины, где $a = 0$.

На рисунке 2.4 показано изменение прогиба вдоль радиуса рассматриваемой пластины при различных радиусах окружности приложения погонных моментов с постоянной равнодействующей ($m_0 = 7$ кН м): 1 – $a = 0{,}25$, 2 – $a = 0{,}5$, 3 – $a = 0{,}75$. Максимальные по модулю прогибы (1) наблюдаются при расположении моментной окружности ближе к центру пластины. По мере ее продвижения к контуру значения этих параметров убывают, и происходит смена фазы колебаний. При совпадении моментной окружности с контуром пластины прогиб обращается в ноль, так как динамическое воздействие рассматриваемой нагрузки компенсируется реакцией в заделке.

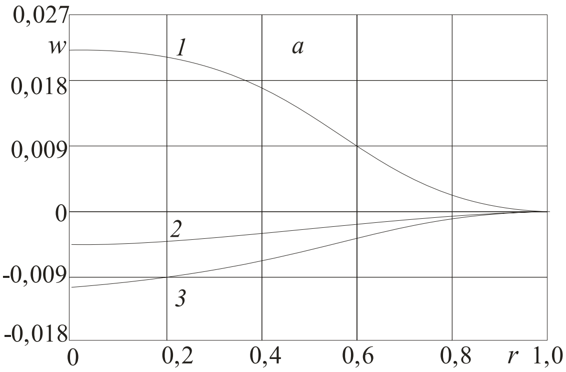


Рисунок 2.4

Заключение

Полученные аналитические решения начально-краевых задач и их численное исследование могут быть использованы в расчетной практике проектных организаций при исследовании вынужденных поперечных колебаний трехслойных круговых пластин с легким заполнителем, вызванных мгновенно приложенными локальными осесимметричными нагрузками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин, В.В.* Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

2. *Головко*, *К.Г.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головко, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.

3. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 380 с.

4. *Горшков*, *А.Г.* Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.

5. *The oblique impact response of composite sandwich plates* / I. Ivañez, M.M. Moure, S.K. Garcia-Castillo, S. Sanchez-Saez // Composite Structures. – 2015. – № 133. – P. 1127–1136.

6. *Горшков*, *А.Г.* Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Изв РАН. МТТ. – 2000, № 6. – С. 91–98.

7. *Starovoitov*, *E.I.* Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39, № 8. – P. 945–952.

8. *Горшков*, *А.Г.* Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

9. *Starovoitov*, *E.I.* Vibration of sandwich rod under local and impulsive forces / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 809–816.

10. *Старовойтов*, *Э.И.* Колебания круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, В.Д. Кубенко, Д.В. Тарлаковский // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2009. – № 2. – С. 16–19.

11. *Горшков*, *А.Г.* Колебания круглой линейно-вязкоупругой трехслойной пластинки / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Проблемы прочности. – 2001. – № 3. – С. 100–107.

12. *Starovoitov*, *E.I.* Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. − 2011. − Vol. 47, № 5. – P. 580–589.

13. *Leonenko*, *D.V.* Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47, № 1. – P. 111–118.

14. *Kuznetsova*, *E.L.* Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 50, № 3. – P. 359–366.

15. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

16. *Leonenko*, *D.V.* Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.

17. Старовойтов, *Э.И.* Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.

18. *Старовойтов*, *Э.И.* Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

19. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

20. *Яровая*, *А.В.* Резонансные воздействия на круговые трехслойные пластины / А.В. Яровая // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2003. – № 4. – С. 62–66.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*проект* Т16Р-010).

Поступила в редакцию 18.05.17.

Проблемы физики, математики и техники, № 2 (31), 2017

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.722.2

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ

Н.И. Листопад[1], Ю.И. Воротницкий[2], В.В. Бортновский[1], А.А. Хайдер[1]

[1]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*, *Минск*
[2]*Белорусский государственный университет*, *Минск*

MULTI-CRITERIAL ROUTING OF INFORMATION FLOWS

N.I. Listopad[1], Y.I. Vorotnitsky[2], V.V. Bortnovsky[1], A.A. Hayder[1]

[1]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics*, *Minsk*
[2]*Belarusian State University*, *Minsk*

Маршрутизация информационных потоков традиционно формулируется как оптимизационная задача поиска кратчайшего пути. В данной работе рассматривается многокритериальная маршрутизация на основе комплексного весового коэффициента. Показано, как данный подход может быть использован для разработки двух эвристических алгоритмов для задач поиска оптимального пути с минимальной задержкой, минимальной вариации задержки, обеспечением заданной полосы пропускания, минимальной вероятностью потерь и минимальной стоимостью передачи информации.

Ключевые слова: *многокритериальная маршрутизация*, *комплексный весовой коэффициент*, *задержка*, *вариации задержки*, *вероятность потерь*, *полоса пропускания*, *кратчайший путь*, *алгоритм Дейкстры*, *стоимость передачи информации.*

Traditionally, path selection within routing is formulated as the shortest path optimization problem. In this paper, multi-criteria routing based on a mixed weight is considered. It is shown how this approach can be used to develop two heuristic algorithms for searching the optimal path with minimum delay, minimum delay variation, providing the given bandwidth, minimum loss probability and minimum cost of information transmission.

Keywords: *multi-criteria routing*, *mixed weight*, *delay*, *delay variation*, *loss probability*, *bandwidth*, *shortest path*, *Dijkstra's Algorithm*, *cost of information transmission.*

Введение

Маршрутизация информационных потоков традиционно формулируется как оптимизационная задача поиска кратчайшего пути. Целевая функция может быть любой из множества разнообразных параметров, таких как количество узлов, величины задержки, стоимости и др. [1]. Отдельной проблемой маршрутизации является выбор оптимального пути при ограничениях по задержке и по стоимости, так как требования по минимизации задержки являются очень распространенными для многих мультимедийных приложений.

В работе [1] исследуется проблема поиска оптимальных маршрутов на графе мультисервисной телекоммуникационной сети. Для данных сетей, кроме полосы пропускания, должны приниматься во внимание такие параметры качества обслуживания (QoS), как потери пакетов, задержка пакетов, вариация времени задержки (джиттер). Задачу маршрутизации в мультисервисных сетях предлагается решать на основе критериев, учитывающих перечисленные параметры согласно требованиям конкретных приложений. Эта задача сформулирована как многокритериальная задача поиска маршрута с минимальной стоимостью, причем поиск выполняется только на подмножестве осуществимых путей, удовлетворяющих ограничениям на параметры качества сервиса. В работе предложена модификация алгоритма Дейкстры, которая позволяет осуществлять многокритериальный поиск оптимального маршрута с учетом ограничений на каждый критерий в отдельности, а также в случае, когда стоимость маршрута неаддитивна.

Важной проблемой, с которой столкнулись авторы статьи [1], это выбор весовых коэффициентов, с помощью которых осуществляется свертка параметров, обеспечивающих заданные требования качества обслуживания (QoS), в комплексный коэффициент, в соответствии с которым и производится выбор оптимального пути.

В работе [2] представлен алгоритм поиска пути, для которого установлена минимальная стоимость и задержка передачи информации (Delay-Constrained Least-Cost – DCLC – path). Т. е., рассматривается задача двухкритериальной маршрутизации, где в качестве оптимизационной функции выбраны два параметра: величина задержки в передаче информации и стоимость.

