

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№3 (28) 2016

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачёв (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:

В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:

V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:

F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (28) 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Василец В.К., Хмыль А.А., Кузьмар И.И., Дежкунов Н.В.** Влияние параметров электрического тока и ультразвуковых колебаний на микроструктуру и свойства электрохимических покрытий сплавом олово-висмут 7
- Овсинок Е.М., Редько А.Н., Кисель В.В., Редьков В.М.** Изотопический дублет дираковских частиц в присутствии неабелева монополя: приближение Паули 13
- Хорошко В.В.** Маршрут производства фотопреобразователей на основе тонких пленок халькогенидов 23
- Шушкевич Г.Ч.** Рассеяние поля электрического диполя на тонкой незамкнутой сферической оболочке и биизотропном шаре. Аналитический подход 27

МАТЕМАТИКА

- Бородич Т.В.** О разрешимости группы с холловыми добавлениями к нормализаторам выделенных подгрупп 35
- Монахов В.С., Чирик И.К.** Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами 40
- Мусафиров Э.В.** Допустимые возмущения системы Лэнгфорда 47
- Проневич А.Ф.** Теорема Пуассона построения стационарных интегралов автономных систем уравнений в полных дифференциалах 52
- Семенчук В.Н.** Конечные группы с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами 58
- Синица Д.А., Рыжик В.Н.** Об одном обобщении конечных σ -нильпотентных групп 61
- Шпак Д.С., Трифонова И.В.** Метод применения нелинейных эволюционных операторов для решения динамических систем 66
- Шукур Али А., Архипенко О.А.** Резольвента краевой задачи для разностного уравнения 70

ИНФОРМАТИКА

- Демиденко О.М., Диваков Н.Н., Чечет П.Л.** Настройка DNS для одновременного использования на узлах IPv4 и IPv6 76
- Миняйлов В.С.** Обнаружение эллиптических предложений средствами алгоритмов классификации 82
- Осипенко А.Н., Осипенко Н.Б., Слепенко Ю.А.** Автоматизация диагностики потенциальных качеств человека при выборе профессии 88

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 09.09.16. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,6. Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 100 экз. Заказ № 509.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2016
© Проблемы физики, математики и техники, 2016
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2016

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 3 (28) 2016

CONTENTS

PHYSICS

- Vasilets V.K., Khmyl A.A., Kuzmar I.I., Dezhkunov N.V.** The influence of electric current parameters and ultrasonic oscillations on the microstructure and properties of Sn-Bi electroplating coatings 7
- Ovsiyuk E.M., Red'ko A.N., Kisel V.V., Red'kov V.M.** Isotopic doublet of the Dirac particles in presence of the non-Abelian monopole: the Pauli approximation 13
- Khoroshko V.V.** Production route of solar cells based on thin films of chalcogenides 23
- Shushkevich G.Ch.** Scattering of the field of the electrical dipole on thin unclosed spherical shell and bi-isotropic ball. Analytical approach 27

MATHEMATICS

- Borodich T.V.** On solvability of a group with Hall supplements to normalizers of isolated subgroups 35
- Monakhov V.S., Chirik I.K.** Finite factorised groups whose factors are subnormal supersolvable subgroups 40
- Musafirov E.V.** Admissible perturbations of Langford system 47
- Pranevich A.F.** Poisson theorem of building autonomous integrals for autonomous systems of total differential equations 52
- Semenchuk V.N.** Finite groups with generalized subnormal Sylow subgroups 58
- Sinitsa D.A., Rizhik V.N.** On one generalization of finite σ -nilpotent groups 61
- Shpak D.S., Trifonova I.V.** The method of application of nonlinear evolution operators for solution of dynamical systems 66
- Shukur Ali A., Arhipenko O.A.** Resolvent of boundary value problem for the difference equation 70

INFORMATION SCIENCE

- Demidenko O.M., Divakov N.N., Chechet P.L.** Tuning of DNS for simultaneous use on the IPv4 and IPv6 nodes 76
- Miniailau U.S.** Detection of elliptical sentences using classification algorithms 82
- Osipenko A.N., Osipenko N.B., Slepianok Y.A.** Automation of diagnostic potential of human qualities when choosing a profession 88

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 621.357.7

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА И УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ НА МИКРОСТРУКТУРУ И СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ СПЛАВОМ ОЛОВО-ВИСМУТ

В.К. Василец, А.А. Хмыль, И.И. Кузьмар, Н.В. Дежкунов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

THE INFLUENCE OF ELECTRIC CURRENT PARAMETERS AND ULTRASONIC OSCILLATIONS ON THE MICROSTRUCTURE AND PROPERTIES OF Sn-Bi ELECTROPLATING COATINGS

V.K. Vasilets, A.A. Khmyl, I.I. Kuzmar, N.V. Dezhkunov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Рассмотрено совместное влияние режима электролиза и воздействия ультразвуковых колебаний на микрорельеф поверхности, состав и свойства покрытий сплавом олово-висмут. Установлено, что применение нестационарного электролиза и ультразвукового стимулирования позволяет оптимизировать параметры осаждения, при которых возможно избежать ухудшения паяемости с одновременным улучшением качества осадка.

Ключевые слова: бессвинцовые сплавы, олово-висмут, нестационарный электролиз, ультразвуковые колебания, микроструктура, склонность к пайке, удельное электрическое сопротивление.

The coefficient of electrolysis mode and ultrasonic oscillations on microstructure, composition and properties of Sn-Bi coatings is considered. It was found that the use of non-stationary electrolysis and ultrasonic stimulation to optimize the deposition parameters, with which it is possible to avoid the deterioration of solderability while improving sludge quality.

Keywords: lead-free alloys, tin-bismuth alloy, non-stationary electrolysis, ultrasonic oscillations, microstructure, solderability, electrical resistivity.

Введение

В настоящее время одной из актуальных проблем радиоэлектроники остается разработка материалов под пайку, не содержащих свинец, так как широко распространенные оловянно-свинцовые припой и покрытия являются особо вредными для человека, их утилизация требует больших финансовых затрат. В соответствии с директивами Restriction of Hazardous Substances (RoHS) и RoHS2 в Евросоюзе запрещено в законодательном порядке применение ряда опасных материалов, в том числе свинца в изделиях, используемых в производстве радиоэлектронной аппаратуры [1]. После вступления в силу указанных директив, надзорные органы Европейского Союза усилили контроль за внутренним рынком. Продукция, не имеющая подтверждающей документации (соответствие RoHS), не допускается к размещению на территории стран-членов ЕС. Большинство технологически развитых стран мира поддержали требования RoHS, и теперь на рынок поступают компоненты, ориентированные на бессвинцовые технологии.

Сейчас в мире не предложено полноценной замены оловянно-свинцовым припоям и покрытиям. Одним из возможных альтернативных материалов является сплав олово-висмут. Однако и этот материал нуждается в усовершенствовании своих свойств. Одним из способов повышения

свойств гальванических покрытий является изменение электрического режима питания ванны во время электролиза (нестационарный электролиз) [2]–[4]. Помимо нестационарного электролиза широко применяются методы механической активации процессов электроосаждения металлов, а также формирование тонких плёнок при воздействии на процесс ультразвуковых колебаний (УЗК) [5].

Цель настоящей работы – изучение совместного влияния нестационарного электролиза и УЗК низкой частоты на микрорельеф поверхности сплава олово-висмут, его состав и функциональные свойства.

1 Методика эксперимента

Покрытие сплавом олово-висмут формировали из электролита следующего состава: сульфат олова SnSO_4 (50 г/л); висмут азотнокислый $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ (1,4 г/л); кислота серная H_2SO_4 (125 г/л); антиоксидантная добавка – ЦКН-32 (2 г/л). В качестве поверхностно-активного вещества (ПАВ) введен неонол АФ-9-10 (2–8 г/л). Температура электролита – 18–25° С. Осаждение сплава и контроль режимов электролиза осуществлялись с применением следующего оборудования: высокочастотного источника питания гальванической ванны импульсно-реверсным током ИП 15-5 в комплекте с управляющей ЭВМ и

цифрового осциллографа RIGOL DS1052E. Для ультразвукового стимулирования процесса использовали экспериментальную установку, разработанную в Белорусском государственном университете информатики и радиоэлектроники, включающую генератор УЗГ53-22 с пьезокерамическим излучателем, работающим на частоте 36,7–38 кГц и обеспечивающим мощность акустическую 15 Вт, интенсивность УЗК от 0 до 2,1 Вт/см² [6]. Исследование состава покрытий проводилось рентгено-флуорисцентным методом на спектрометре ElvaX, микрорельефа покрытий – с помощью растрового электронного микроскопа.

2 Результаты и их обсуждение

Влияние УЗК интенсивностью $I = 1$ Вт/см² на структуру и микрорельеф поверхности покрытий сплавом олово-висмут, полученных методом электроосаждения на постоянном токе, представлено на рисунке 2.1. Очевидно существенное влияние ультразвука на микроструктуру поверхности и состав осадка. Из рисунка видно, что на постоянном токе при катодной плотности $i_k = 0,5$ А/дм² формируется неравномерная кристаллическая структура с четко выраженными зернами разного диаметра от 1,7 до 5,8 мкм. Образование неодинаковых по размерам кристаллитов, вероятно, связано с тем, что низкая катодная плотность тока не может вызвать появление большого числа центров кристаллизации и не обеспечивает равномерный рост одновременно всех кристаллических зародышей. При плотности катодного тока 1,5 А/дм² поверхность покрытия Sn-Bi сглаживается, размеры кристаллитов снижаются. Увеличение величины плотности тока до 2,5 А/дм² приводит к существенному увеличению кристаллической шероховатости и разброса размера кристаллитов от 2,2 до 8,1 мкм.

При высоких плотностях постоянного тока, наоборот, получает значительное развитие непрерывно растущая поверхность катода, что приводит к появлению большого числа центров кристаллизации, их относительно равномерному развитию и быстрому росту как в тангенциальном, так и в перпендикулярном направлениях к поверхности подложки. Но, так как возможности для роста кристаллитов в тангенциальном направлении ограничены со стороны соседних растущих кристаллитов, то их развитие происходит преимущественно в перпендикулярном направлении к поверхности. В результате появляется сравнительно мелкозернистая микроструктура, но с крайне неравномерным и развитым микрорельефом. При наложении ультразвуковых колебаний во время электролиза расширяется диапазон рабочих плотностей тока вследствие интенсивного перемешивания электролита. У сформированного осадка сохраняются закономерности, описанные выше, но исчезает граница между зернами, поверхность становится сглаженной и равномерной, при этом размер зерна снижается в пределах 1,2–3,8 мкм даже при $i_k = 2,5$ А/дм².

Установлено, что на развитие микроструктуры покрытия Sn-Bi оказывают влияние снижение выхода металла по току вследствие выделения водорода и величина легирующей добавки в сплаве. Для подтверждения этого нами изучено влияние плотности тока на величину массовой доли висмута в сплаве при сравниваемых режимах электролиза. Как видно из рисунка 2.2, а, при низкой плотности тока 0,5 А/дм² покрытия, сформированные в присутствии ультразвуковых колебаний, имеют в своем составе большее содержание легирующего компонента – 0,08 масс.% без УЗК и 0,32 масс.% с УЗК. Однако при $i_k = 2,5$ А/дм² наблюдается снижение количества

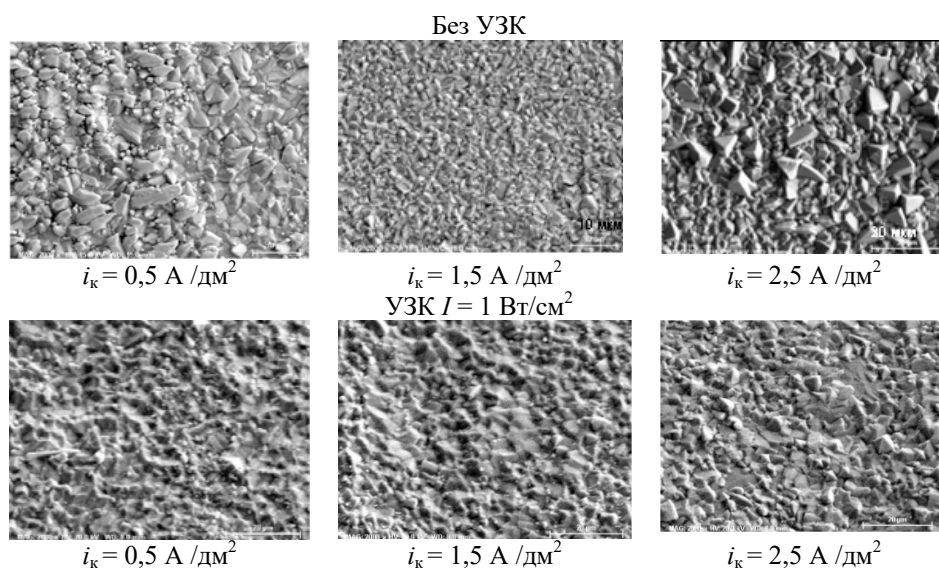


Рисунок 2.1 – Влияние ультразвука на микрорельеф поверхности покрытий сплавом олово-висмут, полученных при электролизе на постоянном токе

висмута в сравнении с покрытиями, сформированными без применения ультразвука – 0,82 масс.% без УЗК и 0,51 масс.% с УЗК.

Такой характер зависимости можно объяснить исходя из характера полученных поляризационных зависимостей (рисунок 2.2, б) [7]. Известно [8], что соосаждение олова и висмута происходит на предельном диффузионном токе. При применении ультразвука, с одной стороны, предельный ток повышается, что значительно ускоряет процесс электроосаждения, но, с другой стороны, площадка предельного диффузионного тока становится короче. Это и объясняет существенно меньшее содержание висмута при $i_k = 2,5 \text{ А/дм}^2$ в осадке, полученном с использованием ультразвуковых колебаний.

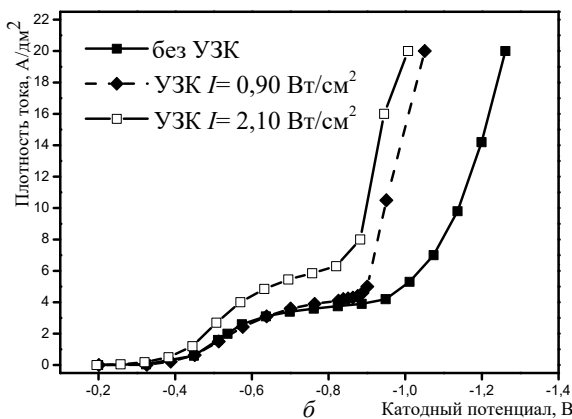
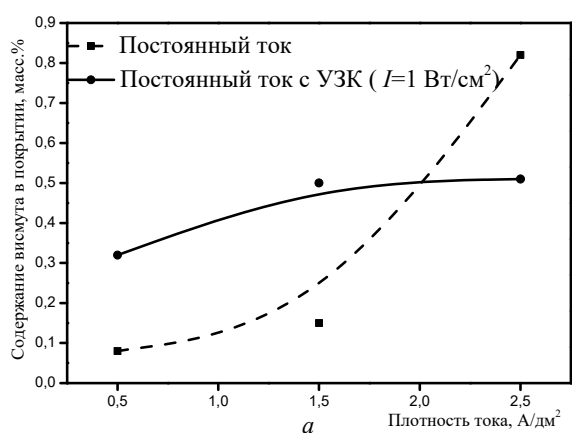


Рисунок 2.2 – Влияние ультразвука на содержание висмута в сплаве (а) и на катодные поляризационные кривые при электроосаждении сплава олово-висмут (б)

Измерено удельное электрическое сопротивление покрытий, осажденных в указанном выше диапазоне плотностей тока под воздействием ультразвуковых колебаний интенсивностью 1 Вт/см^2 (рисунок 2.3). Из рисунка видно, что удельное электрическое сопротивление имеет ярко выраженный оптимум при $i = 1,5 \text{ А/дм}^2$, что хорошо коррелирует со структурой полученных покрытий. Но воздействие ультразвука на процесс электроосаждения повышает величину удельного электрического сопротивления материала

на 0,08–16,20%, что говорит о росте числа линейных дефектов кристаллической решетки и при некоторых режимах повышении концентрации висмута в покрытии.

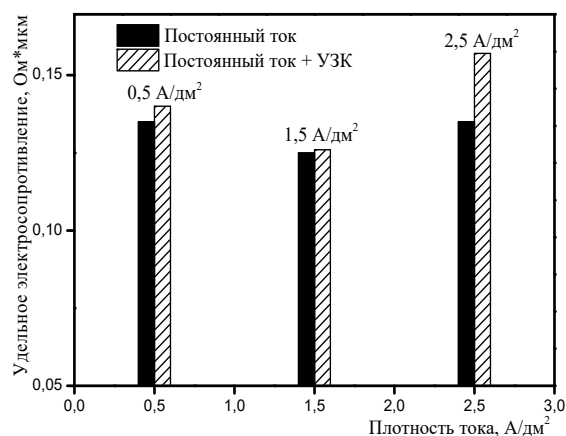


Рисунок 2.3 – Влияние ультразвука на удельное электрическое сопротивление покрытий сплавом олово-висмут, полученных при электролизе на постоянном токе

Исследовано также влияние УЗК интенсивностью 1 Вт/см^2 на морфологию покрытий сплавом олово-висмут, сформированных при следующих параметрах импульсного тока: скважности $q = 5$; частоте $f = 1 \text{ Гц}$ или 1000 Гц ; средней плотности катодного тока $i_{cp} = 0,5 \text{ А/дм}^2$, $1,5 \text{ А/дм}^2$, $2,5 \text{ А/дм}^2$. Установлено, что импульсный ток и ультразвук оказывают заметное влияние на микроструктуру осадка. Так, при низкой частоте импульсного тока (1 Гц) размер зерен уменьшается в два раза, осадок становится более плотным (рисунок 2.4).

Содержание висмута повышается от 0,09 до 0,30 масс.%. При более высокой частоте (1 кГц) и средней плотности тока ($2,5 \text{ А/дм}^2$) поверхность покрытия сглаживается, но применение УЗК заметно не влияет на структуру, однако, содержание висмута снижается в три раза с 0,75 до 0,25 масс.%.
Более расширенное исследование проведено при совместном использовании импульсного тока и ультразвуковых колебаний. Представленные результаты (рисунок 2.5) показывают, что чем ниже плотность тока, тем больше новых центров кристаллизации образуется. При средней плотности тока $0,5 \text{ А/дм}^2$ осадок плотный, мелкозернистый. Поверхность усыпана еще более мелкими новыми зернами. С ростом плотности тока размер зерен увеличивается, становятся отчетливо различимы их границы, поверхность осадка сглаживается.

Без использования ультразвука зарождающихся центров кристаллизации меньше, поверхность менее активна (рисунок 2.6). Применение ультразвука на данной частоте позволяет повысить содержание висмута от 0 до 4,23 масс.% при средней плотности тока $0,5 \text{ А/дм}^2$ и от 0 до

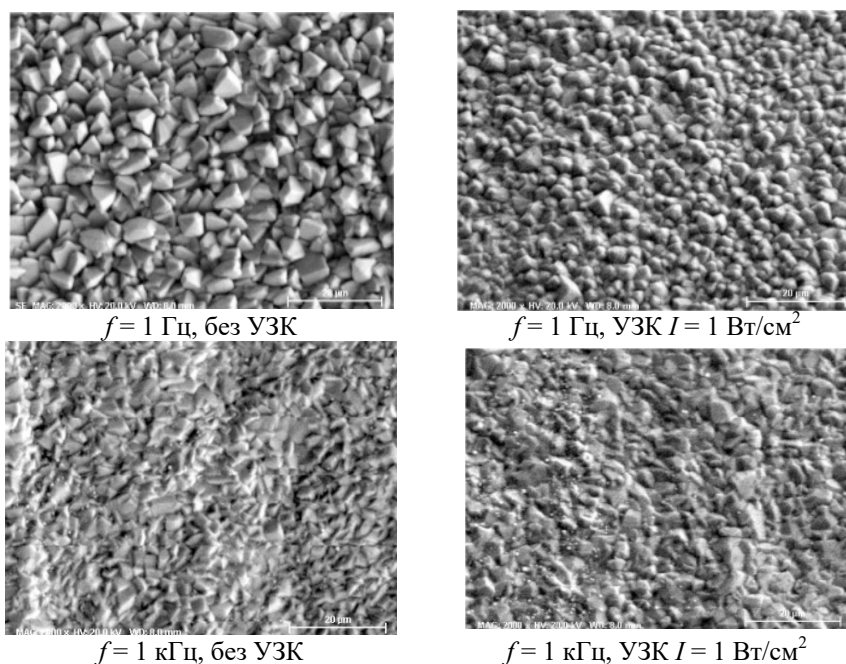


Рисунок 2.4 – Влияние частоты импульсного тока и ультразвуковых колебаний на микрорельеф поверхности и состав осадка, $i_{cp} = 2,5 \text{ A/дм}^2$; $q = 5$

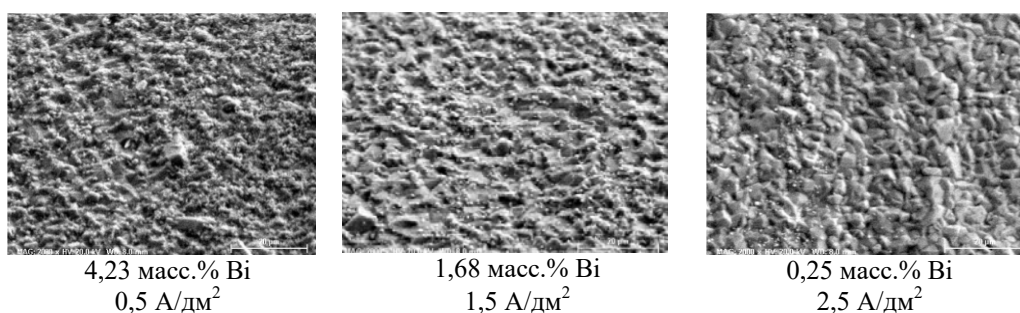


Рисунок 2.5 – Влияние средней плотности импульсного тока и ультразвуковых колебаний на микрорельеф поверхности и состав осадка, $f = 1000 \text{ Гц}$; $q = 5$, $УЗК I = 1 \text{ Вт/см}^2$

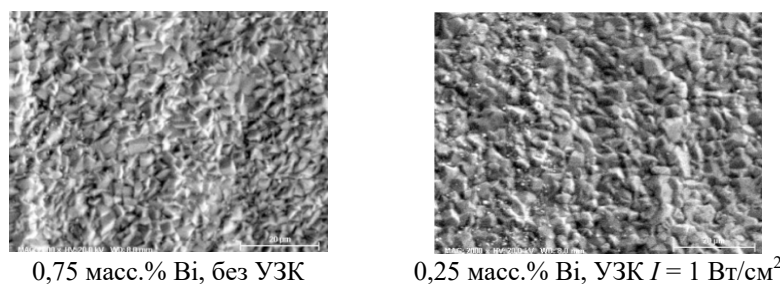


Рисунок 2.6 – Влияние ультразвуковых колебаний на микрорельеф поверхности и состав осадка, $f = 1000 \text{ Гц}$; $q = 5$, $i_{cp} = 2,5 \text{ A/дм}^2$

1,68 масс.% при $1,5 \text{ A/дм}^2$. При плотности тока $2,5 \text{ A/дм}^2$ содержание легирующего компонента уменьшается с 0,75 до 0,25 масс.%, что приводит к снижению и значения удельного электрического сопротивления с 0,173 до 0,164 Ом·мкм.

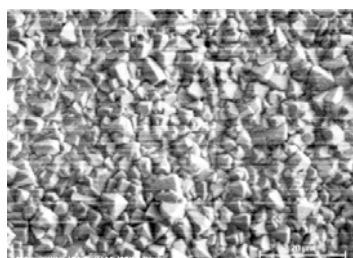
Влияние параметров реверсированного тока и УЗК на структуру и состав сплава олово-висмут представлено на рисунках 2.7, 2.8. При высокой средней плотности реверсированного тока ($i_{cp} = 2,5 \text{ A/дм}^2$) воздействие ультразвука приводит к осаждению чистого олова (содержание висмута – 0 масс.%).

Удельное электрическое сопротивление пленки при отсутствии легирующего компонента снижается от 0,146 до 0,133 Ом·мкм. На снижение удельного электрического сопротивления повлияло изменение микроструктуры осадка. Покрытие становится более однородным, без четких границ между зернами. Изменение средней плотности реверсированного тока позволяет управлять содержанием легирующей добавки висмута в формируемом сплаве. Снижение ее значения до $i_{cp} = 1 \text{ A/дм}^2$ приводит к повышению

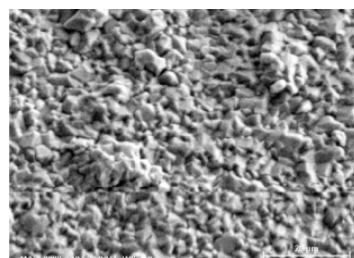
содержания висмута в осадке с 0 масс.% (при $i_{cp} = 2,5 \text{ A/дм}^2$) до 0,49 масс.% (рисунок 2.8). Однако при низкой плотности тока 1 A/дм^2 без воздействия УЗК покрытие крупнокристаллическое, игольчатое. Воздействие ультразвука в данном случае способствует измельчению и сглаживанию осадка.

Обобщенные результаты исследования функциональных свойств покрытий сплавом олово-висмут, полученных при различных режимах элек-

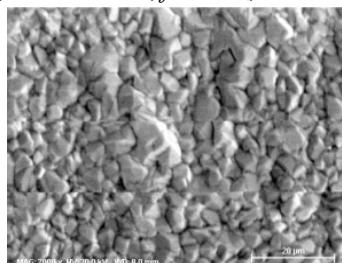
тролиза и воздействию ультразвука, представлены в таблице 2.1. Из таблицы видно, что смачиваемость припоем ПОС61 поверхности свежесозданных покрытий при всех исследуемых режимах отличная (коэффициент растекания припоя составляет 92,55–95,01 %), влияние ультразвуковых колебаний на смачиваемость поверхности покрытия отчетливо заметно при реверсированных режимах электролиза (коэффициент растекания припоя повышается с 80,90 % до 94,5 %).



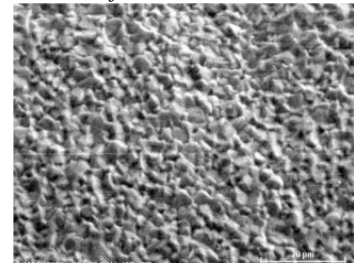
0,76 масс.% Bi, $f = 1 \text{ Гц}$, без УЗК



0 масс.% Bi, $f = 1 \text{ Гц}$, УЗК $I = 1 \text{ Вт/см}^2$

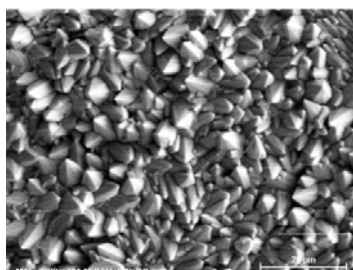


0,47 масс.% Bi, $f = 1 \text{ кГц}$, без УЗК

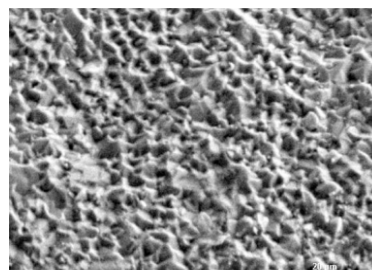


0 масс.% Bi, $f = 1 \text{ кГц}$, УЗК $I = 1 \text{ Вт/см}^2$

Рисунок 2.7 – Влияние частоты реверсированного тока и ультразвуковых колебаний на микрорельеф и состав осадка, $i_{cp} = 2,5 \text{ A/дм}^2$, $\gamma = 1,5$



0,42 масс.% Bi, без УЗК



0,49 масс.% Bi, УЗК $I = 1 \text{ Вт/см}^2$

Рисунок 2.8 – Влияние частоты реверсированного тока и ультразвуковых колебаний на структуру и состав осадка, $i_{cp} = 1,0 \text{ A/дм}^2$, $f = 1 \text{ Гц}$, $\gamma = 1,5$

Таблица 2.1 – Свойства покрытий сплавом олово-висмут, сформированных при воздействии ультразвука

Режим электролиза	Без воздействия УЗК			УЗК $I = 1,02 \text{ Вт/см}^2$		
	K_p , %	$R_{к2}$, мОм	Bi, масс.%	K_p , %	$R_{к2}$, мОм	Bi, масс.%
$i_k = 0,5 \text{ A/дм}^2$	95,28	1,53	0,08	95,87	6,31	0,32
$i_k = 1,5 \text{ A/дм}^2$	93,76	2,29	0,15	92,44	3,01	0,50
$i_k = 2,5 \text{ A/дм}^2$	87,24	2,81	0,82	94,54	8,17	0,51
$i_{cp} = 0,5 \text{ A/дм}^2$, $q = 5$, $f = 1 \text{ кГц}$	92,71	2,72	0,00	94,78	8,30	4,23
$i_{cp} = 1,5 \text{ A/дм}^2$, $q = 5$, $f = 1 \text{ кГц}$	92,09	2,72	0,00	95,01	7,73	1,68
$i_{cp} = 2,5 \text{ A/дм}^2$, $q = 5$, $f = 1 \text{ кГц}$	–	2,07	0,75	93,14	5,57	0,25
$i_{cp} = 2,5 \text{ A/дм}^2$, $q = 5$, $f = 1 \text{ Гц}$	–	3,11	0,09	93,88	5,30	0,30
$i_{cp} = 1,0 \text{ A/дм}^2$, $\gamma = 1,5$, $f = 1 \text{ Гц}$	80,90	2,14	0,42	94,50	5,75	0,49
$i_{cp} = 1,5 \text{ A/дм}^2$, $\gamma = 1,5$, $f = 1 \text{ Гц}$	84,52	2,29	0,43	92,98	6,79	0,02
$i_{cp} = 2,5 \text{ A/дм}^2$, $\gamma = 1,5$, $f = 1 \text{ Гц}$	88,19	2,64	0,76	93,37	4,57	0,00
$i_{cp} = 2,5 \text{ A/дм}^2$, $\gamma = 1,5$, $f = 1 \text{ кГц}$	86,78	3,02	0,47	93,45	3,36	0,00

Таблица 2.2 – Влияние условий электролиза на удельное электрическое сопротивление покрытий сплавом олово-висмут

Режим электролиза	Удельное электрическое сопротивление, Ом·мкм	
	без УЗК	УЗК ($I = 1 \text{ Вт/см}^2$)
ПТ $i_k = 2,5 \text{ А/дм}^2$	0,135	0,157
ИТ $i_{cp} = 2,5 \text{ А/дм}^2, q = 5, f = 1000 \text{ Гц}$	0,173	0,164
РТ $i_{cp} = 2,5 \text{ А/дм}^2, \gamma = 1,5, f = 1 \text{ Гц}$	0,146	0,133

Из представленных в таблице 2.1 данных также видно, что на контактное электросопротивление R_k самое значительное влияние оказывают микроструктура покрытия, его шероховатость и содержание легирующей добавки. Влияние режима электролиза на эти факторы определяет итоговое значение свойства осадка. Так на постоянном токе без воздействия УЗК минимальное значение R_k получено только при плотности постоянного тока $i_k = 0,5 \text{ А/дм}^2$, так как при этих условиях доминирующими факторами являются низкое значение легирующей добавки висмута (0,08 масс.%) и отсутствие включения водорода в покрытие. При электролизе на постоянном токе при воздействии УЗК наименьшее значение R_k получено при $i_k = 1,5 \text{ А/дм}^2$, так как при этих условиях покрытие мелкокристаллическое, плотноупакованное, со сглаженным микро рельефом, а содержание висмута в этой серии экспериментов приблизительно одинаково.

Применение периодического тока расширяет технологические возможности управления кристаллической микроструктурой получаемых покрытий за счет изменения величины амплитудной плотности тока, частоты и скважности. Во всех случаях наложение УЗК на процесс электролиза приводит к увеличению значения R_k вследствие формирования сильноразвитой поверхности получаемых слоев. Однако величина удельного электрического сопротивления в условиях нестационарного электролиза (таблица 2.2) снижается при воздействии на процесс электроосаждения ультразвука вследствие уменьшения количества висмута в формируемом сплаве.

Заключение

В данной работе показано, что применение периодического тока существенно улучшает кристаллическую микроструктуру формируемого покрытия сплавом олово-висмут. Осадки становятся плотноупакованными, со сглаженной и равномерной поверхностью, исчезает граница между зернами. Наложение УЗК на процесс электролиза способствует увеличению скорости обновления электролита у поверхности катода, повышает катодный выход металла по току и тем

самым предельную плотность тока. Совместное использование ультразвука и различных форм периодического тока при формировании покрытий сплавом олово-висмут приводит к измельчению осадков, повышению их способности к пайке и снижению величины удельного электрического сопротивления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев, А.* Форум по бессвинцовым технологиям пайки / А. Медведев, А. Новиков // Технологии в электронной промышленности. – 2007. – № 4. – С. 48–54.
2. *Puippe, Jean-Claude.* Theory and practice of pulse plating / Jean-Claude Puippe, Frank Leaman // American electroplaters and surface finishers society. – Florida, USA. – 1986.
3. *Костин, Н.А.* Импульсный электролиз / Н.А. Костин, В.С. Кублановский, А.В. Заблудовский. – Киев: Наук. думка, 1989. – 168 с.
4. *Pulse Electroplating of Sn-Bi Alloys on Micropatterned Electrodes for Lead-Free Solder Bumping* / Yi-Da Tsai [et. al] // Journal of The Electrochemical Society. – 2012. – P. 108–113.
5. *Антропов, Л.И.* Теоретическая электрохимия: учеб. для хим.-технолог. спец. ВУЗов / Л.И. Антропов. – М.: Высш. шк., 1984. – 512 с.
6. *Оборудование для ультразвуковой интенсификации гальванических процессов* / Н.В. Дежкунов [и др.] // Материалы докладов III РНТС «Создание новых и совершенствование действующих технологий и оборудования нанесения гальванических и их замещающих покрытий», 5–6 декабря 2013 г., БГТУ, Минск, Беларусь. – Минск: БГТУ, 2013. – С. 82–86.
7. *Влияние ультразвуковых колебаний на кинетику процесса электроосаждения и структуру сплава олово-висмут* / В.К. Василец [и др.] // Доклады БГУИР. – 2015. – № 5 (91). – С. 12–18.
8. *Вячеславов, П.М.* Электролитическое осаждение сплавов / П.М. Вячеславов. – Л.: Машиностроение, 1977. – 38 с.

Поступила в редакцию 01.06.16.

УДК 539.12

ИЗОТОПИЧЕСКИЙ ДУБЛЕТ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ В ПРИСУТСТВИИ НЕАБЕЛЕВА МОНОПОЛЯ: ПРИБЛИЖЕНИЕ ПАУЛИ

Е.М. Овсиюк¹, А.Н. Редько², В.В. Кисель³, В.М. Редьков⁴

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

²Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск

³Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

⁴Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

ISOTOPIC DOUBLET OF THE DIRAC PARTICLES IN PRESENCE OF THE NON-ABELIAN MONOPOLE: THE PAULI APPROXIMATION

E.M. Ovsyuk¹, A.N. Red'ko², V.V. Kisel³, V.M. Red'kov⁴

¹I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University

²M. Tank Belarusian State Pedagogical University, Minsk

³Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

⁴B.I. Stepanov Institute of Physics National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Построено нерелятивистское уравнение паулиевского типа для дублета дираковских частиц, учитывающее присутствие внешних неабелевых полей. Оно детализировано в случае монополярных потенциалов Богомольного – Прасада – Зоммерфельда. Выполнен анализ возможности существования связанных состояний в системе. Проведено сопоставление поведения дублета частиц в пространствах постоянной кривизны: Евклида, Лобачевского и Римана, откуда следует, что обычное использование в пространстве Минковского несингулярного монополярного решения является использованием решения, более естественно связанного с геометрией пространства Лобачевского. В такой трактовке во всех трех пространствах связанных состояний для дублета фермионов в полях неабелева монополя не возникает.

Ключевые слова: дублет фермионов, неабелев монополярный потенциал, приближение Паули, пространства постоянной кривизны, связанные состояния.

For the doublet of Dirac particles in presence of external non-Abelian fields, a non-relativistic Pauli equation is constructed. It is detailed for the case of the Bogomolny – Prasad – Sommerfeld monopole potentials. The problem of existence of bound states in the system is studied. Comparison of the behavior of the Dirac particles doublet in three spaces of constant curvature: Euclid, Lobachevsky, and Riemann, is performed, from where it follows that the known nonsingular monopole solution usually used for the case of Minkowski space is the application of a mathematical possibility more naturally related to the Lobachevsky space model. Within that treatment, in all three space models, no bound states for the doublet of fermions in the non-Abelian monopole potential exist.

Keywords: doublet of fermions, non-Abelian monopole, Pauli approximation, spaces of constant curvature, bound states.

Введение

Как только неабелев монополярный потенциал был введен (Хуфтом [1], Поляковым [2], Жулиа, Зи [3], Бэйс–Расел [4]) в научный обиход, его основные свойства были детально изучены. Есть два основных способа исследования монополярных проблем: основанный на геометрических и топологических методах и другой подход, базирующийся на исследовании физических проявлений монополей, когда они рассматриваются как внешние потенциалы [5]–[10]. В работе исследуется поведение изотопического дублета дираковских фермионов во внешнем неабелевом монополярном потенциале. Специальное внимание уделено проблеме нерелятивистского приближения в теории изотопических мультиплетов в неабелевых полях. В этом приближении анализ упрощается из-за уменьшения вдвое числа функций, связываемых дифференциальными уравнениями. Выведено уравнение паулиевского типа, учитывающее присутствие внешних неабелевых

полей. Оно детализировано для монополярных потенциалов Богомольного – Прасада – Зоммерфельда [11], [12].

1 Уравнение Паули для дублета фермионов, общий анализ

Рассмотрим изотопический дублет дираковских фермионов во внешнем неабелевом поле Янга – Миллса [10]

$$\left[i\gamma^\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Gamma_\alpha(x) - iet^a W_\alpha^a(x) \right) - M \right] \Psi(x) = 0. \quad (1.1)$$

В классе пространств, допускающих нерелятивистское приближение [10], [13]

$$dS^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}(x) dx^i dx^j,$$

уравнение (1.1) имеет вид

$$\left\{ \gamma^0 \left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_0^a \right] + \right.$$

$$+\gamma^j(x) \left[i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] - M \} \Psi(x) = 0, \quad (1.2)$$

где обобщенные матрицы Дирака и связность задаются равенствами

$$\gamma^0(x) = \gamma^0, \quad \gamma^j(x) = \gamma^k e_{(k)}^j(x),$$

$$\Gamma_t(x) = \Gamma_0(x) = \frac{1}{4} \gamma^k(x) \gamma_{k;0}(x),$$

$$\Gamma_j(x) = \frac{1}{4} \gamma^0 \gamma_{0;j}(x) + \frac{1}{4} \gamma^k(x) \gamma_{k;j}(x).$$

Нерелятивистское приближение может быть выполнено в любом базисе матриц Дирака. Большая и малая составляющие задаются с помощью двух проекционных операторов:

$$\Psi_+ = \frac{1+\gamma^0}{2} \Psi, \quad \Psi_- = \frac{1-\gamma^0}{2} \Psi. \quad (1.3)$$

Действуя этими операторами (1.3) слева на уравнение (1.2), находим

$$\begin{aligned} & \left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_t^a \right] \Psi_+ + \\ & + \gamma^j(x) \left[i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Psi_- - M \Psi_+(x) = 0, \\ & - \left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_t^a \right] \Psi_- + \\ & + \gamma^j(x) \left[i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Psi_+ - M \Psi_-(x) = 0. \end{aligned}$$

Выделяя энергию покоя подстановкой

$$\Psi_{\pm}(x) = \exp(-iMt) \Phi_{\pm}(x),$$

получим

$$\begin{aligned} & \left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_t^a \right] \Phi_+ + \\ & + \gamma^j(x) \left[i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Phi_- = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} & - \left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_t^a \right] \Phi_- + \\ & + \gamma^j(x) \left[i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Phi_+ - \\ & - 2M \Phi_-(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Заменяя уравнение (1.5) на его приближение (при этом предполагаем $W_t^a = 0$)

$$\Phi_-(x) = \frac{1}{2M} \gamma^j(x) \left[i \hbar \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \Phi_+,$$

после исключения малой компоненты из (1.4) получаем

$$\begin{aligned} & \left[i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_t \right) - et^a W_0^a \right] \Phi_+ = \\ & = -\frac{1}{2M} \gamma^j(x) \left[i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \Gamma_j \right) - et^a W_j^a \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \gamma^l(x) \left[i \left(\frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma_l \right) - et^a W_l^a \right] \Phi_+. \quad (1.6)$$

Это общековариантное уравнение Паули для дублета дираковских фермионов во внешнем поле Янга – Миллса.

Волновая функция дублета подчиняется дополнительному условию $\gamma^0 \Phi_+ = \Phi_+$. Существование этого условия связано с тем, что паулиевская волновая функция для дираковской частицы содержит только две независимые компоненты (это в явном виде устанавливается при выборе матриц Дирака в стандартном базисе). Соответственно, волновая функция дублета в нерелятивистском приближении содержит только 4 независимые компоненты, а не 8.

2 Неабелев монополю в калибровке Швингера

В работе [13] известная подстановка для монополюльного решения Хуфта – Полякова [1], [2], а также Жулия, Зи [3] (для полноты включаем и взаимодействие с триплетом скалярных полей Хиггса) приводится в специальном базисе изотопического пространства к виду

$$\begin{aligned} W_\theta^{S.(a)} &= \begin{vmatrix} 0 & \\ (r^2 K + 1/e) & \\ 0 & \end{vmatrix}, \quad W_\phi^{S.(a)} = \begin{vmatrix} -(r^2 K + 1/e) & \\ 0 & \\ & \frac{1}{e} \cos \theta \end{vmatrix}, \\ W_r^{S.(a)} &= \begin{vmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{vmatrix}, \quad W_t^{S.(a)} = \begin{vmatrix} 0 & \\ 0 & \\ rF(r) & \end{vmatrix}, \quad \Phi^{S.(a)} = \begin{vmatrix} 0 & \\ 0 & \\ r\Phi(r) & \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что абелев потенциал в калибровке Швингера после преобразования к сферическим координатам принимает очень простой вид:

$$A_\phi^S = g \cos \theta. \quad (2.2)$$

Примечательно, что в [4] было получено явное представление для вложенного в неабелеву модель абелева монополюльного решения (2.2), и оно следует из (2.1) при специальном выборе функции K : $(r^2 K + 1/e) = 0$.

3 Разделение переменных в релятивистском уравнении

В базисе сферической тетрады и в швингеровской унитарной калибровке монополюльного потенциала уравнение для дублета (1.1) примет вид [13]

$$\begin{aligned} & \left[\gamma^0 (i\partial_t + erF(r)t^3) + i\gamma^3 \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta,\phi}^S + \right. \\ & \left. + \frac{er^2 K(r) + 1}{r} (\gamma^1 \otimes t^2 - \gamma^2 \otimes t^1) - \right. \\ & \left. - (M + \kappa r \Phi(r)t^3) \right] \Psi^S = 0, \end{aligned}$$

$$\Sigma_{0,\phi}^S = i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + (i\sigma^{12} + t^3) \cos \theta}{\sin \theta}, \quad (3.1)$$

где $t^j = (1/2)\sigma^j$. Специальный выбор базиса автоматически привел к необходимой перегруппировке слагаемых волнового уравнения. В частности, только пропорциональный $(er^2K(r)+1)$ член смешивает компоненты дублета, и он исчезает при использовании потенциала с $(r^2K+1/e) = 0$.

В представлении (3.1) компоненты общего сохраняющегося момента определяются согласно $J_1^S = l_1 + \frac{(i\sigma^{12} + t^3) \cos \phi}{\sin \theta}$, $J_2^S = l_2 + \frac{(i\sigma^{12} + t^3) \sin \phi}{\sin \theta}$,

$$J_3^S = l_3,$$

в соответствии с этим подстановка для волновой функции $\Psi_{ejm}(x)$ такая [13]:

$$\Psi_{ejm}(x) = \frac{e^{-iet}}{r} [T_{+1/2} \otimes F(r, \theta, \phi) + T_{-1/2} \otimes G(r, \theta, \phi)],$$

$$T_{+1/2} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} f_1(r)D_{-1} \\ f_2(r)D_0 \\ f_3(r)D_{-1} \\ f_4(r)D_0 \end{vmatrix},$$

$$T_{-1/2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} g_1(r)D_0 \\ g_2(r)D_{+1} \\ g_3(r)D_0 \\ g_4(r)D_{+1} \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

$D_\sigma \equiv D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$. Квантовое число j может принимать значения $j = 0, 1, 2, 3, \dots$

Важным в исследовании электронмонопольной проблемы является случай $j = 0$, при этом волновая функция $\Psi_{\varepsilon 0}(x)$ строится так:

$$\Psi_{\varepsilon 0} = T_{+1/2} \otimes \begin{vmatrix} 0 \\ f_2(r) \\ 0 \\ f_4(r) \end{vmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{vmatrix} g_1(r) \\ 0 \\ g_3(r) \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь и ниже множитель e^{-iet}/r опускаем. Используя рекуррентные соотношения для вignerских функций [14], находим

$$\Sigma_{0,\phi}^S \Psi_{jm}^S = i\nu \left[T_{+1/2} \otimes \begin{vmatrix} -f_4 D_{-1} \\ +f_3 D_0 \\ +f_2 D_{-1} \\ -f_1 D_0 \end{vmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{vmatrix} -g_4 D_0 \\ +g_3 D_{+1} \\ +g_2 D_0 \\ -g_1 D_{+1} \end{vmatrix} \right].$$

Приведем выражение для члена, перемешивающего изотопические компоненты:

$$\frac{er^2K(r)+1}{r} (\gamma^1 \otimes t^2 - \gamma^2 \otimes t^1) \Psi_{jm} = i \frac{er^2K(r)+1}{r} \times$$

$$\times \left[T_{+1/2} \otimes \begin{vmatrix} 0 \\ +g_3 D_0 \\ 0 \\ -g_1 D_0 \end{vmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{vmatrix} -f_4 D_0 \\ 0 \\ +f_2 D_0 \\ 0 \end{vmatrix} \right].$$

Для краткости дальше используем обозначения

$$W \equiv er^2K(r)+1, \quad \tilde{F} \equiv \frac{erF(r)}{2}, \quad \tilde{\Phi} \equiv \frac{\kappa r\Phi(r)}{2}.$$

После простых вычислений находим систему радиальных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right) f_3 - i \frac{\nu}{r} f_4 - (M + \tilde{\Phi}) f_1 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right) f_4 + i \frac{\nu}{r} f_3 + i \frac{W}{r} g_3 - (M + \tilde{\Phi}) f_2 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right) f_1 + i \frac{\nu}{r} f_2 - (M + \tilde{\Phi}) f_3 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right) f_2 - i \frac{\nu}{r} f_1 - i \frac{W}{r} g_1 - (M + \tilde{\Phi}) f_4 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right) g_3 - i \frac{\nu}{r} g_4 - i \frac{W}{r} f_4 - (M - \tilde{\Phi}) g_1 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right) g_4 + i \frac{\nu}{r} g_3 - (M - \tilde{\Phi}) g_2 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right) g_1 + i \frac{\nu}{r} g_2 + i \frac{W}{r} f_2 - (M - \tilde{\Phi}) g_3 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right) g_2 - i \frac{\nu}{r} g_1 - (M - \tilde{\Phi}) g_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для случая $j = 0$ (при этом $\Sigma_{0,\phi} \Psi_{\varepsilon 0} \equiv 0$) радиальные уравнения упрощаются:

$$\begin{aligned} \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right) f_4 + i \frac{W}{r} g_3 - (M + \tilde{\Phi}) f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon + \tilde{F}\right) f_2 - i \frac{W}{r} g_1 - (M + \tilde{\Phi}) f_4 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right) g_3 - i \frac{W}{r} f_4 - (M - \tilde{\Phi}) g_1 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon - \tilde{F}\right) g_1 + i \frac{W}{r} f_2 - (M - \tilde{\Phi}) g_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем дополнительный диагонализующийся оператор. Обычный оператор P -инверсии для биспинорного поля не может быть полностью пригоден для такой цели, а требуемый оператор может быть построен как комбинация из биспинорного P -отражения и некоторого дискретного преобразования в изотопическом пространстве. Действительно, учтем, что биспинорное P -отражение в базе декартовой тетрады

$$\hat{P}_{bisp}^{Cart} \otimes \hat{P} = i\gamma^0 \otimes \hat{P},$$

где P -отражение пространственных координат будет определяться в сферическом базисе как

$$\hat{P}_{bisp}^{sph} \otimes \hat{P} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P} = -(\gamma^5 \gamma^1) \otimes \hat{P}.$$

Этот оператор действует на волновую функцию $\Psi_{jm}(x)$ следующим образом:

$$(\hat{P}_{bisp}^{sph} \otimes \hat{P}) \Psi_{ejm}(x) =$$

$$= (-1)^{j+1} \left[T_{+1/2} \otimes \begin{pmatrix} f_4 D_0 \\ f_3 D_{+1} \\ f_2 D_0 \\ f_1 D_{+1} \end{pmatrix} + T_{-1/2} \otimes \begin{pmatrix} g_4 D_{-1} \\ g_3 D_0 \\ g_2 D_{-1} \\ g_1 D_0 \end{pmatrix} \right].$$

Т. е., оператор с требуемыми свойствами строится так:

$$\begin{aligned} \hat{N}_{sph}^S &\equiv \hat{\pi}^S \otimes \hat{P}_{bisp}^{sph} \otimes \hat{P}, \\ \hat{\pi}^S T_{+1/2} &= (a + ib) T_{-1/2}, \\ \hat{\pi}^S T_{-1/2} &= (a + ib) T_{+1/2}. \end{aligned}$$

Общий множитель при величине $\hat{\pi}^S$ не существен при разделении переменных, ниже будем полагать $(\hat{\pi}^S)^2 = a^2 + b^2 = +1$. Из уравнения $\hat{N}_{sph}^S \Psi_{jm} = N \Psi_{jm}$ находим два собственных значения $N = \delta(-1)^{j+1}$, $\delta = \pm 1$ и ограничения на функции:

$$\begin{aligned} g_1 &= \delta(a + ib) f_4, \quad g_2 = \delta(a + ib) f_3, \\ g_3 &= \delta(a + ib) f_2, \quad g_4 = \delta(a + ib) f_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая (3.5), получаем уравнения, которые непротиворечивы только при условии, что $\tilde{F}(r) = 0$ и $\tilde{\Phi}(r) = 0$. Далее ограничиваемся рассмотрением чисто монопольного внешнего потенциала и исключаем дополнительное взаимодействие дублета со скалярными полями Хиггса. При этом система уравнений (3.3) принимает более простой вид (вводим обозначение $\Delta = a + ib$)

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{iv}{r} f_4 - M f_1 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{iv}{r} f_3 + i \frac{W}{r} \delta \Delta f_2 - M f_2 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{r} f_2 - M f_3 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{iv}{r} f_1 - i \frac{W}{r} \delta \Delta f_4 - M f_4 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{iv}{r} f_1 - i \frac{W}{r} \Delta^{-1} \delta f_4 - M - \tilde{\Phi} f_4 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{r} f_2 - M f_3 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{iv}{r} f_3 + i \frac{W}{r} \Delta^{-1} \delta f_2 - M f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{iv}{r} f_4 - M f_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В системе (3.6) необходимо различать два случая в зависимости от выражения для $W(r)$. Если $W(r) = 0$, различие между Δ и Δ^{-1} в уравнениях (3.6) не является значимым, поскольку соответствующие члены просто исчезают из уравнений. Для этого случая система (3.6) превращается в следующую

$$W(r) = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{iv}{r} f_4 - M f_1 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{iv}{r} f_3 - M f_2 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{r} f_2 - M f_3 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{iv}{r} f_1 - M f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Анализ радиальных уравнений может быть доведен до полного решения. Действительно, уравнения (3.7) допускают дальнейшие упрощения за счет диагонализации оператора $\hat{K}_{0,\phi} = -i\gamma^0 \gamma^5 \Sigma_{0,\phi}$.

