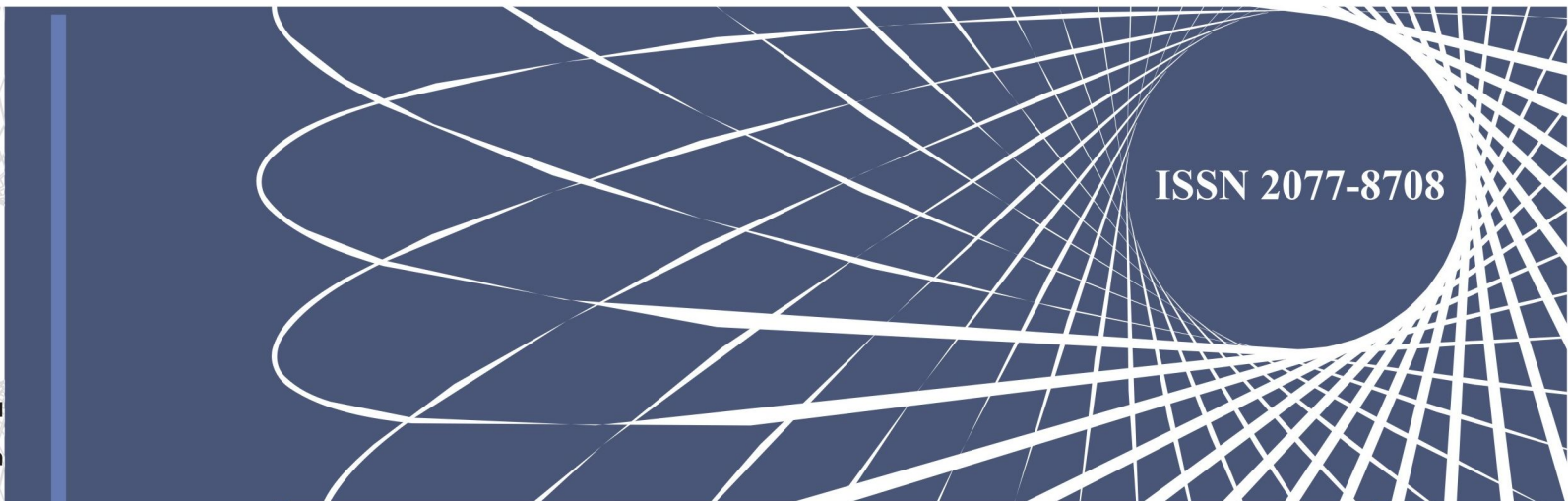




ISSN 2077-8708



**Проблемы  
физики,  
математики  
и техники**

**№1 (26) 2016**

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ  
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,  
МАТЕМАТИКИ  
И ТЕХНИКИ»**

*Главный редактор:*  
**А.В. Рогачев** (Беларусь)

*Заместитель главного редактора:*  
**О.М. Демиденко** (Беларусь)

*Редакционная коллегия:*

**В.Е. Агабеков** (Беларусь)  
**П.Н. Богданович** (Беларусь)  
**А.Ф. Васильев** (Беларусь)  
**Го Вэньбинь** (Китай)  
**С.С. Гиргель** (Беларусь)  
**В.И. Громак** (Беларусь)  
**А.Н. Дудин** (Беларусь)  
**В.А. Еровенко** (Беларусь)  
**А.И. Калинин** (Беларусь)  
**Матс Ларссон** (Швеция)  
**В.Д. Мазуров** (Россия)  
**Н.В. Максименко** (Беларусь)  
**Ю.В. Малинковский** (Беларусь)  
**А.Р. Миротин** (Беларусь)  
**В.В. Можаровский** (Беларусь)  
**В.С. Монахов** (Беларусь)  
**Н.К. Мышкин** (Беларусь)  
**Ю.М. Плескачевский** (Беларусь)  
**М.В. Селькин** (Беларусь)  
**И.В. Семченко** (Беларусь)  
**А.Н. Сердюков** (Беларусь)  
**А. Сихвола** (Финляндия)  
**А.Н. Скиба** (Беларусь)  
**С.А. Третьяков** (Финляндия)

*Ответственный секретарь:*  
**Е.А. Ружицкая** (Беларусь)

*Адрес редакции:*

Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины  
ул. Советская, 104,  
246019, г. Гомель, Беларусь  
Тел. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL  
JOURNAL  
«PROBLEMS OF PHYSICS,  
MATHEMATICS  
AND TECHNICS»**

*Editor-in-Chief:*  
**A.V. Rogachev** (Belarus)

*Deputy Editor-in-Chief:*  
**O.M. Demidenko** (Belarus)

*Editorial board:*

**V.E. Agabekov** (Belarus)  
**P.N. Bogdanovich** (Belarus)  
**A.F. Vasilyev** (Belarus)  
**Guo Wenbin** (China)  
**S.S. Girgel** (Belarus)  
**V.I. Gromak** (Belarus)  
**A.N. Dudin** (Belarus)  
**V.A. Erovenko** (Belarus)  
**A.I. Kalinin** (Belarus)  
**Mats Larsson** (Sweden)  
**V.D. Mazurov** (Russia)  
**N.V. Maksimenko** (Belarus)  
**Yu.V. Malinkovsky** (Belarus)  
**A.R. Mirotin** (Belarus)  
**V.V. Mozharovsky** (Belarus)  
**V.S. Monakhov** (Belarus)  
**N.K. Myshkin** (Belarus)  
**Yu.M. Pleskachevsky** (Belarus)  
**M.V. Selkin** (Belarus)  
**I.V. Semchenko** (Belarus)  
**A.N. Serdyukov** (Belarus)  
**A. Sihvola** (Finland)  
**A.N. Skiba** (Belarus)  
**S.A. Tretyakov** (Finland)

*Executive Secretary:*  
**E.A. Ruzhitskaya** (Belarus)

*Edition address:*

F. Scorina Gomel State University  
Sovetskaya Str., 104,  
246019, Gomel, Republic of Belarus  
Ph. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
website: <http://pfmt.gsu.by>

# ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

## НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (26) 2016

### СОДЕРЖАНИЕ

#### ФИЗИКА

- Андреев В.В.** Решение уравнения Шредингера с гиперсингулярным ядром в импульсном пространстве ..... 7
- Белый В.Н., Кулак Г.В., Крох Г.В., Ропот П.И., Шакин О.В.** Влияние светоиндуцированных решеток на акустооптическое взаимодействие бесселевых световых пучков в гиротропных средах ..... 11
- Гиргель С.С.** Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация ..... 17
- Гольдаде В.А., Цветкова Е.А., Шаламов И.В.** Моделирование процессов поляризации-деполяризации жидкодисперсных систем ..... 22
- Есман А.К., Потачиц В.А., Зыков Г.Л.** Повышение энергоэффективности тонкопленочных солнечных элементов на основе соединения  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  ..... 30
- Кондратенко В.И.** Отражение электромагнитной волны от металло-диэлектрической структуры ..... 34
- Руденков А.С., Рогачев А.В., Филиппов Д.Г., Федосенко Н.Н., Сянь Хун Джанг.** Влияние ионного азотирования на фазовый состав, структуру и свойства углеродных покрытий ..... 37

#### МАТЕМАТИКА

- Мегралиев Я.Т., Искендерова Г.Н.** Обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода ..... 42
- Пецевич В.М., Шевченя Д.Н.** Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка ..... 48
- Скиба А.Н.** О  $\sigma$ -свойствах конечных групп III ..... 52
- Сохор И.Л.** О конечных  $\pi$ -разрешимых группах без широких подгрупп ..... 63
- Тютянов В.Н., Тихоненко Т.В.** Конечные группы с  $\mathbb{P}$ -субнормальными подгруппами ..... 68
- Якубович О.В., Дудовская Ю.Е.** Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания сигналов ..... 71

#### ИНФОРМАТИКА

- Лановой А.Т.** Оптимизация управления транспортной системой региона ..... 75
- Сморозин В.С., Клименко А.В., Сукач Е.И., Шимчик О.А.** Реструктуризация имитационных моделей управляемых систем при автоматизации проектного моделирования ..... 80
- Соколов А.В., Жданов О.Н., Барабанов Н.А.** Генератор псевдослучайных ключевых последовательностей на основе тройственных наборов бент-функций ..... 85

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь  
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

**Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):**  
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**  
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

---

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*  
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*  
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 03.03.16. Формат 60×84  $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная. Гарнитура Times.  
Усл. печ. л. 11,2. Уч.-изд. л. 9,7. Тираж 100 экз. Заказ № 168.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.  
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013  
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

---

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины», 2016  
© Проблемы физики, математики и техники, 2016  
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2016

# PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

*Published since December, 2009*

There are 4 times a year

№ 1 (26) 2016

## CONTENTS

### PHYSICS

<b>Andreev V.V.</b> On solving the Schrodinger equation with hypersingular kernel in momentum space .....	7
<b>Belyi V.N., Kulak G.V., Krokh G.V., Ropot P.I., Shakin O.V.</b> The influences of light-induced gratings on the acoustooptical interaction of Bessel light beams in the gyrotropic cubic crystals .....	11
<b>Girgel S.S.</b> Polarizing and power properties of vector Gaussian-like beams. I. The homogeneous polarization .....	17
<b>Goldade V.A., Tsvetkova E.A., Shalamov I.V.</b> Simulation of polarization-depolarization processes in liquid-disperse systems .....	22
<b>Esman A.K., Potachits V.A., Zykov G.L.</b> Energy efficiency of thin-film solar cell on the basis of the $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$ .....	30
<b>Kondratenko V.I.</b> Reflection of electromagnetic waves from the metal-dielectric structures .....	34
<b>Rudenko A.S., Rogachev A.V., Piliptsov D.G., Fedosenko N.N., Xiaohong Jiang.</b> Influence of ion nitriding on the phase composition, structure and properties of carbon coatings .....	37

### MATHEMATICS

<b>Mehraliyev Y.T., Isgenderova Q.N.</b> Inverse boundary value problem for a second-order hyperbolic equation with integral condition of the first kind .....	42
<b>Petsevich V.M., Shauchenia D.N.</b> Painleve's property for differential system of the second order .....	48
<b>Skiba A.N.</b> On $\sigma$ -properties of finite groups III .....	52
<b>Sokhor I.L.</b> On finite $\pi$ -soluble groups with no wide subgroups .....	63
<b>Tyutyaynov V.N., Tihonenko T.V.</b> Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups .....	68
<b>Yakubovich O.V., Dudovskaya Y.E.</b> Multimode queueing network with random staying time of signals .....	71

### INFORMATION SCIENCE

<b>Lanovyy A.T.</b> Optimization of the region's transport system management .....	75
<b>Smorodin V.S., Klimenko A.V., Sukach E.I., Shimchik O.A.</b> Restructuring of simulation models of controlled systems in automation of project simulation .....	80
<b>Sokolov A.V., Zhdanov O.N., Barabanov N.A.</b> Pseudo-random key sequence generator based on triple sets of bent-functions .....	85

***Founder – Francisk Scorina Gomel State University***

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus  
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

***The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):***

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 539.12

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.В. Андреев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## ON SOLVING THE SCHRÖDINGER EQUATION WITH HYPERSINGULAR KERNEL IN MOMENTUM SPACE

V.V. Andreev

F. Scorina Gomel State University

Показано, что уравнение Шредингера в импульсном представлении для линейного запирающего потенциала для состояний с нулевым орбитальным моментом может быть решено с высокой точностью (намного превосходящей другие методики) с помощью специальной квадратурной формулы для гиперсингулярного интеграла.

**Ключевые слова:** уравнение Шредингера, импульсное пространство, гиперсингулярный интеграл.

The paper is obtained that the Schrödinger equation in the momentum representation for a linear confining potential for states with zero orbital angular momentum can be solved with high accuracy (far superior to other methods) using the special quadrature formulas for hypersingular integral.

**Keywords:** Schrodinger equation, momentum space, hypersingular integral.

### Introduction

Advantages of using the momentum representation for solutions of physical problems (equations for bound states, scattering problems et al.) has long attracted the attention of researchers. In momentum space, in contrast to coordinate, there is no need for additional constructions related to the definition of the relativistic kinetic energy operator

$$T(k) = \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}.$$

It is also relatively easy to obtain the relativistic interaction potential with the appropriate amplitude of elastic scattering of particles composing the system, because the calculation is carried out initially in the momentum representation, which here arises naturally.

However, the problem is complicated by the use of the momentum space the fact that even the simplest form of interaction potentials in the momentum representation leads to the integrals with singularities. Therefore, the accuracy of solutions for a variety of tasks (Coulomb, Cornell potentials) to taking into account the current experimental data ( $10^{-13} \div 10^{-14}$  for hydrogen energy) was relatively low ( $10^{-4} \div 10^{-5}$ ) [1], [2]. In this regard, the need to develop methods that would be relatively simple to use and give the results for an experiment with the required accuracy.

### 1 Methods of solution of integral equations

After partial decomposition the Schrödinger equation in the momentum space for centrally symmetric potentials, takes the form:

$$\frac{k^2}{2\mu} \varphi_\ell(k) + \int_0^\infty V_\ell(k, k') \varphi_\ell(k') k'^2 dk' = E \varphi_\ell(k), \quad (1.1)$$

where  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  is the reduced mass;  $m_1, m_2$  are mass of the constituents of a bound system;  $\mathbf{k}$  is the momentum of the relative motion ( $|\mathbf{k}| = k$ );  $\varphi_\ell(k)$  is the radial part of the Fourier transform of the wave function in the coordinate representation;  $V_\ell(k, k')$  is the operator  $\ell$ -th component of the partial decomposition of the interaction potential;  $E$  is binding energy.

However, the description of bound states in the momentum representation is complicated by the necessity of solving the integral equation (1.1), containing singular terms. So for a linear confining potential  $V(r) = \sigma r$  we have that

$$V_\ell(k, k') = \frac{\sigma}{\pi(kk')^2} Q'_\ell \frac{k^2 + k'^2}{2kk'}, \quad (1.2)$$

where function  $Q_\ell(y)$  is Legendre polynomial of the 2nd kind. Since the function  $Q'_\ell$  hypersingular if  $k = k'$ , then the potential  $V_\ell(k, k')$  is also hypersingular. Standard methods of numerical solution of the equation (1.1) with the potential (1.2) gives relatively low accuracy of [1], [2]. The numerical solution of the integral equation (1.1) can be reduced to a problem on the eigenvalues, which arises when using quadrature formulas for the integrals in the equation.

As a result, the integral equation of the form (1.1) can be reduced to the problem

$$\sum_{j=1}^N H(k_i, k_j) \varphi(k_j) = \sum_{j=1}^N H_{ij} \varphi(k_j) = E \varphi(k_i), \quad (1.3)$$

where to obtain the eigenvalues and vectors need to know the elements of  $H_{ij}$ . And if  $i \neq j$ , the problem of calculating the elements  $H_{ij}$  for a linear confining potential is not complex, then the  $i = j$  ( $k = k'$ ) directly to do this is not possible, due to the presence of singularities.

### 2 Quadrature formulas for singular integrals

Let us to receive quadrature formula for the integral

$$I(z) = \int_{-1}^1 F(t) w(t) g(t, z) dt, \quad (2.1)$$

where  $g(t, z)$  is function is singular at  $t = z$ . The functions  $F(t)$  and  $w(t)$  is part of the kernel that does not contain the singularities for all  $-1 < t, z < 1$ .

For this the function  $F(t)$  in (2.1) with the help of interpolation polynomial

$$G_i(t) = \frac{P_N^{(\alpha, \beta)}(t)}{(t - \xi_{i,N}) P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N})} \quad (2.2)$$

replaced the expansion

$$F(t) \approx \sum_{i=1}^N G_i(t) F(\xi_{i,N}), \quad (2.3)$$

where  $\xi_{i,N}$  are the roots of the Jacobi polynomial

$$P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.4)$$

Substituting the expansion (2.3) in a ratio of  $I(z)$  we find that the quadrature formula for the integral takes the form

$$I(z) \approx \sum_{i=1}^N \omega_i(z) F(\xi_{i,N}), \quad (2.5)$$

where

$$\omega_i(z) = \frac{1}{P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N})} \int_{-1}^1 g(t, z) w(t) \frac{P_N^{(\alpha, \beta)}(t)}{t - \xi_{i,N}} dt. \quad (2.6)$$

Thus, the calculation of (2.6) will help you find the weight coefficients for the quadrature formula (2.1), the singular values.

### 3 The analytical form of weighting factors

Let us consider the possibility of analytical calculation of the weighting factors for different types of singularities that is, depending on the function  $g(t, z)$ .

#### 3.1 The singular Cauchy integral

The most famous option of (2.1) in the literature is the Cauchy integral

$$g(t, z) = \frac{1}{t - z}, \quad -1 < z < 1.$$

For this case, there is a large number of works (see for examples [3]–[5]), which offered various

options for quadrature formulas. In this case, you can get a formula for the weighting factors (2.6) direct calculation of the integral

$$\omega_i^C(z) = \int_{-1}^1 \frac{w(t) P_N^{(\alpha, \beta)}(t)}{P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N}) (t - \xi_{i,N}) (t - z)} dt. \quad (3.1)$$

With the help of identity

$$\frac{1}{(t - \xi_{i,N})(t - z)} = \frac{1}{z - \xi_{i,N}} \left[ \frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \xi_{i,N}} \right] \quad (3.2)$$

coefficients (3.1) reducible to the form

$$\omega_i^C(z) = \begin{cases} \frac{\Pi_N^{(\alpha, \beta)}(z) - \Pi_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N})}{P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N})(z - \xi_{i,N})}, & \text{if } z \neq \xi_{i,N}; \\ \frac{\Pi_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N})}{P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N})}, & \text{if } z = \xi_{i,N}; \end{cases} \quad (3.3)$$

where

$$\Pi_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \int_{-1}^1 w(t) \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{(t - z)} dt. \quad (3.4)$$

To calculate the coefficients of  $\omega_i^C(z)$  with a high degree of accuracy to be calculated analytically integral (3.4) for a variety of functions  $w(t)$ .

The most famous variant is the version of the function  $w(t)$  is weight function of the Jacobi polynomial  $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$  that is

$$w(t) = w^{(\alpha, \beta)}(t) \equiv (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta.$$

Then the integral (3.4) has the form

$$\Pi_n^{(\alpha, \beta)}(z) = Q_n^{(\alpha, \beta)}(z),$$

where

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \int_{-1}^1 (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{(t - z)} dt. \quad (3.5)$$

In the most general case for arbitrary  $\alpha$  and  $\beta$ , the function  $Q_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  connected with the Jacobi polynomials of the second kind  $Q_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  ratio

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) = -2(z - 1)^\alpha (z + 1)^\beta Q_n^{(\alpha, \beta)}(z), \quad (3.6)$$

where

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) = 2^{\alpha + \beta + n} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 2)} \times \\ \times (z + 1)^{-\beta} (z - 1)^{-\alpha - n - 1} \times \\ \times {}_2F_1 \left( n + 1, n + \alpha + 1; 2n + \alpha + \beta + 2; \frac{2}{1 - z} \right).$$

#### 3.2 Hypersingular variant

Consider hypersingular variant the integral (2.6), when the function is  $g(t, z) = 1/(t - z)^2$ . The concept of the final calculation of the integrals of this type was first introduced by Hadamard (J. Hadamard, Lectures he Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale University Press (1923).) and developed in the papers [6]–[8].



The final part hypersingular integral can be written as

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt = \frac{d}{dz} \left[ \int_{-1}^1 -\frac{f(t)}{t-z} dt \right], \quad -1 < z < 1. \quad (3.7)$$

Therefore, the weighting coefficients of the quadrature formula

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt = \sum_{i=1}^N \omega_i^H(z) f(\xi_{i,N}) \quad (3.8)$$

are related with coefficients ( ref fz3) ratio

$$\omega_i^H(z) = \frac{d}{dz} [\omega_i^C(z)]. \quad (3.9)$$

Then the weights for the integral (2.1) function  $g(t, z) = 1/(t-z)^2$  can be calculated by formulas

$$\omega_i^H(z) = \begin{cases} \frac{1}{P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N})} \left\{ \frac{\Pi_N^{(\alpha, \beta)}(z)}{(z - \xi_{i,N})} \right\}, & \text{if } z \neq \xi_{i,N}; \\ \frac{\Pi_N^{(\alpha, \beta)}(z) - \Pi_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i,N})}{(z - \xi_{i,N})^2}, & \text{if } z = \xi_{i,N}. \end{cases} \quad (3.10)$$

For the Cauchy integral ( $g(t, z) = 1/(t-z)$ ) with  $\alpha = -\beta = -1/2$ , we have

$$\Pi_n^{(-1/2, 1/2)}(z) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t} V_n(t)}{\sqrt{1-t} (t-z)} dt = \pi W_n(z), \quad (3.11)$$

where  $V_n(z)$  and  $W_n(z)$  are Chebyshev polynomials 3 and 4 of kind, respectively (see [9]).

Then the quadrature formula for the Cauchy integral is of the form:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t} f(t)}{\sqrt{1-t} (t-z)} dt \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^C(z) f(\xi_{i,N}), \quad (3.12)$$

where

$$\omega_i^C(z) = \begin{cases} \frac{\pi(W_N(z) - W_N(\xi_{i,N}))}{V_N'(\xi_{i,N})(z - \xi_{i,N})}, & \text{if } z \neq \xi_{i,N}; \\ \frac{W_N'(\xi_{i,N})}{\pi V_N'(\xi_{i,N})}, & \text{if } z = \xi_{i,N}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Quadrature formula for hypersingular integral has the form:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t} f(t)}{\sqrt{1-t} (t-z)^2} dt \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^H(z) f(\xi_{i,N}), \quad (3.14)$$

where

$$\omega_i^H(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{V_N'(\xi_{i,N})} \left\{ \frac{W_N'(z)}{(z - \xi_{i,N})} \right\} \\ \frac{W_N(z) - W_N(\xi_{i,N})}{(z - \xi_{i,N})^2}, & \text{if } z \neq \xi_{i,N}; \\ \frac{\pi W_N''(\xi_{i,N})}{2 V_N'(\xi_{i,N})}, & \text{if } z = \xi_{i,N}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Formula (3.15) to calculate weight coefficients allows to them with high accuracy and hence can be used to solve the Schrödinger equation with a linear confining potential in momentum space.

#### 4 The calculation of the energy spectrum for a linear confining potential with $\ell = 0$

The Schrödinger equation with a linear confining potential

$$\frac{k^2}{2\mu} \varphi_\ell(k) + \frac{\sigma}{\pi k^2} \int_0^\infty Q'_\ell(y) \varphi_\ell(k') dk' = E \varphi_\ell(k), \quad (4.1)$$

$$y = \frac{k^2 + k'^2}{2kk'},$$

is reducible to the form

$$\tilde{k}^2 \varphi_\ell(\tilde{k}) + \frac{1}{\pi \tilde{k}^2} \int_0^\infty Q'_\ell(y) \tilde{k}' \varphi_\ell(\tilde{k}') d\tilde{k}' = \varepsilon \varphi_\ell(\tilde{k}) \quad (4.2)$$

with the help of replacements

$$k = \beta \tilde{k}, \quad E = \frac{\beta^2}{2\mu} \varepsilon, \quad \beta = (2\mu\sigma)^{1/3}. \quad (4.3)$$

Using the mapping

$$\tilde{k} = \beta_0 \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, \quad \tilde{k}' = \beta_0 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \quad (4.4)$$

we find that the equation (4.2) is transformed into

$$\frac{1}{\pi \beta_0} \left( \frac{1-z}{1+z} \right) \int_{-1}^1 Q'_\ell(y(t, z)) \frac{\varphi_\ell(t) dt}{(1-t)\sqrt{1-t^2}} = \left( \varepsilon - \beta_0^2 \frac{1+z}{1-z} \right) \varphi_\ell(z). \quad (4.5)$$

For the case of  $\ell = 0$  the equation (4.5) after simplifications can be written as follows:

$$-\frac{1}{\pi \beta_0} (1-z)^2 \int_{-1}^1 \varphi_{\ell=0}(t) \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{dt}{(t-z)^2} = \left( \varepsilon - \beta_0^2 \frac{1+z}{1-z} \right) \varphi_{\ell=0}(z). \quad (4.6)$$

Thus, for a linear confining potential we have hypersingular kernel  $\sim 1/(t-z)^2$  and therefore for the numerical solution it is necessary to use weighting factors (3.15). Function  $w(t)$  naturally chosen in the form

$$w(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}.$$

As a result, the matrix for eigenvalue problems takes the form:

$$H_{ij} = \left[ \beta_0^2 \delta_{ij} \left( \frac{1+\xi_{j,N}}{1-\xi_{j,N}} \right) - \frac{\omega_j^H(\xi_{i,N})}{\pi \beta_0} (1-\xi_{i,N})^2 \right], \quad (4.7)$$

where  $z \rightarrow \xi_{i,N}$  and  $t \rightarrow \xi_{j,N}$ ,  $\xi_{i,N}$  are zeros of the polynomial  $V_N(t)$  and matrix  $\omega_j^H(\xi_{i,N})$  is calculated using the (3.15).

For a linear confining potential in the  $\ell = 0$  it is known that

$$\varepsilon = -z_n, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.8)$$

where  $z_n$  are the zeros of the Airy function  $Ai(z)$ . Therefore, it is possible to compare the results of numerical calculations of the matrix (4.7) and accurate values (see, table 4.1).

Table 4.1 – Relative error of  $\delta$  of the solution of equation (4.7) ( $\beta_0 = 0,9999$ )

$N$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
50	$3 \cdot 10^{-22}$	$4 \cdot 10^{-20}$	$3 \cdot 10^{-17}$	$3 \cdot 10^{-15}$	$8 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-12}$
80	$5 \cdot 10^{-33}$	$2 \cdot 10^{-29}$	$1 \cdot 10^{-26}$	$3 \cdot 10^{-24}$	$4 \cdot 10^{-22}$	$3 \cdot 10^{-20}$
100	$2 \cdot 10^{-39}$	$1 \cdot 10^{-35}$	$1 \cdot 10^{-32}$	$4 \cdot 10^{-31}$	$5 \cdot 10^{-28}$	$6 \cdot 10^{-26}$
150	$4 \cdot 10^{-54}$	$8 \cdot 10^{-50}$	$5 \cdot 10^{-47}$	$1 \cdot 10^{-43}$	$6 \cdot 10^{-42}$	$6 \cdot 10^{-39}$

### Conclusion

Thus, the choice of weighting coefficients in which the singularity treated analytically and functions  $w(t)$  associated with interpolating polynomials  $P_N^{(\alpha,\beta)}(t)$  allows us to solve the equation (4.1) for  $\ell=0$  in momentum space with high accuracy. The accuracy of calculations of many orders of magnitude higher than similar to calculations in momentum space [1], [10]–[13].

### REFERENCES

1. Tang, A. The Nyström plus correction method for solving bound state equations in momentum space / A. Tang, J.W. Norbury // Phys. Rev. – 2001. – Vol. E63. – P. 066703.
2. Norbury, J.W. Confining potential in momentum space / J.W. Norbury, D.E. Kahana, K. Maung // Can. J. Phys. – 1992. – Vol. 70. – P. 86–89.
3. Golberg, M.A. Numerical Solution of Integral Equations / M.A. Golberg Mathematical concepts and methods in science and engineering. – New York and London: Plenum Press, 1990. – 436 pp.
4. Kornejchuk, A.A. Quadrature formulae for singular integrals (russian) / A.A. Kornejchuk //

Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1964. – Vol. 4, Suppl. 4. – P. 64–74.

5. Sheshko, M.A. Convergence of quadrature processes for a singular integral (russian) / M.A. Sheshko // Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). – 1976. – Vol. 20, № 12. – P. 86–94.

6. Hui, C.-Y. Evaluations of hypersingular integrals using Gaussian quadrature / C.-Y. Hui, D. Shia // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1999. – Vol. 44, № 2. – P. 205–214.

7. Kaya, A.C. On the solution of integral equations with strongly singular kernels / A.C. Kaya, F. Erdogan // Quart. Appl. Math. – 1987. – Vol. XLV. – P. 105–122.

8. Kutt, H.R. On the numerical evaluation of finite part integrals involving an algebraic singularity: Ph.d. thesis – 1975. – Stellenbosch: Stellenbosch University, 1975.

9. Mason, J.C. Chebyshev polynomials / J.C. Mason, D.C. Handscomb. – Chapman & Hall/Crc, 2002. – 335 p.

10. Chen, J.-K. Spectral method for the Cornell and screened Cornell potentials in momentum space / J.-K. Chen // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 88. – P. 076006. Erratum Phys. Rev. D. – 2014. – Vol. 89. – P. 099904.

11. Deloff, A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited / A. Deloff // Annals Phys. – 2007. – Vol. 322. – P. 2315–2326.

12. Hershbach, H. Relativistic linear potential in momentum space / H. Hershbach // Phys. Rev. D. – 1993. – Vol. 47. – P. 3027–3033.

13. Linear confinement in momentum space: singularity-free bound-state equations / S. Leitão, A. Stadler, M.T. Peña, E.P. Biernat // Phys. Rev. – 2014. – Vol. D90, № 9. – P. 096003.

The work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Basic Research.

Поступила в редакцию 17.01.16.

УДК 534.8:535.42

## ВЛИЯНИЕ СВЕТОИНДУЦИРОВАННЫХ РЕШЕТОК НА АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В.Н. Белый<sup>1</sup>, Г.В. Кулак<sup>2</sup>, Г.В. Крох<sup>2</sup>, П.И. Ропот<sup>1</sup>, О.В. Шакин<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт физики НАН Беларуси, Минск

<sup>2</sup>Мозырский государственный педагогический университет

<sup>3</sup>Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург

## THE INFLUENCES OF LIGHT-INDUCED GRATINGS ON THE ACOUSTOOPTICAL INTERACTION OF BESSEL LIGHT BEAMS IN THE GYROTROPIC CUBIC CRYSTALS

V.N. Belyi<sup>1</sup>, G.V. Kulak<sup>2</sup>, G.V. Krokh<sup>2</sup>, P.I. Ropot<sup>1</sup>, O.V. Shakin<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk

<sup>2</sup>I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

<sup>3</sup>State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg

Исследовано влияние светондуцированных решеток, обусловленных кубической оптической нелинейностью, на брэгговскую дифракцию бесселевых световых пучков на ультразвуке в гиротропных средах. Показано, что при использовании бесселевых световых пучков порог существенного проявления оптической нелинейности при брэгговской дифракции значительно снижается. Установлено, что в стоковом режиме дифракции эффективность акустооптического взаимодействия достигает максимального значения при увеличении интенсивности света и в антистоксовом режиме монотонно убывает.

**Ключевые слова:** ультразвуковая волна, гиротропный кристалл, светондуцированная решетка, бесселев световой пучок, брэгговская дифракция, эффективность дифракции.

The influences of light-induced gratings determined by means of cubic optical nonlinearity on the Bragg diffraction by the Bessel light beams on ultrasound in the gyrotropic mediums are investigated. It is shown that under using Bessel light beams the plate of sufficiency display of optical nonlinearity under Bragg diffraction is substantially lowered. It was found that the diffraction efficiency of Stokes regime of the acousto-optical interaction reaches its maximum value under increasing the light intensity and anti-Stokes mode decreases monotonically.

**Keywords:** ultrasonic wave, gyrotropic crystal, light-induced grating, Bessel light beam, Bragg diffraction, diffraction efficiency.

### Введение

Квазибездифракционные световые пучки представляют значительный практический интерес для лазерных технологий вследствие их уникального свойства, неизменной амплитуды светового поля в процессе их распространения. Наиболее интересными являются бесселевы световые пучки (БСП), энергия в поперечном сечении которых распределена в виде яркого центрального пятна, окруженного системой концентрических колец [1]–[4]. При этом интенсивность в центральном пятне значительна и быстро уменьшается в кольцевых зонах с увеличением радиальной координаты. Важным преимуществом бесселевых световых пучков по сравнению с традиционными (например, гауссовыми) является бездифракционность в локальной области пространства и способность самореконструкции волнового фронта за экраном [4].

БСП находят широкое применение в области нелинейной кристаллооптики (см. например [5], [6]). При этом с использованием таких пучков

реализованы эффективные нелинейно-оптические взаимодействия (самовоздействие, генерация оптических гармоник, параметрическое преобразование частоты и др.).

Значительный интерес исследователей и разработчиков представляет исследование особенностей преобразования и управления поляризациями и энергетическими параметрами БСП акустооптическими (АО) методами [7]–[9]. При этом следует учитывать, что широко используемые на практике АО кристаллы (парателлурит, кварц, йодноватой кислоты, кубические кристаллы структуры силениита и др.) являются гиротропными [10]. Очевидно, что при АО взаимодействии мощных световых пучков с ультразвуком нелинейные свойства среды могут существенно повлиять на характеристики дифрагированных на ультразвуке волн [11]–[13]. Показано [11], [12], что дифракционная эффективность при брэгговской АО дифракции является нелинейной функцией интенсивности падающего света. Для дифракции света на медленной

сдвиговой ультразвуковой волне в кристаллах парателлурита для излучения с длиной волны  $\lambda_0 = 1,06$  мкм экспериментально установлено, что при увеличении интенсивности гауссовых световых пучков от  $10 \text{ МВт/см}^2$  до  $240 \text{ МВт/см}^2$  эффективность брэгговской дифракции увеличивается в 1,7 раза [13].

В настоящей работе с использованием теории связанных волн рассмотрены особенности брэгговской АО дифракции в гиротропных кубических кристаллах с учетом кубической нелинейности, приводящей к возникновению светоиндуцированных решеток наряду с ультразвуковой [11], [12], [14]. Теоретическое описание АО взаимодействия БСП в нелинейных средах основано на аналитических и численных методах с учетом анализа интегралов перекрытия бесселевых полей [5], [6].

### 1 Теоретические результаты

Рассмотрим геометрию АО взаимодействия (рисунок 1.1), для которой продольная или сдвиговая УЗ волна распространяется вдоль кристаллографической оси кристалла или направлений, являющихся продольными или поперечными нормальными [15].

Выберем систему координат  $XYZ$  так, что в направлении оси  $X$  распространяется УЗ волна, а под углом  $\varphi_1$  к оси  $Z$  падает световая волна. Если волна является линейно поляризованной, то в среде возможны четыре типа взаимодействий циркулярных мод, для каждого из которых существует свой угол Брэгга. Для взаимодействия волн с одинаковыми поляризациями (изотропная дифракция) условия Брэгга выполняются одновременно при одном и том же угле падения  $\varphi_B = \arcsin(\lambda_0 / 2n\Lambda)$ , где  $\lambda_0$  и  $\Lambda$  – длина световой и звуковой волн соответственно;  $n$  – показатель преломления кристалла без учета гиротропии. В случае взаимодействия волн с различными поляризациями (анизотропная дифракция) углы Брэгга отличаются от  $\varphi_B$  на величину  $\Delta\varphi = \pm 2\gamma / (n \sin 2\varphi_B)$ , где  $\gamma$  – параметр гиротропии [16]. При соблюдении условия  $\gamma \gg \Delta n_a$  ( $\Delta n_a$  – глубина модуляции показателя преломления акустической волной), возможно независимое рассмотрение всех четырех дифракционных процессов в гиротропных средах. Данное условие выполняется для большинства гиротропных сред используемых в акустооптике.

Рассмотрим геометрию АО взаимодействия (рисунок 1.1), для которой УЗ волна распространяется в гиротропном кубическом кристалле в направлении оси  $X$  и занимает пространство между плоскостями  $z = 0$  и  $z = l$ . В условиях изотропной дифракции циркулярно поляризованных световых волн УЗ частоты различаются по величине. При анизотропной дифракции векторный

синхронизм достигается различием углов между волновыми векторами УЗ волны. В таком случае в направлении дифракционного порядка при анизотропной дифракции дают вклады два вида векторных взаимодействий:  $\vec{k}_{0\pm} + \vec{K}_{1,2} = \vec{k}_{1\pm}$ , где  $\vec{K}_1, \vec{K}_2$  – плоскороволновые компоненты акустического пучка. При наличии слабой девиации УЗ частоты от центральной, то есть  $f \div f + \Delta f$ , будет наблюдаться одновременно дифракция право- и левоциркулярно поляризованных составляющих падающего слабобрасходящегося линейно поляризованного светового пучка. Условия векторного синхронизма имеют вид:  $\vec{k}_{0\pm} + \vec{K}_{1,2} = \vec{k}_{1\pm}$  [11].

На входе в кристалл электрический вектор линейно поляризованной волны можно представить в виде:

$$\vec{E}_i(z=0) = A(\rho_0)(\vec{e}_1 \cos \psi + \vec{e}_2 \sin \psi),$$

где  $A(\rho_0)$  – распределение амплитуды падающего БСП,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – орты системы координат  $XYZ$ ,  $\psi$  – азимут поляризации.

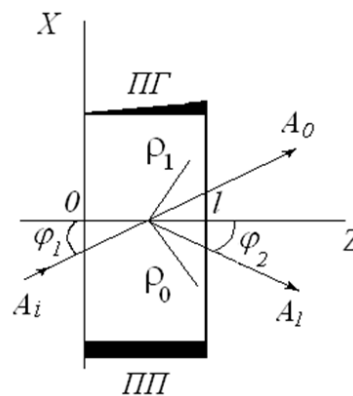


Рисунок 1.1 – Геометрия анизотропной (изотропной) акустооптической дифракции ограниченных световых пучков (ПП – пьезопреобразователь, ПГ – поглотитель)

Для пространственной части электрического вектора  $\vec{A}_i(\rho_0, \vec{r}_i)$  преломленного БСП в кристалле имеем [5], [6]:

$$\vec{A}_i(\rho_0, \vec{r}_i) = A_+(\rho_0)\vec{e}_+ e^{i\vec{k}_+ \cdot \vec{r}_i} + A_-(\rho_0)\vec{e}_- e^{i\vec{k}_- \cdot \vec{r}_i},$$

где  $A_{\pm}(\rho_0) = \frac{A^0 J_0[k_{\pm} \sin(\gamma_{\pm})\rho_0]}{\sqrt{\pi R_B J_1[k_{\pm} \sin(\gamma_{\pm})R_B]}}$  – амплитуды

бесселевых пучков;  $\vec{k}_{\pm} = k_0 n_{\pm} \vec{n}$ , где  $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ ,  $n_{\pm} = n + \gamma$  – показатели преломления собственных БСП;  $\vec{n}$  – волновая нормаль вдоль преломленных БСП, поскольку различие углов преломления собственных мод мало;  $\vec{e}_{\pm} = \frac{\vec{e}_{p,2} + i\vec{e}_{2,p}}{\sqrt{2}}$ ,

$\vec{e}_p = \frac{[\vec{e}_2 \vec{n}]}{[\vec{e}_2 \vec{n}]}$  – единичный вектор, лежащий в

плоскости дифракции  $XZ$ . Здесь  $J_{0,1}(x)$  – функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Векторы смещения  $\vec{U}_{1,2}$  для плоских УЗ волн с волновыми векторами  $\vec{K}_{1,2}$  даются следующими выражениями [15]:

$$\vec{U}_{1,2} = \vec{U}_0 \exp[i(\vec{K}_{1,2}\vec{r} - \Omega t)],$$

где  $\Omega = 2\pi f$  – центральная частота УЗ источника,  $\vec{U}_0$  – амплитуда УЗ волны;  $|\vec{K}_{1,2}| = \Omega_{1,2}/v$  ( $v$  – фазовая скорость УЗ волны). УЗ волна создает периодическое в пространстве и времени изменение тензора диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon_{i,j}^s$ , связанное с тензором упругих деформаций  $U_{ik} = \frac{\nabla_k U_i + \nabla_i U_k}{2}$  и тензором фотоупругих постоянных  $p_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = 1 \div 3$ ). Наряду с добавкой  $\Delta\hat{\epsilon}^s$  в поле мощной световой волны возникает добавка  $\Delta\hat{\epsilon}^l$  из-за кубической оптической нелинейности, которая для изотропной среды в общем случае имеет вид [17]:

$$\Delta\hat{\epsilon}_{ik}^l = 4\pi(\theta_1 E_i E_k^* + \theta_2 E_i^* E_k / 2). \quad (1.1)$$

Соотношение между входящими в выражение (1.1) коэффициентами  $\theta_1$  и  $\theta_2$  определяется механизмом нелинейности [18] (для керровского ориентационного механизма, например,  $\theta_1 = 6\theta_2$ , для стрикционного –  $\theta_2 = 0$ , для нелинейной электрической поляризации –  $\theta_1 = \theta_2$ ).

Из уравнений Максвелла и материальных уравнений следует волновое уравнение для напряженности светового поля в области, занятой ультразвуком [11], [16]. Решение волнового уравнения будем искать в виде нескольких связанных волн с медленно изменяющимися амплитудами [5], [6]:

$$\vec{E} = \vec{u}_i A_i(z) j_0(q_0 \rho_0) e^{i(\vec{k}_i \vec{r}_i - \omega t)} + \sum_{m=1}^M \vec{u}_d A_{dm}(z) j_0(q_{1m} \rho_1) e^{i(\vec{k}_d \vec{r}_d - \omega_d t)}, \quad (1.2)$$

где  $\rho_{0,1} = r \cos \phi_{1,2}$ ,  $\rho_{0,1} \approx r$  для  $\phi_{1,2} \ll 1$ ;  $\rho$  – цилиндрическая координата светового пучка, распространяющегося вдоль оси  $Z$ ;  $l$  – длина АО взаимодействия;  $\vec{u}_{i,d}$  – единичные векторы циркулярной поляризации дифрагированных волн (например при преобразовании правополяризованной волны в левополяризованную следует  $i$  заменить на “+” и  $d$  на “–”);  $\omega_d = \omega \pm \Omega$ , где  $\omega$  – частота падающей световой волны;  $k_{ix} = (\omega/c)n_i \sin \phi_1$  и  $k_{dx} = (\omega/c)n_i \cos \phi_1$  – компоненты волновых векторов преломленной волны;

$$k_{dx} = [(\omega \pm \Omega)/c] n_d \sin \phi_2,$$

$$k_{dz} = [(\omega \pm \Omega)/c] n_d \cos \phi_2]$$

– компоненты волнового вектора дифрагированной волны;  $c$  – скорость света в вакууме. В (1.2) введены нормированные функции Бесселя  $j_0(q_0 \rho_0)$  и  $j_0(q_{1m} \rho_1)$  [6]:

$$j_0(q_0 \rho_0) = \frac{J_0(q_0 \rho_0)}{\sqrt{\pi R_B} J_1(q_0 R_B)},$$

$$j_0(q_{1m} \rho_1) = \frac{J_0(q_{1m} \rho_1)}{\sqrt{\pi R_B} J_1(q_{1m} R_B)},$$

где  $q_0 = k_i \gamma_i$ ,  $q_{1m} = k_{dm} \gamma_d$ , причем  $R_B$  – радиус падающего БСП,  $2\gamma_{i,d}$  – углы конуса БСП,  $M$  – число бesselевых мод в дифрагированном световом поле. При  $\rho = R_B$  и  $q_{1m} R_B = (m - 0,25)\pi$  функции Бесселя обращаются в нуль, то есть формула (1.2) представляет собой разложение по модам цилиндрической области радиусом  $R_B$ .