Рассмотрим данный вопрос более подробно. Пусть задана сеть в виде графа, у которой для каждой дуги, описывающей каналы передачи информации, определены величины задержки и стоимость. При этом два вышеназванных параметра свернуты в один с помощью единого комплексного весового коэффициента. Затем, используя данный коэффициент, применяется алгоритм Дейкстры для поиска кратчайшего пути.

1 Проблема поиска кратчайшего пути с наименьшей стоимостью

Любая сеть может быть представлена направленным граф $G(V, E)$, где V есть множество узлов, и E есть множество каналов связи между ними. Предположим, что $N = [V]$, и $M = [E]$.

Вес w определяется как неотрицательное вещественное число $w(e)$, описывающее каждый канал связи, т. е. $W : E \to R_0^+$. В частности, вес $d : E \to R_0^+$ называется задержкой, в то время как $c : E \to R_0^+$ называется стоимостью. Путь является конечная последовательность не повторяемых узлов $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ таких, что для $0 \le i < k$ существует связь от v_1 до v_{i+1}, т. е. $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Канал $e \in p$ означает, что p проходит через канал связи e. Вес w, как задержка или стоимость, аддитивны, если вес пути p является суммой весов всех составляющих каналов связи вдоль этого пути,

$$w(p) = \sum_{e \in p} w(e). \qquad (1.1)$$

В частности, задержка и стоимость пути p задаются двумя ниже представленными уравнениями:

$$d(p) = \sum_{e \in p} d(e), \qquad (1.2)$$

$$c(p) = \sum_{e \in p} c(e). \qquad (1.3)$$

В общем смысле задержка по каналу связи есть среднее время передачи по этому каналу, в то время как стоимость может не взыматься при передаче сообщения по этому каналу.

Приведем несколько определений [2].

***Определение* 1.1.** *Заданы сеть* $G(V, E)$, *источник* $s \in V$ *и узел назначения* $t \in V$, *заданы задержка и стоимость каждого канала связи*, *и ограничение по задержке* – C_d.

Необходимо решить задачу поиска кратчайшего пути от s до t при минимальной стоимости с учетом следующих ограничений:

(i) $d(p) \le C_d$;

(ii) c $(p) \le C(q)$ *для любого пути q от* s *до t*, *что удовлетворяет* $d(p) \le C_d$;

(iii) *не существует пути q от s до t*, *для которого* $c(p) = c(q)$, *в тоже время* $d(p) > d(q)$.

Следует отметить, что третье требование не является обязательным при решении задачи поиска оптимального пути при минимальной стоимости. Оно введено для того случая, когда возможно существования более одного решения для стандартной задачи. Для удобства, путь, который по крайней мере удовлетворяет первому требованию в приведенном выше определении, называется допустимым решением (или реальный путь); путь, который удовлетворяет всем трем требованиям, называется оптимальным решением (или оптимальный путь).

Следующее определения и условные обозначения необходимы для описания алгоритмов, которые будут предложены ниже.

***Определение* 1.2.** *Даны два аддитивных веса* w_1 *и* w_2, *а также аддитивный вес*

$$w = w_1(e) + \alpha w_2(e)$$

означает, *что для любого канала связи*

$$w(e) = w_1(e) + \alpha w_2(e). \qquad (1.4)$$

Очевидно, что комплексный вес двух аддитивных весов также является аддитивным.

***Определение* 1.3**. *Заданы узел источника информации s и узел назначения t*, *а также весовой коэффициент w*. *Это определяет функцию* (*или процедуру*) Dijk (w), *которая позволяет найти кратчайший путь w от s до t с помощью алгоритма Дейкстры. В частности*, *это эквивалентно следующему. Пусть на пути* p_d = Dijk (d) *задержка минимальная* (LD *путь*), *а путь* p_c = Dijk (c) *имеет минимальную стоимость* (LC *путь*) *между s и t*. *Нетрудно увидеть*, *что соотношения* $d(p_d) \le d(p_c)$ и $c(p_d) \ge c(p_c)$ *выполняются всегда*.

Другая функция, которая будет использоваться в наших алгоритмах, это ModiDijk (c, d). Если существует несколько путей с различными задержками от s до t, функции ModiDijk (c, d) выберет тот из них, который имеет минимальную задержку. Это может быть сделано с помощью модифицированного алгоритма Дейкстры.

2 Идея единого комплексного весового коэффициента

Основная идея предлагаемых алгоритмов состоит в решении задачи с помощью объединения требования по задержке и стоимости посредством единого комплексного весового коэффициента и затем, используя алгоритм Дейкстры, в нахождении подходящего (кратчайшего) пути.

Рассмотрим проблему на простейших примерах, рисунок 2.1, где необходимо найти кратчайший путь от s до t с величиной задержки, равной 8, и минимальной стоимостью – так называемый DCLC путь. Теперь, решая эту задачу вручную, требуется проверить все четыре пути между s и t. Легко определить, что LC путем является путь s–u–t, который имеет задержку 9 и таким образом является недопустимым. Путем LD является путь s–v–t, который имеет задержку 5 и стоимость 24. Хотя этот LD путь осуществим, он не является оптимальным решением, так как величина задержки не минимальна

Введем комплексный весовой коэффициент вес $w = d + \alpha c$, который объединяет в себя задержку и стоимость. Вместо коэффициента d, определяющего величину задержки в передаче информации, могут быть использованы и весовые коэффициенты, определяющие другие параметры качества обслуживания, например, джиттер, полосу пропускания, вероятность потерь пакетов. Например, если будем рассматривать джиттер и стоимость, то коэффициент $w = j + \alpha c$, где j – величина джиттера. Аналогичные выражения можно записать и для других параметров, характеризующих качества обслуживания.

Покажем на примере комплексного коэффициента, объединяющего в себе задержку и стоимость, как это можно реализовать на практике.

Пусть $\alpha = 0.5$, то весовой коэффициент w будет ассоциироваться с путем, найденным с помощью алгоритма Дейкстры и показанным на рисунке 2.2 жирной линией: s–u–v–t. Этот путь имеет задержку 8 и стоимость 16, и оказывается оптимальным.