Из уравнения $\hat{K}_{0,\phi} \Psi_{jm} = \lambda \Psi_{jm}$ следует

$$\lambda = -\mu \sqrt{j(j+1)}, \quad (\mu = \pm 1),$$

$$f_4 = \mu f_1', \quad f_3 = \mu f_2', \quad g_4 = \mu g_1', \quad g_3 = \mu g_2'.$$

Соответственно система (3.7) приводит к

$$\begin{aligned} \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + i \frac{v}{r} f_2 - \mu M f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - i \frac{v}{r} f_1 - \mu M f_1 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения решаются в функциях Бесселя. Волновая функция дублета с квантовыми числами $(\varepsilon, j, m, \delta, \mu)$ имеет вид

$$\Psi_{\varepsilon j m \delta \mu}^\Delta(x) = T_{+1/2} \otimes \begin{pmatrix} f_1 D_{-1} \\ f_2 D_0 \\ \mu f_3 D_{-1} \\ \mu f_4 D_0 \end{pmatrix} + \mu \delta \Delta T_{-1/2} \otimes \begin{pmatrix} f_4 D_0 \\ f_3 D_{+1} \\ \mu f_2 D_0 \\ \mu f_1 D_{+1} \end{pmatrix}.$$

Данная ситуация реализуется при $W \neq 0$. Здесь уравнения (3.6) совместимы, только если $\Delta = \Delta^{-1}$, следовательно, $\Delta = (a + ib) = \pm 1$. Комбинируя это соотношение с нормировочным условием $(a + ib)(a - ib) = 1$, можно получить $a = \pm 1$ и $b = 0$ (для определенности выберем параметр a равным +1). Соответствующий набор радиальных уравнений, полученный из (3.6), следующий:

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{iv}{r} f_4 - M f_1 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{iv}{r} f_2 - M f_3 &= 0, \\ \left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{iv}{r} f_3 + i \frac{W}{r} \delta f_2 - M f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{iv}{r} f_1 - i \frac{W}{r} \delta f_4 - M f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай $j = 0$, собственные значения и ограничения на волновую функцию:

$$N = -\delta, \quad \delta = \pm 1,$$

$$g_1(r) = \delta \Delta f_4'(r), \quad g_3(r) = \delta \Delta f_2'(r).$$

Величины \tilde{F} и $\tilde{\Phi}$ должны быть приравнены нулю. Возникают две возможности:

$$\begin{aligned} W(r) &= 0, \\ \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - M f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - M f_4 &= 0; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} W(r) &\neq 0, \\ \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - i \frac{\delta}{r} W\right) f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + i \frac{\delta}{r} W\right) f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

4 Нерелятивистское приближение: случай $j = 0$

В системе уравнений (3.10) при $\delta = +1$:

$$\begin{aligned} \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - i \frac{W}{r}\right) f_2 &= 0, \\ \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + i \frac{W}{r}\right) f_4 &= 0 \end{aligned}$$

сложим и вычтем уравнения друг из друга. В результате получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \frac{W}{r}\right) f + (\varepsilon + M) g &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{W}{r}\right) g - (\varepsilon - M) f &= 0, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$f_2(r) + f_4(r) = f(r), \quad i[f_2(r) - f_4(r)] = g(r).$$

Выделим энергию покоя следующей формальной заменой $\varepsilon = M + E$; в результате получаем (в первом уравнении пренебрегаем нерелятивистской энергией в сравнении с энергией покоя)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \frac{W}{r}\right) f + 2Mg &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{W}{r}\right) g - Ef &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Исключаем из (4.1) функцию $g(r)$, получаем одномерное уравнение Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \left(\frac{W}{r}\right) - \frac{W^2}{r^2}\right] f(r) = 0. \quad (4.2)$$

Воспользуемся известным в литературе монополярным решением Богомольного – Прасада – Зоммерфельда [11], [12]. В декартовой изотопической калибровке оно выглядит так:

$$\begin{aligned} W_i^a(x) &= \varepsilon_{iab} x^b K(r), \\ W &\equiv e r^2 K(r) + 1, \end{aligned}$$

где функция $W(r)$ задается шестью способами [13]:

$$W = \pm 1, \quad W = \pm \frac{Ar}{\text{sh} Ar}, \quad W = \pm \frac{Ar}{\sin Ar}, \quad (4.3)$$

A – произвольная постоянная.

Рассмотрим сначала первые два случая из (4.3). Первый вариант:

$$W(r) = +1, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{2}{r^2}\right) f(r) = 0 \quad (4.4)$$

приводит к задаче Шредингера с эффективным центробежным полем отталкивания от центра. В переменной $x = 2\sqrt{-2ME} r$ решение уравнения (4.4) строятся в функциях Бесселя. Второй случай:

$$\begin{aligned} W(r) &= -1, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME\right) f(r) = 0, \\ f &= e^{\pm i\sqrt{2ME} r}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Решение в (4.5) описывает бегущие сферические волны.

Теперь рассмотрим две возможности, наиболее часто исследуемые в литературе, как представляющие несингулярный монополь. Первая возможность:

$$W = + \frac{Ar}{\text{sh} Ar}, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{A^2}{\text{ch} Ar - 1}\right) f = 0, \quad (4.6)$$

это уравнение Шредингера в эффективном поле отталкивания. Здесь не может быть связанных состояний. Рассмотрим уравнение (4.6) детально. Сделаем замену переменной:

$$x = \frac{\cosh Ar + 1}{2}, \quad (4.7)$$

$$r \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1), \quad r \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$\left[x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{d}{dx} - \frac{2ME}{A^2} - \frac{1}{2(1-x)}\right] f(x) = 0$$

и введем подстановку $f(x) = x^a (1-x)^b F(x)$ при $a = 0, 1/2, b = -1/2, 1$ уравнение (4.7) для $F(x)$ является уравнением гипергеометрического типа

$$\begin{aligned} \left[x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + \left(2a + \frac{1}{2} - (2a + 2b + 1)x\right) \frac{d}{dx} - \right. \\ \left. - (a+b)^2 - \frac{2ME}{A^2}\right] F(x) = 0 \end{aligned}$$

с параметрами

$$\begin{aligned} \alpha &= a + b + \frac{\sqrt{-2ME}}{A}, \quad \beta = a + b - \frac{\sqrt{-2mE}}{A}, \\ \gamma &= 2a + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Чтобы иметь требуемое для связанных состояний поведение, нужно выбирать $a = 0, b = +1/2$; при этом $a + b$ не может быть отрицательным, следовательно $\alpha > 0$. Это означает, что связанных состояний в системе не существует.

Вторая возможность:

$$W = - \frac{Ar}{\text{sh} Ar}, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{A^2}{\text{ch} Ar + 1}\right) f = 0, \quad (4.8)$$

это уравнение Шредингера в эффективном поле притяжения (рисунок 4.1)

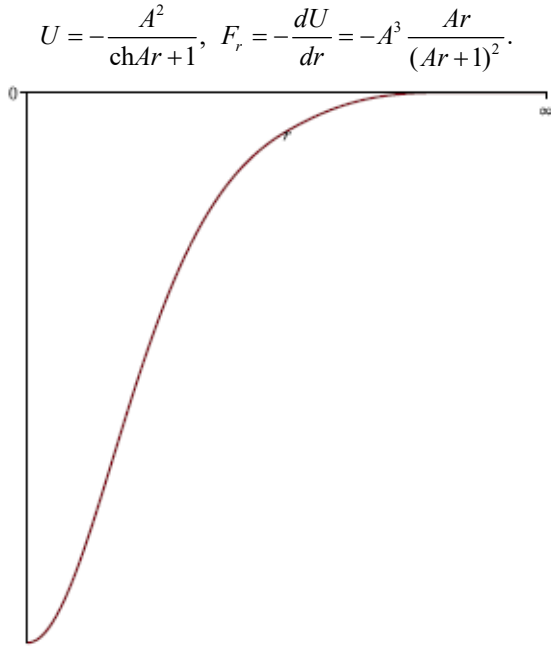


Рисунок 4.1 – Эффективное поле притяжения $U(r)$

Здесь, вообще говоря, могут существовать связанные состояния. В уравнении (4.8) сделаем замену переменных:

$$x = \frac{\cosh Ar + 1}{2}, \quad r \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1), \quad r \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

и введем подстановку $f(x) = x^a (1-x)^b F(x)$, $a = -\frac{1}{2}, 1, b = 0, \frac{1}{2}$; уравнение для $F(x)$ является уравнением гипергеометрического типа с параметрами

$$\alpha = a + b + \frac{\sqrt{-2ME}}{A}, \quad \beta = a + b - \frac{\sqrt{-2ME}}{A},$$

$$\gamma = 2a + \frac{1}{2}.$$

Имея в виду связанные состояния, будем строить решение, стремящееся к нулю на бесконечности. Для этих целей подходят два решения гипергеометрического уравнения:

$$U_3(x) = (-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta; \frac{1}{x}\right),$$

$$U_3(\infty) \sim (-x)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0;$$

$$U_4(x) = (-x)^{-\beta} F\left(\beta + 1 - \gamma, \beta, \beta + 1 - \alpha; \frac{1}{x}\right),$$

$$U_4(\infty) \sim (-x)^{-\beta}, \quad \beta > 0.$$

С учетом тождеств

$$-\alpha = -a - b - \frac{\sqrt{-2ME}}{A}, \quad -\beta = -a - b + \frac{\sqrt{-2ME}}{A}$$

заключаем, что пригодно только решение U_3 , при этом полная функция $f(x)$ на бесконечности обращается в ноль:

$$f(x \rightarrow +\infty) \sim x^a (-x)^b U_3(x \rightarrow +\infty) \sim x^{-\frac{\sqrt{-2ME}}{A}}. \quad (4.10)$$

Найдем, как ведет себя это решение около точки $x = 1$ ($r = 0$). Для этого воспользуемся соотношением Куммера [15] (явный вид коэффициентов K, L разложения не потребуется)

$$U_3(x) = KU_2(x) + LU_6(x),$$

$$U_2(x) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x),$$

$$U_6(x) = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta; 1 - x),$$

$$U_3(x \rightarrow 1) = K + L(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta}, \quad \gamma - \alpha - \beta = \frac{1}{2} - 2b.$$

Таким образом,

$$f(x \rightarrow 1) \sim (1 - x)^b [K + L(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta}] \sim (1 - x)^b K + (1 - x)^{1/2 - b} L. \quad (4.11)$$

Из (4.11) следуют две возможности (обе они приводят к конечным значениям функции $f(r \rightarrow 0)$):

$$b = 0, \quad f(x \rightarrow 1) \sim K; \quad b = \frac{1}{2}, \quad f(x \rightarrow 1) \sim L.$$

Обратимся к условию квантования. Применяя стандартное требование обращения гипергеометрического ряда в $U_3(x)$ в полином $\alpha = -n$, приходим (с учетом $a = -1/2, 1, b = 0, +1/2$) к единственной нетривиальной возможности удовлетворить этому условию

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad \frac{\sqrt{-2ME}}{|A|} = -n + \frac{1}{2}, \quad n = 0,$$

т. е. существует единственное связанное состояние

$$\frac{\sqrt{-2ME}}{|A|} = \frac{1}{2}, \quad E = -\frac{A^2}{8M}. \quad (4.12)$$

Легко убедиться прямой проверкой, что отвечающая уровню энергии (4.12) функция

$$f(x) = x^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\cosh Ar + 1}}$$

является решением уравнения (4.8) при найденном значении энергии (4.12). Эта функция квадратично интегрируема, нормировочный интеграл имеет вид

$$I = \int_0^\infty f^2(r) dr$$

$$= \frac{1}{A} \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{A} \frac{2}{x} \sqrt{x^2 - x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{2}{A}.$$

5 Нерелятивистское приближение: случай $j > 0$

Теперь обратимся к системе уравнений при $j > 0$ (см. (3.8)) при $\delta = +1$. В пределах каждой пары в (3.8) сложим и вычтем уравнения. С использованием обозначений

$$f_1 + f_3 = F, \quad i(f_1 - f_3) = f,$$

$$(f_2 + f_4) = G, \quad i(f_2 - f_4) = g \quad (5.1)$$

получаемые уравнения записываются так:

$$\frac{d}{dr} f + \varepsilon F + \frac{\nu}{r} g - MF = 0,$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dr}F + \varepsilon f - \frac{\nu}{r}G + Mf &= 0, \\ -\frac{d}{dr}g + \varepsilon G - \frac{\nu}{r}f + \frac{W}{r}g - MG &= 0, \\ -\frac{d}{dr}G - \varepsilon g - \frac{\nu}{r}F - \frac{W}{r}G - Mg &= 0. \end{aligned}$$

Выделяем энергию покоя заменой $\varepsilon = E + M$ и затем пренебрегаем нерелятивистской энергией E в сравнении с удвоенной энергией покоя $2M$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}f + Ef + \frac{\nu}{r}g &= 0, \quad \frac{d}{dr}F + \frac{\nu}{r}G - 2Mf = 0, \\ -\frac{d}{dr}g + EG - \frac{\nu}{r}f + \frac{W}{r}g &= 0, \\ \frac{d}{dr}G + \frac{\nu}{r}F + \frac{W}{r}G + 2Mg &= 0. \end{aligned}$$

Исключая малые компоненты f, g , находим два зацепляющихся уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \left(\frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu W}{r^2} \right) G, \\ \Delta G &= - \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{W}{r} \right) - \frac{W^2}{r^2} \right) G + \left(\frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu W}{r^2} \right) F, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\Delta = \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{\nu^2}{r^2} \right)$, $\nu = \sqrt{j(j+1)}$.

Рассмотрим первый случай $W(r) = +1$; в матричной форме имеем уравнение

$$\frac{1}{2}r^2\Delta \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix}.$$

Нужно найти преобразование, которое диагонализует матрицу справа:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 1 \end{vmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}. \\ S^{-1} &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\nu} + \frac{\sqrt{1+4\nu^2}}{2\nu} \\ 1 & \frac{1}{2\nu} - \frac{\sqrt{1+4\nu^2}}{2\nu} \end{vmatrix}, \\ S &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+4\nu^2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\nu^2}} \\ \frac{\nu}{\sqrt{1+4\nu^2}} & -\frac{\nu}{\sqrt{1+4\nu^2}} \end{vmatrix}, \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\nu^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\nu^2}. \end{aligned}$$

Учитывая $\sqrt{1+4\nu^2} = 2j+1$, находим выражения для λ_1, λ_2 : $\lambda_1 = -j, \lambda_2 = j+1$. Далее получаем несвязанные уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{j(j+3)}{r^2} \right) F' &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{(j-2)(j+1)}{r^2} \right) G' &= 0. \end{aligned}$$

Они решаются в функциях Бесселя, приводя к бегущим сферическим волнам.

Во втором случае $W(r) = -1$ с самого начала из (5.2) получаем несвязанные уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{j(j+1)}{r^2} \right) F &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME + \frac{j(j+1)-1}{r^2} \right) G &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения также решаются в функциях Бесселя, и не имеют решений, отвечающих связанным состояниям.

Для случаев

$$W = \pm \frac{Ar}{\sinh Ar}, \quad W = \pm \frac{Ar}{\sin Ar}$$

система зацепляющихся уравнений второго порядка (5.2) оказывается слишком сложной. Здесь метод приведения задачи к несвязанным уравнениям второго порядка реализовать не удастся, и конечная задача сводится к анализу уравнений 4-го порядка. Эти уравнения едва ли можно решить аналитически из-за одновременного присутствия в уравнениях рациональных и трансцендентных функций от переменной r .

6 Дублет дираковских частиц в пространствах постоянной кривизны

Обобщим приведенный выше анализ, сопоставив поведение дублета частиц в трех пространствах постоянной кривизны: Евклида E_3 , Лобачевского H_3 и Римана S_3 . Это даст возможность сформулировать дополнительные аргументы относительно того, какие решения уравнений Янга – Миллса представляют физический и теоретический интерес. Для определенности будем приводить формулы для случая сферического пространства S_3 , переход к пространству Лобачевского достигается посредством формальных замен.

В сферической системе координат метрика пространства S_3 определяется так:

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6.1)$$

Уравнение Дирака для дублета частиц принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \left[\gamma^0 (i\partial_t + erF(r)t^3) + i\gamma^3 \left(\partial_r + \frac{1}{\text{tgr}} \right) + \frac{1}{\sin r} \Sigma_{\theta, \phi}^{S_3} + \right. \\ \left. + \frac{er^2K+1}{\sin r} (\gamma^1 \otimes t^2 - \gamma^2 \otimes t^1) - \right. \\ \left. - (M + \kappa r\Phi(r)t^3) \right] \Psi^{S_3} = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

После необходимых вычислений (они существенно отличаются от сделанных при анализе случая плоского пространства) получаем систему радиальных уравнений, которую можно значительно упростить, если потребовать диагонализации

дискретного оператора, действующего одновременно в биспинорном и изотопическом пространствах. Приводим конечный результат при нетривиальном неабелевом потенциале:

$$\begin{aligned}
 &W(r) \neq 0, \quad j = 0, \\
 &\left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - i\delta \frac{W}{\sin r}\right) f_2 = 0, \\
 &\left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + i\delta \frac{W}{\sin r}\right) f_4 = 0; \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

при $W(r) \neq 0, j \neq 0,$

$$\begin{aligned}
 &\left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_3 - \frac{i\nu}{\sin r} f_4 - Mf_1 = 0, \\
 &\left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 + \frac{i\nu}{\sin r} f_3 + i \frac{W}{\sin r} \delta f_2 - Mf_2 = 0, \\
 &\left(+i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_1 + \frac{i\nu}{\sin r} f_2 - Mf_3 = 0, \\
 &\left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \frac{i\nu}{\sin r} f_1 - i \frac{W}{\sin r} \delta f_4 - Mf_4 = 0. \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Имея системы радиальных уравнений для случая сферического пространства S_3 (6.3) и (6.4), легко написать аналогичные системы радиальных уравнений в пространствах E_3 и H_3 ; для этого достаточно формально заменить $\sin r \Rightarrow r, \sin r \Rightarrow \sinh r$ соответственно.

Напомним явный вид радиальной функции $W(r)/\sin r$, найденной во всех трех моделях пространства [13]:

$$\begin{aligned}
 S_3, \quad \frac{W}{\sin r} &= \varphi(r), \quad r \in [0, \pi], \\
 H_3, \quad \frac{W}{\sinh r} &= \varphi(r), \quad r \in [0, +\infty), \\
 E_3, \quad \frac{W}{r} &= \varphi(r), \quad r \in [0, +\infty). \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Имеем шесть возможностей для выбора явного вида функции $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \pm \frac{a}{\sin ar}, \quad \pm \frac{a}{\sinh ar}, \quad \pm \frac{a}{ar};$$

различающиеся знаком решения будем различать с помощью множителя $\mu = \pm 1$.

Если обратиться к явному виду уравнений при $j \neq 0$, то легко заметить, что среди трех пар решений, возникающих при анализе уравнений Янга-Миллса в пространствах постоянной кривизны E_3, H_3, S_3 для монополюной подстановки, для каждого пространства имеется только одна пара решений, которая выделена своей очевидной связью с выбранной геометрией пространства. Ситуация может быть охарактеризована следующим образом

	E_3	H_3	S_3
ar	*	-	-
$\sinh ar$	-	*	-
$\sin ar$	-	-	*

В этой связи следует специально отметить, что известное несингулярное монополюное решение в пределе Богомольного – Прасада – Зоммерфельда в пространстве Минковского является в определенном смысле искусственной комбинацией геометрии плоского пространства с возможностью, ассоциированной с геометрией пространства Лобачевского.

В трех моделях геометрии для нулевого значения квантового числа j имеем уравнения:

$$\begin{aligned}
 E_3, \quad \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - \delta\mu \frac{i}{r}\right) f_2 &= 0, \\
 \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + \delta\mu \frac{i}{r}\right) f_4 &= 0; \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_3, \quad \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - \delta\mu \frac{i}{\sin r}\right) f_2 &= 0, \\
 \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + \delta\mu \frac{i}{\sin r}\right) f_4 &= 0; \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_3, \quad \left(i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_4 - \left(M - \delta\mu \frac{i}{\sinh r}\right) f_2 &= 0, \\
 \left(-i \frac{d}{dr} + \varepsilon\right) f_2 - \left(M + \delta\mu \frac{i}{\sinh r}\right) f_4 &= 0. \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Для простоты ограничимся подробным изложением только случая $j = 0$.

В системах (6.6)–(6.8) сложим и вычтем уравнения друг из друга. В результате соответственно получим:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{r}\right) f + (\varepsilon + M)g &= 0, \\
 \left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{r}\right) g - (\varepsilon - M)f &= 0, \\
 \left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sin r}\right) f + (\varepsilon + M)g &= 0, \\
 \left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sin r}\right) g - (\varepsilon - M)f &= 0, \\
 \left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right) f + (\varepsilon + M)g &= 0, \\
 \left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right) g - (\varepsilon - M)f &= 0,
 \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 f_2(r) + f_4(r) &= f(r), \\
 i[f_2(r) - f_4(r)] &= g(r).
 \end{aligned}$$

Выделим энергию покоя следующей формальной заменой $\varepsilon = M + E$; пренебрегаем нерелятивистской энергией в сравнении с энергией покоя

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{r}\right) f + 2Mg &= 0, \\
 \left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{r}\right) g - Ef &= 0, \\
 \left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sin r}\right) f + 2Mg &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sin r}\right)g - Ef = 0, \quad (6.9)$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right)f + 2Mg = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\delta\mu}{\sinh r}\right)g - Ef = 0.$$

Исключаем из (6.9) функции $g(r)$, получаем нерелятивистские уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\delta\mu}{r^2} - \frac{1}{r^2} + 2ME\right)f = 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\delta\mu \cos r}{\sin^2 r} - \frac{1}{\sin^2 r} + 2ME\right)f = 0, \quad (6.10)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\delta\mu \cosh r}{\sinh^2 r} - \frac{1}{\sinh^2 r} + 2ME\right)f = 0.$$

Все три уравнения (6.10) решаются в гипергеометрических функциях, при этом не возникает решений, отвечающих связанным состояниям. Исключением является случай сферического пространства, где дискретность уровней энергии возникает из-за топологии самого пространства [16].

Приведем конечные результаты анализа нерелятивистского приближения при больших значениях $j > 0$.

В сферическом пространстве нерелятивистские уравнения выглядят так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{v^2}{\sin^2 r}\right)F &= \frac{\cos r + \delta\mu}{\sin^2 r}(0 \cdot G + vG), \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{v^2}{\sin^2 r}\right)G &= \\ &= \frac{\cos r + \delta\mu}{\sin^2 r}(vF + \delta\mu G). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Система переписывается в матричной форме

$$\begin{aligned} \Delta \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & v \\ v & \delta\mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix}, \\ \Delta &= \left(\frac{\cos r + \delta\mu}{\sin^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{v^2}{\sin^2 r}\right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Аналог этой системы в пространстве Лобачевского будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \Delta \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & v \\ v & \delta\mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F \\ G \end{vmatrix}, \\ \Delta &= \left(\frac{\cosh r + \delta\mu}{\sinh^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME - \frac{v^2}{\sinh^2 r}\right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

В обеих системах (6.11) и (6.12) матрицы справа диагонализуются с помощью линейных преобразований; в результате возникают два несвязанных уравнения. В случае сферического пространства Римана эти уравнения приводят к дискретным значениям энергии из-за компактности пространства [16]. В пространстве Лобачевского

возникающие дифференциальные уравнения не содержат решений, отвечающих связанным состояниям.

Заключение

Построено нерелятивистское уравнение паулиевского типа для дублета дираковских частиц, учитывающее присутствие внешних неабелевых полей. Оно детализировано в случае неабелевых монополюльных потенциалов: вложенного в неабелеву модель потенциала дираковского монополя и потенциалов Богомольного – Прасада – Зоммерфельда. С применением аппарата функций Вигнера проведено разделение переменных. В случае минимального значения полного момента $j = 0$ уравнение Паули сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка, которое решается точно, возникающие эффективные потенциалы допускают существование одного единственного связанного состояния. В случае $j > 0$ в нерелятивистском приближении задача сводится к зацепляющейся системе двух уравнений; при специальном виде неабелева потенциала в приближении Богомольного – Прасада – Зоммерфельда эти уравнения удастся разделить и также решить уравнения, построив бегущие сферические волны.

Проведено сопоставление поведения дублета дираковских частиц в трех пространствах постоянной кривизны: Евклида E_3 , Лобачевского H_3 и Римана S_3 . Это дает возможность сформулировать дополнительные аргументы относительно того, какие решения уравнений Янга – Миллса представляют физический и теоретический интерес. В частности, известное несингулярное монополюльное решение в пределе Богомольного – Прасада – Зоммерфельда в пространстве Минковского является в определенном смысле искусственной комбинацией геометрии плоского пространства с возможностью, ассоциированной с геометрией пространства Лобачевского. Это позволяет высказать точку зрения, что отношение к физическому статусу данного монополюльного решения, возможно, следует пересмотреть. Показано, что в такой трактовке во всех трех пространствах связанных состояний для дублета фермионов в полях неабелева монополя не возникает.

ЛИТЕРАТУРА

1. 't Hooft, G. Monopoles in unified gauge theories / G. 't Hooft // Nucl. Phys. B. – 1974. – Vol. 79, № 2. – P. 276–284.
2. Поляков, А.М. Спектр частиц в квантовой теории поля / А.М. Поляков // Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 20, вып. 6. – С. 430–433.
3. Julia, B. Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory / B. Julia,

- A. Zee // *Phys. Rev. D.* – 1975. – Vol. 11, № 8. – P. 2227–2232.
4. Bais, F.A. Magnetic-monopole solution of non-Abelian gauge theory in curved space-time / F.A. Bais, R.J. Russel // *Phys. Rev. D.* – 1975. – Vol. 11, № 10. – P. 2692–2695.
5. Swank, J.H. Fermions in Yang – Mills potentials / J.H. Swank, L.J. Swank, Tekin Dereli // *Phys. Rev. D.* – 1975. – Vol. 12, № 4. – P. 1096–1102.
6. Jackiw, R. Solitons with fermion number 1/2 / R. Jackiw, C. Rebbi // *Phys. Rev. D.* – 1976. – Vol. 13, № 12. – P. 3398–3409.
7. Jackiw, R. Spin from isospin in a gauge theory / R. Jackiw, C. Rebbi // *Phys. Rev. Lett.* – 1976. – Vol. 36, № 19. – P. 1116–1119.
8. Hasenfratz, P. Fermion-boson puzzle in a gauge theory / P. Hasenfratz, G. 't Hooft // *Phys. Rev. Lett.* – 1976. – Vol. 36, № 19. – P. 1119–1122.
9. Прохвятилов, Е.В. Фермионы в поле монополя Хуфта – Полякова / Е.В. Прохвятилов, В.А. Франке // *Ядер. физика.* – 1976. – Т. 24, вып. 4. – С. 856–860.
10. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.
11. Prasad, M.K. Exact classical solution of the 't Hooft monopole and Julia – Zee dyon / M.K. Prasad, C.M. Sommerfield // *Phys. Rev. Lett.* – 1975. – Vol. 35, № 12. – P. 760–762.
12. Богомольный, Е.Б. Стабильность классических решений / Е.Б. Богомольный // *Ядер. физика.* – 1976. – Т. 24. – С. 861–870.
13. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.
14. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 439 с.
15. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.
16. Red'kov, V.M. Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V.M. Red'kov, E.M. Ovsyuk. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 p.

Поступила в редакцию 22.03.16.

УДК 621.315.592

МАРШРУТ ПРОИЗВОДСТВА ФОТОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ТОНКИХ ПЛЕНОК ХАЛЬКОГЕНИДОВ

В.В. Хорошко

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

PRODUCTION ROUTE OF SOLAR CELLS BASED ON THIN FILMS OF CHALCOGENIDES

V.V. Khoroshko

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Приведён и обоснован маршрут производства тонкопленочных фотопреобразователей. Данный маршрут позволяет выполнить требования к качеству получаемых материалов конструкции *Mo/поглощающая пленка/CdS/ZnO/Al-Ni*.

Ключевые слова: тонкие пленки, фотопреобразователь, физические характеристики, эффективность.

Route production of thin-film solar cells is presented and justified. This route allows fulfilling the requirements for the quality of the resulting materials of the design *Mo/absorber layer/CdS/ZnO/Al-Ni*.

Keywords: $Cu_xIn_xZn_{2-x}Se_2$, thin films, solar cells, physical characteristics, efficiency.

Введение

Рост энергопотребления является характерной чертой современного человечества. К настоящему времени более 75% электроэнергии вырабатывается за счет сжигания минерального и органического топлива. Однако энергетика столкнулась с истощением своей традиционной сырьевой базы в силу ограниченности ископаемых энергетических ресурсов.

В то же самое время существует источник экологически чистой энергии, использование которой может позволить человеку решать значительное количество задач по обеспечению энергетической и экологической безопасности. Таким источником энергии является Солнце. Даже для регионов Беларуси годовое количество солнечной энергии, падающей на горизонтальную площадку находится в районе $1180 \text{ кВт}\cdot\text{ч}/\text{м}^2$ [1].

Фотовольтаический способ преобразования солнечного излучения признан одним из наиболее перспективных способов получения экологически чистой электроэнергии. Создание тонкопленочных фотовольтаических устройств в высокоразвитых странах Европы, США и Японии выделилось в самостоятельную отрасль электронной промышленности (PV-industry), развивающуюся ускоренными темпами. Так как стоимость энергии, добытой с использованием традиционных видов топлива постоянно растёт, а стоимость энергии, получаемой от солнечных батарей постоянно снижается можно говорить о том, что в ближайшее время по уровню себестоимости данный вид энергии приблизится к традиционным [2].

Основным материалом для изготовления СЭ в настоящее время остается кристаллический

кремний, так как он является основным материалом всей твердотельной электроники, и его производство отлажено. КПД производимых СЭ составляет в около 22% [3]. Главным недостатком такого материала является относительно невысокий коэффициент поглощения, что приводит к необходимости обеспечения толщины такого материала в сотни микрон. Такой большой расход приводит к тому, что в общей стоимости СЭ более 50% составляет стоимость кремниевой подложки [3]. Из-за указанного недостатка, а также в силу хорошей изученности производства кристаллического кремния не удаётся снизить параметр $\text{US}\$/\text{Вт}$, определяющий стоимость за Ватт установленной мощности. С точки зрения получения дешёвых СЭ экономически рентабельным в настоящее время является производство электроэнергии с помощью тонкопленочных фотопреобразователей. Оптимальным аморфным материалом для производства СЭ является аморфный кремний (a-Si). В целом a-Si является достаточно перспективным материалом для СЭ с относительно высоким КПД, низкой себестоимостью и малым расходом материала за счет значительно меньшей толщины поглощающего слоя, чем у остальных СЭ на основе кремния. Основной проблемой a-Si-СЭ является их сильная деградация за счет возникновения метастабильных дефектов при облучении солнечным светом, что обусловлено эффектом Стейблера – Вронского [4]. Деградация a-Si значительно сокращает срок службы и область применения таких СЭ и не позволяет использовать их в условиях сильных ионизирующих излучений.

Развитие фотовольтаики непосредственно связано с поиском и исследованием новых материалов, позволяющих расширить и дополнить спектр свойств уже освоенных материалов. Многокомпонентные полупроводниковые соединения со структурой халькопирита (в особенности CuInSe_2) вызывают особый интерес с точки зрения их использования в качестве поглощающего слоя в СЭ. Так, например, использование тройных $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{VI}}\text{C}^{\text{VI}}_2$ и более сложных фаз с халькопиритной структурой уже позволило получить в лабораторных условиях тонкопленочные солнечные элементы (СЭ) на основе $\text{Cu}(\text{In}_x\text{Ga}_{1-x})\text{Se}_2$ (СІGS) с рекордной эффективностью до 21% [5]. Производимые промышленно СЭ на основе СІGS тонких пленок имеют гораздо меньшую эффективность в 12–14%.

1 Структура тонкопленочного фотопреобразователя

Ранее проведенные исследования показали перспективность применения метода селенизации базовых слоев при формировании тонкопленочных фотопреобразователей. Структура такого солнечного элемента представлена на рисунке 1.1 [6].

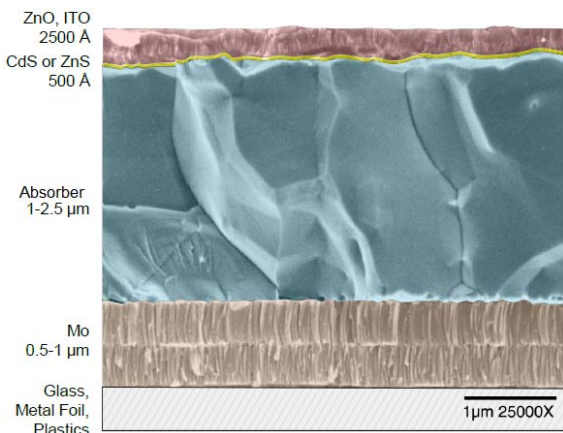


Рисунок 1.1– Структура тонкопленочного фотопреобразователя

Безусловно, кроме приведенной структуры СЭ существуют и разрабатываются и другие варианты конструктивного исполнения СЭ, но на данный момент такой вариант исполнения обеспечивает наилучшей параметр $\text{US}\$/\text{Вт}$.

Задачей данной работы является анализ маршрута *in-line* производства тонкопленочных фотопреобразователей, при этом поглощающий слой формируется с использованием селенизации.

2 Анализ маршрута *in-line* производства тонкопленочных фотопреобразователей

Ранее были экспериментально обоснованы температурно-временные режимы формирования тонких пленок $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$, получаемые при термической обработке базовых слоев в парах селена, переносимых потоком азота, при температурах 240–270° С в течение 25–30 минут на

первой стадии, на второй стадии – при температурах 500–510° С в течение 35–40 минут, что позволяет сформировать однородные пленки, кристаллическая структура и элементный состав которых соответствуют объемным кристаллам [7]–[9].

Фоточувствительные структуры $\text{Mo}/\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2/\text{CdS}/\text{ZnO}/\text{Ni-Al}$, поглощающий слой $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ которых сформирован селенизацией, показали КПД 9,1%, что указывает на возможность применения полученных тонких пленок в качестве фотопреобразователей солнечного излучения [8].

Формирование приборов происходит на стеклянных подложках или гибких: нержавеющей стали, титан. После обработки подложек наносится слой молибдена, который является нижним контактом структуры [1]. Для получения базовых слоев Cu-In используется метод вакуумного осаждения. Давление остаточных газов в процессе осаждения металлов составляет около $8,7 \times 10^{-4}$ Па. Температура подложек поддерживается на уровне 100–120° С. Используются металлы чистоты В4. После происходит нанесение ZnSe с сохранением стехиометрии необходимого состава. Далее пленки подвергаются процессу селенизации в реакторной системе печи для формирования слоев $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$.

После селенизации образцы поступают на операцию нанесения CdS методом химического осаждения. Для получения CdS толщиной 50 нм, используется смесь трех компонент: ammonia- NH_3 (1М), cadmiumsalt- CdI_2 или CdSO_4 ($1,4 \times 10^{-3}$ М) и thiourea NH_2CSNH_2 (0.14 М). Этот процесс проводится в течение 4 мин. Затем магнетронным напылением из цинковой мишени в смеси аргона с кислородом (90% Ar + 10% O_2) при давлении 5×10^{-3} мм. рт. ст. осаждаются высокоомные пленки *i*- ZnO толщиной $80 \div 100$ нм с $\rho = 10^6$ Ом·см и низкоомные слои *n*- ZnO с $\rho = 20 - 80$ Ом·см при толщине 300 нм. Напыление Ni-Al контактной сетки проводится на стандартной промышленной установке методом термического напыления в едином процессе. Толщина слоев Ni и Al составляет 0.1 мкм и 0.8–1.0 мкм соответственно. Далее полученные структуры скрайбируются до слоя Mo и поступают на измерения фотоэлектрических параметров солнечных элементов.

Общая схема такого процесса показана на рисунке 2.1. На рисунке 2.1 представлены следующие блоки:

1 – **Транспортный накопитель.** На него устанавливаются кассеты с подложками перед каждым тактом технологического процесса;

2 – **Модуль загрузки и ионной обработки.** В нем происходит предварительная откачка, предварительный нагрев до 150...200° С и ионная обработка подложек;

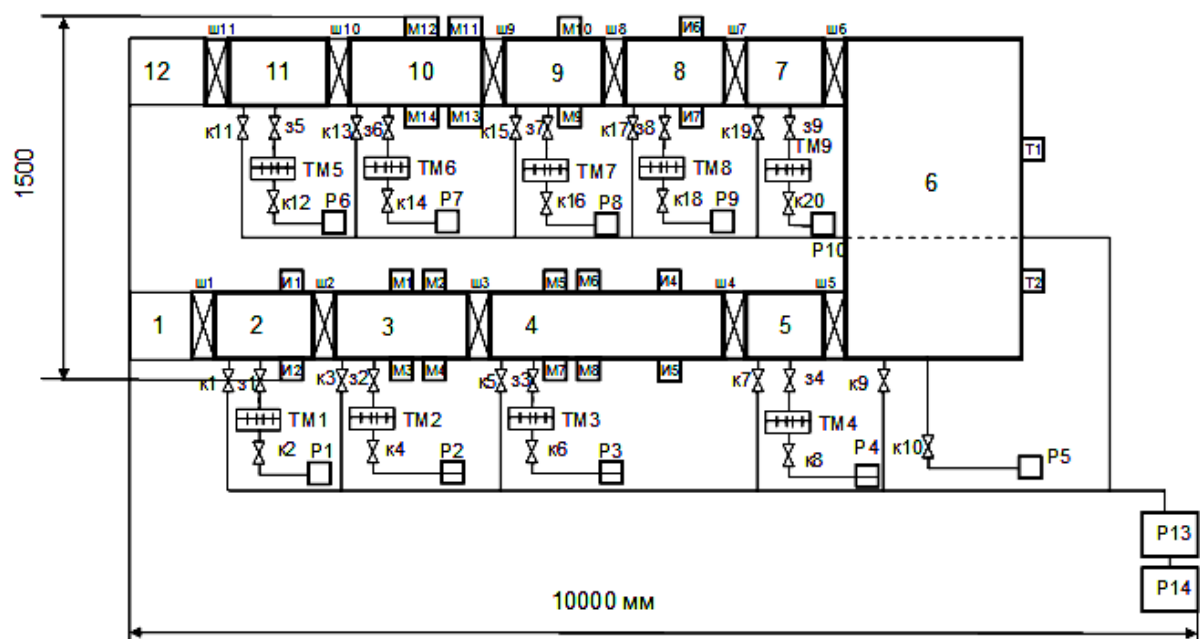


Рисунок 2.1 – Схема линии по производству тонкопленочных фотопреобразователей

3 – **Модуль нанесения молибдена.** В нем наносится молибден с помощью магнетронов и поддерживается температура 150...200° С;

4 – **Модуль нанесения поглощающего слоя.** По описанным режимам проводится нанесение базовых слоев поглощающей пленки;

5 – **Модуль нанесения NaF.** В случае применения гибких подложек NaF наносится с помощью ионных источников;

6 – **Буферный модуль.** Он служит для «разгрузки» модуля селенизации и модуля нанесения поглощающего слоя, т. е. предотвращает попадание селена в модуль нанесения прекурсоров, а также в нем происходит нагрев подложек до 400...500° С перед поступлением в модуль селенизации;

7 – **Модуль селенизации.** Предназначен для нагрева подложек до 510° С в течение 30 мин, при непрерывной подаче селена в камеру методом термического испарения. Он служит для получения конечного слоя $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$. Процесс селенизации происходит при перенасыщенном паре селена, что не позволяет селену возгораться из покрытия. Селен подается в камеру с помощью термических испарителей. В модуле селенизации непрерывно поддерживается температура около 510° С;

8 – **Буферный модуль.** Он служит для «разгрузки» модуля селенизации и модуля нанесения CdS, т. е. предотвращает попадание селена в модуль нанесения CdS и поддерживает температуру 150...200° С;

9 – **Модуль нанесения CdS.** В нем наносится CdS с помощью химического осаждения;

10 – **Модуль нанесения ZnO.** В нем наносится ZnO с помощью дуальных магнетронов

или ионных источников и поддерживается температура 150...200° С;

11 – **Модуль нанесения ZnO/Al.** В нем наносится ZnO/Al с помощью дуальных магнетронов или ионных источников и поддерживается температура 150...200° С;

12 – **Модуль охлаждения.** Кассеты с подложками охлаждаются здесь до определённой температуры. Возможно использование инертного газа;

13 – **Модуль выгрузки.** В нем происходит окончательное остывание кассет с подложками, а также «развязывается» выход на атмосферу с модулем охлаждения;

14 – **Транспортный накопитель.** На него выходят кассеты с подложками после каждого такта технологического процесса.

In-line методы обладают следующими преимуществами.

1. Проведение всех операций на отдельных подложках, размер которых аналогичен кремниевым СЭ (например, 150x150 мм), резко упрощает технологию дальнейшей проверки, разбраковки и сборки в модули СЭ, которые могут проводиться на имеющемся оборудовании производства кремниевых СЭ.

2. Отсутствие переноса заготовок с установки на установку предотвращает контакт с атмосферой и позволяет добиться высокого процента выхода и КПД СЭ.

3. Необходимый комплект оборудования может быть сформирован дешево и компактно по сравнению с roll-to-roll технологией на подложках из нержавеющей стали.

4. Возможность применять различные материалы подложек: стекло, металлические фольги, полиимид.

Образцы фотопреобразователей могут изготавливаться на различных металлических и диэлектрических фольгах. Полученные образцы скрайбируются до слоя Мо и поступают на измерения фотоэлектрических параметров солнечных элементов.

В процессе всего цикла изготовления качество сформированных плёнок может быть контролировано по тестовым плёнкам, сформированным в едином процессе с рабочими образцами (по толщине, удельному сопротивлению, и визуально при помощи оптического микроскопа на однородность и дефектность плёнки).

Заключение

Приведён вариант маршрута In-Line для изготовления тонкопленочных фотопреобразователей, поглощающий слой которых формируется методом селенизации базовых слоев. Разработанный процесс довольно прост в реализации. Все операции выполняются в рамках одной линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гременок, В.Ф. Солнечные элементы на основе полупроводниковых материалов / В.Ф. Гременок, М.С. Тиванов, В.Б. Залесский. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2007. – 222 с.
2. Coby S. Tao. Natural resource limitations to terawatt-scale solar cells / Coby S. Tao, Jiechao Jiang, Meng Tao // Solar Energy Materials Solar Cells. – 2011. – Vol. 95, № 12. – P. 3176–3180.
3. Афанасьев, В.П. Тонкопленочные солнечные элементы на основе кремния / В.П. Афанасьев, Е.И. Теруков, А.А.Шерченков; 2-е изд.– Санкт-Петербург: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011.
4. *Современные проблемы полупроводниковой фотоэнергетики*; под ред. Т. Коутса, Дж. Микина. – М.: Мир, 1988.
5. Green, M.A. Solar cell efficiency tables (version 37) / M.A. Green, K. Emery, Y. Hishikawa, W. Warta // Progress in Photovoltaics: Research and Applications. – 2010. – № 19. – P. 84–92.
6. *CIGS Road Map. NREL technical report* / A. Goodrich [et al.] // 35rd IEEE Photovoltaic Specialists Conference. – San Diego, California – 2011. – P. 45–50.
7. Цырельчук, И.Н. Структурно-морфологические свойства слоев ZnSe/(Cu-In), полученных термическим испарением / И.Н. Цырельчук, В.Ф. Гременок, В.В. Хорошко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 14–18.
8. Солнечные элементы с $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ поглощающим слоем / В.В. Хорошко, И.Н. Цырельчук, В.Ф. Гременок, А.Н. Петлицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 33–36.
9. Структурные и морфологические свойства тонких пленок $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$, полученных на гибких подложках / В.В. Хорошко, И.Н. Цырельчук, В.Ф. Гременок, В.В. Шаталова // Доклады БГУИР. – 2015. – № 8 (94). – С. 71–75.

Поступила в редакцию 23.06.16.

УДК 517.958:537.8

РАССЕЯНИЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ НА ТОНКОЙ НЕЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ И БИИЗОТРОПНОМ ШАРЕ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Г.Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

SCATTERING OF THE FIELD OF THE ELECTRICAL DIPOLE ON THIN UNCLOSED SPHERICAL SHELL AND BI-ISOTROPIC BALL. ANALYTICAL APPROACH

G.Ch. Shushkevich

Y. Kupala Grodno State University

Построено аналитическое решение осесимметричной граничной задачи, описывающей процесс рассеяния электромагнитного поля электрического диполя на биизотропном шаре. Диполь расположен внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. Получена формула для вычисления диаграммы направленности электрического поля. Построены графики диаграммы направленности для некоторых параметров задачи.

Ключевые слова: электрический диполь, уравнения Максвелла, векторные сферические волновые функции, парные сумматорные уравнения, диаграмма направленности электрического поля.

The analytical solution of axially symmetric boundary problem of process scattering of electromagnetic field of electric dipole on bi-isotropic ball is constructed. The dipole is located inside thin unclosed spherical shell. The formula for calculating directive pattern of electric field is received. The graphics of directive pattern for some parameters of the problem are constructed.

Keywords: electric dipole, Maxwell's equations, vector spherical wave functions, dual series equations, directive pattern of the electric field.

Введение

В последние годы значительно возрос интерес исследователей к изучению электродинамических свойств композитных материалов. Примером таких материалов могут быть киральные материалы и метаматериалы, подробная классификация которых приводится в работах [1]–[4]. Биизотропные среды являются обобщением киральных сред. Кроме киральности, данные среды обладают также свойством невзаимности, что делает их перспективными в прикладном отношении [5]–[7].

Биизотропные среды обладают способностью как усиливать, так поглощать электромагнитные поля. Свойство усиления может быть использовано в проектировании различных эффективных антенных систем, свойство поглощения – при создании малоотражающих покрытий и электромагнитных экранов [8]–[11].

Рассмотрим некоторые научные работы, относящиеся к данной теме. В монографии [12] излагается теория дифракции электромагнитных волн, возбуждаемых элементарными источниками электрического или магнитного типов на киральных телах вращения с цилиндрической и сферической симметрией. Излучение системы источников в киральной среде рассматривается в [13]–[14]. Аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на

биизотропном шаре представлено в работах [15]–[16]. В [17] построено аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на плоском слое из композитного материала. Проникновение электромагнитных полей электрического и магнитного диполей через плоский биизотропный слой рассматривается в [18]. В работах [19]–[20] исследуется отражение электромагнитных волн от плоских киральных структур. Методом частичных областей в [21] решена задача рассеяния плоской электромагнитной волны на металлическом цилиндре, покрытом киральным слоем. Численное исследование рассеяния поля электрического диполя на биизотропном шаре проведено в [22].

В данной работе построено аналитическое решение осесимметричной задачи рассеяния поля электрического диполя на биизотропном шаре. Источник электромагнитного поля расположен внутри идеальной проводящей тонкой незамкнутой сферической оболочки.

1 Постановка и представление решения задачи

Пусть пространство R^3 разделено сферой S радиуса a_1 с центром в точке O_1 на две области D_0 ($r_1 > a_1$), D_1 ($0 \leq r_1 < a_1$) (рисунок 1.1). В области D_0 находится идеально проводящая

бесконечно тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 , расположенная на сфере Γ радиуса a с центром в точке O . Область пространства, ограниченную сферой Γ , обозначим через $D_0^{(0)}$ ($0 \leq r < a$), тогда $D_0^{(1)} = D_0 \setminus (D_0^{(0)} \cup \Gamma)$. Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h .