Подставив выражение (1.2) в волновое уравнение для напряженности светового поля  $\vec{E}$  в области, занятой ультразвуком, введя вещественные амплитуды и фазы [11]:

$$A_i(z) = A_i^r(z) \exp[-i\phi_i(z)],$$

$$A_{dm}(z) = A_{dm}^r(z) \exp[-i\phi_{dm}(z)],$$

получим систему уравнений связанных волн

$$\begin{aligned} \frac{dA_i^r}{dz} &= a \sum_{m=1}^M g_{im} A_{dm}^r(z) + \\ &+ b A_i^r(z) \left( \sum_{m=1}^M A_{dm}^{r2}(z) g_{nm} \sin \Delta\phi_m \right), \\ \frac{dA_{dm}^r}{dz} &= q g_{dm} A_i^r(z) + \\ &+ d A_i^{r2}(z) \left( \sum_{m=1}^M A_{dm}^r(z) g_{sm} \sin \Delta\phi_m \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{d\Delta\phi}{dz} = b \left( \frac{g_{im} A_i^r(z)}{A_{dm}^r(z)} - \frac{\sum_{m=1}^M g_{dm} A_{dm}^r(z)}{A_i^r(z)} \right) \cos \Delta\phi_m,$$

где  $\Delta\phi_m = \phi_{dm} - \phi_i$ ,  $g_{im, dm}$ ,  $g_{dm, sm}$  – интегралы перекрытия. Интегралы перекрытия задаются соотношениями:

$$g_{im} = \frac{\int_0^{R_B} j_0(q_0 \rho_0) j_0(q_{1m} \rho_1) \rho_0 d\rho_0}{\int_0^{R_B} j_0^2(q_0 \rho_0) \rho_0 d\rho_0},$$

$$g_{dm} = \frac{\int_0^{R_B} j_0(q_{1m} \rho_1) j_0(q_0 \rho_0) \rho_1 d\rho_1}{\int_0^{R_B} j_0^2(q_{1m} \rho_0) \rho_1 d\rho_1},$$

$$g_{nm} = \frac{\int_0^{R_B} j_0^2(q_{1m} \rho_1) j_0^2(q_0 \rho_0) \rho_1 d\rho_1}{\int_0^{R_B} j_0^2(q_0 \rho_0) \rho_0 d\rho_0},$$

$$g_{sm} = \frac{\int_0^{R_B} j_0^2(q_{1m}\rho_1) j_0^2(q_0\rho_0) \rho_1 d\rho_1}{\int_0^{R_B} j_0^2(q_{1m}\rho_0) \rho_1 d\rho_1}.$$

Система уравнений (1.3) описывает все типы взаимодействия циркулярно поляризованных мод, причем коэффициенты  $q = -\mu a$ ,  $d = -\mu b$  ( $\mu = \omega_d / \omega$ ) в каждом случае задаются отдельно. При дифракции на продольных ультразвуковых волнах, распространяющихся вдоль кристаллографических осей второго порядка

$$a = -\frac{\pi n^3}{2\lambda_0} [(p_{11} \cos^2 \varphi_1 - p_{12} \sin^2 \varphi_1) \pm p_{12}] U_1,$$

где знак плюс соответствует изотропной дифракции, а знак минус – анизотропной;  $U_1 = \sqrt{2I_a / \sigma v_l^3}$  – компоненты тензора упругих деформаций ( $I_a$  – интенсивность УЗ волны,  $\sigma$  – плотность кристалла,  $v_l$  – фазовая скорость продольной УЗ волны); нелинейный коэффициент

$$b = \frac{2\pi^2 \mu}{n\lambda_0} \left( \theta_1 + \frac{\theta_2}{2} \right) \sin^4 \varphi_1$$

(анизотропная дифракция),

$$b = \frac{2\pi^2 \mu}{n\lambda_0} \left( \theta_1 + \frac{\theta_2}{2} \right) \cos^4 \varphi_1$$

(изотропная дифракция).

В случае дифракции на сдвиговых волнах для обоих типов взаимодействия имеем:

$$a = -\frac{\pi n^3}{4\lambda_0} (p_{11} - p_{12}) U_s \sin 2\varphi_1,$$

а коэффициенты  $b$  и  $d$  совпадают с соответствующими коэффициентами для дифракции на продольных УЗ волнах;  $U_s = \sqrt{2I_a / \sigma v_s^3}$  – компонента тензора деформаций ( $v_s$  – фазовая скорость сдвиговой УЗ волны).

Точное решение системы уравнений (1.3) при граничных условиях:  $A_i^r(z=0) = A$ ,  $A_d^r(z=0) = 0$  возможно для одной дифрагированной моды при  $\Delta\phi = 3\pi/2$  [12]. В общем случае система уравнений (1.3) сводится к системе уравнений относительно  $A_i^r$ ,  $A_{dm}^r$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ). Ее решение возможно лишь численными методами. Интегралы перекрытия  $g_{im, dm}$  достигают максимального значения, равного единице, при условии  $q_{1m} = q_0$ . Дифрагированное световое поле при достаточно больших  $R_B \sim 1$  мм является единичным БСП с углом конуса, равным углу конуса падающего БСП и следует рассчитывать интеграл перекрытия  $g_{m, sm}$  численными методами. Тогда система уравнений (1.3) сводится к двум нелинейным уравнениям, решение которых можно найти в замкнутой форме [11]. Вид решения зависит от

значения параметра  $G = \mu^{-2} a q + b^2 I_0 / 4$ , где  $I_0$  – интенсивность падающего света. Случай  $G < 0$  качественно совпадает с дифракцией света на ультразвуке в отсутствие нелинейности. Интенсивности дифрагированных волн находим из соотношений:

$$I_i = \frac{I_0 \left[ 2\sqrt{-G} \operatorname{ctg} \left( z\sqrt{-G} + bI_0 \right) \right]^2}{\left\{ 4a^2 + \left[ 2\sqrt{-G} \operatorname{ctg} \left( z\sqrt{-G} \right) + bI_0 \right] \right\}^2}, \quad (1.4)$$

$$I_d = \frac{4a^2 I_0}{\left[ 2\sqrt{-G} \operatorname{ctg} \left( z\sqrt{-G} \right) + bI_0 \right]^2 + 4a^2}.$$

При  $G > 0$  в выражениях (1.4) следует выполнить замену:  $\operatorname{ctg} \left( z\sqrt{-G} \right) \rightarrow i \operatorname{cth} \left( z\sqrt{G} \right)$ ; в случае  $G = 0$  в (1.4) следует выполнить предельный переход при  $G \rightarrow 0$ .

## 2 Численные расчеты

Численные расчеты проводились для изотропной дифракции излучения He-Ne лазера с длиной волны  $\lambda = 0,6328$  мкм на продольной УЗ волне, распространяющейся вдоль кристаллографической оси [100] кристалла германата висмута ( $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ ) [10]. Эффективность дифракции  $\eta = I_d / I_0$  зависит от интенсивности падающего света  $I_0$ . Рассматривался керровский стрикционный механизм оптической нелинейности. При этом коэффициент

$$d = \frac{2\pi n_2 \sin \phi}{\lambda_0 \cos \phi_E},$$

где для кристалла  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  коэффициент нелинейности  $n_2 = 1,2 \cdot 10^{-14}$  см<sup>2</sup>/Вт [19];  $\phi = \pi/2$  ( $\phi = -\pi/2$ ) для стоксовой (антистоксовой) дифракции соответственно [12].

На рисунке 2.1 представлена зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от интенсивности ультразвука  $I_a$  при различных интенсивностях падающего светового пучка для стоксовой ( $a$ ) и антистоксовой ( $b$ ) дифракции. Из рисунка следует, что при малых  $I_0 \leq 100$  Вт/см<sup>2</sup> изменение эффективности дифракции близко к описываемому функцией  $\eta = \sin^2(al)$ . При увеличении интенсивности света проявляется нелинейный характер зависимости с существенными отклонениями от синусоидального закона. При стоксовой дифракции ( $b < 0$ ), как следует из рисунка 2.1 ( $a$ ), наклон кривых изменяется (по сравнению с антистоксовым режимом, см. рисунок 2.1 ( $b$ )) и при значительных интенсивностях света  $I_0 = 5 \cdot 10^3$  Вт/см<sup>2</sup> наблюдаются резкие изменения дифракционной эффективности.

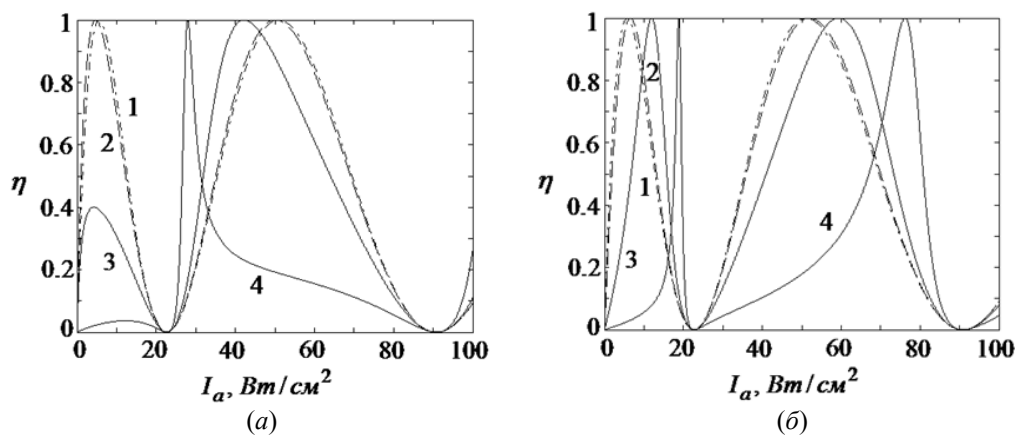


Рисунок 2.1 – Зависимость эффективности АО взаимодействия  $\eta$  от интенсивности УЗ волны  $I_a$  для стоксовой (а) и антистоксовой (б) дифракции при различных интенсивностях света  $I_0$ : 1 – 10, 2 – 100, 3 – 1000, 4 – 5000 Вт/см<sup>2</sup> ( $l = 1$  см,  $g_{nm} = g_{sm} = 3,26 \cdot 10^6$  м<sup>-2</sup>, кристалл  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ )

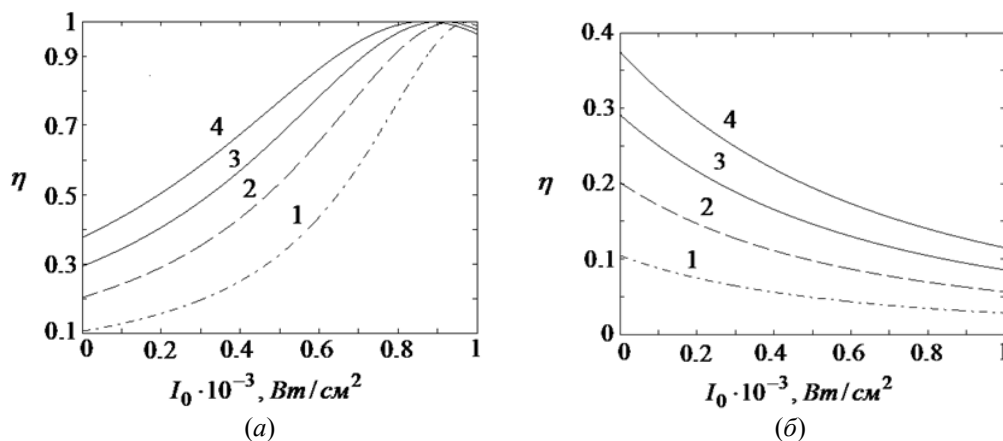


Рисунок 2.2 – Зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от интенсивности света  $I_0$  при различных интенсивностях УЗ волны  $I_a$ : 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3, 4 – 4 Вт/см<sup>2</sup> ( $l = 0,5$  см,  $g_{nm} = g_{sm} = 3,26 \cdot 10^6$  м<sup>-2</sup>, кристалл  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ )

Следует отметить, что эффективность стоксовой дифракции с понижением частоты ультразвука ( $b < 0$ ) значительно выше, чем при антистоксовой ( $b > 0$ ), соответствующей повышенной частоты. Данный эффект объясняется синфазным (противофазным) влиянием светоиндуцированной фазовой решетки на эффективность брэгговской АО дифракции при стоксовой (антистоксовой) дифракции соответственно [11], [12]. Однако, при антистоксовом режиме дифракции максимальное значение дифракционной эффективности достигается при меньших значениях интенсивности ультразвука (см. кривую 3 на рисунке 2.1 (б)).

На рисунке 2.2 представлена зависимость эффективности дифракции от интенсивности света для стоксового режима (а) и антистоксового (б) режима дифракции. Из рисунка следует, что при стоксовой дифракции электрострикционная решетка способствует увеличению эффективности

дифракции света на ультразвуке. В случае антистоксовой дифракции электрострикционная решетка находится в противофазе по отношению к УЗ решетке и тормозит данный процесс.

Нелинейные эффекты при дифракции бesselевых световых пучков проявляются значительно в большей мере, чем при дифракции световых пучков [11], [12], близких по форме к плоским волнам. Это объясняется высокой концентрацией энергии в сечении БСП с одинаковыми углами конусности и большими значениями интегралов перекрытия  $g_{nm,sm} \sim 10^6$  м<sup>-2</sup>. При этом обратные интегралы перекрытия взаимодействующих БСП пропорциональны эффективным площадям взаимодействующих пучков в нелинейном кристалле [5], [6].

Высокие значения интегралов перекрытия  $g_{nm} \sim 10^3$  м<sup>-2</sup> имеют место также при описании эффектов преобразования частоты бesselевыми световыми пучками в кристаллах [6]. При этом

достигается коэффициент преобразования второй оптической гармоники в кристалле КТР в три раза больший, чем при использовании гауссовых световых пучков. В работе [20] исследована эволюция состояния поляризации основной моды слабо двулучепреломляющего волоконного световода вследствие эффекта Керра при взаимодействии волн с ортогональной поляризацией. При этом интегралы перекрытия разно-поляризованных волн пропорциональны  $1/S \sim 10^3 \text{ м}^{-2}$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения сердцевинного волоконного световода.

### Заключение

Таким образом, интенсивные бесселевы световые пучки могут успешно применяться для эффективных акустооптических преобразований в гиротропных кубических кристаллах. При этом следует учитывать значительное влияние светоиндуцированных решеток, возникающих в среде с кубической оптической нелинейностью в стоковом и антистоксовом режиме брэгговской дифракции. На этой основе возможно создание нового типа АО устройств для управления интенсивными квазибездифракционными пучками бесселева типа. Такие устройства (модуляторы, дефлекторы) перспективны для применений в лазерных технологиях (в частности для лазерной резки и сварки), для зондирования поглощающих и рассеивающих сред на большую глубину, лазерной локации, микроскопии высокого разрешения и других областях, а также для решения проблем лазерной диагностики и контроля в промышленности, микро- и нанотехнологиях.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams / J. Durnin // J. Opt. Soc. Am. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.
2. Durnin, J. Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberli // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58, № 15. – P. 1499–1501.
3. Turunen, J. Realization of general nondiffracting beams with compute generated holograms / J. Turunen, A. Vasara, A.T. Friberg // J. Opt. Soc. Am. – 1989. – Vol. A6, № 11. – P. 1748–1754.
4. Herman, R.M. Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam / R.M. Herman, T.A. Wiggins // J. Opt. Soc. Am. – 1991. – Vol. 8, № 6. – P. 932–942.
5. Генерация второй гармоники бесселевыми световыми пучками в кристаллах КТР / В.Н. Белый, Н.С. Казак, Н.В. Кондратюк, Н.А. Хило, А.А. Шагов // Квантовая электроника. – 1998. – Т. 25, № 11. – С. 1037–1042.
6. Белый, В.Н. Преобразование частоты бесселевых световых пучков нелинейными кристаллами / В.Н. Белый, Н.С. Казак, Н.А. Хило //

Квантовая электроника. – 2000. – Т. 30, № 9. – С. 753–766.

7. Поляризационно-независимая акустооптическая модуляция бесселевых световых пучков / В.Н. Белый, Г.В. Кулак, Г.В. Крох, О.В. Шакин // Журн. прикл. спектр. – 2014. – Т. 81, № 1. – С. 83–88.

8. Polarization-independent acousto-optical modulation of Bessel light beams / V.N. Belyi, S.V. Kulakov, G.V. Kulak, O.V. Shakin // XVI International Conference for Young Reserchers. Wave electronics and its application in the information and telecommunication systems, 2–6 June. – 2013. – P. 33.

9. Khilo, N.A. Generation of TH- and TE- polarized Bessel light at acousto-optic interaction in anisotropic crystals / N.A. Khilo, N.S. Kazak, V.N. Belyi // Opt. Commun. – 2014. – Vol. 325. – P. 84–91.

10. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – Москва: Мир, 1987. – 616 с.

11. Кулак, Г.В. Дифракция света на ультразвуке в гиротропных нелинейных средах / Г.В. Кулак // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1985. – № 1. – С. 63–66.

12. Yeh, P. Nonlinear-optical Bragg scattering in Kerr media / P. Yeh, M. Khoshevisan // J. Opt. Soc. Am. – 1987. – Vol. 4, № 12. – P. 1954–1957.

13. Проклов, В.В. Исследование дифракции мощного лазерного излучения в  $\text{TeO}_2$  / В.В. Проклов, С.В. Пешин, Б.Л. Давыдов, Г.Н. Шкердин // Краткие сообщения по физике. Труды ФИАН. – 1979. – С. 1543–1545.

14. Кессель, А.Р. Дифракция света на звуке в оптически нелинейных средах / А.Р. Кессель, В.М. Мусин // ФТТ. – 1980. – Т. 22, В. 8. – С. 2483–2485.

15. Балакший, В.Н. Физические основы акустооптики / В.Н. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.

16. Белый, В.Н. Дифракция света на ультразвуке в гиротропных кубических кристаллах в режиме Брэгга / В.Н. Белый, Г.В. Кулак // ЖПС. – 1991. – Т. 54, № 5. – С. 803–808.

17. Бломбергс, Н. Нелинейная оптика / Н. Бломбергс. – М.: Мир, 1966. – 419 с.

18. The self focusing of light of different polarizations / D.H. Chose [et al.] // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 1966. – QE-2. – P. 553–557.

19. Ганеев, Р.А. Нелинейно-оптические характеристики различных сред / Р.А. Ганеев, Г. Усманов // Квантовая электроника. – 2007. – Т. 37, № 7. – С. 605–616.

20. Crosignani, B. Depolarization of light due to the optical Kerr effect in low-birefringence single-mode fibers / B. Crosignani, B. Daino, P. Di Porto // J. Opt. Soc. Am. – 1986. – Vol. 3, № 8. – P. 1120–1123.

Поступила в редакцию 22.09.15.



УДК 535.42+537.86.22

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ГАУССОВОПОДОБНЫХ ПУЧКОВ. I. ОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## POLARIZING AND POWER PROPERTIES OF VECTOR GAUSSIAN-LIKE BEAMS. I. THE HOMOGENEOUS POLARISATION

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Найдены общие выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных гауссовоподобных пучков с однородной поляризацией. Эти результаты конкретизированы для стандартных пучков Эрмита – Гаусса. Установлено, что потоки энергии световых пучков Эрмита – Гаусса разделяются на отдельные независимые области (домены). Внутри каждой области потоки энергии автономны и не переходят в другие области.

**Ключевые слова:** параксиальные пучки, векторные пучки, гауссовоподобные пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, поляризация.

The general expressions for the energy flux density of an electromagnetic field  $\mathbf{S}$  vector Gaussian-like beams with homogeneous polarization are found. These results for the standard Hermite – Gauss beams are concretized. It is established that energy flows of light beams of Hermite – Gauss are divided into certain independent areas (domains). In each area energy flows are autonomous and into other areas do not pass.

**Keywords:** paraxial beams, vector beams, gaussian-like beams, polarizing properties, power properties, polarization.

**Введение**

В параксиальных световых пучках продольная компонента поля значительно меньше поперечных компонент. Поэтому параксиальные пучки описываются обычно одной поперечной компонентой поля. Такие пучки называются скалярными. Чаще всего параксиальные световые пучки описываются как скалярные, что в большинстве случаев вполне достаточно. Такой заведомо упрощенный подход часто используется при описании свойств световых пучков [1]–[7]. Однако для пучков, у которых угол расходимости велик, скалярного приближения не достаточно. Более того, даже для параксиальных световых пучков, у которых поляризация неоднородна по сечению, необходимо использовать более строгий векторный формализм. Ясно, что более точным является описание лазерных световых пучков как трехмерных векторных полей. Однако векторные пучки изучены гораздо слабее, см., например, [8]–[15].

В работе предлагается формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных гауссовоподобных световых пучков. Затем этот формализм конкретизируется для векторных стандартных пучков Эрмита – Гаусса (sH-G). Исследуются свойства плотности потока энергии электромагнитного поля для вышеупомянутых пучков.

**1 Поляризационные и энергетические свойства векторных световых пучков с однородной поляризацией**

В работе [10] нами был предложен формализм и найдены выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных параксиальных пучков с однородной поляризацией. В настоящей работе этот формализм будет распространен на векторные гауссовоподобные пучки с однородной поляризацией.

Пусть световой пучок имеет однородную поляризацию по всему поперечному сечению пучка. Тогда из векторной амплитуды  $\mathbf{E}_\perp$  можно выделить постоянный векторный множитель  $\mathbf{e}_\perp$ , отвечающий за поляризацию волны

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{e}_\perp F, \quad (1.1)$$

где функция  $F$  является некоторым решением параксиального параболического уравнения

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)F = 0 \quad (1.2)$$

а комплексный постоянный вектор поляризации  $\mathbf{e}_\perp$  не зависит от координат  $(x, y)$ . Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и чаще всего используются. Трехмерные векторы электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей пучка с однородной поляризацией имеют вид [10]:

$$\mathbf{E} = \left( \mathbf{e}_\perp + \frac{i}{k} \nabla_\perp \mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{e}_z \right) F, \\ \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{n} \left( [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\perp] + \frac{i}{k} \nabla_\perp [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\perp] \cdot \mathbf{e}_z \right) F. \quad (1.3)$$

Здесь и далее  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении оси  $z$  пучка,  $n$  – показатель преломления среды,  $\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y$  – поперечный Лапласиан;  $k_0 = \omega / c$ ,  $n^2 = \varepsilon \mu$ ,  $k = k_0 n$ .

Для вычисления характеристик поляризации пучка можно разложить нормированный ( $|\mathbf{e}_{\perp}|^2 = 1$ ) вектор поляризации  $\mathbf{e}_{\perp}$  по декартовому базису  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , как

$$\mathbf{e}_{\perp} = \frac{\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y}{\sqrt{|\eta_x|^2 + |\eta_y|^2}}.$$

Здесь  $\eta_x$  и  $\eta_y$  – некоторые постоянные комплексные параметры, не зависящие от координат  $(x, y)$ . Тогда азимут  $\psi'$  и эллиптичность  $\gamma = \text{th } 2\psi''$  эллиптически поляризованных мод (1.3) в их поперечном сечении можно выразить через комплексный параметр  $\eta = \eta_y / \eta_x$  по формулам [9], [16]:

$$\text{tg } 2\psi' = \frac{2\text{Re}\eta}{1-|\eta|^2}; \quad \text{th } 2\psi'' = \frac{2\text{Im}\eta}{1+|\eta|^2}. \quad (1.4)$$

Плотности потока энергии  $w$ , продольного  $\mathbf{S}_{\parallel} = \mathbf{e}_z S_z$  и поперечного  $\mathbf{S}_{\perp}$  потоков энергии электромагнитного поля однородно поляризованных пучков соответственно равны [10]:

$$w = \frac{\varepsilon |F|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w; \quad (1.5)$$

$$\mathbf{S}_{\perp} = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \left( \text{Im}(F^* \nabla_{\perp} F) + \text{th } 2\psi'' [\nabla_{\perp}, \mathbf{e}_z] |F|^2 / 2 \right).$$

## 2 Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных световых пучков с однородной поляризацией

Будем называть гауссовоподобным пучок, у которого амплитуда аподизирована гауссианом [12]

$$G = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q}\right) \quad (2.1)$$

для того, чтобы пучок переносил конечную мощность. Тогда комплексную амплитуду гауссовоподобного пучка можно представить в форме  $F = Gh$ . (2.2)

В итоге трехмерные векторы электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей гауссовоподобного пучка с однородной поляризацией имеют вид

$$\mathbf{E} = G \left( \mathbf{e}_{\perp} + \left( \frac{i\mathbf{e}_{\perp} \nabla_{\perp}}{k} - \frac{\mathbf{e}_z \mathbf{r}_{\perp}}{k} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right) h,$$

$$\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{n} G \left( [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\perp}] - \frac{i}{k} \left[ \frac{\mathbf{r}_{\perp}}{q} - \frac{i\nabla_{\perp}}{k}, \mathbf{e}_z \right] \right) h. \quad (2.3)$$

Энергетические характеристики гауссовоподобных пучков:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} |Gh|^2, \quad S_z = \frac{c}{n} w = \frac{c\varepsilon}{8\pi} |Gh|^2.$$

Общая плотность потока энергии  $\mathbf{S}$  для векторных однородно поляризованных гауссовоподобных мод:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{n} w \left\{ \mathbf{e}_z + \text{th } 2\psi'' \left( \frac{[\nabla_{\perp}, \mathbf{e}_z] \cdot |h|^2}{2k|h|^2} + \frac{q_0'' \rho \mathbf{e}_{\rho}}{|q|^2} \right) + \left( \frac{z \mathbf{r}_{\perp}}{|q|^2} + \frac{\text{Im}(\psi^* \cdot \nabla_{\perp} h)}{k|h|^2} \right) \right\} \equiv \mathbf{S}_{\parallel} + \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_o. \quad (2.4)$$

Здесь мы преобразовали  $\mathbf{S}_{\perp}$  и выделили явно слагаемые, ответственные за плотность орбитального  $\mathbf{S}_o$  и спинового  $\mathbf{S}_s$  потоков энергии, следуя Бекшаеву [17], [18] и Берри [19].

## 3 Плотность потока энергии стандартных пучков Эрмита – Гаусса

В качестве примера конкретизируем общие выражения (2.4) для векторных sH-G пучков. Целесообразно перейти к безразмерным переменным [20]

$$X = \frac{x}{x_0}, \quad Y = \frac{y}{y_0}, \quad Z = \frac{z}{z_0}. \quad (3.1)$$

Здесь  $x_0$  и  $z_0 = kx_0^2 / 2$  – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям  $OX$  и  $OY$  соответственно. В безразмерных величинах гауссиан

$$G = \frac{1}{Q} \exp\left(\frac{iR^2}{Q}\right),$$

где  $R^2 = X^2 + Y^2$ .  $(X, Y, Z)$  – нормированные координаты. Безразмерный параметр пучка  $Q = q / z_0$ ;  $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{R}_{\perp} x_0$ .

Расходимость пучка определяется, как известно, в значительной степени расходимостью гауссиана [1], [2]. Полуугол расходимости гауссова пучка  $\theta_p = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ , где минимальный радиус

пучка в перетяжке  $w_0 = \sqrt{q_0'' \lambda / \pi}$ . Коэффициент параксиальности (отношение поперечного масштаба  $x_0$  к продольному  $z_0$ )  $\theta = \frac{x_0}{z_0} = \theta_p \frac{w_0}{z_0}$  по

порядку величины сравнимо с расходимостью гауссиана  $\theta$ . Поэтому коэффициент параксиальности  $\theta$  равен  $\theta_p$  при  $x_0 = w_0$ . Но, в общем случае, например, после прохождения пучка через линейную оптическую систему радиус пучка  $w_0$  изменяется, и тогда  $x_0 \neq w_0$ .

Комплексная скалярная амплитуда sH-G пучка  $F = Gh = GH_m H_n \exp(-i(m+n)\Phi_0)$  (3.2)

выражается через полиномы Эрмита  $H_m \equiv H_m(b^* X)$ ;  $H_n \equiv H_n(b^* Y)$ ; (3.3)

где  $b = \sqrt{\frac{2}{1+Z^2}}$ .

Подставляя (3.2) и (3.3) в (2.4) находим общую плотность потока энергии для векторных sH-G пучков в безразмерной форме:

$$\mathbf{S} = S_z \left\{ \mathbf{e}_z + \frac{\theta Z \operatorname{Re} \mathbf{e}_\rho}{1+Z^2} + \operatorname{th} 2\psi'' \frac{\theta}{1+Z^2} \times \right. \\ \left. \times \left( \operatorname{Re} \mathbf{e}_\varphi + \sqrt{2(1+Z^2)} \cdot \left( \mathbf{e}_x \frac{nH_{n-1}}{H_n} - \mathbf{e}_y \frac{mH_{m-1}}{H_m} \right) \right) \right\} \equiv (3.4) \\ \equiv \mathbf{S}_\parallel + \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s.$$

Здесь плотность продольного потока энергии  $S_z = \frac{c\varepsilon}{8\pi l} |GH_m H_n|^2$ , а  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  и  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi)$  – базисные векторы декартовой и цилиндрической систем координат соответственно.

Характерные закономерности поперечных потоков энергии представлены на рисунках 3.1 и 3.2.

Проведенные аналитические выкладки и графическое моделирование приводят к следующим выводам:

1. Плотность поперечного потока энергии значительно меньше продольного (вдоль оси пучка) потока, поэтому их отношение

$$|\mathbf{S}_\perp|/|S_z| \propto w_0/z_0$$

равно по порядку величины расходимости пучка  $\theta_\rho$ .

2. Плотность поперечного потока энергии электромагнитного поля пучка  $\mathbf{S}_\perp$  можно разделить на спиновую  $\mathbf{S}_s$ , зависящую от поляризации часть и на орбитальную  $\mathbf{S}_o$  часть, зависящую только от пространственной конфигурации пучка. Орбитальный поток  $\mathbf{S}_o$  для sH-G пучков направлен строго радиально. Однако спиновый поток энергии, зависящий от коэффициента поляризации  $t \equiv \operatorname{th} 2\psi''$ , имеет как азимутальную, так и радиальную компоненты.

3. При увеличении расстояния  $\rho$  от оси пучка радиальные потоки энергии  $\mathbf{S}_\rho$  уменьшаются медленнее, чем азимутальные  $\mathbf{S}_\varphi$  и поэтому постепенно радиальные потоки становятся преобладающими по сравнению с азимутальными (см. рисунок 3.2 (a)).

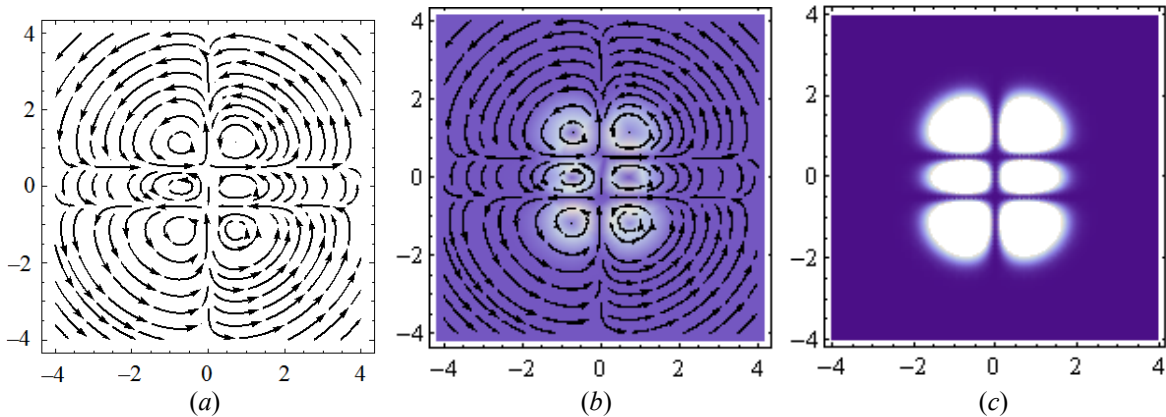


Рисунок 3.1 – (a) линии плотности  $\mathbf{S}_\perp$  потока энергии; (b) линии плотности  $\mathbf{S}_\perp$  потока энергии вместе с его интенсивностью; (c) полная интенсивность пучка. Общие параметры sH-G пучка:  $m = 1; n = 2; t = 1; Z = 0$

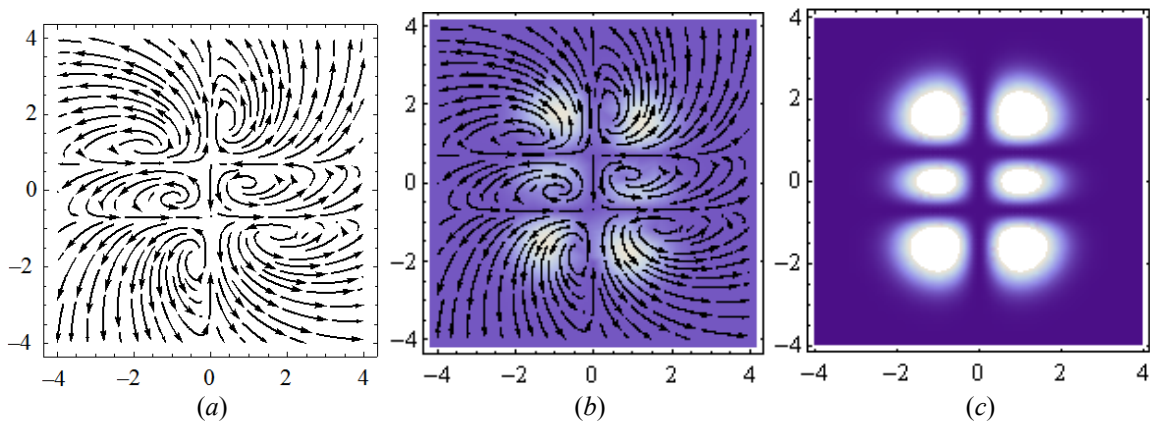


Рисунок 3.2 – (a) линии плотности  $\mathbf{S}_\perp$  потока энергии; (b) линии плотности  $\mathbf{S}_\perp$  потока энергии вместе с его интенсивностью; (c) полная интенсивность пучка. Общие параметры sH-G пучка:  $m = 1; n = 2; t = 1; Z = 1$

4. При линейной поляризации пучка (тогда  $t = 0$ ) азимутальный поток энергии строго равен нулю, а линии потока энергии представляют собой вытянутые гиперболы вокруг оси пучка  $z$ .

5. С увеличением степени поляризации  $t$  линии поперечных потоков энергии постепенно закручиваются. С возрастанием  $\rho$  или  $z$  эти линии постепенно раскручиваются.

6. С увеличением расстояния  $z$  от перетяжки пучка световое пятно увеличивается, как для кругового гауссова пучка. Световое пятно интенсивности в поперечном сечении пучка разделено на отдельные области (домены) темными линиями, в которых интенсивность обращается в нуль. Число доменов равно  $N = m \times n$ , где  $m$  и  $n$  – индексы полиномов Эрмита.

7. Темные линии описываются прямыми

$$x = c_m, \quad y = c_n,$$

где  $c_m$  и  $c_n$  – корни полиномов Эрмита  $H_m$  и  $H_n$  соответственно. Число прямых равно произведению индексов  $mn$ . В трехмерном пространстве этим линиям соответствуют цилиндрические поверхности с нулевой интенсивностью, вытянутые вдоль оси  $OX$  или  $OY$ . Эти поверхности разделяют пучок на области. Внутри каждой области потоки энергии автономны и не переходят в другие области.

8. На рисунках 3.1 и 3.2 (*a* и *b*) изображены графики линий поперечного потока энергии и его интенсивности. По интенсивности поток делится на несколько пятен, их число равно

$$N = (m + 1) \times (n + 1),$$

как и для пятен продольного потока. Однако расположение этих пятен и их форма только частично соответствуют пятнам продольного потока, что наглядно видно на рисунках 3.1 и 3.2.

9. В поперечной плоскости линии поперечного потока энергии представляют вихревые кривые (энергетические вихри). В центрах этих энергетических вихрей  $S_{\perp} = 0$  и остается только продольный поток энергии. Число вихрей равно числу пятен. Интересно, что при переходе через поверхности нулевой интенсивности направления вращения вихрей изменяются на противоположные.

10. Картина поперечных потоков энергии обладает точечной группой симметрии  $2_z m'_x m'_y$ , т.е. осью симметрии 2 порядка и плоскостями симметрии  $m'_x$  и  $m'_y$ . Штрихи при плоскостях симметрии  $m'_x$  и  $m'_y$  означают, что при отражениях также изменяются направления движения потоков энергии на противоположные.

11. Возвращаясь к общей картине, можно сказать, что линии полного потока энергии представляют собой пространственные кривые, имеющие небольшое кручение.

## Заключение

Найдены простые выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $S$  векторных гауссовоподобных пучков с однородной поляризацией. Найденные общие выражения могут непосредственно быть применены для других типов векторных гауссовоподобных пучков, например, для пучков Бесселя – Гаусса, Лагерра – Гаусса, Куммера – Гаусса.

В разделе 3 общие результаты конкретизированы для sH-G пучков. Установлено, что потоки энергии световых sH-G пучков разделяются на отдельные независимые области (домены). Существенно, что внутри каждой области потоки энергии автономны и не переходят в другие области.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М.: Наука, 1990.
2. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 144 с.
3. *Ардашев, А.Ю.* Некоторые свойства узкого монохроматического светового пучка / А.Ю. Ардашев, В.А. Кашин, Г.В. Скроцкий // Известия вузов. Радиофизика. – 1968. – Т. 11, № 12. – С. 1848–1851.
4. *Davis, L.W.* TM and TE electromagnetic beams in free space / L.W. Davis, G. Patsakos // Optics Letters. – 1981. – Vol. 8, № 1. – P. 22–23.
5. *Хаус, Х.* Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хаус. – М.: Мир, 1988. – 432 с.
6. *Shimoda, Koichi.* Vectorial analysis of the Gaussian beams of light / Koichi Shimoda // J. Phys. Soc. Japan. – 1991. – Vol. 60, № 1. – P. 141–144.
7. *Вайнштейн, Л.А.* Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
8. *Seshadri, S.R.* Electromagnetic Gaussian beam / S.R. Seshadri // J. Opt. Soc. Am. A. – 1987. – Vol. 15, № 22. – P. 2712–2719.
9. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 587 с.
10. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.
11. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 11–14.
12. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 19–24.
13. *Гиргель, С.С.* Поляризационные свойства бессель-гауссовых пучков света / С.С. Гиргель

// Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6 (9). – С. 149–154.

14. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных бessel-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 2. – С. 15–18.

15. Bandres, Miguel A. Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams / Miguel A. Bandres, Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2057.

16. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн.: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

17. Bekshaev, A.Y. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities /

A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Opt. Commun. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

18. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams // A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin / Journ. of Optics. – 2011. – Vol. 13, № 5. – 053001 (32 pp.).

19. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journ. of Optics. – A: Pure Appl. Opt. – 2009. – Vol. 11, № 9. – 094001 (12 pp.).

20. Гиргель, С.С. Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера–Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (13). – С. 11–16.

Поступила в редакцию 22.01.16.

УДК 577.3:541.182.6:535.5

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОЛЯРИЗАЦИИ-ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ ЖИДКОДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

В.А. Гольдаде<sup>1,2</sup>, Е.А. Цветкова<sup>1</sup>, И.В. Шаламов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

<sup>2</sup>Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

<sup>3</sup>ООО «ВИНЭКС», Минск

## SIMULATION OF POLARIZATION-DEPOLARIZATION PROCESSES IN LIQUID-DISPERSE SYSTEMS

V.A. Goldade<sup>1,2</sup>, E.A. Tsvetkova<sup>1</sup>, I.V. Shalamov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University

<sup>2</sup>V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of NAS of Belarus, Gomel

<sup>3</sup>Limited Company "VINEX", Minsk

Предложена физическая модель поляризационных процессов в жидкодисперсных системах, построенная на примере спиртового раствора поливинилбутирала и дисперсного феррита бария. Приведены экспериментальные и расчетные кинетические кривые поляризации и изотермической деполяризации для разных режимов поляризации (длительная поляризация при малых поляризующих токах, многократная кратковременная циклическая поляризация, кратковременная поляризация при больших токах). Модель деполяризации основана на релаксационных явлениях, обусловленных диффузионными процессами в поляризованных жидкодисперсных системах.

**Ключевые слова:** дисперсионная среда, поливинилбутираль, феррит бария, плотность тока, приэлектродный слой.

A physical model of polarization processes is proposed for liquid-disperse systems worked out on the example of solutions of butyral resin and dispersed barium ferrite. The experimental and theoretical curves of polarization and isothermal depolarization are given for different polarization parameters (long-term polarization under low polarization current, multiple short-term cyclic polarization, high-current short-term polarization). The depolarization model is based on the relaxation phenomena generated by diffusion processes in the polarized liquid-disperse systems.

**Keywords:** dispersion medium, current density, polarization, depolarization, near-electrode layer, voltage.

### Введение

Многокомпонентные жидкодисперсные системы (ЖДС), или коллоидные системы, широко распространены в природной среде и используются в медицине, промышленности и других областях человеческой жизнедеятельности [1]. Это полимерные гели, используемые для создания материалов с комплексом регулируемых свойств в медицинской технике, электронике и приборостроении; это природные воды, используемые в различных технологических процессах или подлежащие очистке и фильтрации; это буровые и тампонажные растворы, применяемые в бурении нефтяных и газовых скважин; наконец, это биологические жидкости организма человека – кровь и сыворотка крови, спинномозговая и синовиальная жидкости, моча и слюна, по изменению структуры и свойств которых можно судить о состоянии здоровья человека. Исследование ЖДС позволяет моделировать механизмы целевой доставки лекарств, лечебного действия лекарственных средств, а также дает новые данные для разработки матриц, на которых выращивают биоткани.

При исследовании многокомпонентных ЖДС широкое распространение получили методы

контроля структуры и состава коллоидных систем по их электрофизическим характеристикам [2]–[6], что объясняется богатыми возможностями методологии автоматизированного сбора и компьютеризированного анализа информации. К основным факторам, определяющим поведение ЖДС при электрофизических измерениях, относятся: размер и концентрация частиц, концентрация электролитов, диэлектрическая проницаемость, заряд и потенциал поверхности частиц, время релаксации заряда.

Путем анализа кинетических зависимостей тока деполяризации были установлены закономерности изменения структуры гелей поливинилового спирта, наполненных желатином, папаином и Na-КМЦ (натриевая соль карбоксиметилцеллюлозы) [7]–[10], и растворов поливинилбутирала (ПВБ) [11], что позволило оптимизировать составы ЖДС по критерию их структурной устойчивости. Установлено, что фактор устойчивости связан с существованием двойного электрического слоя на частицах [12]–[13] и определяется добавочной электростатической составляющей расклинивающего давления и энтропийной составляющей физико-химического взаимодействия компонентов систем. Таким образом,

о структурной устойчивости гелеобразных систем можно судить по анализу поляризационных процессов, протекающих в ЖДС при пропускании через них тока.

При изучении ЖДС на основе поливинилового спирта или спиртового раствора ПВБ, наполненных ферромагнетиками, установлено, что поляризационные свойства системы определяются состоянием магнетика (намагничен или не намагничен), характером формирования объемного заряда вблизи электродов и величиной тока поляризации. С увеличением тока поляризации происходит резкое «истощение» раствора (уменьшение концентрации частиц наполнителя в объеме), и наблюдается веерообразное расхождение кривых деполяризации при повторных измерениях [14]–[15]. Физическое моделирование поляризационных процессов в ЖДС может расширить представления о механизмах поляризации в таких системах.

Целью работы является моделирование процессов поляризации-деполяризации на примере жидкодисперсной малопробивающей системы «спиртовой раствор поливинилбутирала – феррит бария» (ПВБ-ФБ).

### 1 Материалы и методы исследования

Предметом исследования служила модельная система ПВБ-ФБ. Выбор ПВБ обусловлен его хорошей растворимостью в спиртах и чувствительностью к электромагнитным полям. Использовали ПВБ марки ПШ-1 с молекулярной массой (30–200) тыс. (ГОСТ 9439), спирт этиловый (ГОСТ 18300) и намагниченный порошок ФБ ( $\text{BaO} \cdot 6\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) с гексагональной плотноупакованной кристаллической решеткой и размером частиц 1–4 мкм (ТУ 6-09-591-81). Намагниченный ФБ обычно диспергирован в растворе в виде агломератов из 5–6 частиц. Концентрация раствора ПВБ в спирте была неизменной и составляла 7 мас. %. Концентрация феррита бария в ЖДС составляла 10 мас. %.

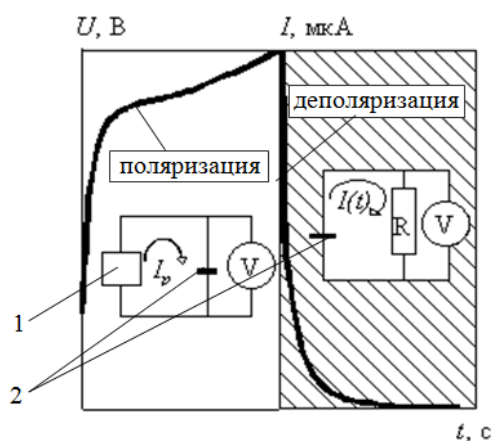


Рисунок 1.1 – Схема измерения поляризационных процессов в жидкодисперсных системах: 1 – источник тока; 2 – измерительная ячейка

Эксперименты проводили с помощью программно-аппаратного комплекса – анализатора дисперсных систем [16]. Для исследования использовали метод изотермической деполяризации (ИТД), основанный на релаксации заряда в поляризованном диэлектрике. ИТД является одним из методов комплексных электрофизических исследований для контроля ЖДС [4].

Исследуемую систему помещали в измерительную ячейку и пропускали ток поляризации  $I_p$  (диапазон токов от 100 до 1000 мкА), который поддерживали неизменным в течение каждого эксперимента посредством обратной связи. Регистрировали изменение во времени напряжения  $U(t)$  на ячейке (рисунок 1.1, левая часть), которое является величиной переменной и характеризует поляризацию системы. Изотермическую деполяризацию проводили в той же ячейке, измеряя ток деполяризации  $I(t)$  (рисунок 1.1, правая часть). В ряде случаев осуществляли повторные (многократные) измерения зависимостей  $U(t)$  через определенные равные промежутки времени  $\tau$  (циклическая поляризация-деполяризация).