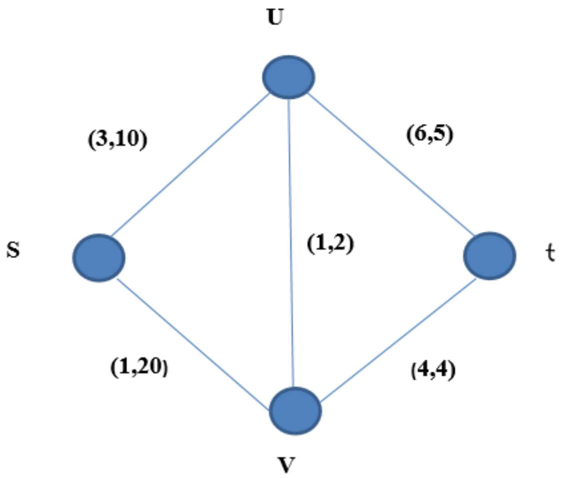


Рисунок 2.1 – Задача поиска кротчайшего пути от s к t ,с минимальной стоимостью и минимальной задержкой, не превышающей 8

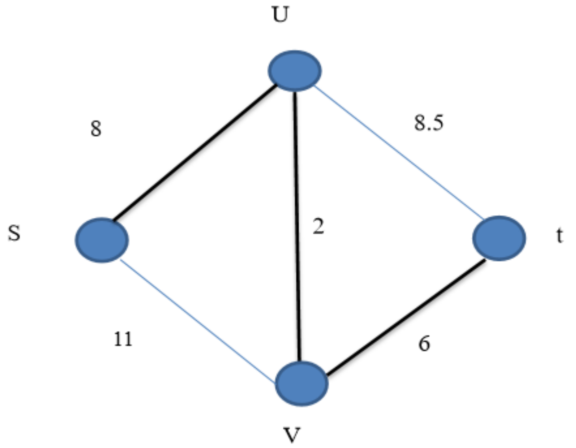


Рисунок 2.2 – Комплексный коэффициенты w при α = 0.5. Кратчайший путь s–u–v–t: задержка = 8, стоимость = 16

Этот пример показывает, что выбор соответствующего параметра α для построения комплексного весового коэффициента w, сводит DCLC задачу к задаче поиска кратчайшего пути, которая может быть легко решена с помощью алгоритма Дейкстры.

Ключевым вопросом для этой идеи является то, как выбрать параметр α для построения единого комплексного весового коэффициента w. Случайно выбранное значение α может привести к любым самым разнообразным решениям. Например, при α = 0,2 самым коротким w становится s–v–t (LD) путь. В то время как при α = 2 кратчайшим путем становится путь LC – s–u–t.

3 Эвристические алгоритмы для DCLC задачи

В при решении DCLC задачи основное внимание будет сосредоточено на поиске возможных решений. Рассмотрим базовый алгоритм, который является основой для двух предлагаемых итеративных алгоритмов.

Как показано ранее, первостепенное значение в построении единого комплексного весового коэффициента – это выбор α параметра.

Запишем выражение для α, взятое из [2]:

$$\alpha = \frac{c_d - d(p)}{c(p) - c(q)}. \qquad (3.1)$$

Алгоритм, решающий DCLC задачу, приведен на рисунке 3.1.

Алгоритм DCLC очень простой и позволяет быстро находить кратчайший путь. Рассмотрим, как этот алгоритм можно улучшить. Одно из улучшений – это вычисление параметра альфа.

После получения осуществимого пути, который лучше, чем LD путь, параметр альфа может быть вычислен следующим образом:

$$\alpha = \frac{c_d - d(p_d)}{c(p_d) - c(q)}. \qquad (3.2)$$

Заменяя $c(p)$ на $c(p_d)$ и $d(p)$ на $d(p_d)$ соответственно, получаем новый параметр альфа, который больше, чем предыдущий. Таким образом, возможно получение лучшего решения.

Алгоритм, реализующий выражение (3.2), назван DCLC-A алгоритмом и представлен на рисунке 3.2.

Рассмотрим примеры применения рассмотренных выше алгоритмов.

На рисунке 3.3 показано решение задачи поиска кратчайшего пути с помощью DCLC алгоритма. Итак, требуется найти DCLC путь от узла 1 к узлу 6 при условии, что величина задержки не должна превышать 12. Легко увидеть, что LD путь (пусть с минимальной задержкой) является P_d = [1–3–6], в то время как LC (путь с минимальной стоимостью) путь P_c = [1–4–6]. Таким образом, имеем $d(P_d) = 2$, $c(P_d) = 28$, $d(P_c) = 18$ и $c(P_c) = 2$. Используя более точный алгоритм, оптимальное решение задачи – это путь 1–4–5–6, который имеет задержку 10 и стоимость 6. Когда основной алгоритм DCLC используется, он сначала находит путь LC и обозначает его как путь q. Поскольку путь LC является недопустимым, алгоритм продолжает поиск LD пути и помещает его во множество путей P.