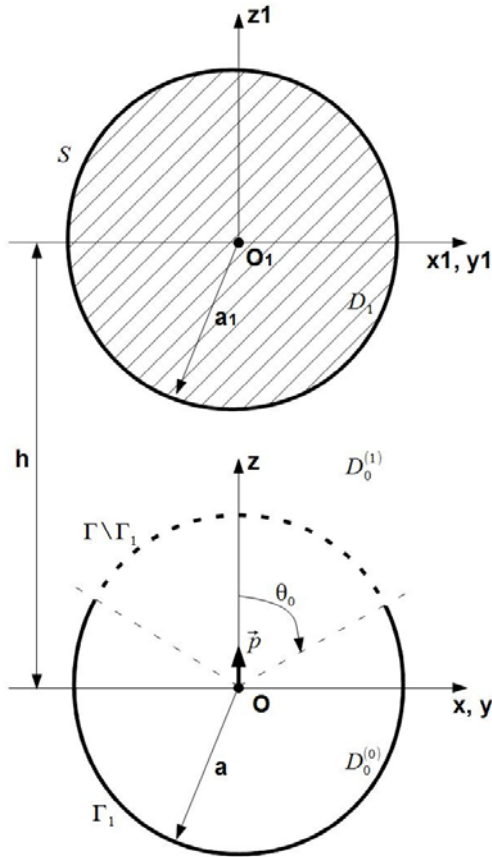


Рисунок 1.1 – Геометрия задачи

Область D_0 заполнена средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 и магнитной проницаемостью μ_0 , область D_1 – однородной биизотропной средой, материал которой характеризуется параметрами ϵ, μ, G, Z .

В точке O расположен ориентированный вдоль оси Oz электрический диполь Герца, колеблющийся с круговой частотой ω . Будем полагать, что на поверхности S отсутствуют поверхностные токи и заряды.

Для решения задачи свяжем с точками O и O_1 сферические координаты. Тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 и сферическая оболочка S описываются следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{r = a, \theta_0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$S = \{r_1 = a_1, 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Обозначим через \vec{E}_e, \vec{H}_e вектора напряженности электрического и магнитного поля диполя соответственно.

В результате взаимодействия электромагнитного поля \vec{E}_e, \vec{H}_e диполя с биизотропным шаром и незамкнутой сферической оболочкой Γ_1 образуются вторичные поля. Пусть \vec{E}_0^0, \vec{H}_0^0 – вторичное поле, отраженное от границы Γ_1 в области $D_0^{(0)}$, \vec{E}_1^0, \vec{H}_1^0 – вторичное поле в области D_1 , $\vec{E}_0 = \vec{E}_1^0 + \vec{E}_1^1, \vec{H}_0 = \vec{H}_1^0 + \vec{H}_1^1$ – суммарное вторичное поле в области $D_0^{(1)}$, \vec{E}_0^1, \vec{H}_0^1 – вторичное поле, отраженное от границы Γ_1 в области $D_0^{(1)}$, \vec{E}_1^1, \vec{H}_1^1 – вторичное поле, отраженное от границы S в области $D_0^{(1)}$.

Реальное электромагнитное поле определяется с помощью формул:

$$\vec{E}_j^k = \text{Re}(\vec{E}_j^k e^{-i\omega t}),$$

$$\vec{H}_j^k = \text{Re}(\vec{H}_j^k e^{-i\omega t}),$$

$j = 0, 1; k = 0, 1; i$ – мнимая единица.

Постановка задачи. Требуется определить вторичные электромагнитные поля

$$\vec{E}_0^0, \vec{H}_0^0 \in C^1(D_0^{(0)}) \cap C(\bar{D}_0^{(0)}),$$

$$\vec{E}_0, \vec{H}_0 \in C^1(D_0^{(1)}) \cap C(\bar{D}_0^{(1)}),$$

$$\vec{E}_1, \vec{H}_1 \in C^1(D_1) \cap C(\bar{D}_1),$$

которые удовлетворяют:

– уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{E}_0^0 = i\omega\mu_0 \vec{H}_0^0, \text{ rot } \vec{H}_0^0 = -i\omega\epsilon_0 \vec{E}_0^0 \text{ в } D_0^{(0)}, \quad (1.1)$$

$$\text{rot } \vec{E}_0 = i\omega\mu_0 \vec{H}_0, \text{ rot } \vec{H}_0 = -i\omega\epsilon_0 \vec{E}_0 \text{ в } D_0^{(1)}, \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \vec{E}_1 = i\omega(\mu \vec{H}_1^0 + Z \vec{E}_1^0),$$

$$\text{rot } \vec{H}_1^0 = -i\omega(\epsilon \vec{E}_1^0 + G \vec{H}_1^0) \text{ в } D_1, \quad (1.3)$$

где $G = (\tau + i\kappa)\sqrt{\epsilon_0\mu_0}, Z = (\tau - i\kappa)\sqrt{\epsilon_0\mu_0}, \kappa$ – параметр киральности, τ – параметр Теллгена;

– граничному условию на поверхности идеально проводящей незамкнутой сферической оболочки Γ_1

$$[\vec{n}, \vec{E}_0] \Big|_{\Gamma_1} = [\vec{n}, \vec{E}_e + \vec{E}_0^0] \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (1.4)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к поверхности Γ_1 ,

– граничным условиям на поверхности S

$$[\vec{n}, \vec{E}_0] \Big|_S = [\vec{n}, \vec{E}_1^0] \Big|_S,$$

$$[\vec{n}, \vec{H}_0] \Big|_S = [\vec{n}, \vec{H}_1^0] \Big|_S, \quad (1.5)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к поверхности S , и условию излучения на бесконечности [23]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{E}_0}{\partial r} - ik_0 \vec{E}_0 \right) = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \vec{H}_0}{\partial r} - ik_0 \vec{H}_0 \right) = 0, \quad (1.6)$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – волновое число.

Потребуем также выполнение условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля на открытой части сферы $\Gamma \setminus \Gamma_1$

$$\left[\vec{n}, \vec{H}_e + \vec{H}_0^0 \right] \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = \left[\vec{n}, \vec{H}_0 \right] \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1}, \quad (1.7)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к поверхности $\Gamma \setminus \Gamma_1$, и условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на поверхности Γ [24]–[26]

$$\left[\vec{n}, \vec{E}_e + \vec{E}_0^0 \right] \Big|_{\Gamma} = \left[\vec{n}, \vec{E}_0 \right] \Big|_{\Gamma}, \quad (1.8)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к поверхности Γ .

Первичное поле электрического диполя Герца представим через векторные сферические волновые функции [22], [27], [28]

$$\vec{E}_e = E_0 \vec{n}_{01}(r, \theta, k_0), \quad \vec{H}_e = H_0 \vec{m}_{01}(r, \theta, k_0), \quad (1.9)$$

где

$$E_0 = \frac{ik_0^3}{4\pi\epsilon_0} p, \quad H_0 = \frac{E_0 k_0}{i\omega\mu_0},$$

$\vec{p} = p\vec{e}_z$ – электрический момент диполя,

$$\vec{n}_{0n}(r, \theta, k) = \frac{n(n+1)}{kr} h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) \vec{e}_r + g_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\theta,$$

$$\vec{m}_{0n}(r, \theta, k) = -h_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\phi,$$

$$g_n^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x h_n^{(1)}(x)) =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left((n+1) h_{n-1}^{(1)}(x) - n h_{n+1}^{(1)}(x) \right), \quad n=1, 2, \dots,$$

$P_n(x)$ – полиномы Лежандра, $P_n^1(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода, $h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции Ханкеля первого рода [29].

Вторичные электромагнитные поля в области D_0 представим в виде суперпозиции векторных сферических волновых функций [27], [28], которые удовлетворяют уравнениям (1.1), (1.2) и условию на бесконечности (1.6),

$$\vec{E}_0^0 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(0)} \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + d_n^{(0)} \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right), \quad (1.10)$$

$$\vec{H}_0^0 = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(0)} \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + c_n^{(0)} \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right) \text{ в } D_0^{(0)}, \quad (1.11)$$

$$\vec{E}_0^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(1)} \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + d_n^{(1)} \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right), \quad (1.12)$$

$$\vec{H}_0^1 = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(1)} \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + c_n^{(1)} \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right) \text{ в } D_0^{(1)}, \quad (1.13)$$

$$\vec{E}_1^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(2)} \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) + b_n^{(2)} \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) \right), \quad (1.14)$$

$$\vec{H}_1^1 = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n^{(2)} \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) + a_n^{(2)} \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) \right) \text{ в } D_0^{(1)}, \quad (1.15)$$

где

$$\vec{n}_{0n}(r, \theta, k) = \frac{n(n+1)}{kr} j_n(kr) P_n(\cos\theta) \vec{e}_r + g_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\theta,$$

$$\vec{m}_{0n}(r, \theta, k) = -j_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\phi,$$

$$g_n(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x j_n(x)) =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left((n+1) j_{n-1}(x) - n j_{n+1}(x) \right), \quad n=1, 2, \dots,$$

$j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя первого рода [29].

Вторичное электромагнитное поле в области D_1 представим в виде суперпозиции векторных сферических волновых функций в композитных средах [28], которые удовлетворяют уравнениям (1.3),

$$\vec{E}_1^0 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(1)} \vec{K}_{0n}^{(1)}(r_1, \theta_1, k_1) + b_n^{(1)} \vec{K}_{0n}^{(2)}(r_1, \theta_1, k_2) \right), \quad (1.16)$$

$$\vec{H}_1^0 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(1)} p_1 \vec{K}_{0n}^{(1)}(r_1, \theta_1, k_1) + b_n^{(1)} p_2 \vec{K}_{0n}^{(2)}(r_1, \theta_1, k_2) \right), \quad (1.17)$$

где

$$\vec{K}_{0n}^{(j)}(r, \theta, k_j) = \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_j) - q_j \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_j),$$

$$k_j = \sqrt{g + 0.5 a^2 + a f_j}, \quad 0 \leq \arg k_j < \pi,$$

$$g = \omega^2 (\epsilon\mu - ZG), \quad f_j = (-1)^j f_0,$$

$$f_0 = \sqrt{\omega^2 \epsilon\mu - b^2}, \quad 0 \leq \arg f_0 < \pi,$$

$$b = 0, 5\omega(G+Z), \quad a = i\omega(G-Z),$$

$$q_j = g / k_j g_j, \quad g_j = f_j - 0.5a,$$

$$p_j = (i g / (\omega g_j) - Z) / \mu.$$

Неизвестные коэффициенты $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}, j=1, 2, c_n^{(p)}, d_n^{(p)}, p=0, 1,$ подлежат определению из граничных условий.

2 Выполнение граничных условий

Для выполнения граничных условий (1.4), (1.7), (1.8) представим функции \vec{E}_1^1, \vec{H}_1^1 через векторные сферические волновые функции в системе координат с началом в точке O , используя формулы [27], [28],

$$\vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^n(k_0 h, \pi) \vec{n}_{0s}(r, \theta, k_0), \quad 0 \leq r < h,$$

$$\vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^n(k_0 h, \pi) \vec{m}_{0s}(r, \theta, k_0), \quad 0 \leq r < h,$$

где

$$A_s^n(k_0 h, \alpha) = k_0 h \cos \alpha \left[\frac{1}{(2s+3)} C_{s+1}^n + \frac{1}{(2s-1)} C_{s-1}^n \right] + C_s^n,$$

$$C_s^n = (2s+1) \sum_{\sigma=|s-n|}^{s+n} i^{\sigma+s-n} b_\sigma^{(n0s0)} h_\sigma^{(1)}(k_0 h) P_\sigma(\cos \alpha),$$

$b_\sigma^{(n0q0)} = (nq00 | \sigma 0)^2$, $(nq00 | \sigma 0)$ – коэффициенты Клебша – Гордона [23].

Тогда

$$\bar{E}_1^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^{(2)} \bar{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + A_n^{(2)} \bar{m}_{0n}(r, \theta, k_0)), \quad (2.1)$$

$$\bar{H}_1^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(2)} \bar{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + B_n^{(2)} \bar{m}_{0n}(r, \theta, k_0)), \quad (2.2)$$

где

$$A_n^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(2)} A_n^s(k_0 h, \pi),$$

$$B_n^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} b_s^{(2)} A_n^s(k_0 h, \pi). \quad (2.3)$$

Согласно представлениям (1.9), (1.10), (1.12), (2.1), условие непрерывности (1.8), с учетом условия ортогональности присоединенных функций Лежандра на отрезке $[0; \pi]$, примет вид:

$$g_n^{(1)}(\xi_0) \delta_{1n} + g_n(\xi_0) c_n^{(0)} = g_n^{(1)}(\xi_0) c_n^{(1)} + g_n(\xi_0) B_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

$$j_n(\xi_0) d_n^{(0)} = h_n^{(1)}(\xi_0) d_n^{(1)} + j_n(\xi_0) A_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

где δ_{1n} – символ Кронекера, $\xi_0 = k_0 a$.

Выполнив граничное условие (1.4) на поверхности сферической оболочки Γ_1 и условие непрерывности (1.7), получим два парных сумматорных уравнения вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (h_n^{(1)}(\xi_0) \delta_{1n} + j_n(\xi_0) c_n^{(0)} - h_n^{(1)}(\xi_0) c_n^{(1)} - j_n(\xi_0) B_n^{(2)}) \times \\ \times P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^{(1)}(\xi_0) c_n^{(1)} + g_n(\xi_0) B_n^{(2)}) \times \\ \times P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(\xi_0) d_n^{(0)} - g_n^{(1)}(\xi_0) d_n^{(1)} - g_n(\xi_0) A_n^{(2)}) P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (h_n^{(1)}(\xi_0) d_n^{(1)} + j_n(\xi_0) A_n^{(2)}) \times \\ \times P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Преобразуем парные уравнения (2.6). Для этого исключим коэффициенты $c_n^{(0)}$ с помощью

представления (2.4), учитывая значение вронскиана [29]

$$W[xj_n(x), xh_n^{(1)}(x)] = i.$$

Затем введем в рассмотрение новые коэффициенты X_n по формуле

$$c_n^{(1)} = X_n \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0 j_n(\xi_0)) + \delta_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

и малый параметр $q_n^{(1)}$ – по формуле

$$q_n^{(1)} = 1 + \frac{4i\xi_0}{2n+1} \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0 j_n(\xi_0)) \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0 h_n^{(1)}(\xi_0)),$$

$$q_n^{(1)} = O(n^{-2}) \text{ при } n \gg \xi_0.$$

В результате парные сумматорные уравнения (2.6) примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} X_n P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(1-q_n^{(1)}) X_n P_n^1(\cos \theta) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) f_n^{(1)} P_n^1(\cos \theta), \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

где

$$f_n^{(1)} = 4i\xi_0^2 \frac{g_n^{(1)}(\xi_0) \delta_{1n} + g_n(\xi_0) B_n^{(2)}}{2n+1}. \quad (2.10)$$

Парные сумматорные уравнения (2.9) преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго рода [24]–[26]:

$$X_s (1 - q_s^{(1)}) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{(1)} Q_{sn}^{(1)}(\theta_0) X_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(1)} (\delta_{ns} - Q_{sn}^{(1)}(\theta_0)), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

где

$$Q_{sn}^{(1)}(\theta_0) = Q_{sn}(\theta_0) - \frac{Q_{s0}(\theta_0) \cos((n+0.5)\theta_0)}{\cos(0.5\theta_0)},$$

$$Q_{sn}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(s-n)\theta_0}{s-n} + \frac{\sin(s+n+1)\theta_0}{s+n+1} \right],$$

$$\left. \frac{\sin(s-n)\theta_0}{s-n} \right|_{s=n} = \theta_0.$$

Теперь преобразуем парные уравнения (2.7). Для этого исключим коэффициенты $d_n^{(0)}$, используя представление (2.5), введем в рассмотрение новые коэффициенты Y_n по формуле

$$d_n^{(1)} = (2n+1) j_n(\xi_0) Y_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

малый параметр $q_n^{(2)}$ – по формуле

$$q_n^{(2)} = 1 - (2n+1) i \xi_0 j_n(\xi_0) h_n^{(1)}(\xi_0),$$

$$q_n^{(2)} = O(n^{-2}) \text{ при } n \gg \xi_0,$$

и получим

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) Y_n P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (1 - q_n^{(2)}) Y_n P_n^1(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(2)} P_n^1(\cos \theta), \\ \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $f_n^{(2)} = -i \xi_0 j_n(\xi_0) A_n^{(2)}$. (2.14)

Парные сумматорные уравнения (2.13) преобразуем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида [24]–[26]:

$$\begin{aligned} (-1)^s Y_s - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_n^{(2)} Q_{sn}^{(1)}(\pi - \theta_0) Y_n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n^{(2)} Q_{sn}^{(1)}(\pi - \theta_0), \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Теперь выполним граничные условия (1.5). Для этого представим функции \vec{E}_0^1 , \vec{H}_0^1 через векторные сферические волновые функции в системе координат с началом в точке O_1 . На основании формул [27], [28]

$$\vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^n(k_0 h, 0) \vec{n}_{0s}(r_1, \theta_1, k_0), \quad 0 \leq r_1 < h,$$

$$\vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^n(k_0 h, 0) \vec{m}_{0s}(r_1, \theta_1, k_0), \quad 0 \leq r_1 < h,$$

имеем

$$\vec{E}_0^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(1)} \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) + D_n^{(1)} \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0)), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_0^1 = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^{(1)} \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) + \\ + C_n^{(1)} \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0)), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $C_n^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(1)} A_n^s(k_0 h, 0)$,

$$D_n^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{(1)} A_n^s(k_0 h, 0). \quad (2.18)$$

Принимая во внимание представления (1.14)–(1.17), (2.16), (2.17), выполняя граничные условия (1.5) и учитывая ортогональность присоединённых функций Лежандра на отрезке $[0, \pi]$, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$V(n) = M(n)^{-1} F(n), \quad (2.19)$$

где

$$M(n) = \begin{pmatrix} m_{11}(n) & m_{12}(n) & m_{13}(n) & m_{14}(n) \\ m_{21}(n) & m_{22}(n) & m_{23}(n) & m_{24}(n) \\ m_{31}(n) & m_{32}(n) & m_{33}(n) & m_{34}(n) \\ m_{41}(n) & m_{42}(n) & m_{43}(n) & m_{44}(n) \end{pmatrix},$$

$$V(n) = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ a_n^{(2)} \\ b_n^{(1)} \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}, \quad F(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ f_3(n) \\ f_4(n) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} m_{11}(n) &= g_n(\gamma_1), & m_{12}(n) &= 0, \\ m_{13}(n) &= g_n(\gamma_2), & m_{14} &= -g_n^{(1)}(\gamma_0), \\ m_{21}(n) &= q_1 j_n(\gamma_1), & m_{22}(n) &= h_n^{(1)}(\gamma_0), \\ m_{23}(n) &= q_2 j_n(\gamma_2), & m_{24}(n) &= 0, \\ m_{31}(n) &= \bar{p}_1 g_n(\gamma_1), & m_{32}(n) &= -g_n^{(1)}(\gamma_0), \\ m_{33}(n) &= \bar{p}_2 g_n(\gamma_2), & m_{34}(n) &= 0, \\ m_{41}(n) &= q_1 \bar{p}_1 j_n(\gamma_1), & m_{42}(n) &= 0, \\ m_{43}(n) &= q_2 \bar{p}_2 j_n(\gamma_2), & m_{44}(n) &= h_n^{(1)}(\gamma_0), \\ f_1(n) &= C_n^{(1)} g_n(\xi_0), & f_2(n) &= -D_n^{(1)} j_n(\xi_0), \\ f_3(n) &= D_n^{(1)} g_n(\xi_0), & f_4(n) &= -C_n^{(1)} j_n(\xi_0), \\ \bar{p}_j &= i \omega \mu_0 p_j / k_0, \quad j = 1, 2, \\ \gamma_0 &= k_0 a_1, & \gamma_1 &= k_1 a_1, & \gamma_2 &= k_2 a_1. \end{aligned}$$

Элементы обратной матрицы $M(n)^{-1}$ обозначим через $\bar{m}_{kp}(n)$, тогда из (2.19) следует связь между коэффициентами $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$:

$$\begin{aligned} a_n^{(2)} &= \alpha_n^{(a)} C_n^{(1)} + \beta_n^{(a)} D_n^{(1)}, \\ b_n^{(2)} &= \alpha_n^{(b)} C_n^{(1)} + \beta_n^{(b)} D_n^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(a)} &= \bar{m}_{21}(n) g_n(\gamma_0) - \bar{m}_{24}(n) j_n(\gamma_0), \\ \beta_n^{(a)} &= \bar{m}_{23}(n) g_n(\gamma_0) - \bar{m}_{22}(n) j_n(\gamma_0), \\ \alpha_n^{(b)} &= \bar{m}_{41}(n) g_n(\gamma_0) - \bar{m}_{44}(n) j_n(\gamma_0), \\ \beta_n^{(b)} &= \bar{m}_{43}(n) g_n(\gamma_0) - \bar{m}_{42}(n) j_n(\gamma_0). \end{aligned}$$

В (2.3) исключим коэффициенты $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$, принимая во внимание представления (2.20), (2.18), (2.8), (2.12), и получим, что

$$A_n^{(2)} = \sum_{p=1}^{\infty} X_p U_{np}^{(a)} + \sum_{p=1}^{\infty} Y_p V_{np}^{(a)} + W_n^{(a)}, \quad (2.21)$$

$$B_n^{(2)} = \sum_{p=1}^{\infty} X_p U_{np}^{(b)} + \sum_{p=1}^{\infty} Y_p V_{np}^{(b)} + W_n^{(b)}, \quad (2.22)$$

где

$$U_{np}^{(\delta)} = \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0 j_p(\xi_0)) \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{(\delta)} A_s^p(k_0 h, 0) A_n^s(k_0 h, \pi),$$

$$V_{np}^{(\delta)} = (2p+1) j_p(\xi_0) \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s^{(\delta)} A_s^p(k_0 h, 0) A_n^s(k_0 h, \pi),$$

$$W_n^{(\delta)} = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^{(\delta)} A_s^1(k_0 h, 0) A_n^s(k_0 h, \pi), \quad \delta = \{a, b\}.$$

Теперь преобразуем правые части систем (2.11), (2.15), исключив коэффициенты $A_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$ на основании представлений (2.21), (2.22). В результате получим связанную бесконечную СЛАУ второго рода

$$\begin{aligned} X_s (1 - q_s^{(1)}) + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n^{(1)} Q_{sn}^{(1)}(\theta_0) - \tilde{\alpha}_{ns}) X_n - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{ns} Y_n = \tilde{f}_s, \quad s = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$(-1)^s Y_s + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_{ns} - (-1)^n q_n^{(2)} Q_{sn}^{(1)}(\pi - \theta_0)) Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{ns} X_n = \tilde{f}_s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

где

$$\tilde{\alpha}_{ns} = 4i\xi_0^2 \sum_{p=1}^{\infty} g_p(\xi_0) U_{pn}^{(b)}(\delta_{ps} - Q_{ps}^{(1)}(\theta_0)) / (2p+1),$$

$$\tilde{\beta}_{ns} = 4i\xi_0^2 \sum_{p=1}^{\infty} g_p(\xi_0) V_{pn}^{(b)}(\delta_{ps} - Q_{ps}^{(1)}(\theta_0)) / (2p+1),$$

$$\tilde{\alpha}_{ns} = i\xi_0 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p j_p(\xi_0) Q_{ps}^{(1)}(\pi - \theta_0) U_{pn}^{(a)},$$

$$\tilde{\beta}_{ns} = i\xi_0 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p j_p(\xi_0) Q_{ps}^{(1)}(\pi - \theta_0) V_{pn}^{(a)},$$

$$f_s = 4i\xi_0^2 \sum_{p=1}^{\infty} g_p(\xi_0) W_p^{(b)}(\delta_{ps} - Q_{ps}^{(1)}(\theta_0)) / (2p+1) + 4i\xi_0^2 g_1^{(1)}(\xi_0) (\delta_{1s} - Q_{1s}^{(1)}(\theta_0)) / 3,$$

$$\tilde{f}_s = -i\xi_0 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p j_p(\xi_0) Q_{ps}^{(1)}(\pi - \theta_0) W_p^{(a)}.$$

3 Диаграмма направленности электромагнитного поля

Представим функцию \vec{E}_1^1 через векторные сферические волновые функции в системе координат с началом в точке O . Используя формулы [28]

$$\tilde{n}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \tilde{n}_{0s}(r, \theta, k_0), \quad r > h,$$

$$\tilde{m}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \tilde{m}_{0s}(r, \theta, k_0), \quad r > h,$$

где

$$\tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) = -k_0 h_0 \left[\frac{1}{(2s+3)} \tilde{C}_{s+1}^n + \frac{1}{(2s-1)} \tilde{C}_{s-1}^n \right] + \tilde{C}_s^n,$$

$$\tilde{C}_s^n = (2s+1) \sum_{\sigma=|s-n|}^{s+n} i^{\sigma+s-n} b_{\sigma}^{(n0s0)} j_{\sigma}(k_0 h) P_{\sigma}(\cos \pi),$$

получим

$$\vec{E}_1^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{s=1}^{\infty} b_s^{(2)} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \right) \tilde{n}_{0n}(r, \theta, k_0) + \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(2)} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \right) \tilde{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \right].$$

Подставим асимптотические формулы

$$\tilde{n}_{0n}(r, \theta, k) \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{kr} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_0,$$

$$\tilde{m}_{0n}(r, \theta, k) \approx (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{kr} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_{\varphi}$$

при $r \rightarrow \infty$,

в представления (1.12), (3.1) для векторов \vec{E}_0^1 , \vec{E}_1^1 и получим представление для вектора \vec{E}_0

$$\vec{E}_0 \approx E_0 \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} (\Psi_1(\theta) \vec{e}_0 + \Psi_2(\theta) \vec{e}_{\varphi}), \quad r \rightarrow \infty,$$

где

$$\Psi_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \left(c_n^{(1)} + \sum_{s=1}^{\infty} b_s^{(2)} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \right) P_n^1(\cos \theta),$$

$$\Psi_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} i(-i)^n \left(d_n^{(1)} + \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(2)} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \right) P_n^1(\cos \theta).$$

Из представлений (2.18), (2.20) следует связь между коэффициентами $a_n^{(2)}, b_n^{(2)}, c_n^{(1)}, d_n^{(1)}$

$$a_n^{(2)} = \alpha_n^{(a)} \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(1)} A_s^n(k_0 h, 0) + \beta_n^{(a)} \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{(1)} A_s^n(k_0 h, 0),$$

$$b_n^{(2)} = \alpha_n^{(b)} \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(1)} A_s^n(k_0 h, 0) + \beta_n^{(b)} \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{(1)} A_s^n(k_0 h, 0).$$

Коэффициенты $c_n^{(1)}, d_n^{(1)}$ связаны с решением системы (2.23) по формулам (2.8), (2.12) соответственно.

Величина $D(\theta) = |\Psi_1(\theta)|^2 + |\Psi_2(\theta)|^2$ называется диаграммой направленности электрического поля \vec{E}_0 , которая характеризует величину электромагнитной энергии в направлении θ [22], [28].

На рисунке 3.1 изображены диаграммы направленности $D(\theta)$ электрического поля \vec{E}_0 для некоторых значений угла раствора θ_0 (значения указаны в правом углу рисунка в градусах) при заданных значениях: параметр киральности $k = 0,5$, параметр Телленга $\tau = 0,5$, радиусы $a = a_1 = 0,2$ м, расстояние $h = 0,8$ м, частота исходного поля $f = 10^9$ Гц. Область D_1 заполнена материалом с относительной магнитной проницаемостью $\mu_r = 1,01$ и относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 2,1$. Бесконечная СЛАУ (2.23) решена методом усечения при порядке усечения 25. Все сходящиеся бесконечные суммы вычислены с точностью 10^{-5} .

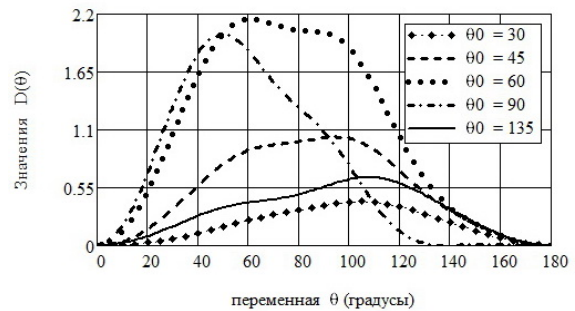


Рисунок 3.1 – Диаграммы направленности $D(\theta)$ для некоторых значений угла раствора θ_0

Заключение

Используя теоремы сложения для векторных сферических волновых функций, решение поставленной граничной задачи сведено к решению

парных сумматорных уравнений по присоединённым функциям Лежандра первого рода. Парные уравнения преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором.

Выведена формула для построения диаграммы направленности электрического поля. Приведены графики диаграммы направленности электрического поля при некоторых геометрических параметрах задачи, электрофизических свойствах материала шара, частоты поля диполя.

Полученные результаты могут быть использованы в задачах радиолокации, защиты электронных устройств и биологических объектов от воздействия внешних полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каценеленбаум, Б.З. Киральные электродинамические объекты / Б.З. Каценеленбаум [и др.] // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167, № 11. – С. 1201–1212.
2. Неганов, В.А. Электродинамика отражающих и волноведущих структур с искусственными киральными слоями / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2005. – № 8. – С. 20–45.
3. Cui, Tie Jun. Metamaterials. Theory, Design and Applications / Tie Jun Cui, D.R. Smith, R. Lui. – Springer, 2009. – 367 p.
4. Вендик, И.Б. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот (Обзор) / И.Б. Вендик, О.Г. Вендик // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83, вып. 1. – С. 3–28.
5. Костин, М.В. К теории киральной среды на основе сферических спирально проводящих частиц / М.В. Костин, В.В. Шевченко // Радиотехника и электроника – 1998. – Т. 43, № 8. – С. 921–926.
6. Санников, Д.Г. Кроссполаризация света на границе раздела «диэлектрик – биизотропная среда» / Д.Г. Санников // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т. 35, вып. 8. – С. 14–21.
7. Фисанов, В.В. Проявления невзаимности в биизотропной среде Теллегена / В.В. Фисанов // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2012. – № 2–1 (26). – С. 96–99.
8. Неганов, В.А. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами / В.А. Неганов, О.В. Осипов. – М.: Радио и связь, 2006. – 280 с.
9. Иванов, О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.В. Иванов. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 262.
10. Проникновение электромагнитных волн через композитные экраны, содержащие идеально проводящие спирали / В.Т. Ерофеевко [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 4. – С. 740–746.

11. Манахова, М. Излучающие свойства антенн в композитных средах. Метаматериалы и киральные среды / М. Манахова, Е. Шорохова. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 68 с.

12. Шорохова, Е. Дифракция электромагнитных волн на киральных телах вращения. Аналитический подход / Е. Шорохова. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 92 с.

13. Фисанов, В.В. Об излучении источников в изотропной киральной среде / В. В. Фисанов // Изв. вузов. Физика. – 2006. – № 9. – С. 87–90.

14. Демидчик, В.И. Излучение произвольной системы источников в киральной среде / В.И. Демидчик // Вестник БГУ. Сер. 1 – 2013. – № 2. – С. 44–47.

15. Капшай, В.Н. Рассеяние электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3. – С. 7–21.

16. Беличенко, В.И. Рассеяние электромагнитных волн биизотропной сферой / В.И. Беличенко, В.В. Фисанов // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 10. – С. 108–112.

17. Ерофеевко, В.Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоском слое из биизотропного материала / В.Т. Ерофеевко, С.В. Малый // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2010. – № 2. – С. 11–16.

18. Ерофеевко, В.Т. Численное исследование взаимодействия электромагнитных полей электрического и магнитного диполей с композитным экраном / В.Т. Ерофеевко, В.Ф. Бондаренко // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-тех. н. – 2013. – № 4. – С. 113–120.

19. Неганов, В.А. Отражение электромагнитных волн от плоских киральных структур / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Изв. ВУЗов. Радиотехника. – 1999. – Т. 42, № 9. – С. 870–878.

20. Неганов, В.А. Особенности отражения электромагнитных волн от плоских киральных структур / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 5–11.

21. Неганов, В.А. Рассеяние плоских электромагнитных волн на кирально-металлическом цилиндре / В.А. Неганов, О.В. Осипов // Письма в ЖТФ. – 2000. – Т. 26, вып. 1. – С. 77–83.

22. Куц, А.И. Численное исследование рассеяния поля электрического диполя на биизотропном шаре / А.И. Куц, Г.Ч. Шушкевич // Информатика. – 2015. – № 2. – С. 46–54.

23. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.

24. Виноградов, С.С. Дифракция поля вертикального диполя на сферическом сегменте / С.С. Виноградов, А.М. Радин, В.П. Шестопалов

// Докл. АН УССР. Сер.А. – 1976. – № 8. – С. 741–745.

25. Свищёв, Ю.В. Поле вертикального магнитного диполя при наличии сферы с круговым отверстием / Ю.В. Свищёв // Изв. вуз. Радиофизика. – 2000. – Т. XLIII, № 9. – С. 773–781.

26. Erofeenko, V.T. Screening of lowfrequency magnetic fields by an open thin-wall spherical shell / V.T. Erofeenko, I.S. Kozlovskaya, G.Ch. Shushkevich // Technical Physics. – 2010. – Vol. 55, № 9. – P. 1240–1247.

27. Козлов, И.П. Дифракция электромагнитных волн на двух сферах / И.П. Козлов // Изв.

высш. уч. зав. Радиофизика. – 1975. – Т. XVIII, № 7. – С. 998–1008.

28. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко. – М.: КД Либроком, 2014. – 304 с.

29. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Поступила в редакцию 10.03.16.

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРУППЫ С ХОЛЛОВЫМИ ДОБАВЛЕНИЯМИ К НОРМАЛИЗАТОРАМ ВЫДЕЛЕННЫХ ПОДГРУПП

Т.В. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON SOLVABILITY OF A GROUP WITH HALL SUPPLEMENTS TO NORMALIZERS OF ISOLATED SUBGROUPS

T.V. Borodich

F. Scorina Gomel State University

Пусть G конечная группа и $p \in \pi(G)$. Предположим, что для любого значения $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ нормализаторы силовских q -подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями. При этих предположениях доказывается, что группа G разрешима.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, нильпотентная группа, холлова подгруппа, силовская подгруппа, нормализатор.

Let G be finite group and $p \in \pi(G)$. Suppose that for all $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ normalizer Sylow q -subgroups has nilpotent Hall supplement. Under these assumptions, prove that G is solvable.

Keywords: finite group, soluble group, nilpotent group, Hall subgroup, Sylow subgroup, normalizer.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Натуральное число, которое является степенью некоторого простого числа, называют примарным.

Добавление к подгруппе X в группе G называется подгруппа Y такая, что $G = XY$. Если $X \cap Y = 1$, то подгруппа Y называется дополнением к подгруппе X в группе G .

Добавление Y к подгруппе X в группе G называется:

- примарным, если порядок Y есть примарное число;
- холловым, если подгруппа Y холлова в группе;
- нильпотентным, если подгруппа Y нильпотентна в группе.

В работе 1968 г. [1] В.А. Ведерников доказал разрешимость группы, у которой порядки всех классов сопряженных силовских подгрупп есть степени простых чисел, теорема 5. Использовалась при доказательстве непростота таких групп, установленная П.И. Трофимовым в 1963 г., [2], теорема 6.

Напомним, что если порядок класса сопряженных подгрупп совпадает с индексом нормализатора любой подгруппы из этого класса, то теорему В.А. Ведерникова можно сформулировать так: *если индексы нормализаторов силовских подгрупп в группе G примарны, то группа G разрешима.*

В такой формулировке эта теорема доказывалась в работах [3]–[5]. Более тщательное изучение групп с примарными индексами нормализаторов силовских подгрупп проведено Го Веньбином в [6]. В выше перечисленных работах классификация конечных простых групп не использовалась.

Го Веньбинь и Шам в работе 2005 г. [6] показали, что для разрешимости группы достаточно только примарность индексов нормализаторов силовских 2- и 3-подгрупп. Их доказательство основано на теореме Фисман [7], которая использует классификацию конечных простых групп.

В 2009 г. В.С. Монахов и Т.В. Бородич в своей работе [8] установили разрешимость группы G в том случае, когда нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями. Их доказательство основано на теореме Казарина [9], которая использует классификацию конечных простых групп.

Развивая данную тематику доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G группа и $p \in \pi(G)$. Если для любого значения $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ нормализаторы силовских q -подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями, то группа G разрешима.

При доказательстве используется теорема Казарина [9].

1 Вспомогательные утверждения

Все обозначения и определения понятны из текста и соответствуют принятым в [10]–[12].

Будем говорить, что подгруппа H не добавляется в группе G , если для любой подгруппы K группы G из условия $G = HK$ следует, что $K = G$. Через E_{p^n} , Z_n , D_n , A_n будем обозначать элементарную абелеву группу порядка p^n , циклическую, диэдральную группы порядка n , знакопеременную группу степени n . Под факторизацией группы будем понимать представление этой группы в виде произведения двух своих собственных подгрупп.

Пример 1.1. В условиях теоремы нельзя исключить два простых делителя из $\pi(G)$. Примером служит простая группа A_5 .

В данной группе нормализаторы силовских подгрупп имеют следующие порядки:

$$|N_G(G_2)| = 2^2 \cdot 3, \quad |N_G(G_3)| = 6, \quad |N_G(G_5)| = 10.$$

Индексы нормализаторов силовских подгрупп

$$|G : N_G(G_2)| = 5, \quad |G : N_G(G_3)| = 2 \cdot 5,$$

$$|G : N_G(G_5)| = 2 \cdot 3.$$

Таким образом, если мы исключим два простых делителя 3 и 5 из $\pi(A_5)$ и рассмотрим $\pi(A_5) \setminus \{3, 5\}$, то нормализатор силовской 2-подгруппы обладает циклическим дополнением и условие теоремы для группы A_5 справедливо, противоречие.

Пример 1.2. В условиях теоремы нельзя рассматривать вместо нильпотентных добавлений к нормализаторам силовских подгрупп разрешимые добавления. Примером служит простая группа $PSL(2, 7)$.

В данной группе нормализаторы силовских подгрупп имеют следующие порядки:

$$|N_G(G_2)| = 2^3, \quad |N_G(G_3)| = 2 \cdot 3, \quad |N_G(G_7)| = 3 \cdot 7.$$

Индексы нормализаторов силовских подгрупп

$$|G : N_G(G_2)| = 3 \cdot 7, \quad |G : N_G(G_3)| = 2^4 \cdot 7,$$

$$|G : N_G(G_7)| = 2^3.$$

Таким образом, если мы исключим делитель 3, тогда условие теоремы для $\pi(PSL(2, 7)) \setminus \{3\}$ условие теоремы справедливо, но группа $PSL(2, 7)$ является простой, противоречие.

Лемма 1.1 [13, лемма 4]. Пусть A , B и N – подгруппы группы G , причем A холлова, а N нормальна. Если $G = AB$, то

$$N = (A \cap N)(B \cap N).$$

Лемма 1.2. Группа $G = SL(2, 2^n)$, $p \in \pi(G)$ обладает следующими свойствами:

1) $N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$ имеет циклическое дополнение порядка $2^n + 1$ и диэдральное добавление порядка $2(2^n + 1)$;

2) если p делит $2^n - 1$, то подгруппа $N_G(G_p)$ не добавляется в G ;

3) если p делит $2^n + 1$, то подгруппа $N_G(G_p) = D_{2(2^n+1)}$ имеет добавление, изоморфное

$$N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1};$$

4) нормализатор силовской p -подгруппы не имеет дополнения в группе G .

Других факторизаций группы $G = SL(2, 2^n)$ с участием в качестве сомножителей нормализаторов силовских 2- и p -подгрупп нет.

Доказательство. По теореме 0.8 [14] группа $G = SL(2, 2^n)$ допускает только следующие факторизации: $G = N_G(G_2)D_{2(2^n+1)} = N_G(G_2)Z_{2^n+1}$, где $N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$. Таким образом, справедливо утверждение 1.

Если p делит $2^n - 1$, то p не делит $2^n + 1$ и силовская p -подгруппа содержится в $N_G(G_2)$. Поэтому подгруппа $N_G(G_p)$ не добавляется в G и справедливо утверждение 2.

Пусть p не делит $2^n - 1$. Тогда p делит $2^n + 1$ и силовская p -подгруппа содержится в $D_{2(2^n+1)}$. Поэтому $G = SL(2, 2^n) = N_G(G_p)N_G(G_2)$ и справедливо утверждение 3. В частности, нормализатор силовской p -подгруппы не имеет дополнения в группе G , т. е. справедливо утверждение 4.

Лемма 1.3 [8, лемма 4]. Группа

$$G = PSL(2, p^n), \quad p > 2,$$

обладает только следующими факторизациями с участием в качестве сомножителей нормализатора силовской 2-подгруппы:

1) при $p^n + 1 = 2^k$ подгруппа $N_G(G_2) = D_{2^k}$ имеет дополнение, изоморфное $[E_{p^n}]Z_{(p^n-1)/2}$;

2) при $p = 11$ подгруппа $N_G(G_2) = [E_4]Z_3$ имеет дополнение, изоморфное $[Z_{11}]Z_5$.

Лемма 1.4. В группе $PSL(3, q)$, $q < 9$, нормализатор силовской 2-подгруппы не обладает добавлением, отличным от всей группы.

Доказательство. 1) Если $q = 3$, то согласно пункту 2 теоремы 1 [15] группа факторизуется следующим образом $G = AB = AB_1 = CB$, где подгруппы A , B , B_1 , C имеют следующие порядки соответственно: $2^4 \cdot 3^3$, $3 \cdot 13$, 13 , $2^4 \cdot 3^2$. Согласно [15] $|N_G(G_2)| = 2^4$. По условию леммы $G = N_G(G_2)H$, где H – собственная подгруппа, то $3^3 \cdot 13$ должно делить порядок подгруппы $|H|$. Из приведенных факторизаций получаем, что $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

2) Если $q = 4$, то по пункту 1 теоремы 1 [15] группа не факторизуема. Следовательно $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

3) Если $q = 5$, то согласно пункту 2 теоремы 1 [15] группа факторизуется следующим образом $G = AB = AB_1$, где подгруппы

$$|A| = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3, |B| = 3 \cdot 31, |B_1| = 31.$$

Согласно [15] $|N_G(G_2)| = 2^5$. Если $G = N_G(G_2)H$, где H – собственная подгруппа, то $3 \cdot 5^3 \cdot 31$ должно делить порядок подгруппы H . Из приведенных факторизаций получаем, что $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

4) Если $q = 7$, то по пункту 1 теоремы 1 [15] группа не факторизуема. Следовательно $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

5) Если $q = 8$, то согласно пункту 2 теоремы 1 [15] группа факторизуется следующим образом $G = AB = AB_1$, где подгруппы

$$|A| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2, |B| = 3 \cdot 73, |B_1| = 73.$$

Следовательно $|N_G(G_2)| = 2^9 \cdot 7^2$. Если $G = N_G(G_2)H$, где H – собственная подгруппа, то $3^2 \cdot 73$ должно делить порядок подгруппы $|H|$. Из приведенных факторизаций получаем, что $N_G(G_2)$ не обладает собственным добавлением.

Таким образом группа $PSL(3, q)$, $q < 9$, факторизациями с участием в качестве сомножителей нормализатора силовской 2-подгруппы не обладает.

Лемма 1.5. *Группа $PSU(3, 8^2)$ не факторизуема.*

Доказательство. Все факторизации группы $PSU(3, q^2)$ известны, они указаны в теореме 2 [15]. При $q \neq 3$ и $q \neq 5$ группа $PSU(3, q^2)$ не факторизуема.

Лемма 1.6 [8, лемма 8]. *В группах $PSp(4, 3)$ и $PSL(4, 2)$ нормализаторы силовских 2-подгрупп не обладают разрешимыми добавлениями.*

Лемма 1.7. *В группе M_{11} нормализатор силовской 2-подгруппы не обладает добавлением, отличным от всей группы.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1.1 [16], в которой перечислены все факторизации группы M_{11} .

Лемма 1.8 [17, теорема 2.3]. *Пусть конечная группа G имеет S_π -подгруппу ($2 \in \pi$) $M = O_2(M) \times O(M)$. Тогда G является D_π -группой. Если $\pi^* = \pi \setminus \{2\} \neq \emptyset$, то $G - \pi^*$ -разрешима.*

Лемма 1.9. *В простой группе G с $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, где $p \in \pi(G)$, нормализатор силовской q -подгруппы не обладает нильпотентным холловым добавлением.*

Доказательство. Пусть G – простая группа с $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, где $p \in \pi(G)$. Возможны следующие случаи:

1) Если $p \notin \{2, 3\}$, то группа разрешима по теореме 2 [16].

2) Пусть $p = 3$. В этом случае группа разрешима или $2 \in \pi(G)$ и группа G является произведением разрешимой подгруппы $N_G(G_2)$ и нильпотентного добавления, поэтому применима теорема Казарина [9]. По этой теореме группа G принадлежит следующему списку простых групп: $PSL(2, q)$, $q > 3$; $PSL(3, q)$, $q < 9$; $PSL(4, 2)$; M_{11} ; $PSp_4(3)$; $PSU(3, 8)$. В виду лемм 1.3–1.7 нормализатор силовской 2-подгруппы не обладает холловым нильпотентным добавлением во всех перечисленных группах, за исключением группы $SL(2, 2^n)$. По лемме 1.2 нормализатор силовской 2-подгруппы имеет циклическое дополнение порядка $2^n + 1$ и диэдральное добавление порядка $2(2^n + 1)$. Так как диэдральная подгруппа порядка $2(2^n + 1)$ не нильпотентна, тогда нормализатор силовской 2-подгруппы не обладает холловым нильпотентным добавлением. В случае, когда нормализатор силовской 2-подгруппы имеет циклическое дополнение порядка $2^n + 1$, дополнение будет холловым нильпотентным, когда $2^n + 1 = r^s$, где $s \geq 1$. В этом случае найдется простой делитель $q \in \pi(G) \setminus \{3\}$, $q \neq 2$. По лемме 1.2 нормализатор $N_G(G_q)$ имеет добавление, когда q делит $2^n + 1$, добавление изоморфно подгруппе $N_G(G_2) = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$, но оно не нильпотентно. Таким образом, условие теоремы в этом случае справедливо.

3) Пусть $p = 2$. В этом случае имеем, что группа $G = N_G(G_q)H$, где H – нильпотентная холлова подгруппа. Если подгруппа H нечетного порядка, то группа $G - 2$ -нильпотентна по теореме А.С. Кондратьева [18]. Если подгруппа H четного порядка, то по лемме 1.8 подгруппа $H = G_2$. Следовательно группа имеет вид $G = N_G(G_q)G_2$. Тогда для любого значения r из $\pi(G) \setminus \{2\}$, порядок силовской r -подгруппы $|G_r|$ делит порядок $|N_G(G_q)|$, значит

$$G_r \subseteq N_G(G_q).$$

Не теряя общности мы получаем, что для любого значения $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3\}$ подгруппа $G_r \subseteq N_G(G_3)$. Согласно теореме 2 [19] группа разрешима или изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, 7)$; $PSU(3, q)$, где q – нечетно, $q \equiv -1 \pmod{4}$, $q - 1 = 3m$ и $(3, m) = 1$; $PSU(3, q)$, где q – четно, $q - 1 = 3m$ и $(3, m) = 1$; $Sz(2^{2n+1})$. Согласно примеру 1.2 группа $PSL(2, 7)$ исключается. Согласно теореме 2 [15] группа $PSU(3, q)$

факторизуется, если $q = 3$ или $q = 5$, и не факторизуется в противном случае. Если $q = 3$ или $q = 5$, то нарушается условие $q - 1 = 3m$. Следовательно группу $PSU(3, q)$ исключаем из рассмотрения. Согласно лемме 1.3 [20] группа Сузуки $Sz(2^{2n+1})$ не факторизуется. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие 1.1. Если в группе G с $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, где $p \in \pi(G)$, нормализатор силовской q -подгруппы обладает нильпотентным холловым добавлением, то группа G непроста.

Следствие 1.2. Пусть G группа и нечетное число $p \in \pi(G)$. Если для любого значения $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ нормализатор силовской q -подгруппы обладает разрешимым добавлением, то группа G изоморфна $SL(2, 2^n)$, где 3 делит $2^n + 1$ и $p' = 2^n - 1$.

2 Доказательство основного результата

Теорема. Пусть G группа и $p \in \pi(G)$. Если для любого значения $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ нормализаторы силовских q -подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями, то группа G разрешима.

Доказательство. Предположим, что G – не простая группа и пусть N – её нормальная нетривиальная подгруппа. Пусть G_p – силовская p -подгруппа группы G . Тогда $N_p = G_p \cap N$ – силовская p -подгруппа в N . По условию $G = N_G(G_p)K$, где K – холлово нильпотентное добавление к $N_G(G_p)$. По лемме 1.1

$$N = (N \cap N_G(G_p))(N \cap K).$$

Подгруппа $N \cap K$ является холловой в K . Так как K холлова нильпотентная подгруппа в G , тогда $(N \cap K)$ холлова нильпотентная подгруппа в N . Кроме того, $N_p = G_p \cap N$ – нормальная подгруппа в $N \cap N_G(G_p)$, поэтому

$$N \cap N_G(G_p) \subseteq N_N(N_p) \text{ и } N = N_N(N_p)(N \cap K),$$

где $(N \cap K)$ холлово нильпотентное добавление к $N_N(N_p)$ в N .

Пусть $G_p N / N$ – силовская p -подгруппа в группе G / N . Так как $G = N_G(G_p)K$ и

$$N_G(G_p)N / N = N_{G/N}(G_p N / N),$$

то $G / N = (N_{G/N}(G_p N / N))(KN / N)$.