### 2 Экспериментальные результаты

В процессе поляризации ЖДС наблюдается рост напряжения на ячейке при постоянном токе поляризации для любых значений  $I_p$  (рисунок 2.1, а). Характер кинетических кривых поляризации ЖДС отличается от аналогичных поляризационных зависимостей для ненаполненных растворов ПВБ [6] участком интенсивного роста напряжения, ограниченным во времени. Характерно, что площади под отрезками кривых, характеризующих эти участки, примерно равны для разных токов поляризации. Это свидетельствует о том, что реально в переносе заряда участвует одинаковое количество носителей, а рост напряжения на ячейке обусловлен концентрационной поляризацией, связанной с выходом частиц из объема ЖДС и локализацией объемного заряда в тонком приэлектродном слое.

Завершение участка интенсивного роста напряжения свидетельствует о полном «истощении» раствора и формировании приэлектродного зарядового слоя. Длительность этого процесса (в зависимости от величины тока поляризации) составляет от нескольких десятков до нескольких сотен секунд (рисунок 2.1, а).

Последующая деполяризация характеризуется экстремальными зависимостями тока от времени (рисунок 2.1, б), причем с увеличением тока поляризации максимум на кривой деполяризации смещается в область меньших времен.

Состояние «истощения» раствора может быть достигнуто как в результате многократных кратковременных циклов «поляризация-деполяризация» при малых токах поляризации (рисунок 2.2, а, б), так и почти сразу же при больших токах поляризации  $I_p = 1000$  мкА (рисунок 2.2, в).

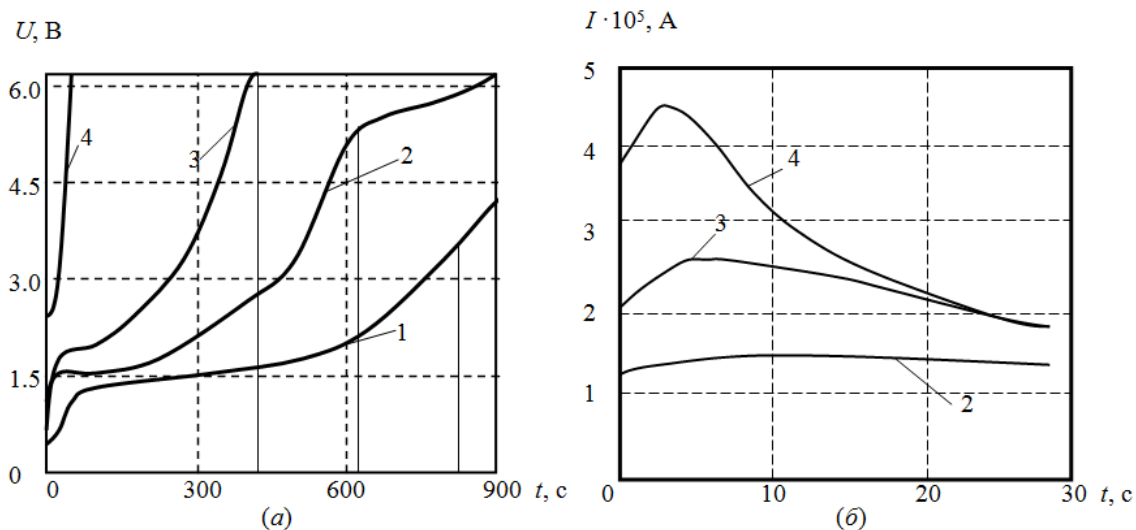


Рисунок 2.1 – Кинетические кривые процессов поляризации (а) и деполяризации (б) в системе «раствор ПВБ – ФБ» при разных токах поляризации (мкА): 1 – 100; 2 – 120; 3 – 200; 4 – 300. Шаг измерения 200 мс

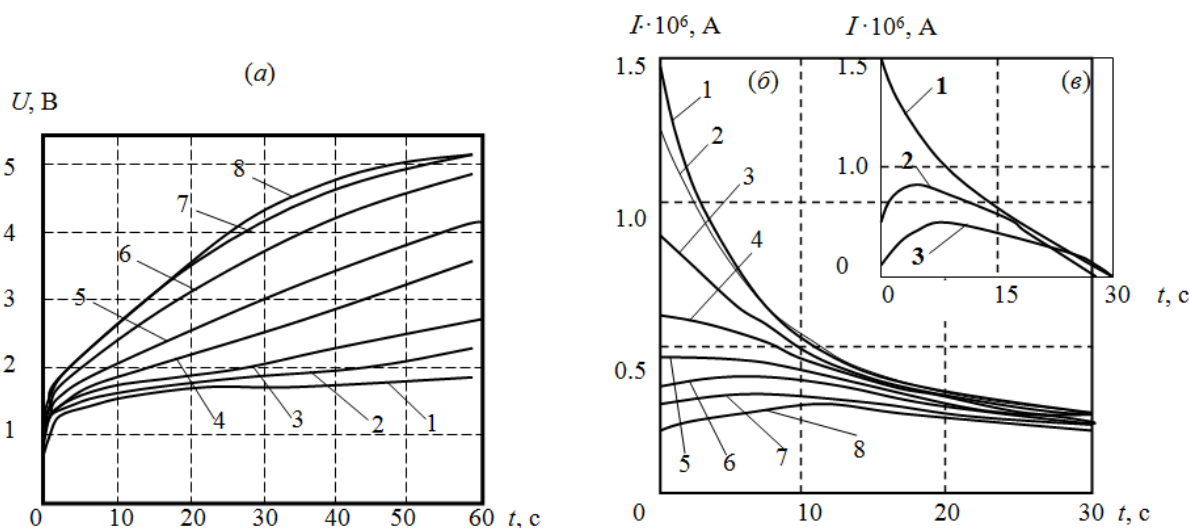


Рисунок 2.2 – Кинетика кратковременной циклической поляризации (а) и деполяризации (б, в) системы «раствор ПВБ – ФБ» при токах поляризации (мкА): а и б – 120, в – 1000. Номера на кривых соответствуют номеру цикла

Рисунок 2.2, (б) иллюстрирует процесс предельного «истощения» системы, достигнутого при многократных повторных измерениях через короткие ( $\tau = 180$  с) промежутки времени. Однако такое же состояние системы наблюдается и после длительного непрерывного воздействия тока поляризации, например, в течение 900 с. Сравнивая состояние системы после различных режимов поляризации, можно отметить следующее: кривая 3 на рисунке 2.2, (в) (результат кратковременной поляризации при больших  $I_p$ ) соответствует конечному измерению при малых токах поляризации (случай многократных кратковременных циклов, кривая 8 на рисунке 2.2, б) и идентична кривой 2 на рисунке 2.1, (б), отражающей

поляризационный процесс в системе, подвергнутой длительной поляризации при малом значении  $I_p$ . Таким образом, очевидно полное сходство кривых деполяризации, характеризующих конечное состояние системы, т. е. «истощение» раствора. Незначительные отклонения в абсолютных значениях токов деполяризации возникают в результате естественной разницы независимых проб, что влияет на погрешность эксперимента.

### 3 Теоретическая модель

#### 3.1 Процесс поляризации ЖДС

Поскольку ток в ячейке поддерживается постоянным, проводимость ЖДС снижается за счет носителей заряда, которые локализируются в



приэлектродных областях измерительной ячейки и перестают участвовать в переносе зарядов. Экспериментально установленное линейное изменение проводимости во времени [15] свидетельствует о том, что изменение количества носителей в объеме подчиняется выражению:

$$N(t) = N_0 - at, \quad (3.1)$$

где  $N_0$  – начальное количество носителей заряда в ячейке,  $a$  – некоторый коэффициент.

В силу линейности зависимости проводимости от времени, количество носителей заряда в ячейке, выходящих из процесса проводимости в единицу времени, есть величина постоянная:

$$\Delta N = I / q = const, \quad (3.2)$$

где  $q$  – эффективный (средний) заряд частицы.

Тогда количество частиц, участвующих в проводимости, в момент времени  $t$  равно:

$$N(t) = N_0 - \Delta N t = N_0 - I t / q. \quad (3.3)$$

В работе [15] отмечалось, что «эффект веера» (рисунок 2.2, а) начинает проявляться при значениях поляризующего тока  $I > I_{кр}$  (где  $I_{кр} = 100 \div 120$  мкА), которому соответствует критическая напряженность  $E_{кр}$  электрического поля в ячейке. Тогда действующее (эффективное) значение напряженности поля в ячейке можно представить как

$$E_{эфф} = E - E_{кр}, \quad (3.4)$$

где  $E$  – напряженность внешнего электрического поля.

Увеличение сопротивления образца при постоянном токе означает уменьшение числа носителей заряда, способных перемещаться в его объеме под влиянием внешнего электрического поля. Принимая формулу коллоидной частицы шарообразной, величину тока в ячейке в первом приближении можно определить по формуле [17]:

$$I(t) = qN(t)v(t) = q^2 N(t)E(t) / (6\pi\eta r) = q^2 N(t)U(t) / (6\pi\eta r d), \quad (3.5)$$

где  $q$  и  $r$  – заряд и условный (эффективный) радиус частицы,  $N(t)$  – число носителей заряда в пробе в момент времени  $t$ ,  $\eta$  – вязкость среды,  $E(t)$  – средняя напряженность электрического поля,  $d$  – расстояние между электродами,  $v(t)$  – скорость движения частиц,  $U = E / d$  – напряжение между электродами.

Исходя из уравнений (3.3)–(3.5), получим для тока уравнение в неявном виде:

$$I(t) = \frac{Sq^2 N(E - E_{кр})}{6\pi\eta r} = \frac{\beta q^2}{d} \left( N_0 - \frac{I(t)t}{q} \right) (U - U_{кр}), \quad (3.6)$$

где  $S$  – площадь электрода,  $U_{кр}$  – напряжение, соответствующее критической напряженности поля,  $\beta = \frac{S}{6\pi\eta r}$  – коэффициент, постоянный для данной ячейки и исследуемой пробы.

При  $E < E_{кр}$  частица ФБ остается неподвижной, ток в системе обусловлен наличием всегда присутствующих ионов электролитов (диссоциированные молекулы полимера и различные примеси), и по мере накапливающегося «истощения» раствора медленно повышается его сопротивление. При достижении напряженности поля значения  $E_{кр}$  частицы наполнителя приходят в движение. При этом ток поляризации можно представить как сумму двух составляющих: 1) квазипостоянной примесной и 2) связанной с движением частиц наполнителя в растворе:

$$I(t) = \begin{cases} I_0, & \text{при } E < E_{кр}; \\ I_0 + I_1, & \text{при } E \geq E_{кр}; \end{cases} \quad (3.7)$$

где  $I_0$  – «примесный» ток,  $I_1$  – ток, создаваемый дисперсной фазой.

Эксперимент показал [15], что величина  $I_0$  в случае раствора ПВБ без наполнителя тоже меняется во времени (хотя и слабо), то есть ее также следует считать переменной величиной (но для нее отсутствует  $E_{кр}$ ). Выражение (3.6) с учетом (3.7) для случая  $E \geq E_{кр}$  можно представить в следующем виде:

$$I(t) = \frac{\beta_1 q_1^2}{d} \left( N_{01} - \frac{I(t)t}{q_1} \right) U + \frac{\beta_2 q_2^2}{d} \left( N_{02} - \frac{I(t)t}{q_2} \right) (U - U_{кр}), \quad (3.8)$$

где индексы «1» и «2» относятся к двум видам физических носителей зарядов: «1» – к раствору ПВБ, «2» – к частицам ФБ.

Полученное выражение (3.8) моделирует процесс протекания тока в ячейке при поляризации ЖДС с учетом слабой проводимости раствора ПВБ и при наличии макроскопических частиц наполнителя (ФБ), способных перемещаться в растворе и создавать экранирующий слой в приэлектродных областях.

Для получения зависимости  $U = f(I, t)$ , которая является рабочим выражением, позволяющим численно смоделировать кинетику поляризации ЖДС, необходимо оценить значения коэффициентов  $\beta$  и их произведений  $\frac{\beta q^2}{d} N_0$ ,  $\frac{\beta q}{d}$  и  $qN_0$ , входящих в формулу (3.8). При значениях  $U < U_{кр}$  второе слагаемое в выражении (3.8) в соответствии с (3.7) обращается в нуль. Тогда

$$U(t) = \frac{I(t)}{\frac{\beta_1 q_1^2}{d} \left( N_{01} - \frac{I(t) \cdot t}{q_1} \right)}. \quad (3.9)$$

Для расчета коэффициентов использовали значения экспериментальных параметров процесса поляризации, приведенные в таблице 3.1.

Все коэффициенты с индексом «1» (для раствора ПВБ без наполнителя) рассчитывали по формуле (3.9). После подстановки полученных

значений коэффициентов в формулу (3.8) и учитывая экспериментальное значение критического напряжения  $U_{кр} = 1.4$  В, получаем значения коэффициентов с индексом «2» (для ферритонаполненной ЖДС). В таблице 3.2 приведены значения указанных коэффициентов.

Таблица 3.1 – Параметры режима поляризации

Ток поляризации $I$ , мкА	Время поляризации $t$ , с	Напряжение на ячейке $U$ , В
<i>Раствор ПВБ</i>		
100	0	1.294
100	90	1.361
<i>Раствор ПВБ + 10 % ФБ</i>		
100	900	4.604
200	400	6.420

Таблица 3.2 – Рассчитанные значения коэффициентов

$\frac{\beta q^2}{d} N_0 \cdot 10^5, \frac{A}{B}$	$\frac{\beta q}{d} \cdot 10^4, (В \cdot с)^{-1}$	$qN_0$ , Кл
<i>Раствор ПВБ</i>		
7.72	4.22	0.183
<i>Раствор ПВБ + ФБ</i>		
5.97	9.42	0.063

Подставив рассчитанные значения коэффициентов в формулу (3.8), после несложных преобразований получаем зависимость  $U = f(I, t)$  для различных режимов поляризации:

$$U(t) = \begin{cases} \frac{10^4 I}{0.772 - 4.22 I t}, & \text{при } U < U_{кр}; \\ \frac{10^4 I + (0.84 - 13.19 I t)}{1.37 - 13.64 I t}, & \text{при } U \geq U_{кр}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Здесь ток  $I$  – в амперах, а время  $t$  – в секундах.

На рисунке 3.1 представлены результаты расчета кинетических кривых поляризации по формуле (3.10). Видно, что расчетные кривые достаточно хорошо совпадают с экспериментальными (рисунок 2.1, а) за исключением начального участка, характеризующего проводимость дисперсионной среды (раствора ПВБ), которая не учитывалась в данной модели. Следовательно, имея известные характеристики дисперсионной среды (вязкость раствора) и наполнителя (размер и концентрация частиц) можно заранее, до приготовления ЖДС, оценить ход и основные параметры кинетических кривых процесса поляризации.

Рассмотрим качественно эффект появления «веера» при последовательных циклах «поляризация-деполяризация» через равные промежутки времени  $\tau$  (интервал между измерениями). В процессе поляризации ячейки объемный заряд формируется в узких приэлектродных областях. В каждом цикле после отключения внешнего

поляризующего напряжения образец представляет собой неравновесную систему с избыточными концентрациями носителей зарядов в приэлектродных областях. При изотермической выдержке происходит рассеяние зарядов вследствие диффузионных процессов, и образец деполяризуется. Оставляя вне рассмотрения диссипативные процессы, установим влияние изотермической выдержки на характер процесса «поляризация-деполяризация».

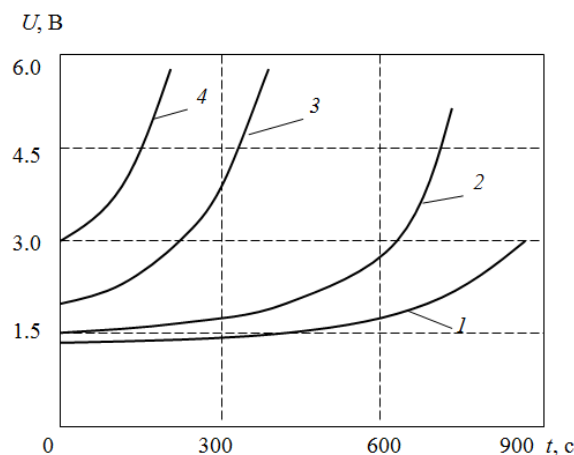


Рисунок 3.1 – Расчетные кинетические кривые процесса поляризации в системе «раствор ПВБ–ФБ»; токи поляризации  $I_p$  (мкА): 1 – 100; 2 – 120; 3 – 200; 4 – 300

По истечении времени  $t$  на электроде накопится  $It/q$  частиц. Считаем, что за пределами слоя толщины  $\delta$  заряды отсутствуют ( $\delta \approx 10^{-6}$  м) [18]. Концентрация частиц будет равна

$$c(t) = \frac{It}{qS\delta}, \quad (3.11)$$

где  $S$  – площадь электрода.

Учитывая, что количество вещества в слое, отнесенное к единице площади,

$$c(t) \cdot \delta S = It/q = const,$$

то изменение концентрации частиц за время  $\tau$  в процессе изотермической выдержки можно описать известной формулой [19, с. 431]:

$$c(x, \tau) = \frac{I\tau}{q\sqrt{\pi D\tau}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4D\tau}}, \quad (3.12)$$

где  $D = kT / (6\pi\eta r)$  – коэффициент диффузии частиц.

В системе присутствуют частицы с двумя характерными размерами:  $\sim 10^{-8}$  м (молекулы ПВБ) и  $\sim 0,5 \cdot 10^{-7}$  м (ФБ). В спиртовом растворе ПВБ ( $\eta \approx 1$  Па·с) для молекул ПВБ  $D \approx 2 \cdot 10^{-13}$  м<sup>2</sup>/с, для частиц ФБ  $D \approx 4,3 \cdot 10^{-16}$  м<sup>2</sup>/с. Для двух последовательных интервалов времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соотношение концентрации будет следующим:

$$\frac{c(\tau_1)}{c(\tau_2)} = \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{4D} \frac{\Delta\tau}{\tau_1\tau_2}}. \quad (3.13)$$

Тогда, подставляя значения указанных величин в (3.13) и принимая  $\tau_1 = 1$  с,  $\tau_2 = 180$  с, получаем отношение  $\alpha = c(\tau_1) / c(\tau_2)$ , которое определяет, во сколько раз снизится концентрация частиц в приэлектродном слое после изотермической выдержки ячейки в течение 180 с. Концентрация частиц в приэлектродном слое в разные моменты времени определяет количество частиц, участвующих в проводимости:

$$\frac{c(\tau_1)}{c(\tau_2)} = \frac{N_2}{N_1} = \alpha. \quad (3.14)$$

Так, для частиц ПВБ в растворе  $\alpha = 4,29$ , а для частиц ФБ  $\alpha = 0,6$ .

Поскольку время поляризации в каждом цикле одно и то же, величина дискретного изменения концентрации носителей в объеме ячейки неизменна, т. е.  $jt / q = const$ . Часть локализованных у электрода частиц после первого цикла поляризации возвращается в результате диффузии в раствор, и к концу изотермической выдержки в течение времени  $\tau$  выражение для количества частиц в ячейке с учетом (3.13) и (3.14) будет иметь вид (второй цикл):

$$N_{02} = N_{01} - \frac{It}{q} + (1-\alpha) \frac{It}{q} = N_{01} - \alpha \frac{It}{q}. \quad (3.15)$$

Соответственно, третий цикл даст величину

$$N_{03} = N_{01} - 2\alpha \frac{It}{q}, \text{ а для } k\text{-го цикла получим ре-}$$

$$\text{зультирующее значение } N_{0k} = N_{01} - (k-1) \cdot \alpha \frac{It}{q}.$$

Учет этого явления позволяет уточнить расчетную формулу (3.10) для случая  $U \geq U_{кр}$ :

$$U(t) = \frac{I \cdot 10^4 + [0,84 - (13,19 + \alpha(k-1)) \cdot It]}{1,37 - [13,64 + \alpha(k-1)] \cdot It}. \quad (3.16)$$

Расчет по формуле (3.16) дает совокупность веерообразных кривых (рисунок 3.2), соответствующих наблюдаемым в эксперименте поляризационным кривым, повторно измеренным через равные промежутки времени (рисунок 2.2, а).

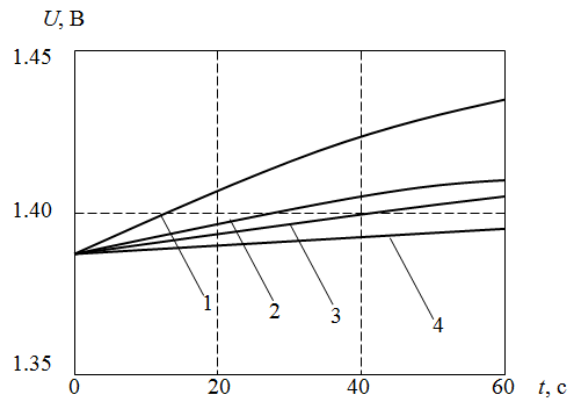


Рисунок 3.2 – Расчетные кинетические кривые процесса поляризации в системе «ПВБ-ФБ» для тока поляризации 110 мкА. Номера кривых соответствуют номеру цикла (измерения через 180 с)

### 3.2 Процесс изотермической деполяризации ЖДС

Теперь рассмотрим физическую модель процесса изотермической деполяризации ЖДС. Экспериментально обнаруженное явление экстремального поведения тока деполяризации во времени свидетельствует о том, что в системе присутствуют носители заряда разного знака, создающие в процессе поляризации различные по размеру и заряду приэлектродные заряженные области. Плотность тока деполяризации в такой системе, в соответствии с [20, с. 26], можно описать выражением:

$$j = j^+ - j^- = \frac{q_+ n_0^+ x_0^+}{2d} \cdot \frac{dx^+}{dt} - \frac{q_- n_0^- x_0^-}{2d} \cdot \frac{dx^-}{dt}, \quad (3.17)$$

где надстрочные индексы (+) и (-) относятся к величинам, характеризующим, соответственно, положительно и отрицательно заряженные приэлектродные области;  $x_0$  – толщина приэлектродного слоя, в котором локализован поляризационный заряд;  $n_0^{(\pm)}$  – его начальная концентрация;  $\frac{dx}{dt}$  – средняя скорость перемещения зарядов.

Следует отметить, что формула (3.17) справедлива для случая, когда  $\frac{x_0}{2d} \ll 1$ , т. е. приэлек-

тродные области зарядов не перекрываются, что соответствует случаю малопроводящих ЖДС.

С физической точки зрения плотность тока  $j$  определяется суммой противоположно направленных токов. В результате процесса деполяризации, когда скорости «рассасывания» зарядов

близки между собой  $\left( \left| \frac{dx^+}{dt} \right| = \left| \frac{dx^-}{dt} \right| \right)$ , то с учетом

величин коэффициентов диффузии носителей зарядов, зависимость тока деполяризации от времени приобретает экстремальный характер. Для рассматриваемого нами случая «рассасывания» заряда ограничимся механизмом диффузии, являющимся основным лимитирующим фактором в малопроводящих системах.

При деполяризации происходит перемещение границы приэлектродного слоя от электрода внутрь объема ячейки. В этом случае концентрацию частиц на расстоянии  $x$  от электрода в момент времени  $t$  можно определить по следующей формуле [19, с. 431]:

$$n^\pm(x, t) = \frac{n_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (3.18)$$

Каждое приэлектродное зарядовое облако действует на другое (до их соприкосновения) как единое целое с эффективным зарядом, помещенным в центре масс облака. Таким образом, можно заменить поляризованный объем вещества в ячейке электрическим квазидиполем с зарядами на концах, равными общему заряду каждой приэлектродной области, причем заряды не равны

по абсолютной величине, поскольку реакции на электродах несимметричны.

Координаты центра масс определяем из выражения:

$$x' = \frac{1}{n_0} \int_0^x x \cdot n^\pm(x, t) dx, \quad (3.19)$$

или с учетом (3.18) и последующих преобразований:

$$x' = \sqrt{\frac{4Dt}{\pi}} \left( 1 - e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right). \quad (3.20)$$

Дифференцируя  $x'$  по времени и произведя некоторые преобразования, получим скорость перемещения центра масс

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{2t} \sqrt{\frac{4Dt}{\pi}} \left( 1 - e^{-\frac{3x^2}{4Dt}} \right), \quad (3.21)$$

которую можно приравнять к средним скоростям перемещения зарядов  $\frac{dx^+}{dt}$  и  $\frac{dx^-}{dt}$ , входящих в (3.17). Тогда выражение (3.17) примет вид:

$$j = a \frac{dx^+}{dt} - b \frac{dx^-}{dt} = \frac{a}{2t} \sqrt{\frac{4D_1t}{\pi}} \left( 1 - e^{-\frac{3x^2}{4D_1t}} \right) - \frac{b}{2t} \sqrt{\frac{4D_2t}{\pi}} \left( 1 - e^{-\frac{3x^2}{4D_2t}} \right), \quad (3.22)$$

где  $a = \frac{q_+ n_0^+ x_0^+}{2d}$ ,  $b = \frac{q_- n_0^- x_0^-}{2d}$ ;  $D_1$  и  $D_2$  – коэффициенты диффузии положительно и отрицательно заряженных частиц, соответственно.

Оценку величины коэффициентов диффузии можно осуществить по формуле Эйнштейна [19, с. 433]:  $\sqrt{\Delta^2} = \sqrt{2D\tau}$ , где  $\Delta$  – среднее смещение частицы за время  $\tau$ . Принимая  $\Delta$  равным расстоянию между электродами ( $d = 5$  мм), а время перемещения частицы  $\tau \approx 30$  с, получим значение коэффициента диффузии для ПВБ в растворе  $D_1 \approx 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Исходя из физических соображений, можно предположить, что для ферритовых частиц коэффициент диффузии меньше как минимум на 2–3 порядка, поэтому принимаем  $D_2 \approx 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с.

Численные значения коэффициентов  $a$  и  $b$  в уравнении (3.22) получаем, подставляя значения  $qN_0$  из таблицы 3.2 и учитывая, что область локализации для ПВБ имеет толщину около  $10^{-5}$  м. Получим значения коэффициентов  $a = 4 \cdot 10^{-7}$  Кл/м<sup>3</sup> и  $b = 0.85 \cdot 10^{-7}$  Кл/м<sup>3</sup>. Следует отметить, что коэффициент  $b$  меняется дискретно при последовательных циклических измерениях, достигая предельного значения, соответствующего параметрам в таблице 3.2.

Принимая  $x = 0,5 d$  (условие соприкосновения диффундирующих приэлектродных слоев) и подставляя значения всех рассчитанных коэффициентов в формулу (3.22), можно построить кинетические кривые деполяризации (рисунок 3.3).

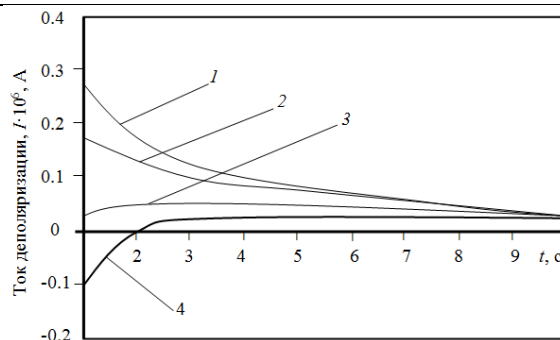


Рисунок 3.3 – Кинетические кривые процесса циклической деполяризации в системе «раствор ПВБ – ФБ», рассчитанные для тока поляризации  $I_p = 100$  мкА. Номера кривых соответствуют номеру цикла

Характер расчетных зависимостей процесса деполяризации соответствует виду экспериментальных кривых (рисунок 2.2, б). Начальные значения рассчитанных токов деполяризации имеют порядок  $10^{-7}$  А, реально наблюдаемые в эксперименте величины составляют  $(0,3–1,5) \cdot 10^{-6}$  А. Учитывая принятые допущения, согласие вполне удовлетворительное.

### Заключение

Представленная модель имеет феноменологический характер и может служить для понимания общих закономерностей процессов поляризации–деполяризации жидкодисперсных систем и планирования экспериментов.

Несмотря на ряд допущений, которые были сделаны при построении настоящей модели (пренебрежение градиентом проводимости в приэлектродных областях, электрохимическими процессами на поверхности электродов, ориентационными эффектами), она позволяет оценить характер и предвидеть вид кинетических зависимостей процесса поляризации–деполяризации ЖДС. Для упрощения расчетов мы предположили соответствие соотношений коэффициентов диффузии и размеров диффундирующих частиц.

Для процесса поляризации проведено ограниченное количество измерений и получено выражение, представляющее собой многофакторную зависимость (уравнение (3.8)). Это уравнение отражает собой феноменологическую модель, полученную из определенных теоретических представлений, а коэффициенты имеют обоснованный физический смысл. Аналогичные рассуждения можно привести по отношению к выражению (3.16). Отметим, что расчётные значения на рисунке 3.1 соответствуют экспериментально полученным значениям (рисунок 2.1, а), а рисунок 3.2 отражает зависимости, сходные с приведенными на рисунке 2.1, (б).

Предложенная феноменологическая модель процессов поляризации–деполяризации может

служить научным обоснованием расчетов критической концентрации структурообразующих компонентов и методов повышения стабильности поляризуемых гелевых систем. Развитие модели с учетом размеров и электрических свойств предполагаемых компонентов коллоидной системы позволит, например, создать средства целевой доставки лекарственных препаратов в заданную область организма, высвобождая лекарство путем деполяризации коллоидной структуры; или рассчитать допустимые концентрации целевых компонентов в буровых растворах, применяемых в бурении нефтяных и газовых скважин.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Dhirendra, K.* Solid dispersions: a Review / K. Dhirendra, S. Lewis, K. Atin // Pak. J. Pharm. Sci. – 2009. – Vol. 22, № 2. – P. 234–246.
2. *Measurement and interpretation of electrokinetic phenomena* / F.V. Delgado, F. Gonzales-Caballero, R.J. Hunter, L.K. Koopal, J. Lyklema // J. of Colloid and Interface Science. – 2007. – Vol. 309. – P. 194–224.
3. *Сорока, И.Ф.* Электрофизиологическое исследование сыворотки крови больных ревматическими заболеваниями в сочетании с инфицированием вируса гепатита С / И.Ф. Сорока // Российский гастроэнтерологический журнал. – 1998. – № 4. – С. 22.
4. *Исследование электрофизических свойств жидкодисперсных систем методом изотермической деполяризации* / И.В. Шаламов, И.Ю. Ухарцева, Е.А. Цветкова, В.А. Гольдаде // Материаловедение. – 2003, № 3. – С. 26–30.
5. *Электрофизический метод контроля жидкодисперсных систем* / И.В. Шаламов, Л.С. Пинчук, И.Ю. Ухарцева, Е.А. Цветкова // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2001. – Т. 6, № 2. – С. 22–26.
6. *Шаламов, И.В.* Применение кондуктометрического метода при изучении структуры полимерных растворов / И.В. Шаламов, В.А. Гольдаде, Е.А. Цветкова // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2007. – Т. 12, № 3. – С. 94–101.
7. *Поляризационные характеристики наполненных гелей на основе поливинилового спирта* / И.Ю. Ухарцева, И.В. Шаламов, Е.А. Цветкова, Л.С. Пинчук // Пластические массы. – 1998. – № 6. – С. 40–42.
8. *Ухарцева, И.Ю.* Свойства наполненных гелей на основе ПВС / И.Ю. Ухарцева, Е.А. Цветкова // Полимерные композиты' 98: Сборник трудов между. науч.-технич. конф., Гомель, 29–30 сентября 1998 г. / ИММС НАНБ. – Гомель, 1998. – С. 195–198.
9. *Tsvetkova, E.* Electrophysical properties of gel systems based on high-molecular compounds / E. Tsvetkova, I. Ukhartseva // Acta of Bioengineering and Biomechanics. – 2002. – Vol. 4, Suppl. 1. – P. 703–704.
10. *Поляризационные характеристики наполненных гелей на основе поливинилового спирта* / И.Ю. Ухарцева, И.В. Шаламов, Е.А. Цветкова, Л.С. Пинчук, И.Н. Полосина // Пластические массы. – 1998. – № 6. – С. 40–42.
11. *Феноменологическая модель процесса поляризации слабопроводящих жидкодисперсных систем* / В.А. Гольдаде, И.В. Шаламов, Е.А. Цветкова, И.Ю. Ухарцева, Е.А. Сементовская // Между. научно-технич. конф. «Поликом – 2003». – 22–24 июня 2003 г. / ИММС НАН Беларуси. – Гомель, 2003. – С. 102–103.
12. *Lyklema, J.* Structure of solid/liquid interface and the electrical double layer / J. Lyklema // Solid-Liquid Dispersions; In Th. F. Tadros, Ed. – Academic Press, London, 1987. – P. 63–90.
13. *Ch.-F. Lin.* Adsorption mechanisms of ion colloidal systems / Ch.-F. Lin, Sh.-L. Lo, Ch.-H. Wu // Encyclopedia of Surface and Colloid Science; In: P. Somasundaran, Ed. NW: Taylor & Francis. – 2006. – Vol. 1. – P. 332–410.
14. *Свойства ферритонаполненных систем на основе ВМС. 1. Исследование электрофизических свойств ферритонаполненных гелей на основе поливинилового спирта* / И.Ю. Ухарцева, И.В. Шаламов, Е.А. Цветкова, В.А. Гольдаде // Пластические массы. – 2000. – № 7. – С. 5–8.
15. *Свойства ферритонаполненных систем на основе ВМС. 2. Кинетика поляризации мало-проводящих ферритонаполненных жидкодисперсных систем на основе спиртового раствора ПВБ* / Е.А. Цветкова, И.В. Шаламов, И.Ю. Ухарцева, Е.А. Сементовская, В.А. Гольдаде // Пластические массы. – 2001. – № 11. – С. 27–29.
16. *Программно-аппаратный комплекс АИР-1 для контроля жидкодисперсных систем* / И.В. Шаламов, И.Ю. Ухарцева, Е.А. Цветкова, В.А. Гольдаде // Приборы и техника эксперимента. – 2002. – № 6. – С. 143–144.
17. *Фоменко, Е.Б.* Приповерхностный объемный заряд и электропроводность в жидких углеводородах / Е.Б. Фоменко, Э.К. Жолковский, Ю.Ф. Дейнега // Коллоидный журнал. – 1986. – Т. 48, вып. 2. – С. 377–380.
18. *Мицук, Н.А.* Объемный заряд проводящей частицы в режиме запердельного тока / Н.А. Мицук, С.С. Духин // Коллоидный журнал. – 1990. – Т. 52, № 3. – С. 497–501.
19. *Сирота, Н.Н.* Термодинамика и статистическая физика / Н.Н. Сирота. – Минск: Высшая школа, 1969. – 470 с.
20. *Гороховатский, Ю.А.* Термоактивационная токовая спектроскопия высокоомных полупроводников и диэлектриков / Ю.А. Гороховатский, Г.А. Бордовский. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 248 с.

Поступила в редакцию 24.09.15.

УДК 621.383.51

## ПОВЫШЕНИЕ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ СОЕДИНЕНИЯ $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$

А.К. Есман, В.А. Потачиц, Г.Л. Зыков

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

## ENERGY EFFICIENCY OF THIN-FILM SOLAR CELL ON THE BASIS OF THE $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$

A.K. Esman, V.A. Potachits, G.L. Zykov

*Belarusian National State University, Minsk*

Рассмотрены вопросы влияния температуры тонкопленочных солнечных элементов на основе соединения  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  на их характеристики при различных значениях толщины поглощающего слоя и концентрации галлия. Определены оптимальные значения толщины поглощающего слоя, проведено моделирование вольт-амперных характеристик для рассматриваемой конструкции солнечного элемента. Показано, что при толщине поглощающего слоя, равной 3 мкм, КПД солнечного элемента может достигать 22,65 % с коэффициентом заполнения  $FF = 82,31$  %, напряжением холостого хода  $V_{oc} = 0,81$  В и током короткого замыкания  $J_{sc} = 33,93$  мА/см<sup>2</sup>.

**Ключевые слова:** тонкопленочный солнечный элемент  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$ , прозрачный проводящий слой, буферный слой, поглощающий слой, концентрация галлия, AMPS-1D, SCAPS-1D, Comsol Multiphysics.

The problems of the temperature effects of thin-film solar cells on the basis of  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  compound on their characteristics at the different values of the thickness of the absorbing layer and the gallium concentration are considered. The optimal values of the absorbing layer thickness are determined. The simulation of the current-voltage characteristics of the considered design of the solar cell are carried out. It is shown that the efficiency of the solar cell can reach 22.65 % with the fill factor  $FF = 82.31$  %, open circuit voltage  $V_{oc} = 0.81$  V, short circuit current  $J_{sc} = 33.93$  mA/cm<sup>2</sup> when the optimal thickness of the absorbing layer is equal to 3 μm.

**Keywords:**  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  thin-film solar cell, transparent conductive layer, buffer layer, absorption layer, gallium concentration, optimization, AMPS-1D, SCAPS-1D, Comsol Multiphysics.

### Введение

В настоящее время проводятся исследования, направленные на оптимизацию технологических процессов производства солнечных элементов и на повышение их энергоэффективности с целью снижения стоимости фотоэлектрических модулей. Применение компьютерного моделирования позволяет без существенных финансовых затрат провести оценку работоспособности солнечных элементов, нагреваемых в процессе их эксплуатации. Как правило, для тонкопленочных солнечных элементов используются три материала – CIGS, CdTe и аморфный кремний (a-Si). Лидером по эффективности среди тонкопленочных солнечных элементов является технология CIGS (на основе соединения  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$ ). По сравнению с кремнием соединение  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  является полупроводником с прямой запрещенной зоной, это означает, что для производства солнечного элемента требуется меньшее количество материала.

В настоящее время экспериментально установленный коэффициент полезного действия тонкопленочного солнечного элемента  $\text{Cu(In,Ga)Se}_2$  составляет 21,7 % [1]. Для повышения эффективности многопереходных солнечных элементов нужно согласовать токи в отдельных слоях и

общий ток. Варьируя соотношение  $\text{Ga}/(\text{In}+\text{Ga})$  в поглощающем слое за счет изменения ширины запрещенной зоны  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  можно согласовать генерируемый в нем ток и оптимизировать зону проводимости. Как следует из [2], увеличение плотности дефектов в материалах происходит в результате увеличения концентрации галлия. Если концентрация галлия  $x < 0,6$ , то эти дополнительные дефекты уже не оказывают значительного влияния на эффективность исследуемой структуры.

В данной работе рассмотрены структуры тонкопленочных солнечных элементов  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  с концентрациями галлия в пределах  $0,183 \leq x \leq 0,529$ .

Целью работы является определение оптимальных значений толщины поглощающего слоя и концентрации галлия тонкопленочных солнечных элементов  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  в диапазоне рабочих температур от 300 до 330 К.

### 1 Структура тонкопленочного солнечного элемента $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$

Исследуемая структура солнечного элемента  $\text{Cu(In,Ga)Se}_2$  представлена на рисунке 1.1.

На подложку из нержавеющей стали толщиной 3 мм, нанесен тонкий слой молибдена (Mo), который образует металлический электрод 5.

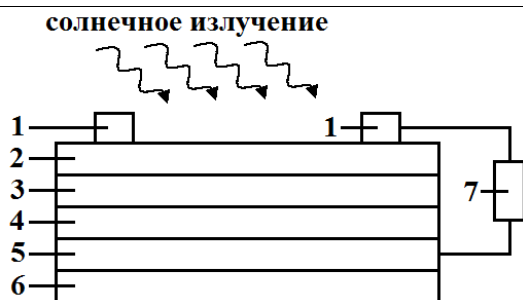


Рисунок 1.1 – Структура тонкопленочного солнечного элемента  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$ , где:  
1 и 5 – металлические электроды,  
2 – прозрачный проводящий слой,  
3 – буферный слой, 4 – поглощающий слой,  
6 – подложка, 7 – внешняя нагрузка

Он расположен под поглощающим слоем 4 тонкопленочного солнечного элемента  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$ , собирает от него носители и передает их внешней нагрузке 7. Оптические свойства материала электрода 5 не оказывают существенного влияния на характеристики тонкопленочного солнечного элемента, поскольку при толщине более 1,5 мкм (в расчетах мы использовали 2 мкм) падающие фотоны не достигают металлического электрода 5. До настоящего времени наилучшие результаты были получены при использовании металлического электрода 5 из молибдена, который использовался в расчетах. Указанный электрод формирует неблокирующий контакт с поглощающим слоем 4, что является преимуществом по сравнению с солнечными элементами на основе  $\text{CdTe}$ , в котором образуется барьер Шоттки и является основным препятствием для коммерциализации из-за проблем со стабильностью. На электрод 5 нанесен поглощающий слой 4 – прямозонный полупроводник с коэффициентом поглощения  $\sim 10^5 \text{ см}^{-1}$ , поглощающий солнечное излучение и генерирующий фотоэдс. Толщину данного слоя варьировали в пределах 1–3 мкм. Буферный слой 3 из  $\text{CdS}$  толщиной 50 нм и прозрачный проводящий слой 2 из  $\text{ZnO}$  толщиной 50 нм нанесены на верхнюю часть поглощающего слоя 4. В [3] оптимальная толщина буферного слоя из  $\text{CdS}$  составляла 50–60 нм. Буферный слой 3 повышает производительность солнечного элемента, обеспечивает формирование хорошего перехода, низкую рекомбинацию на границе раздела и уменьшает утечку. Солнечные элементы с буферным слоем из  $\text{CdS}$ , по сравнению с другими используемыми материалами, наиболее эффективны при длительной эксплуатации. Для увеличения числа фотонов, поглощаемых в слое  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$ , в качестве материала прозрачного проводящего слоя 2 был выбран  $\text{ZnO}$ , имеющий большую ширину запрещенной зоны (3,3 эВ) и являющийся прозрачным для спектра солнечного излучения. Данный слой толщиной 50 нм расположен на верхней поверхности исследуемого солнечного

элемента для уменьшения потерь на отражение. Металлические электроды 1, располагающиеся на прозрачном проводящем слое 2, определены функцией работы и скоростью поверхностной рекомбинации носителей заряда. Внешняя нагрузка 7 подключена между отрицательным 1 и положительным 5 электродами. Исследуемая конструкция солнечного элемента освещается излучением со спектром стандарта AM1.5G, плотность суммарного потока энергии которого равна  $1 \text{ кВт/м}^2$ .

## 2 Численное моделирование основных характеристик

Для моделирования основных характеристик тонкопленочного солнечного элемента CIGS при варьировании толщины поглощающего слоя и концентрации галлия и индия использовались программы AMPS-1D и SCAPS-1D, которые позволяют численно решать уравнение Пуассона и уравнения непрерывности для электронов и дырок и могут применяться даже для расчета наноструктурированных тонкопленочных солнечных элементов [4].

Одним из важных условий надежной работы солнечных элементов является температурный режим. С повышением температуры эффективность работы солнечных батарей, как и почти всех других полупроводниковых приборов, снижается. При температурах выше  $100\text{--}125 \text{ }^\circ\text{C}$  они вообще могут временно потерять работоспособность, а ещё больший нагрев грозит их необратимым повреждением.

Для анализа тепловых процессов и их влияния на основные характеристики тонкопленочных солнечных элементов CIGS мы использовали программную среду Comsol Multiphysics (модуль Heat Transfer), которая обеспечивает все этапы моделирования, начиная от определения геометрических параметров и заканчивая визуализацией полученных результатов. В данной программной среде процесс теплообмена представлен в виде системы дифференциальных уравнений теплопроводности в частных производных.

## 3 Анализ полученных результатов

Согласно результатам моделирования, исследуемый солнечный элемент CIGS может нагреваться от 300 до 330 К в течение  $\sim 0,5$  секунды. При этом разность температур на границах раздела  $\text{CdS/CIGS}$  и  $\text{CIGS/Мо}$  составляет  $\sim 30 \text{ К}$  и  $\sim 0,3 \text{ К}$  соответственно. В начальный момент нагрева тонкопленочного солнечного элемента CIGS скорость изменения температуры прозрачного проводящего слоя составляет  $0,95 \text{ К/мс}$  (рисунок 3.1). При продолжении нагрева тонкопленочного солнечного элемента CIGS скорость изменения температуры прозрачного проводящего слоя снижается, а поглощающего слоя – возрастает и в момент времени 2,5 мс (кривые 1 и 2, рисунок 3.1)

и 19 мс (кривые 1 и 3, рисунок 3.1) эти скорости становятся равными. Последующий нагрев приводит к дальнейшему увеличению скорости изменения температуры до величин 0,78 К/мс и 0,13 К/мс на глубину соответственно 0,5 мкм и 1,5 мкм от границы раздела CdS/CIGS. После достижения максимальных значений данные скорости (кривые 2 и 3, рисунок 3.1) снижаются, но при дальнейшем нагреве они превышают скорость изменения температуры прозрачного проводящего слоя. Скорость изменения температуры внутри поглощающего слоя на глубине 2,5 мкм (кривая 4, рисунок 3.1) и более 2,5 мкм (на рисунке не показано) от границы раздела CdS/CIGS в течение всего времени воздействия солнечного излучения не превышает скорости изменения температуры прозрачного проводящего слоя.