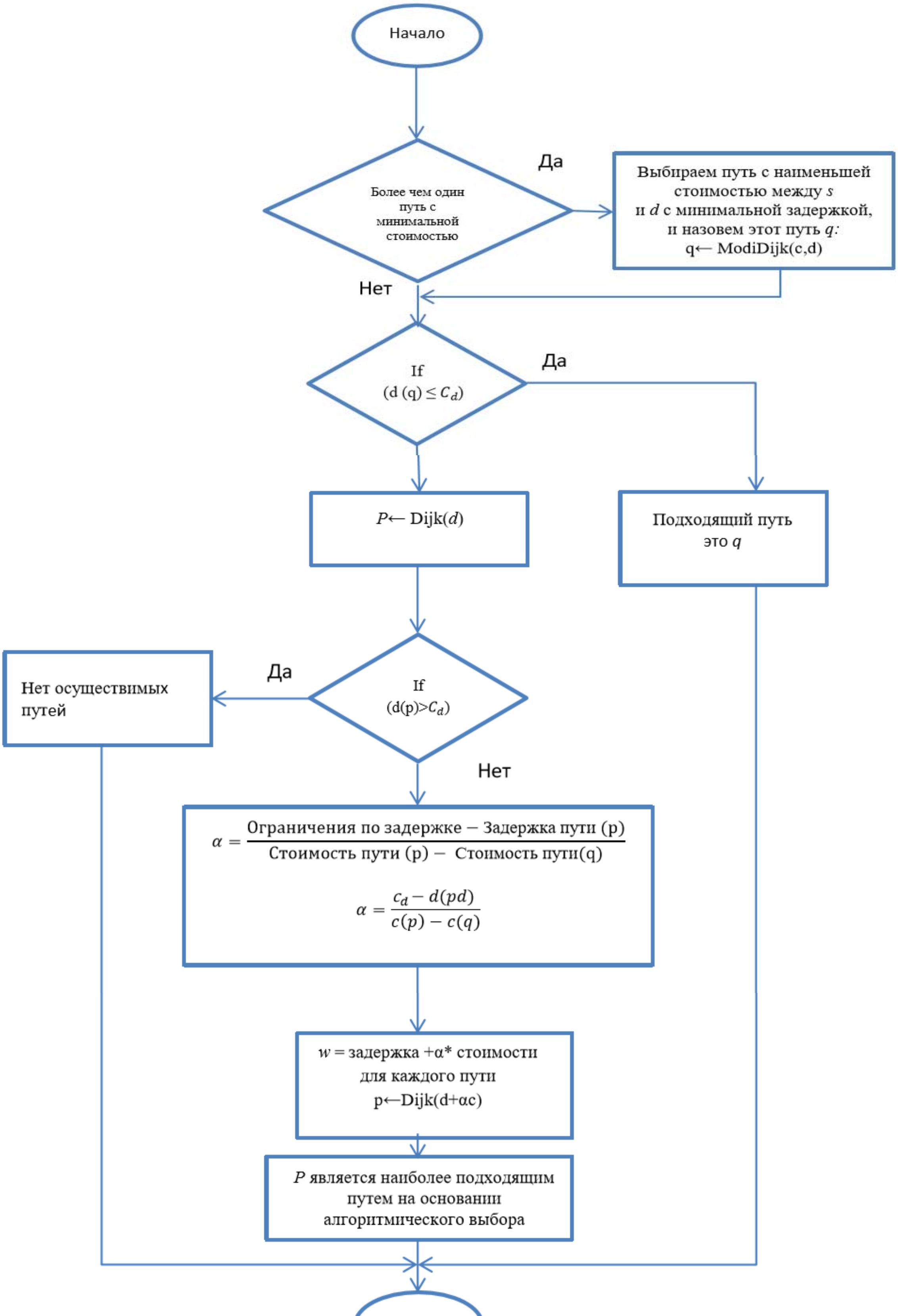


Рисунок 3.1 – Алгоритм DCLC

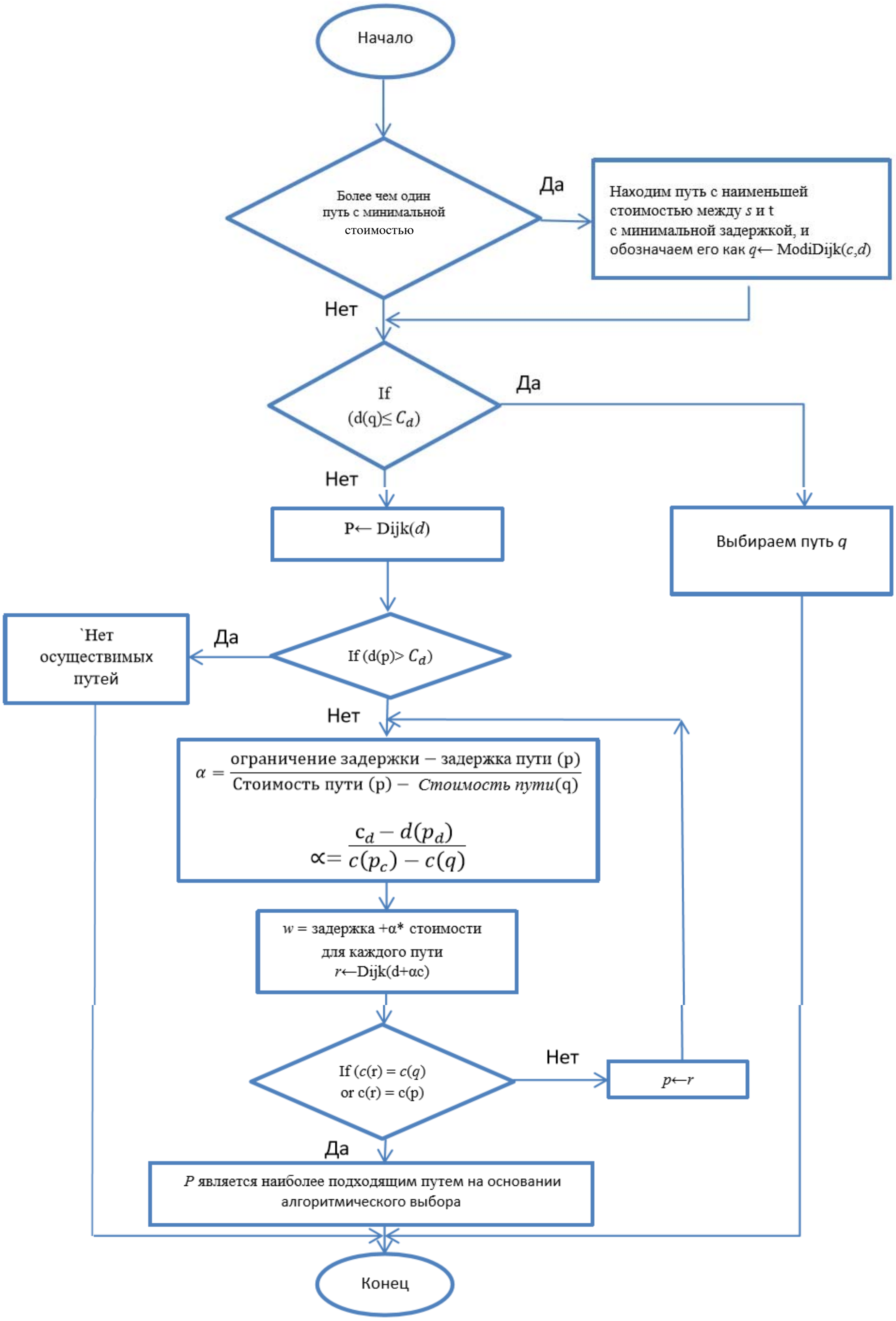


Рисунок 3.2 – Алгоритм DCLC-A

Так как путь LD является осуществимым, далее продолжается процедура вычисления параметра альфа из уравнения (6), в данном случае $\alpha = 5 / 13$.Таким образом, для каждого канала связи (на рисунке это дуги) вычисляется комплексный весовой коэффициент, с помощью которого пересчитываются задержки и стоимости, как показано на рисунке 3.4. Самый короткий путь от узла 1 к узлу 6, который также является окончательным решением алгоритма DCLC, – это путь 1–3–5–6. Однако это решение, которое имеет задержку 3 и стоимость 16 и лучше, чем путь LC, все же не всегда является оптимальным.

Рассмотрим теперь процедуру самого DCLC-A алгоритма. Как было показано выше, этот алгоритм состоит из трех итераций. Первая итерация базируется на алгоритме DCLC и показана на рисунке 3.4. После нахождения LC пути (q) и LD пути (p) алгоритм входит в итерационную процедуру. В каждой итерации параметр α вычисляется по формуле (3.2) для построения комплексного весового коэффициента α, а затем находится соответствующий кратчайший путь. Для первой итерации $\alpha = 5 / 13$ и $r = [1–3–5–6]$.

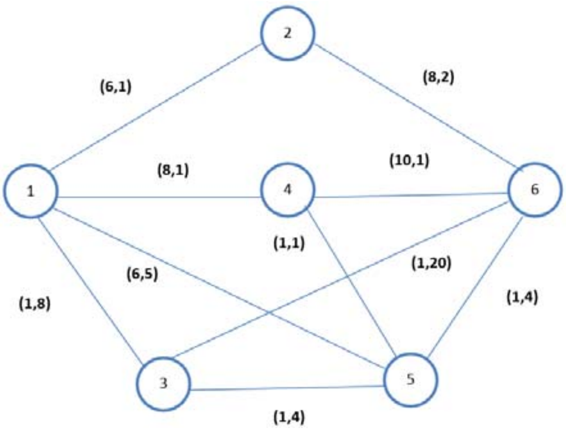


Рисунок 3.3 – Поиск оптимального пути от узла 1 к узлу 6 с задержкой, равной 12

Если r лучше, чем p, p заменяется на r во второй итерации, и вычисляется новый параметр альфа с помощью формулы (3.2):

$$\alpha = (12 – 3) / (16 – 2) = 9 / 14.$$

Соответствующие комплексные весовые коэффициенты показаны на рисунке 3.5 и самый короткий путь $r = [1–5–6]$.