Поскольку N холлово нильпотентное добавление к $N_G(G_p)$ в группе G , тогда $KN / N \cong K / K \cap N$ холлово нильпотентное добавление к $N_{G/N}(G_p N / N)$ в G / N .

Таким образом подгруппа N и факторгруппа G / N удовлетворяют условию теоремы и по индукции они разрешимы. Поэтому сама группа G разрешима.

Пусть G – простая группа. По лемме 1.9 группа, удовлетворяющая условию теоремы, не проста.

Следствие. Пусть G группа и $p \in \pi(G)$. Если для любого значения $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ индекс нормализатора каждой силовской q -подгруппы примитивен, то группа G разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведерников, В.А. О признаках разрешимости и сверхразрешимости конечных групп / В.А. Ведерников // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. VIII, № 6. – С. 1236–1244.
2. Трофимов, П.И. О признаках непростоты и разрешимости конечных групп / П.И. Трофимов // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. II, № 6. – С. 876–881.
3. Buchthal, D. On factorized groups / D. Buchthal // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 183. – P. 425–432.
4. Zhang, J. Sylow numbers of finite groups / J. Zhang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 176. – P. 111–123.
5. Guo, W. Finite groups with given indices of normalizers of Sylow subgroups / W. Guo // Siberian Math. J. – 1996. – Vol. 37. – P. 207–214.
6. Guo, W. A note on finite groups whose normalizers of Sylow 2-, 3-subgroups are prime power induces / W. Guo, K.P. Shum // Journal of Applied Algebra and Discrete Structures. – 2005. – Vol. 3, № 1. – P. 1–9.
7. Fisman, E. On the product of two finite solvable groups / E. Fisman // J. Algebra. – 1983. – Vol. 80. – P. 517–536.
8. Монахов, В.С. О разрешимости группы с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп / В.С. Монахов, Т.В. Бородич // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 2. – С. 227–233.
9. Kazarin, L.S. Groups which are the product of two solvable subgroups / L.S. Kazarin // Comm. Algebra. – 1986. – Vol. 14, № 6. – P. 1001–1066.
10. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 208 с.
11. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. – 1978. – 272 с.
12. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967. – 792 s.
13. Монахов, В.С. Конечные группы с холловыми добавлениями к примитивным подгруппам / В.С. Монахов // Сибирский матем. журнал. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 359–368.

14. Монахов, В.С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов // В сб.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 70–100.
15. Blaum, M. Factorizations of the simple groups $PSL(3, q)$ and $PSU(3, q^2)$ / M. Blaum // Arch. Math. – 1983. – Vol. 40. – P. 8–13.
16. Giudici, M. Factorisations of sporadic simple groups / M. Giudici // Journal of Algebra. – 2006. – Vol. 304. – P. 311–324.
17. Казарин, Л.С. Автоморфизмы, факторизации и теоремы типа Силова / Л.С. Казарин // Матем. сборник. – 1983. – Т. 120 (162), № 2. – С. 190–199.
18. Кондратьев, А.С. Критерий 2-нильпотентности конечных групп / А.С. Кондратьев // Подгрупповая структура групп. Свердловск. – 1988. – С. 82–84.
19. Тютянов, В.Н. Конечные группы с би-примарными холловыми подгруппами и их факторизации / В.Н. Тютянов, Т.В. Тихоненко. – Гомель: ГГУ, 2010. – 7 с. – (Препринт / Гомел. гос. ун-т).
20. Монахов, В.С. Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп / В.С. Монахов // В сб.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1978. – С. 50–63.

Поступила в редакцию 28.03.16.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ФАКТОРИЗУЕМЫЕ СУБНОРМАЛЬНЫМИ СВЕРХРАЗРЕШИМЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.С. Монахов¹, И.К. Чирик²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
²Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь

FINITE FACTORISED GROUPS WHOSE FACTORS ARE SUBNORMAL SUPERSOLVABLE SUBGROUPS

V.S. Monakhov¹, I.K. Chirik²

¹F. Scorina Gomel State University
²University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus

Устанавливаются признаки сверхразрешимости конечной группы, факторизуемой субнормальными сверхразрешимыми подгруппами. Анализируются приложения к факторизациям $F(G)$ -субнормальными подгруппами.

Ключевые слова: конечная группа, сверхразрешимая группа, коммутант, субнормальная подгруппа, факторизуемая группа.

New criteria of supersolvability for a finite group which is factorised as a product of supersolvable subgroups are obtained. Some applications to the factorization by $F(G)$ -subnormal subgroups are presented.

Keywords: finite group, supersolvable group, derived subgroup, subnormal subgroup, factorised group.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]–[2].

Группа, у которой главные факторы имеют простые порядки, называется сверхразрешимой. Первые примеры несверхразрешимых групп, являющихся произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп, построили Хуперт [3] и Бэр [4]. Признаки сверхразрешимости таких групп установили Бэр [4], Фризен [5], А.Ф. и Т.И. Васильевы [6], см. теорему 2.5 настоящей работы.

А.Ф. Васильев и В.И. Мурашко [7] предложили следующее определение. Подгруппа H группы G называется $F(G)$ -субнормальной подгруппой, если H субнормальна в $HF(G)$. Здесь и далее $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . Заметим, что всякая подгруппа, содержащая $F(G)$, является $F(G)$ -субнормальной. Каждая субнормальная подгруппа группы G также $F(G)$ -субнормальна. Обратное неверно. В симметрической группе S_4 степени 4 подгруппа Фиттинга $F(S_4)$ является элементарной абелевой подгруппой порядка 4. Силовская 2-подгруппа из S_4 содержит $F(S_4)$, но не субнормальна в S_4 , [7, пример 1].

А.Ф. Васильев и В.И. Мурашко распространили теорему Бэра [4] на группу $G = AB$, в которой подгруппы A и B $F(G)$ -субнормальны и сверхразрешимы. Они также доказали, что в

теореме Фризен [5] условие нормальности сомножителей можно ослабить до $F(G)$ -субнормальности только в классе метанильпотентных групп.

В настоящей работе устанавливаются новые признаки сверхразрешимости группы, факторизуемой субнормальными сверхразрешимыми подгруппами, и анализируются их приложения к факторизациям $F(G)$ -субнормальными подгруппами.

1 Вспомогательные результаты

Пусть p – простое число. Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой, а группа с нормальной p' -холловой подгруппой называется p -нильпотентной. Через $Z(G)$ и $\Phi(G)$ обозначают центр и подгруппу Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p - и p' -подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G .

Пусть G – группа и

$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad p_1 > p_2 > \dots > p_k, \quad a_i \in \mathbb{N}.$$

Говорят, что группа G обладает силовской башней сверхразрешимого типа, если существует цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_{k-1} \subseteq G_k = G$$

такая, что подгруппа G_i нормальна в группе G и фактор-группа G_i / G_{i-1} изоморфна силовской

p_i -подгруппе из G для всех i . Такие группы называют также дисперсивными по Оре.

Лемма 1.1 [2, VI.9.1]. (1) Каждая минимальная нормальная подгруппа сверхразрешимой группы имеет простой порядок.

(2) Пусть N – нормальная в G подгруппа и G/N сверхразрешима. Если N либо циклическая, либо $N \leq Z(G)$, либо $N \leq \Phi(G)$, то G сверхразрешима.

(3) Каждая сверхразрешимая группа обладает силовой башней сверхразрешимого типа.

(4) Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.

(5) Класс \mathcal{M} всех сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией.

Лемма 1.2. Если у группы G фактор-группа по подгруппе Фиттинга является элементарной абелевой 2-группой, то G сверхразрешима.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Можно считать, что подгруппа Фраттини группы G единична, а $F = F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как G/F действует неприводимо на F , то по лемме Шура [2, с.56] фактор-группа G/F циклическая. Поэтому $|G/F| = 2$. Пусть $a \in F$, $a \neq 1$ и b – инволюция из G . Если $a^b \in \langle a \rangle$, то $\langle a \rangle$ – нормальная подгруппа. Если a^b не принадлежит $\langle a \rangle$, то $(a^b a)^b = aa^b = a^b a$ и $\langle a^b a \rangle$ – неединичная нормальная подгруппа. Итак, в любом случае, в группе G имеется нормальная подгруппа простого порядка. Поэтому F – подгруппа простого порядка p и $|G| = 2p$ – сверхразрешима. \square

Коммутант группы X обозначается X' . Для подгрупп A и B группы G положим

$$[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle.$$

Ясно, что $G' = [G, G]$. Подгруппу $[A, B]$ называют взаимным коммутантом A и B .

Лемма 1.3 [1, 4.8], [9, лемма 4]. Пусть группа $G = AB$. Тогда:

- (1) $[A, B] \triangleleft G$;
- (2) $[A[A, B]/[A, B], B[A, B]/[A, B]] = 1$;
- (3) если $A_1 \triangleleft A$, то $A_1[A, B] \triangleleft G$;
- (4) $G' = A'B'[A, B]$;
- (5) если A и B – нормальны в G и $(|G; A|, |G; B|) = 1$, то $G' = A'B'$.

Разрешимая группа G называется примитивной, если в G существует максимальная подгруппа M с единичным ядром

$$\text{Core}_G M = \bigcap_{x \in G} M^x = 1.$$

В этом случае подгруппа M называется примитиватором группы G .

Лемма 1.4. Предположим, что разрешимая группа G не сверхразрешима, но фактор-группа G/K сверхразрешима для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N ,

$$N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$$

для некоторого $p \in \pi(G)$;

$$(2) Z(G) = O_p(G) = \Phi(G) = 1;$$

(3) G – примитивная группа; $G = [N]M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;

(4) N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$;

(5) если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.

Доказательство. Пусть N_1 и N_2 – две минимальные нормальные в G подгруппы. Тогда $N_1 \cap N_2 = 1$, фактор-группа G/N_i сверхразрешима, $i = 1, 2$, и $G = G/(N_1 \cap N_2)$ сверхразрешима, противоречие. Поэтому группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , N – элементарная абелева p -подгруппа порядка p^n для некоторого $p \in \pi(G)$. По лемме 1.1 (2) $Z(G) = \Phi(G) = 1$ и $n > 1$. Теперь $F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных в G подгрупп, значит, $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ и $O_p(G) = 1$. Поскольку $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M в группе G , не содержащая N . Ясно, что $G = [N]M$ и M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром. Следовательно, G – примитивная группа и M действует неприводимо на N . Если подгруппа M абелева, то согласно [8, I.1.3] подгруппа M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$. \square

Лемма 1.5 [1]. Пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Тогда:

- (1) если $H \in \mathfrak{F}$, где \mathfrak{F} – класс Фиттинга, то $H^G \in \mathfrak{F}$; в частности, если H нильпотентна, то H^G нильпотентна;
- (2) если H π -подгруппа, то H^G π -подгруппа;
- (3) если H p -нильпотентна, то H^G p -нильпотентна.

Здесь и далее $H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle$ – наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H .

2 О произведении субнормальных сверхразрешимых подгрупп

Лемма 2.1. Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа;

(2) фактор-группа $G/F(G)$ нильпотентна и является произведением двух абелевых подгрупп $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$.

Доказательство. 1. Пусть $p \in \pi(G)$, A_p и B_p – силовские p -подгруппы из A и B соответственно. Предположим, что p – наибольшее в $\pi(G)$. Тогда A_p и B_p по лемме 1.1(3) нормальны в A и B соответственно, и $A_p B_p$ – силовская p -подгруппа группы G , [2, VI.4.7]. Теперь A_p и B_p субнормальны в G , поэтому $A_p B_p$ – нормальная в G силовская p -подгруппа по лемме 1.5(2). По индукции $G/A_p B_p$ имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, поэтому и группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

2. По лемме 1.1 (4)

$$A' \leq F(A) \leq F(A)^G \leq F(G).$$

Следовательно,

$$AF(G)/F(G) \cong A/(A \cap F(G))$$

абелева и $(AF(G)/F(G))^{G/F(G)}$ нормальна в $G/F(G)$ и нильпотентна по лемме 1.5 (1). Аналогично,

$$B' \leq F(B) \leq F(B)^G \leq F(G),$$

$$BF(G)/F(G) \cong B/(B \cap F(G)),$$

поэтому $BF(G)/F(G)$ абелева и

$$(BF(G)/F(G))^{G/F(G)}$$

нормальна в $G/F(G)$ и нильпотентна по лемме 1.5 (1). Теперь фактор-группа $G/F(G)$ является произведением двух субнормальных абелевых подгрупп $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$.

Поскольку

$$G/F(G) =$$

$$= (AF(G)/F(G))^{G/F(G)} (BF(G)/F(G))^{G/F(G)},$$

то $G/F(G)$ нильпотентна. \square

Лемма 2.2. Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных подгрупп A и B . Если A сверхразрешима, а B нильпотентна, то G сверхразрешима.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы. По лемме 2.1 (1) силовская p -подгруппа $A_p B_p$ нормальна в G для наибольшего $p \in \pi(G)$. Поскольку условия леммы наследуют все фактор-группы, то G примитивна по лемме 1.4:

$$O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1, \quad G = [F]M,$$

$$F = F(G) = A_p B_p = C_G(F),$$

и M – максимальная подгруппа с единичным ядром. Подгруппа M нильпотентна по лемме 2.1 (2). Подгруппу B можно считать по лемме 1.5 (1) нормальной в G , иначе ее можно заменить на нильпотентную нормальную подгруппу B^G . Так как $O_{p'}(G) = 1$, то $B = F$. Пусть P – минимальная нормальная в A подгруппа. По лемме 1.1 (1) $|P| = p$. Так как $P \leq A_p \leq F = B$ и B абелева, то P нормальна в G . По индукции G/P сверхразрешима, по лемме 1.1 (2) группа G сверхразрешима. \square

Лемма 2.3. Пусть G – метанильпотентная группа. Тогда и только тогда коммутант G' нильпотентен, когда в G существует нормальная нильпотентная подгруппа W такая, что в фактор-группе G/W все силовские абелевы.

Доказательство. Если коммутант G' нильпотентен, то при $G' = W$ в фактор-группе G/W все силовские абелевы. Обратно, пусть в группе G существует нормальная нильпотентная подгруппа W такая, что в фактор-группе G/W все силовские абелевы. Так как G – метанильпотентная группа, то существует нильпотентная нормальная подгруппа K с нильпотентной фактор-группой G/K . Теперь WK – нильпотентная нормальная в G подгруппа и фактор-группа

$$G/WK \cong (G/K)/(WK/K),$$

$$G/WK \cong (G/W)/(WK/W)$$

нильпотентна и все ее силовские подгруппы абелевы. Поэтому G/WK абелева, $G' \leq WK$ и G' нильпотентна. \square

Лемма 2.4. Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда и только тогда коммутант G' нильпотентен, когда в G существует нормальная нильпотентная подгруппа W такая, что в фактор-группе G/W все силовские абелевы.

Доказательство. По лемме 2.1 группа G метанильпотентна, и утверждение следует из леммы 2.3. \square

Нам понадобятся известные признаки сверхразрешимости группы, факторизуемой сверхразрешимыми нормальными подгруппами. Сформулируем их в виде одной теоремы.

Теорема 2.5. Пусть группа $G = AB$ является произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:

(1) коммутант G' нильпотентен [4, теорема Бэра];

(2) группа G содержит нильпотентную нормальную подгруппу W и в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы [6, теорема А.Ф. и Т.И. Васильевых];

(3) индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты [5, теорема Фризен];

(4) любая максимальная подгруппа из каждой силовской подгруппы из B нормальна в B [9, теорема 2];

(5) любая субнормальная в B подгруппа из B нормальна в B [9, теорема 3];

(6) $A \cap B$ нильпотентна;

(7) B метациклическая.

Доказательство. 6. Пусть $A \cap B$ нильпотентна. Подгруппы A' и B' нильпотентны по лемме 1.1 (4) и нормальны в G . Так как A и B – нормальные подгруппы группы G , то $[A, B] \leq A \cap B$ по лемме 1.3 (1). Следовательно, $[A, B]$ нильпотентна и нормальна в G . По лемме 1.3 (4) коммутант $G' = A'B'[A, B]$. Теперь коммутант G' – нильпотентная подгруппа и группа G сверхразрешима по теореме Бэра.

7. Пусть B метациклическая. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Если подгруппа B нильпотентна, то G сверхразрешима по лемме 2.2. Пусть B ненильпотентна. Тогда $B' \neq 1$ и B' нормальна в G . По условию подгруппа B метациклическая, поэтому B' циклическая. По индукции фактор-группа G/B' сверхразрешима, а по лемме 1.1 (2) группа G сверхразрешима. \square

В следующей теореме доказывается, что в первых трех признаках требование нормальности подгрупп A и B можно ослабить до субнормальности.

Теорема 2.6. Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если коммутант G' нильпотентен, то группа G сверхразрешима;

(2) если группа G содержит нильпотентную нормальную подгруппу W и в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы, то G сверхразрешима;

(3) если индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты, то G сверхразрешима.

Доказательство. Все три утверждения докажем с помощью индукции по порядку группы. Понятно, что надо считать $A \neq G \neq B$. Так как A и B субнормальны в G , то $A^G \neq G \neq B^G$. Ясно, что $G = A^G B^G$. По тождеству Дедекинда

$$A^G = A(A^G \cap B), \quad B^G = (B^G \cap A)B.$$

Подгруппа A и B субнормальны в G , а так как A^G и B^G нормальны в G , то $A^G \cap B$ субнормальна в A^G и $B^G \cap A$ субнормальна в B^G .

Если коммутант G' нильпотентен, то нильпотентны коммутанты $(A^G)'$ и $(B^G)'$. По индукции подгруппы A^G и B^G сверхразрешимы, а по теореме Бэра группа $G = A^G B^G$ сверхразрешима.

Аналогично, если группа G содержит нильпотентную нормальную подгруппу W и в фактор-группе G/W все силовские подгруппы абелевы, то подгруппы A^G и B^G содержат нильпотентные нормальные подгруппы $W \cap A^G$ и $W \cap B^G$. Поскольку

$$A^G / (A^G \cap W) \cong A^G W / W \leq G / W,$$

$$B^G / (B^G \cap W) \cong B^G W / W \leq G / W,$$

то в фактор-группах $A^G / (A^G \cap W)$ и $B^G / (B^G \cap W)$ все силовские подгруппы абелевы. По индукции подгруппы A^G и B^G сверхразрешимы, а по теореме А.Ф. и Т.И. Васильевых группа $G = A^G B^G$ сверхразрешима.

Пусть индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты. Так как

$$|G : A| = |G : A^G| \cdot |A^G : A|,$$

$$|G : B| = |G : B^G| \cdot |B^G : B|,$$

то индексы подгрупп A^G и B^G в группе G взаимно просты. Кроме того, $|A^G : A|$ делит $|G : A|$, а $|B^G : B|$ делит $|G : B|$. Из равенств $G = A^G B$ и $G = AB^G$ следует

$$|A^G : A^G \cap B| = |G : B|,$$

$$|B^G : B^G \cap A| = |G : A|,$$

поэтому каждая из пар индексов $|A^G : A|$, $|A^G : A^G \cap B|$ и $|B^G : B|$, $|B^G : B^G \cap A|$ взаимно просты. По индукции подгруппы A^G и B^G сверхразрешимы, а по теореме Фризен группа $G = A^G B^G$ сверхразрешима. \square

Следствие 2.6.1. Пусть A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если A холлова, то G сверхразрешима.

Доказательство. Из равенства $G = AB$ следует, что $|G : B| = |A : A \cap B|$. Поэтому $|G : B|$ делит $|A|$. Так как подгруппа A холлова, то $(|G : A|, |A|) = 1$. Теперь индексы $|G : A|$ и $|G : B|$ взаимно просты, и G будет сверхразрешимой по теореме 2.6 (3). \square

Не все признаки сверхразрешимости группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B переносятся на группы с субнормальными сомножителями. Следующий пример указывает, что нормальность даже одного сомножителя в утверждениях 4–6 теоремы 2.5 нельзя ослабить до субнормальности.

Пример 2.1 [4, с. 186]. Пусть $E_{p^2} = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – элементарная абелева группа порядка p^2 ,

$$D = \langle c, d \mid c^4 = d^2 = 1, c^d = c^3 \rangle -$$

диэдральная группа порядка 8, которая действует на E_{p^2} следующим образом:

$$a^c = b^{-1}, \quad b^c = a, \quad a^d = b, \quad b^d = a.$$

Пусть $G = [E_{p^2}]D_8$ – подгруппа из голоморфа E_{p^2} .

Рассмотрим подгруппы

$$\begin{aligned} A &= [E_{p^2}]\langle c^2 \rangle \times \langle a \rangle, \\ H &= [E_{p^2}]\langle c^2 \rangle \times \langle cd \rangle, \\ B &= [E_{p^2}]\langle cd \rangle. \end{aligned}$$

Подгруппы A и H нормальны в G , поскольку $|G:A|=|G:H|=2$, а B нормальна в H , поэтому B субнормальна в G и $G = AH = AB$. Так как $\langle ab \rangle$ нормальна в A , а $\langle a \rangle$ нормальна в H , то A и H сверхразрешимы. Поскольку $a^{c^2} = a^{-1}$, то коммутант

$$G' = [E_{p^2}]\langle c^2 \rangle = A \cap H$$

не нильпотентен и G несверхразрешима. Ясно, что $A \cap B = E_{p^2}$ нильпотентна. Так как

$$\begin{aligned} a^{cd} &= (b^{-1})^d = a^{-1}, \quad b^{cd} = a^d = b, \\ B &= ([\langle a \rangle]\langle cd \rangle) \times \langle b \rangle, \end{aligned}$$

то $G = A([\langle a \rangle]\langle cd \rangle)$, подгруппа $[\langle a \rangle]\langle cd \rangle$ субнормальна в G и удовлетворяет требованиям 4–6 теоремы 2.5. \square

Наименьшее натуральное число m , для которого $G^{(m)} = 1$, называется производной длиной разрешимой группы G и обозначается $d(G)$. Здесь $G^{(m)} = (G^{(m-1)})'$ – m -коммутант группы G .

Теорема 2.7. Пусть группа $G = AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда $d(G/\Phi(G)) \leq 2$.

Доказательство. Если группа G сверхразрешима, то ее коммутант нильпотентен, поэтому $G' \leq F(G)$. Так как фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$.

Обратно, пусть группа $G = AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B и $d(G/\Phi(G)) \leq 2$. Согласно лемме 2.1 (2) фактор-группа $G/F(G)$ нильпотентна и является произведением абелевых подгрупп $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$. По теореме Ито [1, 4.9] $d(G/F(G)) \leq 2$. Фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева, поэтому

$$\begin{aligned} d(F(G)) &= 1 + \max_{r \in \pi(\Phi(G))} d((\Phi(G))_r), \\ d(G) &\leq 3 + \max_{r \in \pi(\Phi(G))} d((\Phi(G))_r). \end{aligned}$$

В частности, $d(G/\Phi(G)) \leq 3$. Если $d(G/\Phi(G)) = 1$, то G нильпотентна. Если $d(G/\Phi(G)) = 2$, то $(G/\Phi(G))'$ абелева. Поскольку

$$(G/\Phi(G))' = G'\Phi(G)/\Phi(G) = G'/G' \cap \Phi(G),$$

то G' нильпотентна [1, 3.24] и G сверхразрешима по теореме 2.6 (1). \square

Следствие 2.7.1. Пусть группа $G = AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Если группа G несверхразрешима, то $d(G/\Phi(G)) = 3$.

Теорема 2.8. Пусть группа $G = AB$ является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда $(G_r)' \leq F(G)$ для каждого $r \in \pi(G:F(G)A) \cap \pi(G:F(G)B)$.

Доказательство. Пусть группа G сверхразрешима. Тогда коммутант G' нильпотентен, $G' \leq F(G)$ и $G/F(G)$ абелева. Поэтому $(G_r)' \leq F(G)$ для каждого $r \in \pi(G)$.

Обратно, пусть $(G_r)' \leq F(G)$ для каждого $r \in \pi(G:F(G)A) \cap \pi(G:F(G)B)$. Если

$$q \notin \pi(G:F(G)A) \cap \pi(G:F(G)B),$$

то $q \notin \pi(G:F(G)A)$ или $q \notin \pi(G:F(G)B)$. Поскольку $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$ абелевы по лемме 2.1 (2), то $G_q F(G)/F(G)$ абелева. Если

$$q \in \pi(G:F(G)A) \cap \pi(G:F(G)B),$$

то $G_q F(G)/F(G)$ абелева по условию. По лемме 2.1 (2) группа $G/F(G)$ нильпотентна, поэтому она абелева и $G' \leq F(G)$. Теперь G сверхразрешима по теореме 2.6 (1). \square

3 О произведении $F(G)$ -субнормальных сверхразрешимых подгрупп

Лемма 3.1. Пусть G – метанильпотентная группа. Тогда и только тогда подгруппа H субнормальна в G , когда H является $F(G)$ -субнормальной подгруппой в G .

Доказательство. Если H субнормальна, то она $F(G)$ -субнормальна. Обратно, пусть H является $F(G)$ -субнормальной подгруппой в G . Тогда H субнормальна в $HF(G)$. Так как $G/F(G)$ нильпотентна, то $HF(G)$ субнормальна в G . Теперь H субнормальна в G . \square

Это наблюдение позволяет в метанильпотентных группах требование субнормальности заменять $F(G)$ -субнормальностью. Например, если в теоремах 2.6–2.8 условие субнормальности подгрупп A и B заменить $F(G)$ -субнормальностью и дополнительно предположить, что группа G метанильпотентна, то группа G будет сверхразрешимой.

Следующий пример указывает, что разрешимая группа нильпотентной длины 3, факторизуемая $F(G)$ -субнормальными подгруппами, одна из которых сверхразрешима, а другая нильпотентна, может быть несверхразрешимой.

Пример 3.1. В группе $SL(3,3)$ матрицы

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c = b^a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

удовлетворяют соотношениям:

$$a^3 = b^2 = 1, bc = cb, c^a = bc, (bc)^a = b.$$

Подгруппа $\langle b, c \rangle$ является минимальной нормальной в группе $\langle a, b \rangle$ подгруппой порядка 4 и совпадает со своим централизатором. По [2, II.8.17] группа $\langle a, b \rangle = [\langle b, c \rangle] \langle a \rangle$ изоморфна знакопеременной группе степени 4. Пусть E – элементарная абелева группа порядка 3^3 и $G = [E] \langle a, b \rangle$ – группа из голоморфа. Рассматривая E как векторное пространство размерности 3 над полем из 3 элементов, а a и b как линейные преобразования получаем, что $\langle a, b \rangle$ действует неприводимо на E , подгруппа E является минимальной нормальной и $E = F(G)$. В частности, группа G несверхразрешима.

Рассмотрим подгруппу $H = [E] \langle b, c \rangle$. Она имеет порядок $3^3 \cdot 4$ и ее силовская 2-подгруппа $\langle b, c \rangle$ элементарная абелева. По лемме 1.2 подгруппа H сверхразрешима. Теперь группа $G = H \langle a \rangle$, где $F(G) \leq H$ и $\langle a \rangle$ субнормальна в $E \langle a \rangle$, т. е. подгруппы H и $\langle a \rangle$ $F(G)$ -субнормальны. Таким образом, несверхразрешимая группа $G = H \langle a \rangle$ факторизуется $F(G)$ -субнормальными подгруппами, одна из которых сверхразрешима, а другая имеет простой порядок. \square

Пример 3.2. $\text{PSL}(2, 7) = AB$ является произведением сверхразрешимой подгруппы A порядка 21 и подгруппы B порядка 8. Индексы подгрупп A и B взаимно просты. Поскольку $F(\text{PSL}(2, 7)) = 1$, то подгруппы A и B являются $F(G)$ -субнормальными. \square

Этот пример указывает, что группа, являющаяся произведением $F(G)$ -субнормальных сверхразрешимых подгрупп взаимно простых индексов, может быть простой неабелевой группой. Следующий пример показывает, что в пунктах 2 и 3 теоремы 2.6 субнормальность сомножителей A и B нельзя заменить $F(G)$ -субнормальностью.

Пример 3.3. В группе $\text{GL}(2, 7)$ матрицы

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

удовлетворяют соотношениям: $a^2 = b^3 = 1, aba = b^2$.

Поэтому $\langle a, b \rangle$ является неабелевой группой

порядка 6, она изоморфна симметрической группе S_3 степени 3. Пусть E – элементарная абелева группа порядка 7^2 и $G = [E] \langle a, b \rangle$ – группа из голоморфа. Рассматривая E как векторное пространство размерности 2 над полем из 7 элементов, а a и b как линейные преобразования, получаем, что $\langle a, b \rangle$ действует неприводимо на E , подгруппа E является минимальной нормальной и $E = F(G)$. В частности, группа G несверхразрешима. Согласно [8, I.1.10] подгруппы $[E] \langle a \rangle$ и $[E] \langle b \rangle$ сверхразрешимы, а их индексы, они равны 3 и 2, взаимно просты. Так как $F(G) = E$, то $[E] \langle a \rangle$ и $[E] \langle b \rangle$ $F(G)$ -субнормальны и

$$G = ([E] \langle a \rangle)([E] \langle b \rangle).$$

Заметим, что в группе $G = [E]S_3$ все силовские подгруппы абелевы. \square

Таким образом, из трех утверждений теоремы 2.6 только в теореме Бэра нормальность сомножителей можно ослабить до $F(G)$ -субнормальности [7, теорема 2].

Лемма 3.2. Если в разрешимой группе G каждая силовская подгруппа $F(G)$ -субнормальна, то G нильпотентна.

Доказательство. Предположим, что G – ненильпотентная группа и воспользуемся индукцией по порядку группы. Так как

$$F(G / \Phi(G)) = F(G) / \Phi(G),$$

$$F(G / Z(G)) = F(G) / Z(G),$$

то условия теоремы переносятся на $G / \Phi(G)$ и $G / Z(G)$, значит, можно считать $\Phi(G) = Z(G) = 1$. Пусть H – произвольная ненормальная в G максимальная подгруппа. По теореме В.А. Ведерникова [10] существует силовская в G подгруппа P такая, что $N_G(P) \leq H$, см. также [11]. По условию P является $F(G)$ -субнормальной подгруппой в G , поэтому $F(G) \leq N_G(P) \leq H$ и $F(G)$ содержится в пересечении $\Delta(G)$ всех ненормальных максимальных подгрупп, которое изучил Гашоц [12], см., также [2, с. 276]. Он установил, что

$$\Delta(G) / \Phi(G) = Z(G / \Phi(G)).$$

Теперь $F(G) \leq Z(G) = 1$, противоречие. \square

Лемма 3.2 позволяет доказать следующую теорему А.Ф. Васильева и В.И. Мурашко.

Теорема 3.3 [7, теорема 1]. Пусть группа $G = AB$ является произведением нильпотентных подгрупп A и B . Если A и B $F(G)$ -субнормальны, то G нильпотентна.

Доказательство. Группа G разрешима по теореме Виландта – Кегеля. Согласно [2, VI.4.7] для каждого $p \in \pi(G)$ и силовских p -подгрупп A_p и B_p из A и B соответственно произведение

$A_p B_p$ является силовской p -подгруппой группы G . По условию A субнормальна в $AF(G)$, поэтому A_p субнормальна в $A_p F(G)$. Аналогично, B_p субнормальна в $B_p F(G)$. Теперь $A_p B_p$ субнормальна в $A_p B_p F(G)$ и G нильпотентна по лемме 3.2. \square

Лемма 3.4. Пусть группа $G = AB$ – произведение $F(G)$ -субнормальных подгрупп A и B . Если подгруппы A' , B' и $[A, B]$ нильпотентны, то G' нильпотентна.

Доказательство. По лемме 1.3 (4) коммутант $G' = A'B'[A, B]$. Так как $F(G') \leq F(G)$ и подгруппа A' субнормальна в $AF(G)$, то A' субнормальна в $A'F(G')$, значит, $A' F(G')$ -субнормальна в G' . Пусть $H = B'[A, B]$. Так как подгруппа $[A, B]$ нормальна в группе G и нильпотентна, то

$$[A, B] \leq F(H) \cap F(G), \\ F(H) = (F(H) \cap B')[A, B].$$

По условию B субнормальна в $BF(G)$, поэтому B' субнормальна в $BF(G)$. Поскольку

$$B'F(H) = B'((F(H) \cap B')[A, B]) = \\ = B'[A, B] \leq B'F(G) \leq BF(G),$$

то B' субнормальна в $B'F(H)$, т. е. подгруппа $B' F(H)$ -субнормальна в H . Теперь, подгруппа $H = B'[A, B]$ нильпотентна по лемме 3.3. Так как $F(G') \leq F(G)$ и подгруппа B' субнормальна в $BF(G)$, то B' субнормальна в $B'F(G')$. Поэтому подгруппа $H F(G')$ -субнормальна в G' . Теперь, $G' = A'H$ нильпотентна по лемме 3.3. \square

Теперь из теоремы А.Ф. Васильева и В.И. Мурашко [7, теорема 2] получается

Следствие 3.4.1. Пусть группа $G = AB$ является произведением $F(G)$ -субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) группа G сверхразрешима;
- (2) коммутант G' нильпотентен;
- (3) подгруппа $[A, B]$ нильпотентна.

Доказательство. В [7, теорема 2] доказана эквивалентность утв. (1) и (2). Утв. (2) и (3) эквивалентны в силу лемм 1.1 (4), 1.3 (4) и 3.4. \square

Следствие 3.4.2. Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) группа G сверхразрешима;
- (2) коммутант G' нильпотентен;
- (3) подгруппа $[A, B]$ нильпотентна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.

3. Huppert, B. Monomiale darstellung endlicher gruppen / В. Huppert // Nagoya Math. J. – 1953. – Vol. 3. – P. 93–94.

4. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

5. Friesen, D. Products of normal supersolvable subgroups / D. Freisen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30, № 1. – P. 46–48.

6. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 11 (426). – С. 10–14.

7. Мурашко, В.И. О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2012. – № 4 (70). – С. 24–27.

8. Between Nilpotent and Soluble / H.G Bray [et al.]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polygonal Publishing House, 1982. – 240 p.

9. Монахов, В.С. О p -сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с нормальными сомножителями / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 256–267.

10. Ведерников, В.А. О π -свойствах конечных групп / В.А. Ведерников // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: сб. науч. ст. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 13–19.

11. Gritsuk, D.V. About maximal subgroup of a finite solvable group / D.V. Gritsuk, V.S. Monakhov // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – Vol. 3, № 2. – P. 129–134.

12. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppe endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – P. 160–170.

Поступила в редакцию 19.04.16.

УДК 517.925

ДОПУСТИМЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛЭНГФОРДА

Э.В. Мусафиров

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

ADMISSIBLE PERTURBATIONS OF LANGFORD SYSTEM

E.V. Musafirov

Y. Kupala Grodno State University

Получено множество трехмерных систем неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, отражающая функция которых совпадает с отражающей функцией системы Лэнгфорда. Это позволяет сопоставить качественное поведение решений полученных систем и системы Лэнгфорда.

Ключевые слова: отражающая функция, система обыкновенных дифференциальных уравнений, бифуркация Хопфа, периодическое решение.

The set of three-dimensional systems of nonautonomous ordinary differential equations for which the reflecting function coincides with reflecting function of the Langford system is obtained. It allows comparing the qualitative behavior of solutions of the obtained systems and Langford system.

Keywords: reflecting function, system of ordinary differential equations, Hopf bifurcation, periodic solution.

Введение

Многие процессы, происходящие в окружающем нас мире, моделируются с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Большинство таких систем невозможно проинтегрировать даже в квадратурах и тем более через элементарные функции. В связи с этим встает вопрос об изучении решений таких систем дифференциальных уравнений по виду самих систем (т. е. о применении качественной теории дифференциальных уравнений). Одним из новых инструментов качественной теории дифференциальных уравнений является отражающая функция (ОФ), введенная профессором В.И. Мироненко [1], [2].

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (0.1)$$

с общим решением в форме Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ ОФ определяется (см. [2, с. 11], а также [1, с. 62]) формулой $F(t, x) := \varphi(-t; t, x)$. Теория ОФ позволяет проводить исследование качественного поведения решений даже неинтегрируемых в замкнутом виде систем несмотря на то, что ОФ определяется (формально) через общее решение этой системы. ОФ позволяет решать такие задачи качественной теории дифференциальных уравнений, как вопросы существования и устойчивости периодических решений [2], существования решений краевых задач [3], вопросы глобального поведения семейств решений дифференциальных систем [1]. Изучению качественного поведения решений дифференциальных уравнений с помощью ОФ посвящены работы J. Zhou, Z. Zhou,

Л.А. Альсевич, М.С. Белокурского, В.А. Бельского, Е.В. Варенниковой, П.П. Вересовича, С.В. Майоровской, В.И. Мироненко, В.В. Мироненко, Э.В. Мусафирова и других [4]–[13].

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t, x)$, удовлетворяющая условию $F(-t, F(t, x)) \equiv F(0, x) \equiv x$, является ОФ множества систем [1]. Все системы с одинаковой ОФ имеют один и тот же оператор сдвига [4, с. 11–13] на любом интервале $(-\alpha; \alpha)$. Поэтому все 2ω -периодические системы с одинаковой ОФ имеют одно и то же отображение за период $[-\omega; \omega]$.

Пусть система (0.1) и система

$$\dot{y} = Y(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (0.2)$$

имеют одинаковую ОФ $F(t, x)$, и пусть система (0.1) является 2ω -периодической. Тогда, если решение $\varphi(t; -\omega, x)$ системы (0.1) и решение $\psi(t; -\omega, x)$ системы (0.2) продолжимы на отрезок $[-\omega, \omega]$, то отображение за период $[-\omega, \omega]$ для системы (0.1) есть

$$\varphi(\omega; -\omega, x) \equiv F(-\omega, x) \equiv \psi(\omega; -\omega, x),$$

хотя система (0.2) может быть непериодической. Т. е., между 2ω -периодическими решениями системы (0.1) и решениями двухточечной задачи $y(-\omega) = y(\omega)$ для системы (0.2) можно установить взаимно однозначное соответствие [1].

Таким образом, решения систем дифференциальных уравнений с одинаковой ОФ имеют много одинаковых качественных свойств. Поэтому при исследовании качественных свойств

решений систем целесообразно заменять сложную систему на более простую.

1 Допустимые возмущения системы Лэнгфорда

Находить возмущения дифференциальных систем, не меняющие ОФ (назовем такие возмущения *допустимыми*), позволяет следующее утверждение (см. [12]).

Утверждение 1.1. Пусть вектор-функции $\Delta_i(t, x)$ ($i = \overline{1, m}$) являются решениями дифференциального уравнения в частных производных $\frac{\partial \Delta(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta(t, x)}{\partial x} X(t, x) - \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \Delta(t, x) = 0$. (1.1)

Тогда ОФ возмущенной дифференциальной системы вида

$$\dot{x} = X(t, x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \Delta_i(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n$$

совпадает с ОФ системы (0.1), где $\alpha_i(t)$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции.

Цель настоящей работы – поиск допустимых возмущений для хорошо изученной системы Лэнгфорда [15]–[19], моделирующей турбулентность в жидкости

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2a-1)x - y + xz; \\ \dot{y} &= x + (2a-1)y + yz; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\dot{z} = -az - (x^2 + y^2 + z^2); \quad a, x, y \in \mathbb{R}.$$

Для этой системы пара $(a_0 = 1/2, T_0 = 2\pi)$ является точкой бифуркации Хопфа. Рождающиеся периодические решения системы (1.2) существуют при $a > 1/2$ и являются асимптотически орбитально устойчивыми [17].

Получена следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, 7}$ – произвольные скалярные непрерывные нечетные функции, тогда:

1) ОФ системы (1.2) совпадает с ОФ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(z-1) - (x+y-xz)\alpha_1(t) + \\ &+ y\alpha_2(t) + x(z-1)\alpha_3(t) + \\ &+ 2ax(1 + \alpha_1(t) + \alpha_3(t)), \\ \dot{y} &= x + y(z-1) + x\alpha_1(t) - x\alpha_2(t) + \\ &+ y((z-1)(\alpha_1(t) + \alpha_3(t)) + \\ &+ 2a(1 + \alpha_1(t) + \alpha_3(t))), \\ \dot{z} &= -(x^2 + y^2 + z^2 + az)(1 + \alpha_1(t) + \alpha_3(t)); \end{aligned} \quad (1.3)$$

2) при $a = 2/3$ ОФ системы (1.2) совпадает с ОФ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\left(\frac{1}{3} + z\right) - y + \left(x\left(\frac{1}{3} + z\right) - y\right)\alpha_1(t) + \\ &+ x(x^2 + y^2)(1 + 3z)(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2)\alpha_2(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ y\alpha_3(t) + (x + 3xz)\alpha_4(t) + \\ &+ y(x^2 + y^2)(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2)\alpha_5(t) + \\ &+ y(x^2 + y^2)^2(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2)^2\alpha_6(t) + \\ &+ x(x^2 + y^2)^2(1 + 3z)(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2)^2\alpha_7(t), \\ \dot{y} &= x + y\left(\frac{1}{3} + z\right) + \left(x + y\left(\frac{1}{3} + z\right)\right)\alpha_1(t) + \\ &+ y(x^2 + y^2)(1 + 3z)(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2)\alpha_2(t) - \\ &- x\alpha_3(t) + (y + 3yz)\alpha_4(t) - \\ &- x(x^2 + y^2)(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2)\alpha_5(t) - \\ &- x(x^2 + y^2)^2(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2)^2\alpha_6(t) + \\ &+ y(x^2 + y^2)^2(1 + 3z)(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2)^2\alpha_7(t), \\ \dot{z} &= -x^2 - y^2 - \frac{1}{3}z(2 + 3z) - \\ &- \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3}z(2 + 3z)\right)\alpha_1(t) - \\ &- (x^2 + y^2)(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2) \times \\ &\times (3x^2 + 3y^2 + z(2 + 3z))\alpha_2(t) - \\ &- (3x^2 + 3y^2 + z(2 + 3z))\alpha_4(t) - \\ &- (x^2 + y^2)^2(3(x^2 + y^2) + 4z + 6z^2)^2 \times \\ &\times (3x^2 + 3y^2 + z(2 + 3z))\alpha_7(t). \end{aligned}$$

Доказательство вытекает из утверждения 1.1 последовательной проверкой тождества (1.1) для каждого вектор-множителя при $\alpha_i(t)$.

Замечание. Обычно динамика процессов моделируется на неотрицательной временной полуоси, поэтому требование нечетности функций $\alpha_i(t)$ не является существенным, т. к. функции $\alpha_i(t)$ ($\alpha_i(0) = 0$) можно доопределить непрерывно нечетным образом на отрицательную полуось.

С помощью теории ОФ Теорему 1.1 можно использовать для изучения качественного поведения решений допустимо возмущенных систем. При этом, в частности, характер устойчивости решений, при $t = t_0$, выходящих из одной и той же точки, всех допустимо возмущенных систем такой же, как и у исходной системы.

2 Численное решение

Пример. Вышесказанное проиллюстрируем численными решениями с начальными условиями $x(0) = 0, y(0) = 0.01, z(0) = 0.1$ систем (1.2) (рисунки 2.1–2.3) и (1.3) при $a = 0.53$ и $\alpha_i(t) = \sin(i \cdot t)$, $i = \overline{1, 3}$ (рисунки 2.4–2.6).

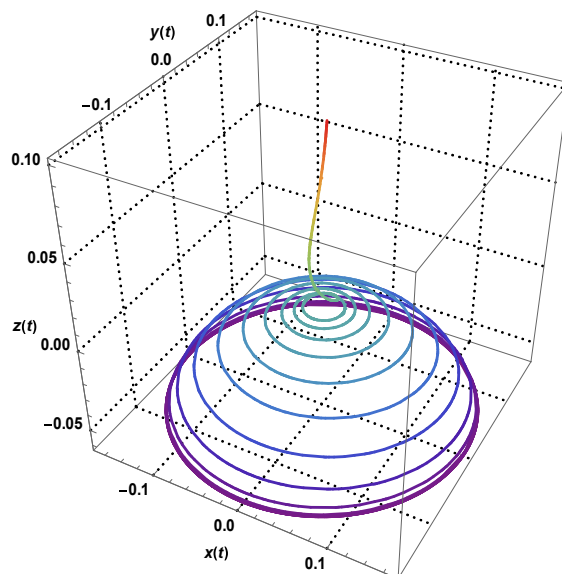


Рисунок 2.1 – Решение системы Лэнгфорда (1.2) с начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.1$ в фазовом пространстве

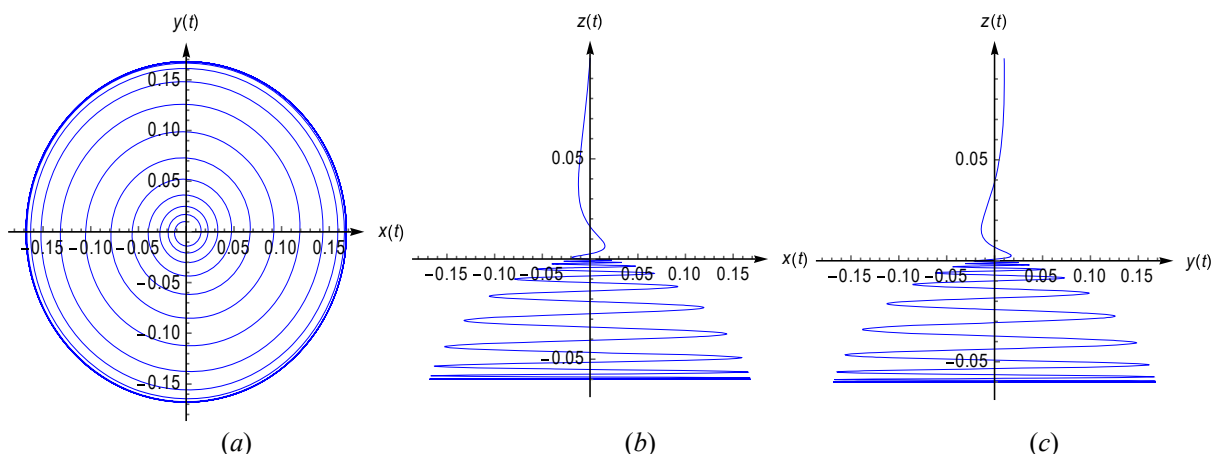


Рисунок 2.2 – Проекция решения системы Лэнгфорда (1.2) с начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.1$ на фазовые плоскости:
 (a) – на плоскость xOy ; (b) – на плоскость xOz ; (c) – на плоскость yOz

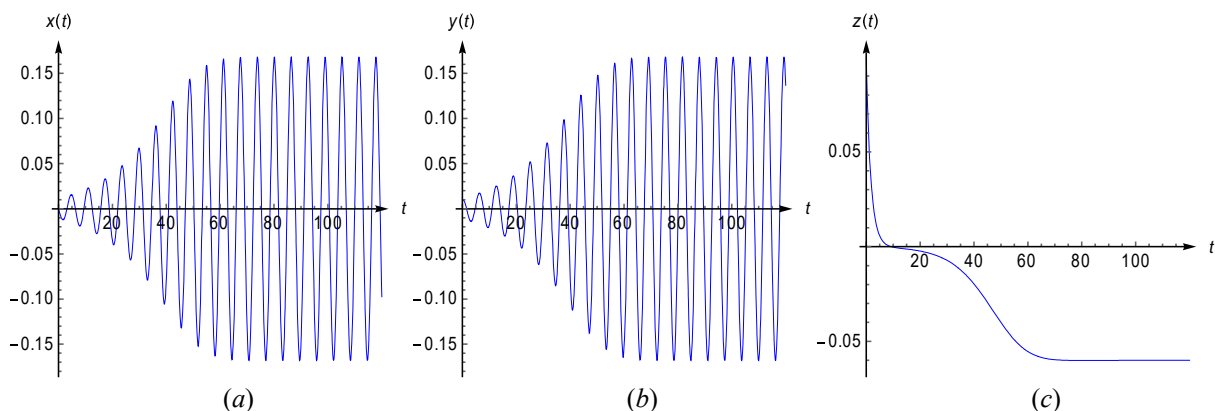


Рисунок 2.3 – Графики компонент решения системы Лэнгфорда (1.2) с начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.1$:
 (a) – компоненты $x(t)$; (b) – компоненты $y(t)$; (c) – компоненты $z(t)$

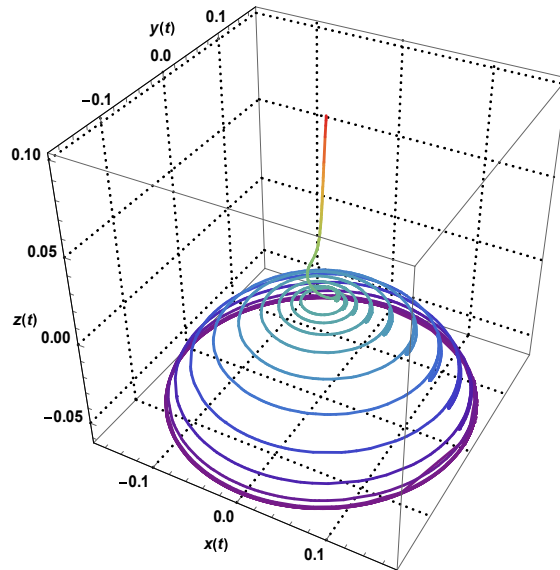


Рисунок 2.4 – Решение системы (1.3) при $a = 0.53$, $\alpha_i(t) = \sin(i \cdot t)$, $i = \overline{1,3}$ и начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.1$ в фазовом пространстве

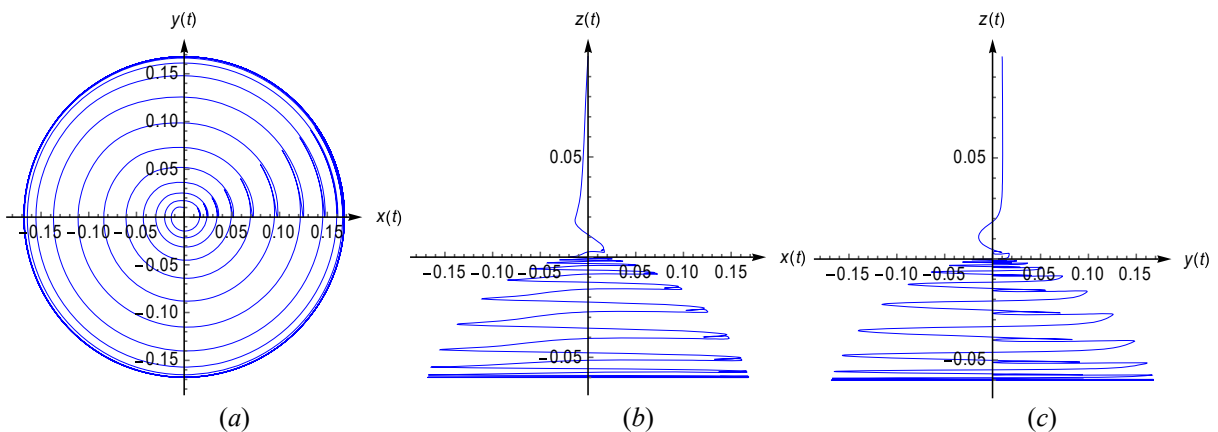


Рисунок 2.5 – Проекция решения системы (1.3) при $a = 0.53$, $\alpha_i(t) = \sin(i \cdot t)$ и начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.1$ на фазовые плоскости: (a) – на плоскость xOy ; (b) – на плоскость xOz ; (c) – на плоскость yOz

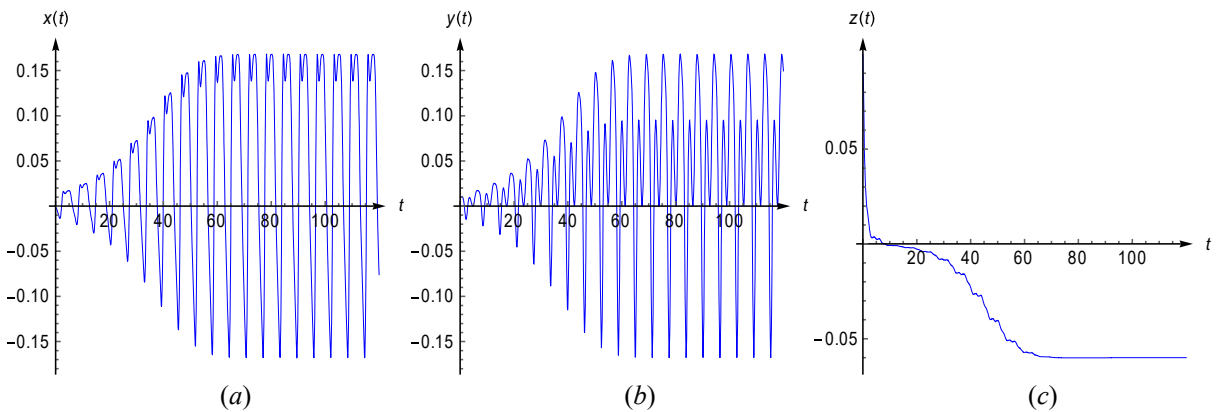


Рисунок 2.6 – Графики компонент решения системы (1.3) при $a = 0.53$, $\alpha_i(t) = \sin(i \cdot t)$, $i = \overline{1,3}$ и начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0.01$, $z(0) = 0.1$: (a) – компоненты $x(t)$; (b) – компоненты $y(t)$; (c) – компоненты $z(t)$

Заключение

Полученно множество нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ОФ которых совпадает с ОФ системы Лэнгфорда. Одинаковая ОФ этих систем обуславливает совпадение некоторых качественных свойств поведения их решений, что позволяет использовать результаты исследования качественного поведения решений хорошо изученной системы Лэнгфорда для изучения более сложных по своей природе нестационарных возмущенных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.
2. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: Университетское, 1986. – 76 с.
3. Мироненко, В.И. Метод отражающей функции для краевых задач / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 774–779.
4. Zhou, J. The differential systems with the same reflecting function / J. Zhou // Applied Mathematics and Computation. – 2011. – Vol. 218, № 7. – P. 3144–3148.
5. Zhou, Z. On the first integral and equivalence of nonlinear differential equations / Z. Zhou // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – Vol. 268. – P. 295–302.
6. Альсевич, Л.А. Явное вычисление отображения за период для линейных систем с блочным строением отражающей матрицы / Л.А. Альсевич, О.А. Кастрица // Известия национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2003. – № 3. – С. 23–25.
7. Белокурский, М.С. О совпадении отражающих функций квазипериодической и периодической дифференциальных систем / М.С. Белокурский // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 58–61.
8. Бельский, В.А. О полиномиальных возмущениях уравнения Абеля, не изменяющих отражающей функции / В.А. Бельский, В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 79–85.
9. Варенникова, Е.В. О решениях двухточечной краевой задачи для одной неавтономной дифференциальной системы с квадратичной по фазовым переменным правой частью / Е.В. Варенникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 1 (18). – С. 39–42.