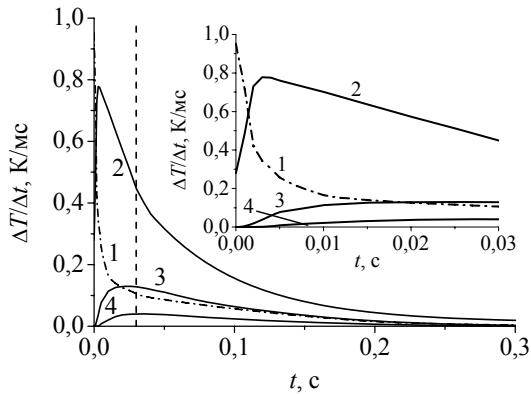


Рисунок 3.1 – Временная зависимость скорости изменения температуры прозрачного проводящего слоя (1) и внутри поглощающего слоя на глубине 0,5 (2), 1,5 (3) и 2,5 (4) мкм от границы раздела CdS/CIGS при воздействии солнечного излучения. На вставке показан увеличенный фрагмент данной зависимости во временном интервале от 0 (начало отсчета) до 0,03 с (штриховая линия)

В прозрачном проводящем и буферном слоях практически мгновенно устанавливается равномерное распределение температуры по толщине (рисунок 3.2). В поглощающем слое температурный профиль характеризуется определенным градиентом. Температура заднего контакта и подложки в процессе нагрева тонкопленочного

солнечного элемента CIGS солнечным излучением не изменялась и была равна 300 К.

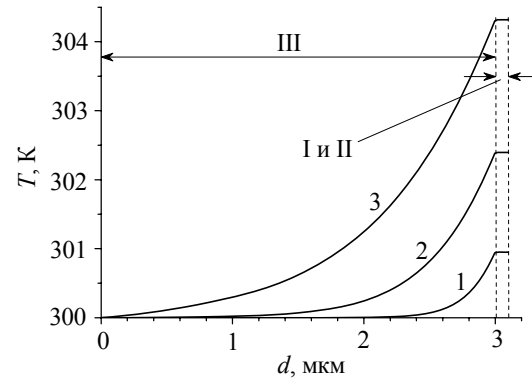


Рисунок 3.2 – Температурный профиль прозрачного проводящего (I), буферного (II) и поглощающего (III) слоя тонкопленочного солнечного элемента CIGS в моменты времени 1 (1), 5 (2) и 15 (3) мс после начала воздействия солнечного излучения

Проведенные расчеты (таблица 3.1) показывают, что напряжение холостого хода  $V_{OC}$  и ток короткого замыкания  $J_{SC}$  возрастают с увеличением толщины поглощающего слоя  $CuIn_{1-x}Ga_xSe_2$  (рисунок 3.3). Максимальное расчетное значение КПД солнечных элементов CIGS с толщиной 3 мкм составило 22,65 % (таблица 3.1), что согласуется с [1], где экспериментально полученное значение КПД составляло 21,7 %. В [5] КПД солнечного элемента  $CuIn_{1-x}Ga_xSe_2$  с концентрацией галлия  $x = 0,3$  достигает 19,5 %.

Ток короткого замыкания  $J_{SC}$  определяется, во-первых, оптическими потерями, т. е. тем, что отдельные фотоны спектра солнечного излучения либо не поглощаются в солнечном элементе, либо поглощаются без генерации электронно-дырочных пар. Во-вторых, не все фотогенерированные электронно-дырочные пары вносят вклад в  $J_{SC}$ , т. к. некоторые из них успевают рекомбинировать до того, как они будут собраны. Один из путей минимизации рекомбинационных потерь заключается в увеличении ширины запрещенной зоны (до 1,3 эВ) и, следовательно, концентрации галлия (до  $x = 0,529$ ) тонкопленочного солнечного элемента  $CuIn_{1-x}Ga_xSe_2$  за счет смещения

Таблица 3.1 – Параметры тонкопленочного солнечного элемента  $CuIn_{1-x}Ga_xSe_2$  с различными значениями концентрации галлия и толщины поглощающего слоя  $d$  при рабочей температуре 300 К

	Концентрация галлия $x$ в поглощающем слое $CuIn_{1-x}Ga_xSe_2$								
	$x = 0,183$			$x = 0,357$			$x = 0,529$		
	$d = 1$ мкм	$d = 2$ мкм	$d = 3$ мкм	$d = 1$ мкм	$d = 2$ мкм	$d = 3$ мкм	$d = 1$ мкм	$d = 2$ мкм	$d = 3$ мкм
$J_{SC}$ , $mA/cm^2$	31,08	33,06	33,75	30,94	33,10	33,84	30,92	33,17	33,93
$V_{OC}$ , В	0,59	0,61	0,61	0,69	0,71	0,71	0,78	0,80	0,81
$FF$ , %	78,54	79,59	79,77	79,84	81,08	81,27	80,67	82,12	82,31
КПД, %	14,39	15,96	16,49	16,98	18,95	19,59	19,55	21,91	22,65



валентной зоны. Внутризонное смещение приводит к увеличению напряжения холостого хода, что происходит только в случае рекомбинации на границе раздела. Оптимальная толщина поглощающего слоя CIGS составила 3 мкм. Как показали проведенные расчеты, увеличение толщины этого слоя более 3 мкм лишь незначительно повышает эффективность солнечного элемента, что согласуется с результатами, полученными в работе [6].

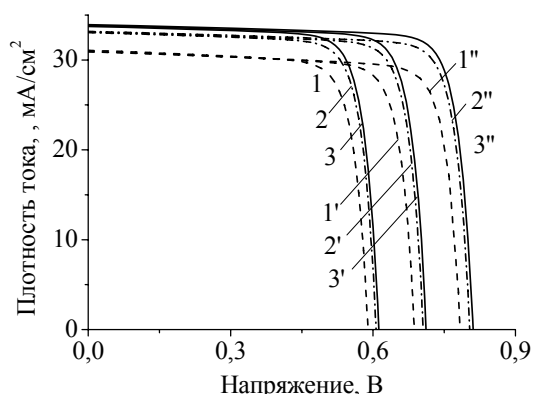


Рисунок 3.3 – Рассчитанная вольтамперная характеристика тонкопленочного  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  с толщиной поглощающего слоя 1 мкм (штриховые линии – 1, 1'), 2 мкм (штрихпунктирные линии – 2, 2') и 3 мкм (сплошные линии – 3, 3') и концентрацией галлия  $x = 0,183$  (1, 2, 3),  $0,357$  (1', 2', 3') и  $0,529$  (1'', 2'', 3'') при рабочей температуре 300 К

Повышение температуры тонкопленочного солнечного элемента CIGS (согласно нашим расчетам от 300 до 330 К) приводит к понижению напряжения холостого хода  $V_{OC}$  (рисунок 3.4), ширина запрещенной зоны незначительно сужается и это может ускорить рекомбинацию электронно-дырочных пар между валентной зоной и зоной проводимости.

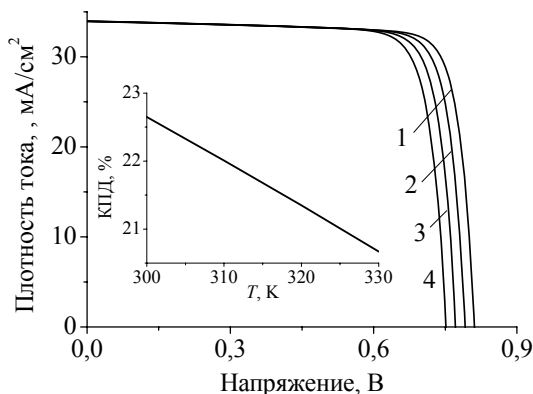


Рисунок 3.4 – Рассчитанная вольтамперная характеристика тонкопленочного  $\text{CuIn}_{0,471}\text{Ga}_{0,529}\text{Se}_2$  с толщиной поглощающего слоя 3 мкм при рабочей температуре 300 (1), 310 (2), 320 (3) и 330 (4) К. На вставке приведена зависимость КПД  $\text{CuIn}_{0,471}\text{Ga}_{0,529}\text{Se}_2$  от его рабочей температуры

Как видно из зависимостей на рисунке 3.4, при увеличении рабочей температуры тонкопленочного солнечного элемента  $\text{CuIn}_{0,471}\text{Ga}_{0,529}\text{Se}_2$  на величину, равную 1 К, ток короткого замыкания  $J_{SC}$  повышается на  $\sim 0,01$   $\text{mA}/\text{cm}^2$ , напряжение холостого хода  $V_{OC}$  понижается на  $\sim 0,02$  В. При нагреве поглощающего слоя  $\text{CuIn}_{0,471}\text{Ga}_{0,529}\text{Se}_2$  на 30 К его КПД снижается на  $\sim 2\%$  (вставка на рисунке 3.4).

### Заключение

В работе определены оптимальные значения толщины поглощающего слоя тонкопленочных солнечных элементов  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  с концентрацией галлия в диапазоне значений  $0,183 \leq x \leq 0,529$  в условиях изменения его рабочих температур от 300 до 330 К. Показано, что при толщине поглощающего слоя, равной 3 мкм, концентрации галлия  $x = 0,529$  и рабочей температуре 300 К КПД  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  может достигать  $22,65\%$  с коэффициентом заполнения  $FF = 82,31\%$ , напряжением холостого хода  $V_{OC} = 0,81$  В и током короткого замыкания  $J_{SC} = 33,93$   $\text{mA}/\text{cm}^2$ . При повышении рабочей температуры поглощающего слоя  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  до 330 К его КПД снижается на  $\sim 2\%$ . Гибкость и тонкослойность открывают для солнечных батарей новые сферы применения. Тонкопленочные элементы могут быть встроены в различные электронные приборы, строительные конструкции и даже ткани.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Properties of Cu(In,Ga)Se<sub>2</sub> solar cells with new record efficiencies* / P. Jackson [et al.] // *Phys. Status Solidi RRL*. – 2015. – № 1. – P. 28–31.
2. *Lique, A. Handbook of Photovoltaic Science and Engineering* / A Lique, S. Hegedus // John Wiley & Sons LTD, Chichester, West Sussex, England. 2003. – 1176 p.
3. *Preparation of boron-doped ZnO thin films by photo-atomic layer deposition* / Y. Yamamoto, Y. Saito, K. Takahashi, M. Konagai // *Sol. Energy Mater. Sol. Cells*. – 2001. – Vol. 65. P. 125–132.
4. *Burgelman, M. Modelling polycrystalline semiconductor solar cells* / M. Burgelman, P. Nollet, S. Degraeve // *Thin Solid Films*. – 2000. – Vol. 361. – P. 527–532.
5. *Diode characteristics in state-of-the-art ZnO/CdS/Cu(In<sub>1-x</sub>Ga<sub>x</sub>)Se<sub>2</sub> solar cells* / M.A. Contreras [et al.] // *Prog. Photovoltaics*. – 2005. – Vol. 13, Iss. 3. – P. 209–216.
6. *Chelvanathan, P. Performance analysis of copper-indium-gallium-diselenide (CIGS) solar cells with various buffer layers by SCAPS* / P. Chelvanathan, M.I. Hossain, N. Amin // *Current Applied Physics*. – 2010. – Vol. 10. – P. S387–S391.

Поступила в редакцию 28.12.15.

УДК 53.043

## ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ МЕТАЛЛО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В.И. Кондратенко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES FROM THE METAL-DIELECTRIC STRUCTURES

V.I. Kondratenko

F. Scorina Gomel State University

В настоящее время активно развивается направление, связанное с моделированием оптических явлений в радиодиапазоне. С одной стороны это обусловлено возможностью создания искусственных сред с интересными особенностями (так называемые метаструктуры), которые невозможно реализовать на уровне оптических явлений ввиду невозможности достижения требуемых масштабных соотношений между размерами элементов структуры и длиной волны излучения. С другой стороны, построение реальных физических моделей сред позволяет тоньше понять механизмы и особенности взаимодействия электромагнитных волн с веществом. Кроме того, достижения нанотехнологий позволяют предположить возможность переноса принципов построения дискретных радиотехнических систем на область оптического диапазона длин волн.

**Ключевые слова:** электромагнитная волна, поглощающая среда, диэлектрическая структура.

The actively developing direction associated with the fashion-lation of optical phenomena in the radio is considered. On the one hand it depends on the possibility of creating artificial environments with interesting features (so-called meta-), which can not be realized at the level of the optical phenomena due to the inability to achieve the required scaling relations between the sizes of the structural elements and the radiation wavelength. On the other hand, the construction of real physical models of media allows finer understanding of the mechanisms and features of the interaction of electromagnetic waves with matter. In addition, advances of nanotechnology suggest the possibility of transferring the principles of constructing discrete area of radio systems for the optical wavelength range.

**Keywords:** electromagnetic wave, absorbing medium, the dielectric structure.

### Введение

В работе проведено теоретическое рассмотрение процесса отражения плоской электромагнитной волны от ограниченной плоской слоисто-неоднородной диэлектрической структуры, а также от металло-диэлектрической структуры. Актуальность задачи обусловлена применением металло-диэлектрических структур при конструировании элементной базы СВЧ – техники, особенно в диапазоне СВЧ – в субмиллиметровом диапазоне длин волн. Кроме того, активное развитие получает создание многослойных металло-диэлектрических структур с заданными свойствами.

### 1 Прохождения и отражения электромагнитной волны на плоском диэлектрическом слое

Особенностью распространения электромагнитной волны в волноводе являются ее когерентность и наклонное падение на стенку волновода. Поэтому интерес представляет рассмотрение прохождения и отражения электромагнитной волны на плоском слое. Данная задача решалась неоднократно [1], [2], и ее решение известно для некогерентного случая, а также для тонкого слоя. Рассматривая прошедшую и отраженную волны как совокупность волн, переотраженных внутри слоя, нетрудно показать, что эффективные

коэффициенты отражения и прохождения могут быть представлены в виде геометрических последовательностей, приводящих к выражениям

$$Q_{\text{эф}} = R_{12} + t_{12}t_{21}R_{21}e^{i2\varphi+\psi} + \\ + t_{12}t_{21}R_{21}^3e^{i4\varphi+2\psi} + t_{12}t_{21}R_{21}^5e^{i6\varphi+3\psi} + \dots, \\ \Gamma_{\text{эф}} = t_{12}t_{21}R_{21}e^{i2\varphi} + t_{12}t_{21}R_{21}^3e^{i3\varphi}e^{i\psi} + \\ + t_{12}t_{21}R_{21}^4e^{i5\varphi}e^{i2\psi} + t_{12}t_{21}R_{21}^6e^{i7\varphi}e^{i3\psi} \dots,$$

что после упрощений дает

$$Q_{\text{эф}} = t_{12}t_{21}R_{21}e^{i\varphi} \left( 1 + \frac{R_{21}^2e^{i\varphi}}{1 - R_{21}^2e^{i\varphi}} \right), \\ \Gamma_{\text{эф}} = R_{21} + \frac{t_{12}t_{21}R_{21}e^{i\varphi}}{1 - R_{21}^2e^{i\varphi}}.$$

На рисунке 1.1 представлена расчетная зависимость коэффициентов отражения и прохождения для волны с поляризацией, перпендикулярной плоскости падения от угла падения для различных соотношений между длиной волны и толщиной диэлектрического слоя. Особый интерес представляет угловая зависимость для толстого слоя, хотя она и не совсем соответствует цели рассматриваемой задачи (рисунок 1.2). Зависимость представляет собой быстросциллирующую кривую, огибающая которой полностью

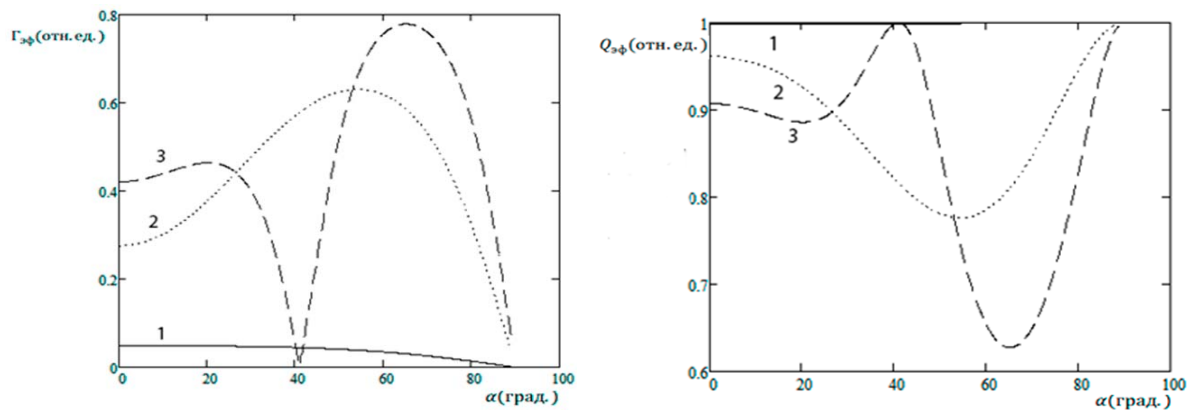


Рисунок 1.1 – Зависимость коэффициентов прохождения и отражения от угла падения при перпендикулярной поляризации для различной толщины слоя (в длинах волн), 1 –  $H = 0.01$ , 2 –  $H = 0.25$ , 3 –  $H = 0.5$

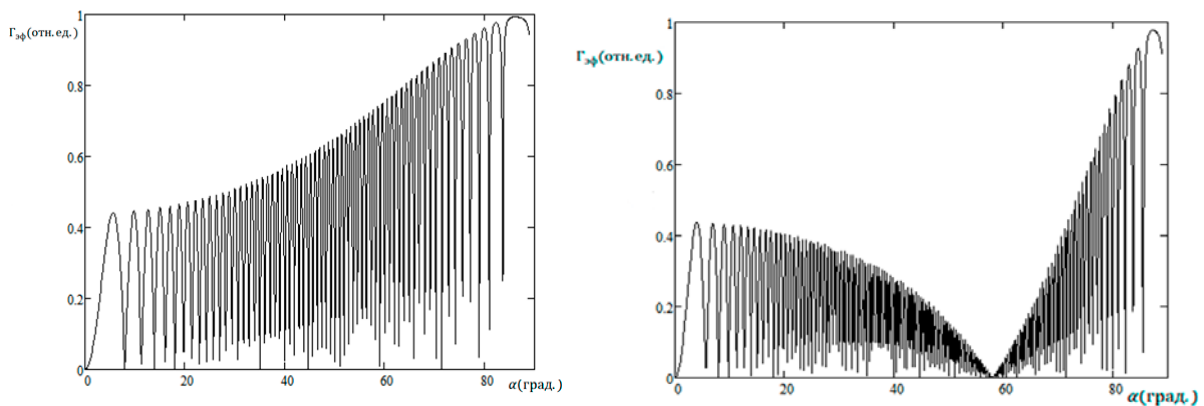


Рисунок 1.2 – Зависимость коэффициента отражения от угла падения при поляризации, перпендикулярной (слева) и параллельной плоскости падения,  $H = 40\lambda$

соответствует аналогичному ходу зависимости коэффициента отражения от угла падения, полученному в работе [3] для некогерентного случая.

Особенностью представленного в данной работе результата является то, что коэффициент отражения практически равен нулю при определенных углах, зависящих от толщины слоя. На графике (рисунок 1.2) можно заметить при наклонном падении волны наличие характерных «провалов», положение которых зависит от угла падения и толщины слоя. Глубина провалов на графиках зависит также от наличия потерь. Наблюдается провал до нуля, если имеют место слои без потерь, и он отличен от нуля для сред с потерями.

Для поляризации в плоскости падения отражение отсутствует в окрестности угла Брюстера, однако точное значение угла полной поляризации определяется толщиной слоя, равно как и значение коэффициента отражения в данной точке. Интересной особенностью тонкопленочных структур с толщиной слоя на порядки меньшей длины волны излучения является стремление к нулю коэффициента отражения при любом угле падения. Практически в данном случае речь идет о слое нулевой толщины, для которого волны, отраженные от передней и задней поверхностей слоя оказываются в противофазе, аналогично полуволновой

пластинке. В оптике практическая реализация такого слоя не представляется возможной ввиду малости длины волны, однако в радиодиапазоне – это обычная ситуация. При скользком падении ( $\alpha \sim \pi/2$ ) в малой окрестности коэффициент отражения стремится к нулю для обеих поляризаций.

## 2 Отражение от металло-диэлектрического слоя

Полученный результат можно применить для расчета коэффициента отражения от металлической поверхности с нанесенным диэлектрическим покрытием. Применение нанесения диэлектрических слоев на металлические поверхности широко распространено в СВЧ-технике, в частности – при разработке и создании металло-диэлектрических волноводов. Поскольку, в соответствии с законом сохранения при отсутствии диссипации, коэффициент отражения автоматически становится равным единице, то расчет проводился с учетом поглощения внутри слоя

$$\Gamma_{\text{эф}} = R_{12} + t_{12}t_{21}e^{i\Phi}(-\gamma)^1 + t_{12}t_{21}R_{21}e^{i2\Phi}(-\gamma)^2 + t_{12}t_{21}R_{21}^2e^{i4\Phi}(-\gamma)^3 + \dots = R_{12} + t_{12}t_{21}e^{i\Phi}(-\gamma)^1 \times (1 + R_{21}^1e^{i2\Phi}(-\gamma)^1 + R_{21}^2e^{i2\Phi}(-\gamma)^2 + \dots).$$

После небольших преобразований выражения будут иметь вид:  $\Gamma_{\text{эф}} = R_{21} - \frac{t_{12}t_{21}\gamma e^{i\Phi}}{1 + \gamma^2 R_{21} e^{i\Phi}}$ , где  $\gamma$  – коэффициент отражения от металлической поверхности.

Здесь учитывалось также, что при отражении от металлической поверхности происходит потеря полуволны. Расчетные кривые для ТЕ- и ТМ-волн представлены на рисунках 2.1–2.2. Расчеты производились для различных толщин диэлектрического слоя и различных коэффициентов отражения подстилающего металлического слоя. Сохраняется осциллирующий характер. Коэффициент отражения зависит естественным образом от коэффициента отражения металлической поверхности, однако в максимумах он существенно превышает коэффициент отражения собственно металла. Общим для всех графиков является стремление к единице коэффициента

отражения при скользющем падении в отличие от чисто диэлектрического слоя, где коэффициент отражения стремился к нулю. Для технически важных приложений интерес представляет случай тонкого диэлектрического слоя на металлической поверхности. Расчетные графики представлены на рисунке 2.4. В этом случае характер зависимостей становится гладким, и при толщине слоя уже в  $0,01\lambda$  даже для поляризации в плоскости падения – монотонным.

Из графиков видно, что коэффициент отражения от металло-диэлектрической структуры значительно превышает коэффициент отражения от свободной металлической поверхности в случае перпендикулярной поляризации даже при нормальном падении (ТМ-мода). Для ТЕ-моды такое не наблюдается, однако при наклонном падении коэффициент отражения возрастает для обеих мод и стремится к единице при скользющем падении.

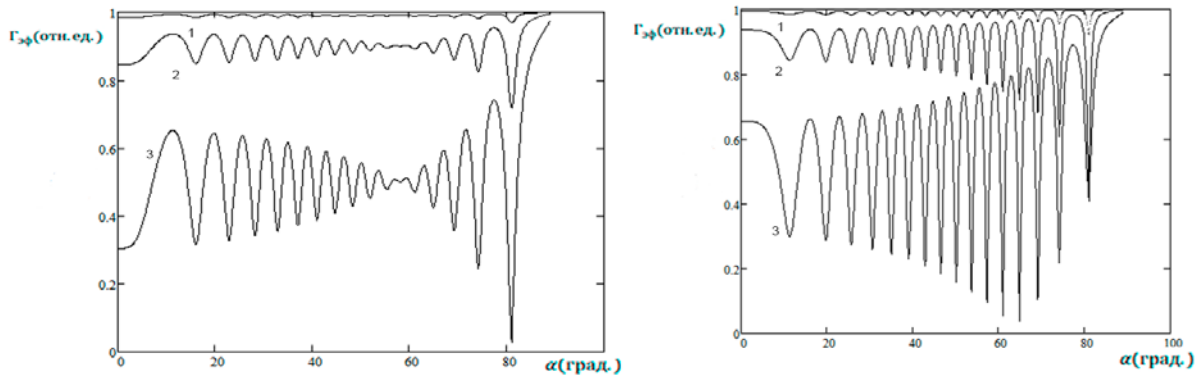


Рисунок 2.1 – Угловая зависимость коэффициента отражения от металло-диэлектрической структуры ТЕ- и ТМ-волн при различном поглощении для толстого слоя,  $1 - \gamma = 0.99$ ,  $2 - \gamma = 0.9$ ,  $3 - \gamma = 0.5$ ,  $H = 5\lambda$

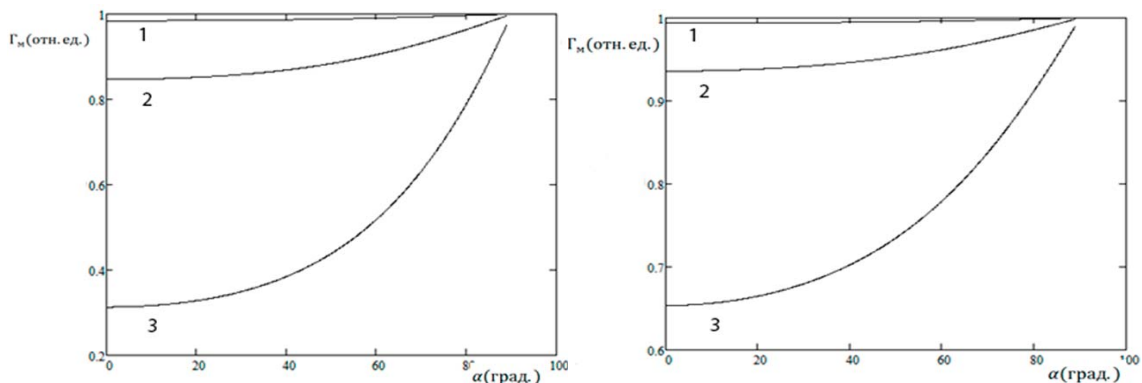


Рисунок 2.2 – Угловая зависимость коэффициента отражения от металло-диэлектрической структуры ТЕ- и ТМ-волн при различном поглощении для тонкого слоя,  $1 - \gamma = 0.99$ ,  $2 - \gamma = 0.9$ ,  $3 - \gamma = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $H = 0.01\lambda$

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн, М. Основы оптики; изд. 2-е; пер. с англ. / М. Борн, Э. Вольф – М.: Наука, 1973.
2. Бреховских, Л.М. Волны в слоистых средах; 2-е изд., перераб. / Л.М. Бреховских – М.: Наука, 1973. – 15 с.
3. О возможности определения диэлектрической проницаемости верхних слоев подстилающих

сред по измеренным коэффициентам отражения при наклонном зондировании плоскими волнами вертикальной и горизонтальной поляризации в СВЧ диапазоне / А.С. Шостак, В.В. Загоскин, С.П. Лукьянов, А.С. Карауш // Журнал радиоэлектроники. – 1999. – № 11.

Поступила в редакцию 04.01.16.

УДК 669.14.018.8: 621.45.038.72

**ВЛИЯНИЕ ИОННОГО АЗОТИРОВАНИЯ НА ФАЗОВЫЙ СОСТАВ, СТРУКТУРУ И СВОЙСТВА УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ****А.С. Руденков<sup>1</sup>, А.В. Рогачев<sup>1</sup>, Д.Г. Пилипцов<sup>1</sup>, Н.Н. Федосенко<sup>1</sup>, Сянь Хун Джанг<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины<sup>2</sup>Нанкинский университет науки и технологии**INFLUENCE OF ION NITRIDING ON THE PHASE COMPOSITION, STRUCTURE AND PROPERTIES OF CARBON COATINGS****A.S. Rudenkov<sup>1</sup>, A.V. Rogachev<sup>1</sup>, D.G. Piliptsov<sup>1</sup>, N.N. Fedosenko<sup>1</sup>, Xiaohong Jiang<sup>2</sup>**<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University<sup>2</sup>Nanjing University of Science and Technology

Определены основные закономерности изменения свойств, фазового состава и механических свойств однокомпонентных и легированных металлом (Cr, Ti, Cu) углеродных покрытий, подвергнутых ионному азотированию. Показано, что ионное азотирование вызывает в поверхностных слоях повышение доли  $sp^2$ -фазы при снижении размера кластеров. При ионном азотировании углеродсодержащих покрытий установлено образование соединений  $CN_x$  с преобладающим содержанием связей типа  $N-Csp^2$ . Однокомпонентные углеродные покрытия после их ионного азотирования характеризуются более дисперсной структурой, высоким содержанием связей  $N-Csp^3$  в сравнении со структурой и составом покрытий, сформированных в условиях ионного ассистирования или же в присутствии молекулярного азота.

**Ключевые слова:** углеродные покрытия, легирование, азотирование, фазовый состав, морфология, твердость, трение.

The basic patterns of change in the properties, phase composition and mechanical properties of single-component and doped metal (Cr, Ti, Cu) carbon coatings, subjected to ion nitriding are determined. It is shown that ion nitriding is in the surface layers of increasing the share of  $sp^2$ -phase with a decrease in the size of the clusters. When the ion nitriding carbonaceous coatings established education  $CN_x$  compounds with predominant content of  $N-Csp^2$  bonds. Single-carbon coating after ion nitriding are characterized by a more dispersed structure, high content  $N-Csp^3$  bonds, in comparison with the structure and composition of the coating formed under ion assisting or in the presence of molecular nitrogen.

**Keywords:** carbon coatings, alloying, nitriding, phase composition, morphology, hardness, friction.

**Введение**

Широкий спектр свойств углеродных покрытий, их зависимость от условий и режимов синтеза обусловлены полиморфизмом структурных состояний углерода, изменением их дисперсностью [1]–[5]. В случае формирования углеродных покрытий, легированных металлами и/или азотом, важными факторами является их природа и концентрация легирующих элементов, степень их химического взаимодействия с углеродом, характер распределения по толщине слоя и другие. Все эти факторы определяют фазовое, структурное состояние углеродной матрицы, химический состав межфазных слоев и, соответственно, свойства покрытий [1]–[3]. Такие слои характеризуются повышенной термо- и износостойкостью, более низким в сравнении с однокомпонентными покрытиями уровнем внутренних механических напряжений при сохранении высоких значений микротвердости.

Изменение физико-химических параметров углеродных покрытий при введении в их состав металлов объясняют протеканием процессов химического взаимодействия с образованием карбидов [1], каталитическим влиянием металлов на процессы синтеза и дисперсность  $sp^3$ - и

$sp^2$ -кластеров [2], [4]. При легировании углеродных покрытий азотом, проводимом на стадии осаждения путем обработки растущего слоя ионами азота (режим ионного ассистирования) [5], [6], или же осаждением покрытия в среде с высокой концентрацией молекулярного азота [7]–[9], установлено образование  $CN_x$  соединений, а при легировании металлсодержащих углеродных покрытий – образование карбонитридов и нитридов металлов [8]. При этом дисперсность и объем образующихся фаз, характер их распределения по толщине слоя в значительной степени определяются технологическими параметрами легирования, энергией ионов азота, степенью активации процессов химического взаимодействия [7], [9]. Отметим, что приведенные результаты характеризуют покрытия, легирование которых осуществляется в результате одновременного осаждения на поверхности углеродных атомов, генерируемых в плазме, и испаренных атомов металла. Данные же о влиянии на химический состав, структуру и свойства однокомпонентных и композиционных металлсодержащих углеродных покрытий азотирования, осуществляемого путем обработки ионами азота уже предварительно осажденных слоев, отсутствуют.

В связи с этим основной целью настоящей работы является установление особенностей состава, структурного и фазового состояния, механических свойств (твердость, износостойкость) поверхностных слоев однокомпонентных и легированных металлами различной природы углеродных покрытий, подвергнутых ионному азотированию.

### 1 Методика эксперимента

Объектом изучения явились однокомпонентные и композиционные углеродные покрытия, легированные металлами Cr, Ti, Cu, проявляющими различную химическую активность по отношению к углероду и азоту. Осаждение углеродных покрытий производилось из импульсной катодной плазмы по методике, приведенной в [3]. Легирование их металлом осуществлялось путем совместного осаждения атомов углерода и генерируемых магнетронным распылением атомов металла (мощность разряда при распылении Cr, Ti, составляло 400 Вт, при распылении Cu – 200 Вт). При этом атомарное содержание металла в покрытии составляло примерно одинаковое значение 2,2...2,65%.

Ионное азотирование осуществлялось при помощи ионного источника типа «Радикал» при следующих параметрах: давление газа  $P = 10^{-1}$  Па; ток – 0,2 А; ускоряющее напряжение – 2 кВ.

Изучение морфологии легированных углеродных покрытий проводилось методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) в режимах измерения топографии и фазового контраста с помощью прибора Solver Pro производства NT-MDT (Москва, Россия).

Определение фазового состава углеродных покрытий осуществлялось посредством анализа спектров комбинационного рассеяния, полученного на спектрометре Senterra с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм, мощностью 10 мВт. Разложение регистрируемых спектров на D- (~ 1400 см<sup>-1</sup>) и G-пики (~ 1550 см<sup>-1</sup>) осуществлялось по методу Гаусса. Химический состав и структура углеродных связей определялись методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС). Измерения проводились с помощью прибора PHI Quantera при возбуждении вещества Ka-излучением алюминия с энергией кванта 1486,6 эВ и суммарной мощностью 250 Вт.

Для измерения микротвердости по Кнуппу применялся микротвердомер DM-8 (AFFRI, Италия). Нагрузка на алмазную пирамиду равнялась 245 мН, продолжительность вдавливания пирамиды – 10 с.

Триботехнические испытания проводили по схеме «сфера – плоскость» (шарик радиусом 5 мм из закаленной стали ШХ15, покрытие наносили на плоскую кремниевую подложку). Нагрузка составляла 0,98 Н, средняя скорость перемещения – 0,0087 м/с. После проведения истирания

определялся диаметр пятна контакта, объем изношенного металла и выполнялся расчёт объёмного коэффициента изнашивания по формуле:

$$j = V / F L [m^3 / (H \cdot m)], \quad (1.1)$$

где  $F$  – нагрузка (Н);  $L$  – путь трения (м);  $V$  – объем шарового сегмента изношенного материала (м<sup>3</sup>).

### 2 Результаты и их обсуждение

Установлено, что при проведении ионного азотирования вследствие травления заметно изменяется морфология покрытий. Шероховатость, а также размер отдельных структурных образований однокомпонентных и композиционных углеродных покрытий после ионного азотирования снижается (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Параметры шероховатости углеродных покрытий до/после ионного азотирования на основании данных АСМ

Образец	Средняя высота, нм	$R_{ms}$ , нм	Плотность зерен, шт./мкм <sup>2</sup>	Средний диаметр зерен, нм
С	81/26	22,8/8,5	54/78	164/128
С+Cr	20/10	7,8/3,9	49/62	93/82
С+Cu	18/21	5,0/4,2	98/76	87/89
С+Ti	11/16	2,4/3,4	44/47	118/118

При этом наиболее значительное уменьшение шероховатости наблюдается при обработке однокомпонентного углеродного покрытия. Такие покрытия, как отмечается в [11], содержат микрокапли графита, и в процессе ионного азотирования происходит их преимущественное травление, что и определяет снижение шероховатости покрытия. В металлсодержащих углеродных слоях при их азотировании могут образовываться новые твердые фазы внедрения, имеющие меньшую в сравнении с графитом скорость травления и, как следствие этого, изменения рельефа поверхности менее выражены.

Ионное азотирование углеродных покрытий приводит и к изменению их фазового состояния. Из представленных в таблице 2.2 результатов КР спектроскопии следует, что после ионного азотирования однокомпонентных и легированных металлом углеродных покрытий наблюдается увеличение ширины D-пика, снижение ширины G-пика, возрастание отношения  $I_D / I_G$ .

Как отмечается в работе [3], сужение ширины G-пика вызвано увеличением упорядоченности sp<sup>2</sup>-кластеров, увеличение же соотношения  $I_D / I_G$  может быть обусловлено уменьшением их размеров. Уширение D-пика и смещение его в область низких волновых чисел может свидетельствовать о разупорядочивании и уменьшении числа sp<sup>3</sup>-кластеров.

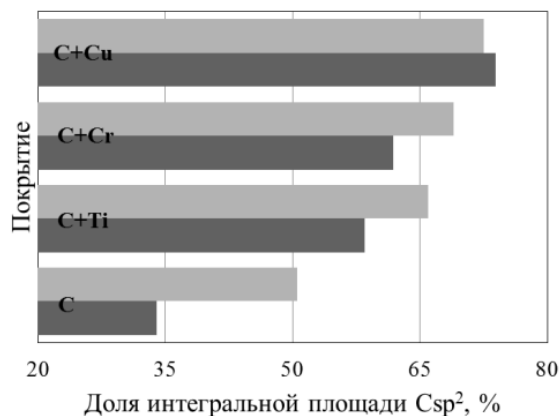
Таблица 2.2 – Результаты КР-спектроскопии легированных углеродных покрытий до/после ионного азотирования

Покрытие	D-пик		G-пик		$I_D/I_G$
	Положение, $\text{см}^{-1}$	Ширина, $\text{см}^{-1}$	Положение, $\text{см}^{-1}$	Ширина, $\text{см}^{-1}$	
C	1438,2/1434,4	275,3/282,1	1562,8/1563,8	197,2/189,2	0,50/0,58
C+Cr	1395,5/1377,4	336,4/358,5	1549,1/1546,0	167,0/147,9	1,15/1,64
C+Cu	1406,4/1401,4	307,2/319,1	1551,8/1555,6	165,9/156,8	1,04/1,21
C+Ti	1404,4/1399,9	323,5/328,9	1554,8/1554,6	169,8/169,2	1,01/1,07

Такие изменения могут быть вызваны разрушением границ зерен и нагревом подложки под действием последующей ионной бомбардировки, что коррелирует с данными АСМ и результатами экспериментов по формированию углеродных покрытий в условиях ионной бомбардировки, изложенными в работе [11].

Формирование углеродных покрытий в условиях ионного ассистирования (независимо от энергии ассистирующих ионов) оказывает более существенное влияние на их фазовый состав [12]. При ассистировании соотношение  $I_D/I_G$  увеличивается с 0,5 до 1,38, а ширина G-пика уменьшается до  $166,6 \text{ см}^{-1}$ . После ионного азотирования соотношение  $I_D/I_G$  равняется 0,58, а ширина G-пика равняется  $189,2 \text{ см}^{-1}$ . Такие изменения объясняются различными механизмами фазовых переходов  $sp^3 \rightarrow sp^2$  углеродных покрытий. При ионном ассистировании основной причиной изменения фазового состава являются неупругие соударения ионов азота и углерода в плазме, в то время как последующее ионное азотирование носит поверхностный характер, преобладают процессы травления, имплантации и локальный нагрев верхних слоев покрытия.

Отметим, что введение металла в углеродное покрытие несколько снижает степень графитизации, а в случае легирования медью ионное азотирование даже снижает интегральную площадь поверхности подложки, занятой  $sp^2$ -классами (рисунок 2.1).

Рисунок 2.1 – Содержание  $sp^2$ -фазы в покрытии до (1) и после (2) ионного азотирования

Изменение химического состава покрытий, подвергнутых ионному азотированию, оценивалось по изменению положения и формы N1s пика РФЭС спектра (рисунок 2.2).

Установлено, что как однокомпонентные, так и легированные металлами углеродные покрытия содержат в поверхностном слое химически связанные атомы азота. Разложение пика N1s однокомпонентных углеродных покрытий позволило выделить связи  $N-Csp^3$  с энергией  $\sim 398,2 \text{ эВ}$ ,  $N-Csp^2$  ( $399,9 \text{ эВ}$ ) и  $N-O$  ( $401,7 \text{ эВ}$ ). В пике N1s покрытий, легированных титаном, присутствует компонента с энергией  $397,3 \text{ эВ}$ , соответствующая нитриду титана  $N-Ti$  [13]. Пик N1s легированных хромом углеродных покрытий раскладывается на следующие компоненты:  $N-Cr$  с энергией связи  $396,7 \text{ эВ}$  [14],  $N-Csp^3$  с энергией связи  $\sim 398,3 \text{ эВ}$ ,  $N-Csp^2$  ( $399,8 \text{ эВ}$ ) и  $N-O$  ( $401,7 \text{ эВ}$ ). Наличие нитрида меди трудно выявить методом XPS, поскольку энергия связи нитрида меди равняется  $\sim 932,7 \text{ эВ}$  для  $Cu2p$ , что очень близко от компоненты  $Cu-O$  со спиновой модификацией  $2p \ 3/2$  с априори большей интенсивностью [15]. Последующая ионная обработка однокомпонентных и легированных карбидообразующими металлами углеродных покрытий приводит к росту содержания  $sp^2$ -гибридизированных атомов углерода, что отчасти подтверждается данными КР-спектроскопии, свидетельствующими о незначительном росте соотношения  $I_D/I_G$ . Об изменении содержания  $sp^3$ -фазы трудно судить, поскольку при разложении под компонентой с энергией связи  $\sim 285,4 \text{ эВ}$  подразумеваются  $Csp^3$  и  $C-N$ ,  $C=N$  связи. Однако, даже с учетом вклада в интенсивность данной компоненты соединений типа  $C=N$  и  $C-N$  можно заключить, что доля интегральной площади незначительно снижается во всех случаях.

Из анализа N1s видно, что при ионной обработке осажденного углеродного покрытия образуются соединения типа  $CN_x$  с преобладающим содержанием связей типа  $N-Csp^2$ . Кроме этого, после ионного азотирования для покрытий, легированных карбидообразующими металлами, фиксируется снижение содержания карбидов металла и образование нитридов. Наблюдается также незначительное увеличение содержания  $sp^2$ -гибридизированных атомов углерода.

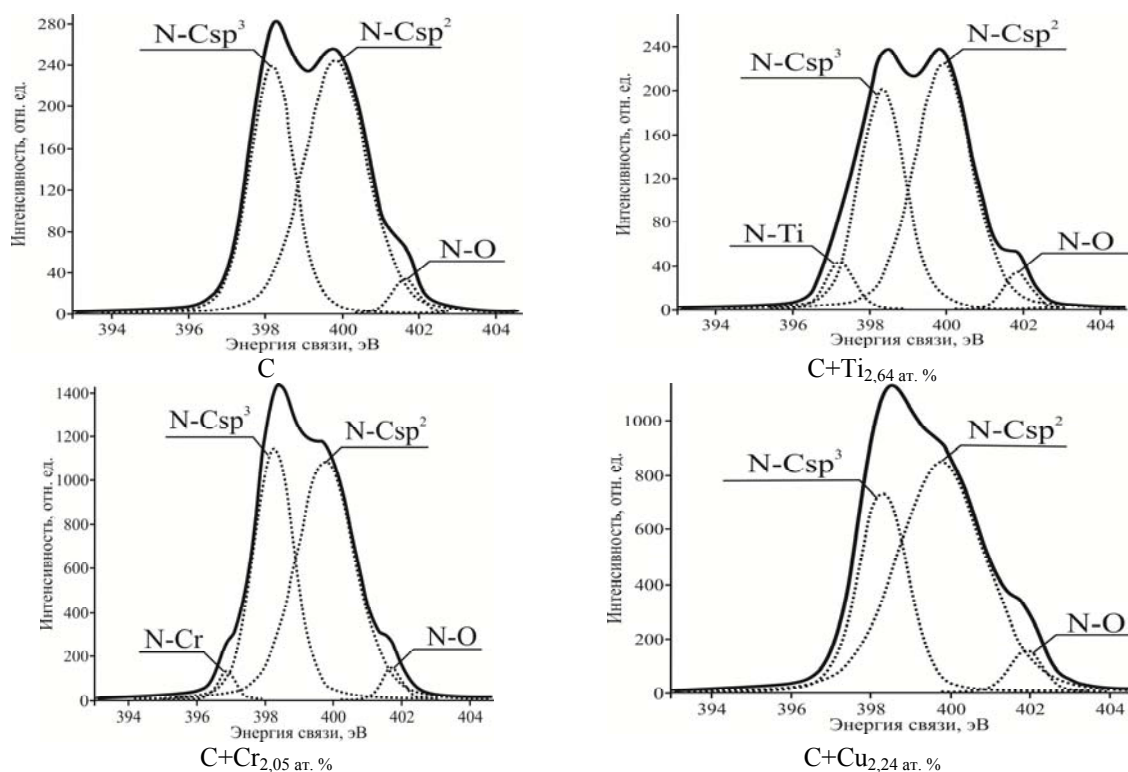


Рисунок 2.2 – N1s-пик РФЭС углеродных покрытий, подвергнутых ионному азотированию

Указанные изменения свидетельствуют, что и при азотировании уже сформированных углеродных покрытий имеет место имплантация ионов азота в приповерхностный слой с последующим образованием химических соединений азота и углерода.