Далее, в соответствии с алгоритмом, p заменяется на r в третьей итерации, параметр α становится равным $\alpha = (12 / 7) / (9 – 2) = (5 / 7)$, и кратчайшим путем будет путь 1–5–6.

Поскольку получен тот же кратчайший путь, как и на предыдущей итерации, алгоритм завершает свою работу. Таким образом, окончательное решение 1–5–6, которое имеет задержку 7 и стоимость 9 (расчет производится на основании исходных данных, представленных на рисунке 3.3).

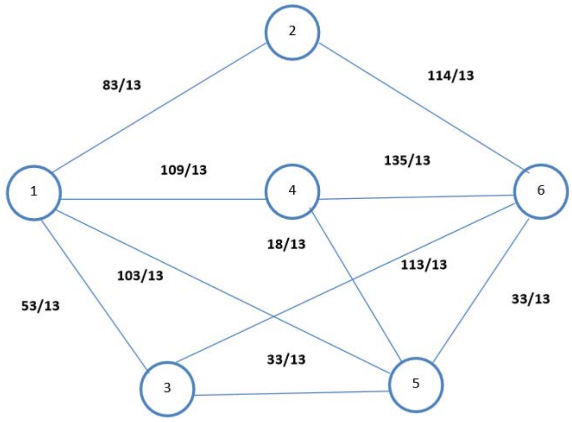


Рисунок 3.4 – Кратчайший пут 1–3–5–6 найден с помощью алгоритма DCLC
(этот же путь находится после первой итерации DCLC-A алгоритма)

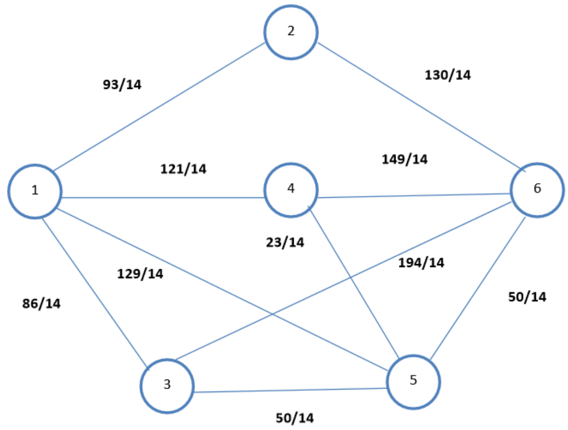


Рисунок 3.5 – Кратчайший путь 1–5–6 после второй итерации

Описанная выше процедура поиска кратчайшего пути при минимальной стоимости передачи информации может быть применена и для других параметров обеспечения заданного качества обслуживания: джиттер-стоимость; вероятность потерь пакетов – стоимость. При этом необходимо учитывать, что те пути, пропускная способность которых меньше заданной, должны быть исключены из рассмотрения.

Выбор кратчайшего пути при многокритериальных требованиях (задержка, вариация задержки, вероятность потерь пакетов при минимальной стоимости) может быть произведен следующим образом. После исключения из рассмотрения путей, имеющих пропускную способность меньше заданной, с помощью DCLC-A алгоритма осуществляется поиск кратчайшего пути отдельно по каждому из критериев: задержка-стоимость; джиттер-стоимость, вероятность потерь – стоимость. Из полученных на всех итерациях работы алгоритма промежуточных путей выбирается тот путь, который является общим для всех критериев. Для одного из критериев этот путь может быть вычислен уже на первой итерации, для другого – на последней и т. д. Если общих путей с учетом всех итераций найти не удается, то многокритериальная задача не имеет решения, и поиск такого решения может быть возобновлен после введения новых ограничений.

Заключение

Алгоритмы выбора пути в протоколе маршрутизации в высокоскоростных сетях должны быть очень адаптивными с точки зрения минимизации времени настройки. Они также должны быть способны найти высококачественные решения для обеспечения наиболее эффективного использования сетевых ресурсов.

Идея комплексного весового коэффициента была предложена для того, чтобы решать задачи QoS одноадресной маршрутизации. Данный подход может быть использован для разработки эвристических алгоритмов для задач поиска оптимального пути с минимальной задержкой, минимальной вариации задержки, обеспечением заданной полосы пропускания, минимальной вероятностью потерь и минимальной стоимостью передачи информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Листопад*, *Н.И.* Оптимальная маршрутизация в мультисервисных сетях телекоммуникаций на основе модифицированного алгоритма Дейкстры / Н.И. Листопад, Ю.И. Воротницкий, А.А. Хайдер // Вестник БГУ. Серия 1. – 2015. – № 1. – С. 70–76.

2. *Mahmoud*, *W.A.* A Proposal Algorithm to Solve Delay Constraint Least Cost Optimization Problem / W.A. Mahmoud, D.J. Kadhim // Journal of Engineering. University of Baghdad – 2013. – Vol. 19, № 1. – P. 155–160.

Поступила в редакцию 14.04.17.

УДК 510.644

О СУЩЕСТВОВАНИИ БИНАРНЫХ С-КОДОВ ДЛИНЫ $N = 32$ С ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ПИК-ФАКТОРА СПЕКТРА УОЛША – АДАМАРА

А.В. Соколов, И.В. Цевух

Одесский национальный политехнический университет

ON THE EXISTENCE OF BINARY C-CODES OF LENGTH $N = 32$ WITH A PREDETERMINED VALUE OF PAPR OF WALSH – HADAMARD SPECTRUM

A.V. Sokolov, I.V. Tsevukh

Odessa National Polytechnic University

Проведена спектральная классификация последовательностей длины $N = 32$ в соответствии со структурой и пик-фактором их спектра Уолша – Адамара в результате чего выделено 40 различных видов спектральных наборов. Рассчитаны предельно достижимые мощности С-кодов с заданным значением пик-фактора. Учитывая взаимосвязь пик-фактора спектра Уолша – Адамара и расстояния нелинейности двоичной последовательности длины $N = 32$, установлены мощности классов данных последовательностей, обладающих заданным значением расстояния нелинейности.

Ключевые слова: *преобразование Уолша – Адамара*, *пик-фактор*, *расстояние нелинейности.*

The spectral classification of sequences of length $N = 32$ in accordance with the structure and the value of the PAPR (Peak-to-Average Power Ratio) of Walsh – Hadamard spectrum resulting in 40 different spectral sets was performed. The maximal achievable cardinality of C-codes with a predetermined value of PAPR was calculated. Taking into account the interconnection between PAPR value of the Walsh – Hadamard spectrum and nonlinearity distance of binary sequence of length $N = 32$, the cardinalities of classes of sequences with a determined value of nonlinearity distance were found.

Keywords: *Walsh – Hadamard transform*, *PAPR*, *nonlinearity distance.*

Памяти д.т.н, проф.
Михаила Ивановича Мазуркова

Введение

Дальнейшее развитие беспроводных сетей передачи данных, в частности, четвертого и пятого поколений во многом связывают с совершенствованием и развитием технологии кодового разделения каналов CDMA. В качестве своего базиса технология кодового разделения каналов использует систему ортогональных функций, в роли которых могут выступать специально подобранные кодовые последовательности.

Одной из перспективных модификаций технологии CDMA является MC-CDMA (Multi Code Code Division Multiple Access), где в качестве набора ортогональных функций выступают функции Уолша [1].