10. Вересович, П.П. Отражающая функция одной двумерной дифференциальной системы / П.П. Вересович // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 65–67.

11. Майоровская, С.В. Отражающая функция и периодичность решений одной неавтономной кубической системы / С.В. Майоровская // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 92–93.

12. Mironenko, V.I. How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematics Letters. – 2009. – Vol. 22, № 9. – P. 1356–1359.

13. Мусафиров, Э.В. Нестационарные дифференциальные системы, эквивалентные системе Лотки – Вольтерры с логистической поправкой / Э.В. Мусафиров // Наука Красноярья. – 2012. – № 1 (01). – С. 97–104.

14. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

15. Даймонд, Ф. Анализ сходимости дискретных и проекционных процедур построения циклов в задаче о бифуркации Хопфа / Ф. Даймонд, Н.И. Матвеев, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 9. – С. 3–12.

16. Казанцева, Т.Е. Некоторые замечания о модифицированных системах типа Лэнгфорда / Т.Е. Казанцева, В.В. Мачулис // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. – 2013. – № 4. – С. 12–16.

17. Красносельский, М.А. Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа / М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 12. – С. 15–24.

18. Красносельский, М.А. Функционализация параметра и асимптотика циклов в бифуркации Хопфа / М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 11. – С. 22–28.

19. Кузнецов, Н.А. Алгоритм исследования устойчивости периодических колебаний в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа / Н.А. Кузнецов, М.Г. Юмагулов, И.В. Шарфутдинов // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 12. – С. 47–52.

Автор выражает благодарность за оказанную помощь ресурсному центру «СКИФ» Гродненского государственного университета им. Я. Купалы.

Поступила в редакцию 26.05.16.

УДК 517.936+531.314.3

ТЕОРЕМА ПУАССОНА ПОСТРОЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

А.Ф. Проневич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

POISSON THEOREM OF BUILDING AUTONOMOUS INTEGRALS FOR AUTONOMOUS SYSTEMS OF TOTAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.F. Pranevich

Y. Kupala Grodno State University

Рассмотрена автономная система уравнений в полных дифференциалах и соответствующая ей гамильтонова дифференциальная система. Между этими дифференциальными системами установлены аналитические связи существования первых интегралов, наличия частных решений, выполнения условий полной разрешимости. Основываясь на этих связях, для автономной системы уравнений в полных дифференциалах доказана теорема Пуассона о построении стационарных первых интегралов и получены утверждения о наличии дополнительных стационарных первых интегралов.

Ключевые слова: система уравнений в полных дифференциалах, первый интеграл, теорема Пуассона.

The autonomous system of total differential equations and corresponding to it Hamiltonian differential system are considered. The analytical relations (the existence of first integrals and partial solutions, fulfillment of conditions of completely solvability) between these differential systems are established. Using these relations, the Poisson theorem of building autonomous first integrals for autonomous system of total differential equations is proved and statements of the existence of additional autonomous first integrals for this system are obtained.

Keywords: system of total differential equations, first integral, Poisson theorem.

Введение

Среди общих методов интегрирования канонических систем уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H(q, p), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\partial_{q_i} H(q, p), \quad (0.1)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad H \in C^2(D), \quad D \subset \mathbb{R}^{2n},$$

особое значение имеет метод Пуассона. Он дает возможность по двум первым интегралам гамильтоновой системы (0.1) находить третий первый интеграл этой системы, а значит, в определенных случаях строить интегральный базис гамильтоновой системы (0.1). Благодаря этому свойству метод Пуассона вошел практически во все монографии и учебники по аналитической механике (см., например, [1, с. 240; 2, с. 184; 3, с. 100]) и сформулирован в виде следующего утверждения.

Теорема Пуассона. Пусть дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции $F_1: D' \rightarrow \mathbb{R}$ и $F_2: D' \rightarrow \mathbb{R}$ являются первыми интегралами на области $D' \subset D$ гамильтоновой системы (0.1). Тогда скобка Пуассона $[F_1, F_2]: D' \rightarrow \mathbb{R}$ от функций F_1 и F_2 будет первым интегралом гамильтоновой системы (0.1).

К.Г. Якоби считал эту теорему наиболее глубоким открытием С.Д. Пуассона и по ее поводу в книге «Лекции по динамике» писал [1, с. 241]: «Это одна из замечательнейших теорем всего интегрального исчисления и, в частном случае,

когда положено $H = T - U$, это есть основная теорема аналитической механики. Именно она показывает, что если имеет место теорема живой силы, то из двух интегралов дифференциальных уравнений движения простым дифференцированием вообще можно вывести третий интеграл, отсюда четвертый и т. д., так что либо получатся все интегралы, либо по крайней мере некоторое число их».

Вопрос о применении теоремы Пуассона к интегрированию нормальных обыкновенных автономных дифференциальных систем n -го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.2)$$

$$x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

изучался в работах А. Буля [4], П. Аппеля [5] и М.Ф. Шульгина [6]. Так, например, основной результат А. Буля для дифференциальной системы (0.2) выражает [4]

Теорема Буля. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $F_1: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ является первым интегралом на области $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ системы (0.2) и существуют скалярные функции $f_i: \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, такие, что имеет место система тождеств

$$\sum_{i=1}^n X_i(x) \partial_{x_i} f_j(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \partial_{x_i} X_j(x)$$

$$\forall x \in \mathcal{X}', \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда система (0.2) имеет дополнительный автономный первый интеграл

$$F_2 : x \rightarrow \sum_{i=1}^n f_i(x) \partial_{x_i} F_1(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}'.$$

При этом А. Буль показал, что из этой теоремы для случая гамильтоновой системы (0.1) следует теорема Пуассона. А с другой стороны, в работе [5] П. Аппель установил, что теорема Буля может быть получена и из классической теоремы Пуассона.

В.В. Добронравов применил метод неголономных координат к аналитической динамике для голономных систем и создал, в частности, теорию Пуассона в неголономных координатах [7]. Для уравнений в переменных Пуанкаре аналогичная теория была создана Н.Г. Четаевым [8; 9]. На случаи голономных механических систем с избыточными координатами и неголономных механических систем обобщения теоремы Пуассона получены М.Ф. Шульгиным [6].

В данной работе теория Пуассона построения стационарных первых интегралов гамильтоновых дифференциальных систем распространена на автономные системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^m X_{ij}(x) dt_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.3)$$

где скалярные функции

$$X_{ij} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

непрерывно дифференцируемы на области \mathcal{X} из фазового пространства \mathbb{R}^n .

Для дифференциальной системы (0.3), используя метод Лиувилля [10, с. 429–430], построим расширенную гамильтонову систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^m \partial_{y_j} H_j(x, y) dt_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.4)$$

$$dy_i = -\sum_{j=1}^m \partial_{x_i} H_j(x, y) dt_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.5)$$

с гамильтонианами

$$H_j : (x, y) \rightarrow \sum_{i=1}^n X_{ij}(x) y_i \quad (0.6)$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Гамильтонова система уравнений в полных дифференциалах (0.4), (0.5) составлена таким образом, что первые n дифференциальных уравнений (0.4) образуют систему в полных дифференциалах (0.3), а вторые n дифференциальных уравнений (0.5) составляют вспомогательную систему для определения избыточных переменных y_1, \dots, y_n . В развернутом виде вспомогательная дифференциальная система (0.5) есть линейная система уравнений в полных дифференциалах

$$dy_i = -\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \partial_{x_i} X_{kj}(x) y_k dt_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (0.7)$$

Система (0.3) и расширенная гамильтонова система (0.4), (0.5) индуцируют соответственно автономные линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(x) = \sum_{i=1}^n X_{ij}(x) \partial_{x_i} \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (0.8)$$

и

$$\mathfrak{G}_j(x, y) = \sum_{i=1}^n X_{ij}(x) \partial_{x_i} - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \partial_{x_i} X_{kj}(x) y_k \partial_{y_i}$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m.$$

С целью однозначного толкования, следуя в основном монографии [11], определим используемые в статье понятия. Систему уравнений в полных дифференциалах (0.3) назовем *вполне разрешимой* на области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \times \mathcal{X}$, если в любой точке $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) единственно [11, с. 17; 12, с. 21].

Система (0.3) вполне разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия Фробениуса [11, с. 19; 12, с. 113; 13, с. 43], которые с помощью скобок Пуассона линейных дифференциальных операторов (0.8) выражаются системой тождеств [11, с. 112–113]

$$[\mathfrak{X}_j(x), \mathfrak{X}_\xi(x)] = \mathcal{O} \quad (0.9)$$

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi = 1, \dots, m,$$

где \mathcal{O} – нулевой линейный дифференциальный оператор первого порядка.

Непрерывно дифференцируемую функцию $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *стационарным первым интегралом* на области $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ системы уравнений в полных дифференциалах (0.3), если

$$\mathfrak{X}_j F(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad j = 1, \dots, m. \quad (0.10)$$

Совокупность функционально независимых на области $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ стационарных первых интегралов $F_\zeta : \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta = 1, \dots, k$, системы (0.3) назовем *базисом стационарных первых интегралов* на области \mathcal{X}' системы (0.3), если у этой системы любой стационарный первый интеграл Ψ можно представить в виде

$$\Psi(x) = \Phi(F_1(x), \dots, F_k(x)) \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

где Φ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Число k при этом назовем *размерностью* базиса стационарных первых интегралов на области \mathcal{X}' системы (0.3).

Автономная вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах (0.3) в окрестности любой точки области \mathcal{X} имеет базис стационарных первых интегралов размерности $n - r$, где r – ранг матрицы $X = \|X_{ij}\|_{n \times m}$, $1 \leq i \leq n$ [11, с. 114]. А в случае неполной разрешимости автономной системы уравнений в полных дифференциалах (0.3) с дефектом d [1, с. 54] ее базис стационарных первых интегралов

в окрестности любой точки из области разрешимости имеет размерность $n - r - d$ [11, с. 53–59].

Современное состояние теории интегралов и подробный обзор литературы по этой тематике приведены в монографиях [11; 14–16].

1 Аналитические связи между системами

Между первыми интегралами системы уравнений в полных дифференциалах (0.3) и частными решениями вспомогательной дифференциальной системы (0.7) существуют аналитические связи, которые выражает

Свойство 1.1. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ является стационарным первым интегралом на области $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ системы уравнений в полных дифференциалах (0.3). Тогда функции

$$y_i : x \rightarrow \partial_{x_i} F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

составляют частное решение вспомогательной системы в полных дифференциалах (0.7).

Доказательство. Функции (1.1) образуют частное решение вспомогательной системы уравнений в полных дифференциалах (0.7) тогда и только тогда, когда на области \mathcal{X}' имеет место система тождеств в дифференциалах

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}^2 F(x) X_{kj}(x) dt_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \partial_{x_i} X_{kj}(x) \partial_{x_k} F(x) dt_j = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

которая образована подстановкой функций (1.1) в систему (0.7) с учетом системы (0.3).

Эта система тождеств равносильна системе

$$\sum_{j=1}^m \partial_{x_i} \left(\sum_{k=1}^n X_{kj}(x) \partial_{x_k} F(x) \right) dt_j = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad i = 1, \dots, n,$$

или, используя линейные дифференциальные операторы первого порядка (0.8) и то, что дифференциалы $dt_j, j = 1, \dots, m$, независимы, системе тождеств

$$\partial_{x_i} X_j F(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.2)$$

Если функция $F : \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ есть первый интеграл системы уравнений в полных дифференциалах (0.3), то выполняется система тождеств (0.10), а значит, имеет место система тождеств (1.2). Свойство доказано.

Установим аналитические связи между первыми интегралами системы (0.3) и, соответствующей ей, расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5).

Свойство 1.2. Непрерывно дифференцируемая скалярная функция

$$\tilde{F} : (x, y) \rightarrow F(x) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n$$

является n -цилиндричным первым интегралом гамильтоновой системы (0.4), (0.5) тогда и

только тогда, когда скалярная функция $F : x \rightarrow F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}'$ будет стационарным первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (0.3).

Доказательство следует из того, что на области $\mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_j \tilde{F}(x, y) &= \sum_{i=1}^n X_{ij}(x) \partial_{x_i} F(x) - \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \partial_{x_i} X_{kj}(x) y_k \partial_{y_i} F(x) = \mathfrak{X}_j F(x), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Связь между полной разрешимостью системы в полных дифференциалах (0.3) и полной разрешимостью расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5) выражает

Свойство 1.3. Автономная система уравнений в полных дифференциалах (0.3) является вполне разрешимой тогда и только тогда, когда гамильтонианы (0.6) расширенной дифференциальной системы (0.4), (0.5) находятся в инволюции, т. е. скобки Пуассона

$$[H_\xi(x, y), H_j(x, y)] = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi = 1, \dots, m. \quad (1.3)$$

Доказательство. Система тождеств (1.3) является критерием полной разрешимости [17] гамильтоновой системы (0.4), (0.5). Скобки Пуассона для гамильтонианов (0.6) равны:

$$\begin{aligned} [H_\xi(x, y), H_j(x, y)] &= \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\partial_{x_i} H_\xi(x, y) \partial_{y_i} H_j(x, y) - \right. \\ &\quad \left. - \partial_{y_i} H_\xi(x, y) \partial_{x_i} H_j(x, y) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X_{ij}(x) \partial_{x_i} X_{k\xi}(x) - \sum_{i=1}^n X_{i\xi}(x) \partial_{x_i} X_{kj}(x) \right) y_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(X_j X_{k\xi}(x) - X_\xi X_{kj}(x) \right) y_k \\ &\quad \forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Следовательно, система тождеств (1.3) равносильна системе тождеств (0.9). Отсюда, по теореме Ф.Г. Фробениуса [11, с. 25], получаем, что система уравнений в полных дифференциалах (0.3) будет вполне разрешимой. Свойство доказано.

2 Первые интегралы

Построение первых интегралов системы (0.3) по первым интегралам гамильтоновой системы (0.4), (0.5) основано на теоремах 2.1–2.5 и следствии 2.1.

Теорема 2.1. Пусть непрерывно дифференцируемые функции

$$F_1 : (x, y) \rightarrow F_1(x) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n \quad \text{и}$$

$$F_2 : (x, y) \rightarrow F_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n,$$

являются первыми интегралами расширенной гамильтоновой системы уравнений в полных

дифференциалах (0.4), (0.5). Тогда скалярная функция

$$F : x \rightarrow F_2(x, y)|_{y=\partial_x F_1(x)} \quad \forall x \in \mathcal{X}' \quad (2.1)$$

будет стационарным первым интегралом системы в полных дифференциалах (0.3).

Доказательство. По свойству 1.2, скалярная функция $F_1 : \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}$ будет первым интегралом системы (0.3). Тогда, с учетом того, что функции (1.1) составляют частное решение (свойство 1.1) вспомогательной системы (0.7), вычислим дифференциал функции (2.1) в силу системы уравнений в полных дифференциалах (0.3):

$$\begin{aligned} dF(x)_{(1.1)} &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_2(x, y)|_{y=\partial_x F_1(x)} \sum_{j=1}^m X_{ij}(x) dt_j + \\ &+ \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} F_2(x, y)|_{y=\partial_x F_1(x)} \left(- \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \partial_{x_i} X_{kj}(x) y_k \right) dt_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n X_{ij}(x) \partial_{x_i} F_2(x, y) - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \partial_{x_i} X_{kj}(x) y_k \partial_{y_i} F_2(x, y) \right) dt_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \mathfrak{G}_j F_2(x, y)|_{y=\partial_x F_1(x)} dt_j \quad \forall x \in \mathcal{X}'. \end{aligned}$$

Отсюда, на основании того, что функция $F_2 : \mathcal{X}' \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ есть первый интеграл расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5), имеем:

$$dF(x)_{(1.1)} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}',$$

то есть, скалярная функция (2.1) является стационарным первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (0.3). Теорема доказана.

Теорема 2.1 указывает способ построения дополнительного первого интеграла F системы в полных дифференциалах (0.3) по первому интегралу (свойство 1.2) F_1 системы (0.3) и первому интегралу F_2 расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5).

Применим теорему 2.1 к построению первых интегралов систем уравнений в полных дифференциалах (0.3), обладающих циклическими переменными. При этом будем использовать следующее понятие: если функции $X_{ij} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, входящие в задание системы (0.3), являются цилиндричными по зависимой переменной $x_\zeta, \zeta \in \{1, \dots, n\}$, то переменную x_ζ для системы (0.3) назовем *циклической*.

Свойство 2.1. Если переменная $x_\zeta, \zeta \in \{1, \dots, n\}$, для системы в полных дифференциалах (0.3) является циклической, то $(2n-1)$ -цилиндрическая функция

$$F : (x, y) \rightarrow y_\zeta \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n$$

будет первым интегралом расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5).

Действительно, производные Ли функции F в силу системы (0.4), (0.5) равны

$$\mathfrak{G}_j F(x, y) = - \sum_{i=1}^n \partial_{x_\zeta} X_{ij}(x) y_i = 0$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m.$$

На основании теоремы 2.1, свойств 1.2 и 2.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть функция

$$F : x \rightarrow F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}'$$

является первым интегралом системы (0.3) с циклической переменной $x_\zeta, \zeta \in \{1, \dots, n\}$. Тогда функция

$$F_1 : x \rightarrow \partial_{x_\zeta} F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad \zeta \in \{1, \dots, n\},$$

будет первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (0.3).

Используя теорему 2.2 получаем, что если первый интеграл $F : x \rightarrow F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}'$ дифференциальной системы (0.3) бесконечное число раз непрерывно дифференцируем по циклической для системы (0.3) переменной $x_\zeta, \zeta \in \{1, \dots, n\}$, то скалярные функции

$$F_k : x \rightarrow \partial_{x_\zeta}^k F_{k-1}(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad k = 2, 3, \dots,$$

также будут первыми интегралами системы уравнений в полных дифференциалах (0.3).

Теорема 2.3 (теорема Пуассона). Пусть первыми интегралами расширенной гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах (0.4), (0.5) являются дважды непрерывно дифференцируемые функции

$$F_1 : (x, y) \rightarrow F_1(x) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n \quad \text{и}$$

$$F_2 : (x, y) \rightarrow F_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n.$$

Тогда скобка Пуассона

$$F : x \rightarrow [F_1(x), F_2(x, y)]|_{y=\partial_x F_1(x)} \quad \forall x \in \mathcal{X}' \quad (2.2)$$

будет первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (0.3).

Доказательство. По теореме Пуассона для гамильтоновых систем уравнений в полных дифференциалах, доказанной И.С. Аржаных в работе [17], скалярная функция (скобка Пуассона двух первых интегралов)

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, y) &= [F_1(x), F_2(x, y)] = \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_1(x) \partial_{y_i} F_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathcal{Y} \end{aligned}$$

будет первым интегралом расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5).

Используя первые интегралы

$$F_1 : \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \tilde{F} : \mathcal{X}' \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$$

расширенной гамильтоновой системы (0.4), (0.5), по теореме 2.1, строим первый интеграл (2.2) системы уравнений в полных дифференциалах (0.3). Теорема доказана.

Теорема Пуассона указывает способ, посредством которого по одному известному первому интегралу (свойство 1.2) системы (0.3) и

одному известному первому интегралу гамильтоновой системы (0.4), (0.5) можно найти дополнительный (второй) первый интеграл системы (0.3). Последовательное применение теоремы Пуассона дает возможность нахождения некоторого количества функционально независимых первых интегралов системы (0.3), а в «благоприятных» случаях и базис первых интегралов системы (0.3).

Для доказательства многомерного аналога теоремы А. Буля (теорема 2.4) понадобится

Свойство 2.2. *Расширенная гамильтонова система уравнений в полных дифференциалах (0.4), (0.5) имеет автономный линейный по импульсам первый интеграл*

$$\tilde{F}(x, y) \rightarrow \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i \quad \forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n,$$

если и только если функции

$$f_i : \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n,$$

удовлетворяют системе тождеств

$$[\mathfrak{X}_j(x), \mathfrak{F}(x)] = 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

где линейный дифференциальный оператор

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \partial_{x_i} \quad \forall x \in \mathcal{X}'.$$

Доказательство. Функция \tilde{F} является линейным по импульсам первым интегралом гамильтоновой системы (0.4), (0.5), если и только если имеет место система тождеств

$$\mathfrak{G}_j \tilde{F}(x, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\mathfrak{X}_j f_i(x) - \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} X_{ij}(x) f_k(x) \right) y_i = 0$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}' \times \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

что равносильно операторной системе тождеств (2.3). Свойство доказано.

Теорема 2.4. *Пусть функция*

$$F : x \rightarrow F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}'$$

является автономным первым интегралом системы в полных дифференциалах (0.3). Тогда система тождеств (2.3) будет необходимым и достаточным условием существования у системы в полных дифференциалах (0.3) дополнительного автономного первого интеграла вида

$$\tilde{F} : x \rightarrow \sum_{i=1}^n f_i(x) \partial_{x_i} F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}'.$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.1, свойств 2.2 и 1.2.

Используя теорему 2.4, получаем следующие утверждения по построению первых интегралов систем уравнений в полных дифференциалах, имеющих симметрии.

Теорема 2.5. *Пусть функция*

$$F : x \rightarrow F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}'$$

является первым интегралом автономной системы уравнений в полных дифференциалах (0.3), а индуцированные ею линейные дифференциальные

операторы первого порядка $\mathfrak{X}_j, j = 1, \dots, m$, симметричны с оператором $\mathfrak{X}_\xi, \xi \in \{1, \dots, m\}$, т. е. имеет место операторная система тождеств

$$[\mathfrak{X}_j(x), \mathfrak{X}_\xi(x)] = 0$$

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi \in \{1, \dots, m\}.$$

Тогда скалярная функция

$$F_\xi : x \rightarrow \sum_{i=1}^n X_{i\xi}(x) \partial_{x_i} F(x)$$

$$\forall x \in \mathcal{X}', \quad \xi \in \{1, \dots, m\},$$

будет дополнительным первым интегралом дифференциальной системы (0.3).

Доказательство. Из доказательства свойства 1.3 следует, что система тождеств (2.4) равносильна на области $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^n$ системе тождеств

$$[H_\xi(x, y), H_j(x, y)] = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi \in \{1, \dots, m\}.$$

Отсюда, по определению первого интеграла гамильтоновой системы, получаем, что гамильтониан

$$H_\xi : (x, y) \rightarrow \sum_{i=1}^n X_{i\xi}(x) y_i$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \{1, \dots, m\},$$

будет первым интегралом системы Гамильтона (0.4), (0.5), соответствующей системе (0.3).

На основании свойства 1.2 и теоремы 2.1 получаем, что функция (2.5) является первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (0.3). Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть функция*

$$F : x \rightarrow F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}'$$

является первым интегралом автономной вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (0.3). Тогда функции

$$F_j : x \rightarrow \sum_{i=1}^n X_{ij}(x) \partial_{x_i} F(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}', \quad j = 1, \dots, m,$$

будут первыми интегралами автономной вполне разрешимой системы (0.3).

Заключение

В работе между системой уравнений в полных дифференциалах (0.3) и гамильтоновой дифференциальной системой (0.4), (0.5) установлены аналитические связи наличия частных решений (свойство 1.1), существования первых интегралов (свойство 1.2), выполнения условий полной разрешимости (свойство 1.3). Основываясь на этих связях, для дифференциальной системы (0.3) получено утверждение (теорема 2.1) о нахождении первого интеграла по двум первым интегралам гамильтоновой системы (0.4), (0.5), доказана теорема Пуассона о построении стационарных первых интегралов (теорема 2.3), приведены положения о существовании дополнительных первых интегралов (теоремы 2.4 и 2.5, следствие 2.1), а также исследован вопрос (теорема 2.2) о наличии первых интегралов у

дифференциальной системы (0.3), обладающей циклическими переменными.

Полученные результаты могут быть применены в аналитической теории многомерных дифференциальных уравнений и в аналитической механике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якоби, К. Лекции по динамике / К. Якоби. – Л.-М.: Главная редакция общетехнической литературы, 1936. – 272 с.
2. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
3. Гантмахер, Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
4. Buhl, A. Sur les formes linéaires aux dérivées partielles d'une intégrale d'une systèmes d'equations différentielles simultanees qui sont aussi des intégrales de ce système / A. Buhl // *Comptes rendus*. – 1901. – Т. 132. – Р. 313–316.
5. Appell, P. Sur le théoreme de Poisson et un théoreme de Buhl / P. Appell // *Comptes rendus*. – 1901. – Т. 132. – Р. 317–319.
6. Шульгин, М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании / М.Ф. Шульгин. – Ташкент: САГУ, 1958. – 184 с.
7. Доброурахов, В.В. Аналитическая динамика в неголономных координатах / В.В. Доброурахов // *Ученые записки МГУ*. – 1948. – Вып. 122, механика. – Т. 2. – С. 77–182.
8. Четаев, Н.Г. Об уравнениях Пуанкаре / Н.Г. Четаев // *ДАН СССР. Сер А*. – 1928. – № 7. – С. 103–104.
9. Четаев, Н.Г. Об уравнениях Пуанкаре / Н.Г. Четаев // *Прикладная математика и механика*. – 1941. – Т. 5. – С. 259–261.
10. Аппель, П. Теоретическая механика: в 2 т. / П. Аппель. – М.: Гос. из-во физ.-мат. лит., 1960. – Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. – 486 с.
11. Горбузов, В.Н. Интегралы дифференциальных систем / В.Н. Горбузов. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.
12. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.
13. Амелкин, В.В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения / В.В. Амелкин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 144 с.
14. Козлов, В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике / В.В. Козлов. – Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1995. – 432 с.
15. Goriely, A. Integrability and nonintegrability of dynamical systems / A. Goriely. – World Scientific: Advanced series on nonlinear dynamics, 2001. – Vol. 19. – 436 p.
16. Проневич, А.Ф. R-дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах / А.Ф.Проневич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 104 с.
17. Аржаных, И.С. Об интегрировании канонической системы уравнений в точных дифференциалах / И.С. Аржаных // *Успехи матем. наук*. – 1953. – Т. VIII, вып. 3 (55). – С. 99–104.

Поступила в редакцию 28.03.16.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Семенчук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH GENERALIZED SUBNORMAL SYLOW SUBGROUPS

V.N. Semenchuk

F. Scorina Gomel State University

Изучается строение конечных групп, у которых силовские подгруппы обобщенно субнормальны.

Ключевые слова: насыщенная формация, наследственная формация, разрешимая группа, субнормальная подгруппа, обобщенно субнормальная подгруппа.

The structure of finite groups every Sylow subgroup of which is generalized subnormal is studied.

Keywords: saturated formation, hereditary formation, soluble group, subnormal subgroup, generalized subnormal subgroup.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Важную роль при изучении строения конечных групп играют силовские подгруппы. Например, группа, у которой все силовские подгруппы субнормальны, нильпотентна.

В теории классов конечных групп обобщением понятия субнормальности является понятие \mathfrak{F} -достижимости, введенное Кегелем в работе [1].

Определение 1. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Назовем подгруппу H \mathfrak{F} -достижимой в группе G , если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В настоящей работе рассматривается задача изучения строения конечных групп, у которых силовские подгруппы \mathfrak{F} -достижимы.

Началом такого исследования строения конечных групп восходит к работам [2]–[4].

Необходимые обозначения и определения можно найти в монографии [5]. Напомним некоторые из них.

Формация – класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация называется *насыщенной*, если она замкнута относительно фраттиниевых расширений. Формация называется *наследственной*, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы, то есть пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Минимальная не \mathfrak{F} -группа – группа, не принадлежащая \mathfrak{F} , все собственные подгруппы которой принадлежат \mathfrak{F} .

Группа *Шмидта* – минимальная ненильпотентная группа.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G .

Через $|\pi(G)|$ – число простых делителей порядка группы G .

Через $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих \mathfrak{F} .

Обозначим через G_p силовскую p -подгруппу группы G .

1 Свойства \mathfrak{F} -достижимых подгрупп

В дальнейшем нам понадобятся следующие известные свойства \mathfrak{F} -достижимых подгрупп.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;

2) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то $H \cap K$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G ;

3) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K и K – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;

4) если H_1 и H_2 – \mathfrak{F} -достижимые подгруппы группы G , то $H_1 \cap H_2$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;

5) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H^x \mathfrak{F} -достижима в G для любых $x \in G$.

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Если G – разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная подгруппа.

Доказательство. Пусть G – разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа. Тогда $\Phi(G) \subset F(G)$. Отсюда следует, что в группе G найдется нормальная примарная подгруппа K , не содержащаяся в $\Phi(G)$. Но тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = KM$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $G/K = MK/K \cong M/M \cap K \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация. Если G – минимальная не \mathfrak{F} -группа и G – p -замкнута $p \in \pi(G)$, то $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Так как $G_p \in \mathfrak{F}$, то $G/G_p \in \mathfrak{F}$, а значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$. Так как $\Phi(G_p) \subseteq \Phi(G)$ и формация \mathfrak{F} насыщенная, то $G^{\mathfrak{F}}$ не содержится в $\Phi(G_p)$. Так как $G_p/\Phi(G_p)$ – элементарная группа, то по теореме 11.3 из [5] $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G_p)/\Phi(G_p)$ обладает G -допустимым дополнением $C/\Phi(G_p)$ в $G_p/\Phi(G_p)$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}C = G_p$, $C \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G_p)$. Если $G^{\mathfrak{F}} \neq G_p$, то $G_p G^{\mathfrak{F}}$ отлична от G и, значит, принадлежит \mathfrak{F} . Но тогда, ввиду равенства $G_p G^{\mathfrak{F}} C = G$, имеем

$$G/C \cong G_p G^{\mathfrak{F}} / C \cap G_p G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

отсюда следует $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G_p)$. Тем самым доказано, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие известные леммы.

Лемма 1.4. Если G – группа Шмидта, то G – бипримарная p -замкнутая группа, где $p \in \pi(G)$.

Лемма 1.5. Если G – минимальная не p -нильпотентная группа, то G – группа Шмидта.

Лемма 1.6. Если G – минимальная не p -разложимая группа, то G – группа Шмидта.

Лемма 1.7. Если G – минимальная неабелева группа, то G либо бипримарная p -замкнутая группа ($p \in \pi(G)$), либо примарная группа.

2 Основная теорема

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация, у которой любая минимальная не \mathfrak{F} -группа разрешима. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) любая группа G , у которой все силовские подгруппы \mathfrak{F} -достижимы и принадлежат \mathfrak{F} , также принадлежит \mathfrak{F} ;

2) любая минимальная не \mathfrak{F} -группа G либо бипримарная p -замкнутая ($p \in \pi(G)$) группа, либо примарная группа.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G – произвольная минимальная не \mathfrak{F} -группа. Согласно условию, G – разрешимая группа.

Покажем, что $|\pi(G)| \leq 2$. Предположим противное, т. е. $|\pi(G)| > 2$. Согласно лемме 1.2 $G^{\mathfrak{F}}$ – p -группа, где $p \in \pi(G)$. Согласно теореме Силова $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$, где G_p – некоторая силовская p -подгруппа. По лемме 1.1 G_p – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G .

Пусть G_q – произвольная силовская q -подгруппа группы G , где $q \neq p$. Рассмотрим подгруппу $G^{\mathfrak{F}}G_q$. Так как $|\pi(G)| > 2$, то $G^{\mathfrak{F}}G_q$ – собственная подгруппа группы G . Так как G – минимальная не \mathfrak{F} -группа, то $G^{\mathfrak{F}}G_q \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то G_q – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа в $G^{\mathfrak{F}}G_q$. По лемме 1.1 $G^{\mathfrak{F}}G_q$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . Но тогда по лемме 1.1 G_q – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G .

Итак, все силовские подгруппы из G \mathfrak{F} -достижимы в G . Так как G – минимальная не \mathfrak{F} -группа и $|\pi(G)| > 2$, то все силовские подгруппы группы G принадлежат \mathfrak{F} . Отсюда, согласно условию, получаем, что $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, $|\pi(G)| \leq 2$.

Рассмотрим случай, когда $|\pi(G)| = 2$. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}}$ – силовская p -подгруппа группы G .

Предположим противное, т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ – собственная подгруппа G_p . Так как G разрешима и бипримарна, то $G = G_p G_q$. Очевидно, что $G^{\mathfrak{F}}G_q$ – собственная подгруппа группы G . Так как G – минимальная не \mathfrak{F} -группа, то $G^{\mathfrak{F}}G_q \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то G_q – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}G_q$. По лемме 1.1 $G^{\mathfrak{F}}G_q$ \mathfrak{F} -достижима в G . Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$, то по лемме 1.1 G_p \mathfrak{F} -достижима в G . Итак все силовские подгруппы из G принадлежат \mathfrak{F} и \mathfrak{F} – достижимы в G . Тогда согласно условию теоремы $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, G – p -замкнутая группа. Если $|\pi(G)| = 1$, то G – примарная группа.

Покажем, что из 2) следует 1). Пусть в группе G , удовлетворяющей пункту 2) все силовские подгруппы \mathfrak{F} -достижимы и принадлежат \mathfrak{F} .

Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Предположим противное. Пусть H – собственная подгруппа группы G . Индукцией, по порядку группы G покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Действительно. Пусть H_p – произвольная силовская p -подгруппа H . По теореме Силова $H_p \subseteq G_p$, где G_p – некоторая силовская p -подгруппа из G . Так как $G_p \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} – наследственная формация, то $H_p \in \mathfrak{F}$ и H_p – \mathfrak{F} -достижима в G_p . По условию G_p \mathfrak{F} -достижима в G . Но тогда по лемме 1.1 H_p \mathfrak{F} -достижима в G . Теперь, согласно лемме 1.1, H_p \mathfrak{F} -достижима в H . Итак, в H все силовские подгруппы принадлежат \mathfrak{F} и \mathfrak{F} -достижимы в H .

По индукции, $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, G – минимальная не \mathfrak{F} -группа. Согласно условию теоремы G либо бипримарная p -замкнутая группа, либо примарная группа G .

Пусть G – бипримарная группа. Тогда $G = G_p \rtimes G_q$. По лемме 1.3 $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. Так как G_q – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то $G_q \subseteq M$, где M либо максимальная \mathfrak{F} -нормальная подгруппа G , либо M нормальна в G .

Пусть M – максимальная \mathfrak{F} -нормальная подгруппа группы G . Тогда $G_p = G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Так как $G_q \subseteq M$, то $G = G_p G_q \subseteq M$, что невозможно. Пусть M – нормальная подгруппа группы G . Так как $G = G_p M$ и $G_p \in \mathfrak{F}$ и $M \in \mathfrak{F}$, то $G/G_p \in \mathfrak{F}$ и $G/M \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то $G/M \cap G_p \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M \cap G_p$. Так как $G^{\mathfrak{F}} = G_p$, то $G_p \subseteq M$, что невозможно.

Пусть $|\pi(G)|=1$. Тогда $G = G_p$. Согласно условию, $G_p \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть \mathfrak{F} – формация всех p -нильпотентных групп. Группа является p -нильпотентной тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы \mathfrak{F} -достижимы в G .

Доказательство следует из теоремы 2.1 и леммы 1.5.

Следствие 2.2. Пусть \mathfrak{F} – формация всех p -разложимых групп. Группа является p -разложимой тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы \mathfrak{F} -достижимы в G .

Доказательство следует из теоремы 2.1 и леммы 1.6.

Следствие 2.3. Группа является абелевой тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы абелевы и субнормальны.

Доказательство следует из теоремы 2.1 и леммы 1.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 225–228.
2. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных \mathfrak{X} -субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры: межведомств. сб. – Мин-во обр. и науки Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
3. Васильева, Т.И. О конечных группах с \mathfrak{F} -достижимыми силовскими подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2006. – 18 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 4).
4. Семенчук, В.Н. Конечные группы с обобщенно субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 57–60.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. – 1978. – 267 с.

Поступила в редакцию 29.02.16.

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КОНЕЧНЫХ σ -НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Д.А. Синица¹, В.Н. Рыжик²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Брянский государственный аграрный университет, Кокино

ON ONE GENERALIZATION OF FINITE σ -NILPOTENT GROUPS

D.A. Sinita¹, V.N. Rizhik²

¹F. Scorina Gomel State University

²Bryansk State Agrarian University, Kokino

Пусть G – конечная группа. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} и n – целое число. Положим $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, $\sigma(G) = \sigma(\mid G \mid)$. Множество \mathcal{H} подгрупп из G называется полным холловским σ -множеством в G , если каждый член в $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ является холловской σ_i -подгруппой в G для некоторого σ_i и \mathcal{H} содержит в точности одну холловскую σ_i -подгруппу из G для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если G обладает полным холловским σ -множеством, то G называется σ -полной. Подгруппа A из G называется: (i) σ -холловской подгруппой G , если $\sigma(A) \cap \sigma(\mid G : A \mid) = \emptyset$; (ii) H_σ -нормально вложенной в G , если A является σ -холловской подгруппой некоторой нормальной подгруппы из G . В данной работе изучаются σ -полные группы G , каждая подгруппа которых является H_σ -нормально вложенной в G .

Ключевые слова: конечная группа, σ -холловская подгруппа, H_σ -нормально вложенная подгруппа, $H\sigma E$ -группа.

Let G be a finite group. Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be a partition of the set of all primes \mathbb{P} and n an integer. Let $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, $\sigma(G) = \sigma(\mid G \mid)$. A set \mathcal{H} of subgroups of G is said to be a complete Hall σ -set of G if every member of $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ is a Hall σ_i -subgroup of G for some σ_i and \mathcal{H} contains exact one Hall σ_i -subgroup of G for every $\sigma_i \in \sigma(G)$. If G possesses a complete Hall σ -set, then it is said to be σ -full. A subgroup A of G is called: (i) a σ -Hall subgroup of G if $\sigma(A) \cap \sigma(\mid G : A \mid) = \emptyset$; (ii) H_σ -normally embedded in G if A is a σ -Hall subgroup of some normal subgroup of G . In this paper, we study σ -full groups G whose all subgroups are H_σ -normally embedded in G .

Keywords: finite group, σ -Hall subgroup, H_σ -normally embedded subgroup, $H\sigma E$ -group.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными, символ G обозначает конечную группу. Кроме того, \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – целое число, символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n ; как обычно, $\pi(G) = \pi(\mid G \mid)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок G .

В дальнейшем, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} , т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; Π – непустое подмножество из σ , $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$.

Пусть

$$\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\} \text{ и } \sigma(G) = \sigma(\mid G \mid).$$

Тогда G называется σ -примарной [1], [2], если G – σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \in \sigma$.

Множество \mathcal{H} подгрупп из G называется полным холловским σ -множеством в G [3],

если каждый член в $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ является холловской σ_i -подгруппой в G для некоторого σ_i и \mathcal{H} содержит в точности одну холловскую σ_i -подгруппу из G для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если G обладает полным холловским σ -множеством, то G называется σ -полной. В дальнейшем мы полагаем, что G является σ -полной группой.

Подгруппа A из G называется [1], [2]:

(i) σ -холловской подгруппой G , если

$$\sigma(A) \cap \sigma(\mid G : A \mid) = \emptyset;$$

(ii) σ -субнормальной в G , если существует такая цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$, что либо A_{i-1} является нормальной в A_i , либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной для всех $i = 1, \dots, t$.

В данной работе нами исследуется следующее понятие.

Определение 0.1. Подгруппа A из G называется H_σ -нормально вложенной в G , если A

является σ -холловской подгруппой некоторой нормальной подгруппы из G .

Заметим, что в случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, понятие H_σ -нормально вложенной подгруппы эквивалентно понятию холловски нормально вложенной подгруппы в [4].

Пример 0.2. Заметим, что для любого σ все σ -холловские подгруппы и все нормальные подгруппы некоторой группы S являются H_σ -нормально вложенными в S . Пусть теперь P – простой $\mathbb{F}_{11}(C_7 \rtimes C_3)$ -модуль, который является точным для $C_7 \rtimes C_3$. Пусть $G = (P \rtimes (C_7 \rtimes C_3)) \rtimes A_5$. Пусть $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, где $\sigma_1 = \{5, 7, 11\}$ и $\sigma_2 = \{5, 7, 11\}'$. Тогда подгруппа $M = (P \rtimes C_7) \rtimes A_5$ нормальна в G и подгруппа B порядка 12 из A_5 является σ -холловской подгруппой в M , следовательно, B является H_σ -нормально вложенной в G . Если же $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, где $\sigma_1 = \{7\}$ и $\sigma_2 = \{7\}'$, то B не является H_σ -нормально вложенной в G .

Напомним, что G σ -нильпотентна [5], если $G = H_1 \times \dots \times H_t$, где $\{1, H_1, \dots, H_t\}$ – полное холловское σ -множество в G . Символ \mathfrak{N}_σ обозначает класс всех σ -нильпотентных групп; $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ обозначает σ -нильпотентный корадикал G , т. е. пересечение всех нормальных подгрупп N из G с σ -нильпотентным фактором G/N ; $G^{\mathfrak{N}}$ обозначает nilпотентный корадикал G .

Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Подгруппа H из G называется \mathfrak{F} -проектором G [6, VI, определение 7.8], если $H \in \mathfrak{F}$ и для каждой подгруппы E из G такой, что $H \leq E$ и $E/N \in \mathfrak{F}$, следует, что $E = NH$. Подгруппа H из G называется σ -картеровой подгруппой G , если H – \mathfrak{N}_σ -проектор G .

Говорят, что G имеет силовскую башню, если G имеет нормальный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{t-1} < G_t = G,$$

где $|G_i/G_{i-1}|$ – порядок некоторой силовской подгруппы из G для каждого $i \in \{1, \dots, t\}$. Главный фактор H/K из G называется σ -центральным (в G) [1], если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ -примарной группой; в противном случае, H/K называется σ -эксцентральным (в G).

Группа G называется $H\sigma E$ -группой, если $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – σ -холловская подгруппа в G , причем $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$, D имеет силовскую башню и каждый главный фактор из G ниже D является σ -эксцентральным, M является σ -картеровой подгруппой в G и M действует неприводимо на каждой M -инвариантной силовской подгруппе из D .

В данной работе нами доказывается следующий результат.

Теорема 0.3. Следующие условия эквивалентны:

(i) Каждая подгруппа из G является H_σ -нормально вложенной в G .

(ii) $G = G^{\mathfrak{N}_\sigma} M$ является $H\sigma E$ -группой, где $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – циклическая группа, порядок которой свободен от квадратов, и M – дедекиндова группа.

(iii) $G = D \rtimes M$, где D – σ -холловская циклическая подгруппа в G , порядок которой свободен от квадратов, причем $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$, и M – дедекиндова группа.

Следствие 0.4 (Ли, Лиу [7]). В том и только в том случае каждая подгруппа из G является холловски нормально вложенной в G , когда $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}}$ – циклическая холловская подгруппа из G , порядок которой свободен от квадратов, и M – дедекиндова группа.

1 Основные леммы

Целое число n называется Π -числом, если $\sigma(n) \subseteq \Pi$. Подгруппа H из G называется холловской Π -подгруппой в G [1], если $|H|$ – Π -число и $|G:H|$ – Π' -число. Символ $O_\Pi(G)$ используется для обозначения подгруппы из G , порожденной всеми нормальными Π -подгруппами из G . Группа G называется σ -разрешимой [1], [2], если каждый главный фактор из G σ -примарен.

Лемма 1.1. Пусть H – нормальная подгруппа из G . Если $H/H \cap \Phi(G)$ – Π -группа, то H содержит холловскую Π -подгруппу E и E нормальна в G . Следовательно, если $H/H \cap \Phi(G)$ является σ -нильпотентной группой, то H является σ -нильпотентной группой.

Доказательство. Пусть $D = O_\Pi(H)$. Тогда, поскольку $H \cap \Phi(G)$ σ -нильпотентна, D является холловской Π' -подгруппой в H . Следовательно, по теореме Шура-Цассенхауза, H имеет холловскую Π -подгруппу, скажем E . Очевидно, что H π' -разрешима, где $\pi' = \cup_{\sigma_i \in \Pi'} \sigma_i$. Значит, любые две холловские Π -подгруппы из H сопряжены. Согласно аргументу Фраттини,

$$G = HN_G(E) = (E(H \cap \Phi(G)))N_G(E) = N_G(E).$$

Следовательно, E нормальна в G . □

Лемма 1.2. Если каждый главный фактор из G ниже $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ циклический, то D nilпотентна.

Доказательство. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G . Тогда, ввиду G -изоморфизма $D/D \cap R \cong DR/R = (G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma}$, получаем, что каждый главный фактор из G/R ниже DR/R циклический. Следовательно, ввиду выбора G , $D/D \cap R \cong DR/R$ nilпотентна. Значит, $R \leq D$

и R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Ввиду леммы 1.1, $R \not\leq \Phi(G)$, и следовательно, $R = C_R(R)$ по [8, А, теорема 15.2]. Но $|R|$ является простым числом по условию леммы, следовательно, $G/R = G/C_G(R)$ циклическа. Поэтому G сверхразрешима, и следовательно, G^{σ} – нильпотентна, поскольку $G^{\sigma} \leq G^{\sigma}$. \square

Прямые расчеты показывают, что верна следующая лемма.