В таблице 2.3 приведены результаты анализа спектров РФЭС однокомпонентных углеродных покрытий после ионного азотирования и покрытий, сформированных в условиях ионного ассистирования или же в среде молекулярного азота при его давлении в вакуумной камере 0,1 Па [12].

Таблица 2.3 – Результаты РФЭС углеродных покрытий, подвергнутых азотированию различными методами

Способ легирования	Доля Csp <sup>2</sup> , %	N-Csp <sup>3</sup> /N-Csp <sup>2</sup>
Легирование отсутствует	33,98	–
Ионное азотирование	50,51	0,68
Осаждение в среде N <sub>2</sub>	56,00	0,18
Ионное ассистирование	59,00	0,19

Установлено, что при всех изученных способах азотирования углеродных покрытий азот образует химические связи преимущественно с углеродом Csp<sup>2</sup> (отношение числа связей N-Csp<sup>3</sup> и N-Csp<sup>2</sup> меньше единицы), что может быть связано с более высокой адсорбционной активностью и диффузионной проницаемостью графитовой фазы. При ионном азотировании покрытий относительное содержание N-Csp<sup>3</sup> связей выше в

3,5–3,7 раза, чем у углеродных покрытий, сформированных в присутствии молекулярного азота или же в условиях обработки ионами азота растущего углеродного слоя. Данный результат можно объяснить изменением условий активации при воздействии на поверхность ионов азота, меньшим содержанием sp<sup>2</sup>-кластеров в исходном покрытии.

В таблице 2.4 представлены результаты измерения микротвердости *H*, значения объемного коэффициента изнашивания контртела (стали ШХ15) *j* углеродсодержащих покрытий до и после их ионного азотирования.

Таблица 2.4 – Влияние ионного азотирования на твердость *H* и коэффициента изнашивания контртела *j*

Покр-тие	<i>H</i> , ГПа		<i>j</i> , ×10 <sup>-18</sup> м <sup>3</sup> /(Н·м)	
	до	после	до	после
C	10,74±0,22	11,21±0,15	419,3±4,6	345,6±2,9
C+Cr	12,45±0,23	12,81±0,18	138,1±2,7	172,5±3,3
C+Cu	10,23±0,26	10,79±0,21	120,1±4,2	165,2±3,8
C+Ti	11,91±0,25	12,62±0,14	128,9±5,0	191,0±4,2

Видно, что последующее ионное азотирование приводит к увеличению микротвердости для всех углеродных покрытий. Данный эффект является следствием протекающих при азотировании изменений фазового и химического состава покрытий. При этом учитывая, что повышение твердости наблюдается и при азотировании однокомпонентных углеродных покрытий, по-видимому,



наибольший вклад в повышение твердости вносят процессы образования соединений типа  $CN_x$ .

Снижение объемного коэффициента изнашивания контртела при азотировании нелегированных углеродных покрытий (таблица 2.4) объясняется значительным увеличением содержания графитовой  $sp^2$ -фазы (в 1,5 раза), которая, находясь на поверхности, оказывает смазочное действие при контактном взаимодействии. При трении подвергнутых азотированию легированных металлом углеродных покрытий значение объемного коэффициента изнашивания контртела возрастает, что обусловлено формированием в поверхностном слое твердых термостойких соединений (нитридов, карбонитридов), способных к абразивному разрушению контактирующей поверхности.

### Заключение

Определены основные закономерности изменения свойств и фазового состава однокомпонентных и легированных Cr, Ti, Cu углеродных покрытий, подвергнутых ионному азотированию. Установлено увеличение содержания  $sp^2$ -фазы, снижение в приповерхностных слоях концентрации соединений  $Me_yC_x$ , образование соединений типа  $Me_yN_x$  и  $CN_x$  с преобладающим содержанием N–Csp<sup>2</sup> связей. После ионного азотирования однокомпонентных и композиционных покрытий наблюдается увеличение микротвердости на 0,5–0,7 ГПа и в 1,2–1,5 объемного коэффициента изнашивания стального контртела при трении в паре с покрытием.

Показано, что при ионном азотировании однокомпонентных углеродных покрытий относительное содержание N–Csp<sup>3</sup> связей выше в 3,5–3,7 раза в сравнении с углеродными покрытиями, сформированных в присутствии молекулярного азота или же в условиях одновременного осаждения и обработки поверхности ионами азота.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогачев, А.В.* Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.
2. *Donnet, C.* Tribology of Diamond-like Carbon Films: Fundamentals and Applications / C. Donnet, A. Erdemir. – Springer Science & Business Media, 2007. – 680 p.
3. *Руденков, А.С.* Влияние концентрации металла на фазовый состав, структуру и свойства углерод-металлических покрытий / А.С. Руденков // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 26–32.
4. *Robertson, J.* Diamond like carbon / J. Robertson // Pure and Applied Chemistry. – 1994. – Vol. 66. – P. 1789–1796.
5. *Lifshitz, Y.* Diamond like carbon – present status / Y. Lifshitz // Diamond and Related Materials. – 1999. – Vol. 8. – P. 1659–1676.
6. *Khurshudov, A.G.* Tribological properties of carbon nitride overcoat for thin-film magnetic rigid disks / A.G. Khurshudov, K. Kato // Surface and Coatings Technology. – 1996. – Vol. 9. – P. 537–542.
7. *Tribological characterization of carbon-nitrogen coatings deposited by using vacuum arc discharge* / J. Koskinen [et al.] // Diamond and Related Materials. – 1996. – Vol. 5. – P. 669–673.
8. *Mechanical properties and performance of magnetron-sputtered graded diamond-like carbon films with and without metal additions* / C. Bauer [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2002. – Vol. 11. – P. 1139–1142.
9. *Mechanical and tribological properties of  $CN_x$  films deposited by reactive magnetron sputtering* / E. Broitman [et al.] // Wear. – 2001. – Vol. 248. – P. 55–64.
10. *Белошенко, В.А.* Получение углерод-азотных покрытий, модифицированных нитридом титана / В.А. Белошенко, В.Н. Варюхин, Б.Е. Шкуратов // Журнал технической физики. – 2004. – Т. 74. – С. 131–133.
11. *Пилипцов, Д.Г.* Морфология композиционных покрытий на основе углерода, подвергнутых обработке ионами азота / Д.Г. Пилипцов, А.С. Руденков, Р.В. Бекаревич // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 31–34.
12. *Легированные азотом алмазоподобные покрытия: структура и свойства* / Б. Чжоу [и др.] // Материалы, технологии, инструменты. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 16–21.
13. *Epitaxial TiN (001) grown and analyzed in situ by XPS and UPS. I. Analysis of as-deposited layers* / R.T. Haasch [et al.] // Surface Science Spectra. – 2000. – Vol. 7. – P. 193–203.
14. *Epitaxial CrN (001) grown and analyzed in situ by XPS and UPS. I. Analysis of as-deposited layers* / R.T. Haasch [et al.] // Surface Science Spectra. – 2000. – Vol. 7. – P. 250–261.
15. *Thermal stability of Cu and Fe nitrides and their applications for writing locally spin valves* / C. Navío [et al.] // Applied Physics Letters. – 2009. – Vol. 94. – P. 263112-1–263112-3.
16. *Microstructure, mechanical and tribological properties of  $CN_x$  thinfilms prepared by reactive magnetron sputtering* / X. Chen [et al.] // Acta Metallurgica Sinica. – 2014. – Vol. 27. – P. 31–36.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РБ в рамках ГПНИ «Физическое материаловедение, новые материалы и технологии», задание «Разработка конструкции многослойных углеродных покрытий, содержащих наночастицы металлов, их оксидов и нитридов, технологии нанесения с целью повышения долговечности и надежности высокоточного оборудования и инструмента» на 2016–2018 гг.*

Поступила в редакцию 09.02.16.

УДК 517.95

## ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

Я.Т. Мегралиев, Г.Н. Искендерова

*Бакинский государственный университет*

## INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITION OF THE FIRST KIND

Y.T. Mehraliyev, Q.N. Isgenderova

*Baku State University*

Исследована одна обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода. Для рассматриваемой обратной краевой задачи вводится определение классического решения. С помощью метода Фурье задача сводится к решению системы интегральных уравнений. С помощью метода сжатых отображений доказывается существование и единственность решения системы интегральных уравнений. Далее доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

**Ключевые слова:** обратная краевая задача, гиперболическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

An inverse boundary value problem for a second-order hyperbolic equation with integral condition of the first kind is investigated. A definition of classical solution is introduced for this problem. The Fourier method is used to reduce the problem to a system of integral equations. The method of contraction mappings is applied to prove the existence and uniqueness of a solution of the system of integral equations. Then, the existence and uniqueness of a classical solution of the initial problem is proved.

**Keywords:** inverse boundary problem, hyperbolic equation, Fourier method, classic solution.

### Введение

Под обратной задачей для уравнений с частными производными в настоящей работе подразумевается такая задача, в которой вместе с решением требуется определить правую часть или (и) тот или иной коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. В случае, если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача будет линейной; если же неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной. Именно нелинейные обратные задачи для гиперболических уравнений и будут изучаться в настоящей работе.

Нелинейные обратные краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка исследовались в работах [1]–[5]

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связано с тем, что при изучении некоторых физических процессов

границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, хотя известно среднее значение искомых величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [6], распространением тепла [7], [8], процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах [9], вопросами демографии и математической биологии.

В [4], [5] нами рассмотрена обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка при наличии интегрального условия, которая сводится к самосопряженной задаче. В отличие от работ [4], [5] в данной работе исследуется обратная краевая задача при наличии интегрального условия, которая сводится к несамосопряженной задаче.

### 1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = a(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (1.1)$$

в области  $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (1.2)$$

граничным условием Дирихле

$$u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.4)$$

и дополнительным условием

$$u(0, t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.5)$$

где  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $h(t)$  – заданные функции, а  $u(x, t)$  и  $a(t)$  – искомые функции.

**Определение 1.1.** Классическим решением обратной краевой задачи (1.1)–(1.5) назовем пару  $\{u(x, t), a(t)\}$  функций  $u(x, t) \in C^2(D_T)$  и  $a(t) \in C[0, T]$ , удовлетворяющих уравнению (1.1) в  $D_T$ , условиям (1.2) в  $[0, 1]$  и условиям (1.3)–(1.5) в  $[0, T]$  в обычном смысле.

Аналогично [5] можно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.1.** Пусть функция  $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$ ,  $h(t) \in C^2[0, T]$ ,  $h(t) \neq 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ),  $f(x, t) \in C(D_T)$ ,  $\int_0^1 f(x, t) dx = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ) и выполняются условия согласования

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \\ \varphi(0) = h(0), \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1.1)–(1.5) эквивалентна задаче определения функций  $u(x, t) \in C^2(D_T)$ ,  $a(t) \in C[0, T]$  из (1.1)–(1.3) и

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.6)$$

$$h''(t) - u_{xx}(0, t) = a(t)h(t) + f(0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.7)$$

## 2 Доказательство существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Известно [10], что последовательности функций

$$X_0(x) = 2(1-x), \dots, X_{2k-1}(x) = 4(1-x) \cos \lambda_k x, \quad (2.1)$$

$$X_{2k}(x) = 4 \sin \lambda_k x, \dots,$$

$$Y_0(x) = 1, \dots, Y_{2k-1}(x) = \cos \lambda_k x, \quad (2.2)$$

$$Y_{2k}(x) = x \sin \lambda_k x, \dots$$

образуют биортогональную систему и система (2.1) образует базис Рисса в  $L_2(0, 1)$ , где  $\lambda_k = 2k\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Тогда произвольная функция  $g(x) \in L_2(0, 1)$  разлагается в биортогональный ряд:

$$g(x) = g_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k} X_{2k}(x),$$

где коэффициенты  $g_0$ ,  $g_{2k-1}$ ,  $g_{2k}$  вычисляются по формулам

$$g_0 = \int_0^1 g(x) Y_0(x) dx,$$

$$g_{2k-1} = \int_0^1 g(x) Y_{2k-1}(x) dx,$$

$$g_{2k} = \int_0^1 g(x) Y_{2k}(x) dx.$$

Предположим, что

$$g(x) \in C^{2i-1}[0, 1], \quad g^{(2i)}(x) \in L_2(0, 1),$$

$$g^{(2s)}(1) = 0, \quad g^{(2s+1)}(0) = g^{(2s+1)}(1) \quad (i \geq 1, s = \overline{0, i-1}).$$

Тогда имеют место следующие оценки [11]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{2i} g_{2k-1})^2 \leq \frac{1}{2} \|g^{(2i)}(x)\|_{L_2(0,1)}^2, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{2i} g_{2k})^2 \leq \frac{1}{2} \|g^{(2i)}(x)x + 2ig^{(2i-1)}(x)\|_{L_2(0,1)}^2. \quad (2.4)$$

Далее, пусть

$$g(x) \in C^{2i}[0, 1], \quad g^{(2i+1)}(x) \in L_2(0, 1),$$

$$g^{(2s)}(1) = 0, \quad g^{(2s-1)}(0) = g^{(2s-1)}(1) \quad (i \geq 1, s = \overline{0, i}).$$

Тогда [11]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{2i+1} g_{2k-1})^2 \leq \frac{1}{2} \|g^{(2i+1)}(x)\|_{L_2(0,1)}^2, \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{2i+1} g_{2k})^2 \leq \frac{1}{2} \|g^{(2i+1)}(x)x + (2i+1)g^{(2i)}(x)\|_{L_2(0,1)}^2 \quad (i \geq 1).$$

Теперь рассмотрим следующие пространства.

1. Обозначим через  $B_{2,T}^3$  [11] совокупность всех функций  $u(x, t)$  вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k(x),$$

рассматриваемых в  $D_T$ , где каждая из функций  $u_k(t)$  непрерывна на  $[0, T]$  и

$$J_T(u) \equiv \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Норму на этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = J_T(u).$$

Функция  $u(x, t)$ , как элемент пространства  $B_{2,T}^3$ , в частности, обладает следующими свойствами:

$$u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t) \in C(D_T),$$

$$u_{xxx}(x, t) \in C([0, T]; L_2(0, 1));$$

$$u(1, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t),$$

$$u_{xx}(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

2. Через  $E_T^3$  обозначим пространство

$$B_{2,T}^3 \times C[0, T]$$

вектор-функций  $z(x, t) = \{u(x, t), a(t)\}$  с нормой

$$\|z\|_{E_T^3} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a(t)\|_{C[0,T]}$$

Очевидно, что  $E_T^3$  является банаховым пространством.

Так как система (2.1) образует базис Рисса в  $L_2(0,1)$ , то каждое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)X_k(x), \quad (2.7)$$

где

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t)Y_k(x)dx \quad (k=0,1,\dots), \quad (2.8)$$

причем  $X_k(x)$  и  $Y_k(x)$  определены соотношениями (2.1) и (2.2) соответственно.

Применяя метод разделения переменных для определения искомого функций  $u_k(t)$  ( $k=0,1,\dots$ ), из (1.1) и (1.2) имеем:

$$u''_0(t) = a_0(t)u_0(t) + f_0(t), \quad (2.9)$$

$$u''_{2k-1}(t) + \lambda_k^2 u_{2k-1}(t) = a_0(t)u_{2k-1}(t) + f_{2k-1}(t) \quad (k=1,2,\dots), \quad (2.10)$$

$$u''_{2k}(t) + \lambda_k^2 u_{2k}(t) = a_0(t)u_{2k}(t) + f_{2k}(t) + 2\lambda_k u_{2k-1}(t) \quad (k=1,2,\dots), \quad (2.11)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u'_k(T) = \psi_k \quad (k=0,1,\dots), \quad (2.12)$$

где

$$F_k(t;u,a) = f_k(t) + a(t)u_k(t),$$

$$f_k(t) = \int_0^1 f(x,t)Y_k(x)dx,$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x)Y_k(x)dx,$$

$$\psi_k = \int_0^1 \psi(x)Y_k(x)dx \quad (k=0,1,\dots).$$

Решая задачу (2.9)–(2.12) находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.13)$$

$$u_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} \cos \lambda_k t + \psi_{2k-1} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau;u,a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \quad (k=1,2,\dots; 0 \leq t \leq T), \quad (2.14)$$

$$u_{2k}(t) = \varphi_{2k} \cos \lambda_k t + \psi_{2k} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{2k}(\tau;u,a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau - t\varphi_{2k-1} \sin \lambda_k t - \frac{1}{\lambda_k} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t - t \cos \lambda_k t \right) \psi_{2k-1} - \frac{2}{\lambda_k} \int_0^t \left( \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi;u,a) \sin \lambda_k (\tau-\xi) d\xi \right) \times \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \quad (k=1,2,\dots), \quad (2.15)$$

где

$$F_k(t;u,a) = f_k(t) + a(t)u_k(t) \quad (k=0,1,\dots; 0 \leq t \leq T).$$

После подстановки выражений  $u_k(t)$  ( $k=0,1,\dots$ ) в (2.7), для определения компоненты  $u(x,t)$  классического решения  $\{u(x,t), a(t)\}$  задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) получаем:

$$u(x,t) = \left( \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau \right) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \varphi_{2k-1} \cos \lambda_k t + \psi_{2k-1} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau;u,a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \right) X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \varphi_{2k} \cos \lambda_k t + \psi_{2k} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{2k}(\tau;u,a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau + -t\varphi_{2k-1} \sin \lambda_k t - \frac{1}{\lambda_k} \left( \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k t - t \cos \lambda_k t \right) \psi_{2k-1} - \frac{2}{\lambda_k} \int_0^t \left( \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi;u,a) \sin \lambda_k (\tau-\xi) d\xi \right) \times \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \right) X_{2k}(x). \quad (2.16)$$

Теперь из (1.7), с учетом (2.7), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0,t) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u_{2k-1}(t) \right\}. \quad (2.17)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты  $a(t)$  решения  $\{u(x,t), a(t)\}$  задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) подставим выражение (2.14) в (2.17):

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0,t) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[ \varphi_{2k-1} \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \psi_{2k-1} \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau;u,a) \sin \lambda_k (t-\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (2.18)$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) сведено к решению системы (2.16), (2.18) относительно неизвестных функций  $u(x,t)$  и  $a(t)$ .

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) важную роль играет следующая лемма.

**Лемма 2.1.** Если  $\{u(x,t), a(t)\}$  – любое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), то функции  $u_k(t)$  ( $k=0,1,\dots$ ), определенные соотношением (2.8), удовлетворяют на  $[0, T]$  счетной системе (2.13)–(2.15).

**Замечание.** Из леммы 2.1 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) достаточно доказать единственность решения системы (2.16), (2.18).

Рассмотрим в пространстве  $E_T^3$  оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где 
$$\Phi_1(u, a) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k(t) X_k(x),$$

$$\Phi_2(u, a) = \tilde{a}(t),$$

а  $\tilde{u}_0(t), \tilde{u}_{2k-1}(t), \tilde{u}_{2k}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $\tilde{a}_0(t)$  равны соответственно правым частям (2.13)–(2.15) и (2.18).

Теперь, с помощью нетрудных преобразований, находим:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]} \leq |\varphi_0| + T|\psi_0| + \quad (2.19) \\ & + T\sqrt{T} \left( \int_0^t |f_0(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} + T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]}, \\ & \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{2k-1}|)^2 \right)^{1/2} + 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{2k-1}|)^2 \right)^{1/2} + \\ & + 2\sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{2k-1}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ & + 2T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2}, \quad (2.20) \\ & \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq 2\sqrt{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{2k}|)^2 \right)^{1/2} + 2\sqrt{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{2k}|)^2 \right)^{1/2} + \\ & + 2\sqrt{2}T \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{2k}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ & + 2\sqrt{2}T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} + \\ & + 4\sqrt{2}T \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{2k-1}|)^2 \right)^{1/2} + \\ & + 2\sqrt{2}(1+2T) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{2k-1}|)^2 \right)^{1/2} + \\ & + 4\sqrt{2}TT \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{2k-1}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ & + 4\sqrt{2}T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2}, \quad (2.21) \end{aligned}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0, t)\|_{C[0,T]} + \right.$$

$$\begin{aligned} & + 4 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{2k-1}|)^2 \right)^{1/2} + \right. \\ & \left. + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{2k-1}|)^2 \right)^{1/2} \right] + \quad (2.22) \\ & + \sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{2k-1}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{6}} T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяют следующим условиям:

1.  $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ ,  $\varphi'''(x) \in L_2(0, 1)$ ,  
 $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$ ,  $\varphi'(0) = \varphi(1)$ .
2.  $\psi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\psi''(x) \in L_2(0, 1)$ ,  
 $\psi(1) = 0$ ,  $\psi'(0) = \psi'(1)$ .
3.  $f_{xx}(x, t) \in L_2(D_T)$ ,  $f(1, t) = 0$ ,  
 $f_x(0, t) = f_x(1, t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ).
4.  $h(t) \in C^2[0, T]$ ,  $h(t) \neq 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ).

Тогда, из (2.19)–(2.22), с учетом (2.3)–(2.6), получим:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A_1(T) + \\ & + B_1(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + \\ & + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.24) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1(T) &= \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ & + T\sqrt{T} \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\ & + (\sqrt{2} + 4T) \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 4(1+T) \|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ & + 2\sqrt{2}T (1 + 2\sqrt{2}T) \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\ & + 2\|\varphi''(x)x + 3\varphi'(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ & + 2\|\psi''(x)x + 2\psi'(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ & + 2\sqrt{T} \|f_{xx}(x, t)x + 2f_x(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \\ B_1(T) &= (1 + 4\sqrt{2})T^2 + (1 + \sqrt{2})T, \\ A_2(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0, t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ & + 2\sqrt{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} \left[ \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ & \left. \left. + \|\psi''(x)\|_{L_2(D_T)} + \sqrt{T} \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} \right] \right\}, \\ B_2(T) &= 4\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} T. \end{aligned}$$

Из неравенств (2.23)–(2.24) заключаем:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ & \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} A(T) &= A_1(T) + A_2(T), \\ B(T) &= B_1(T) + B_2(T). \end{aligned}$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

**Теорема 2.1.** Пусть выполнены условия 1–4 и  $B(T)(A(T)+2)^2 \leq 1$ . (2.26)

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) имеет в шаре  $K = K_R \left( \|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2 \right)$  из  $E_T^3$  единственное классическое решение.

*Доказательство.* В пространстве  $E_T^3$  рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (2.27)$$

где  $z = \{u, a\}$ , а компоненты  $\Phi_i (i=1,2)$  оператора  $\Phi(u, a)$  определены правыми частями (2.16), (2.18) соответственно.

Рассмотрим оператор  $\Phi(u, a)$  в шаре  $K = K_R$  из  $E_T^3$ . Аналогично (2.25) получаем, что для любых  $z, z_1, z_2 \in K_R$  справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \|\Phi z\|_{E_T^3} &\leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (2.28) \\ \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} &\leq \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\leq B(T)R \left( \|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \right).$$

Из (2.28) и (2.29), с учетом (2.26), следует, что оператор  $\Phi$  действует в шаре  $K = K_R$  и является сжимающим. Поэтому в шаре  $K = K_R$  оператор  $\Phi$  имеет единственную неподвижную точку  $\{u, a\}$ , которая является единственным в шаре  $K = K_R$  решением (2.27), т. е. является единственным в шаре  $K = K_R$  решением системы (2.16), (2.18).

Функция  $u(x,t)$ , как элемент пространства  $B_{2,T}^3$ , непрерывна и имеет непрерывные производные  $u_x(x,t)$  и  $u_{xx}(x,t)$  в  $D_T$ .

Теперь из (2.9)–(2.11), соответственно, имеем:

$$\begin{aligned} \|u''_0(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \\ &+ \|f(x,t)\|_{C[0,T]} \|_{L_2(0,1)}, \\ &\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u''_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} + \\ &+ \| \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \|_{L_2(0,1)}, \\ &\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u''_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} + \\ &+ \sqrt{6} \| \|u_{xx}(x,t)\|_{C[0,T]} \|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{2} \| \|a(t)u_x(x,t)x + u(x,t)\|_{C[0,T]} \|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \|f_x(x,t)x + f(x,t)\|_{C[0,T]} \|_{L_2(0,1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $u_u(x,t)$  непрерывна в  $D_T$ .

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7) удовлетворяются в обычном смысле. Значит,  $\{u(x,t), a(t)\}$  является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6) и (1.7) и в силу леммы 2.1 это решение единственно. Теорема доказана.

С помощью леммы 1.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены все условия теоремы 2.1 и

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \\ &\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \\ &\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0). \end{aligned}$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) имеет в шаре

$$K = K_R \left( \|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2 \right)$$

из  $E_T^3$  единственное классическое решение.

### Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с несамосопряженными краевыми условиями. Пользуясь этими фактами доказано существование и единственность классического решения одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Валитов, И.Р. Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени / И.Р. Валитов, А.И. Кожанов // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2006. – Т. 6, вып. 1. – С. 3–18.
2. Валитов, И.Р. О разрешимости некоторых гиперболических обратных задач с двумя неизвестными коэффициентами / И.Р. Валитов, А.И. Кожанов // Мат. заметки ЯГУ. – 2007. – № 14. – С. 3–16.
3. Сафиуллова, Р.Р. Обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от

времени / Р.Р. Сафиуллова // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 4. – С. 73–86.

4. Мегралиев, Я.Т. Об одной обратной краевой задаче для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Вестник Брянского государственного университета. – 2011. – № 4. – С. 22–28.

5. Мегралиев, Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка / Я.Т. Мегралиев // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 4 (17). – С. 63–67.

6. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

7. Cannon, J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. – Vol. 5, № 21. – P. 155–160.

8. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

9. Нахушев, А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.

10. Калиев, И.А. Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам / И.А. Калиев, М.М. Сабитова // Сибирский журнал промышленной математики. – 2009. – Т. 12, № 1 (37). – С. 89–97.

11. Мегралиев, Я.Т. Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Труды ИММ УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 226–235.

Поступила в редакцию 17.02.15.

УДК 517.925

## СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

## PAINLEVE'S PROPERTY FOR DIFFERENTIAL SYSTEM OF THE SECOND ORDER

V.M. Petsevich, D.N. Shauchenia

Y. Kupala Grodno State University

Получены необходимые и достаточные условия принадлежности исследуемой системы к системам типа Пенлеве.

**Ключевые слова:** система обыкновенных дифференциальных уравнений, свойство Пенлеве, метод малого параметра, метод резонансов, подвижная критическая особая точка.

Necessary and sufficient conditions of the analysed system belonging to Painleve type are obtained.

**Keywords:** system of the ordinary differential equations, Painleve's property, method of small parameter, method of resonances, mobile critical special point.

### 1 Предварительные результаты

В работе, на предмет отсутствия подвижных многозначных особенностей, продолжаем рассматривать систему двух дифференциальных уравнений [3]

$$\begin{aligned} x'^2 &= A_2 \cdot y^2 + A_1 \cdot y + A_0, \\ y'^2 &= (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $A_i$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , – полиномы по  $x$  с аналитическими по  $t$  коэффициентами,  $b_{jk}$ ,  $j = \overline{0, 1}$ ,  $k = \overline{0, 2}$  – аналитические по  $t$  функции,

$$A_2 \neq 0, |b_{12}| + |b_{02}| \neq 0, \quad (1.2)$$

и правые части не являются одновременно полными квадратами. Запись  $F \neq 0$ , здесь и далее означает, что коэффициенты полинома  $F$  одновременно не обращаются в нуль в некоторой области  $D$ .

Согласно [2], для отсутствия многозначных особенностей у решений системы (1.1) при условиях (1.2), необходимо требовать

$$A_1^2 - 4A_2A_0 = 0. \quad (1.3)$$

Согласно [3], для того, чтобы дифференциальная система (1.1) с аналитическими по  $t$  коэффициентами и условиями (1.2) не имела многозначных особенностей, необходимо чтобы она имела вид

$$\begin{aligned} x'^2 &= (a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 + \\ &+ (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})y + \\ &+ a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\ y'^2 &= (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00}, \end{aligned}$$

и выполнялись условия (1.3). Далее, в [3] были найдены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особенностей для случая  $a_{22} = a_{21} = 0$ ,  $a_{20} \neq 0$ .

Имеет место следующая лемма.

**Лемма.** Для того, чтобы дифференциальная система

$$\begin{aligned} x'^2 &= C_4 x^4 + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0, \\ y'^2 &= D_2 x^2 + D_1 x + D_0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $C_i = C_i(y, t)$ ,  $D_j = D_j(y, t)$ ,  $i = \overline{0, 4}$ ,  $j = \overline{0, 2}$ , полиномы по  $y$  с аналитическими по  $t$  коэффициентами,  $D_2 \neq 0$ , не имела многозначных особенностей, необходимо, чтобы: или

$$D_1^2 - 4D_2D_0 = 0; \quad (1.5)$$

или

$$\begin{aligned} (D_1)_t D_2 - (D_2)_t D_1 &= 0, \\ D_2 (D_1^2 - 4D_2D_0)_t - \\ - 2(D_2)_t (D_1^2 - 4D_2D_0) &= 0, \\ C_1 D_2^3 - C_2 D_1 D_2^2 - C_3 D_0 D_2^2 + \\ + C_3 D_1^2 D_2 + 2C_4 D_0 D_1 D_2 - C_4 D_1^3 &= 0, \\ 2C_0 D_2^4 - C_1 D_1 D_2^3 - 2C_2 D_0 D_2^3 + \\ + C_2 D_1^2 D_2^2 + 3C_3 D_0 D_1 D_2^2 - C_3 D_1^3 D_2 + \\ + 2C_4 D_0^2 D_2^2 - 4C_4 D_0 D_1^2 D_2 + C_4 D_1^4 &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

при  $D_1^2 - 4D_2D_0 \neq 0$ , где  $(D_j)_t = \frac{\partial D_j}{\partial t}$ ,  $j = \overline{0, 2}$ .

**Доказательство.** Поскольку  $D_2 \neq 0$ , то из второго уравнения системы (1.4) будем иметь



$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{D_1}{D_2} + \frac{\lambda}{2D_2} \cdot \sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0 + 4D_2y'^2}, \quad (1.7)$$

и

$$x' = -\frac{1}{2D_2} \cdot \left( (D_1)_t + (D_1)_y y' \right) D_2 - \left( (D_2)_t + (D_2)_y y' \right) D_1 - \lambda \frac{(D_2)_t + (D_2)_y y'}{2D_2^2} \cdot \sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0 + 4D_2y'^2} + (1.8) + \lambda \cdot \frac{(D_1^2 - 4D_2D_0)_t + (D_1^2 - 4D_2D_0)_y y'}{4D_2 \cdot \sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0 + 4D_2y'^2}} + \lambda \cdot \frac{4 \left( (D_2)_t + (D_2)_y y' \right) y'^2 + 8D_2y'y''}{4D_2 \cdot \sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0 + 4D_2y'^2}},$$

где  $\lambda^2 = 1$ ,  $(D_j)_t = \frac{\partial D_j}{\partial t}$ ,  $(D_j)_y = \frac{\partial D_j}{\partial y}$ ,  $j = \overline{0, 2}$ .

Подставляя (1.7) и (1.8) соответственно в правую и левую части первого уравнения системы (1.4), и полагая  $y = y_0 + \varepsilon^3 Y$ ,  $t = t_0 + \varepsilon^2 \tau$ , при  $\varepsilon = 0$  получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$\left( \dot{Y} \ddot{Y} + \frac{D_2 (D_1^2 - 4D_2D_0)_t - 2(D_2)_t (D_1^2 - 4D_2D_0)}{8D_2^2} - \lambda \cdot \sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0} \cdot \frac{(D_1)_t D_2 - (D_2)_t D_1}{4D_2^2} \right)^2 = \frac{\lambda (D_1^2 - 4D_2D_0)^{3/2}}{8D_2^4} \times \times (C_1 D_2^3 - C_2 D_1 D_2^2 - C_3 D_0 D_2^2 + C_3 D_1^2 D_2 + 2C_4 D_0 D_1 D_2 - C_4 D_1^3) + \frac{D_1^2 - 4D_2D_0}{8D_2^4} (2C_0 D_2^4 - C_1 D_1 D_2^3 - 2C_2 D_0 D_2^3 + C_2 D_1^2 D_2^2 + 3C_3 D_0 D_1 D_2^2 - C_3 D_1^3 D_2 + 2C_4 D_0 D_2^2 - 4C_4 D_0 D_1^2 D_2 + C_4 D_1^4), \quad (1.9)$$

где  $\dot{Y} = \frac{dY}{d\tau}$ ,  $\ddot{Y} = \frac{d^2Y}{d\tau^2}$ .

Учитывая, что  $D_2 \neq 0$ , то для отсутствия многозначных особенностей у решений уравнения (1.9), и, соответственно, у решений системы (1.4), согласно [4], необходимо чтобы выполнялось либо условие (1.5), либо (1.6) при

$$D_1^2 - 4D_2D_0 \neq 0.$$

## 2 Необходимые и достаточные условия свойства Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x'^2 = (a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, y'^2 = (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00},$$

где

$$a_{22} \neq 0, |b_{12}| + |b_{02}| \neq 0.$$

Поскольку  $a_{22} \neq 0$ , то с помощью аналитической замены независимой переменной, сохраняя для коэффициентов прежние обозначения, систему запишем в виде

$$x'^2 = (x^2 + a_{21}x + a_{20})y^2 + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \quad (2.1) y'^2 = (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00},$$

где

$$|b_{12}| + |b_{02}| \neq 0. \quad (2.2)$$

Из (1.3) следует  $a_{14} = 0$ . Далее, учитывая (2.2), из (2.1), относительно компоненты  $y$  построим уравнение и введем малый параметр по формулам  $y = Y$ ,  $t = t_0 + \varepsilon t$ . При  $\varepsilon = 0$  получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$\left( Y'' - \frac{b_{12}}{2(b_{12}Y + b_{02})} Y'^2 \right)^2 = \frac{a_{04}Y'^4}{b_{12}Y + b_{02}}, \quad (2.3)$$

где  $b_{12} = b_{12}(t_0)$ ,  $b_{02} = b_{02}(t_0)$ ,  $a_{04} = a_{04}(t_0)$ .

Пусть  $b_{12} \neq 0$ . Тогда в упрощенном уравнении (2.3) выполним замену  $Y = \frac{u^2 - b_{02}}{b_{12}}$ . Будем иметь

$$u'' = \frac{2\lambda\sqrt{a_{04}}}{b_{12}} u'^2,$$

где  $\lambda^2 = 1$ , решения которого имеют многозначные особенности [1], если  $a_{04} \neq 0$ . Таким образом,  $a_{04} = 0$ . При этом условии из (1.3) получим, что  $a_{13} = 0$ ,  $a_{03} = 0$ . С учетом найденных условий в уравнение относительно компоненты  $y$  введем малый параметр по формулам  $y = \varepsilon^{-1}Y$ ,  $t = t_0 + \varepsilon^2\tau$ . При  $\varepsilon = 0$  получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$2Y Y'' - Y'^2 - 2\lambda Y^2 Y' = 0,$$

где  $\lambda^2 = 1$ . Используя метод резонансов, найдем, что  $r \in \{-1; \frac{3}{2}\}$ . Следовательно, в случае  $b_{12} \neq 0$ , дифференциальная система (2.1) при условиях (2.2) не обладает свойством Пенлеве.

Пусть  $b_{12} = 0$  (следовательно из (2.2)  $b_{02} \neq 0$ ). Тогда упрощенное уравнение (2.3) примет вид

$$Y'' = \lambda \sqrt{\frac{a_{04}}{b_{02}}} Y'^2,$$

где  $\lambda^2 = 1$ , решения которого имеют многозначные особенности [1], если  $a_{04} \neq 0$ . Таким образом, учитывая полученные выше условия и требуя выполнения условия (1.3) получим, что для отсутствия многозначных особенностей у решений системы (2.1) при условиях (2.2) необходимо, чтобы система, с точностью до переобозначения коэффициентов, принимала один из видов

$$x'^2 = (xy + a_{12}x + a_{21}y + a_{11})^2, \quad (2.4)$$

$$y'^2 = b_{02}x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00};$$

$$x'^2 = (x^2 + a_{21}x + a_{20})(y + a_{12})^2, \quad (2.5)$$

$$y'^2 = b_{02}x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00},$$

где  $b_{02} \neq 0$ .

Рассмотрим систему (2.4). Потребовав выполнения условий леммы с учетом, что правые части не должны быть одновременно полными квадратами, получим, что в данном случае нет дифференциальных систем без многозначных особенностей.

Рассмотрим систему (2.5). Потребовав выполнения условий леммы с учетом, что правые части не должны быть одновременно полными квадратами, получим, что рассмотрение системы распадается на два случая:

$$x'^2 = (x^2 + a_{21}x + a_{20})(y + a_{12})^2, \quad (2.6)$$

$$y'^2 = b_{02}(x + b_{01})^2,$$

где  $b_{02} \neq 0$ ;

$$x'^2 = (x^2 + K_1x + K_2)(y + a_{12})^2, \quad (2.7)$$

$$y'^2 = b_{02}(x^2 + K_1x + K_2),$$

где  $b_{02} \neq 0$ ,  $K_1^2 - 4K_2 \neq 0$ .

Рассмотрим систему (2.6). Поскольку уравнение относительно компоненты  $y$  имеет вид

$$y'' = \lambda \left( \frac{y^2}{\sqrt{b_{02}}} + \frac{2a_{12}y}{\sqrt{b_{02}}} + \frac{a_{12}^2}{\sqrt{b_{02}}} \right) y'^2 + \beta_1(y) \cdot y' + \beta_0(y),$$

где  $\lambda^2 = 1$ ,  $\beta_1, \beta_0$  – многочлены по  $y$  однозначно определяющиеся через коэффициенты системы, а  $b_{02} \neq 0$ , то решения системы (2.6) не обладают свойством Пенлеве.

Рассмотрим систему (2.7). Уравнение относительно компоненты  $y$  имеет вид

$$(2b_{02}y'' - b_{02}'y')^2 = b_{02}^2 (y + a_{12})^2 (4(y')^2 + b_{02}(K_1^2 - 4K_2)).$$

Согласно методу резонансов, решение уравнения можно представить формальным рядом

$$y = \frac{\alpha_0}{t} + \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3 + \dots,$$

где  $\alpha_2$  – должно быть произвольной постоянной. Это требование приводит к необходимости выполнения резонансного условия

$$a_{12} = K_3, b_{02} = H e^{Kt}, \quad (2.8)$$

где  $K_3, H \neq 0, K$  – некоторые постоянные.

Учитывая полученные условия, и

$$K_1^2 - 4K_2 \neq 0,$$

закключаем, что с помощью линейного преобразования относительно зависимых переменных и, сохраняя для коэффициентов прежние обозначения, система (2.7) примет вид

$$x'^2 = y^2 x(x-1), \quad (2.9)$$

$$y'^2 = H e^{Kt} x(x-1),$$

где  $H \neq 0$ .

Пусть  $K \neq 0$ . Из (2.9) относительно компоненты  $x$  построим уравнение

$$x'' = \frac{2x-1}{2x(x-1)} x'^2 + \lambda \sqrt{H} x(x-1) \exp\left(\frac{Kt}{2}\right),$$

в котором, выполнив замену  $x = \frac{w}{w-1}$ , получим

$$w'' = \left( \frac{1}{w-1} + \frac{1}{2w} \right) w'^2 - \lambda \sqrt{H} \exp\left(\frac{Kt}{2}\right) w, \quad (2.10)$$

где  $\lambda^2 = 1$ . С помощью аналитической замены независимой переменной  $\exp\left(\frac{Kt}{2}\right) = z$ , уравнение (2.10) приводится к виду

$$\ddot{w} = \left( \frac{1}{w-1} + \frac{1}{2w} \right) \dot{w}^2 - \frac{\dot{w}}{z} - \frac{4\lambda\sqrt{H}}{K^2} \frac{w}{z}, \quad (2.11)$$

частного случая пятого уравнения Пенлеве. Согласно [1], решения уравнения (2.11), а следовательно и компонента  $x$  системы уравнений (2.9), не имеют многозначных особенностей.

Далее, из (2.9) относительно компоненты  $y$  построим уравнение

$$(2y'' - Ky')^2 = y^2 (4y'^2 + He^{Kt}),$$

которое, с помощью аналитической замены независимой переменной  $z = \frac{\sqrt{-H}}{K} \exp\left(\frac{Kt}{2}\right)$ , примет вид

$$j^2 = \frac{4}{K^2 z^2} y^2 (y'^2 - 1). \quad (2.12)$$

Согласно [4], уравнение (2.12) сводится к частному случаю третьего уравнения Пенлеве. Следовательно, решения уравнения (2.12), а также и компонента  $y$  системы уравнений (2.9), не имеют многозначных особенностей.

Пусть  $K = 0$ . Тогда из системы (2.9) можем записать  $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{y^2}{H}$ . Откуда получим, что

$$x = \frac{\lambda y^2}{2\sqrt{H}} + C, \quad (2.13)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования,  $\lambda^2 = 1$ . Подставив (2.13) во второе уравнение системы (2.9), будем иметь

$$y'^2 = H \left( \frac{\lambda y^2}{2\sqrt{H}} + C \right) \left( \frac{\lambda y^2}{2\sqrt{H}} + C - 1 \right), \quad (2.14)$$

которое является уравнением Брио и Буке [1]. Последнее означает, что решения уравнения (2.14) не имеют многозначных особенностей. Учитывая (2.13), получаем, что и компонента  $u$  обладает свойством Пенлеве.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема.** Для того чтобы дифференциальная система (2.1) при условии (2.2) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она дробно-линейным преобразованием  $x$ ,  $y$  и аналитической заменой независимой переменной  $t$  приводилась к виду (2.9). Решения данной системы в некоторых случаях выражаются через решения третьего и пятого уравнений Пенлеве.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 719 с.
2. Детченя, Л.В. Об одной системе двух дифференциальных уравнений второй степени со специальной правой частью со свойством Пенлеве / Л.В. Детченя, В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. Сер. 2. – 2013. – № 3 (159). – С. 48–55.
3. Пецевич, В.М. Аналитические свойства решений системы двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной / В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. – 2015. – № 1 (186). – С. 35–40.
4. Cosgrove, С.М. Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / С.М. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. 1993. – Vol. 88. – P. 25–87.

Поступила в редакцию 19.01.16.

УДК 512.542

## О $\sigma$ -СВОЙСТВАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП III

А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## ON $\sigma$ -PROPERTIES OF FINITE GROUPS III

A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University

Пусть  $G$  – конечная группа и  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  – разбиение множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ , т. е.  $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$  и  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ . Пусть  $\Pi \subseteq \sigma$ . Мы говорим, что подгруппа  $A$  из  $G$  является  $\Pi$ -субнормальной в  $G$ , если существует такая цепь подгрупп  $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ , что для всякого  $i = 1, \dots, t$  либо  $A_{i-1}$  нормальна в  $A_i$ , либо  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  –  $\sigma_j$ -группа для некоторого  $\sigma_j \in \Pi$ . В данной работе нами описываются свойства  $\Pi$ -субнормальных подгрупп и некоторые другие  $\sigma$ -свойства конечных групп. Работа продолжает исследования работ [1]–[5].

**Ключевые слова:** конечная группа,  $\Pi$ -субнормальная подгруппа, решетка  $\Pi$ -субнормальных подгрупп,  $\sigma$ -сверхразрешимая группа,  $CLT_\sigma$ -группа.

Let  $G$  be a finite group and  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  be a partition of the set of all primes  $\mathbb{P}$ , that is,  $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$  and  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$  for all  $i \neq j$ . Let  $\Pi \subseteq \sigma$ . We say that a subgroup  $A$  of  $G$  is  $\Pi$ -subnormal in  $G$  if there is a subgroup chain  $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$  such that either  $A_{i-1}$  is normal in  $A_i$  or  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  is a  $\sigma_j$ -group for some  $\sigma_j \in \Pi$  for all  $i = 1, \dots, t$ . In this paper, we discuss properties of  $\Pi$ -subnormal subgroups and some other  $\sigma$ -properties of finite groups. The work continues the research in the papers [1]–[5].

**Keywords:** finite group,  $\Pi$ -subnormal subgroup, the lattice of the  $\Pi$ -subnormal subgroups,  $\sigma$ -supersoluble group,  $CLT_\sigma$ -group.