В системе MC-CDMA вектор бинарных данных $B = (b_i),\ i = \overline{0, N-1}$ подвергается ортогональному преобразованию. Каждый бит данных b_i изменяет знак одной из N ортогональных функций дискретного времени $h_i(t)$, а выход является суммой этих N модулированных функций. Тогда передаваемый сигнал представляет собой спектр Уолша – Адамара последовательности B

$$S_B(t) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i h_i(t).$$

Таким образом, выходной сигнал можно представить как произведение вектора B, составленного из бит данных, поступивших от каждого пользователя и матрицы Адамара H

$$S = BH,$$

где матрица Адамара H формируется в соответствии со следующим рекуррентным правилом [2]

$$H_{2^k} = \begin{bmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{bmatrix},\quad H_1 = [1].$$

Обладая многочисленными преимуществами, такими как высокая помехоустойчивость, гибкость распределения пропускной способности системы среди абонентов, экономичность и хорошая электромагнитная совместимость, технология MC-CDMA не лишена недостатков. Один из самых значимых недостатков технологии MC-CDMA заключается в высоких значениях пик-фактора применяемых в ней сигналов. Данное обстоятельство приводит к неэффективному использованию мощности передатчика, нелинейным искажениям и, как следствие, удорожанию стоимости применяемого оборудования при снижении потенциально достижимой помехоустойчивости.

Пик-фактор применяемых в системе сигналов определяется величиной пиковых значений трансформант Уолша – Адамара [3]

$$\kappa = \frac{P_{\max}}{P_{cp}} = \frac{1}{N}\max_t \left\{ \left| S_B(t) \right|^2 \right\}, \qquad (0.1)$$

где $P_{\max}$ – пиковая мощность сигнала $S_B(t)$; P_{cp} – средняя мощность сигнала $S_B(t)$; N – длина сигнала $S_B(t)$.

В настоящий момент предложено значительное количество методов борьбы с высоким значением пик-фактора сигналов, представляющих собой трансформанты преобразования Уолша – Адамара, однако, наиболее перспективным является метод, основанный на использовании строго обоснованного математического аппарата, который позволяет снизить значения пик-фактора – применение С-кодов.

1 С-код

***Определение* 1.1** [3]. С-кодом, или кодом постоянной амплитуды называется множество кодовых слов, обладающих заданным, фиксированным для каждого кодового слова значением пик-фактора κ.

Применение С-кода сводится к замене подаваемых на вход кодера сообщений b_j длины m на такие последовательности c_i длины n, которые обладали бы наименьшим значением пик-фактора κ (рисунок 1.1).

Одним из возможных базисов для построения С-кодов являются бент-последовательности, обладающие равномерным по модулю спектром Уолша – Адамара. Тем не менее, бент-последовательности существуют только для длин $N = 2^k$, $k = 2,4,6,8,...$ [4], в то время как практика использования технологии MC-CDMA требует большего ассортимента различных длин сигналов и, соответственно, реализуемого числа кодовых каналов.

В работах [5]–[7] построены полные множества векторов длин $N = 20$, $N = 24$ и $N = 28$, обладающих минимальным значением пик-фактора. В работе [8] разработан регулярный метод синтеза последовательностей длины $N = 32$, обладающих минимальным значением пик-фактора.

Тем не менее, с практической точки зрения, востребованными оказываются кодовые слова С-кода, гарантировано обладающие значением пик-фактора, не превосходящим некоторую заданную величину, что диктует необходимость исследования возможности построения С-кодов с заданным значением пик-фактора $\kappa \le \kappa_0$.

Целью настоящей статьи является исследование возможности построения С-кодов длины $N = 32$ наибольшей возможной мощности при заданном значении пик-фактора κ_0.

Изучение характеристик полного кода длины $N = 32$ сопряжено со значительными вычислительными трудностями, т. к. подразумевает рассмотрение множества из $J = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$ элементов. Данное обстоятельство диктует необходимость разработки конструктивного метода исследования возможных значений пик-фактора.

2 Полином Жегалкина

Одной из лучших теоретических баз для построения такого метода является математический аппарат полиномов Жегалкина (алгебраической нормальной формы).

Рассмотрим двоичную последовательность длины $N = 32$

$$T = \{t_0, t_1, ..., t_{31}\},\ t_i \in \{0,1\},\ i = 0,1,...,N-1, \quad (2.1)$$

например,

$$T = \{11110000011001111101001101111110\}. \quad (2.2)$$

***Определение* 2.1** [9]. Полиномом Жегалкина $\varphi(x_1, x_2, ..., x_k)$ или алгебраической нормальной формой (АНФ) последовательности T называется многочлен $k \le \log_2 N$ переменных с коэффициентами $a_i \in \{0,1\}$, где в качестве умножения принята операция конъюнкции, а в качестве сложения – операция суммирования по модулю 2

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_k) = \bigoplus_{i=0}^{N-1} a_i X_i^s,$$

где X_i^s – термы полинома Жегалкина степени $s = wt\{X\}$; wt – вес Хэмминга.

Рассмотрим все возможные термы для последовательностей T длины $N = 32$

$X_0 = \{00000\}$ 0 $\quad X_1 = \{00001\}$ x_5

$X_2 = \{00010\}$ x_4 $\quad X_3 = \{00011\}$ x_4x_5

$X_4 = \{00100\}$ x_3 $\quad X_5 = \{00101\}$ x_3x_5

$X_6 = \{00110\}$ x_3x_4 $\quad X_7 = \{00111\}$ $x_3x_4x_5$

$X_8 = \{01000\}$ x_2 $\quad X_9 = \{01001\}$ x_2x_5

$X_{10} = \{01010\}$ x_2x_4 $\quad X_{11} = \{01011\}$ $x_2x_4x_5$

$X_{12} = \{01100\}$ x_2x_3 $\quad X_{13} = \{01101\}$ $x_2x_3x_5$

$X_{14} = \{01110\}$ $x_2x_3x_4$ $\quad X_{15} = \{01111\}$ $x_2x_3x_4x_5$

$X_{16} = \{10000\}$ x_1 $\quad X_{17} = \{10001\}$ x_1x_5

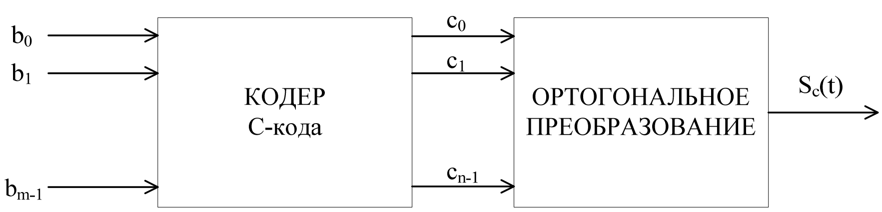


Рисунок 1.1 – Схема кодера С-кода

$$
\begin{array}{ll}
X_{18} = \{10010\}\ x_1x_4 & X_{19} = \{10011\}\ x_1x_4x_5 \\
X_{20} = \{10100\}\ x_1x_3 & X_{21} = \{10101\}\ x_1x_3x_5 \\
X_{22} = \{10110\}\ x_1x_3x_4 & X_{23} = \{10111\}\ x_1x_3x_4x_5 \\
X_{24} = \{11000\}\ x_1x_2 & X_{25} = \{11001\}\ x_1x_2x_5 \\
X_{26} = \{11010\}\ x_1x_2x_4 & X_{27} = \{11011\}\ x_1x_2x_4x_5 \\
X_{28} = \{11100\}\ x_1x_2x_3 & X_{29} = \{11101\}\ x_1x_2x_3x_5 \\
X_{30} = \{11110\}\ x_1x_2x_3x_4 & X_{31} = \{11111\}\ x_1x_2x_3x_4x_5
\end{array}
\quad (2.3)
$$