Лемма 1.3. *Класс всех σ -разрешимых групп замкнут относительно прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Кроме того, любое расширение σ -разрешимой группы с помощью σ -разрешимой группы также является σ -разрешимой группой.*

Пусть A, B и R – подгруппы из G . Тогда A называется R -перестановочной с B [9], если для некоторого $x \in R$ мы имеем $AB^x = B^x A$.

Если G содержит такое полное холловское σ -множество $\mathcal{H} = \{1, H_1, \dots, H_t\}$, что $H_i H_j = H_j H_i$ для всех i, j , то $\{H_1, \dots, H_t\}$ называется σ -базисом в G .

Лемма 1.4 [3, теоремы А и В]. *Пусть G – σ -разрешимая группа. Тогда:*

(i) *G имеет такой σ -базис $\{H_1, \dots, H_t\}$, что для всякого $i \neq j$ каждая силовская подгруппа из H_i G -перестановочна с каждой силовской подгруппой из H_j .*

(ii) *Для любого Π справедливы следующие утверждения: G имеет холловскую Π -подгруппу E , каждая Π -подгруппа из G содержится в некоторой сопряженной с E подгруппе и E является G -перестановочной с каждой силовской подгруппой из G .*

Лемма 1.5. *Пусть H, E и R – подгруппы из G . Предположим что H является H_σ -нормально вложенной в G и R нормальна в G .*

(1) *Если $H \leq E$, то H является H_σ -нормально вложенной в E .*

(2) *HR/R является H_σ -нормально вложенной в G/R .*

(3) *Если S – нормальная подгруппа в G , то $H \cap S$ является H_σ -нормально вложенной в G .*

(4) *Если $|G:H|$ σ -примарен, то H является либо σ -холловской подгруппой G , либо нормальна в G .*

Доказательство. Пусть V – такая нормальная подгруппа из G , что H является σ -холловской подгруппой в V .

(1) Поскольку H является σ -холловской подгруппой в V и $V \cap E$ нормальна в E , то H является σ -холловской подгруппой в $V \cap E$.

Следовательно, H является H_σ -нормально вложенной в E .

(2) Пусть H – π -группа. Поскольку $|V:H|$ – π' -число, то

$$|VR:HR| = |V:H| |V \cap R:H \cap R|$$

также является π' -числом. Следовательно, HR/R – σ -холловская подгруппа в VR/R и, значит, HR/R является H_σ -субнормально вложенной в G/R .

(3) Очевидно, что $V \cap S$ нормальна в V и в G . Поскольку H является σ -холловской подгруппой в V , $H \cap (V \cap S) = H \cap S$ является σ -холловской подгруппой в $V \cap S$.

(4) Предположим, что H не является нормальной подгруппой в G . Тогда $H < V$. Ввиду условия леммы, $|G:H|$ σ -примарен. Пусть $|G:H|$ – σ_i -число. Тогда $|V:H|$ также является σ_i -числом. Но H – σ -холловская подгруппа в V . Следовательно, H является σ -холловской подгруппой в G . \square

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [10, лемма 3.29] или [11, лемма 1.10.10]).

Лемма 1.6. *Пусть H/K – абелев главный фактор из G и V – такая максимальная подгруппа в G , что $K \leq V$ и $HM = G$. Тогда*

$$G/M_G \cong (H/K) \times (G/C_G(H/K)).$$

2 Доказательство теоремы 0.3

Доказательство теоремы 0.3. (i) \Rightarrow (ii)

Предположим, что импликация не верна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $D = G^{\sigma} \neq 1$ и $|\sigma(G)| > 1$.

(1) Условие (ii) верно для каждого собственного фактора H/K из G (т. е. такого фактора H/K , что либо $K \neq 1$, либо $H \neq G$). Это прямо следует из леммы 1.5 (1) (2) и выбора G .

(2) G σ -разрешима.

Ввиду утверждения (1) и леммы 1.3, достаточно показать, что G не проста. Предположим, что это не так. Тогда, поскольку $|\sigma(G)| > 1$, единичная подгруппа является единственной собственной нормальной подгруппой в G . Следовательно, каждая подгруппа из G является σ -холловской подгруппой в G . Значит, если p – наименьший простой делитель $|G|$ и P – силовская p -подгруппа из G , то $|P| = p$, откуда $|G| = p$ по [6, IV, лемма 2.8]. Полученное противоречие показывает, что (2) верно.

(3) D является циклической группой, порядок которой свободен от квадратов.

Пусть $p \in \pi(D) \cap \sigma_i$ и пусть P – силовская p -подгруппа из D . Так как G содержит такую нормальную подгруппу E , что $|E| = |G|_\sigma$, p , то

G/E – σ_i -группа. Следовательно, $D \leq E_G \leq E$, откуда $|P| = p$. Поэтому G сверхразрешима по [6, IV, лемма 2.8] и, следовательно, каждый главный фактор из G ниже D является циклическим. Следовательно, D нильпотентна по лемме 1.2, и поэтому D является циклической группой, порядок которой свободен от квадратов.

(4) D является σ -холловской подгруппой в G . Следовательно, D имеет дополнение M в G .

Предположим, что D не является σ -холловской подгруппой в G . Тогда для некоторого $i \in I$ и для некоторых холловских σ_i -подгрупп U и H_i из D и G , соответственно, следует $1 < U < H_i$. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G , содержащаяся в D . Из утверждения (2) следует, что R – σ_k -группа для некоторого k . Кроме того, $D/R = (G/R)^{\sigma_k}$ – σ -холловская подгруппа в G/R по утверждению (1). Следовательно, UR/R – σ -холловская подгруппа в G/R . Предположим, что $UR/R \neq 1$. Тогда UR/R – холловская σ_i -подгруппа в G/R .

Если $k \neq i$, то, очевидно, U является холловской σ_i -подгруппой в G , что противоречит тому, что $U < H_i$. Если $k = i$, то $R \leq U$ и, следовательно, U/R является холловской σ_i -подгруппой в G/R . Следовательно, U является холловской σ_i -подгруппой в G , что противоречит тому, что $U < H_i$. Значит, $UR/R = 1$, и поэтому $U \leq R$ и $U = R$. Но, очевидно, $H_i \not\leq UR \leq D$. Таким образом, $R = U = H_i \cap D$ является холловской σ_i -подгруппой в D .

Покажем теперь, что $R \not\leq \Phi(G)$. Действительно, предположим, что $R \leq \Phi(G)$. Тогда $D \neq R$ по лемме 1.1, поскольку $D \neq 1$. С другой стороны, D/R является σ'_i -группой, так как $R = U$ является холловской σ_i -подгруппой в D . Следовательно, $O_{\sigma'_i}(D) \neq 1$ по лемме 1.1. Но $O_{\sigma'_i}(D)$ – характеристическая подгруппа в D , следовательно, она нормальна в G . Значит, G содержит такую минимальную нормальную подгруппу L , что $L \neq R$ и $L \leq D$. Полученное противоречие показывает, что $R \not\leq \Phi(G)$.

Пусть S – такая максимальная подгруппа из G , что $RS = G$. Тогда $|G:S|$ – σ_i -число. Также, очевидно, что S не является σ -холловской подгруппой в G . Следовательно, S нормальна в G по лемме 1.5 (4) и G/S является σ_i -группой. Значит, $R \leq D \leq S$ и $G = RS = S$. Полученное противоречие завершает доказательство (5).

(5) M – дедекиндова группа.

Пусть L – произвольная подгруппа из M . Рассмотрим подгруппу LD . Ввиду условия теоремы, LD является σ -холловской подгруппой некоторой нормальной подгруппы V из G . Тогда, поскольку G/D σ -нильпотентна, LD/D σ -субнормальна в G/D по [1, лемма 2.6 (6)] значит, LD σ -субнормальна в G по [1, лемма 2.6 (5)]. Следовательно, LD σ -субнормальна в V по [1, лемма 2.6 (1)]. Но тогда LD нормальна в V по [1, лемма 2.6 (10)] и, следовательно, является характеристической подгруппой в V . Следовательно, LD является нормальной подгруппой в G . Но тогда $L = M \cap LD$ нормальна в M .

(6) Каждая собственная подгруппа E из G , содержащая M , не является нормальной в G , и поэтому каждая такая подгруппа является σ -холловской подгруппой в G .

Предположим, что E является нормальной в G . Поскольку D нильпотентна по (3),

$$G/E = DM/E = DE/E \cong D/D \cap E$$

является σ -нильпотентной, откуда $D \leq E$. Следовательно, $E = M(D \cap E) = MD = G$, противоречие. Пусть теперь B – некоторая подгруппа из G , содержащая M . Ввиду условия теоремы, G содержит такую нормальную подгруппу W , что B является σ -холловской подгруппой в W . Но тогда $W = G$, и следовательно, B является σ -холловской подгруппой в G .

(7) $|\pi(D)| = |\sigma(D)|$. Следовательно, D разрешима и M действует неприводимо на каждой M -инвариантной силовской подгруппе из D .

Пусть $p \in \sigma_i \in \sigma(D)$. Тогда из леммы 1.4, аргумента Фраттини и утверждений (2) и (5) следует, что для некоторой силовской p -подгруппы P из G имеет место $PM = MP$. Следовательно, MP является σ -холловской подгруппой в G по утверждению (6). Значит, $\sigma_i = \{p\}$, откуда $|\pi(D)| = |\sigma(D)|$. Следовательно, D разрешима, поскольку G σ -разрешима по утверждению (2), и M действует неприводимо на каждой M -инвариантной силовской подгруппе из D по утверждению (6).

(8) M является σ -картеровой подгруппой в G .

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G , содержащаяся в D , и E – подгруппа из G , содержащая M . Нам нужно показать, что $E = E^{\sigma_k} M$. Из утверждения (1) следует, что RM/R является σ -картеровой подгруппой в G/R , значит,

$$ER/R = (ER/R)^{\sigma_k} (RM/R).$$

Следовательно, $ER = E^{\sigma_k} MR$, поскольку $(ER/R)^{\sigma_k} = E^{\sigma_k} R/R$. Из утверждения (7) следует, что R является p -группой для некоторого простого числа p . Более того, из утверждений (4), (6)

и (7) следует, что R , E и $E^{\sigma}M$ являются σ -холловскими подгруппами в G . Следовательно, если $R \not\leq E$, то E и $E^{\sigma}M$ являются холловскими p' -подгруппами в $ER = E^{\sigma}MR$, откуда $E = E^{\sigma}M$. Предположим, наконец, что $R \leq E$ и $R \not\leq E^{\sigma}M$. Тогда $R \cap E^{\sigma} = 1$. С другой стороны, поскольку $DE/D \cong E/D \cap E$ σ -нильпотентна, то $E^{\sigma} \leq D$ и, следовательно, $M \cap E^{\sigma} = 1$. Следовательно,

$$E^{\sigma} \cap RM = (E^{\sigma} \cap R)(E^{\sigma} \cap M) = 1.$$

Тогда $E/E^{\sigma} = E^{\sigma}MR/E^{\sigma} \cong MR$ σ -нильпотентна. Значит, $M \leq C_G(R)$. Предположим, что $C_G(R) < G$, и пусть $C_G(R) \leq W < G$, где G/W – главный фактор из G . Из утверждения (2) следует, что G/W σ -примарна, значит, $D \leq W$. Но тогда $G = DM \leq W < G$, противоречие. Следовательно, $C_G(R) = G$, т. е. $R \leq Z(G)$. Пусть V – дополнение к R в D . Тогда V является холловской нормальной подгруппой в D , поэтому V характеристична в D . Следовательно, V нормальна в G и $G/V \cong RM$ σ -нильпотентна, откуда $D \leq V < D$. Полученное противоречие завершает доказательство (8). \square

(9) D обладает силовской башней.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G , содержащаяся в D . Тогда R является p -группой для некоторого простого числа p по утверждению (7). Кроме того, из аргумента Фраттини следует, что в D существует такая силовская p -подгруппа P , что $M \leq N_G(P)$ и $R = P$, поскольку M действует неприводимо на P по утверждению (7). С другой стороны, по утверждению (1), D/R обладает силовской башней. Следовательно, получаем (9).

(10) Каждый главный фактор из G ниже D является σ -эксцентральным.

Пусть H/K – главный фактор из G ниже D . Тогда H/K является p -группой для некоторого простого числа p по утверждению (7). Ввиду аргумента Фраттини, существуют силовская p -подгруппа P и p -дополнение E из D такие, что $M \leq N_G(P)$ и $M \leq N_G(E)$. Тогда $M \leq N_G(P \cap K)$ и $M \leq N_G(P \cap H)$. Следовательно, $P \cap K = 1$ и $P \cap H = P$ по утверждению (7), и поэтому $H = K \rtimes P$. Пусть $V = EM$. Тогда $K \leq V$ и $HV = G$, значит, V является максимальной подгруппой в G . Следовательно,

$$G/V_G \cong (H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$$

по лемме 1.6. Значит, если H/K σ -централен, то $D \leq V_G$, что невозможно, поскольку, очевидно, p не делит $|V|$. Таким образом, получаем (10).

Заключительное противоречие для (i) \Rightarrow (ii). Из утверждений (4), (6)–(10) следует, что G является $H\sigma E$ -группой. Следовательно, (i) \Rightarrow (ii).

Импликация (ii) \Rightarrow (iii) очевидна.

(iii) \Rightarrow (i) Пусть A – некоторая подгруппа из G . Тогда DA нормальна в G , поскольку DA/D нормальна в $G/D \cong M$. С другой стороны, поскольку $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ и D является σ -холловской подгруппой в G , H является σ -холловской подгруппой в DA . Следовательно, A является H_{σ} -нормально вложенной в G . \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
2. Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – DOI :10.1007/s40304-016-0088-z.
3. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.
4. Li, S. On Hall normally embedded subgroups of finite groups / S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 3360–3367.
5. Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2015. – Vol. 18. – P. 191–200.
6. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967.
7. Li, S. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S. Li, J. Liu // J. Algebra. – 2013. – Vol. 388. – P. 1–9.
8. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
9. Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
10. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989.
11. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – New York-Dordrecht-Boston-London-Beijing: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.

Поступила в редакцию 05.07.16.

УДК 517.988

МЕТОД ПРИМЕНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.С. Шпак, И.В. Трифонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

THE METHOD OF APPLICATION OF NONLINEAR EVOLUTION OPERATORS FOR SOLUTION OF DYNAMICAL SYSTEMS

D.S. Shpak, I.V. Trifonova

Y. Kupala Grodno State University

Решение многих технических, физических и математических задач тесно связано с исследованием нелинейных уравнений и их систем. Описание таких процессов способствовало становлению и развитию теории систем, разработке математического аппарата типа «вход-выход» с помощью нелинейных эволюционных операторов. В данной статье рассматриваются нелинейные эволюционные операторы первой и второй кратностей, описывается метод их применения для решения динамических систем с обобщенными характеристиками на основании алгоритма построения асимптотически обратных нелинейных эволюционных операторов.

Ключевые слова: эволюционный оператор, импульсная характеристика, спектральная характеристика, многополюсник, система, асимптотически обратный эволюционный оператор.

The solution of many technical, physical and mathematical problems is closely related to the study of nonlinear equations and systems. A description of these processes contributed to the establishment and development of systems theory, the development of the mathematical apparatus of the “input-output” using the nonlinear evolution operators. The nonlinear evolution operators of the first and the second multiplicities are dealt in this paper. The method of their application for solution of dynamical systems with generalized characteristics is described. This method is based on the algorithm of constructing asymptotically inverse nonlinear evolution operators.

Keywords: evolution operator, impulse response, spectral response, multipole, system, asymptotically reverse evolution operator.

Введение

Эволюционные операторы находят широкое приложение в исследовании динамических систем. Интерес к таким операторам связан с их применением во многих областях математической физики, радиотехники и других технических отраслях науки.

Теория эволюционных операторов занимается исследованием нелинейных эволюционных операторов с импульсными характеристиками, в качестве которых выступают обобщенные функции. Данный факт позволяет применять нелинейные эволюционные операторы для анализа динамических систем, описываемых многополюсниками.

Целью работы является обобщение результатов теории нелинейных эволюционных операторов первой и второй кратностей и исследование методов применения нелинейных эволюционных операторов для решения эволюционных систем с обобщенными характеристиками. Это позволяет разработать эффективные алгоритмы нахождения характеристик сложных динамических систем.

1 Нелинейные эволюционные операторы первой и второй кратности

Обозначим через X_a – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на всей

числовой оси с носителем на луче $[a; +\infty)$. Рассмотрим пространство X , которое является объединением пространств X_a ($a \in R$), – пространство всех финитных слева бесконечно дифференцируемых на числовой оси (снабженное топологией индуктивного предела).

Под эволюционным оператором в таком случае понимают оператор A , действующий из пространства X в пространство X . При этом оператор A такой, что если носитель функции $x(t)$ ($x \in X, t \in R$) содержится на числовой полуоси $[t_0, +\infty)$, то и носитель функции $Ax(t)$ содержится на полуоси $[t_0, +\infty)$, где t_0 – некоторое действительное число.

Эволюционный оператор кратности ν был описан в монографии [1]. На пространстве финитных слева бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси X зафиксируем натуральное число ν и построим ν -ую степень пространства X , т. е. X^ν . В пространстве X^ν определим операцию тензорной степени мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu)$ вектор-функции

$$(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \in X^\nu.$$

Тогда эволюционным оператором кратности ν называется оператор A , который задается равенством

$$Ax = \sum_{\alpha \neq 0} S_{|\alpha|} (a_\alpha * x^{\otimes \alpha}), \quad x \in X^\nu.$$

Напомним, что S – оператор, который действует на обобщенную функцию, зависящую от $|a|$ переменных, и переводит ее в функцию от v переменных.

Заметим, что эволюционные операторы первой кратности называют эволюционными операторами Вольтера – Винера [2] и записывают следующим образом

$$Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n(a_n * x^{\otimes n}).$$

С помощью операторов Вольтера – Винера можно описать нелинейные дифференциальные уравнения и применить для их решения метод нелинейных эволюционных операторов первой кратности. Приведем несколько примеров.

Уравнение осциллятора вида

$$x'' + x + cx^2 = f(t)$$

с нелинейной восстанавливающей силой cx^2 и затуханием, совершающим вынужденные колебания при гармоническом внешнем воздействии $f(t)$ представимо в операторном виде следующим образом $Ax = (\delta'' + \delta) * x + S_2(c\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2})$.

Частному случаю уравнения Эмдена – Фаулера $x'' - dx' - kx - x^2 = f(t)$ соответствует эволюционный оператор Вольтера – Винера вида

$$Ax = (\delta'' - d\delta' - k\delta) * x + S_2(-\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2}).$$

Под оператором второй кратности понимают оператор A , действующий из пространства X^2 в пространство X^2 вектор-функций на числовой оси так, что если носитель вектор-функции $x(t)$ содержится на $[t_0, +\infty)^2$, то и носитель вектор-функции $Ax(t)$ содержится на $[t_0, +\infty)^2$.

Нелинейным эволюционным оператором второй кратности, например, можно описать следующую систему (1.1) двух дифференциальных уравнений второго порядка.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_1^2 - \alpha_4 x_1 x_2 - \alpha_5 x_2^2 = f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_1^2 - \beta_4 x_1 x_2 - \beta_5 x_2^2 = f_2(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Утверждение. Операторный вид системы (1.1) может быть записан

$$Ax = f,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 + A_2^1 \\ A_1^2 + A_2^2 \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1^1(x_1, x_2) = (\delta' - \alpha_1 \delta) * x_1 - \alpha_2 \delta * x_2;$$

$$A_2^1(x_1, x_2) = -\alpha_3 \delta^{\otimes 2} * x_1^{\otimes 2} - \alpha_4 \delta^{\otimes 2} * (x_1 \otimes x_2) - \alpha_5 \delta^{\otimes 2} * x_2^{\otimes 2};$$

$$A_1^2(x_1, x_2) = -\beta_1 \delta * x_1 + (\delta' - \beta_2 \delta) * x_2;$$

$$A_2^2(x_1, x_2) = -\beta_3 \delta^{\otimes 2} * x_1^{\otimes 2} - \beta_4 \delta^{\otimes 2} * (x_1 \otimes x_2) - \beta_5 \delta^{\otimes 2} * x_2^{\otimes 2}.$$

В частности, системе

$$\begin{cases} x' - y = f_1(t), \\ y' - 3y - 2x - x^2 = f_2(t), \end{cases}$$

соответствует оператор второй кратности, действующий в пространстве двухкомпонентных вектор-функций одной переменной, с компонентами

$$A^1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$A^2 \begin{pmatrix} x \otimes x \\ x \otimes y \\ y \otimes y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta^{\otimes 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \otimes x \\ x \otimes y \\ y \otimes y \end{pmatrix}.$$

2 Импульсные и спектральные характеристики эволюционных операторов

Одной из важных характеристик любой системы является переходная импульсная характеристика. Она определяется как реакция системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях. Импульсные характеристики системы полностью ее характеризуют и по ним не трудно восстановить дифференциальное уравнение или систему. Использование понятия импульсной характеристики системы позволяет свести расчет реакции системы от действия непериодического сигнала произвольной формы к определению реакции системы на простейшее воздействие типа единичной или δ -функции, с помощью которых аппроксимируется исходный (входной) сигнал.

Для демонстрации построения импульсных характеристик нелинейных эволюционных операторов первой и второй кратности рассмотрим описанные в пункте 1 примеры.

Оператор вида

$$Ax = (\delta'' + \delta) * x + S_2(c\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2})$$

характеризуется импульсными характеристиками

$$a_1 = \delta'' + \delta, \quad a_2 = c\delta^{\otimes 2}.$$

Оператор вида

$$Ax = (\delta'' - d\delta' - k\delta) * x + S_2(-\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2})$$

характеризуется следующими импульсными характеристиками $a_1 = \delta'' - d\delta' - k\delta, a_2 = -\delta^{\otimes 2}$.

Для оператора системы (1.1) импульсные характеристики в матричном представлении имеют вид

$$a_1 = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix} \text{ и } a_2 = \begin{pmatrix} -\delta^{\otimes 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основании импульсных характеристик, применяя к ним обобщенное преобразование Лапласа, получаем спектральные характеристики эволюционных операторов.

Напомним, что преобразованием Лапласа обобщенной функции $f(t)$ из пространства всех обобщенных функций экспоненциального роста степени k с компактным носителем является функция \tilde{f} , определяемая равенством

$$\tilde{f}(\lambda) = \langle f(t), e^{-\lambda t} \rangle, \lambda \in \Pi_c^m, \quad (2.1)$$

где $\lambda t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \dots + \lambda_n t_n$,

$$\Pi_k^n = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in C^n \mid \operatorname{Re} \lambda_j > k, j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Например, применяя обобщенное преобразование \tilde{a}_{n_1, n_2} Лапласа к импульсной характеристике a_{n_1, n_2} порядка $n = n_1 + n_2$, имеем спектральную характеристику порядка n эволюционного оператора второй кратности.

Если к матрицам

$$W_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{(1,0),1} & \tilde{a}_{(0,1),1} \\ \tilde{a}_{(1,0),2} & \tilde{a}_{(0,1),2} \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{(2,0),1} & \tilde{a}_{(1,1),1} & \tilde{a}_{(0,2),1} \\ \tilde{a}_{(2,0),2} & \tilde{a}_{(1,1),2} & \tilde{a}_{(0,2),2} \end{pmatrix},$$

называемым матрицами первичных параметров нелинейного оператора A , применить обобщенное преобразование Лапласа, то получаем следующую реакцию на входное воздействие:

$$\tilde{y}_1^2 = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = 2} \tilde{a}_{\alpha_1 + \alpha_2, 1} * (\tilde{x}_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \tilde{x}_2^{\otimes \alpha_2}),$$

$$\tilde{y}_2^2 = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = 2} \tilde{a}_{\alpha_1 + \alpha_2, 2} * (\tilde{x}_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \tilde{x}_2^{\otimes \alpha_2}).$$

Введя следующее обозначение:

$$\tilde{x}^2 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{\otimes 2} \\ \tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2^{\otimes 2} \end{pmatrix},$$

запишем обобщенные характеристики в матричном виде: $\tilde{y}^2 = W_2 \tilde{x}^2$. Пусть (\tilde{u}_2) – система спектральных характеристик эволюционного оператора второй кратности.

На основании общей теоремы о спектральных характеристиках композиции эволюционных операторов [2] спектральные характеристики можем определить по формуле:

$$\tilde{v}_2(\lambda) = \tilde{a}_{(2,0)}(\lambda_1 + \lambda_2)(\tilde{u}_{2,0}(\lambda_1, \lambda_2) + \tilde{u}_{1,1}(\lambda_1, \lambda_2) + \tilde{u}_{0,2}(\lambda_1, \lambda_2)) + \tilde{a}_{(1,1)}(\lambda_1 + \lambda_2)(\tilde{u}_{2,0}(\lambda_1, \lambda_2) + \tilde{u}_{1,1}(\lambda_1, \lambda_2) + \tilde{u}_{0,2}(\lambda_1, \lambda_2)) + \tilde{a}_{(2,2)}(\lambda_1 + \lambda_2)(\tilde{u}_{2,0}(\lambda_1, \lambda_2) + \tilde{u}_{1,1}(\lambda_1, \lambda_2) + \tilde{u}_{0,2}(\lambda_1, \lambda_2)) + \varphi^2(\lambda),$$

где сумма всех остальных слагаемых обозначена через $\varphi^2(\lambda)$.

Тогда система

$$\tilde{v}_2(\lambda) = W_2(|\lambda|)\tilde{u}_2(\lambda) + \varphi^2(\lambda),$$

где $\varphi^2(\lambda)$ не содержит спектральных характеристик оператора степени, больше чем два, определяет характеристики.

Исходя из формулы (2.1) и того, что $\tilde{\delta}' = \lambda$, $\tilde{\delta} = 1$, спектральные характеристики для импульсных характеристик указанных примеров будут иметь вид:

1. Если $a_1 = \delta'' + \delta$, $a_2 = c\delta^{\otimes 2}$, то

$$\tilde{a}_1(\lambda_1) = \langle a_1, e^{-\lambda t} \rangle = \langle \delta'' + \delta', e^{-\lambda t} \rangle = \lambda_1^2 + \lambda_1;$$

$$\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \langle c\delta^{\otimes 2}, e^{-\lambda t} \rangle = c;$$

$$\tilde{a}_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0, n \geq 3.$$

2. Если $a_1 = \delta'' - d\delta' - k\delta$, $a_2 = -\delta^{\otimes 2}$, то

$$\tilde{a}_1(\lambda_1) = \langle a_1, e^{-\lambda t} \rangle = \langle \delta'' - d\delta' - k\delta, e^{-\lambda t} \rangle = \lambda_1^2 - d\lambda_1 - k.$$

$$\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \langle -\delta^{\otimes 2}, e^{-\lambda t} \rangle = -1;$$

$$\tilde{a}_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0, n \geq 3.$$

3. Если

$$a_1 = \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix} \text{ и } a_2 = \begin{pmatrix} -\delta^{\otimes 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\tilde{a}_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ -2 & \lambda_1 - 3 \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{a}_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, n \geq 3.$$

3 Асимптотически обратные эволюционные операторы

Рассмотрим композиции нелинейных эволюционных операторов:

$$Cx = (A \circ B)(x), \quad Fx = (B \circ A)(x).$$

Асимптотически обратным эволюционным оператором степени l к эволюционному оператору A степени n будет являться эволюционный оператор B степени l : для первой кратности вида

$$Bx = \sum_{p=1}^l S_p(b_p * x^{\otimes p}), \quad x \in X, \quad (3.1)$$

для второй кратности вида

$$Bx = \sum_{m_1, m_2} S_{m_1 + m_2}(b_{m_1, m_2} * (x_1^{\otimes m_1} \otimes x_2^{\otimes m_2})), \quad (3.2)$$

для которого выполняются равенства

$$F = B \circ A = I + \sum_{j=l+1}^{nl} F_j \text{ и } C = A \circ B = I + \sum_{j=l+1}^{nl} C_j,$$

для оператора (3.1);

$$F = I + \sum_{k_1 + k_2 \geq l+1} F_{k_1, k_2} \text{ и } C = I + \sum_{k_1 + k_2 \geq l+1} C_{k_1, k_2}$$

для оператора (3.2); где I – тождественный оператор [3].

Теорема. Для эволюционного оператора первой кратности второй степени

$$Ax = a_1 * x + S_2(a_2 * x^{\otimes 2}),$$

порожденного нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$L(D)x + dx^2 = f(t),$$

можно построить нелинейный асимптотически обратный эволюционный оператор

$$Bf = b_1 * f + (-db_1 * (B_1 f)^{\otimes 2}) + (-2db_1 * (B_1 f \otimes B_2 f)) + \dots + (-db_1 * \sum_{k=1}^n (B_k f \cdot B_{n-k} f)),$$

где b_1 – обобщенная импульсная характеристика первого порядка оператора Bf ; $B_k f$, $k = 1, 2, \dots, n$ – операторные компоненты.

Доказательство теоремы представлено в монографии [3].

Для уравнения вида

$$x'' + x + cx^2 = f(t)$$

асимптотически обратный эволюционный оператор, при $k = 2$, имеет вид [3]

$$B(t) = \frac{c}{6} \theta(t) \left(-\frac{6}{c} \cos t + \frac{6}{c} - 9 + 8 \cos t + 6t \sin t + \cos 2t \right).$$

Для построения оператора B второй кратности к оператору A необходимо составить композицию $A \circ B$. Так как операторы A и B – нелинейные эволюционные операторы второй кратности, то композицию можно записать следующим образом $A \circ B = A^1(B^1) + A^2(B^1, B^2)$.

Так как оператор B – асимптотически обратный эволюционный оператор, то имеем $A^1(B^1) = E$, $A^2(B^1, B^2) = 0$, где E – единичная матрица.

Рассмотрим первый компонент композиции $A^1(B^1)$ и представим его в матричном виде. Для системы (1.1) получаем

$$\begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -2\delta & \delta' - 3\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = B^1$.

Из матричного уравнения (3.3) составим систему

$$\begin{cases} \delta' b_1^1 - \delta b_2^1 = \delta, \\ \delta' b_1^2 - \delta b_2^2 = 0, \\ -2\delta b_1^1 + (\delta' - 3\delta) b_2^1 = 0, \\ -2\delta b_1^2 + (\delta' - 3\delta) b_2^2 = \delta, \end{cases}$$

из которой последовательно можно найти импульсные характеристики первой компоненты B^1 оператора B второй кратности.

Второй компонент композиции можно записать в виде $A^2(B^1, B^2) = B^2(A^1)^{\otimes 2} + B^1 A^2 = 0$.

Следовательно, вторая компонента B^2 оператора B может быть найдена из равенства

$$B^2 = -B^1 A^2 \left((A^1)^{\otimes 2} \right)^{-1}.$$

Таким образом, задача определения асимптотически обратного эволюционного оператора второй кратности сводится к последовательному решению систем линейных уравнений.

Заключение

В теории электрических цепей применяется метод ее приведения к эквивалентному многополюснику, с математической точки зрения который есть нелинейный эволюционный оператор, действующий в пространстве вектор-функций от одной переменной времени.

Таким образом, на основании изложенного материала метод применения нелинейных эволюционных операторов для решения динамических систем с обобщенными характеристиками можно описать с помощью алгоритма.

Алгоритм построения асимптотически обратных нелинейных эволюционных операторов реализуется следующими тремя этапами:

1. Сопоставление динамической системе нелинейного эволюционного оператора с обобщенными импульсными характеристиками.
2. Нахождение импульсных характеристик соответствующего порядка асимптотически обратного нелинейного эволюционного оператора.
3. Последовательное построение операторных компонент асимптотически обратного нелинейного эволюционного оператора к нелинейному эволюционному оператору, сумма которых и будет являться искомым оператором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вувуникян, Ю.М. Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы: моногр. / Ю.М. Вувуникян. – Гродно: ГрГУ, 2014. – 302 с.
2. Вувуникян, Ю.М. Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками: моногр. / Ю.М. Вувуникян. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.
3. Вувуникян, Ю.М. Полиномиальные эволюционные операторы: моногр. / Ю.М. Вувуникян, Д.С. Шпак. – Гродно: ГрГУ, 2015. – 277 с.

Поступила в редакцию 27.06.16.

УДК 517.984

РЕЗОЛЬВЕНТА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Али А. Шукур, О.А. Архипенко

Белорусский государственный университет, Минск

RESOLVENT OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DIFFERENCE EQUATION

Ali A. Shukur, O.A. Arhipenko

Belarusian State University, Minsk

Рассматривается краевая задача для разностного уравнения $a(k)u(k+1) - \lambda u(k) = f(k)$ со спектральным параметром λ . Получены условия существования правосторонней резольвенты этой задачи в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ и построена в явном виде резольвента.

Ключевые слова: правосторонняя резольвента, дискретный оператор взвешенного сдвига, проектор Рисса.

Boundary value problem for the difference equation $a(k)u(k+1) - \lambda u(k) = f(k)$ with spectral parameter λ is considered. The condition of the existence of the right sided resolvents of the above problem in the space $l_2(\mathbb{Z})$ is given. The resolvent is constructed.

Keywords: right-side resolvent, discrete weighted shift operator, Riesz projection.

Введение

Пусть B есть линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве F . Если λ принадлежит спектру оператора B , то оператор $B - \lambda I$ необратим, однако может быть односторонне обратимым. Особый интерес представляет существование правого обратного, которое эквивалентно существованию решения соответствующего уравнения при любой правой части, а явное построение правого обратного есть получение формулы решения.

Пусть оператор $B - \lambda_0 I$ обратим справа и R_0 есть один из правых обратных к нему. Тогда образ $L = R_0(F)$ оператора R_0 является замкнутым подпространством, дополнительным к ядру оператора $B - \lambda_0 I$, и по этому подпространству оператор R_0 восстанавливается однозначно.

На сказанное выше можно посмотреть с другой точки зрения: оператор R_0 дает решение краевой задачи – найти решение уравнения

$$(B - \lambda_0 I)u = f,$$

удовлетворяющее «краевому условию»
 $u \in L$.

Для каждого λ , лежащего в достаточно малой окрестности точки λ_0 , существует оператор $R(\lambda)$, правый обратный к $B - \lambda I$ и такой, что образ $R(\lambda)$ совпадает с L . Семейство операторов $R(\lambda)$ представляется в виде ряда

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_0^{k+1},$$

из чего следует, что оно аналитически зависит от λ . Это семейство задает одну из правосторонних резольвент для оператора B , определенную в окрестности точки λ_0 . Возникает вопрос о том, на какое множество из комплексной плоскости семейство операторов $R(\lambda)$ продолжается аналитически, в зависимости от выбранного подпространства L .

В тех точках λ , где определены операторы $R(\lambda)$, эти операторы задают решение краевой задачи:

$$(B - \lambda I)u = f, u \in L,$$

т. е. это семейство операторов является резольвентой краевой задачи. Поэтому вопрос об аналитическом продолжении фактически заключается в исследовании разрешимости краевой задачи, в зависимости от спектрального параметра λ и заданного подпространства L .

Если правосторонняя резольвента $R(\lambda)$ аналитически продолжается на окрестность единичной окружности, то она разлагается в операторный ряд Лорана. Как показано в [1], [2], если оператор B обратим, такой ряд имеет специальный вид, который будем называть стандартной формой правосторонней резольвенты:

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \quad (0.1)$$

где оператор P есть коэффициент при λ^{-1} . Из этого разложения видно, что резольвента определяется по этому коэффициенту однозначно.

Этот ряд похож на разложение (0.1) резольвенты гиперболического оператора, но в

рассматриваемом случае оператор P может не быть проектором.

В работе рассмотрены некоторые краевые задачи для дискретных операторов взвешенного сдвига B . При заданном подпространстве L получены условия разрешимости краевой задачи при заданном λ и построена ее резольвента. Для конкретных примеров в случае, когда резольвента $R(\lambda)$ определена в окрестности единичной окружности, найден явный вид соответствующего оператора P и, тем самым получено представление правосторонней резольвенты в стандартной форме ряда Лорана (0.1).

1 Гиперболические и правосторонне гиперболические операторы

Пусть B – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве F , простой замкнутый контур G не пересекается со спектром оператора $\Sigma(B)$, и, следовательно, резольвента $R(\lambda; B) = (B - \lambda I)^{-1}$ определена на контуре. Тогда формула

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_G R(\lambda, B) d\lambda$$

задаёт проектор Рисса [6]. Этот проектор перестановочен с B и осуществляет разложение $F = F^+ \oplus F^-$ пространства в прямую сумму замкнутых подпространств, инвариантных относительно оператора B , где

$$F^+ = \text{Im } P, \quad F^- = \text{Im}(I - P) = \text{Ker } P.$$

При этом оператор разлагается в прямую сумму операторов $B = B^+ \oplus B^-$, действующих в соответствующих подпространствах, причём спектр оператора B^+ в подпространстве F^+ совпадает с частью спектра $\Sigma(B)$, лежащей внутри контура G , а спектр оператора B^- в подпространстве F^- совпадает с частью спектра $\Sigma(B)$, лежащей вне контура G .

Оператор B называется *гиперболическим*, если $\Sigma(B) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$, где $\mathbb{S}^1 = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность.

Гиперболические операторы встречаются в разных приложениях, в частности, в теории динамических систем [4]. Для гиперболического оператора проектор Рисса задается интегралом

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} R(\lambda, B) d\lambda. \quad (1.1)$$

В случае гиперболического оператора получаем,

$$r(B^+) < 1, \quad r((B^-)^{-1}) < 1,$$

где $r(A)$ – спектральный радиус оператора A .

Если оператор B является гиперболическим, то резольвента в окрестности единичной окружности разлагается в операторный ряд Лорана

$$R_r(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \quad (1.2)$$

где P – проектор Рисса и сходимость рядов следует из оценок соответствующих спектральных радиусов.

Рассмотренные во введении свойства оператора B могут быть переформулированы в спектральной терминологии, так как поставленные выше задачи сводятся к нахождению некоторых частей спектра $\Sigma(B)$, называемых *существенными спектрами*.

Одним из наиболее часто используемых существенных спектров является *спектр Фредгольма* $\Sigma_F(B)$. Оператор B , действующий в гильбертовом пространстве H , называется *оператором Фредгольма*, если его ядро $\text{ker } B$ и коядро (ядро сопряженного оператора) $\text{ker } B^*$ конечномерны и образ $\text{Im } B$ замкнут [5]. Индексом фредгольмова оператора B называется число

$$\text{ind } B = \dim \text{ker } B - \dim \text{ker } B^*.$$

Фредгольмов спектр есть множество

$$\Sigma_F(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I$$

не является оператором Фредгольма\}.

Кроме спектра Фредгольма, представляют интерес и другие виды существенных спектров оператора B , в частности:

$$\Sigma^+(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I$$

не имеет правого обратного\},

$$\Sigma^-(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : B - \lambda I$$

не имеет левого обратного\}.

Если $\lambda \in \Sigma(B) \setminus \Sigma^+(B)$, то у оператора $B - \lambda I$ существует много различных правых обратных. Семейство правых обратных $R_r(B; \lambda)$, аналитически зависящее от λ , называется *правосторонней резольventой* для B .

Оператор B называется *правосторонне гиперболическим*, если существует правосторонняя резольвента $R_r(B; \lambda)$, определенная в окрестности единичной окружности.

Лемма 1.1 [1]. *Если существует правосторонняя резольвента $R_r(B; \lambda)$, определенная в окрестности единичной окружности и оператор B обратим, то в окрестности единичной окружности она разлагается в операторный ряд Лорана*

$$R_r(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \quad (1.3)$$

где P есть коэффициент при λ^{-1} в разложении этой правосторонней резольвенты в ряд, который задается той же формулой, что и проектор Рисса в (1.1).

Если существует оператор P , для которого ряд (1.3) сходится, то сумма этого ряда есть одна из правосторонних резольvent.

Из леммы 1.1 следует, что для того, чтобы построить правостороннюю резольventу, достаточно

найти подходящий оператор P . Существенным отличием случая правосторонней гиперболичности от гиперболичности является то, что оператор P всегда не перестановочен с B , может не быть проектором и не задает разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств.

2 Операторы взвешенного сдвига

Оператор B , действующий в некотором пространстве $F(X)$ функций на множестве X , называется оператором взвешенного сдвига, если он представляется в виде

$$Bu(x) = a(x)u(\alpha(x)), \quad x \in X,$$

где $\alpha : X \rightarrow X$ есть заданное отображение, $a(x)$ – заданная функция. Примером является дискретный оператор взвешенного сдвига, соответствующий случаю $X = \mathbb{Z}$ и отображению $\alpha(x) = x + 1$. Сформулированные выше вопросы содержательны для этого класса операторов и они рассмотрены в данной работе.

Пусть $l_p(\mathbb{Z})$, ($p \geq 1$) есть пространство двусторонних последовательностей комплексных чисел $u = (u(k))$, для которых конечна норма

$$\|u\|_p = \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} |u(k)|^p \right]^{1/p}.$$

Оператор сдвига W действует в этом пространстве по формуле

$$Wu(k) = u(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Дискретным оператором взвешенного сдвига называется оператор в $l_p(\mathbb{Z})$, действующий по формуле

$$Vu(k) = a(k)u(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

где $a = (a(k))$ есть заданная ограниченная числовая последовательность.

Если $a(k) \neq 0$ для $k \in \mathbb{Z}$ и последовательность $\frac{1}{a(k)}$ ограничена, то оператор B обратим и

$$B^{-1}u(k) = \frac{1}{a(k-1)}u(k-1).$$

Мы рассматриваем здесь случай, когда для последовательности коэффициентов существуют пределы

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} a(k) := a(\pm\infty). \quad (2.2)$$

Свойства дискретных операторов взвешенного сдвига исследовались многими авторами. Мы воспользуемся следующим известным утверждением.

Лемма 2.1 [3]. Пусть B есть оператор вида (2.1) и пусть $a(k) \neq 0$ для всех k и $a(\pm\infty) \neq 0$.

Спектром оператора является кольцо

$$\Sigma(B) = \{\lambda : r(a) \leq |\lambda| \leq R(a)\},$$

где

$$R(a) = \max\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\},$$

$$r(a) = \min\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}.$$

Если $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ фредгольмов, $\text{ind}(B - \lambda I) = -1$ и он обратим слева.

Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ фредгольмов, $\text{ind}(B - \lambda I) = 1$ и он обратим справа.

Если $|\lambda| = |a(\pm\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ не фредгольмов и его образ незамкнут.

Примеры правосторонних резольвент для рассматриваемого оператора, определенных во всем открытом кольце $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, приведены в [1].

Теорема 2.1 [1]. Пусть $P_\mu, \mu \in \mathbb{Z}$, есть проектор на подпространство

$$F_\mu = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : u(k) = 0 \text{ при } k \leq \mu\},$$

действующий по формуле

$$(P_\mu u)(k) = \begin{cases} u(k), & k \geq \mu \\ 0, & k < \mu. \end{cases} \quad (2.3)$$

Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то для любого $\mu \in \mathbb{Z}$ ряд

$$R_\mu(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_\mu) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_\mu \quad (2.4)$$

сходится и задает правостороннюю резольвенту для оператора B , определенную на кольце

$$|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|.$$

При заданном $\mu \in \mathbb{Z}$ образы всех операторов $R_\mu(B; \lambda)$ совпадают с подпространством

$$L_\mu = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : u(\mu) = 0\}.$$

3 Резольвента краевой задачи

В работе для разностного уравнения

$$a(j)u(j+1) - \lambda u(j) = f(j)$$

изучается корректность краевой задачи, заданной условием $u \in L_\eta$, где

$$L_\eta = \{u \in l_p(\mathbb{Z}) : \eta_0 u(0) + \eta_1 u(1) + \dots + \eta_m u(m) = 0 \text{ при } m \geq 0\}. \quad (3.1)$$

Под корректностью задачи, как обычно, понимается разрешимость для любой правой части, единственность и непрерывная зависимость решения от правой части. Это эквивалентно построению правосторонней резольвенты для оператора взвешенного сдвига B , состоящей из операторов, образы которых совпадают с подпространством L_η .

В отличие от случая, описанного в теореме 2.1, может оказаться, что такая правосторонняя резольвента определена не во всех точках кольца $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$.

Как выше, предполагаем, что оператор B обратим и в частности $a(j) \neq 0$ для всех j .

Одним из необходимых условий существования такой правосторонней резольвенты является

правосторонняя обратимость оператора $B - \lambda I$. Согласно теореме 3.1, оператор $B - \lambda I$ может быть правосторонней обратимым только в случае, когда коэффициенты оператора удовлетворяют условию $|a(-\infty)| < |a(+\infty)|$ и правосторонняя обратимость имеет место только при условии $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$.

Найдем сначала необходимые условия для того, чтобы у оператора $B - \lambda I$ существовал правый обратный, образ которого совпадает с подпространством L_η .

По подпространству L_η и оператору B построим полином от переменной λ

$$Q_\eta(\lambda) = \sum_{k=0}^m \frac{\eta_k \lambda^k}{\prod_{j=0}^{k-1} a(j)}.$$

Теорема 3.1. Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то условие $Q_\eta(\lambda) \neq 0$ является необходимым для того, чтобы существовал правый обратный оператор к $B - \lambda I$, образ которого принадлежит подпространству L_η .

Доказательство. Пусть существует правый обратный R к оператору $B - \lambda I$ и $\text{Im} R$ совпадает с L_η . Тогда $L_\eta \cap \text{Ker}(B - \lambda I) = \{0\}$.

Согласно лемме 2.1, при сделанных предположениях подпространство $\text{Ker}(B - \lambda I)$ одномерно и для его построения достаточно найти одно ненулевое решение однородного уравнения $(B - \lambda I)\omega = 0$, т. е. уравнения

$$a(\tau)\omega(\tau+1) - \lambda\omega(\tau) = 0, \quad \tau \in \mathbb{Z}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\omega(0) = 1$, задается формулой

$$\omega_\lambda(\tau) = \begin{cases} \frac{\lambda^\tau}{\prod_{j=0}^{\tau-1} a(j)}, & \tau \geq 0; \\ \frac{\prod_{j=\tau}^{-1} a(j)}{\lambda^{-\tau}}, & \tau < 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

построенная последовательность $\omega_\lambda(\tau)$ принадлежит пространству $l_p(\mathbb{Z})$.

Заметим, что эта последовательность может быть представлена в виде

$$\omega_\lambda = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^k B^{-k} e_0, \quad (3.3)$$

где e_0 есть последовательность

$$e_0(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0, \\ 1, & \tau = 0. \end{cases}$$

Подставив в (3.1), получаем, что условие $\omega_\lambda \in L_\eta$ имеет вид $Q_\eta(\lambda) = 0$. Поэтому условие $Q_\eta(\lambda) \neq 0$ эквивалентно тому, что

$$L_\eta \cap \text{Ker}(B - \lambda I) \neq \{0\}$$

и оно следует из существования правого обратного R к оператору $B - \lambda I$, образ которого совпадает с L_η .

Теорема 3.2. Правый обратный оператор к $B - \lambda I$, образ которого совпадает с подпространством L_η , существует в тех точках λ , для которых выполнены условия:

- 1) $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$,
- 2) $Q_\eta(\lambda) \neq 0$.

Тогда семейство таких правых обратных $R_\eta(B; \lambda)$ аналитически зависит от λ , т. е. является правосторонней резольвентой. Эта правосторонняя резольвента может быть записана в виде

$$R_\eta(B; \lambda)f = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_0)f - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f \right] + \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)} \omega_\lambda,$$

где $\Phi_\lambda(f)$ есть функционал на $l_p(\mathbb{Z})$, заданный формулой

$$\Phi_\lambda(f) = - \sum_{\tau=0}^{m-1} \left[\sum_{i=0}^{m-\tau-1} \frac{\lambda^i \eta_{i+1}}{\prod_{j=0}^i a(j)} \right] f(\tau).$$

Доказательство. Пусть $f \in l_2(\mathbb{Z})$. Будем строить решение уравнения $(B - \lambda I)u = f$, принадлежащее L_η . В координатной записи это уравнение имеет вид:

$$a(\tau)u(\tau+1) - \lambda u(\tau) = f(\tau).$$

При $\tau > 0$ находим выражения для $u(\tau)$ через $f(\tau)$ и $u(0)$:

$$u(\tau) = \left[\frac{f(\tau-1)}{a(\tau-1)} + \frac{\lambda f(\tau-2)}{a(\tau-1)a(\tau-2)} + \frac{\lambda^2 f(\tau-3)}{a(\tau-1)a(\tau-2)a(\tau-3)} + \dots + \frac{\lambda^{k-1} f(0)}{a(0)\dots a(\tau-1)} \right] + \frac{\lambda^k}{a(0)\dots a(\tau-1)} u(0).$$

Аналогично при $\tau < 0$:

$$u(\tau) = \left[-\frac{f(\tau)}{\lambda} - \frac{f(\tau+1)a(\tau+1)}{\lambda^2} - \frac{f(\tau+2)a(\tau+1)a(\tau+2)}{\lambda^3} - \dots - \frac{f(-1)a(-1)\dots a(\tau+1)}{\lambda^{-k}} \right] + \frac{a(-1)\dots a(\tau+1)}{\lambda^{-k}} u(0).$$

Подставив найденные выражения для $u(\tau)$ в условие $u \in L_\eta$, получаем:

$$u(0) \left[I + \frac{\eta_1 \lambda}{a(0)} + \frac{\eta_2 \lambda^2}{a(0)a(1)} + \dots + \frac{\eta_m \lambda^m}{a(0)\dots a(m-1)} \right] = - \left[I + \eta_1 \left[\frac{f(0)}{a(0)} \right] + \eta_2 \left[\frac{f(1)}{a(1)} \frac{\lambda f(0)}{a(0)a(1)} \right] + \dots + \right.$$

$$+\eta_m \left[\frac{f(m-1)}{a(m-1)} + \dots + \frac{\lambda^{m-1} f(0)}{a(0)\dots a(m-1)} \right].$$

Из этого условия находим, что

$$u(0) = \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)},$$

где $\Phi_\lambda(f) = -\sum_{\tau=0}^{m-1} \left[\sum_{i=0}^{m-\tau-1} \frac{\lambda^i \eta_{i+1}}{\prod_{j=0}^i a(j)} \right] f(\tau)$.