### 1 General properties of $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal subgroups

Throughout this paper, all groups are finite and  $G$  always denotes a finite group.

In what follows,

$$\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I \subset \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

is some partition of the set of all primes  $\mathbb{P}$ , that is,  $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$  and  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$  for all  $i \neq j$ ;  $\Pi$  is always supposed to be a subset of the set  $\sigma$  and  $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$ . We also suppose that  $0 \in I$  and  $2 \in \sigma_0$ .

We fix some class  $\mathfrak{F}$  of  $\sigma_0$ -groups which is closed under extensions, epimorphic images and subgroups and which also contains all soluble  $\sigma_0$ -groups; and we say  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary if  $G$  is an  $\mathfrak{F}$ -group (that is,  $G \in \mathfrak{F}$ ) or  $G$  is a  $\sigma_i$ -group for some  $i \neq 0$ .

A subgroup  $A$  of  $G$  is called  $\mathfrak{F}$ -subnormal in  $G$  in the sense of Kegel [6] or  $K$ - $\mathfrak{F}$ -subnormal in  $G$  [7, 6.1.4] if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

such that either  $A_{i-1}$  is normal in  $A_i$  or  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  belongs to  $\mathfrak{F}$  for all  $i = 1, \dots, t$ .

In this paper we deal with the following generalization of this concept.

**Definition 1.1.** We say that a subgroup  $A$  of  $G$  is: (i)  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$  if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

such that, for each  $i = 1, \dots, t$ , either  $A_{i-1}$  is normal in  $A_i$  or  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  is a  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary; (ii)  $\Pi$ -subnormal if  $A$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$ , where  $\mathfrak{F}$  is the class of all  $\sigma_0$ -groups.

**Example 1.2.** Let  $C_{29} \times C_7$  be a non-abelian group of order 203 and  $P$  be a simple  $\mathbb{F}_{11}(C_{29} \times C_7)$ -module which is faithful for  $C_{29} \times C_7$ . Let

$$G = (P \times (C_{29} \times C_7)) \times A_5,$$

where  $A_5$  is the alternating group of degree 5. Let  $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ , where  $\sigma_0 = \{2, 3, 5\}$ , and  $\sigma_1 = \{7, 29\}'$  and  $\sigma_2 = \{2, 3, 5, 7, 29\}'$ . Let  $\Pi = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ . Then a subgroup  $H$  of  $G$  of order 4 is  $\sigma$ -subnormal in  $G$  but it is neither  $\Pi$ -subnormal in  $G$  nor  $\sigma_{\mathfrak{S}_0}$ -subnormal in  $G$ , where  $\mathfrak{S}_0$  is the class of all soluble  $\sigma_0$ -groups. The subgroup  $C_7$  is  $\Pi_{\mathfrak{S}_0}$ -subnormal in  $G$  but it is clearly not subnormal in  $G$ .

Let  $n$  be an integer. Following [3], we write  $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ ;  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ .

We say that:  $n$  is a  $\Pi$ -number if  $\sigma(n) \subseteq \Pi$ ;  $G$  is a  $\Pi$ -group if  $|G|$  is a  $\Pi$ -number.

Recall that  $O^\Pi(G)$  denotes the subgroup of  $G$  generated by all its  $\Pi'$ -subgroups [4].

We say that  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -perfect if  $G = G^{\mathfrak{F}}$  and  $O^{\sigma_i}(G) = G$  for all  $\sigma_i \in \Pi$  such that  $i \neq 0$ .

The results of this section collect the most important properties of  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal subgroups.

**Proposition 1.3** (Skiba [8]). *Let  $A$ ,  $K$  and  $N$  be subgroups of  $G$ . Suppose that  $A$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$  and  $N$  is normal in  $G$ .*

- (1)  $A \cap K$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $K$ .
- (2) If  $K$  is a  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal subgroup of  $A$ , then  $K$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$ .
- (3) If  $N \leq K$  and  $K/N$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G/N$ , then  $K$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$ .
- (4)  $AN/N$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G/N$ .
- (5) If  $K \leq A$  and  $A$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary, then  $K$  is  $\Pi$ -subnormal in  $G$ .
- (6) If  $A$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -perfect, then  $A$  is subnormal in  $G$ .

A subgroup  $H$  of  $G$  is called [4], [5]: a Hall  $\Pi$ -subgroup of  $G$  if  $|H|$  is a  $\Pi$ -number and  $|G:H|$  is a  $\Pi'$ -number; a  $\sigma$ -Hall subgroup of  $G$  if  $H$  is a Hall  $\Pi$ -subgroup of  $G$  for some  $\Pi \subseteq \sigma$ .

**Proposition 1.4** (Skiba [8]). *Let  $\Pi_1 \subseteq \Pi$  and  $A$  be a  $\Pi$ -subnormal subgroup of  $G$ .*

- (1) If  $H \neq 1$  is a Hall  $\Pi_1$ -subgroup of  $G$  and  $A$  is not a  $\Pi_1$ -group, then  $A \cap H \neq 1$  is a Hall  $\Pi_1$ -subgroup of  $A$ .
- (2) If  $A$  is a  $\Pi_1$ -Hall subgroup of  $G$ , then  $A$  is normal in  $G$ .
- (3) If  $|G:A|$  is a  $\Pi_1$ -number, then  $O^{\Pi_1}(A) = O^{\Pi_1}(G)$ .
- (4) If  $N$  is a  $\Pi_1$ -subgroup of  $G$ , then  $N \leq N_G(O^{\Pi_1}(A))$ .
- (5) If  $|G:A|$  is a  $\Pi'$ -number, then  $A$  is subnormal in  $G$ .

We will say that  $G$  is  $\sigma_{\mathfrak{F}}$ -soluble if every chief factor of  $G$  is  $\sigma_{\mathfrak{F}}$ -primary.

**Proposition 1.5** (Skiba [8]). *Let  $A$  be a  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal subgroup of  $G$  and let  $\mathfrak{F}_0$  be the class of all  $\sigma_{\mathfrak{F}}$ -soluble  $\Pi$ -groups.*

- (1) Let  $R$  be the product of some minimal normal subgroups of  $G$  and  $R$  is not  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary. Suppose also that either  $|G:A|$  is a  $\Pi'$ -number or  $G = AR$ ,  $R$  is non-abelian and all composition factors of  $R$  are isomorphic. Then  $R \leq N_G(A)$ .

- (2) If  $R$  is a minimal normal subgroup of  $G$ , then

$$N \leq N_G(A^{\mathfrak{F}_0}).$$

- (3) If a minimal normal subgroup  $R$  of  $G$  belongs to  $\mathfrak{F}$ , then

$$R \leq N_G(A^{\mathfrak{F}}).$$

**Proposition 1.6** (Skiba [8]). *Let  $A$  be a  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal subgroup of  $G$ . Suppose that  $A$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary. Then:*

- (1) If  $A \in \mathfrak{F}$ , then  $A \leq O_{\sigma_0}(G) \cap G_F$ .
- (2) If  $A$  is a  $\sigma_i$ -group, then  $A \leq O_{\sigma_i}(G)$ .

Note that various special cases of Propositions 1.1, 1.2, 1.3 and 1.4 have already been used to solve many questions [1]–[5]. As a first application of the theory  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal subgroups in the given paper, we obtained the following result which, in particular, gives a positive answer to Question 4.10 in [4].

**Theorem 1.7** (Skiba [8]). *A subgroup  $H$  of  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$  if and only if  $H$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $\langle H, x \rangle$  for all  $x \in G$ .*

From Theorem 1.7 the following classical result can be obtained.

**Corollary 1.8** (Wielandt). *A subgroup  $H$  of  $G$  is subnormal in  $G$  if and only if  $H$  is subnormal in  $\langle H, x \rangle$  for all  $x \in G$ .*

In concluding this section note that the various special cases of Propositions 1.3–1.6 have been applied in the proofs of many results (See, for example, [4], [8]).

## 2 The lattice of $\Pi$ -subnormal subgroups

Kegel proved [6] that the set of all  $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups of  $G$  forms a sublattice of the lattice  $L(G)$  of all subgroups of  $G$ .

In general, the following fact is true.

**Theorem 2.1** (Skiba [8]). *Suppose that a group  $G$  of order  $p$  belongs to  $\mathfrak{F}$  for all  $p \in \sigma_i \in \Pi$ . Then the set of all  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal subgroups of  $G$  forms a sublattice of the lattice  $L(G)$  of all subgroups of  $G$ .*

In the case when  $\Pi = \sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ , we get from Theorem 2.1 the following classical result.

**Corollary 2.2** (Wielandt). *The set of all subnormal subgroups of  $G$  forms a sublattice of the lattice of all subgroups of  $G$ .*

The following special case of Theorem 2.1 was proved in [4].

**Corollary 2.2** (Skiba [4]). *The set of all  $\sigma$ -subnormal subgroups of  $G$  forms a sublattice of the lattice of all subgroups of  $G$ .*

We use  $L_{\Pi_{\mathfrak{F}}}(G)$ ,  $L_{\Pi}(G)$  and  $L_{sn}(G)$  to denote the lattices of all  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal subgroups,

$\Pi$ -subnormal subgroups and of all subnormal subgroups of  $G$ , respectively.

A group  $G$  is called  $\sigma$ -nilpotent [2] if  $G$  is a direct product of some  $\sigma$ -primary groups. We use  $G^{\sigma_0}$  to denote the  $\sigma$ -nilpotent residual of  $G$ , that is, the intersection of all normal subgroups  $N$  of  $G$  with  $\sigma$ -nilpotent quotient  $G/N$ .

On the basis of Theorem 1.3 we prove also the following results.

**Theorem 2.3** (Skiba [8]). *The following statements are equivalent:*

(I) *The lattice  $L_{\Pi}(G)$  is modular.*

(II) *The following conditions hold:*

(a) *If  $T \leq S$  are  $\Pi$ -subnormal subgroups of  $G$ , where  $T$  is normal in  $S$  and either  $S/T$  is  $\Pi$ -primary or  $S/T$  is a  $p$ -group ( $p$  a prime), then  $L(S/T)$  is modular.*

(b)  $\langle A, B \rangle^{\sigma_0} \leq A \cap B$  for each  $A, B \in L_{\sigma}(G)$  such that  $A$  and  $B$  cover  $A \cap B$  and  $A \cap B$  is not normal both in  $A$  and  $B$ .

(III) *The following conditions hold:*

(c) *If  $T \leq S$  are  $\Pi$ -subnormal subgroups of  $G$ , where  $T$  is normal in  $S$  and either  $S/T$  is  $\Pi$ -primary or  $|S/T| = p^3$  ( $p$  a prime), then  $L(S/T)$  is modular.*

(d)  $\langle A, B \rangle^{\sigma_0} \leq A \cap B$  for each  $A, B \in L_{\sigma}(G)$  such that  $A$  and  $B$  cover  $A \cap B$ ,  $A \cap B$  is not normal both in  $A$  and  $B$  and the indices  $|A : A \cap B|$  and  $|B : A \cap B|$  are  $\sigma$ -coprime.

In the case when  $\Pi = \emptyset$ , we get from Theorem 2.3 the following

**Corollary 2.4** (See Zappa [9] or Theorem 9.2.3 in [10]). *The following statements are equivalent:*

(I)  $L_{sn}(G)$  is modular.

(ii) *If  $T \leq S$  are subnormal subgroups of  $G$ , where  $T$  is normal in  $S$  and  $S/T$  is a  $p$ -group,  $p$  a prime, then  $L(S/T)$  is modular.*

(III) *If  $T \leq S$  are subnormal subgroups of  $G$ , where  $T$  is normal in  $S$  and  $|S/T| = p^3$  ( $p$  a prime), then  $L(S/T)$  is modular.*

Recall that  $G$  is called  $\sigma$ -soluble [4], [5] if every chief factor  $H/K$  of  $G$  is  $\sigma$ -primary. A set  $1 \in \mathcal{H}$  of subgroups of  $G$  is said to be a complete Hall  $\Pi$ -set of  $G$  if every member  $\neq 1$  of  $\mathcal{H}$  is a Hall  $\sigma_i$ -subgroup of  $G$  for some  $\sigma_i \in \Pi$  and  $\mathcal{H}$  contains exact one Hall  $\sigma_i$ -subgroup of  $G$  for every  $\sigma_i \in \Pi \cap \sigma(G)$ .

In view of Theorem B in [5], every  $\sigma$ -soluble group possesses a complete Hall  $\sigma$ -set.

**Theorem 2.5** (Skiba [8]). *Suppose that  $G$  is  $\sigma$ -soluble. Then  $L_{\sigma}(G)$  is distributive if and only if all members of complete Hall  $\sigma$ -sets of  $G$  are cyclic.*

**Corollary 2.6** (See Zappa [9] or Corollary 9.2.5 in [10]). *Let  $G$  be soluble. Then  $L_{sn}(G)$  is distributive if and only if every Sylow subgroup of  $G$  is cyclic.*

Modifying the concept of  $\sigma$ -solubility in [4], we say that  $G$  is  $\sigma_{\delta}$ -soluble if every chief factor of  $G$  is  $\sigma_{\delta}$ -primary.

**Theorem 2.7** (Skiba [8]).  $L_{\Pi_{\delta}}(G)$  is complemented if and only if the following conditions hold:

(i)  $G = (A \times B \times C) \rtimes D$ , where  $ABC \leq \text{Soc}(G)$ , every minimal normal subgroup of  $G$  contained in  $A$  is not  $\Pi_{\delta}$ -primary, every minimal normal subgroup of  $G$  contained in  $B$  is abelian  $\Pi_{\delta}$ -primary and every minimal normal subgroup of  $G$  contained in  $D$  is non-abelian  $\Pi_{\delta}$ -primary.

(ii)  $D$  is a  $\sigma_{\delta}$ -soluble  $\Pi$ -group such that  $C \rtimes D$  is a  $\Pi_{\delta}$ -subnormal subgroup of  $G$  and  $L_{\Pi}(C \rtimes D)$  is complemented.

**Corollary 2.8** (See Curzio [12] or Theorem 9.2.7 in [10]). *The following statements are equivalent:*

(i)  $L_{sn}(G)$  is complemented.

(ii)  $G$  is a direct product of simple groups.

(iii) *Every minimal normal subgroup of  $G$  is a direct factor of  $G$ .*

In concluding this section we state the following two open questions.

**Question 2.9.** *Suppose that the lattice  $L(S/T)$  is modular for all  $\Pi$ -subnormal subgroups  $T \leq S$  of  $G$  such that  $T$  is normal in  $S$  and either  $S/T$  is  $\Pi$ -primary or  $S/T$  is a  $p$ -group ( $p$  a prime). Does it true then that  $L_{\Pi}(G)$  is modular?*

**Question 2.10.** *Suppose that the following two conditions hold:*

(a) *If  $T \leq S$  are  $\Pi_{\delta}$ -subnormal subgroups of  $G$ , where  $T$  is normal in  $S$  and either  $S/T$  is  $\Pi_{\delta}$ -primary or  $S/T$  is a  $p$ -group ( $p$  a prime), then  $L(S/T)$  is modular.*

(b)  $\langle A, B \rangle^{\sigma_0} \leq A \cap B$  for each  $A, B \in L_{\sigma_{\delta}}(G)$  such that  $A$  and  $B$  cover  $A \cap B$  and  $A \cap B$  is not normal both in  $A$  and  $B$ .

*Does it true then that  $L_{\Pi_{\delta}}(G)$  is modular?*

### 3 On $\sigma$ -supersoluble groups and one generalization of CLT-groups

The examples, some properties and applications of  $\sigma$ -soluble and  $\sigma$ -nilpotent groups were given in [1]–[5]. In this section we discuss the following  $\sigma$ -generalization of supersolubility.

**Definition 3.1.** We say that  $G$  is  $\sigma$ -supersoluble if every chief factor of  $G$  below  $G^{\sigma_0}$  is cyclic, and we use  $\mathfrak{U}_{\sigma}$  to denote the class of all  $\sigma$ -supersoluble groups.

It is clear that every  $\sigma$ -supersoluble group is  $\sigma$ -soluble, and  $G$  is supersoluble iff  $G$  is  $\sigma$ -supersoluble, where  $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$  is the *smallest* partition of  $\mathbb{P}$ .

**Example 3.2.** Let  $G = A_5 \times B$ , where  $A_5$  is the alternating group of degree 5 and  $B = C_{29} \rtimes C_7$  a non-abelian group of order 203, and let

$$\sigma = \{\{7\}, \{29\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 5, 7, 29\}'\}.$$

Then  $G^{\mathfrak{M}_\sigma} = C_{29}$ , so  $G$  is a  $\sigma$ -supersoluble group but it is neither soluble nor  $\sigma$ -nilpotent.

A class  $\mathfrak{F}$  of groups is called: a *formation* if for every group  $G$ , every homomorphic image of  $G/G^\delta$  belongs to  $\mathfrak{F}$ ; a *Fitting class* if for every group  $G$ , every normal subgroup of  $G_\delta$  belongs to  $\mathfrak{F}$ . A formation  $\mathfrak{F}$  is said to be: *saturated* if  $G \in \mathfrak{F}$  whenever  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ ; *hereditary* if  $H \in \mathfrak{F}$  whenever  $H \leq G \in \mathfrak{F}$ .

The classes  $\mathfrak{S}_\sigma$  and  $\mathfrak{N}_\sigma$  of all  $\sigma$ -soluble groups and of all  $\sigma$ -nilpotent groups respectively are hereditary saturated Fitting formations [1]. With respect to the class  $\mathfrak{U}_\sigma$  we have

**Theorem 3.3** (Guo, Skiba [22]). *The class  $\mathfrak{U}_\sigma$  is a hereditary formation and this formation is neither saturated nor a Fitting class.*

The applications of  $\sigma$ -supersoluble groups are based on Theorem 3.3 and the following properties of  $\sigma$ -supersoluble groups.

**Theorem 3.4** (Guo, Skiba [22]).  *$G$  is  $\sigma$ -supersoluble if and only if the following assertions hold:*

- (1)  $G^{\mathfrak{M}_\sigma}$  is nilpotent.
- (2)  $G'$  is  $\sigma$ -nilpotent.
- (3)  $G^\mathfrak{U} \cap D \leq \Phi(G) \cap Z_\mathfrak{U}(G)$ .

In this theorem  $\mathfrak{U}$  is the class of all supersoluble groups and  $G^\mathfrak{U}$  denotes the supersoluble residual of  $G$ .  $Z_\mathfrak{U}(G)$  denotes the *supersoluble hypercentre* of  $G$ , that is, the product of all normal subgroups  $N$  of  $G$  such that every chief factor of  $G$  below  $N$  is cyclic.

Recall that  $G$  is called a *CLT-group* iff it satisfies the following converse to Lagrange's theorem: *for every divisor  $d$  of  $|G|$ ,  $G$  has a subgroup of order  $d$ .* The *CLT*-group and some interesting subclasses of the class of all *CLT*-groups have been studied by many authors (see Chapters 1, 3, 4 and 5 in [13] and the recent paper [14]–[18]).

**Definition 3.5.** (i) We say that  $G$  is a *CLT $_\sigma$ -group* if  $G$  has a complete Hall  $\sigma$ -set  $\{1, H_1, \dots, H_t\}$  such that for all subgroups  $A_i \leq H_i$ ,  $G$  has a subgroup of order  $|A_1| \cdots |A_t|$ .

(ii) We say that  $G$  is a *generalized CLT $_\sigma$ -group* if for all  $p_i \in \sigma_i \in \sigma(G)$ ,  $G$  has a subgroup of order

$p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$  for each  $(n_1, \dots, n_t)$  such that  $p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$  divides  $|G|$ .

**Remark 3.6.** (i)  $G$  is a *CLT $_\sigma$ -group* if and only if  $G$  has a complete Hall  $\sigma$ -set  $\{1, H_1, \dots, H_t\}$  such that for every  $i$  and for every subgroup  $A_i$  of  $H_i$ ,  $G$  has a subgroup  $E_i$  of order  $|A_i| |G|_{\sigma_i}$ . Indeed, the intersection  $E = E_1 \cap \dots \cap E_t$  has order  $|E| = |A_1| \cdots |A_t|$  since  $(|G : E_i|, |G : E_j|) = 1$  for all  $i \neq j$ .

(ii)  $G$  is a *generalized CLT $_\sigma$ -group* if and only if for all  $p \in \sigma_i \in \sigma(G)$ ,  $G$  has a subgroup of order  $p^n |G|_{\sigma_i}$  for each  $n$  such that  $p^n$  divides  $|G|$  (see (i)).

Note that  $G$  is a *CLT*-group iff  $G$  is a *CLT $_\sigma$ -group*, where  $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ . The group  $G$  in Example 1.2 is a *CLT $_\sigma$ -group* but it is not a *CLT*-group.

**Example 3.7.** (i) Every  $\sigma$ -nilpotent group is a *CLT $_\sigma$ -group*, and the  $\sigma$ -nilpotent groups can be characterized as the groups having a complete Hall  $\sigma$ -set  $\{1, H_1, \dots, H_t\}$  such that  $G$  has a normal subgroup of order  $|A_1| \cdots |A_t|$  for each set  $\{A_1, \dots, A_t\}$  such that  $A_i$  is a normal subgroup of  $H_i$ .

(ii) Now let  $G$  be a  $\sigma$ -soluble group and  $A$  be a cyclic group of order  $|G|$ . We show that  $B = G \times A$  is a *generalized CLT $_\sigma$ -group*. Let  $p \in \sigma_i \in \sigma(B)$  and  $p^n$  divides  $|B| = |G|^2$ . Let  $P$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  and  $|P| = p^m$ . Since  $G$  is  $\sigma$ -soluble, it has a  $\sigma_i$ -complement  $E$  such that  $EP = PE$  by Proposition 5.3 below. Let  $E_1$  be the  $\sigma_i$ -complement of  $BA$ . First assume that  $n \leq m$ , and let  $P_1$  be the subgroup of  $A$  of order  $p^n$ . Then  $E \times E_1 P_1$  is a subgroup of  $G$  of order  $p^n |G|_{\sigma_i}$ . Finally, if  $n > m$  and  $P_2$  is the subgroup of  $A$  of order  $p^{n-m}$ , then  $PE \times E_1 P_2$  is a subgroup of  $G$  of order  $p^n |G|_{\sigma_i}$ .

**Theorem 3.8** (Guo, Skiba [22]). *Every CLT $_\sigma$ -group is  $\sigma$ -soluble.*

Note that the group  $G = A_4 \times P$ , where  $A_4$  is the alternating group of degree 4 and  $P$  a group of order 5, is soluble but it is not a *CLT $_\sigma$ -group*, where  $\sigma = \{\{3, 5\}, \{3, 5\}'\}$ .

The symmetric group  $S_4$  of degree 4 is not supersoluble but it clearly is a *CLT*-group. Nevertheless, if  $G$  is of odd order and every homomorphic image of  $G$  is a *CLT*-group, then  $G$  is supersoluble (Humphreys [19]). On the other hand, the Ore-Zappa theorem states (see [20], [21] or Theorem 4.1 in [13, Ch. 1]) that  $G$  is supersoluble also in the case when every subgroup of  $G$  is a *CLT*-group. With respect to *CLT $_\sigma$ -groups* we get the following fact.

**Theorem 3.9** (Guo, Skiba [22]). Let  $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ . Suppose that  $G$  has a complete Hall  $\sigma$ -set  $\{1, H_1, \dots, H_t\}$  such that  $H_i$  is supersoluble whenever  $H_i \cap D \neq 1$ . Then  $G$  is  $\sigma$ -supersoluble if and only if every section of  $G$  is a  $CLT_\sigma$ -group.

Now we consider some special classes of  $\sigma$ -supersoluble  $CLT_\sigma$ -groups.

We will say that a subgroup  $A$  of  $G$  is  $H_\sigma$ -subnormally (respectively  $H_\sigma$ -permutably,  $H_\sigma$ -normally) embedded in  $G$  if  $A$  is a  $\sigma$ -Hall subgroup of some  $\sigma$ -subnormal (respectively  $\sigma$ -permutable (see Definition 4.2 below), normal) subgroup of  $G$ .

In the special case, when  $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ , the definition of  $H_\sigma$ -normally embedded subgroups is equivalent to the concept of Hall normally embedded subgroups in [15], the definition of  $H_\sigma$ -permutably embedded subgroups is equivalent to the concept of Hall  $S$ -quasinormally embedded subgroups in [18] and the definition of  $H_\sigma$ -subnormally embedded subgroups is equivalent to the concept of Hall subnormally embedded subgroups in [16].

Example 3.5 (i) is one of the motivations for the following our observation.

**Theorem 3.10** (Guo, Skiba [22]). Let

$$\mathcal{H} = \{1, H_1, \dots, H_t\}$$

be a complete Hall  $\sigma$ -set of  $G$ ,  $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$  and  $\pi = \pi(D)$ . Any two of the following conditions are equivalent:

(i) For all  $p \in \sigma_i \in \sigma(G)$ , where  $p \in \pi$ , and each natural number  $n$  such that  $p^n$  divides  $|G|$ ,  $G$  has a  $H_\sigma$ -subnormally embedded subgroup of order  $p^n |G|_{\sigma_i}$ .

(ii) For each set  $\{A_1, \dots, A_t\}$ , where  $A_i$  is a normal subgroup of  $H_i$  for all  $i = 1, \dots, t$ ,  $G$  has a  $H_\sigma$ -normally embedded subgroup of order  $|A_1| \cdots |A_t|$ .

(iii)  $D$  is cyclic of square-free order and for each  $\sigma_i \in \sigma(D)$ ,  $|\sigma_i \cap \pi(G)| = 1$ .

In the case, when  $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ , Theorem 3.10 covers Theorem 11 in [15], Theorem 2.7 in [16] and Theorems 3.1 and 3.2 in [18].

**Theorem 3.11** (Guo, Skiba [23]). Let

$$\mathcal{H} = \{1, H_1, \dots, H_t\}$$

be a complete Hall  $\sigma$ -set of  $G$  and  $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ . Then any two of the following conditions are equivalent:

(i)  $G$  has an  $H_\sigma$ -permutably embedded subgroup of order  $|A|$  for each subgroup  $A$  of  $G$ .

(ii)  $D$  is cyclic of square-free order and  $|\sigma_i \cap \pi(G)| = 1$  for each  $\sigma_i \in \sigma(D)$ .

(iii) For each set  $\{A_1, \dots, A_t\}$ , where  $A_i$  is a subgroup (respectively normal subgroup) of  $H_i$  for

all  $i = 1, \dots, t$ ,  $G$  has an  $H_\sigma$ -permutably embedded (respectively  $H_\sigma$ -normally embedded) subgroup of order  $|A_1| \cdots |A_t|$ .

Let  $\mathfrak{F}$  be a class of groups. A subgroup  $H$  of  $G$  is said to be an  $\mathfrak{F}$ -covering subgroup of  $G$  [25, VI, Definition 7.8] if  $H \in \mathfrak{F}$  and for every subgroup  $E$  of  $G$  such that  $H \leq E$  and  $E/N \in \mathfrak{F}$  it follows that  $E = NH$ . We say that a subgroup  $H$  of  $G$  is a  $\sigma$ -Carter subgroup of  $G$  if  $H$  is an  $\mathfrak{N}_\sigma$ -covering subgroup of  $G$ , where  $\mathfrak{N}_\sigma$  is the class of all  $\sigma$ -nilpotent groups.

A group  $G$  is said to have a Sylow tower if  $G$  has a normal series  $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{t-1} < G_t = G$  such that for each  $i \in \{1, \dots, t\}$ ,  $|G_i / G_{i-1}|$  is the order of some Sylow subgroup of  $G$ .

Let  $H/K$  be a chief factor of  $G$ . Then we say that  $H/K$  is  $\sigma$ -central [4] (in  $G$ ) if the semidirect product  $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$  is  $\sigma$ -primary. Otherwise, we say that  $H/K$  is  $\sigma$ -eccentric (in  $G$ ).

We say that  $G$  is an  $H\sigma E$ -group if  $G$  is a group of the form  $G = D \rtimes M$ , where  $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$  is a  $\sigma$ -Hall subgroup of  $G$  with  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$  such that  $D$  has a Sylow tower and every chief factor of  $G$  below  $D$  is  $\sigma$ -eccentric,  $M$  is a  $\sigma$ -Carter subgroup of  $G$  and  $M$  acts irreducibly on every  $M$ -invariant Sylow subgroup of  $D$ .

We do not still know the structure of the groups  $G$  with an  $H_\sigma$ -subnormally embedded subgroup of order  $|A|$  for each subgroup  $A$  of  $G$ . Nevertheless, the following fact is true.

**Theorem 3.12** (Guo, Skiba [23]). Any two of the following conditions are equivalent:

(i) Every subgroup of  $G$  is  $H_\sigma$ -subnormally embedded in  $G$ .

(ii) Every  $\sigma$ -subnormal subgroup  $H$  of  $G$  is a  $H\sigma E$ -group.

(iii) Every  $\sigma$ -subnormal subgroup  $H$  of  $G$  is a group of the form  $H = D \rtimes M$ , where  $D$  is a  $\sigma$ -Hall subgroup of  $H$  with  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$  and  $D$  has a Sylow tower,  $M$  is  $\sigma$ -nilpotent and  $M$  acts irreducibly on every  $M$ -invariant Sylow subgroup of  $D$ .

Now, consider some corollaries of Theorems 3.11 and 3.13.

From Theorem 3.11 we get the following result.

**Corollary 3.13** (Guo, Skiba [23]). Suppose that  $G$  possesses a complete Hall  $\sigma$ -set  $\mathcal{H} = \{1, H_1, \dots, H_t\}$  such that  $H_i$  is nilpotent for all  $i = 1, \dots, t$ . Then  $G$  has an  $H_\sigma$ -normally embedded subgroup of order  $|H|$  for each subgroup  $H$  of  $G$  if and only if the nilpotent residual  $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$  of  $G$  is cyclic of square-free order and  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ .



In the case when  $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$  we get from Corollary 3.13 the following known result.

**Corollary 3.14** (Ballester-Bolinches, Qiao [24]).  *$G$  has a Hall normally embedded subgroup of order  $|H|$  for each subgroup  $H$  of  $G$  if and only if the nilpotent residual  $G^{\sigma_1}$  of  $G$  is cyclic of square-free order.*

On the basis of Theorems 3.11 and 3.12 the following theorem are proved.

**Theorem 3.15** (Guo, Skiba [23]). *Any two of the following conditions are equivalent:*

(i) Every subgroup of  $G$  is  $H_{\sigma}$ -permutably embedded in  $G$ .

(ii)  $G = G^{\sigma_1} \rtimes M$  is an  $H\sigma E$ -group, where  $G^{\sigma_1}$  is a cyclic group of square-free order.

(iii)  $G = D \rtimes M$ , where  $D$  is a  $\sigma$ -Hall cyclic subgroup of  $G$  of square-free order with  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$  and  $M$  is  $\sigma$ -nilpotent

**Theorem 3.16.** (Guo, Skiba [23]). *Any two of the following conditions are equivalent:*

(i) Every subgroup of  $G$  is  $H_{\sigma}$ -normally embedded in  $G$ .

(ii)  $G = G^{\sigma_1} \rtimes M$  is an  $H\sigma E$ -group, where  $G^{\sigma_1}$  is a cyclic group of square-free order and  $M$  is a Dedekind group.

(iii)  $G = D \rtimes M$ , where  $D$  is a  $\sigma$ -Hall cyclic subgroup of  $G$  of square-free order with  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$  and  $M$  is a Dedekind group.

**Corollary 3.17** (Li, Liu [16]). *Every subgroup of  $G$  is a Hall normally embedded subgroup of  $G$  if and only if  $G = D \rtimes M$ , where  $D = G^{\sigma_1}$  is a cyclic Hall subgroup of  $G$  of square-free order and  $M$  is a Degekind group.*

**Corollary 3.18.** *Every subgroup of  $G$  is a Hall  $S$ -quasinormally embedded subgroup  $G$  if and only if  $G = D \rtimes M$ , where  $D = G^{\sigma_1}$  is a cyclic Hall subgroup of  $G$  of square-free order and  $M$  is a Carter subgroup of  $G$ .*

In conclusion of this section, consider the following example.

**Example 3.19.** Let  $5 < p_1 < p_2 < \dots < p_n$  be a set of primes and  $p$  a prime such that either  $p > p_n$  or  $p$  divides  $p_i - 1$  for all  $i = 1, \dots, n$ . Let  $A$  be a group of order  $p$  and  $P_i$  a simple  $\mathbb{F}_{p_i} A$ -module which is faithful for  $A$ . Let  $A_i = P_i \rtimes A$  and

$$B = (\dots((A_1 \rtimes A_2) \rtimes A_3) \rtimes \dots) \rtimes A_5$$

(see [25, p. 50]). We can assume without loss of generality that  $A_i \leq B$  for all  $i = 1, \dots, n$ . Let  $G = A_5 \times B$ , where  $A_5$  is the alternating group of degree 5 and  $\sigma$  is a partition of  $\mathbb{P}$  such that for some different indices  $i, j, i_1, \dots, i_n \in I$  we have  $p \in \sigma_i$ ,  $\{2, 3, 5\} \subseteq \sigma_j$  and  $p_k \in \sigma_{i_k}$  for all  $k = 1, \dots, n$ . It is clear that

$$D = P_1 P_2 \dots P_n = G^{\sigma_1}$$

is a  $\sigma$ -Hall subgroup of  $G$  and  $G = D \rtimes (A \times A_5)$ .

We show that every subnormal subgroup  $H$  of  $G$  satisfies the condition in Theorem 3.12. If  $H^{\sigma_1} = 1$ , it is evident. Hence we can assume that  $H^{\sigma_1} \neq 1$ , so  $A \leq H$  since every  $p'$ -subgroup of  $G$  is  $\sigma$ -nilpotent. But then  $H = (H \cap D) \rtimes (A \times (H \cap A_5))$ , where  $H \cap D$  is a normal  $\sigma$ -Hall subgroup of  $H$  and  $M = A \times (H \cap A_5)$  is a  $\sigma$ -nilpotent subgroup of  $H$  which induces on every non-identity Sylow subgroup of  $H \cap D$  a non-trivial irreducible group of automorphisms. Therefore  $H^{\sigma_1} = H \cap D$  and  $|\sigma(H^{\sigma_1})| = |\pi(H^{\sigma_1})|$ . It is also clear that  $M$  is a  $\sigma$ -Carter subgroup of  $H$  and every chief factor of  $H$  below  $H^{\sigma_1}$  is  $\sigma$ -eccentric in  $H$ . Thus  $G$  satisfies Condition (ii) in Theorem 3.12. Hence every subgroup  $H$  of  $G$  is  $H_{\sigma}$ -subnormally embedded in  $G$ . On the other hand, the subgroup  $DAC_2$ , where  $C_2$  is a subgroup of order 2 of  $G$ , is not subnormally embedded in  $G$  since  $C_2$  is not a Sylow subgroup of any subnormal subgroup of  $G$ .

Finally, if  $p$  divides  $p_i - 1$  for all  $i = 1, \dots, n$ , then  $|P_i| = p_i$  for all  $i = 1, \dots, n$ , so  $G$  satisfies Condition (ii) in Theorem 3.15 and hence satisfies the condition in Theorem 3.11.

#### 4 Finite groups whose $n$ -maximal subgroups are $\sigma$ -subnormal

By the  $\sigma$ -nilpotent length (denoted by  $l_{\sigma}(G)$ ) of a  $\sigma$ -soluble group  $G$  we mean the length of the shortest normal chain of  $G$  with  $\sigma$ -nilpotent factors. If  $|\sigma(G)| = |\pi(G)|$ , then we say that  $G$  is  $\sigma$ -fiber.

**Definition 4.1.** If

$$M_n < M_{n-1} < \dots < M_1 < M_0 = G,$$

where  $M_i$  is a maximal subgroup of  $M_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , then the chain  $M_n < M_{n-1} < \dots < M_1$  is said to be a maximal chain of  $G$  of length  $n$  and  $M_n$  is an  $n$ -maximal subgroup of  $G$ .

We say that  $G$  is a group of  $\sigma$ -Spencer height  $h_{\sigma}(G) = n$  if every maximal chain of  $G$  of length  $n$  contains a proper  $\sigma$ -subnormal entry and there exists at least one maximal chain of  $G$  of length  $n - 1$  which contains no any proper  $\sigma$ -subnormal entry. Note that  $h_{\sigma}(G) = 1$  if and only if  $G$  is  $\sigma$ -nilpotent;  $h_{\sigma}(G) = 2$  if and only if  $G$  is a  $\sigma$ -fiber Schmidt group with abelian Sylow subgroups (see Theorem 4.7 below).

The relationship between  $n$ -maximal subgroups (where  $n > 1$ ) of a group  $G$  and the structure of  $G$  was studied by many authors. One of the first results in this direction were obtained by Huppert [26].

He proved that: if all 2-maximal subgroups of a group  $G$  are normal, then  $G$  is supersoluble; if all 3-maximal subgroups of  $G$  are normal, then  $G$  is soluble of rank  $r(G) \leq 2$ . Mann described the structure of the group  $G$  in which each  $n$ -maximal subgroup is subnormal in the case when  $k \leq n-1$ , where  $k$  is the number of distinct prime divisors of the order of  $G$  [27]. He also proved that  $G$  is nilpotent if  $G$  is soluble and  $k > n$ . Deskins [28] and Spencer [29] analyzed the group  $G$  in which every  $n$ -maximal chain contains at least one proper subnormal subgroup. Some recent researches in this line may see, for example, [30]–[45]. In particular, Lutsenko and Skiba [40] obtained a full description of groups with subnormal second and third maximal subgroups; further, in the paper [43], Guo, Andreeva and Skiba described groups of Spencer height  $h(G) \leq 3$ .

In this section we discuss the groups with  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable  $n$ -maximal subgroups, in the sense of the following definition.

**Definition 4.2.** A subgroup  $H$  of  $G$  is said to be  $\sigma$ -quasinormal or  $\sigma$ -permutable in  $G$  [4] if  $G$  possesses a complete Hall  $\sigma$ -set  $\mathcal{H}$  such that  $HA^x = A^xH$  for all members  $A \in \mathcal{H}$  and all  $x \in G$ .

Note, in passing, that the  $\sigma$ -permutable subgroups forms a subclass of the class of all  $\sigma$ -subnormal subgroups of the group (see Theorem B in [4]).

**Example 4.3.** (i) Let  $p > q > r$  be primes, where  $q$  divides  $p-1$  and  $r$  divides  $q-1$ . Let  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ , where  $\sigma_1 = \{p, q\}$  and  $\sigma_2 = \{p, q\}'$ . Let  $H = Q \rtimes R$  be a non-abelian group of order  $qr$ ,  $P$  a simple  $\mathbb{F}_p H$ -module which is faithful for  $H$ , and  $G = P \rtimes H$ . Then the subgroup  $Q$  is not subnormal in  $G$  but it is  $\sigma$ -subnormal in  $G$ .

(ii) In the above group  $G$ , let  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ , where  $\sigma_1 = \{p, r\}$  and  $\sigma_2 = \{p, r\}'$ . Then  $|P| > p$ . Since  $q$  divides  $p-1$ ,  $PQ$  is supersoluble. Hence for some normal subgroup  $L$  of  $PQ$ , we have  $1 < L < P$ . Then for every Hall  $\sigma_1$ -subgroup  $V$  of  $G$  we have  $L \leq P \leq V$ , so  $QV = V = VQ$ . On the other hand, for every Hall  $\sigma_2$ -subgroup  $Q^x$  of  $G$  we have  $Q^x \leq PQ$ , so  $LQ^x = Q^xL$ . Hence  $L$  is  $\sigma$ -permutable in  $G$ . It is also clear that  $L$  is not normal in  $G$ , so  $LR \neq RL$ , which implies that  $L$  is not  $S$ -permutable in  $G$ .

Our first observation is the following result.

**Theorem 4.4** (Guo, Skiba [46]). (i) If  $h_\sigma(G) \leq 3$ , then  $G$  is  $\sigma$ -soluble.

(ii) If each 3-maximal subgroup of  $G$  is  $\sigma$ -subnormal in  $G$  and  $G$  is not  $\sigma$ -nilpotent, then  $G$  is soluble.

**Corollary 4.5** (Huppert [26]). If each 3-maximal subgroup of  $G$  is normal in  $G$ , then  $G$  is soluble.

**Corollary 4.6** (Spencer [29]). If  $h(G) \leq 3$ , then  $G$  is soluble.

On the basis of Theorem 4.4, the following fact is proved.

**Theorem 4.7** (Guo, Skiba [46]). Suppose that  $G$  is not  $\sigma$ -nilpotent. Then the following statements are equivalent:

(i)  $h_\sigma(G) = 2$ .

(ii)  $G$  is a  $\sigma$ -fiber Schmidt group with abelian Sylow subgroups.

(iii) Every 2-maximal subgroup of  $G$  is subnormal in  $G$ .

For the general case we prove the following

**Theorem 4.8** (Guo, Skiba [46]). Suppose that  $G$  is  $\sigma$ -soluble. Let  $\sigma^0$  be a partition of  $\mathbb{P}$  such that  $\sigma^0 \leq \sigma$ . Then:

(i)  $l_\sigma(G) \leq h_\sigma(G)$ .

(ii) If either  $h_\sigma(G) < |\sigma(G)|$  or  $G$  is  $\sigma^0$ -soluble and every  $n$ -maximal subgroup of  $G$ , where  $n < |\sigma^0(G)|$ , is  $\sigma$ -subnormal in  $G$ , then  $G$  is  $\sigma$ -nilpotent.

(iii) If  $n = h_\sigma(G) \leq |\sigma(G)|$ , then every  $n$ -maximal subgroup of  $G$  is  $\sigma$ -subnormal in  $G$ .

In this theorem  $\sigma^0 \leq \sigma$  means that for each  $j \in J$  there is  $i \in I$  such that  $\sigma_j^0 \subseteq \sigma_i$ .

**Corollary 4.9** (Mann [27]). Suppose that  $G$  is a soluble group and each  $n$ -maximal subgroup of  $G$  is subnormal. If  $n < |\pi(G)|$ , then  $G$  is  $\sigma$ -nilpotent.

**Corollary 4.10** (Spencer [29]). Suppose that  $G$  is a soluble group. Then:

(i)  $l(G) \leq h(G)$ .

(ii) If  $h(G) < |\pi(G)|$ , then  $G$  is  $\sigma$ -nilpotent.

**Theorem 4.11** (Guo, Skiba [46]). Suppose that  $G$  is a soluble but not a  $\sigma$ -nilpotent group. Let  $\{1, H_1, \dots, H_i\}$  be a complete Hall  $\sigma$ -set of  $G$  and  $\{P_1, \dots, P_n\}$  a Sylow basis of  $G$ . Then the following are equivalent:

(i) Each  $n$ -maximal subgroup of  $G$ , where  $n \leq |\pi(G)|$ , is  $\sigma$ -subnormal in  $G$ .

(ii)  $G = D \rtimes M$ , where  $D = G^{\sigma^0}$  is a nilpotent Hall subgroup of  $G$ , and the following hold:

(a)  $M$  is not  $\sigma$ -subnormal in  $G$ , so some Sylow subgroup  $P_1$  of  $M$  is not  $\sigma$ -subnormal in  $G$ . The subgroup  $P_1$  is cyclic and it forms an irreducible pair with  $P_i$  for all  $i > 1$ , so  $P_i$  is elementary abelian. Moreover, if  $P_1 \leq H_1$  and  $P_1$  is not of prime order, then  $\{H_2, \dots, H_i\}$  are normal in  $G$ .

(b) If  $G$  possesses at least two non- $\sigma$ -subnormal non-isomorphic Sylow subgroups, then all non- $\sigma$ -subnormal Sylow subgroups are of prime order.

(c) If  $P_1$  is a  $\sigma_i$ -group and  $V_1$  is the maximal subgroup of  $P_1$ , then  $|G : N_G(V_1)|$  is a  $\sigma_i$ -number.

**Corollary 4.12** (Mann [27]). Suppose that  $G$  is a soluble group and each  $n$ -maximal subgroup of

$G$  is subnormal. If  $n \leq |\pi(G)|$ , then  $G$  is one of the following type:

- (a)  $G$  is nilpotent.
- (b)  $G = HN$ , where
  - (i)  $N$  is a normal abelian Hall subgroup, and all Sylow subgroups of  $N$  are elementary abelian.
  - (ii)  $H$  is a cyclic Hall subgroup, and  $|H|$  is either a prime power or square-free number.
  - (iii)  $(|N|, |H|) = 1$ .
  - (iv) If  $H_p$  is a Sylow subgroup of  $H$  and  $N_q$  is a Sylow subgroup of  $N$ , then  $H_p$  induces in  $N_q$  an irreducible automorphism group of order  $p$  or  $1$ . In the latter case,  $|N_q| = q$ .