Коэффициенты $a_i = \{a_0, a_1, ..., a_{N-1}\}$ могут быть найдены путем выполнения преобразования Рида – Маллера, т. е. путем умножения исходной последовательности T (2.1) на матрицу Рида – Маллера A_ν, которую можно определить с помощью следующего рекуррентного правила

$$A_0 = [1],\ A_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes A_{\nu-1} = \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & 0 \\ A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \end{bmatrix},$$

где $\otimes$ – произведение Кронекера.

Для нашего примера коэффициенты преобразования Рида – Маллера будут иметь вид

$$\{a_i\} = T \cdot A_{32} =$$
$$= \{10001000111010010011000100101110\},$$

тогда полином Жегалкина будет иметь вид

$$\varphi = 1 + x_3 + x_4 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 +$$
$$+ x_1x_2x_3x_4 + x_2x_5 + x_1x_2x_5 + x_1x_2x_3x_5 +$$
$$+ x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5.$$

Подставляя в полученный полином значения X_i, в точности получаем исходную последовательность *T*.

3 Метод исследования значений пик-фактора

Метод исследования значений пик-фактора основан на следующем предположении:

Предположение. Суммирование булевой функции с любой аффинной булевой функцией не меняет структуру её спектра, а лишь приводит к перестановке или знаковому кодированию его элементов.

На основе данного предположения запишем метод поиска различных спектральных структур для векторов длины 32 в виде шагов.

Шаг 1. Рассмотрим последовательность $\{a_i\}$ коэффициентов АНФ булевой функции пяти переменных. Учитывая (2.3), обнулим такие позиции в ней, которые соответствуют аффинным функциям (таблица 3.1). В таблице 3.1 приняты следующие обозначения: **0** – обнуленное значение, ? – значение, изменяемое в процессе поиска.

Шаг 2. Производим последовательное изменение оставшихся позиций, придавая им значения 0 или 1.

В случае длины исходной последовательности $N = 32$ на данном этапе необходимо рассмотреть $2^{32}/2^6 = 2^{26} = 67\,108\,864$ различные последовательности, что является вычислительно осуществимым.

Шаг 3. Из множества последовательностей, полученных на *Шаге* 2, выбираем такие, которые обладают различной спектральной структурой.

Результаты использования предложенного метода относительно последовательностей длины $N = 32$ приведены в таблице 3.2 в виде спектральной классификации, где для каждого возможного набора рассчитаны значения пик-фактора κ в соответствии с (0.1).

Отметим, что значение пик-фактора последовательностей напрямую связано с уровнем их нелинейности, который является ключевой характеристикой при использовании той или иной последовательности в криптографических приложениях.

Основным критерием, по которому производится исследование нелинейных свойств двоичных последовательностей длины $N = 2^k$ является расстояние нелинейности, которое определяется как степень удаления данной последовательности от аффинного кода $\{A_j\}$ [10]

$$N_f = dist(T, A_j), \quad j = 1, 2^{k+1}$$

С другой стороны известно, что расстояние нелинейности произвольной бинарной последовательности T длины $N = 2^k$ определяется через её спектральные коэффициенты преобразования Уолша – Адамара с помощью следующего соотношения

$$N_f = 2^{k-1} - \frac{1}{2} \max_{v \in Z_2^k} |S_T(v)|. \quad (3.1)$$

Таким образом, каждый сконструированный С-код можно рассматривать как множество кодовых слов, обладающих заданным значением нелинейности, определяемым в соответствии с (3.1). Значения нелинейности N_f для каждого класса последовательностей указаны в таблице 3.2.

Таблица 3.1 – Позиции аффинных термов в последовательности длины $N = 32$

1	**2**	**3**	4	**5**	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15	16	**17**	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	21	32
0	**0**	**0**	?	**0**	?	?	?	**0**	?	?	?	?	?	?	?	**0**	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 3.2 – Возможные спектральные структуры векторов длины $N = 32$

№ п/п	№ класса	Набор	Пик-фактор κ	N_f	Мощность
1	1.1.	{32(1), 0(31)}	32	0	64
2	2.1.	{30(1), 2(31)}	28.125	1	2 048
3	3.1.	{28(1), 4(15), 0(16)}	24.5	2	31 744
4	4.1.	{26(1), 6(7), 2(24)}	21.125	3	317 440
5	5.1.	{24(1), 8(7), 0(24)}	18	4	79 360
6	5.2.	{24(1), 8(3), 4(16), 0(12)}	18	4	2 222 080
7	6.1.	{22(1), 10(3), 6(4), 2(24)}	15.125	5	2 222 080
8	6.2.	{22(1), 10(1), 6(10), 2(20)}	15.125	5	10 665 984
9	7.1.	{20(1), 12(3), 4(12), 0(16)}	12.5	6	1 111 040
10	7.2.	{20(1), 8(6), 4(15), 0(10)}	12.5	6	28 442 624
11	7.3.	{20(1), 12(1), 4(30)}	12.5	6	1 777 664
12	7.4.	{20(1), 12(1), 8(4), 4(14), 0(12)}	12.5	6	26 664 960
13	8.1.	{18(1), 14(3), 2(28)}	10.125	7	317 440
14	8.2.	{18(1), 14(1), 10(2), 6(6), 2(22)}	10.125	7	26 664 960
15	8.3.	{18(1), 10(3), 6(9), 2(19)}	10.125	7	142 213 120
16	8.4.	{18(1), 10(1), 6(15), 2(15)}	10.125	7	28 442 624
17	8.5.	{18(1), 14(1), 6(12), 2(18)}	10.125	7	17 776 640
18	9.1.	{16(1), 12(2), 8(4), 4(14), 0(11)}	8	8	213 319 680
19	9.2.	{16(2), 12(2), 4(14), 0(14)}	8	8	3 809 280
20	9.3.	{16(2), 8(4), 4(16), 0(10)}	8	8	19 998 720
21	9.4.	{16(2), 8(8), 0(22)}	8	8	1 666 560
22	9.5.	{16(4), 0(28)}	8	8	9 920
23	9.6.	{16(1), 12(1), 8(6), 4(15), 0(9)}	8	8	284 426 240
24	9.7.	{16(1), 8(12), 0(19)}	8	8	17 776 640
25	9.8.	{16(1), 8(8), 4(16), 0(7)}	8	8	106 659 840
26	10.1.	{14(3), 10(1), 6(7), 2(21)}	6.125	9	20 316 160
27	10.2.	{14(2), 10(4), 6(4), 2(22)}	6.125	9	26 664 960
28	10.3.	{14(2), 10(2), 6(10), 2(18)}	6.125	9	319 979 520
29	10.4.	{14(1), 10(5), 6(7), 2(19)}	6.125	9	426 639 360
30	10.5.	{14(1), 10(3), 6(13), 2(15)}	6.125	9	568 852 480
31	11.1.	{12(4), 8(4), 4(12), 0(12)}	4.5	10	115 548 160
32	11.2.	{12(4), 4(28)}	4.5	10	31 744 000
33	11.3.	{12(6), 4(10), 0(16)}	4.5	10	888 832
34	11.4.	{12(3), 8(6), 4(13), 0(10)}	4.5	10	426 639 360
35	11.5.	{12(2), 8(8), 4(14), 0(8)}	4.5	10	666 624 000
36	11.6.	{12(1),8(10),4(15),0(6)}	4.5	10	170 655 744
37	12.1.	{10(6), 6(10), 2(16)}	3.125	11	449 748 992
38	12.2.	{10(4), 6(16), 2(12)}	3.125	11	106 659 840
39	13.1.	{8(12), 4(16), 0(4)}	2	12	13 332 480
40	13.2.	{8(16), 0(16)}	2	12	14 054 656
Всего:					$4294967296 = 2^{32}$