Выражение для каждого $u(\tau)$ состоит из двух слагаемых: первое слагаемое при $\tau > 0$ совпадает с выражением для координат вектора

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_0) f,$$

где P_0 есть проектор, заданный в (2.3); а при $\tau < 0$ совпадает с выражением для координат вектора $\sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f$.

В частности, первое слагаемое задаёт последовательность, принадлежащую $l_2(\mathbb{Z})$.

Второе слагаемое имеет вид $\omega_\lambda(\tau)u(0)$. Поэтому получаем следующее выражение для построенного правого обратного

$$R_\eta(B; \lambda) f = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_0) f - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f \right] + \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)} \omega_\lambda. \quad (3.4)$$

Заметим, что при фиксированном λ последнее слагаемое

$$\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)} \omega_\lambda$$

в (3.4) есть оператор ранга 1, а само это слагаемое есть семейство операторов ранга 1, аналитически зависящее от λ . Таким образом, построенное семейство правых обратных аналитически зависит от λ , т. е. задаёт правостороннюю резольвенту для оператора B . Заметим, что полученное выражение не есть представление резольвенты в виде ряда Лорана, так как последнее слагаемое не представлено в виде ряда по степеням λ .

4 Правосторонняя гиперболичность и представление резольвенты в стандартной форме

Пусть $Q_\eta(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda|=1$. Тогда построенная резольвента (3.4) определена в окрестности единичной окружности и, согласно лемме 1, она может быть представлена в стандартной форме – в виде ряда Лорана (1.3), где P – некоторый оператор. Если резольвенту (3.4) разложить в ряд Лорана, то этот оператор есть коэффициент при $\frac{1}{\lambda}$. Первые два слагаемые в (3.4) образуют некоторый ряд Лорана. Но последнее слагаемое

$$\frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)} \omega_\lambda,$$

в (3.4) представлено в другом виде и требуется построить его разложение по степеням λ . Это слагаемое является произведением аналитических функций, поэтому вычисление коэффициентов разложения по степеням λ в общем случае приводит к громоздким выражениям.

Выделим случай, для которого соответствующий оператор P строится в явном виде. Пусть подпространство L_η задано с помощью соотношения, связывающего только две координаты $u(0)$ и $u(1)$:

$$L_\eta = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : u(0) - \eta_1 u(1) = 0\}.$$

В этом случае

$$Q_1(\lambda) = 1 - \frac{\eta_1 \lambda}{a(0)},$$

резольвента краевой задачи задается формулой

$$R_\eta(B; \lambda) f = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P_0) f - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_0 f \right] + \frac{\eta_1 f(0)}{a(0) - \eta_1 \lambda} \omega_\lambda.$$

Она определена во всех точках кольца

$$|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|,$$

кроме точки

$$\lambda_0 = \frac{a(0)}{\eta_1},$$

если $|a(-\infty)| < |\lambda_0| < |a(+\infty)|$.

Если $|\lambda_0| \neq 1$, то резольвента определена в окрестности единичной окружности и представляется в виде (1.3). Чтобы найти выражение для оператора P , рассмотрим разложение последнего слагаемого в степенной ряд. Такое разложение имеет разный вид при $|\lambda_0| < 1$ и при $|\lambda_0| > 1$. Имеем

$$\frac{\eta_1}{a(0) - \eta_1 \lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{\lambda_0^{j+1}}, & \text{при } |\lambda_0| > 1; \\ \frac{-1}{\lambda \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)} = -\sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{\lambda^j}{\lambda_0^{j+1}}, & \text{при } |\lambda_0| < 1. \end{cases}$$

Поэтому при $|\lambda_0| > 1$ получаем

$$\frac{\eta_1 f(0)}{a(0) - \eta_1 \lambda} \omega_\lambda = f(0) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{\lambda_0^{j+1}} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^k B^{-k} e_0 \right), \quad (4.1)$$

при $|\lambda_0| < 1$

$$\frac{\eta_1 f(0)}{a(0) - \eta_1 \lambda} \omega_\lambda = f(0) \left(-\sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{\lambda^j}{\lambda_0^{j+1}} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^k B^{-k} e_0 \right). \quad (4.2)$$

Теперь мы можем найти в явном виде оператор, являющийся коэффициентом при $\frac{1}{\lambda}$, ко-

торый обозначим Ψ . В случае $|\lambda_0| > 1$ этот коэффициент задается выражением

$$\Psi(f) = f(0) \sum_{j+k=-1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_0^{j+1}} B^{-k} e_0 = f(0) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_0^j} B^j e_0.$$

Здесь сумма

$$\omega_{\lambda_0}^- = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_0^j} B^j e_0$$

есть фиксированная последовательность из пространства $l_p(\mathbb{Z})$, которая задается формулой (3.1) в случае $\tau \leq 0$, и $\omega_{\lambda_0}^-(\tau) = 0$, при $\tau > 0$.

В случае $|\lambda_0| < 1$

$$\Psi(f) = -f(0) \sum_{j+k=-1}^{-\infty} \frac{1}{\lambda_0^{j+1}} B^{-k} e_0 = -f(0) \sum_{j=-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_0^j} B^j e_0.$$

Тогда сумма

$$\omega_{\lambda_0}^+ = \sum_{j=-\infty}^0 \frac{1}{\lambda_0^j} B^j e_0,$$

также есть фиксированная последовательность из пространства $l_p(\mathbb{Z})$, которая задается формулой (3.1) в случае $\tau > 0$, и $\omega_{\lambda_0}^+(\tau) = 0$, при $\tau \leq 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае искомый коэффициент Ψ при $\frac{1}{\lambda}$ есть оператор ранга 1, действующий по формуле

$$\Psi(f) = \begin{cases} f(0)\omega_{\lambda_0}^-, & |\lambda_0| > 1, \\ -f(0)\omega_{\lambda_0}^+, & |\lambda_0| < 1. \end{cases}$$

Теперь мы можем записать резольвенту $R_{\eta}(B; \lambda)$ в стандартной форме:

$$R_{\eta}(B; \lambda)f = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P)f - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} Pf,$$

где $P = P_0 + \Psi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Antonevich, A.B.* Right-side Hyperbolic operators / A.B. Antonevich, E.V. Panteleeva // Ser. A: Appl. Math. Inform. and Mech. – 2014. – Vol. 6, № 1. – P. 1–9.
2. *Антоневич, А.Б.* Правосторонние резольвенты дискретных операторов взвешенного сдвига с матричными весами / А.Б. Антоневич, Е.В. Пантелеева // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – Т. 16, № 3. – С. 45–53.
3. *Антоневич, А.Б.* Спектральные свойства дискретного оператора взвешенного сдвига / А.Б. Антоневич, А.А. Ахматова // Труды института математики. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 14–21.
4. *Каток, А.Б.* Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хасельблат. – М.: Факториал, 1999. – 775 с.
5. *Садовничий, В. А.* Теория операторов / В.А. Садовничий. – М., 1999. – 368 с.
6. *Рисс, Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви Надь. – М., 1954. – 500 с.

Поступила в редакцию 22.04.16.

УДК 004.7

НАСТРОЙКА DNS ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НА УЗЛАХ IPV4 И IPV6

О.М. Демиденко, Н.Н. Диваков, П.Л. Чечет

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

TUNING OF DNS FOR SIMULTANEOUS USE ON THE IPV4 AND IPV6 NODES

O.M. Demidenko, N.N. Divakov, P.L. Chechet

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается проблема одновременного использования DNS на узлах IPv4 и IPv6; предложена схема сети, моделирующая работу DNS-серверов; проанализированы некоторые ситуации.

Ключевые слова: IPv6, коммутатор, PC, DNS, Cisco Packet Tracer, IP адрес.

The problem of simultaneous use of DNS on the IPv4 and IPv6 nodes is considered; the network diagram that simulates the operation of DNS-servers is offered; some situations are analyzed.

Keywords: IPv6, switch, PC, DNS, Cisco packet Tracer, IP address.

Введение

В настоящее время многие развивающиеся страны столкнулись со значительным дефицитом IPv4-адресов. Операторы вынуждены решать этот вопрос, применяя механизм адресной трансляции, что сдерживает внедрение новых услуг и вносит определенные сложности в сетевое администрирование. В то же время переход к IPv6 задерживается из-за отсутствия четкого понимания у регуляторов и операторов, как именно осуществлять его. При этом важно помнить, что развертывание протокола IPv6 для реального использования требует, также, изменений в системе имен доменов (DNS).

Основой DNS является представление об иерархической структуре доменного имени и зонах. Каждый сервер, отвечающий за имя, может делегировать ответственность за дальнейшую часть домена другому серверу (с административной точки зрения – другой организации или человеку), что позволяет возложить ответственность за актуальность информации на серверы различных организаций (людей), отвечающих только за «свою» часть доменного имени.

Начиная с 2010 года, в систему DNS внедряются средства проверки целостности передаваемых данных, называемые DNS Security Extensions (DNSSEC). Передаваемые данные не шифруются, но их достоверность проверяется криптографическими способами. Внедряемый стандарт DANE обеспечивает передачу средствами DNS достоверной криптографической информации (сертификатов), используемых для установления безопасных и защищенных соединений транспортного и прикладного уровней.

Протокол IPv6 поддерживает значительно большее число адресов, чем IPv4. Его появление

обязано изменениям, происходящим сейчас с Интернет-пространством: число пользователей глобальной сети значительно возросло, по сравнению с 1981 годом, когда протокол IPv4 был разработан, и больше нет свободных адресов IPv4, поэтому необходим переход на новую систему адресации IPv6.

Google Public DNS – это экспериментальный альтернативный DNS-сервер с закрытым исходным кодом, разработанный корпорацией Google. По утверждениям компании, он обеспечивает ускорение загрузки web-страниц за счет повышения эффективности кэширования данных, а также обеспечивает улучшенную защиту от спуфинга.

Google Public DNS предоставляет следующие адреса по протоколу IPv4 публичных серверов для DNS-запросов:

8.8.8.8

8.8.4.4

Также серверы имеют адреса по протоколу IPv6:

2001:4860:4860::8888

2001:4860:4860::8844

Google заверяет, что Public DNS будет использоваться только для ускорения загрузки веб-сайтов и не будет собирать персональные данные. IP-адреса пользователей сервиса будут храниться в системе не более 48 часов, а информация о провайдере и местоположении – не более двух недель. Сугубо конфиденциальные данные, такие, как имя пользователя и его физический адрес, компания записывать не будет. Собираемая сервисом информация будет использоваться исключительно в технических целях для повышения качества обслуживания [1].

1 Настройка DNS

В связи с переходом на протокол IPv6 очень много говорится о проблемах подключения. Тем не менее, важно помнить, что развертывание протокола IPv6 для реального использования требует, также, изменений в системе имен доменов (DNS). При использовании протокола IPv6 система DNS играет даже большую роль, чем при использовании протокола IPv4. Это связано с тем, что адреса IPv6 имеют большую длину и их трудно запоминать.

В протоколе IPv4 для хранения IP-адресов используются записи типа «A», а в протоколе IPv6 для хранения адресов IPv6 используются записи типа «AAAA». Записи типа «AAAA» или записи четырех A, как их иногда называют, функционально эквивалентны записям типа «A», и общий принцип их написания тот же. В обратных записях DNS для IPv6 используются записи PTR точно так же, как в IPv4, однако вместо записи «in-addr.arpa» в конце для указания домена, которая использовалась в протоколе IPv4, теперь для протокола IPv6 применяется запись «ip6.arpa». Для записей PTR адрес IPv6 по-прежнему записывается в обратном полубайтном формате, точно так же, как IPv4, только в этом случае адрес намного длиннее.

Для представления единого, глобального уникального пространства имен был разработан DNS. В версиях протоколов IP, используемых для передачи запросов и ответов DNS, существуют независимые записи типа «AAAA». Записи могут быть запрошены как с помощью IPv4 протокола, так и с помощью IPv6 протокола. DNS-серверы не должны делать предположения о том, что данные для возврата на ответ разделены на основе базового транспорта, используемого в запросе. Адреса в дополнительных разделах могут быть выбраны или отфильтрованы с помощью запросов, полученных из транспорта, который используется. Это имеет ряд очевидных проблем, потому что во многих случаях транспортный протокол не коррелирует с запросом и потому «получает плохой» ответ – или вообще не получает ответа, что является проблемой.

Динамическая система DNS (DDNS) представляет собой вариант обновления системы DNS с использованием информации, получаемой от сервера DHCP (Dynamic Host Configuration Protocol). После того как сервер DHCP назначит IP-адрес, он передает эти данные на сервер DNS. Подобный механизм носит название DDNS и описан в документе RFC 2136. DDNS существует, также, и для IPv6 с очень небольшими отличиями.

В протоколе IPv4 клиенты могут получать IP-адрес двумя способами: можно либо настроить статический адрес, либо получить его от сервера DHCP. Протокол IPv6 поддерживает оба этих метода, а также дополнительный метод под

названием SLAAC (Stateless Address Autoconfiguration – автонастройка адреса без сохранения состояния). SLAAC позволяет конечным узлам IPv6 выбрать собственные адреса. Этот метод описан в документе RFC 4862. Это затрагивает систему DNS, поскольку, когда клиенты создают свои собственные адреса IPv6 с помощью SLAAC, в DNS также должны появиться обратные записи DNS для этих адресов.

Версия протокола IP, используемая для запроса записей ресурса, не зависит от протокола версии записей ресурсов. Например, транспорт IPv4 может использоваться для того, чтобы запросить записи IPv6, и наоборот. Чтобы избежать фрагментирования на части пространства имен DNS, где некоторые части DNS видны только с использованием протокола IPv4 (или только IPv6) транспортом, рекомендуется всегда иметь, по крайней мере, один авторитетный сервер с поддержкой протокола IPv4 чтобы гарантировать, что рекурсивные DNS-серверы поддерживают протокол IPv4.

Поскольку сервер имеет адрес IPv6, а в записи «AAAA» нет его четкого упоминания адреса, то этот адрес будет использоваться всегда. Чтобы использовать протокол IPv6, клиенты должны запросить запись вида «AAAA». Кроме того, скорость соединений по протоколу IPv4 может быть выше, чем по протоколу IPv6. В документе RFC 6555 описано решение этих проблем. Предполагаются действия клиентов, которые позволят расширить возможности для пользователей. Основная идея состоит в том, чтобы устанавливать соединение как по протоколу IPv4, так и IPv6, а затем использовать то соединение, скорость передачи в котором выше.

В Cisco Packet Tracer была смоделирована ситуация с использованием нескольких DNS серверов, часть из которых использует IPv4-адреса, другая часть – IPv6-адреса и один из DNS-серверов использует одновременно IPv4 и IPv6. В качестве связующего звена был использован 24-х портовый коммутатор с Ethernet портами, были добавлены несколько DNS-серверов, использующих различные версии протокола IP, как это видно на рисунке 1.1.

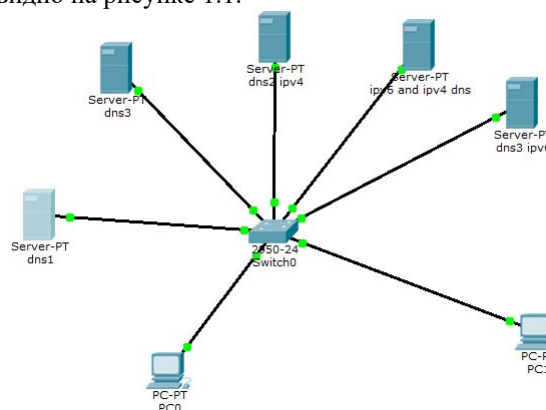


Рисунок 1.1 – Создание схемы

Работа начинается с задания IP-конфигурации. Как видно из рисунка 1.2, был задан статический IPv4-адрес, а также IPv6-адрес с указанием IPv6 DNS-сервера и шлюза, в качестве которого используется сервер.

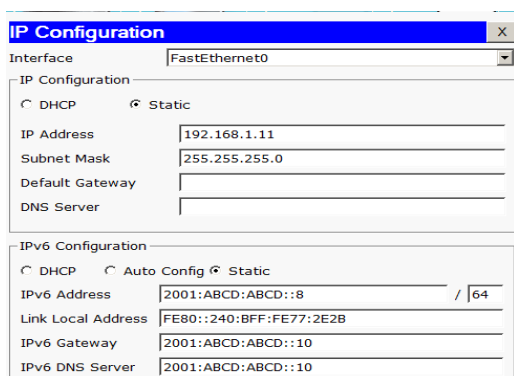


Рисунок 1.2 – Конфигурация DNS-сервера

Был сконфигурирован DNS-сервер, заданы IP-адреса, а также название ресурса, использован тип записи A, как показано на рисунке 1.3. Ресурс данного DNS-сервера – d6p.com.

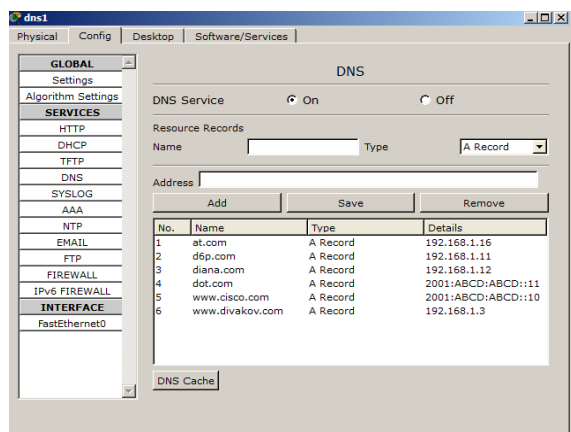


Рисунок 1.3 – Конфигурация DNS1 DNS-сервера

Подобным образом (рисунки 1.4 и 1.5) был сконфигурирован DNS 3, заданы IPv4 и IPv6 адреса, указан DNS по умолчанию для IPv6-адреса.

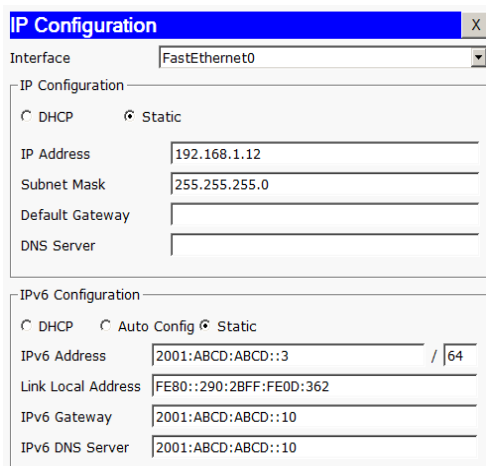


Рисунок 1.4 – IP-конфигурация

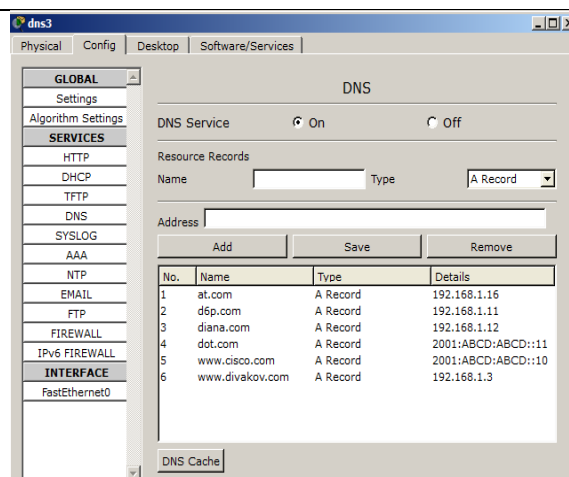


Рисунок 1.5 – Задание DNS-серверов

Как представлено на рисунках 1.6 и 1.7 (конфигурация DNS2-IPv4), были заданы IP-адреса, а также название ресурса, использован тип записи A.

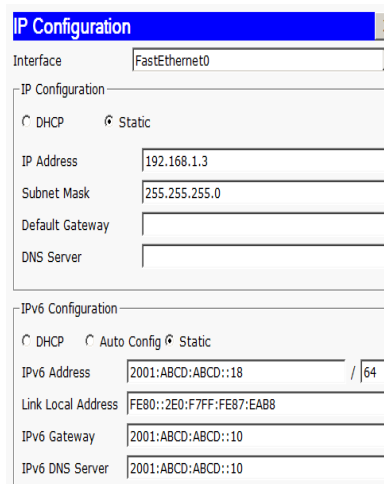


Рисунок 1.6 – IP-конфигурация

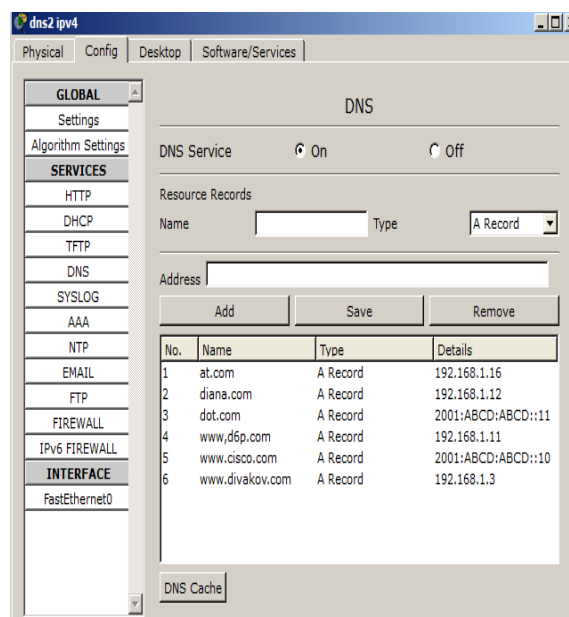


Рисунок 1.7 – Задание DNS-серверов

На рисунках 1.8 и 1.9 показано, как был сконфигурирован сервер, содержащий одновременно доменное имя в IPv6- и IPv4-диапазонах, которые также указаны в других серверах.

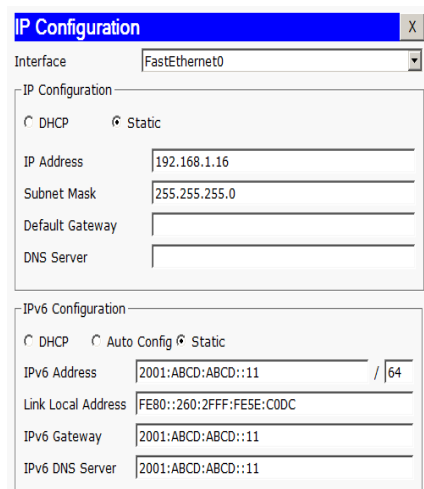


Рисунок 1.8 – IP-конфигурация

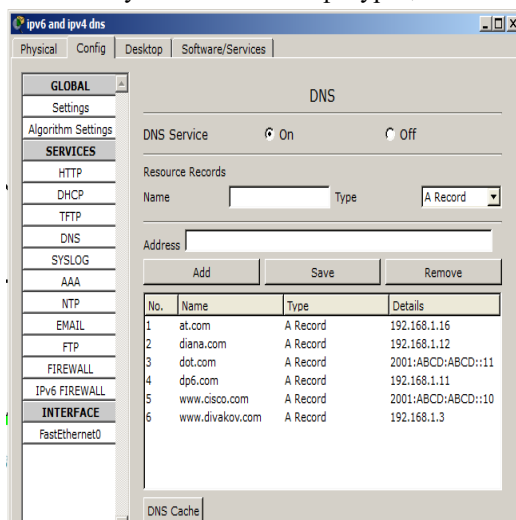


Рисунок 1.9 – Задание DNS-серверов

Была выполнена конфигурация DNS-сервера в IPv6-диапазоне, заданы доменные имена и прописаны в других серверах (рисунки 1.10 и 1.11).

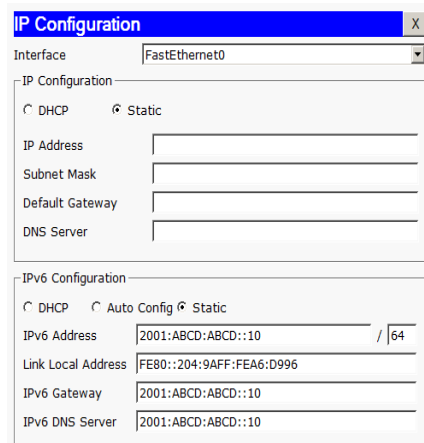


Рисунок 1.10 – IP-конфигурация

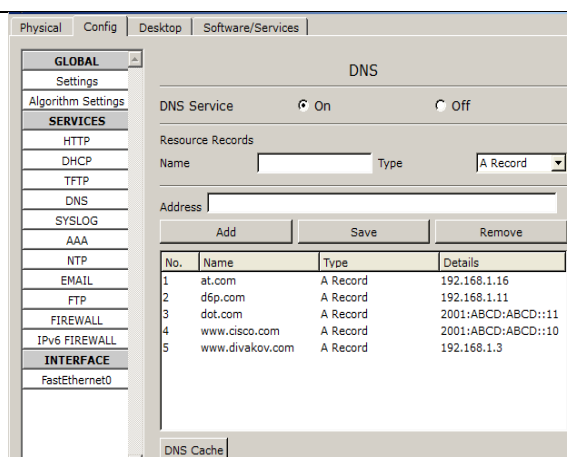


Рисунок 1.11 – Задание DNS-серверов

На рисунках 1.12–1.17 показано, как были сконфигурированы рабочие станции, но, видно, что возникли проблемы при использовании команды «ping». При не заданном DNS-сервере в IPv4-диапазоне был доступен только IPv6-сервер, а при задании IPv4-диапазона, был доступен только соответствующий сервер IPv4.

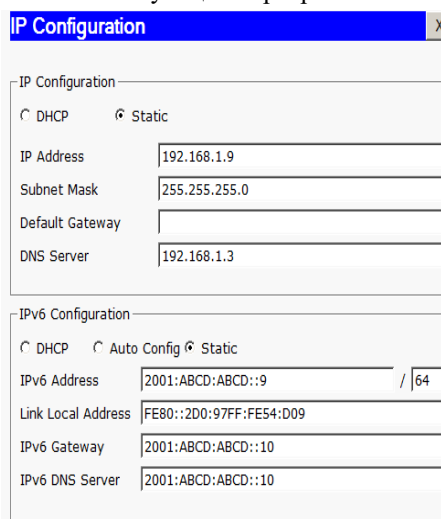


Рисунок 1.12 – IP-конфигурация

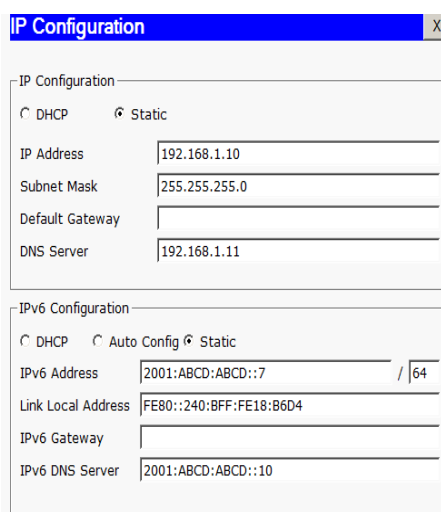


Рисунок 1.13 – IP-конфигурация


```

Command Prompt

Packet Tracer PC Command Line 1.0
PC>ping www.divakov.com

Pinging 192.168.1.3 with 32 bytes of data:

Reply from 192.168.1.3: bytes=32 time=117ms TTL=128
Reply from 192.168.1.3: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.3: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.3: bytes=32 time=0ms TTL=128

Ping statistics for 192.168.1.3:
    Packets: Sent = 4, Received = 4, Lost = 0 (0% loss),
    Approximate round trip times in milli-seconds:
        Minimum = 0ms, Maximum = 117ms, Average = 29ms

PC>ping wdp6.co
Ping request could not find host wdp6.co. Please check the name and try again.
PC>ping dp6.com
Ping request could not find host dp6.com. Please check the name and try again.
PC>
    
```

Рисунок 1.14 – Выполнение команды «ping» с PC1

```

ain.
PC>ping diana.com
Ping request could not find host diana.com. Please check the name and try again.

PC>ping diana.com

Pinging 192.168.1.12 with 32 bytes of data:

Reply from 192.168.1.12: bytes=32 time=10ms TTL=128
Reply from 192.168.1.12: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.12: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.12: bytes=32 time=0ms TTL=128

Ping statistics for 192.168.1.12:
    Packets: Sent = 4, Received = 4, Lost = 0 (0% loss),
    Approximate round trip times in milli-seconds:
        Minimum = 0ms, Maximum = 10ms, Average = 2ms
    
```

Рисунок 1.15 – Выполнение команды «ping» с PC0

```

Command Prompt

Packet Tracer PC Command Line 1.0
PC>ping 192.168.1.3

Pinging 192.168.1.3 with 32 bytes of data:

Reply from 192.168.1.3: bytes=32 time=60ms TTL=128
Reply from 192.168.1.3: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.3: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.3: bytes=32 time=0ms TTL=128

Ping statistics for 192.168.1.3:
    Packets: Sent = 4, Received = 4, Lost = 0 (0% loss),
    Approximate round trip times in milli-seconds:
        Minimum = 0ms, Maximum = 60ms, Average = 15ms

PC>ping www.cisco.com

Pinging 2001:ABCD:ABCD::10 with 32 bytes of data:

Reply from 2001:ABCD:ABCD::10: bytes=32 time=20ms TTL=128
Reply from 2001:ABCD:ABCD::10: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 2001:ABCD:ABCD::10: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 2001:ABCD:ABCD::10: bytes=32 time=0ms TTL=128

Ping statistics for 2001:ABCD:ABCD::10:
    Packets: Sent = 4, Received = 4, Lost = 0 (0% loss),
    
```

Рисунок 1.16 – Правильная настройка DNS-сервера PC0

```

Command Prompt

Control-C
^C
PC>ping 192.168.1.11

Pinging 192.168.1.11 with 32 bytes of data:

Reply from 192.168.1.11: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.11: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.11: bytes=32 time=1ms TTL=128
Reply from 192.168.1.11: bytes=32 time=0ms TTL=128

Ping statistics for 192.168.1.11:
    Packets: Sent = 4, Received = 4, Lost = 0 (0% loss),
    Approximate round trip times in milli-seconds:
        Minimum = 0ms, Maximum = 1ms, Average = 0ms

PC>ping at.com

Pinging 192.168.1.16 with 32 bytes of data:

Reply from 192.168.1.16: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.16: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.16: bytes=32 time=0ms TTL=128
Reply from 192.168.1.16: bytes=32 time=0ms TTL=128

Ping statistics for 192.168.1.16:
    Packets: Sent = 4, Received = 4, Lost = 0 (0% loss),
    
```

Рисунок 1.17 – Правильная настройка DNS-сервера PC0

2 Преимущества протокола IPv6

Применение DNS (Domain Name System) избавляет рядового пользователя от необходимости задумываться о числовых IP-адресах. Она позволяет присваивать любому IP-адресу символическое имя (домен). Преобразование символического имени в числовое и наоборот осуществляется DNS-серверами. На них содержится информация о каждом домене. Она представлена в виде ресурсных записей, каждая из которых принадлежит конкретному доменному имени и содержит ряд сведений о нем, в том числе его IP-адрес. До начала внедрения IPv6 существовало 20 типов таких записей. Они относились к 32-разрядным IP-адресам (так называемые записи типа «A»), что делало DNS и IPv6 несовместимыми.

Стоит отметить тот факт, что после перехода на протокол IPv6 останутся, конечно, сторонники и у протокола IPv4 – от этого не уйти, но, с возникновением все больших проблем с нехваткой адресного пространства, IPv6 станет основным протоколом и улучшит во многих вопросах весь Интернет. Очевидно, что для IPv6 сейчас, как и для IPv4 в свое время, будут созданы программные и аппаратные средства для его поддержки и усовершенствования.

В связанном Интернетом мире информация превратится в знания, творческий потенциал – в практические инновации, а фактические данные приобретут большую, чем когда-либо ранее, значимость, расширяя опыт и обеспечивая более устойчивую глобальную экономику. Одной из ключевых технологий, которые могут содействовать такому прогрессу, является новый протокол версии 6 (IPv6). Эта новая версия IP-протокола способна расширить границы Интернета за пределы возможностей его текущей версии – протокола IPv4. IPv6 даст возможность пользователям извлекать максимальную выгоду из Интернета, а также обеспечит увеличение охвата сообществ и стран, недостаточно охваченных Интернетом. Однако, на сегодняшний день имеются значительные проблемы с переходом от IPv4 к IPv6, которые носят рыночный, коммерческий и технический характер. Мир находится в состоянии готовности к большому рывку, который позволит преодолеть эти проблемы и пользоваться возможностями нового безграничного Интернета.

Изначально протокол IPv6 ориентирован на мощные сети и на передачу данных больших объемов на высоких скоростях. Поэтому не стоит себе представлять, например, как будут работать Dial-Up провайдеры на IPv6 – в этом просто нет смысла. Будущее, в котором понадобятся IPv6, принесёт с собой и более скоростные сети, которые нереально будет администрировать на IPv4.

Быстрое уменьшение свободного пула адресов IPv4 и незначительные темпы внедрения IPv6 не оставляют надежды на переход к новому протоколу с помощью стандартного «двойного

стека», как изначально предполагалось. Это означает, что к моменту исчерпания свободного пула IPv4-адресов, IPv6 не сможет представлять рабочей альтернативы для дальнейшего развития Интернета.

Тем не менее, глобальная сеть Интернет будет продолжать работать и развиваться. Источником уверенности является также тот факт, что утилизация распределенных ресурсов IPv4 невысока как с точки зрения неиспользуемого адресного пространства, так и с точки зрения возможностей расширения адресного пространства за счет номеров портов на основе технологий мультиплексирования потоков данных.

Однако, это даст всего лишь дополнительное время и, будем надеяться, что оно будет использовано для создания реальной альтернативы – повсеместного внедрения IPv6. Основные решения уже существуют, часть из них в стадии обсуждения, часть уже реализуется в оборудовании и внедряется в сетях.

После проведения исследования и отработки на практике нескольких вариантов конфигурирования оборудования, можно сделать вывод, что при не заданном DNS-сервере в IPv4-диапазоне будет доступен только IPv6-сервер, а при задании IPv4-диапазона будет доступен только соответствующий сервер IPv4. Данные проблемы связаны с несогласованием протоколов IPv4 и IPv6, также остаются проблемы на уровне тунелирования протоколов IPv4 и IPv6, а решение

данных проблем может быть связано либо с полным переходом к IPv6, либо с установкой соответствующего оборудования. Так как в скором времени адресное пространство IPv4 все же иссякнет, то целесообразным будет переход к IPv6.

Поскольку шестнадцатибайтный адрес IPv6 запомнить сложнее, чем четырехбайтный IPv4, то роль службы DNS в сетях IPv6 становится еще более значимой. Стандарт DNS определяет новые типы записей о ресурсах для установления соответствия между именем системы и ее адресами в форматах IPv4 и IPv6. Какой из протоколов будет задействован для того или иного соединения, зависит от порядка записей, предоставляемых службой DNS приложению. Например, система может предоставлять только адрес IPv4, или только IPv6, или возвращать все имеющиеся в DNS адресные записи, относящиеся к запрошенному имени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Google Developers* [Электронный ресурс]. Discussion Groups and Issue Reporting-Маунтин-Вью, 2004. Режим доступа: https://developers.google.com/speed/publicdns/docs/using#configure_your_network_settings_to_use_google_public_dns. – Дата доступа: 16.03.2016.

Поступила в редакцию 23.05.16.

УДК 004.8

ОБНАРУЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ СРЕДСТВАМИ АЛГОРИТМОВ КЛАССИФИКАЦИИ

В.С. Миняйлов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

DETECTION OF ELLIPTICAL SENTENCES USING CLASSIFICATION ALGORITHMS

U.S. Miniailau

Lomonosov Moscow State University

Рассмотрена проблема корректной обработки эллиптических конструкций в рамках задачи автоматического синтаксического анализа. Подробно рассмотрены возможности обнаружения эллиптических предложений средствами алгоритмов классификации.

Ключевые слова: автоматический синтаксический анализ, эллипсис, классификация.

The problem of correct processing of elliptic structures in the automatic syntactic parsing of natural language is studied. Capabilities for detection of elliptical sentences are considered in details.

Keywords: automatic syntactic analysis, ellipsis, classification.

Введение

Автоматическая обработка текстов в современном мире становится все более и более актуальной. В рамках этой проблемы рассматривается задача автоматического синтаксического анализа предложений, которая является фундаментальной. Также подходы к ее решению значимы для многих других задач автоматической обработки текстов.

Одним из аспектов автоматического синтаксического анализа предложений является восстановление эллипсиса в них. Эллипсис довольно подробно изучался в лингвистических работах, но почти не обсуждался в рамках автоматического синтаксического анализа.

Целью данной работы является разработка подхода для автоматического синтаксического анализа эллиптических предложений. В рамках статьи подробно рассмотрен один из аспектов предлагаемого подхода: классификация предложений на эллиптические и «обычные».

1 Основные определения

Эллипсис – намеренный пропуск слов, существенных для смысла выражения [1], [2].

Сформулируем понятие синтаксического разбора предложения с возможным эллипсисом [3].

Рассмотрим предложение из N слов: w_1, \dots, w_N . Добавим фиктивное слово w_0 (обозначим его ROOT), и некоторое количество (возможно нулевое) дополнительных слов. Таким образом, мы получаем предложение с добавленными словами из $M + 1$ ($M \geq N$) слова: w_0, \dots, w_M . Синтаксической связью называется упорядоченная пара слов (w_i, w_j) . Синтаксическим разбором предложения является набор из $M - 1$ синтаксических связей, которые образуют корневое дерево с корнем в слове w_0 [4].

Например, рассмотрим предложение «Что в этих рассказах было правдой, а что [было] выдумкой поди разбери». Дополнительное слово взято в квадратные скобки. Рассмотрим синтаксический разбор данного предложения (рисунок 1.1).

Вершины дерева разбора, которые не являются фиктивным словом (ROOT) и соответствуют добавленным в предложение словам, будем называть нулевыми вершинами. С их помощью будем описывать эллипсис в синтаксическом разборе. Предложения, синтаксический разбор которых содержит нулевые вершины, будем называть нулевыми предложениями.

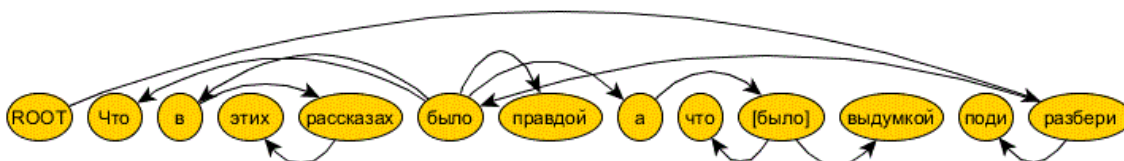


Рисунок 1.1 – Синтаксический разбор предложения

Синтаксический разбор называется проективным, если для любой синтаксической связи (w_i, w_j) из этого разбора справедливо: любое слово w_k ($\min(i, j) \leq k \leq \max(i, j)$) достижимо из w_i и w_j с использованием связей рассматриваемого синтаксического разбора.

2 Описание подхода

Задача автоматического синтаксического анализа имеет множество различных подходов к решению [4]–[8]. Большинство подходов определяют синтаксический разбор как корневое дерево, где вершины соответствуют словам предложения (за исключением фиктивной корневой вершины), а ребра соответствуют синтаксическим связям между словами. При таком определении синтаксического разбора невозможно корректно описывать эллиптические предложения. Поэтому большинство существующих подходов к синтаксическому анализу в принципе не предполагают наличие нулевых вершин в синтаксическом разборе.

На корпусах текстов, которые не содержат нулевые вершины, качество работы существующих подходов к синтаксическому анализу весьма высоко [9]–[11]. Если корпус содержит небольшое количество нулевых вершин, то использование качественных синтаксических анализаторов на нем является вполне жизнеспособным подходом. Тем не менее, может возникнуть необходимость обрабатывать предложения с нулевыми вершинами. В случае корпуса с небольшим количеством нулевых вершин есть основания рассматривать нулевые предложения как некий частный случай в синтаксическом анализе и обрабатывать их отдельно.

Например, можно использовать следующую схему:

1) проводим синтаксический анализ предложения;

2) определяем по синтаксическому разбору необходимость добавления нулевых вершин. Другими словами, мы классифицируем предложения на нулевые и «обычные». Данная классификация рассматривается в качестве первичного отсева и поэтому ошибки классификации не равноценны. Если нулевое предложение будет принято за «обычное», то эту ошибку уже не исправить дальше. А если «обычное» предложение принято за нулевое, то это можно поправить далее;

3) строим синтаксический разбор с нулевыми вершинами.

В данной работе основное внимание будет уделено пункту 2), то есть классификации предложений на эллиптические (нулевые) и «обычные». В качестве отправной точки для пункта 3) можно использовать то, что нулевые вершины часто соответствуют либо корневым глаголам, либо имеющимся в предложении словам [12].

Плюсом такого подхода является эффективность. При достаточно точной классификации дополнительная работа (по сравнению с «обычным» синтаксическим анализом) будет не очень трудоемкой. Дополнительно будем производить только следующие действия:

а) классификацию предложений. Как правило, это не требует значительных затрат. Особенно с учетом того, что синтаксический анализ часто бывает весьма затратным;

б) построение разборов предложений с нулевыми вершинами. Это может быть затратной операцией, но она будет производиться на небольшом подмножестве предложений исходного корпуса. Это утверждение справедливо только для корпусов с небольшим количеством нулевых предложений.

3 Подготовка данных

Для исследований использовался национальный корпус русского языка, а точнее глубоко аннотированный (синтаксический) корпус. Этот фрагмент корпуса содержит тексты, снабженные морфо-синтаксической разметкой, то есть помимо морфологической информации, приписанной каждому слову текста, для каждого предложения задана его синтаксическая структура.

Важно отметить, что в корпусе представлены такие явления как эллипсис и непроективные синтаксические разборы.

В качестве базовой технологии для синтаксического анализа использовалась система MaltParser [13]. Это актуальная система для синтаксического анализа на многих языках. Ее можно использовать без дополнительных настроек. А можно настраивать под конкретный корпус текстов.

Первым шагом в подготовке данных была настройка системы MaltParser. Из 49421 предложений корпуса были исключены нулевые предложения. Нулевых предложений в корпусе было 1008, поэтому в корпусе осталось 48413 предложений. Все оставшиеся в корпусе предложения были разделены в соотношении 70:30, другими словами 100% корпуса было разделено на две части по 70% (тренировочная часть) и 30% (тестовая часть). Далее MaltParser обучался на тренировочной части.

После обучения было проведена проверка на тестовой части. Точность синтаксических разборов (сравнение происходило без учета типов синтаксических связей) была 86.5%. Эти данные согласуются с данными из [11]. Таким образом, можно утверждать, что MaltParser был настроен корректно.

Далее из тестовой части было случайно выбрано 1472 предложения. К ним были добавлены нулевые предложения, изначально исключенные из корпуса. Все эти предложения проанализированы с помощью системы MaltParser. Отметим, что при анализе нулевых предложений исходными

данными являются только ненулевые слова (в корпусе SynTagRus обычные и нулевые вершины деревьев разбора смешаны, их нужно разделять перед анализом). Далее для всех предложений были извлечены следующие типы признаков:

– части речи (1-й тип признаков). Для каждой из частей речи считалось количество слов предложения, которые соответствуют этой части речи;

– упорядоченные пары частей речи (2-й тип признаков). Это признаки, которые соответствуют словам некоторой синтаксической связи;

– типы синтаксических связей (3-й тип признаков). Для каждого из типов связей считаем сколько раз он встретился в предложении.

– биграммы (4-й тип признаков). Считаем количество пар частей речи, которые соответствуют соседним словам предложения;

– упорядоченные тройки частей речи (5-й тип признаков). Для каждой тройки частей речи (p_1, p_2, p_3) считаем число троек (v_1, v_2, v_3) вершин дерева синтаксического разбора таких, что v_1 непосредственный родитель v_2 , v_2 непосредственный родитель v_3 , и при этом v_1 имеет часть речи p_1 , v_2 имеет часть речи p_2 , v_3 имеет часть речи p_3 ;

– упорядоченные пары типов синтаксических связей (6-й тип признаков). Аналогично предыдущему пункту считаем пару синтаксических связей.

Важно отличать нулевые предложения друг от друга. Всего в корпусе 1008 нулевых предложений. Из них в 941 предложении все нулевые вершины имеют «обычные» дочерние вершины. В 12 предложениях во всех нулевых вершинах нет «обычных» дочерних вершин. И в 55 предложениях есть нулевые вершины обоих типов. Все дальнейшие рассмотрения проводились для полного набора из 1008 нулевых предложений.

4 Классификация предложений

Рассмотрим для начала качество анализа нулевых предложений без использования эллипсиса. Для анализа будем использовать MaltParser, настроенный на корпус SynTagRus. Точность анализа (доля корректных связей в разборе) составляет 73.7%. Полнота анализа (доля найденных связей из нулевых предложений) составляет 68.6%.

Для классификации используются следующие алгоритмы:

- метод опорных векторов (SVM);
- метод k ближайших соседей (kNN);
- алгоритм AdaBoost (boosting);
- бэггинг (bagging);
- решающие деревья (rpart).

При использовании каждого из классификаторов использовалась следующая схема: случайно делим выборку на тестовую часть (70% выборки) и контрольную часть (30% выборки). Обучаем классификатор на тренировочной части и проверяем на контрольной. Для повышения достоверности экспериментов все алгоритмы классификации тестировались на одном и том же разбиении. Результаты классификации предложений на разных наборах признаков представлены ниже (таблицы 4.1–4.6).

Рассмотрим данные, представленные в таблицах. Ключевой показатель – точность классификации на всех предложениях из тестовой выборки (четвертый столбец). По этому показателю можно сделать выводы о том, что максимальная точность классификации немногим выше 70%. Наилучшие показатели точности имеет метод опорных векторов (SVM). Существенно повысить эту точность не удалось, даже за счет добавления признаков или использования различных алгоритмов классификации.

Таблица 4.1 – Результаты классификации предложений для 1-го типа признаков (части речи)

	Точность классификации на «обычных» (ненулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на эллиптических (нулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на всех предложениях из тестовой выборки
boost	86.9%	41.8%	67.5%
bagging	84.5%	39.0%	64.9%
kNN ($k = 1$)	74.6%	43.6%	61.3%
kNN ($k = 3$)	72.2%	42.9%	59.6%
kNN ($k = 5$)	71.4%	44.0%	59.6%
kNN ($k = 7$)	84.2%	36.5%	63.7%
kNN ($k = 9$)	86.6%	36.9%	65.2%
kNN ($k = 11$)	88.2%	35.1%	65.4%
kNN ($k = 13$)	88.5%	34.4%	65.2%
kNN ($k = 15$)	89.0%	35.8%	66.2%
rpart	85.8%	37.2%	64.9%
SVM	88.8%	37.2%	66.6%

Таблица 4.2 – Результаты классификации предложений для типов признаков
1(части речи) + 2(пары частей речи)

	Точность классификации на «обычных» (ненулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на эллиптических (нулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на всех предложениях из тестовой выборки
boost	79.5%	52.9%	68.7%
bagging	83.8%	47.1%	68.9%
kNN ($k = 1$)	74.2%	43.0%	61.5%
kNN ($k = 3$)	73.5%	39.0%	59.4%
kNN ($k = 5$)	73.7%	41.9%	60.8%
kNN ($k = 7$)	84.6%	34.2%	64.1%
kNN ($k = 9$)	87.6%	34.2%	65.9%
kNN ($k = 11$)	87.4%	32.7%	65.1%
kNN ($k = 13$)	89.4%	29.0%	64.8%
kNN ($k = 15$)	88.6%	29.4%	64.5%
rpart	77.5%	53.7%	67.8%
SVM	83.1%	51.5%	70.2%

Таблица 4.3 – Результаты классификации предложений для типов признаков
1 (части речи) + 2 (пары частей речи) + 3 (типы синтаксических связей)

	Точность классификации на «обычных» (ненулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на эллиптических (нулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на всех предложениях из тестовой выборки
boost	82.2%	47.5%	67.2%
bagging	83.8%	47.9%	68.2%
kNN ($k = 1$)	80.6%	37.7%	62.0%
kNN ($k = 3$)	80.1%	37.7%	61.7%
kNN ($k = 5$)	79.8%	39.1%	62.1%
kNN ($k = 7$)	88.4%	26.4%	61.5%
kNN ($k = 9$)	89.5%	25.7%	61.8%
kNN ($k = 11$)	91.4%	23.6%	62.0%
kNN ($k = 13$)	91.9%	24.3%	62.6%
kNN ($k = 15$)	91.9%	21.5%	61.4%
rpart	83.8%	51.4%	69.8%
SVM	83.6%	52.8%	70.2%

Таблица 4.4 – Результаты классификации предложений для типов признаков
1 (части речи) +2 (пары частей речи) +4 (биграммы)

	Точность классификации на «обычных» (ненулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на эллиптических (нулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на всех предложениях из тестовой выборки
boost	80.5%	51.6%	69.2%
bagging	82.8%	50.5%	70.2%
kNN ($k = 1$)	73.9%	44.7%	62.5%
kNN ($k = 3$)	74.1%	43.6%	62.1%
kNN ($k = 5$)	74.1%	45.1%	62.8%
kNN ($k = 7$)	86.1%	32.2%	65.0%
kNN ($k = 9$)	89.9%	32.2%	67.3%
kNN ($k = 11$)	90.1%	30.4%	66.8%
kNN ($k = 13$)	91.3%	28.2%	66.6%

Продолжение таблицы 4.4.