Conversely, a group of type (a) or (b) has each  $n$ -maximal subgroup subnormal.

From Theorem 4.8 (iii) and Theorem 4.7 we also get the following known result.

**Corollary 4.13** (Spencer [29]). *Suppose that  $G$  is a soluble group. If  $G$  is not nilpotent and  $h(G) \leq |\pi(G)|$ , then every Sylow subgroup of  $G$  is either cyclic or elementary abelian. Furthermore if there exist at least two non-normal non-isomorphic Sylow subgroups of  $G$ , then all non-normal Sylow subgroups of  $G$  are of prime order.*

Recall that the rank  $r(G)$  of a soluble group  $G$  is the maximal integer  $k$  such that  $G$  has a chief factor of order  $p^k$ , for some prime  $p$  (see [25, p. 685]).

Our next observation is the following fact.

**Theorem 4.14** (Guo, Skiba [46]). *Suppose that  $G$  is soluble and each  $n$ -maximal subgroup of  $G$  is  $\sigma$ -permutable in  $G$ . Suppose that  $G$  has a complete Hall  $\sigma$ -set  $\mathcal{H}$  such that for every member  $H$  of  $\mathcal{H}$  we have  $r(H) \leq n-1$ . Then  $r(G) \leq n-1$ .*

A subgroup  $H$  of  $G$  is called *quasinormal* or *permutable* (*S-quasinormal* [47] or *S-permutable*, respectively) if  $HA = AH$  for every subgroup (every Sylow subgroup, respectively)  $A$  of  $G$ .

**Corollary 4.15.** *Suppose that  $G$  is a soluble group and each  $n$ -maximal subgroup of  $G$  is S-permutable in  $G$ . Then  $r(G) \leq n-1$ .*

**Corollary 4.16** (Mann [27]). *Suppose that  $G$  is a soluble group and each  $n$ -maximal subgroup of  $G$  is quasinormal. Then  $r(G) \leq n-1$ .*

If  $G$  is not  $\sigma$ -nilpotent and each 3-maximal or each 2-maximal subgroup of  $G$  is  $\sigma$ -subnormal in  $G$ , then  $G$  is soluble by Theorems 4.4 and 4.14. Hence we get also from Theorem 4.14 the following facts.

**Corollary 4.17.** *Suppose that each 3-maximal subgroup of  $G$  is  $\sigma$ -permutable in  $G$ . If  $G$  has a complete Hall  $\sigma$ -set  $\mathcal{H}$  such that for every member  $H$  of  $\mathcal{H}$  we have  $r(H) \leq 2$ , then  $G$  is soluble and  $r(G) \leq 2$ .*

**Corollary 4.18** (Agrawal [48]). *If every 2-maximal subgroup of  $G$  is S-permutable in  $G$ , then  $G$  is supersoluble.*

**Corollary 4.19** (Huppert [26]). *If every 3-maximal subgroup of  $G$  is normal in  $G$ , then  $G$  is soluble of rank  $r(G)$  at most two.*

### 5 $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -soluble and $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent groups

We say that a chief factor  $H/K$  of  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -central (in  $G$ ) if the semidirect product

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$$

is  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -primary.

**Definition 5.1.** We say that  $G$  is: (i)  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -soluble if every chief factor of  $G$  is either a  $\Pi'$ -group or  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -primary; (ii)  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent if every chief factor of  $G$  is either a  $\Pi'$ -group or  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -central (in  $G$ ).

We use the symbols  $\mathfrak{S}_{\Pi}$  and  $\mathfrak{N}_{\Pi}$  to denote the classes of all  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -soluble groups and of all  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -soluble groups, respectively.

The direct calculations show that the following proposition is true.

**Proposition 5.2.** *The class  $\mathfrak{S}_{\Pi}$  is closed under taking direct products, homomorphic images and subgroups. Moreover, any extension of the  $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -group by a  $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -group is a  $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -group.*

A set  $\mathcal{H}$  of subgroups of  $G$  is said to be a *complete Hall  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -set* of  $G$  if every member  $\neq 1$  of  $\mathcal{H}$  is a Hall  $\sigma_i$ -subgroup of  $G$  for some  $\sigma_i \in \Pi$ ,  $\mathcal{H}$  contains exact one Hall  $\sigma_i$ -subgroup of  $G$  for every  $\sigma_i \in \Pi \cap \sigma(G)$  and  $H_0 \in \mathfrak{F}$  provided  $H_0 \in \mathcal{H}$  and  $H_0$  is a  $\sigma_0$ -group.

**Proposition 5.3.** *Let  $G$  be  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -soluble and  $\Pi^* = \Pi \cup \{\pi\}$ , where  $\pi = \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i$ . Then:*

- (i)  $|G : M|$  is either a  $\Pi'$ -number or  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -primary for every maximal subgroup  $M$  of  $G$ .
- (ii) For every  $\sigma_i \in \sigma(G) \cap \Pi$ ,  $G$  has a maximal subgroup  $M$  such that  $|G : M|$  is a  $\sigma_i$ -number.
- (iii)  $G$  has a complete Hall  $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -set  $\{1, H_1, \dots, H_t\}$  such that  $\{H_1, \dots, H_t\}$  is a  $\Pi$ -basis of  $G$  and for each  $i \neq j$  every Sylow subgroup of  $H_i$   $G$ -permutes with every Sylow subgroup of  $H_j$ .

(iv) For any  $\Pi_1 \subseteq \Pi$ ,  $G$  has a Hall  $\Pi_1$ -subgroup and every Hall  $\Pi_1$ -subgroup of  $G$   $G$ -permutes with every Sylow subgroup of  $G$ .

(v) For any  $\Pi_1 \subseteq \Pi$  the following hold:  $G$  has a Hall  $\Pi_1$ -subgroup  $E$ , every  $\Pi_1$ -subgroup of  $G$  is contained in some conjugate of  $E$  and  $E$   $G$ -permutes with every Sylow subgroup of  $G$ .

*Proof.* (i) Suppose that  $|G : M|$  is not a  $\Pi'$ -number and let  $H/M_G$  be a chief factor of  $G$ . Then  $|G : M|$  divides  $|H/M_G|$ , so  $H/M_G$  is not

a  $\Pi'$ -group. Hence  $H/M_G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary, so we have (i).

(ii) Let  $R$  be a minimal normal subgroup of  $G$ . Then  $R$  is either a  $\Pi'$ -group or  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary. By induction, for every

$$\sigma_i \in \sigma(G/R) \cap \Pi,$$

$G/R$  has a maximal subgroup  $M/R$  such that  $|(G/R):(M/R)| = |G:M|$  is a  $\sigma_i$ -number. Hence we need only to consider the case when  $R$  is a Hall  $\sigma_i$ -subgroup of  $G$ , where  $\sigma_i \in \sigma(G) \cap \Pi$ . By the Schur-Zassenhaus theorem,  $R$  has a complement  $U$  in  $G$ . But then  $G$  has a maximal subgroup  $M$  such that  $|G:M|$  divides  $|R|$ , so  $|G:M|$  is a  $\sigma_i$ -number.

(iii), (iv), (v) It is not difficult to show that every  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -soluble group is  $\Pi^*$ -soluble, so in view of Theorems A and B in [5], it is enough to show that if  $H \in \{H_1, \dots, H_t\}$  and  $H$  is a  $\sigma_0$ -group, then  $H \in \mathfrak{F}$ . Let

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{n-1} < G_n = G$$

be a chief series of  $G$ . Since  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -soluble, every factor  $G_i/G_{i-1}$  is either a  $\mathfrak{F}$ -group or a  $\sigma_0$ -group. In the former case  $H$  avoids  $G_i/G_{i-1}$  and so

$$G_i \cap H / G_{i-1} \cap H \cong G_i / G_{i-1}.$$

In the second case  $H$  covers  $G_i/G_{i-1}$ , since  $H$  is a Hall  $\sigma_0$ -group of  $G$ , and so  $G_i \cap H = G_{i-1} \cap H$ . Therefore we have  $H \in \mathfrak{F}$  since the class  $\mathfrak{F}$  is closed under extensions.

The proposition is proved.

The following two lemmas are well-known (see, for example, Lemmas 3.27, 3.28 and 3.29 in [49]).

**Lemma 5.4.** *Let  $R$  be an abelian minimal normal subgroup of  $G$  such that  $G = RM$  for a maximal subgroup  $M$  of  $G$ . Then*

$$G/M_G \cong R \rtimes (G/C_G(R)).$$

**Lemma 5.5.** *If the chief factors  $H/K$  and  $S/T$  of  $G$  are  $G$ -isomorphic, then  $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \cong (S/T) \rtimes (G/C_G(S/T))$ .*

**Lemma 5.6.** *Let  $H$  be a normal subgroup of  $G$ . If  $H/H \cap \Phi(G)$  is a  $\Pi$ -group, then  $H$  has a Hall  $\Pi$ -subgroup, say  $E$ , and  $E$  is normal in  $G$ .*

*Proof.* Let  $D = O_{\Pi}(H)$ . Then, since  $H \cap \Phi(G)$  is nilpotent,  $D$  is a Hall  $\Pi'$ -subgroup of  $H$ . Hence by the Schur-Zassenhaus theorem,  $H$  has a Hall  $\Pi$ -subgroup, say  $E$ . It is clear that  $H$  is  $\Pi'$ -soluble, so any two Hall  $\Pi$ -subgroups of  $H$  are conjugate. Therefore by the Frattini argument we have

$$G = HN_G(E) = (E(H \cap \Phi(G)))N_G(E) = N_G(E).$$

Thus  $E$  is normal in  $G$ . The lemma is proved.

**Proposition 5.7.** *Any two of the following conditions are equivalent:*

- (i)  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -nilpotent.

(ii)  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -soluble and for every maximal subgroup  $M$  of  $G$  we have either  $|G:M|$  is a  $\Pi'$ -number or  $M$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$ .

(iii)  $G$  has a normal Hall  $\Pi'$ -subgroup  $E$  and  $G/E$  is  $\sigma_{\mathfrak{F}}$ -nilpotent.

(iv)  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -soluble and  $G$  has a normal Hall  $\sigma_i$ -subgroup for all  $\sigma'_i \in \sigma(G) \cap \Pi$ .

*Proof.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Let  $M$  be a maximal subgroup of  $G$  such that  $|G:M|$  is not a  $\Pi'$ -number. Assume that  $M_G \neq 1$ . It is clear that the hypothesis holds for  $G/M_G$ , so  $M/M_G$  is  $\sigma$ -subnormal in  $G/M_G$  by induction. Hence  $M$  is  $\sigma$ -subnormal in  $G$  by Proposition 1.3(3). Now assume that  $M_G = 1$ . By [50, A, 15.2], either  $G$  has a unique minimal normal subgroup  $R$  or  $G$  has exactly two minimal normal subgroups  $R$  and  $N$  and the following hold:  $R$  and  $N$  are isomorphic non-abelian groups,  $R \cap M = 1 = N \cap M$  and  $C_G(R) = N$ . Since  $|G:M|$  is not a  $\Pi'$ -number and clearly  $|G:M|$  divides  $|R|$ ,  $R$  and  $N$  are  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -central in  $G$ .

Let  $C = C_G(R)$ . Suppose that  $R$  is abelian. Then  $C = R$  by [50] and so in this case we have

$$G \cong G/M_G \cong R \rtimes (G/C_G(R)) \in \mathfrak{N}_{\sigma_{\mathfrak{F}}}$$

by Lemma 5.4, which implies that  $G/M_G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary. But then  $M$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$  by Proposition 1.3(3). Similarly we can get that  $M$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$  in the case when  $C = 1$ . Finally, assume that  $C = N$ . Then

$$R \rtimes (G/C) = R \rtimes (G/N)$$

is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary, so  $M \cong G/N$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary. But then  $G/N \cong M \cong G/R$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary. It follows that  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary. Thus  $M$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$ .

Hence (i)  $\Rightarrow$  (ii).

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Suppose this is false and let  $G$  be a counterexample of minimal order. It is clear that  $G$  is  $\Pi^*$ -soluble, so  $G$  has a Hall  $\Pi'$ -subgroup  $H$  by Proposition 5.3. Let  $R$  be a minimal normal subgroup of  $G$ . It is clear that the hypothesis holds for  $G/R$ , so  $HR$  is normal in  $G$  by the choice of  $G$ . Hence we can assume that  $R \not\leq H$ , so  $R \cap H = 1$  since  $G$  is  $\sigma$ -soluble, that is,  $R$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary. If  $G$  has a minimal normal subgroup  $N \neq R$ , then as above we get that  $N$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary and  $HN$  is normal in  $G$  and so

$$H = RH \cap NH = H(R \cap NH) = H(R \cap N) = H$$

is normal in  $G$ . Therefore  $R$  is the unique minimal normal subgroup of  $G$ . Assume that  $R \not\leq \Phi(G)$ .

Then from Lemma 5.6 and the isomorphism  $HR/R \cong H$  we get that  $H$  is normal in  $HR$  and so  $H$  is a characteristic subgroup of normal subgroup  $HR$  of  $G$ , which implies that  $H$  is normal in  $G$ . Therefore we may assume that  $R \not\leq \Phi(G)$ . Let  $M$  be a maximal subgroup of  $G$  such that  $G = RM$ . Then  $|G:M|$  divides  $|R|$ , so  $|G:M|$  is not a  $\Pi'$ -number. Therefore, since (i)  $\Rightarrow$  (ii),  $M$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -subnormal in  $G$ . But  $M_G = 1$  and so  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary, which implies that  $H = 1$ .

Finally, we show that  $G/H$  is  $\sigma_{\mathfrak{F}}$ -nilpotent. We may assume without loss of generality that  $H = 1$ . Then every chief factor of  $G$  is  $\sigma$ -central in  $G$  and so  $G = H_1 \times \dots \times H_t$ , where  $\mathcal{H} = \{1, H_1, \dots, H_t\}$  is a complete Hall  $\sigma$ -set of  $G$  by [3]. But then  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -nilpotent by Proposition 5.3. Hence (i)  $\Rightarrow$  (iii).

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) This is evident.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Let  $H/K$  be a chief factor of  $G$ . Assume that  $H/K$  is not a  $\Pi'$ -group. Then  $H/K$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -primary since  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -soluble by hypothesis, so  $H/K$  is a  $\sigma_i$ -group for some  $\sigma_i \in \sigma(G) \cap \Pi$ . By hypothesis,  $G$  has a normal Hall  $\sigma_i$ -subgroup  $E$ . Moreover, Proposition 5.3 implies that  $G/E \in \mathfrak{F}$  provided  $i = 0$ . Therefore every chief factor of  $G$  between  $E$  and  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -central in  $G$ . Therefore from the  $G$ -isomorphisms  $G/E \cong HE/KE \cong H/K$  we get that  $H/K$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -central in  $G$  by Lemma 5.5. Therefore  $G$  is  $\Pi_{\mathfrak{F}}$ -nilpotent.

The proposition is proved.

In the case when  $\mathfrak{F}$  is the class of all  $\sigma_0$ -groups, we get from Proposition 5.7 the following

**Corollary 5.8.** *Any two of the following conditions are equivalent:*

- (i)  $G$  is  $\Pi$ -nilpotent.
- (ii)  $G$  is  $\Pi$ -soluble and for every maximal subgroup  $M$  of  $G$  we have either  $|G:M|$  is a  $\Pi'$ -number or  $M$  is  $\Pi$ -subnormal in  $G$ .
- (iii)  $G$  has a normal Hall  $\Pi'$ -subgroup  $E$  and  $G/E$  is  $\sigma$ -nilpotent.
- (iv)  $G$  has a normal Hall  $\sigma'_i$ -subgroup for all  $\sigma_i \in \sigma(G) \cap \Pi$ .

#### REFERENCES

1. Skiba, A.N. On  $\sigma$ -properties of finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – Vol. 4, № 21. – P. 89–96.
2. Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 18. – P. 191–200.
3. Skiba, A.N. On  $\sigma$ -properties of finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – Vol. 3, № 24. – P. 67–81.

4. Skiba, A.N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

5. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Application. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

6. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.

7. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.

8. Skiba, A.N. On the lattice of all  $\Pi$ -subnormal subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Preprint, 2016.

9. Zappa, G. Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione e modulare / G. Zappa // Bull. Un. Mat. Ital. – 1956. – Vol. 11, № 3. – P. 315–318.

10. Schmidt, R. Subgroup lattices of groups / R. Schmidt. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.

11. Zacher, G. Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione e distributivo / G. Zacher // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1957. – Vol. 27. – P. 75–79.

12. Curzio, M. Sui sottogruppi di composizione dei gruppi finiti / M. Curzio // Reserche Mat. – 1958. – Vol. 7. – P. 265–280.

13. *Between Nilpotent and Solvable* / M. Weinstein ed. – Passaic N.J.: Polygonal Publishing House, 1982.

14. Ballester-Bolinches, A. On some classes of supersoluble groups / A. Ballester-Bolinches, J.C. Beidleman, R. Esteban-Romero // J. Algebra. – 2007. – Vol. 312. – P. 445–454.

15. Li, S. On Hall normally embedded subgroups of finite groups / S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 3360–3367.

16. Li, S. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S. Li, J. Liu // J. Algebra. – 2013. – Vol. 388. – P. 1–9.

17. Liu, J. CLT-groups with normal or subnormal subgroups / J. Liu, S. Li, J. He // J. Algebra. – 2012. – Vol. 382. – P. 99–106.

18. Lio, J. CLT-groups with Hall  $S$ -quasinormally embedded subgroups / J. Lio, S. Li // Ukrain. Math. Journal. – 2014. – Vol. 66. – P. 1281–1287.

19. Humphreys, J.F. On groups satisfying the converse Lagrang's theorem / J.F. Humphreys // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1974. – Vol. 75. – P. 25–32.

20. Ore, O. Contributions to the theory of finite groups / O. Ore // Duke. Math. J. – 1940. – Vol. 5. – P. 431–460.

21. Zappa, G. Remark on a recent paper of O. Ore / G. Zappa // Duke. Math. J. – 1940. – Vol. 6. – P. 511–512.

22. Guo, W. On  $\sigma$ -supersoluble groups and one generalization of CLT -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Preprint, 2015.
23. Guo, W. On  $H_\sigma$ -subnormally embedded and  $H_\sigma$ -permutably embedded subgroups of finite groups / W. Guo, A.N. Skiba // Preprint, 2015.
24. Ballester-Bolinches, A. On a problem proposed by S. Li and J. Liu / A. Ballester-Bolinches, Shou Hong Qiao // Arch. Math. – 2014. – Vol. 102. – P. 109–111.
25. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.
26. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
27. Mann, A. Finite groups whose  $n$ -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.
28. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // Illinois J. Math. – 1961. – Vol. 2. – P. 306–313.
29. Spencer, A.E. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J Math. – 1968. – Vol. 27. – P. 167–173.
30. Guo, W. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 2446–2456.
31. Guo, W. Finite groups in which every 3-maximal subgroup permutes with all maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Mathematical Notes. – 2009. – Vol. 86. – P. 325–332.
32. Guo, W. On nonnilpotent groups with every two 3-maximal subgroups permutable / W. Guo, Yu.V. Lutzeko, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2009. – Vol. 50. – P. 988–997.
33. Guo, W.  $X$ -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
34. Guo, W. Finite groups with given  $s$ -embedded and  $n$ -embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.
35. Guo, X. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X. Guo, K.P. Shum // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2003. – Vol. 181. – P. 297–308.
36. Li, B. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Science in China Series A: Mathematics. – 2008. – Vol. 50. – P. 827–841.
37. Li, Sh. Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI -groups / Sh. Li // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. – 2000. – Vol. 100. – P. 65–71.
38. Kniahina, V.N. On the permutability of  $n$ -maximal subgroups with Schmidt subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. – 2012. – Vol. 18, № 3. – P. 125–130.
39. Monakhov, V.S. Finite groups with  $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.
40. Lutsenko, Yu.V. Finite groups with subnormal second and third maximal subgroups / Yu.V. Lutsenko, A.N. Skiba // Math. Notes. – 2012. – Vol. 91, № 5. – P. 680–688.
41. Kovaleva, V.A. Finite solvable groups with all  $n$ -maximal subgroups  $\mathfrak{U}$ -subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // Sib. Math. J. – 2013. – Vol. 54. – P. 65–73.
42. Kovaleva, V.A. Finite soluble groups with all  $n$ -maximal subgroups  $\mathfrak{F}$ -subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17. – P. 273–290.
43. Guo, W. Finite groups of Spencer height  $\leq 3$  / W. Guo, D.P. Andreeva, A.N. Skiba // Algebra Colloquium. – 2015. – Vol. 22. – P. 437–444.
44. Kovaleva, V.A. Finite groups with generalized  $\mathbb{P}$ -subnormal second maximal subgroups / V.A. Kovaleva // Asian-European Journal of Mathematics. – 2014. – Vol. 7. – P. 1450047-1–1450047-8.
45. Kovaleva, V.A. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups  $\mathfrak{U}$ -subnormal / V.A. Kovaleva, X.Yi // Acta Mathematica Hungarica. – 2015. – Vol. 146. – P. 47–55.
46. Guo, W. Finite groups whose  $n$ -maximal subgroups are  $\sigma$ -subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Preprint, 2015.
47. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
48. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
49. Shemetkov, L.A. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow: Nauka, 1989.
50. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

Поступила в редакцию 20.01.16.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ  $\pi$ -РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ БЕЗ ШИРОКИХ ПОДГРУПП

И.Л. Сохор

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON FINITE  $\pi$ -SOLUBLE GROUPS WITH NO WIDE SUBGROUPS

I.L. Sokhor

F. Scorina Gomel State University

Подгруппу будем называть широкой, если ее порядок делится на каждый простой делитель порядка всей группы. Получено строение конечных  $\pi$ -разрешимых групп, не содержащих широких максимальных подгрупп, индекс которых есть  $\pi$ -число. Исследуются группы с нильпотентными широкими подгруппами.

**Ключевые слова:** конечные группы,  $\pi$ -разрешимые группы, нильпотентные группы.

A subgroup  $H$  of a finite group  $G$  is said to be wide if each prime divisor of the order  $G$  divides the order  $H$ . We obtain the description of finite  $\pi$ -soluble groups with no wide maximal subgroups with  $\pi$ -number indices. We also investigate groups with  $\pi$ -special subgroups.

**Keywords:** finite groups,  $\pi$ -soluble groups, nilpotent groups.

**Introduction**

All groups in this paper are finite. Let  $G$  be a group. We use  $\pi(G)$  to denote the set of all prime divisors of  $|G|$ . By  $|\pi(G)|$  we denote a number of different prime divisors of  $|G|$ . We also use  $M < G$  to denote that  $M$  is a maximal subgroup of  $G$ .

A subgroup  $H$  of a group  $G$  is said to be wide if  $\pi(H) = \pi(G)$ . In soluble groups maximal subgroups have primary indices. Therefore in soluble groups a non-wide maximal subgroup is a Hall subgroup. And conversely, every Hall maximal subgroup of a soluble group is not wide. V.S. Monakhov [3], N.V. Maslova and D.O. Revin [4]–[5] investigated groups all whose maximal subgroups are Hall subgroups. Simple groups with wide subgroups were enumerated in [6]. Thus, the questions of V.S. Monakhov in the Kurovka notebook [7] were solved in full.

If a group  $G$  has no wide subgroups and  $k = \max_{M < G} |\pi(M)|$ , then  $G$  is called quasi- $k$ -primary. A quasi-1-primary is also called quasiprimary, and a quasi-2-primary group is also called quasibiprimary group. The order of a nilpotent quasiprimary group is equal to  $pq$ , where  $p$  and  $q$  are different primes. The order of a nonnilpotent quasiprimary group is equal to  $p^a q$ , its Sylow  $p$ -subgroup is a minimal normal subgroup, and  $a$  is the minimal positive integer such that  $q$  divides  $p^a - 1$ . It is followed from Schmidt theorem [8] of groups with nilpotent proper subgroups.

S.S. Levischenko [9] investigated quasibiprimary groups. He proved that a soluble quasibiprimary group  $G$  can be represented as the semidirect

product  $[P]M$  of an elementary abelian Sylow  $p$ -subgroup  $P$  and a quasibiprimary maximal subgroup  $M$  of  $G$  [9, Theorem 3.1]. In a nonsoluble quasibiprimary group  $G$  the Frattini subgroup  $\Phi(G)$  is primary [9, Theorem 3.2], the factor group  $G/\Phi(G)$  is simple, and all such groups are enumerated [9, Theorem 2.1].

Let  $\pi$  be a fixed set of primes. We consider the class  $\mathfrak{X}(\pi)$  of all  $\pi$ -soluble groups  $G$  which have no wide maximal subgroups with  $\pi$ -number indices:

$$\mathfrak{X}(\pi) = \{G \in \pi\mathfrak{S} : |\pi(M)| < |\pi(G)|, \\ \forall M < G, \pi(G : M) \subseteq \pi\}.$$

Here  $\pi\mathfrak{S}$  is the class of all  $\pi$ -soluble groups.

In this paper we obtain the properties of the class  $\mathfrak{X}(\pi)$  and describe the structure of groups from this class. Furthermore, we prove that the factor group of a  $\pi$ -soluble group by its hypercenter belongs to  $\mathfrak{X}(\pi)$  under certain conditions.

**1 Preliminaries**

If  $\pi(m) \subseteq \pi$ , then a positive integer  $m$  is called  $\pi$ -number. A group  $G$  is called  $\pi$ -group if  $\pi(G) \subseteq \pi$ , and  $\pi'$ -group if  $\pi(G) \subseteq \pi'$ . A group is called  $\pi$ -soluble if it has a subnormal series whose factors are either soluble  $\pi$ -groups or  $\pi'$ -groups.

All unexplained notations and terminology are standard. The reader is referred to [1], [2] if necessary.

The following properties of  $\pi$ -soluble groups are well known [10].

**Lemma 1.1.** *Let  $G$  be a  $\pi$ -soluble group. The following assertions hold.*

- (1)  $G$  is  $\pi_1$ -soluble for every  $\pi_1 \subseteq \pi$ .
- (2) In  $G$  there exist  $\pi$ -Hall and  $\pi'$ -Hall subgroups.
- (3) In  $G$  there exist  $\pi \cup \{r\}$ -Hall subgroups for every  $r \in \pi'$ .
- (4) In  $G$  there exist  $q'$ -Hall subgroups for every  $q \in \pi$ .

Recall that  $O_\pi(G)$  and  $O_{\pi'}(G)$  are the unique largest normal  $\pi$ -subgroup and the unique largest normal  $\pi'$ -subgroup of a group  $G$ , respectively.

**Lemma 1.2.** *Let  $G$  be a  $\pi$ -soluble group. The following assertions hold.*

- (1) If  $N$  is a minimal normal subgroup of  $G$ , then  $N$  is either an elementary abelian  $p$ -subgroup for some  $p \in \pi$  or a  $\pi'$ -subgroup, [3, Lemma 1].
- (2) If  $M$  is a maximal subgroup of  $G$ , then either  $|G : M| = p^m$  for some  $p \in \pi$  and positive integer  $m$  or  $\pi(G : M) \subseteq \pi'$ , [3, Lemma 1].
- (3) If  $\pi \cap \pi(G) \neq \emptyset$ , then  $O_\pi(G / O_\pi(G)) \neq 1$ ; if  $\pi' \cap \pi(G) \neq \emptyset$ , then  $O_{\pi'}(G / O_{\pi'}(G)) \neq 1$ , [10].

**Lemma 1.3.** *Let  $G$  be a  $\pi$ -soluble group. Then for every  $q \in \pi \cap \pi(G)$  in  $G$  there exists a maximal subgroup  $M$  such that  $|G : M| = q^m$  for some positive integer  $m$ .*

*Proof.* By Lemma 1.1 (1), a group  $G$  is  $q$ -soluble, and so by Lemma 1.1 (2) in  $G$  there exists a  $q'$ -Hall subgroup  $H$ . If  $M$  is a maximal subgroup of  $G$  containing  $H$ , then  $|G : M| = q^m$  for some positive integer  $m$ . Lemma is proved.

We define the core of a subgroup  $H$  of a group  $G$  by  $H_G = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$ . Clearly,  $H_G$  is the largest normal subgroup of  $G$  contained in  $H$ . A group is called primitive if it has a maximal subgroup with the trivial core.

**Lemma 1.4** [1, Theorem 4.40].

- (1) The Fitting subgroup of a primitive group is either trivial or a minimal normal subgroup.
- (2) A nontrivial nilpotent normal subgroup of a primitive group coincides with the Fitting subgroup and it is a minimal normal subgroup.
- (3) The Frattini subgroup of a soluble primitive nontrivial group is trivial and the Fitting subgroup is a minimal normal subgroup.

A formation is a class of groups  $\mathfrak{F}$  with the following two properties:

(i) if  $G \in \mathfrak{F}$  and  $N \triangleleft G$ , then  $G / N \in \mathfrak{F}$ ;

(ii) if  $N_1$  and  $N_2$  are normal subgroups of  $G$  and  $G / N_1, G / N_2 \in \mathfrak{F}$ , then  $G / N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$ .

It is easy to prove the following result.

**Lemma 1.5.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation and  $G$  a group. If  $G \notin \mathfrak{F}$  but  $G / N \in \mathfrak{F}$  for every  $N \triangleleft G$ ,  $N \neq 1$ , then  $G$  is primitive.*

By  $G_\pi$  and  $G_{\pi'}$  we denote the  $\pi$ -Hall and  $\pi'$ -Hall subgroups of  $G$ , respectively. In particular,  $G_p$  denotes a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ .

**Lemma 1.6.** *Let  $G$  be a  $\pi$ -soluble group. If every maximal subgroup with  $\pi$ -number index is normal in  $G$ , then  $G = G_\pi[G_{\pi'}]$  and  $G_\pi$  is nilpotent. Conversely, if  $G = G_\pi[G_{\pi'}]$  and  $G_\pi$  is nilpotent, then every maximal subgroup with  $\pi$ -number index is normal in  $G$ .*

*Proof.* By Theorem VI.9.3 [2],  $G$  is  $\pi$ -supersoluble. By  $\mathfrak{N}_\pi$  we denote the formation of all nilpotent  $\pi$ -group,  $\mathfrak{E}_{\pi'}$  denotes the formation of all  $\pi'$ -group, and  $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$  is their formation product. Then  $\mathfrak{F}$  is a saturated formation and  $G \in \mathfrak{F}$  if and only if  $G = G_\pi[G_{\pi'}]$ .

Assume that every maximal subgroup with  $\pi$ -number index is normal in  $G$ . If  $M < G$  and  $\pi(G : M) \subseteq \pi$ , then  $M$  is normal in  $G$ . Therefore  $|G : M| = p \in \pi$ .

Now we prove  $G \in \mathfrak{F}$ . Suppose that it is not true. If  $X \neq 1$  is normal in  $G$ , then  $G / X \in \mathfrak{F}$  by induction. In view of Lemma 1.5,  $G$  is primitive and  $\Phi(G) = O_\pi(G) = 1$ . Let  $N$  be a minimal normal subgroup of  $G$ . Then  $|N| = q \in \pi$  and  $G = [N]H$ , where  $H$  is a maximal subgroup with the trivial core. By hypotheses,  $H$  is normal in  $G$ , a contradiction.

Suppose that  $G = G_\pi[G_{\pi'}]$  and  $G_\pi$  is nilpotent. If  $M$  is a maximal subgroup of  $G$  with  $\pi$ -number index, then  $G_{\pi'} \subseteq M$  and  $M / G_{\pi'}$  is a maximal subgroup of  $G / G_{\pi'} \cong G_\pi$ . Hence  $M / G_{\pi'}$  is normal in  $G / G_{\pi'}$  since  $G_\pi$  is nilpotent, and so  $M$  is normal in  $G$ . Lemma is proved.

## 2 Properties of the class $\mathfrak{X}(\pi)$

**Lemma 2.1.** (1)  $\mathfrak{X}(\pi)$  is a saturated homomorph.

(2) If  $\pi_1 \subseteq \pi$ , then  $\mathfrak{X}(\pi) \subseteq \mathfrak{X}(\pi_1)$ .

(3) If  $G \in \mathfrak{X}(\pi(G))$  and  $\pi(G) \subseteq \pi$ , then  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ .

(4) Let  $N$  be a normal  $\pi'$ -subgroup of  $\pi$ -soluble group  $G$ . Then  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$  if and only if  $G / N \in \mathfrak{X}(\pi)$ .

*Proof.* (1) Suppose that  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$  and  $N \triangleleft G$ . Let  $M / N$  be a maximal subgroup with  $\pi$ -number index in  $G / N$ . Then  $M$  is a maximal subgroup with  $\pi$ -number index in  $G$ , and so  $|\pi(M)| < |\pi(G)|$ . If  $r \in \pi(G) \setminus \pi(M)$ , then

$$r \notin \pi(N), r \in \pi(G / N) \setminus \pi(M / N).$$

Hence  $|\pi(M / N)| < |\pi(G / N)|$  and  $G / N \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Thus,  $\mathfrak{X}(\pi)$  is a homomorph.



Now we show that  $\mathfrak{X}(\pi)$  is a saturated class. Assume that  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$  and let  $M$  be a maximal subgroup with  $\pi$ -number index in  $G$ . Then  $M/\Phi(G)$  is a maximal subgroup with  $\pi$ -number index in  $G/\Phi(G)$ . By hypothesis,  $|\pi(M/\Phi(G))| < |\pi(G/\Phi(G))|$ . In view of [1, Theorem 4.33],  $\pi(G/\Phi(G)) = \pi(G)$ . Therefore

$$\begin{aligned} |\pi(M)| &= |\pi(M/\Phi(G))| < \\ &< |\pi(G/\Phi(G))| = |\pi(G)|, \quad G \in \mathfrak{X}(\pi). \end{aligned}$$

(2) Suppose that  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Then  $G$  is  $\pi$ -soluble, and in view of 1.1 (1)  $G$  is  $\pi_1$ -soluble. If  $M$  is a maximal subgroup of  $G$  such that  $\pi(G:M) \subseteq \pi_1 \subseteq \pi$ , then  $|\pi(M)| < |\pi(G)|$  since  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Consequently,  $G \in \mathfrak{X}(\pi_1)$  and  $\mathfrak{X}(\pi) \subseteq \mathfrak{X}(\pi_1)$ .

(3) Assume that  $G \in \mathfrak{X}(\pi(G))$ . Then  $G$  is soluble and has no wide subgroups, that is, for every maximal subgroup  $M$  of  $G$  we have

$$\pi(G:M) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi, \quad |\pi(M)| < |\pi(G)|.$$

Hence  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ .

(4) If  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ , then by assertion (1)  $G/N \in \mathfrak{X}(\pi)$  for any normal subgroup  $N$  of  $G$ .

Conversely, let  $N$  be a normal  $\pi'$ -subgroup of a  $\pi$ -soluble group  $G$ . Suppose that  $G \notin \mathfrak{X}(\pi)$ . Then  $\pi(A) = \pi(G)$  for some maximal subgroup  $A$  of  $G$  such that  $\pi(G:A) \subseteq \pi$ . Since  $N$  is a  $\pi'$ -group, we have  $N \subseteq A$ . Now,  $A/N$  is a maximal subgroup of  $G/N$  and

$$|G:A| = |G/N:A/N|, \quad \pi(G/N:A/N) \subseteq \pi.$$

By inductive hypothesis,  $G/N \in \mathfrak{X}(\pi)$ , consequently,  $|\pi(A/N)| \neq |\pi(G/N)|$ . Assume that

$$r \in \pi(G/N) \setminus \pi(A/N).$$

Then  $r \in \pi(G) = \pi(A)$ . Since  $r \in \pi(A)$  and  $r \notin \pi(A/N)$ , it follows that some Sylow  $r$ -subgroup  $A_r$  of  $A$  is contained in  $N$ . As  $N$  is a  $\pi'$ -subgroup, therefore  $r \in \pi'$ . Since  $\pi(G:A) \subseteq \pi$ , we see that  $A_r$  is a Sylow  $r$ -subgroup of  $G$  and  $r \notin \pi(G/N)$ , a contradiction. Thus we conclude that  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ .

Lemma is proved.

**Example 2.2.** Let  $p$  and  $q$  be different primes,  $n$  be the least positive integer such that  $q$  divides  $p^n - 1$ . There exists  $S = [E_{p^n}]Q$ , where  $E_{p^n}$  is an elementary abelian subgroup of order  $p^n$ ,  $|Q| = q$ . In  $S$  all proper subgroups are primary. Therefore  $S \in \mathfrak{X}(\{p, q\})$ . It is clear that a cyclic group  $Z_p$  of order  $p$  belongs to  $\mathfrak{X}(\{p, q\})$ . A group  $G = S \times Z_q$  contains a wide subgroup  $E_{p^n} \times Z_q$ . Hence  $G \notin \mathfrak{X}(\{p, q\})$ . Since a formation is closed under direct products, we obtain that  $\mathfrak{X}(\{p, q\})$  is not a formation.

Further note that if a maximal subgroup  $M$  of  $G$  contains a Sylow  $p$ -subgroup, then  $M$  is normal in  $G$ . Hence the order of the factor group  $G/M_G$  is equal to  $q$  and  $G/M_G \in \mathfrak{X}(\{p, q\})$ . If a maximal subgroup  $H$  of  $G$  contains a Sylow  $q$ -subgroup, then  $H$  is not normal in  $G$  and coincides with a Sylow  $q$ -subgroup. Therefore  $H = Q^g \times Z_q$ ,  $g \in S$ , and  $H_G = Z_q$ . Hence  $G/H_G \cong S$  and  $G/H_G \in \mathfrak{X}(\{p, q\})$ . It follows that all primitive factor groups of  $G$  belong to  $\mathfrak{X}(\{p, q\})$ , but  $G \notin \mathfrak{X}(\{p, q\})$ . Thus  $\mathfrak{X}(\{p, q\})$  is not a Schunck class.

**Lemma 2.3.**

(1) If  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ , then  $\Phi(G)$  is a  $\pi'$ -group.

(2)  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$  if and only if  $G/\Phi(G) \in X(\pi)$ .

(3) If  $G \in X(\pi)$  and  $O_{\pi'}(G) = 1$ , then  $F(G)$  is a Hall subgroup and every Sylow subgroup of  $F(G)$  is a minimal normal subgroup in  $G$ .

*Proof.* (1) Suppose that  $p \in \pi(\Phi(G)) \cap \pi$ . By Lemma 1.3, in  $G$  there exists a maximal subgroup  $M$  such that  $|G:M| = p^a$ . Note that  $M$  is a Hall subgroup in  $G$  since  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ , and so  $p \notin \pi(M)$ . But  $p \in \pi(\Phi(G)) \subseteq \pi(M)$ . This contradiction shows that  $\Phi(G)$  is a  $\pi'$ -group.

(2) Assume that  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Then by assertion (1),  $\Phi(G)$  is a  $\pi'$ -group. Consequently, by Lemma 2.1 (4),  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$ .

Conversely, let  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Hence, in view of Lemma 2.1 (1),  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ .

(3) By assertion (1),  $\Phi(G) = 1$ . Let  $N$  be a minimal normal subgroup of  $G$ . Then  $N$  is a  $p$ -subgroup for some  $p \in \pi \cap \pi(G)$ . By [1, Theorem 3.20], there exists a subgroup  $M$  such that  $G = [N]M$ . Note that  $M$  is a maximal subgroup and  $\pi(G:M) = \{p\}$ . By hypothesis,  $\pi(M) \neq \pi(G)$ , therefore  $M$  is a  $p'$ -Hall subgroup and  $N$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ .

Lemma is proved.

**Lemma 2.4.** A soluble group  $G$  is quasi- $k$ -primary if and only if  $G \in \mathfrak{X}(\pi(G))$  and  $|\pi(G)| = k + 1$ .

*Proof.* Suppose that a soluble group  $G$  is quasi- $k$ -primary. Then  $G$  has no wide maximal subgroups and  $G \in \mathfrak{X}(\pi(G))$ . We show that  $|\pi(G)| = k + 1$ . Since  $G$  is quasi- $k$ -primary, it follows that for every maximal subgroup  $H$  of  $G$  we have  $|\pi(H)| \leq k < |\pi(G)|$ , and there exists a maximal subgroup  $M$  such that  $|\pi(M)| = k$ . In view of [1, Theorem 4.14], maximal subgroups of a soluble group have primary indices, and so  $|G:M| = p^\alpha$ ,  $p \in \pi(G)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Since  $|G| = |M| \cdot |G:M|$ , we have  $|\pi(G)| \leq k + 1$ . Thus,  $|\pi(G)| = k + 1$ .

Conversely, assume that  $G \in \mathfrak{X}(\pi(G))$  and  $|\pi(G)| = k + 1$ . Then  $G$  is  $\pi(G)$ -soluble, and so  $G$  is soluble. Also,  $G$  has no wide maximal subgroups, i. e., for every maximal subgroup  $M$  of  $G$  we have  $|\pi(M)| < |\pi(G)| = k + 1$ . Hence  $|\pi(M)| = k$  and  $G$  is quasi- $k$ -primary. Lemma is proved.

### 3 The structure of groups from the class $\mathfrak{X}(\pi)$

In  $\pi$ -soluble groups indices of maximal subgroups are primes from  $\pi$  or  $\pi'$ -numbers. It follows that if a group belongs to the class  $\mathfrak{X}(\pi)$ , then its every maximal subgroup with  $\pi$ -number index is a Hall subgroup. Such groups are described by V.S. Monakhov [3].

**Lemma 3.1.** [3]. *Let  $G$  be a  $\pi$ -soluble group. The following assertions are equivalent.*

- (1) Chief  $\pi$ -factors of  $G$  are isomorphic to Sylow subgroups.
- (2) Every maximal subgroup with  $\pi$ -number index is a Hall subgroup.
- (3) The set of all maximal subgroups with  $\pi$ -number indices of  $G$  coincides with the set of all  $p$ -supplements for all  $p \in \pi$ .
- (4) A Hall  $\pi$ -subgroup of every normal  $\pi d$ -subgroup of  $G$  is a  $\pi$ -Hall subgroup of  $G$ .

**Theorem 3.2.** *Let  $G$  be a  $\pi$ -soluble group,  $\pi \cap \pi(G) \neq \emptyset$  and  $O_\pi(G) \neq 1$ . Then  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$  if and only if  $G = [G_p]M$ , where  $G_p$  is a minimal normal Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  for some  $p \in \pi(O_\pi(G))$ ,  $M$  is a maximal subgroup of  $G$  and  $M \in \mathfrak{X}(\pi)$ .*

*Proof.* Assume that  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ . If  $H < G$  such that  $\pi(G:H) \subseteq \pi$ , then by Lemma 1.2 (2),  $|G:H| = r^\alpha$  for some  $r \in \pi$  and positive integer  $\alpha$ . Since  $\pi(G) \neq \pi(H)$ , it follows that  $r \notin \pi(H)$  and  $H$  is a  $r'$ -Hall subgroup. Therefore  $G$  satisfies assertion (2) of Lemma 3.1. By Lemma 1.2 (1), there exists a minimal normal  $p$ -subgroup  $N$  for some  $p \in \pi(O_\pi(G))$  since  $O_\pi(G) \neq 1$ . In view of Lemma 3.1 (4),  $N$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ , i. e.,  $N = G_p$ . By Lemma 1.3, there exists a maximal subgroup  $M$  of  $G$  such that  $|G:M| = p^a$ ,  $a \in \mathbb{N}$ . Hence  $G = [G_p]M$ , and so by Lemma 2.1 (1),  $M \in \mathfrak{X}(\pi)$ .

Conversely, suppose that  $G = [G_p]M$ , where  $G_p$  is a minimal normal Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  for some  $p \in \pi(O_\pi(G))$ ,  $M$  is a maximal subgroup of  $G$  and  $M \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Let  $K$  be a maximal subgroup of  $G$  with  $\pi$ -number index. Then by Lemma 1.2 (2),  $|G:K| = r^\alpha$  for some  $r \in \pi$  and positive integer  $\alpha$ . If  $r = p$ , then  $G = G_p K$ . Hence  $G_p \cap K = 1$  and  $M \cong K$ , and so  $|\pi(K)| = |\pi(M)| < |\pi(G)|$ . If  $r \neq p$ ,

then  $G_p < K$ . Therefore  $K = [G_p]M \cap K = [G_p](M \cap K)$ , and so  $|\pi(K)| < |\pi(G)|$ . Otherwise  $\pi(M) = \pi(G) \setminus \{p\} = \pi(K) \setminus \{p\} = \pi(M \cap K)$ , and this is a contradiction since  $M \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Thus,  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Theorem is proved.