Таблица 3.3 – Максимально возможные мощности С-кодов длины $N = 32$

κ_0	2	3.125	4.5	6.125	8
J_1	27 387 136	556 408 832	1 412 100 096	1 362 452 480	647 666 880
$J_{\max}$	27 387 136	583 795 968	1 995 896 064	3 358 348 544	4 006 015 424
κ_0	10.125	12.5	15.125	18	21.125
J_1	215 414 784	57996288	12888064	2301 440	317 440
$J_{\max}$	4 221 430 208	4 279 426 496	4 292 314 560	4 294 616 000	4 294 933 440
κ_0	24.5	28.125	32	–	–
J_1	31 744	2 048	64	–	–
$J_{\max}$	4 294 965 184	4 294 967 232	4 294 967 296	–	–

В таблице 3.2 для представления спектральных наборов принята следующая форма: число перед круглыми скобками характеризует абсолютное значение спектрального коэффициента, тогда как число в круглых скобках показывает, сколько раз он встречается в спектральном векторе. Например, найдем спектр последовательности (2.2)

$$S_T = H_{32}T =$$
$$= \{-8 \quad 4 \quad 4 \quad 8 \quad -8 \quad 4 \quad -4 \quad 0$$
$$4 \quad 0 \quad 0 \quad -12 \quad -12 \quad 0 \quad -8 \quad -4$$
$$4 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad -4 \quad -8 \quad 0 \quad 4$$
$$0 \quad -4 \quad -4 \quad 0 \quad -8 \quad 4 \quad 12 \quad 0\},$$

что исходя из принятой нотации соответствует спектральному набору $\{12(3), 8(6), 4(13), 0(10)\}$ и величине пик-фактора $\kappa = 4.5$.

Изучение данных таблицы 3.2 позволяет рассчитать предельные мощности С-кодов с длиной кодового слова $N = 32$ и заданным значением пик-фактора $\kappa \le \kappa_0$, которые принципиально могут быть построены для некоторого заданного значения пик-фактора κ_0. В таблице 3.3 приведены максимально возможные мощности С-кодов длины $N = 32$, которые могут быть построены.

В таблице 3.3 под J_1 понимается количество последовательностей длины $N = 32$, которые обладают заданным уровнем пик-фактора κ_0, тогда как под $J_{\max}$ понимается количество последовательностей, которые обладают уровнем пик-фактора не ниже, чем величина κ_0. Таким образом, $J_{\max}$ является границей мощности С-кода длины $N = 32$ для каждого заданного значения κ.

Заключение

Отметим основные результаты проведенных исследований:

– предложен алгоритм спектральной классификации последовательностей длины $N = 32$, основанный на использовании свойств коэффициентов АНФ и позволяющий сократить перебор множества исследуемых последовательностей в 64 раза;

– проведена спектральная классификация полного множества последовательностей длины $N = 32$, в результате чего рассчитаны теоретически предельно достижимые мощности С-кодов с заданным значением пик-фактора κ_0;

– определены мощности множеств последовательностей длины $N = 32$, обладающих заданным значением расстояния нелинейности N_f.

Таким образом, изложенные в статье результаты определяют мощности С-кодов длины $N = 32$, которые принципиально могут быть сконструированы и применены в технологии MC-CDMA, а также мощности множеств последовательностей данной длины, обладающие заданным расстоянием нелинейности, которые применимы в криптографических приложениях, например, при синтезе псевдослучайных ключевых последовательностей или S-блоков подстановки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бакулин*, *М.Г.* Технология OFDM / М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, А.М. Шлома, А.П. Шумов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2016. – 352 с.

2. *Мазурков*, *М.И.* Системы широкополосной радиосвязи / М.И. Мазурков // Одесса: Наука и Техника. – 2010. – 340 с.

3. *Paterson*, *K.G.* Sequences For OFDM and Multi-code CDMA: two problems in algebraic coding theory / K.G. Paterson // Sequences and their applications. Seta 2001. Second Int. Conference (Bergen, Norway, May 13–17, 2001). Proc. Berlin: Springer, 2002. – P. 46–71.

4. *Токарева*, *Н.Н.* Бент-функции: результаты и приложения. Обзор работ / Н.Н. Токарева // Прикладная дискретная математика. – Томск, 2009. – Сер. № 1 (3). – С. 15–37.

5. *Соколов*, *А.В.* Конструктивный метод синтеза последовательностей длины $N = 20$ с оптимальным спектром Уолша – Адамара / А.В. Соколов. – Научные труды ОНАС им. АС Попова, 2015. – № 2. – С. 118–126.

6. *Sokolov*, *A.V.* Regular synthesis method of the sequences of length $N = 24$ with optimal PAPR of Walsh-Hadamard spectrum / A.V. Sokolov // – Far East Journal of Electronics and Communications. – 2016. – Vol. 16, № 2. – P. 459–469.

7. *Соколов*, *А.В.* Нескінченні сімейства послідовностей Пелі з оптимальним пік-фактором спектра Уолша – Адамара / А.В. Соколов, О.О. Гаркуша. – Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2016. – № 2. – С. 163–169.

8. *Мазурков*, *М.И.* Рекуррентные методы синтеза последовательностей с оптимальным пик-фактором спектра Уолша – Адамара / М.И. Мазурков, А.В. Соколов // Информатика и математические методы в моделировании. – 2015. – Т. 5, № 4. – С. 203–209.

9. *Ростовцев*, *А.Г.* Криптография и защита информации / А.Г. Ростовцев. – СПб.: Мир и Семья. – 2002.

10. *Соколов*, *А.В.* Новые методы синтеза нелинейных преобразований современных шифров / А.В. Соколов. – Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2015. – 100 с.

Поступила в редакцию 24.02.17.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

– соответствовать профилю журнала;

– являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

– содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'а и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

– сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

– сведения об авторах;

– экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

– договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу http://pfmt.gsu.by.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).