	Точность классификации на «обычных» (ненулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на эллиптических (нулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на всех предложениях из тестовой выборки
kNN ($k = 15$)	90.8%	28.9%	66.6%
rpart	74.1%	56.4%	67.2%
SVM	83.3%	54.9%	72.2%

Таблица 4.5 – Результаты классификации предложений для типов признаков 1 (части речи) +2 (пары частей речи) +3 (типы связей) +5 (тройки частей речи)

	Точность классификации на «обычных» (ненулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на эллиптических (нулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на всех предложениях из тестовой выборки
boost	83.5%	43.5%	66.8%
bagging	87.7%	43.5%	69.2%
kNN ($k = 1$)	75.7%	41.5%	61.3%
kNN ($k = 3$)	75.4%	40.1%	60.6%
kNN ($k = 5$)	76.2%	41.8%	61.8%
kNN ($k = 7$)	92.1%	24.8%	63.9%
kNN ($k = 9$)	95.1%	22.4%	64.6%
kNN ($k = 11$)	95.6%	20.4%	64.1%
kNN ($k = 13$)	95.6%	20.4%	64.1%
kNN ($k = 15$)	96.6%	17.7%	63.5%
rpart	78.6%	50.0%	66.6%
SVM	90.4%	44.2%	71.0%

Таблица 4.6 – Результаты классификации предложений для типов признаков 1 (части речи) +2 (пары частей речи) +3 (типы связей) +6 (пары типов связей)

	Точность классификации на «обычных» (ненулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на эллиптических (нулевых) предложениях из тестовой выборки	Точность классификации на всех предложениях из тестовой выборки
boost	80.6%	54.3%	70.7%
bagging	82.8%	50.6%	70.7%
kNN ($k = 1$)	81.9%	41.7%	66.7%
kNN ($k = 3$)	81.9%	41.7%	66.7%
kNN ($k = 5$)	81.6%	41.3%	66.4%
kNN ($k = 7$)	92.2%	27.9%	67.3%
kNN ($k = 9$)	92.3%	28.3%	68.5%
kNN ($k = 11$)	94.4%	26.7%	68.9%
kNN ($k = 13$)	94.9%	25.1%	68.5%
kNN ($k = 15$)	95.8%	25.1%	69.2%
rpart	78.4%	47.8%	66.9%
SVM	88.5%	45.7%	72.4%

5 Материалы обеспечения экспериментов

В экспериментах использовался корпус SynTagRus [14].

Все инструменты, использованные в статье доступны по ссылке: <https://github.com/VovaMind/SynTagRusEllipsisResearch>.

В состав репозитория включены:

1) скрипты для настройки и использования системы MaltParser;

2) R-скрипты для фильтрации признаков и для классификации предложений;

3) Python-скрипты для подготовки данных. Формат данных в корпусе SynTagRus отличается от форматов, используемых в системе MaltParser.

И поэтому нужны скрипты для перевода из одного формата в другой. Также в репозитории есть скрипты для отделения нулевых предложений, подсчета статистики, извлечения признаков для предложений и так далее.

Заключение

В статье исследовалась проблема классификации предложений на эллиптические (нулевые) и «обычные». Эта классификация должна стать отправной точкой для разработки эффективных алгоритмов синтаксического анализа эллиптических предложений. Во время проведения исследования использовались различные наборы признаков и различные алгоритмы классификации.

В результате точность классификации оказалась выше 70%. Такой подход может быть использован для первичной классификации. К достоинствам подхода можно отнести эффективность и базирование на классических подходах к синтаксическому анализу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грудева, Е.В. Избыточность текста, редукция и эллипсис (на материале русского языка): дис. ... д-ра филол. наук: 10.02.19 / Е.В. Грудева. – СПб, 2009. – 448 с.: ил.
2. Ларькина, А.А. Эллипсис и лингвистическая компрессия в современном французском языке в теории языковой экономии // Современная лингвистика и межкультурная коммуникация: в 2 кн. / под общ. ред. С. В. Куприенко; SWorld. – Одесса: Куприенко С.В., 2012 – К. 1: Монография. – С. 21–33.
3. Мальковский, М.Г. Восстановление эллипсиса как задача автоматической обработки текстов / М.Г. Мальковский, В.С. Миняйлов, А.С. Старостин // Программные продукты и системы. – № 3 (107). – 2014. – С. 32–36.
4. *Non-projective Dependency Parsing using Spanning Tree Algorithms* / R. McDonald, F. Pereira, K. Ribarov, Jan Hajič // Human Language Technology and Empirical Methods in Natural Language Processing (HLT/EMNLP), Vancouver, B.C., Canada, 6–8 October 2005. – Mode of access: cite-seer.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.84.2066&rep=rep1&type=pdf. – Date of access: 16.02.2016.
5. *Eisner, J. Bilexical Grammars and a Cubic-time Probabilistic Parser* / J. Eisner // Proceedings of the 5th International Workshop on Parsing Technologies, Cambridge, MA, September, 1997. – Cambridge, 1997. – P. 54–65. – Mode of access: <ftp://ftp.cis.upenn.edu/pub/jeisner/papers/eisner.iwpt97.pdf>. – Date of access: 16.02.2016.
6. *Nivre, J. An Efficient Algorithm for Projective Dependency Parsing* / J. Nivre // Proceedings of the 8th International Workshop on Parsing Technologies (IWPT 03), Nancy, France, 23–25 April 2003. – P. 149–160.
7. *Nivre, J. Non-Projective Dependency Parsing in Expected Linear Time* / J. Nivre // In Proceedings of the Joint conference of the 47th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics and the 4th International Joint Conference on Natural Language Processing of the Asian Federation of Natural Language Processing, Singapore on 2–7 August 2009. – P. 351–359.
8. *Старостин, А.С. Модель синтаксиса в системе морфосинтаксического анализа “Treeton”* / А.С. Старостин, М.Г. Мальковский // Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии: Труды междунар. конф. «Диалог–2006», Бекасово, 31 мая – 4 июня. 2006 г. – М.: Изд-во РГГУ, 2006. – С. 481–492.
9. *Nivre, J. Parsing Indian Languages with MaltParser* / J. Nivre // In Proceedings of the ICON09 NLP Tools Contest: Indian Language Dependency Parsing, Hyderabad, India, 14–17 December 2009. – P. 12–18. – Mode of access: stp.ling.uu.se/~nivre/docs/malt_icon.pdf. – Date of access: 16.02.2016.
10. *Bohnet, B. A Transition-Based System for Joint Part-of-Speech Tagging and Labeled Non-Projective Dependency Parsing* / B. Bohnet, J. Nivre // In Proceedings of the 2012 Joint Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and Computational Natural Language Learning (EMNLP 2012), Jeju Island, Korea, 12–14 July 2012. – P. 1455–1465.
11. *Nivre, J. Parsing the SynTagRus treebank of Russian* / J. Nivre, I.M. Boguslavsky, L.L. Iomdin // In Proceedings of the 22nd International Conference on Computational Linguistics (Coling 2008). – P. 641–648.
12. *Миняйлов, В.С. Особенности эллиптических конструкций в русском языке* / В.С. Миняйлов // Мир науки и инноваций. – Выпуск 1 (1). Т. 3. – Иваново: Научный мир, 2015. – С. 27–31.
13. *Система автоматического синтаксического анализа MaltParser*. – Режим доступа: <http://www.maltparser.org/> – Дата доступа: 16.02.2016.
14. *Национальный корпус русского языка*. – Режим доступа: <http://www.ruscorpora.ru/> – Дата доступа: 16.02.2016.

Поступила в редакцию 03.06.16.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ДИАГНОСТИКИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КАЧЕСТВ ЧЕЛОВЕКА ПРИ ВЫБОРЕ ПРОФЕССИИ

А.Н. Осипенко¹, Н.Б. Осипенко², Ю.А. Слепенко²

¹Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

AUTOMATION OF DIAGNOSTIC POTENTIAL OF HUMAN QUALITIES WHEN CHOOSING A PROFESSION

A.N. Osipenko¹, N.B. Osipenko², Y.A. Slepianok²

¹P.O. Sukhoi Gomel State Technical University

²F. Scorina Gomel State University

Описана версия пилотного проекта автоматизированной экспресс-диагностики подходящих человеку сфер деятельности и профессий. В основу проекта положена концепция информационной среды, позволяющей аккумулировать в универсальной фрактальной матрице человека всевозможные его характеристики и результаты диагностического тестирования. Предложен алгоритм проецирования результатов теста в универсальную матрицу на примере описания потенциальных качеств человека с помощью квадрата Пифагора. Верификация компьютерной программы показала её работоспособность и перспективность.

Ключевые слова: сферы деятельности, профессии, алгоритм Пифагора.

The version of the pilot project of the automated Express-diagnostics of suitable human spheres of activity and professions is described. The draft is based on the concept of the information environment that can accumulate all sorts of characteristics and results of diagnostic testing in a universal fractal matrix of the person. The algorithm of projection of the test results in a generic matrix on the example of the description of the potential qualities of a person by using a square of Pythagoras. Verification of the computer program has demonstrated its performance and viability.

Keywords: sphere of activities, profession, algorithm of Pythagoras.

Введение

Несмотря на обилие антропометрических, социометрических, психологических и иных тестов, проблема выбора профессии по-прежнему остается злободневной. Одна из причин состоит в отсутствии универсального инструмента автоматизации синтеза разнообразных описаний человека. Каждый тест отражает какую-то одну плоскость проявления личности. Поэтому практически все диагностические системы страдают либо однобокостью (один-два теста в основе), либо мозаичностью и противоречивостью (когда результаты теста либо не синтезируются вообще, либо как-то оцифровываются и проецируются на одну-две номинальные или количественные шкалы путем средневзвешенного суммирования). В последнем случае обычно происходит значительное искажение и потеря информации из-за нарушения основного методологического принципа: уровень сложности диагностирующей и управляющей систем не может быть ниже уровня сложности управляемой системы [1]. Поэтому в качестве универсальной математической структуры для синтеза тестов должна использоваться не простая пара целевых шкал, а обобщенно-смысловая конструкция, достаточно полно представляющая все основные сферы деятельности человека и позволяющая учитывать многообразие их взаимосвязей.

В настоящей работе для целей профориентации применяется базовая составляющая этой конструкции в виде матрицы с 36-ю темами деятельности и набором логических схем их взаимосвязей, в частности, в виде классификации исходных элементов или классов элементов, а также правил смены лидерства деятельности класса в процессе жизни человека.

Предполагается, что каждый человек имеет свое уникальное распределение значимостей элементов матрицы с преобладанием в основном шести из них. Таким образом, здесь мы имеем дело не с чисто математическим или логико-синтаксическим построением, а в большей степени с логико-семантической конструкцией по глубине интуитивного обобщения и универсальности сродни математической теории [2]. Центральным звеном этого подхода является механизм интерпретации теории на конкретном человеке и получении соответствующей прогнозной модели его жизни, в частном случае, наиболее подходящих ему профессий. Под механизмом интерпретации далее будем понимать всю совокупность диагностических процедур вместе с соответствующими алгоритмами проекции их результатов в универсальную матрицу деятельности. Это первая фаза интерпретации – ориентационно-распознающая. Вторая фаза интерпретации

(моделирование прогнозных состояний) в этой статье не рассматривается.

В качестве примера диагностики человека на первых порах была выбрана наиболее доступная диагностика по дате рождения. Существует гипотеза, что дата рождения каким-то образом отражает генетический потенциал человека. Многие практикующие психологи с успехом используют алгоритм квадрата Пифагора [3] для диагностики характера человека и его склонностей, а на их основе – подходящих профессий. Несмотря на имеющийся в научных кругах скепсис по поводу связи паспортных данных, в частности, даты рождения с некоторыми потенциальными предрасположенностями человека, было решено проверить прогностические возможности этой гипотезы на конкретном статистическом материале.

1 Описание реализации проекта

С целью реализации пилотного проекта была собрана информация о датах рождения известных людей, состоявшихся в своей профессии. Применительно к задаче прогноза профессий в роли априорных знаний в разработанном инструментарии используются две таблицы систематизации (универсальная таблица тем деятельности человека и таблица сфер деятельности), а также таблица из более 350 профессий с указанием соответствующих наборов тем деятельности по каждой профессии. Первые две таблицы являются авторским обобщением ряда систематизаций видов человеческой деятельности, в частности, работы М.С. Кагана [4], дифференциальной психологии и типологии характеров К.Г. Юнга и Майерс-Бриггс в интерпретации П. Тайгер и Б. Тайгер [5], а также пирамиды потребностей человека А. Маслоу [6]. Результатом классификации видов деятельности явилась матрица из 35 рабочих ячеек (таблица 1.1) и одной управляющей ячейки [7]. Пять столбцов этой таблицы определяются пятью ипостасями (аспектами) человеческой деятельности: информационной (выбирающе-решающий аспект), креативной (структурирующе-функционирующий), энергетической (переживающе-эмоционирующий), коммуникативной (образно-мыслящий), синтезирующей (отражающе-деятельностный). Семь строк этой таблицы определяются семью уровнями (сферами) человеческой деятельности: актуальной реализации (природно-экологической среды), потенциального подсознания (рода), потенциального сознания (ментальной области коллективного сознания – ноосферы Земли), актуального подсознания (коллективного взаимодействия), актуального сознания (личности), потенциальной реализации, или мотивации (культурно-территориальных образований), духовного сопровождения личностного развития (духовных институтов человечества). Отметим также, что

32-м (из 36) ячейкам из этой таблицы соответствуют 32 типа характера человека, полученных с использованием шести дифференциаций: экстраверсия – интроверсия, сенсорика – интуиция, логика – этика, рациональность – иррациональность, лидер – ведомый, фокусировка на своих намерениях – фокусировка на намерениях других [7]. Имеется гипотеза, что этим 32 ячейкам соответствуют 64 кодона генетического кода человека.

В случае истинности гипотезы о связи даты рождения человека с его генетическим кодом и запрограммированных в нем схем сценариев жизни можно выдвинуть еще одну гипотезу о связи этих 36 ячеек с информацией, содержащейся в квадрате Пифагора. Исходя из этой гипотезы была получена априорная функция $Q(j,i)$, $j = \overline{1,7}, i = \overline{1,5}$, приведенная в таблице 1.1, задающая каждой ячейке (теме деятельности) соответствующий код в виде пары цифр квадрата Пифагора (они записаны над краткой расшифровкой смысла темы деятельности). Для управляющей 36-й темы $Q(8,1) = (1,8)$.

Этап 1. Построение обобщенной психоматрицы $\overline{KP}(i), i = \overline{1,23}$.

1.1. Вначале в качестве нумерологической диагностики осуществляется построение психоматрицы человека по классическому алгоритму квадрата Пифагора [3] в виде функции $KP(i), i = \overline{1,9}$, где $KP(i)$ – значение счетчика встречаемости цифры i в дате рождения и еще в трех производных от нее числах.

1.2. Затем строится расширенная психоматрица человека в виде 23-мерного вектора $KP(i), i = \overline{1,23}$. Пусть $x_1 = KP(1), \dots, x_9 = KP(9)$. К полученным девяти элементам вектора добавим ещё четырнадцать в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_1 + x_2 + x_3, & x_{11} &= x_4 + x_5 + x_6, \\ x_{12} &= x_7 + x_8 + x_9, & x_{13} &= x_1 + x_4 + x_7, \\ x_{14} &= x_4 + x_5 + x_8, & x_{15} &= x_3 + x_6 + x_9, \\ x_{16} &= x_1 + x_5 + x_9, & x_{17} &= x_3 + x_5 + x_7, \end{aligned}$$

x_{18} – количество нулей в рабочих числах алгоритма расчета квадрата,

$$\begin{aligned} x_{19} &= x_{12} + x_{14}, & x_{20} &= x_{10} + x_{15}, \\ x_{21} &= x_{11} + x_{13}, & x_{22} &= x_{10} + x_{13}, & x_{23} &= x_{16} + x_{17}. \end{aligned}$$

Итак обозначим $KP(i) = x_i, i = \overline{1,23}$.

1.3. И, наконец, выполняется построение обобщенной психоматрицы $\overline{KP}(i), i = \overline{1,23}$. Пусть родственников первого уровня близости (кто внес особый вклад в воспитание до 7 лет) – N_1 , а второго уровня (значимый вклад) – N_2 , т. е. у нас имеется $N_1 + N_2 + 1$ психоматриц $KP^j(i)$, $j = \overline{1, N_1 + N_2 + 1}$ для j -го человека по i -му элементу расширенной психоматрицы. Пусть

Таблица 1.1 – Смысл тем деятельности и соответствующие цифровые коды

	1	2	3	4	5
7	1,3 охранение	1,2 рождение и развитие	1,6 волеизъявление	1,4 обеспечение надеж- ности в отношениях	8,9 постижение богатства красоты
6	1,7 мотивация	5,8 творение	4,6 преобразование в труде	1,9 настроенность на благодать мира и природы	2,6 интеграция деятельностей
5	3,9 обдумывание	2,8 обучение	4,8 эмоциональное закрепление намерения	3,4 совет	7,8 осознание жизни силой интеллекта
4	6,9 информирование по новой ситуации	6,7 освоение перспек- тив внешней деятельности	3,6 поддержка себя и людей	4,5 выражение признательности	4,9 создание впечатле- ния от общения
3	3,8 самоосознание	2,3 порождение речи	3,5 заинтересованность жизнью	2,7 логичное мышление	5,9 отражение жизни в памяти
2	4,7 формирование мировосприятия в системе родного языка	6,8 обеспечение настроения гармо- ничного развития	2,5 интуитивное влечение друг к другу	2,4 принятие себя и близких	7,9 удовлетворение потребности непосредственного общения из глубины души
1	5,6 излучение про- светляющей кро- тости при встрече	1,5 эволюционное изменение жизне- деятельности	2,9 проявление состояния бодрости	3,7 циркуляция взаимодействий	5,7 синтез всех составляющих жизнедеятельности

$$UD(i, KP^j(i)), j = \overline{1, N_1 + N_1 + 1}$$

– матрица уровней допустимости, где элементы матрицы UD_i^j принимают четыре значения: 0 (если цифра имеет недопустимый уровень), 1 (если цифра имеет допустимый уровень), 2 (если цифра имеет доминирующий уровень) и 3 (если цифра имеет сверхдоминирующий уровень) для j -го человека по i -му элементу, значения которой задаются из эмпирических соображений. Так, для j -го человека по 1-му элементу UD_i^j принимает значения: 0 – для $KP^j(1) \leq 2$, 1 – для $KP^j(1) = 3$, 2 – для $KP^j(1) = 4$ или 5, 3 – для $KP^j(1) \geq 6$. Функция родственности $r(j)$ принимает три значения: 0 (для самого человека), 1 (для родственников первого уровня близости), 2 (для родственников второго уровня близости).

Зададим с помощью таблицы 1.2

$$\beta_i^j = H(r(j), UD(i, KP^j(i)))$$

– веса учета уровня родственности j -го человека для i -го элемента, используемые для построения обобщенной психоматрицы человека и построим итоговую обобщенную психоматрицу $\overline{KP}(i)$, $i = \overline{1, 23}$ на основании расширенных психоматриц всех родственников и самого человека

$$\overline{KP}^j(i), j = \overline{1, N_1 + N_1 + 1}$$

по формуле (1.1)

$$\overline{KP}(i) = \frac{\sum_{j=1}^{N_1+N_2+1} \beta_i^j \cdot KP^j(i)}{\sum_{j=1}^{N_1+N_2+1} \beta_i^j}, i = \overline{1, 23}. \quad (1.1)$$

Таблица 1.2 – Функция $H(r(j), UD(i, KP^j(i)))$

$r(j)$	$UD(i, KP^j(i))$			
	0	1	2	3
0	0,5	1	1	1
1	0	0,25	0,25	0,5
2	0	0,15	0,15	0,25

Этап 2. Выделение значимых и незначимых для человека тем деятельности, сфер деятельности и профессий.

Исходной информацией для этого этапа является таблица 1.1. Рассмотрим два варианта прогноза.

Вариант 2.А (опирается на использование $\overline{KP}(i), i = \overline{1, 23}$).

2.1. Определение вектора условий допуска, доминирования и сверхдоминирования для цифр $\overline{KP}(i)$ в соответствии с матрицей уровней допустимости $UD(i, KP^j(i)), j = \overline{1, N_1 + N_2 + 1}$, описанной в этапе 1.

2.2. Определение сверхдоминирующей и доминирующих цифр.

2.2.1. Упорядочиваем вектор $\overline{KP}(i)$ по убыванию: $\hat{K}\hat{P}(i)$. Пусть вектор $\hat{I}(i)$ – соответствующий вектор цифр для вектора $\hat{K}\hat{P}(i)$.

2.2.2 Берем цифру $\hat{I}(1)$ с максимальным значением $\hat{K}\hat{P}(1)$. Если $\hat{K}\hat{P}(1) \geq 1,5 \cdot \hat{K}\hat{P}(2)$, то тогда цифра $\hat{I}(1)$ считается сверхдоминирующей и выполняется п.2.2.3, иначе 2.2.4.

2.2.3. Берем цифру $\hat{I}(2)$. Компонуем группу доминирующих цифр согласно критерию $\hat{K}\hat{P}(i) \geq 0,75 \cdot \hat{K}\hat{P}(2), i = \overline{2,9}$. Пусть множества $ID = \{\hat{I}(2), \dots, \hat{I}(k)\}$, где k – последняя цифра, удовлетворяющая этому критерию. Тогда искомый набор ячеек будет формироваться парами цифр, образуемых из сверхдоминирующей цифры $\hat{I}(1)$ и одной из цифр множества ID . Всего получится k таких пар. Пусть $K = k$. Переход на 2.4.

2.2.4. Пусть множества $ID = \{\hat{I}(1), \dots, \hat{I}(k)\}$, где $\hat{I}(k)$ – последняя цифра в векторе \hat{I} , удовлетворяющая условию $\hat{K}\hat{P}(i) \geq 0,5 \cdot \hat{K}\hat{P}(1)$. Назовем эти цифры доминирующими и будем формировать искомый набор ячеек с помощью различных пар цифр множества ID .

2.3. По парам цифр (k_1, k_2) , полученным в 2.2.3 или в 2.2.4, определяем одну из 36-и тем ячейки с координатами

$$(j, i) = Q^{-1}(k_1, k_2), j \in \{1, \dots, 8\}, i \in \{1, \dots, 5\},$$

где $(k_1, k_2), k_1 \in \{1, \dots, 8\}, k_2 \in \{2, \dots, 9\}$ – номера строки

и столбца таблицы 1.3, в которой соответствие цифр квадрата Пифагора (КП) ячейкам деятельности сформированы на основе таблицы 1.1, т. е. таблица 1.3 является обратной таблице 1.1.

Таблица 1.3 – Значения-функции $Q^{-1}(k_1, k_2)$

Цифры КП	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7.2	7.1	7.4	1.2	7.3	6.1	3.6	6.4
2		3.2	2.4	2.3	6.5	3.4	5.2	1.3
3			5.4	3.3	4.3	1.4	3.1	5.1
4				4.4	6.3	2.1	5.3	4.5
5					1.1	1.5	6.2	3.5
6						4.2	2.2	4.1
7							5.5	2.5
8								7.5

2.4. Формирование весов сфер деятельности.

2.4.1 По темам (ячейкам), полученным в 2.3, определяем наименование соответствующей сферы деятельности с помощью таблицы 1.4.

2.4.2. Организуем цикл по сферам деятельности $S = \{s_i, i = \overline{1,18}\}$. Пусть s_i^1 и s_i^2 – пара ячеек по сфере деятельности s_i , где $s_i^1 = (n_i^1, m_i^1)$ и $s_i^2 = (n_i^2, m_i^2)$ – координаты ячеек s_i^1 и s_i^2 i -ой сферы деятельности таблицы 1.4.

Рассмотрим функцию $Q(n, m)$ из таблицы 1.1, предназначенную для определения пары цифр, кодирующих тему (ячейку) с координатами (n, m) : $(k_1, k_2) = Q(n, m)$.

2.4.3. Определяем четверку цифр, соответствующих сфере деятельности s_i :

$$(k_1^1, k_2^1, k_1^2, k_2^2) = Q(n_i^1, m_i^1), Q(n_i^2, m_i^2).$$

Таблица 1.4 – Сферы деятельности и соответствующие темы деятельности

№	Наименование сферы деятельности	Сокращенное наименование сферы деятельности	Соответствующая пара тем деятельности (ячеек)	
1	Аграрно-экологическая	Агр_эк	1.1	4.4
2	Проектирование полезных форм	Пр_пол_ф	3.2	2.1
3	Психолого-терапевтическая	Пс_тер	3.5	3.3
4	Духовно-религиозная	Д_р	7.2	7.4
5	Информационная сфера услуг	СМИ	6.4	2.5
6	Естественнонаучная	Ест_н	5.1	3.4
7	Культуры и искусств	К_ис	6.5	7.5
8	Медико-оздоровительная	М_озд	4.3	1.2
9	Общественно-научная	Общ_н	4.1	5.5
10	Педагогическая	Пед	3.1	5.2
11	Игровая сфера услуг	Игр_СУ	1.4	4.5
12	Социально-бытовая сфера услуг	С_быт_СУ	2.3	2.2
13	Техническое творчество	Тех_тв	4.2	5.3
14	Экономическая	Экон	7.1	1.5
15	Государственно-правовая	Г_пр	6.1	2.4
16	Материальное производство	Мат_пр	6.3	1.3
17	Идеологическая	Идеол	5.4	6.2
18	Философская	Фил	3.6	7.3

Заметим, что эти четыре цифры могут быть все разные, либо две из них могут совпадать.

2.4.4. Вычисляем вес B_i сферы деятельности s_i по формуле:

$$B_i = \overline{КП}(k_1^1) + \overline{КП}(k_2^1) + \overline{КП}(k_1^2) + \overline{КП}(k_2^2).$$

2.4.5. Упорядочиваем веса сфер деятельности s_i .

Таким образом, в варианте А выявляются наиболее значимые темы (ячейки) деятельности (п. 2.2.3) и сферы деятельности (п. 2.2.5).

2.5. Формирование вектора управленческих ролей. Для определения готовности человека к роли организатора и/или руководителя высшего звена используется эмпирическая информация о типовых ролях и вариантах их минимальных уровней допустимости для $UD(i, КП^j(i))$, $i = 19, 20, 23, 18$. В случае выполнения этого условия в вектор управленческих ролей $UPR(*)$ заносится флажок 1 на место, отвечающее выбранной роли: $UPR(3) = 1$ для организатора высшего звена; $UPR(4) = 1$ для руководителя высшего звена. Если $UPR(3) = 1$, то автоматически флажок организатора среднего звена $UPR(1) = 1$. Подразумевается, что организатор высшего звена справится и с обязанностями организатора среднего звена. Аналогично и с ролью руководителя: если $UPR(4) = 1$, то $UPR(2) = 1$. Если после этого $UPR(1) = 0$ или $UPR(2) = 0$, то проведем проверку человека на роль организатора и/или руководителя среднего звена, здесь проверка условия предполагает строгое равенство для $UD(i, КП^j(i))$, $i = 19, 20, 23, 18$ соответствующим пороговым значениям. Типовая роль исполнителя выбирается в остальных случаях.

2.6. Выбор профессий. Для выбора подходящих человеку профессий понадобятся четыре блока данных.

1. Набор полученных выше ячеек таблицы 1.1. Назовем их базовыми. Всего таких ячеек $(n^k.m^k)$ будет K .

2. Веса базовых ячеек $P_k, k = \overline{1, K}$.

3. Вектор обобщенной расширенной психоматрицы.

4. Таблица с характеристиками профессий – наборами определяющих их тем деятельности и значениями управленческих ролей (1 – человек предрасположен к роли, 0 – нет), фрагмент которой приведен в таблице 1.5.

Выбор профессий осуществляется путем прохода по всем строкам таблицы с характеристиками профессий. Если условия выбора выполняются, то текущая профессия вместе с её весом попадает в список профессий для итоговых рекомендаций.

Опишем алгоритм проверки текущей профессии. Пусть $\Omega = \{(r^q, s^q), q = \overline{1, Q}\}$ – набор ячеек текущей профессии; $W = \{(n^k.m^k), k = \overline{1, K}\}$ – набор базовых ячеек человека. Проведем отбраковку профессии за три шага.

Шаг 1. Отбраковка по пересечению ячеек профессии и базовых ячеек. Возможны следующие случаи для принятия решения об отбраковке:

- 1) $Q = 1$ и количество общих ячеек $|\Omega \cap W| = 0$;
- 2) $Q = 2$ и количество общих ячеек $|\Omega \cap W| \leq 1$;
- 3) $Q = 3$ и количество общих ячеек $|\Omega \cap W| \leq 1$;
- 4) $Q = 4$ и количество общих ячеек $|\Omega \cap W| \leq 1$;
- 5) $Q = 5$ и количество общих ячеек $|\Omega \cap W| \leq 2$;
- 6) $Q = 6$ и количество общих ячеек $|\Omega \cap W| \leq 2$.

Шаг 2. Отбраковка текущей профессии в случае, если хотя бы одна небазовая тема (ячейка) профессии, определенная в шаге 1, получена

$$(k_1^1, k_2^1, k_1^2, k_2^2) = Q(n_1^i.m_1^i), Q(n_2^i.m_2^i)$$

на основе пары цифр (s_1, s_2) (см. таблицу 1.1), где либо s_1 , либо s_2 не являются допустимыми: $UD(s_1, \overline{КП}(s_1)) = 0$ или $UD(s_2, \overline{КП}(s_2)) = 0$.

Шаг 3. Отбраковка по управляющим ролям. Текущая профессия бракуется, если в векторе управляющих ролей человека $UPR(i), i = \overline{1, 4}$ и соответствующий вектор из строки текущей профессии $UPR'(i), i = \overline{1, 4}$ в таблице 1.5 не удовлетворяют условию $UPR(i) \geq UPR'(i), i = \overline{1, 4}$.

После отбраковки, если текущая профессия «выдержала испытание», то следующим действием будет формирование её веса по формуле

Таблица 1.5 – Фрагмент соответствий профессий, тем деятельности и управленческих ролей

Сфера деятельности	Профессия	Темы деятельности				Управленческие $UPR'(i) =$			
						$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
3	Психотерапевт	3.5	3.3	5.4	3.6	1	1	1	1
4	Демограф	4.1	5.5	3.2	3.4	1	0	0	0
7	Актёр театра и кино	6.5	3.5	3.3	7.2	0	0	0	0
10	Преподаватель математики	3.1	5.2	3.2	6.5	1	1	0	0
15	Прокурор	6.1	2.4	3.2	3.5	1	0	0	0
18	Писатель, поэт	3.6	3.2	3.3	7.2	1	0	0	0

$$P^j = \sum P_k + \max\{P_k\} \cdot r,$$

где индекс k пробегает базовые темы (ячейки) из множества $\Omega \cap W$, а $r=2$, если $UPR'(4)=1$ или ($UPR'(3)=1$ и $UPR'(2)=1$), $r=\overline{1,5}$, если $UPR'(3)=1$ или ($UPR'(1)=1$ и $UPR'(2)=1$) и $r=1$, иначе.

В результате прохождения цикла по профессиям таблицы 1.5 формируются рекомендуемые для человека профессии вместе с соответствующими весами.

Опишем второй вариант второго этапа выделения значимых и незначимых для человека типов деятельности, сфер деятельности и профессий.

Вариант 2.Б (предполагает оценку весов тем деятельности, как с учетом $\overline{KП}(i)$, $i=\overline{1,23}$, так и без, например, на основании результатов психологического тестирования).

В этом варианте выделяются не только наиболее значимые, но и наименее значимые темы и сферы деятельности. Знание последних при выборе профессии помогает избежать тяжелых психологических последствий от занятий неинтересным делом.

2.1. Обработка тем деятельности (ячеек).

2.1.1. Формирование матрицы $SS(.,.)$ и вектора $S(.)$ нормированных весов тем деятельности. Пусть

$$KK(j,i) = \overline{KП}(k_1) + \overline{KП}(k_2), j = \overline{1,7}, i = \overline{1,5},$$

где $(k_1, k_2) = Q^{-1}(j, i)$; $KK(8,1) = \overline{KП}(1) + \overline{KП}(8)$;

$K_{\max} = \max \overline{KП}(i), i = \overline{1,9}$ – максимальное значение встречаемости для цифр обобщенной психоматрицы. Матрица $SS(.,.)$ формируется из матрицы $KK(.,.)$ путем нормировки:

$$SS(j,i) = KK(j,i) \cdot 2 / K_{\max} - 2, j = \overline{1,7}, i = \overline{1,5};$$

$$SS(8,1) = KK(8,1) \cdot 2 / K_{\max} - 2.$$

Сформируем из матрицы $SS(.,.)$ одномерный вектор $S(.)$:

$$S((j-1) \cdot 5 + i) = SS(j,i), j = \overline{1,7}, i = \overline{1,5};$$

$$S(36) = SS(8,1).$$

2.1.2. Сортировка весов тем деятельности. Пусть $Sorder(36)$ – отсортированный вектор $S(.)$ по убыванию, т. е.

$$Sorder(1) = \max\{S(.)\}, Sorder(36) = \min\{S(.)\}.$$

Пусть $Index(36)$ – соответствующие номера исходного вектора $S(.)$ в отсортированном векторе $Sorder(.)$.

Таблица 1.6 – Вывод полученных тем деятельности

№	Адрес ячейки	Тип деятельности	Статус ячейки	Вес ячейки
$k = \overline{1,36}$	(j, i)	из таблицы деятельности 1.1	$Status(l), l = Index(k)$	$Sorder(k)$

2.1.3. Выбор позитивных ячеек. Пусть $Status(l) = 0, l = \overline{1,36}$ – вектор статусов тем деятельности. Для значимых ячеек статус равен +1, для незначимых – -1, для нейтральных – 0. Определим

$$Status(Index(k)) = Status(Index(k)) + 1, k = \overline{1,6}.$$

Если $Sorder(6) < 0,5 \cdot Sorder(5)$, то

$$Status(Index(6)) = 0$$

и переход на 2.1.4, иначе пока $k \leq 9$ или

$$(Sorder(k+1) \geq 0,99 \cdot Sorder(k)) \text{ и}$$

$$(Sorder(k+1) \geq 0,85 \cdot Sorder(k)),$$

выполним: $k = k + 1$ и

$$Status(Index(k)) = Status(Index(k)) + 1.$$

2.1.4. Выбор негативных ячеек. Пусть

$$Status(Index(37-k)) = Status(Index(37-k)) - 1,$$

$$k = \overline{1,6}.$$

Если $(Sorder(31) > 0,5 \cdot Sorder(32))$,

то $Status(Index(31)) = 0$ и переход на 2.1.5, иначе пока $k \leq 9$ или

$$(Sorder(37-k-1) \leq 0,99 \cdot Sorder(37-k)) \text{ и}$$

$$(Sorder(37-k-1) \leq 0,85 \cdot Sorder(37-k)),$$

выполним: $k = k + 1$ и

$$Status(Index(37-k)) = Status(Index(37-k)) - 1.$$

2.1.5. Печать полученных результатов (двумерного адреса ячейки, наименования типа деятельности, её статуса и веса для всех ячеек) производится по шаблону, приведенному в таблице 1.6: $j=(l \text{ div } 5)+1$, где div – целочисленное деление, $i = l - 5 \cdot (j - 1)$.

При этом строки ячеек подсвечиваются в зависимости от ее статуса: +1 – светлозеленым, 0 – светложелтым, -1 – розовым.

2.2. Обработка сфер деятельности.

2.2.1. Расчет нормированных весов сфер деятельности. Пусть $ActCells(l,1)$ и $ActCells(l,2)$ – номера строки и столбца первой ячейки l -й сферы деятельности; $ActCells(l,3)$ и $ActCells(l,4)$ – номера строки и столбца второй ячейки l -й сферы деятельности из таблицы 1.1. Пусть

$$SD(l) = SS(ActCells(l,1)ActCells(l,2)) +$$

$$+SS(ActCells(l,3)ActCells(l,4)), l = \overline{1,8}$$

– вектор нормированных весов сфер деятельности.

2.2.2. Сортировка весов сфер деятельности.

Пусть $SDorder(18)$ – отсортированный вектор $SD(.)$ по убыванию, т. е.

$$SDorder(l) = \max\{SD(.)\},$$

$$SDorder(18) = \min\{SD(.)\}.$$

Таблица 1.7 – Вывод полученных сфер деятельности

№	Адрес первой ячейки	Статус первой ячейки	Адрес второй ячейки	Статус второй ячейки	Наименование сферы деятельности	Статус сферы деятельности	Вес сферы деятельности
$k = \overline{1,18}$	(j_1, i_1)	$StatusSD((j_1 - 1) \cdot 5 + i_1)$	(j_2, i_2)	$StatusSD((j_2 - 1) \cdot 5 + i_2)$	из таблицы 1.4	$StatusSD(l)$ $l = IndexSD(k)$	$SDorder(k)$

Пусть $Index(18)$ – соответствующие номера исходного вектора $SD(\cdot)$ в отсортированном векторе $SDorder(\cdot)$.

2.2.3. Выбор позитивных сфер деятельности. Пусть $StatusSD(l) = 0, l = \overline{1,18}$ – вектор статусов сфер деятельности. Определим

$$StatusSD(IndexSD(k)) =$$

$$= StatusSD(IndexSD(k)) + 1, k = \overline{1,3}$$

Если $SDorder(3) < 0,5 \cdot SDorder(2)$, то

$$StatusSD(IndexSD(3)) = 0$$

и переход на 2.2.4, иначе пока $k \leq 4$ или

$$(SDorder(k+1) \geq 0,99 \cdot SDorder(k))$$
 и

$$(SDorder(k+1) \geq 0,85 \cdot SDorder(k))$$

выполним: $k = k + 1$ и

$$StatusSD(IndexSD(k)) = StatusSD(IndexSD(k)) + 1.$$

2.2.4. Выбор негативных сфер деятельности. Пусть

$$StatusSD(IndexSD(19-k)) =$$

$$= StatusSD(IndexSD(19-k)) - 1, k = \overline{1,3}.$$

Если $SDorder(16) > 0,5 \cdot SDorder(17)$, то

$$StatusSD(IndexSD(16)) = 0$$

и переход на 2.2.5, иначе пока $k \leq 4$ или

$$(SDorder(19-k-1) \leq 0,99 \cdot SDorder(19-k))$$
 и

$$(SDorder(19-k-1) \leq 0,85 \cdot SDorder(19-k)),$$

выполним: $k = k + 1$ и

$$StatusSD(IndexSD(19-k)) =$$

$$= StatusSD(IndexSD(19-k)) - 1.$$

2.2.5. Печать полученных результатов (адресов двух ячеек, наименования, статуса и веса для всех сфер деятельности) производится по шаблону, приведенному в таблице 1.7:

$$j_1 = ActCells(l,1); i_1 = ActCells(l,2);$$

$$j_2 = ActCells(l,3); i_2 = ActCells(l,4);$$

$$l = IndexSD(k).$$

При этом строки сфер деятельности подсвечиваются в зависимости от ее статуса: +1 – светлозеленым, 0 – светложелтым, -1 – розовым.

2.3. Обработка профессий. Для выбора профессий понадобятся вектора $S(l), l = \overline{1,36}$ и $Status(l), l = \overline{1,36}$, полученные в п.2.1, а также таблица профессий 1.5. Пусть $VesPr(\cdot)$ – вектор

формируемых весов профессий с максимальной длиной, равной количеству профессий в таблице 1.5.

2.3.1. Счетчик формируемых профессий $ip = 0$. Цикл по списку профессий таблицы 1.5.

Пусть $\Omega = \{(r^q, s^q), q = \overline{1, Q}\}$ – набор ячеек текущей профессии $SumQ = 0; VesQ = 0$.

2.3.1.1. Цикл по ячейкам текущей профессии $q = \overline{1, Q}; t = (r^q - 1) \cdot 5 + s^q$. Если $Status(t) < 0$, то на продолжение цикла 2.3.1 по профессиям, иначе $SumQ = SumQ + Status(t);$

$$VesQ = VesQ + S(t).$$

Продолжение цикла 2.3.1.1.

Если $SumQ / Q < 2 / Q$, то на продолжение цикла 2.3.1 по профессиям, иначе $ip = ip + 1$. $VesPr(\cdot) = VesQ$.

Продолжение цикла 2.3.1.

2.3.2. Пусть количество профессий для тестируемого человека $Kpr = ip$. Сортировка профессий по весу $VesPr(\cdot)$. Пусть $VesPrOrder(\cdot)$ – отсортированный вектор весов и $IndexPr(\cdot)$ – соответствующий вектор индексов.

2.3.3. Выбор сокращенного набора профессий. Если $Kpr < 7$, то $k = Kpr$ и переход на печать отсортированных профессий, иначе $k = 5$. Пока $k < 10$ и $(k + 2) < Kpr$ и

$$((VesPrOrder(k + 2)) > 0,5 \cdot VesPrOrder(k))$$

$$\text{или } (VesPrOrder(k + 1)) > 0,6 \cdot VesPrOrder(k))$$

делаем $k = k + 1$, иначе пока $k < Kpr$ и

$$(VesPrOrder(k + 1)) > 0,99 \cdot VesPrOrder(k)$$

делаем $k = k + 1$, иначе $k = k + 1$.

2.3.4. Печать полученных результатов (профессий и соответствующих весов) производится по шаблону, приведенному в таблице 1.8.

Таблица 1.8 – Вывод полученных профессий

№	Наименование профессии	Вес ячейки
$ik = \overline{1, k}$	l -е наименование из таблицы профессий 1.5, $l = IndexPr(ik)$	$VesPrOrder(ik)$

2 Верификация прогноза

С целью апробации и верификации правдоподобности прогноза, полученного с помощью

разработанного приложения, доступного в Интернете по ссылке <http://psychoanalysis.esy.es/web/site/kvadrat>, была собрана информация о датах рождения известных личностей. Результаты прогноза (сокращения названий сфер деятельности взяты из таблицы 1.4) для вариантов (вид А и Б) второго этапа без учета родственников в формуле расчета обобщенного квадрата Пифагора приведены в таблице 2.1., а с учетом таблицы 2.2.

Из таблицы 2.1 можно сделать следующие выводы.

Реальный род занятий практически по всем членам выборки хорошо вписывается в лидирующие прогнозные сферы деятельности, как в варианте А, так и в варианте Б.

В большинстве случаев в списках прогнозных профессий обоих вариантов имеется профессия, близкая к фактической.

Таблица 2.1 – Прогноз сфер деятельности и профессий без учета родственников

ФИО (дата рождения)	Профессия	Вид	Прогноз (КП без учета родственников)	
			сфер деятельности (относительный вес)	профессий (относительный вес)
Пушкин А.С. (26.05.1799)	Поэт, писатель	А	Пс_тер (8.8); Ест_н (7.8); С_быт_СУ(6); Мат_пр (5.8); Пр_пол_ф (5)	Писатель, поэт (39.2); директор по маркетингу (38.8); преподаватель политологии (33.2); прокурор (33.2); медиа-байер (33.2); преподаватель математики (33.2)
		Б	Пс_тер (2.29); Ест_н (1.57); СМИ (1.43); К_ис (0.86)	Директор по маркетингу (4.4); маркетолог ИТ (4.4); прокурор (3.9); web-дизайнер (3.6); учитель начальных классов (3.1); дизайнер по рекламе (3.1); сценарист (3.1)
Достоевский Ф.М. (30.10.1821)	Писатель	А	Фил (12); Д_р (11); Г_пр (7); Экон (7)	Психотерапевт (13)
		Б	Фил (0.8); Д_р (0.4)	Этнограф (0.4)
Чехов А.П. (17.01.1860)	Писатель	А	Д_р (9); Г_пр (8); К_ис (5.8)	Социальный работник (24); стилист (10)
		Б	Д_р (2); Г_пр (1.3) Фил (0.7); Мат_пр (0.5); Пр_пол_ф (0.1)	Социальный работник (2.67); регент (2); стилист (1.3); преподаватель по животноводству (1.3); преподаватель агроэкономики (1.3)
Юнг К.Г. (26.07.1875)	Психотерапевт	А	С_быт_СУ (7); Ест_н (6.8); Пс_тер (6.8); Пр_пол_ф (6); М_озд (6); Пед (6) Общ_н (5.8); К_ис (5.8)	Лингвист (17.8); провизор (17.8); культуролог (16.6); девелопер (15.8); контент-менеджер (15.8); правовед (15.6)
		Б	С_быт_СУ (3); Ест_н (2.8); Пс_тер (2.8); М_озд (2); Пед (2); Пр_пол_ф (2); Экон (2); К_ис (1.8); Общ_н (1.8)	Демограф (6); следователь (6); специалист декоративно-прикладного искусства (6); аниматор (6); палеонтолог (4); логопед (4); дизайнер по рекламе (4); военнослужащий ВКС (4); имиджмейкер (4); редактор СМИ (4); журналист (4); гид (4); кинолог (4); математик-теоретик (4)
Фрейд З. (6.05.1856)	Психоаналитик	А	Фил (9); М_озд (8)	Эколог (1.3)
		Б	Фил (2); М_озд (1.3); Агр_эк (0.7); Д_р (0.67)	Эколог (1.3); дирижер, концертмейстер (1.2); микробиолог (0.7); геофизик (0.7)
Фром Э. (23.03.1900)	Психолог	А	Д_р (6); Пс_тер (5.8); СМИ (5.6); М_озд (5); Пед (5); Экон (5); Идеол (5); Фил (5)	Директор по маркетингу (15.4); социопсихолог (14.8); писатель, поэт (14.6); планировщик социальной среды (13.8); актёр театра и кино (13.4)
		Б	Д_р (2); Пс_тер (1.8); СМИ (1.6); Фил (1); Пед (1); Идеол (1); М_озд (1); Экон (1)	Психотерапевт (3); писатель, поэт (3); фармацевт (2.8); менеджер по рекламе (2.8); дирижер, концертмейстер (2.8); медиа-байер (2.8)

Таблица 2.2 – Прогноз сфер деятельности и профессий с учетом и без учета родственников

ФИО (дата рождения)	Профессия	Вид	Прогноз (КП с учетом родственников)		Прогноз (КП без учета родственников)	
			сфер деятельности (относительный вес)	профессий (относительный вес)	сфер деятельности (относительный вес)	профессий (относительный вес)
Захарова Александра Марковна (17.06.1962) (13.10.1933 – отец; 10.05.1932 – мать)	Артистка	А	Д_р (7.5); Экон (7.39); Пр_пол_ф (5.81)	Демограф (34.1); инженер-испытатель (25.0); специалист МВД (10.3); инспектор (10.28); делопроизводитель (10.3); врач окулист (10.3); переводчик (10.0)	М_озд (7); Пр_пол_ф (6)	Логопед (23.6)
		Б	М_озд (1.1); Д_р (0.8); Экон (0.7); Ест_н (0.5); Фил (0.4)	Писатель, поэт (2.8); инженер-испытатель (2.3); логопед (2.1); фармацевт (2.1); военнослужащий ВКС (1.8)	М_озд (0.7); Ест_н (0.5); Пр_пол_ф (0); Пс_тер (-0.1)	Логопед (2.7); редактор СМИ (2); преподаватель математики (2); воспитатель детского сада (2); военнослужащий ВКС (2); гид (2)

По некоторым личностям (К. Юнгу, Э. Фрому, А.С. Пушкину) получился внушительный прогнозный список, демонстрирующий разносторонний потенциал этих людей. Подобные результаты были также получены по реализовавшимся детям знаменитых писателей и артистов. В связи с этим можно предположить, что раскрытие разнопланового потенциала ребенка в немалой степени зависит от его близких. Прогнозные данные позволяют судить о широте или узости профессиональных интересов. Наиболее наглядно это видно при сравнении прогнозов для К. Юнга и З. Фрейда.

Несмотря на то, что прогноз без учета родственников вполне адекватен, в большинстве случаев учет родственников уточняет картину профессиональных предпочтений человека, в частности, это видно для А. Захаровой (таблица 2.2).

Предполагая первоначально выбрать один из четырех вариантов прогноза, авторы остановились на всей их совокупности, так как они дополняют друг друга и вместе более полно отражают общую картину склонностей человека.

Полезной для профориентации также может оказаться выдаваемая в таблицах 1.6 и 1.7 информация о потенциально незначимых сферах и темах деятельности.

Заключение

Предварительная апробация предложенного алгоритма и программы на конкретном материале показала его работоспособность и реалистичность диагностики. В целом результаты верификации выбранного метода автоматизации диагностики потенциальных качеств человека позволяют надеяться, что полученный прогноз не

просто предоставит набор наиболее и наименее предпочтительных профессий и сфер деятельности, но и подведет человека к размышлениям о своей жизненной миссии, в частности, за счет каких талантов он сможет эту миссию реализовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щедровицкий, Г.П. Принципы и общая схема методологической организации системно-структурных исследований и разработок / Г.П. Щедровицкий // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1981: сб. науч. ст. – М.: Наука, 1981. – С. 193–227.
2. Шрейдер, Ю.А. Системы и модели / Ю.А. Шрейдер, А.А. Шаров. – М.: Радио и связь, 1982. – 152 с.
3. Александров, А.Ф. Даты и судьбы: большая книга нумерологии / А.Ф. Александров. – 2006. – М.: Рипол Классик. – 1088 с.
4. Каган, М.С. Человеческая деятельность (опыт системного анализа) / М.С. Каган. – М.: Политиздат, 1974. – 254 с.
5. Тайгер, П. Делай то, для чего ты рожден / П. Тайгер, Б. Тайгер. – М.: АСТ, 2005. – 688 с.
6. Маслоу, А. Мотивация и личность / А. Маслоу. – СПб.: Евразия, 1999. – 316 с.
7. Осипенко, А.Н. Метод генерации гипотез для выявления факторов ранней смертности населения / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко // Материалы юбилейной научно-практической конференции, посвященной 85-летию ГГУ им. Ф.Скорины (17 июня 2015 г.). – Ч. 4. – Гомель, 2015. – С. 145–149.

Поступила в редакцию 16.05.16.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).