**Corollary 3.2.1.** *Let  $G$  be a  $\pi$ -soluble group and  $\pi \cap \pi(G) \neq \emptyset$ . Then  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$  if and only if*

$$G/O_\pi(G) = [G_p O_\pi(G)/O_\pi(G)]M/O_\pi(G),$$
*where  $G_p O_\pi(G)/O_\pi(G)$  is a minimal normal Sylow  $p$ -subgroup of  $G/O_\pi(G)$ ,  $p \in \pi(O_\pi(G/O_\pi(G)))$ ,  $M$  is a maximal subgroup of  $G$  and  $M \in \mathfrak{X}(\pi)$ .*

*Proof.* If  $O_\pi(G) = 1$ , then in view of Theorem 3.2 corollary is true.

Let  $O_\pi(G) \neq 1$ . Then by Lemma 1.2 (3),

$$O_\pi(G/O_\pi(G)) \neq 1.$$

Suppose that  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$ . In view of Lemma 2.1 (4),  $G/O_\pi(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$ . By Theorem 3.2,

$$G/O_\pi(G) = [G_p O_\pi(G)/O_\pi(G)]M/O_\pi(G),$$

where  $G_p O_\pi(G)/O_\pi(G)$  is a minimal normal Sylow  $p$ -subgroup of  $G/O_\pi(G)$ ,  $p \in \pi(O_\pi(G/O_\pi(G)))$ , and  $M/O_\pi(G)$  is a maximal subgroup of  $G/O_\pi(G)$ ,  $M/O_\pi(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Hence  $M$  is a maximal subgroup of  $G$  and  $M \in \mathfrak{X}(\pi)$  in view of Lemma 2.1 (4).

Conversely, assume that  $G$  can be represented as 
$$G/O_\pi(G) = [G_p O_\pi(G)/O_\pi(G)]M/O_\pi(G),$$
 where  $G_p O_\pi(G)/O_\pi(G)$  is a minimal normal Sylow  $p$ -subgroup of  $G/O_\pi(G)$ ,  $p \in \pi(O_\pi(G/O_\pi(G)))$ ,  $M$  is a maximal subgroup of  $G$  and  $M \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Then  $M/O_\pi(G)$  is a maximal subgroup of  $G/O_\pi(G)$  and  $M/O_\pi(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$  in view of Lemma 2.1 (4). Consequently, by Theorem 3.2,  $G/O_\pi(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$ . Hence  $G \in \mathfrak{X}(\pi)$  by Lemma 2.1 (4). Corollary is proved.

**Corollary 3.2.2.** *A soluble group  $G$  is quasi- $k$ -primary if and only if  $G = [G_p]M$ , where  $G_p$  is a minimal normal Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  for some  $p \in \pi(G)$ ,  $M$  is a maximal quasi- $(k-1)$ -primary subgroup of  $G$ .*

*Proof.* Suppose that a soluble group  $G$  is quasi- $k$ -primary. Then in view of Lemma 2.4,  $G \in \mathfrak{X}(\pi(G))$  and  $|\pi(G)| = k + 1$ . By Theorem 3.2,  $G = [N]M$ , where  $N$  is a minimal normal Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  for some  $p \in \pi(G)$ ,  $M$  is a maximal subgroup of  $G$  and  $M \in \mathfrak{X}(\pi(G))$ . Hence by Lemma 2.1 (2),  $M \in \mathfrak{X}(\pi(M))$ . Besides,  $|\pi(M)| = |\pi(G)| - |\pi(N)| = k$ . Consequently,  $M$  is quasi- $(k-1)$ -primary by Lemma 2.4.

Conversely, assume that a soluble group  $G$  can be represented as  $G = [N]M$ , where  $N$  is a minimal normal Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  for some  $p \in \pi(G)$ ,  $M$  is a maximal quasi- $(k-1)$ -primary subgroup of  $G$ . Then by Lemma 2.4,  $M \in \mathfrak{X}(\pi(M))$  and  $|\pi(M)| = k$ . In view of Lemma 2.1 (3),  $M \in \mathfrak{X}(\pi(G))$ . Since  $|\pi(G)| = |\pi(M)| + |\pi(N)| = k + 1$ , it follows that  $G$  is quasi- $k$ -primary by Lemma 2.4. Corollary is proved.

If we substitute  $k = 2$  in Corollary 3.2.2, then we obtain the result of S. S. Levischenko.

**Corollary 3.2.3** [9, Theorem 3.1]. *A soluble quasibiprimary group  $G$  is equal to the semidirect product  $[P]M$  of its elementary abelian Sylow  $p$ -subgroup  $P$  and quasiprimary subgroup  $M$ , which is also a maximal subgroup of  $G$ .*

A group  $G$  is said to be  $\pi$ -special, if  $G = G_\pi \times G_\pi$  and  $G_\pi$  is nilpotent.

Let  $G$  be a nontrivial group,

$$\begin{aligned} Z_0(G) &= 1, \quad Z_1(G) = Z(G), \\ Z_2(G) / Z_1(G) &= Z(G / Z_1(G)), \quad \dots, \\ Z_i(G) / Z_{i-1}(G) &= Z(G / Z_{i-1}(G)), \quad \dots \end{aligned}$$

Then the subgroup  $Z_\infty(G) = \bigcup_{i=0}^\infty Z_i(G)$  is called the hypercenter of  $G$ .

Obviously,  $Z(G / Z_\infty(G)) = 1$ .

**Theorem 3.3.** *If every wide maximal subgroup of a  $\pi$ -soluble group  $G$  with  $\pi$ -primary index is  $\pi$ -special, then  $G / Z_\infty(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$ .*

*Proof.* Let  $G / Z_\infty(G) \notin \mathfrak{X}(\pi)$ , and write  $\bar{G} = G / Z_\infty(G)$ . Then in  $\bar{G}$  there exists a maximal subgroup  $\bar{M} = M / Z_\infty(G)$  such that  $|\bar{G} : \bar{M}| \subseteq \pi$  and  $\pi(\bar{M}) = \pi(\bar{G})$ . At the same time  $M$  is maximal in  $G$  and  $\pi(M) = \pi(G)$ . By hypothesis,  $M$  is  $\pi$ -special. And so  $\bar{M}$  is also  $\pi$ -special, that is,  $\bar{M} = \bar{M}_\pi \times \bar{M}_\pi$  and  $\bar{M}_\pi$  is nilpotent. By Lemma 1.2 (2),  $|\bar{G} : \bar{M}| = p^a$  for some  $p \in \pi$  and positive integer  $a$ . It follows that  $\bar{M}_p \triangleleft \bar{M}$  and  $\bar{M}_p$  is a proper subgroup of  $\bar{G}_p$ . Therefore  $\bar{M}_p$  is normal in  $\bar{G}$ . Thus there exists a nontrivial element  $\bar{x} \in \bar{M}_p \cap Z(\bar{G}_p)$  such that it belongs to the center of  $\bar{G}$ , a contradiction since  $Z(G / Z_\infty(G)) = 1$ . Theorem is proved.

**Corollary 3.3.1.** *If every wide maximal subgroup of a soluble group  $G$  is nilpotent, then  $G / Z_\infty(G)$  is quasi- $k$ -primary, where  $k = |\pi(G / Z_\infty(G))| - 1$ .*

*Proof.* Suppose that every wide maximal subgroup of a soluble group  $G$  is nilpotent. Then, substituting  $\pi = \pi(G)$  in Theorem 3.3, we obtain

$G / Z_\infty(G) \in \mathfrak{X}(\pi(G))$ . Hence by Lemma 2.4,  $G / Z_\infty(G)$  is quasi- $k$ -primary, where

$$k = |\pi(G / Z_\infty(G))| - 1.$$

Corollary is proved.

A group  $G$  is  $\pi$ -decomposable if  $G = G_\pi \times G_\pi$ .

**Corollary 3.3.2.** *If every maximal subgroup of a  $\pi$ -soluble group  $G$  is normal and  $\pi$ -decomposable, then  $G_\pi$  is nilpotent and  $G / Z_\infty(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$ .*

*Proof.* Since every maximal subgroup of a  $\pi$ -soluble group  $G$  is normal, it follows that  $G = G_\pi[G_\pi]$  and  $G_\pi$  is nilpotent by Lemma 1.6. Hence since every maximal subgroup of  $G$  is  $\pi$ -decomposable, it is  $\pi$ -special, and  $G / Z_\infty(G) \in \mathfrak{X}(\pi)$  by Theorem 3.3. Corollary is proved.

#### REFERENCES

1. Monakhov, V.S. Introduction to the Theory of Finite Groups and their Classes / V.S. Monakhov. – Minsk: Vyshejschaja shkola, 2006. – 207 p.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967. – 796 p.
3. Monakhov, V.S. Finite  $\pi$ -solvable groups whose maximal subgroups have the Hall property / V.S. Monakhov // Math. Notes. – 2008. – Vol. 84 (3–4). – P. 363–366.
4. Maslova, N.V. Nonabelian composition factors of a finite group whose all maximal subgroups are hall / N.V. Maslova // Siberian Math. J. – 2012. – Vol. 53 (5). – P. 853–861.
5. Maslova N.V. Finite groups whose maximal subgroups have the hall property / N.V. Maslova, D.O. Revin // Siberian Advances in Math. – 2013. – Vol. 23 (3). – P. 196–209
6. Zhang, Q. Finite non-abelian simple groups which contain a non-trivial semipermutable subgroup / Q. Zhang, L. Wang // Algebra Colloquium. – 2005. – Vol. 12. – P. 301–307.
7. The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory // Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences. – Novosibirsk, 2014.
8. Schmidt, O.Y. Groups all of whose subgroups are special / O.Y. Schmidt // Mat. Sb. – 1924. – Vol 31 (3–4). – P. 366–372.
9. Lewischenko, S.S. Finite quasibiprimary groups / S.S. Lewischenko // Groups defined by properties of group systems: collection of scientific papers. – Kiev: Inst. matem. AN USSR. – 1979. – P. 83–97.
10. Chunihin, S.A. Subgroups of finite groups / S.A. Chunihin. – Minsk: Nauka i Tehnika, 1964. – 168 p.

Поступила в редакцию 16.01.16.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С  $\mathbb{P}$ -СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИВ.Н. Тютянов<sup>1</sup>, Т.В. Тихоненко<sup>2</sup><sup>1</sup>Международный университет «МИТСО», Гомель<sup>2</sup>Гомельский государственный технический университет им. П.О. СухогоFINITE GROUPS WITH  $\mathbb{P}$ -SUBNORMAL SUBGROUPSV.N. Tyutyaynov<sup>1</sup>, T.V. Tihonenko<sup>2</sup><sup>1</sup>Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel<sup>2</sup>P.O. Sukhoi Gomel State Technical University

Установлено строение конечной группы  $G$ , у которой единичная подгруппа не является  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ , но  $\mathbb{P}$ -субнормальна во всякой собственной подгруппе группы  $G$ .

**Ключевые слова:** конечная группа, композиционные факторы, простая неабелева группа,  $\mathbb{P}$ -субнормальная подгруппа.

The structure of finite group  $G$ , in which single subgroup is not  $\mathbb{P}$ -subnormal in  $G$ , but  $\mathbb{P}$ -subnormal in any proper subgroup of  $G$ , was established.

**Keywords:** finite group, composition factors, simple non-abelian group,  $\mathbb{P}$ -subnormal subgroup.

**Введение**

В работе [1] Л.С. Казарин определил композиционные факторы конечной группы, которая имеет цепь подгрупп с простыми индексами, начинающуюся с единичной подгруппы. Данная работа послужила источником появления целой серии публикаций по данной тематике, в которых исследовалось строение конечной группы с заданными системами подгрупп, обладающих цепями с простыми индексами. Для исследования данной ситуации в работе [2] было введено следующее важное определение, которое в дальнейшем неоднократно обобщалось в различных направлениях.

**Определение.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$  (обозначается через  $H \mathbb{P}\text{-sn } G$ ), если либо  $H = G$ , либо существует цепь подгрупп  $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$  такая, что  $|H_i : H_{i-1}|$  – простое число для любого  $i = 1, \dots, n$ .

В [2] показано, что группа  $G$ , у которой всякая силовская подгруппа  $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ , дисперсивна по Оре. Строение конечных групп, у которых любая примарная циклическая подгруппа  $\mathbb{P}$ -субнормальна, получено в [3].

В настоящей работе установлено строение конечной группы  $G$ , у которой единичная подгруппа не является  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ , но  $\mathbb{P}$ -субнормальна во всякой собственной подгруппе группы  $G$ .

**1 Обозначения и предварительные результаты**

Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [4]. Приведем некоторые из них для удобства чтения.

$\pi(G)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ ;

$Syl_p(G)$  – множество всех силовских  $p$ -подгрупп группы  $G$ ;

$H \mathbb{P}\text{-sn } G$  – подгруппа  $H \mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ ;

$R^n$  – прямое произведение  $n$  экземпляров групп, изоморфных  $R$ .

В работе Л.С. Казарина [1] установлено, что если в конечной группе  $G$   $1 \mathbb{P}\text{-sn } G$ , тогда  $G$  имеет простые неабелевы композиционные факторы из следующего списка:  $PSL_3(3)$ ,  $PSL_3(5)$ ,  $PSL_2(q)$ ,  $q > 3$ . В следующей лемме приводится уточнение результата Л.С. Казарина.

**Лемма 1.1** [5]. Пусть  $G$  – простая неабелева группа и  $1 \mathbb{P}\text{-sn } G$ , тогда  $G \in \{SL_3(3); SL_3(5); PSL_2(7); PSL_2(11); SL_2(2^n)\}$ , где  $2^n + 1$  – простое число Ферма.

Из леммы 3.1 [5] и леммы 1 следует, что если  $1 \mathbb{P}\text{-sn } G$ , то композиционные факторы группы  $G$  либо принадлежат списку групп леммы 1.1, либо изоморфны  $Z_r$ , где  $r$  – простое число. Класс групп с единичной  $\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппой будем обозначать  $\mathfrak{X}$ . Обозначим  $\mathfrak{T}$  – множество всех конечных групп  $G$ , у которых единичная подгруппа не  $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ , но  $\mathbb{P}$ -субнормальна в любой собственной подгруппе группы  $G$ .

**2 Доказательство основного результата**

**Лемма 2.1.** Пусть  $G$  – простая неабелева группа и  $G \in \mathfrak{T}$ . Тогда  $G \in \{A_6; J_1; Sz(2^r)\}$ , где  $r$  – нечетное простое число;  $PSL_2(r)$ , где  $3 < r$  – простое число;  $PSL_2(11^r)$ ,  $PSL_2(7^r)$ ,  $PSL_2(5^r)$ ,  $PSL_2(2^r)$ ,  $PSL_2(3^r)$ , где  $r$  – простое число;  $PSL_2(2^{3^2})$ ;  $PSU_3(3)$ ;  $PSU_3(7)$ ;  $PSU_3(q)$ , где  $q+1$  – простое число Ферма;  $PSL_3(5)$ ;  $PSL_3(7)$ ;  $PSL_3(11)\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим все возможные случаи.

1.  $G \cong A_n, n \geq 5$ . Группа  $A_5 \cong PSL_2(2^2) \in \mathfrak{R}$  и, следовательно,  $A_5 \notin \mathfrak{T}$ . Подгруппы в  $A_6$  либо разрешимы, либо изоморфны  $A_5 \in \mathfrak{R}$ . Так как  $A_6 \notin \mathfrak{R}$ , то  $A_6 \in \mathfrak{T}$ . При  $n \geq 7$  группа  $G$  содержит простую знакопеременную подгруппу  $A_{n-1} \in \mathfrak{R}$ . Следовательно,  $G \notin \mathfrak{T}$ .

2.  $G$  – спорадическая группа или группа Титса  ${}^2F_4(2)'$ . Информация о данных группах приведена в [6]. У группы  $J_1$  все собственные подгруппы либо разрешимы, либо изоморфны  $PSL_2(11) \in \mathfrak{R}$ , поэтому  $J_1 \in \mathfrak{T}$ . Для оставшихся групп укажем подгруппы, которые не содержатся в  $\mathfrak{R}$ , а значит сами группы не содержатся в  $\mathfrak{T}$ :  $\{M_{11}; A_6 \cdot 2\}, \{M_{11}; M_{12}\}, \{M_{22}; A_7\}, \{M_{23}; M_{22}\}, \{M_{24}; M_{23}\}, \{J_2; PSU_3(3)\}, \{HS; M_{22}\}, \{J_3; PSL_2(19)\}, \{M^c L; M_{22}\}, \{He; 3^2 S_7\}, \{Ru; A_8\}, \{Suz; A_7\}, \{ON; J_1\}, \{Co_3; HS\}, \{Co_2; M^c L\}, \{Fi_{22}; M_{12}\}, \{HN; A_{12}\}, \{Ly; 2^2 A_{11}\}, \{Th; PSL_2(19):2\}, \{Fi_{23}; PSL_2(17):2\}, \{Co_1; Co_2\}, \{J_4; 2^{11}:M_{24}\}, \{Fi'_{24}; Fi_{23}\}, \{B; {}^2F_4(2)\}, \{M; 2B\}, \{{}^2F_4(2)'; PSL_2(25)\}.$

3.  $G$  – группа лиевского типа. Максимальные параболические подгруппы группы  $G$  получаются вычеркиванием вершины в диаграмме Дынкина. Поэтому если лиевский ранг группы  $G$  равен  $l$ , то имеется максимальная параболическая подгруппа группы  $G$  с композиционным фактором, имеющим лиевский ранг  $l-1$ . Так как лиевский ранг у групп из  $\mathfrak{R}$  не выше 2, то лиевский ранг у групп из  $\mathfrak{T}$  не выше 3.

Пусть сначала лиевский ранг группы  $G$  равен 1. Рассмотрим все возможные случаи.

(1)  $G \cong Sz(q)$ , где  $q = 2^{2n+1} > 2$ . Из [7] следует, что все подгруппы группы  $G$  либо разрешимы, либо изоморфны  $Sz(s)$ , где  $q$  есть степень числа  $s$ . Так как группы Судзуки не содержатся в  $\mathfrak{R}$ , то  $2n+1$  является простым числом. Таким образом,  $Sz(q) \in \mathfrak{T}$ , если  $q = 2^p$ , где  $p$  – нечетное простое число.

(2)  $G \cong {}^2G_2(q)$ , где  $q = 3^{2n+1} > 3$ . Из [8] следует, что централизатор инволюции группы Ри изоморфен  $Z_2 \times PSL_2(q)$ . Так как  $q = 3^{2n+1} > 3$ , то  $PSL_2(q) \notin \mathfrak{R}$ , а значит  $G \notin \mathfrak{T}$ .

(3)  $G \cong PSL_2(q)$ , где  $q = p^f$ . Из теоремы II.8.27 [9] следует, что в  $G$  существует собственная подгруппа изоморфная  $PSL_2(p^m)$  для всех  $1 \leq m \leq f$  и  $m$  делящего  $f$ . Если  $G \in \mathfrak{T}$ , то  $PSL_2(p^m) \in \mathfrak{R}$ . Если  $f = 1$ , то  $G \cong PSL_2(p) \in \mathfrak{T}$ . Если  $f$  – простое число, то подгруппа  $PSL_2(p) \in \mathfrak{R}$ . Таким образом, в этом случае  $G \in \{PSL_2(11^f), PSL_2(7^f), PSL_2(5^f), PSL_2(2^f), PSL_2(3^f), \text{ где } f \text{ – простое число}\} \subset \mathfrak{T}$ .

Пусть  $f = lt$ , где  $l \geq 2, t \geq 2$ . В этом случае подгруппы  $PSL_2(p^l)$  и  $PSL_2(p^t)$  содержатся в  $\mathfrak{R}$ . Это возможно когда  $p = 2$  и  $2^l + 1, 2^t + 1$  – простые числа Ферма. Следовательно,  $l = 2^a \geq 2, t = 2^b \geq 2$

и  $f = lt = 2^{a+b}$ . Если  $f < 2^5$ , то  $f \in \{4, 8, 16\}$ . Так как  $2^4 + 1, 2^8 + 1, 2^{16} + 1$  – простые числа, то  $G \in \mathfrak{R}$ , что невозможно. Поэтому  $f \geq 32$ . Если  $f = 32$ , то  $2^f + 1$  делится на 641. Поэтому  $G \cong PSL_2(2^{32}) \notin \mathfrak{R}$ , а все ее подгруппы содержатся в  $\mathfrak{R}$ . Следовательно,  $PSL_2(2^{32}) \in \mathfrak{T}$ . Пусть  $f > 32$ . Тогда  $f = 32k$ , где  $2 \leq k$  – степень числа 2 и  $G$  содержит подгруппу изоморфную  $PSL_2(2^{32}) \notin \mathfrak{R}$ , что невозможно.

(4)  $G \cong PSU_3(q)$ . Пусть сначала  $q$  – нечетное число. Из [10] следует, что  $G$  содержит подгруппу  $H \cong PSL_2(q)$ . Если  $G \in \mathfrak{T}$ , то  $H \in \mathfrak{R}$ . Это возможно, когда  $H \in \{PSL_2(3), PSL_2(5), PSL_2(7), PSL_2(11)\}$ . Из [6] следует, что все подгруппы в  $PSU_3(3)$  и  $PSU_3(7)$  лежат в  $\mathfrak{R}$ . Значит,  $PSU_3(3), PSU_3(7) \in \mathfrak{T}$ . Группы  $PSU_3(5)$  и  $PSU_3(11)$  содержат подгруппы  $A_7 \notin \mathfrak{R}$  и  $A_6 \notin \mathfrak{R}$  соответственно [6]. Поэтому  $PSU_3(5), PSU_3(11) \notin \mathfrak{T}$ .

Пусть  $q$  – четное число. Из [11] следует, что  $G$  содержит подгруппу изоморфную  $PSL_2(q)$ . Если  $G \in \mathfrak{T}$ , то  $PSL_2(q) \in \mathfrak{R}$ . Это возможно когда  $q+1 = r$  – простое число Ферма. Пусть  $q+1 = 2^k$ , где  $k$  – нечетное число. В нашем случае  $k = r$  – простое число. Группа  $G$  содержит подгруппу  $PSU_3(2^m)$ , если  $k/m > 3$  – нечетное простое число [11]. Так как  $k$  простое число, то  $m = 1$  и разрешимая группа  $PSU_3(2) \in \mathfrak{R}$ . Так как  $k \neq 3m$ , то  $G$  не содержит подгрупп  $PSU_3(2^m)$ . [11]. Как следует из [11], остальные подгруппы группы  $G$  разрешимы. Таким образом,  $PSU_3(q) \in \mathfrak{T}$ , если  $q+1$  – простое число Ферма.

Пусть  $G$  – группа лиевского ранга 2. Рассмотрим все возможные случаи.

(1)  $G \cong {}^3D_4(q)$ . Из [12] следует, что  $G$  содержит подгруппу  $G_2(q) \notin \mathfrak{R}$ . Таким образом,  $G \notin \mathfrak{T}$ .

(2)  $G \cong {}^2F_4(q)$ , где  $q = 2^n > 2$ . Из [12] следует, что  $G$  содержит подгруппу  $Sz(q) \notin \mathfrak{R}$ , поэтому  $G \notin \mathfrak{T}$ .

(3)  $G \cong G_2(q)$ . Группа  $G$  содержит подгруппу  $A_2(q)$ . Если  $q \neq 2$ , то  $A_2(q) \notin \mathfrak{R}$  и  $G \notin \mathfrak{T}$ . При  $q = 2$   $G \cong G_2(q)$  не является простой неабелевой группой ( $G_2(2)' \cong PSU_3(3)$ ).

(4)  $G \cong \Omega_5(q) \cong PSp_4(q)$ , где  $q = p^n$ . Группа содержит максимальную параболическую подгруппу с композиционными факторами  $PSL_2(q)$ . Если  $G \in \mathfrak{R}$ , то  $PSL_2(q) \in \mathfrak{R}$ . Тогда  $PSL_2(q) \in \{PSL_2(3) \text{ – разрешимая группа; } PSL_2(5), PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_2(2^n), \text{ где } 2^n + 1 \text{ – простое число}\}$ .

Установим когда  $G \in \mathfrak{T}$ . Группа  $PSp_4(3) \cong PSU_4(2)$  содержит подгруппу  $S_6 \notin \mathfrak{R}$ , поэтому  $PSp_4(3) \notin \mathfrak{T}$ . Группа  $PSp_4(5)$  содержит подгруппу  $A_6 \notin \mathfrak{R}$ , поэтому  $PSp_4(5) \notin \mathfrak{T}$ . Пусть  $G \cong PSp_4(7)$ . Так как  $q = 7$ , то из [10] следует, что  $G$  содержит подгруппу  $A_7 \notin \mathfrak{R}$  и  $PSp_4(7) \notin \mathfrak{T}$ . Если  $G \cong PSp_4(11)$ , то  $11 \equiv -1 \pmod{12}$  и  $G$  содержит подгруппу  $A_6 \cdot 2 \notin \mathfrak{R}$ . Значит  $PSp_4(11) \notin \mathfrak{T}$ . Пусть

$G \cong PSp_4(2^n)$ , где  $2^n + 1$  – простое число и  $n = 2^k > 1$ . В этом случае, очевидно, группа  $G$  содержит подгруппу  $H \cong PSp_4(2)$  и  $H' \cong A_6 \notin \mathfrak{R}$ . Поэтому  $G \notin \mathfrak{T}$ .

(5)  $G \cong PSL_3(q)$ , где  $q = p^n$ . Группа  $G$  содержит максимальную параболическую подгруппу с композиционными факторами  $PSL_2(q)$ . Если  $G \in \mathfrak{T}$ , то  $PSL_2(q) \in \mathfrak{R}$ . Таким образом,  $G \in \{PSL_3(3), PSL_3(5), PSL_3(7), PSL_3(11), PSL_3(2^n)\}$ , где  $2^n + 1$  – простое число Ферма. Группа  $PSL_3(3) \in \mathfrak{R}$ , а значит  $PSL_3(3) \notin \mathfrak{T}$ . Из [6] следует, что все подгруппы групп  $PSL_3(5)$ ,  $PSL_3(7)$ ,  $PSL_3(11)$  содержатся в  $\mathfrak{R}$ . Поэтому эти группы принадлежат  $\mathfrak{T}$ . Пусть  $G \cong PSL_3(2^n)$ , где  $2^n + 1 \geq 5$  является простым числом. В этом случае  $n = 2m \geq 2$ , так как  $PSL_3(2) \in \mathfrak{R}$ . Если  $m = 1$ , то  $G \cong PSL_3(4)$ . Из [6] следует, что  $G$  содержит подгруппу изоморфную  $A_6 \notin \mathfrak{R}$ . Поэтому  $PSL_3(4) \notin \mathfrak{T}$ . Следовательно,  $m \geq 2$  и  $n \geq 4$ . Тогда  $n = 2t$ , где  $t \geq 2$  и группа  $G$  содержит подгруппу  $PSL_3(2^t)$  [11]. Значит,  $G \notin \mathfrak{T}$ .

(6)  $G \cong PSU_4(q)$ . Из [12] следует, что  $G$  содержит подгруппу  $PSp_4(q)$   $G \notin \mathfrak{T}$ .

(7)  $G \cong PSU_5(q)$ . Группа  $G$  содержит максимальную параболическую подгруппу с композиционными факторами  $PSU_3(q)$ . Если  $PSU_3(q) \in \mathfrak{R}$ , то  $G \cong PSL_5(2)$ . Из [6] следует, что  $G$  содержит подгруппу  $PSU_4(2) \notin \mathfrak{R}$ , поэтому  $G \notin \mathfrak{T}$ .

Пусть лиевский ранг группы  $G$  равен 3. В этом случае  $G \in \{PSp_6(q), P\Omega_7^-(q), PSU_6(q), PSL_7(q), PSL_4(q), F_4(q), P\Omega_8^-(q)\}$ . Группы  $PSp_6(q)$  и  $P\Omega_7^-(q)$  содержат максимальную параболическую подгруппу с композиционным фактором  $PSp_4(q) \notin \mathfrak{R}$ , и, следовательно, не содержится в  $\mathfrak{T}$ . Аналогично, группа  $PSU_7(q)$  исключается наличием композиционного фактора  $PSU_5(q) \notin \mathfrak{R}$ . В группе  $G \cong PSL_4(q)$  имеется параболическая подгруппа с композиционным фактором  $PSL_3(q)$ , поэтому  $G \cong PSL_4(2) \cong A_8$  и содержит подгруппу  $A_7 \notin \mathfrak{R}$ . Значит,  $PSL_4(2) \notin \mathfrak{T}$ . Группа  $P\Omega_8^-(q)$  содержит параболическую подгруппу с композиционным фактором  $PSU_4(q) \notin \mathfrak{R}$  и  $P\Omega_8^-(q) \notin \mathfrak{T}$ . Лемма доказана.

Обозначим  $\Omega$  – множество простых групп из леммы 2.1.

**Теорема 2.2.** Пусть конечная группа  $G \in \mathfrak{T}$ . Тогда  $G / \Phi(G) \in \Omega$ .

*Доказательство.* Если  $G$  – простая неабелева группа, то теорема верна. Пусть  $N$  – нормальная подгруппа в  $G$ , а  $M$  – максимальная подгруппа группы  $G$ . Предположим, что  $N \not\subseteq M$ . Тогда

$G = NM$ , где  $N \in \mathfrak{R}$  и  $M \in \mathfrak{R}$ . Отсюда следует, что  $1 \in \mathbb{P}\text{-sn } G$ . Последнее невозможно. Следовательно,  $N \subseteq M$ . Так как  $M$  – произвольная максимальная подгруппа группы  $G$ , то  $N \subseteq \Phi(G)$ . Отсюда легко заключить, что  $G / \Phi(G) \in \Omega$ . Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Казарин, Л.С. О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.
2. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
3. Kniahina, V.N. Finite groups with  $\mathbb{P}$ -subnormal primary cyclic subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // arXiv: 1110.4720 v1 [math. GR] 210 ст. – 2011. – P. 15.
4. Горенштейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенштейн. – М.: Мир. – 1985. – 352 с.
5. Васильев, А.Ф. О произведениях  $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.
6. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.] // Oxford, 1985. – 252 p.
7. Suzuki, M. On a class double transitive groups / M. Suzuki // Ann. Math. – 1962. Vol. 75, № 1. – P. 105–145.
8. Kleidman, P. The maximal subgroups of the Chevalley groups  $G_2(q)$  with  $q$  odd, Ree groups  ${}^2G_2(q)$  and their automorphism groups / P. Kleidman // J. Algebra. – 1988. – Vol. 117. – P. 30–71.
9. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 s.
10. Mitchell, H.H. Determination of the ordinary and modular ternary linear groups / H.H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – Vol. 12. – P. 207–242.
11. Hartley, R.W. Determination of the ternary collineation groups whose coefficients lie in the  $GF(2^n)$  / R.W. Hartley // Ann. Math. – 1925. – Vol. 27. – P. 140–158.
12. Stensholt, E. Certain embedding finite group of Lie type / E. Stensholt // J. Algebra. – 1978. – Vol. 53. – P. 136–187.

Поступила в редакцию 11.11.15.

УДК 519.2

## МНОГОРЕЖИМНАЯ СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ СИГНАЛОВ

О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## MULTIMODE QUEUEING NETWORK WITH RANDOM STAYING TIME OF SIGNALS

O.V. Yakubovich, Y.E. Dudovskaya

*F. Scorina Gomel State University*

Исследуется модель открытой сети с различными типами заявок и многорежимными стратегиями обслуживания. Каждый узел сети может работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени его работоспособности. Кроме заявок в сети циркулируют сигналы, изменяющие режим работы узла. Время пребывания в каждом узле сигналов ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение. Устанавливаются условия мультипликативности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний исследуемой сети.

**Ключевые слова:** сеть массового обслуживания, различные типы заявок, многорежимное обслуживание, сигналы, стационарное распределение.

An open queueing network with different types of customers and multimode service strategies is considered. Every node can operate in several modes corresponding to different degrees of its working capacity. There are signals in the network, which change the number of operating mode. Staying time of signals in each node is the random value having exponential distribution. The conditions of multiplicativity and an analytical view of stationary distribution of the network states probabilities are found.

**Keywords:** queueing network, different types of customers, multimode service, signals, stationary distribution.

### Введение

Сети массового обслуживания являются адекватными математическими моделями разнообразных случайных процессов в информационно-вычислительных сетях, сетях передачи данных, связи и многих других объектах, имеющих сетевую структуру. Нахождение стационарного распределения является важным этапом в аналитических исследованиях сетей массового обслуживания.

Сети с многорежимными стратегиями обслуживания [1] позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети могут работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени их работоспособности. Режимы, в которых могут работать узлы сети, пронумерованы, каждый режим отличается своим набором показателей. Например, при переходе узла в режим с большим номером производительность узла уменьшается, ухудшается процесс обслуживания, при переходе узла в режим с меньшим номером происходит восстановление показателей процесса обслуживания, улучшается качество обслуживания.

В работе [2] исследована модель сети, в которой ограничение на время пребывания имеют отрицательные заявки различных типов.

В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступают пуассоновские потоки различных типов заявок и пуассоновский поток информационных сигналов. Сигналы формируют отдельную очередь и имеют

ограничение на время пребывания в узле. После окончания времени пребывания сигнал с определенной вероятностью либо уменьшает, либо увеличивает номер режима работы узла.

### 1 Изолированный узел

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает  $M+1$  независимых пуассоновских потоков:  $M$  потоков заявок с параметрами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ , при этом  $\lambda_u$  есть интенсивность поступления заявок типа  $u$ , и поток сигналов с параметром  $\omega$ .

Заявка, поступившая в систему, увеличивает длину очереди заявок соответствующего типа в системе на единицу и требует обслуживания. В системе находится  $M$  экспоненциальных приборов,  $u$ -ый прибор обслуживает заявки типа  $u$ . Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления и для заявок типа  $u$  имеют показательное распределение с параметром  $\mu_u$  ( $u = \overline{1, M}$ ). Заявки обслуживаются в порядке поступления.

Предполагается, что система может находиться в одном из  $l$  режимов работы ( $l = \overline{0, r}$ ).

Сигналы, поступающие в систему, образуют отдельную очередь и не требуют обслуживания. Каждый сигнал, находящийся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное

распределение с параметром  $\tau(m) = \frac{\tau}{m}$  для  $m \geq 1$ , где  $m$  – число сигналов в системе,  $\tau$  – некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания в системе сигнал с вероятностью  $p^-$  уменьшает номер режима работы системы и не производит никаких воздействий, если система функционирует в режиме  $l = 0$ ; или с вероятностью  $p^+$  увеличивает номер режима работы системы и не производит никаких воздействий, если система функционирует в режиме  $l = r$ . Процессы поступления, обслуживания и пребывания в системе независимы.

Состояние рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени  $t$  характеризуется случайным вектором  $x(t) = (\bar{n}(t), m(t), l(t)) = (n_1(t), \dots, n_M(t), m(t), l(t))$ , где  $n_u(t)$  – количество заявок типа  $u$  в системе в момент времени  $t$ ,  $m(t)$  – количество сигналов в системе в момент времени  $t$ ,  $l(t)$  – режим, в котором работает система в момент времени  $t$ . Тогда  $x(t)$  – однородный марковский процесс с непрерывным временем и фазовым пространством состояний

$$X = \left\{ x = (\bar{n}, m, l) = (n_1, \dots, n_M, m, l), \right. \\ \left. n_u, m \geq 0, u = \overline{1, M}, l = \overline{0, r} \right\}.$$

Состояние системы  $x = (\bar{0}, 0, 0)$  обозначим через 0.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы системы, находящейся в состоянии  $x = (\bar{n}, m, l)$ , в режиме  $l$  ( $l = \overline{0, r}$ ) имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью  $v(\bar{n}, l)$  ( $v(\bar{n}, l) > 0$ ) система переходит в  $(l+1)$ -ый режим ( $l = \overline{0, r-1}$ ), а с интенсивностью  $\varphi(\bar{n}, l)$  ( $\varphi(\bar{n}, l) > 0$ ) – в  $(l-1)$ -ый режим ( $l = \overline{1, r}$ ). Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в системе.

Предположим, что  $\{p(x), x \in X\}$  – стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $x(t)$ . Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(x) \left[ \sum_{u=1}^M (\lambda_u + \mu_u I_{\{n_u \neq 0\}}) + \omega + \tau I_{\{m \neq 0\}} + \right. \\ \left. + v(\bar{n}, l) I_{\{l \neq r\}} + \varphi(\bar{n}, l) I_{\{l \neq 0\}} \right] = \\ = \sum_{u=1}^M (\lambda_u p(\bar{n} - e_u, m, l) I_{\{n_u \neq 0\}} + \mu_u p(\bar{n} + e_u, m, l)) +$$

$$+ \omega p(\bar{n}, m-1, l) I_{\{m \neq 0\}} + \tau p^-(\bar{n}, m+1, l+1) I_{\{l \neq r\}} + \\ + \tau p^+ p(\bar{n}, m+1, l-1) I_{\{l \neq 0\}} + \\ + \tau p^-(\bar{n}, m+1, l) I_{\{l=0\}} + \tau p^+ p(\bar{n}, m+1, l) I_{\{l=r\}} + \\ + v(\bar{n}, l-1) p(\bar{n}, m, l-1) I_{\{l \neq 0\}} + \\ + \varphi(\bar{n}, l+1) p(\bar{n}, m, l+1) I_{\{l \neq r\}}, \\ x = (\bar{n}, m, l) \in X.$$

Здесь  $e_u$  – единичный вектор размерности  $M$  с единицей в  $u$ -ой позиции,  $I_{\{x\}}$  – характеристическая функция, принимающая значение 1, если  $x$  истинно, 0 – в противном случае.

**Лемма 1.1.** Для обратимости системы необходимо и достаточно выполнения условий

$$\left[ v(n_1, \dots, n_M, l-1) + \omega p^+ \right] \times \\ \times \left[ \varphi(n_1, \dots, n_u - 1, \dots, n_M, l) + \omega p^- \right] = \\ = \left[ v(n_1, \dots, n_u - 1, \dots, n_M, l-1) + \omega p^+ \right] \times \\ \times \left[ \varphi(n_1, \dots, n_M, l) + \omega p^- \right], \\ n_u \neq 0, u = \overline{1, M}, l = \overline{1, r}.$$

**Теорема 1.1.** Пусть для любого  $u = \overline{1, M}$  выполняются условия обратимости (1.1) и неравенства

$$\frac{\lambda_u}{\mu_u} < 1, \frac{\omega}{\tau} < 1, \sup_{(\bar{n}, l) \in X} \left[ v(\bar{n}, l) + \varphi(\bar{n}, l) \right] = c < \infty,$$

тогда марковский процесс  $x(t)$  эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(n_1, \dots, n_M, m, l) = \\ = \prod_{u=1}^M \left( \frac{\lambda_u}{\mu_u} \right)^{n_u} \left( \frac{\omega}{\tau} \right)^m \prod_{k=1}^l \frac{v(\bar{0}, k-1) + \omega p^+}{\varphi(\bar{0}, k) + \omega p^-} p(0),$$

где

$$p(0) = \prod_{u=1}^M \left( 1 - \frac{\lambda_u}{\mu_u} \right) \left( 1 - \frac{\omega}{\tau} \right) \times \\ \times \left( \sum_{l=0}^r \prod_{k=1}^l \frac{v(\bar{0}, k-1) + \omega p^+}{\varphi(\bar{0}, k) + \omega p^-} \right)^{-1}.$$

Здесь произведение, в котором верхний индекс меньше нижнего полагаем равным единице.

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера.

## 2 Открытая сеть

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из  $N$  узлов со структурой, описанной выше. В сеть поступают два независимых простейших потока: поток заявок интенсивности  $\lambda$  и поток сигналов интенсивности  $\omega$ . Заявки могут быть  $M$  типов.

Каждая заявка независимо от других заявок направляется в  $i$ -ый узел и становится заявкой



типа  $u$  с вероятностью  $p_{0(i,u)} \left( i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M} \right)$ .

Очевидно, что  $\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(i,u)} = 1$ .

Предполагается, что  $i$ -ый узел может находиться в одном из  $l_i$  режимов работы  $\left( l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N} \right)$ .

Каждый сигнал независимо от других сигналов направляется в  $i$ -ый узел с вероятностью  $q_{0i} \left( i = \overline{1, N} \right)$ . Очевидно, что  $\sum_{i=1}^N q_{0i} = 1$ . Сигнал, поступивший в узел, увеличивает длину очереди сигналов в узле на единицу и не требует обслуживания. Каждый сигнал, находящийся в  $i$ -ом узле, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром  $\tau_i(m_i) = \frac{\tau_i}{m_i}$  для  $m_i \geq 1$ , где  $m_i$  – количество сигналов в  $i$ -ом узле,  $\tau_i$  – некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания в узле сигнал с вероятностью  $p_i^-$  уменьшает номер режима работы  $i$ -го узла и не производит никаких воздействий, если узел функционирует в режиме  $l_i = 0$ ; или с вероятностью  $p_i^+$  увеличивает номер режима работы  $i$ -го узла и не производит никаких воздействий, если узел функционирует в режиме  $l_i = r_i$ .

В каждом узле находится  $M$  экспоненциальных приборов,  $u$ -ый прибор обслуживает заявки типа  $u$ . Заявки обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания различных заявок независимы, не зависят от процесса поступления и для заявок типа  $u$  в  $i$ -ом узле имеют показательное распределение с параметром  $\mu_{(i,u)} \left( i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M} \right)$ .

Состояние сети в момент времени  $t$  характеризуется вектором

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)),$$

где  $x_i(t) = (n_{(i,1)}(t), \dots, n_{(i,M)}(t), m_i(t), l_i(t))$  описывает состояние  $i$ -го узла в момент времени  $t$ . Здесь  $n_{(i,u)}(t)$  – число заявок типа  $u$ ,  $m_i(t)$  – число сигналов,  $l_i(t)$  – режим, в котором работает  $i$ -ый узел в момент времени  $t$ . Процесс  $x_i(t)$  имеет пространство состояний

$$X_i = \{x_i = (n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, m_i, l_i),$$

$$n_{(i,u)}, m_i = 0, 1, 2, \dots; u = \overline{1, M}, l_i = \overline{0, r_i}\}.$$

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии  $x_i = (\overline{n_i}, m_i, l_i)$ , в режиме  $l_i \left( l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N} \right)$  имеет показательное распределение, при

этом с интенсивностью  $v_i(\overline{n_i}, l_i) \left( v_i(\overline{n_i}, l_i) > 0 \right)$

$i$ -ый узел переходит в  $(l_i + 1)$ -ый режим  $\left( l_i = \overline{0, r_i - 1} \right)$ , а с интенсивностью  $\varphi_i(\overline{n_i}, l_i)$

$\left( \varphi_i(\overline{n_i}, l_i) > 0 \right)$  – в  $(l_i - 1)$ -ый режим  $\left( l_i = \overline{1, r_i} \right)$ .

Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Каждая заявка типа  $u$  после завершения обслуживания в  $i$ -ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в  $j$ -ый узел и становится заявкой типа  $v$  с вероятностью  $p_{(i,u)(j,v)}$  или сигналом с вероятностью  $q_{(i,u)j}$ , а с вероятностью  $p_{(i,u)0}$  покидает сеть.

$$\sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M (p_{(i,u)(j,v)} + q_{(i,u)j}) + p_{(i,u)0} = 1$$

$$\left( i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M} \right).$$

Будем предполагать, что матрица маршрутизации неприводима. Процессы поступления и обслуживания в сети независимы.

Уравнения трафика для  $i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}$  имеют вид

$$\alpha_{(i,u)} = \lambda p_{0(i,u)} + \sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M \alpha_{(j,v)} p_{(j,v)(i,u)},$$

$$\beta_i = \omega q_{0i} + \sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M \alpha_{(j,v)} q_{(j,v)i}.$$

Система уравнений трафика имеет единственное положительное решение  $(\alpha_{(i,u)}, \beta_i, i = \overline{1, N},$

$u = \overline{1, M})$ , что можно доказать, перенумеровав

соответствующим образом элементы матрицы вероятностей переходов. В результате получаем систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [3].

Процесс  $x(t)$  – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$ , где  $X_i$  – пространство состояний  $i$ -го узла.

**Лемма 2.1.** Для обратимости изолированного узла необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{aligned} & \left[ v_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i - 1) + \beta_i p_i^+ \right] \times \\ & \times \left[ \varphi_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,u)} - 1, \dots, n_{(i,M)}, l_i) + \beta_i p_i^- \right] = \\ & = \left[ v_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,u)} - 1, \dots, n_{(i,M)}, l_i - 1) + \beta_i p_i^+ \right] \times \\ & \times \left[ \varphi_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i) + \beta_i p_i^- \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$n_{(i,u)} \neq 0, u = \overline{1, M}, l_i = \overline{1, r_i}, i = \overline{1, N}.$$

Пусть  $\{p(x), x \in X\}$  – стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $x(t)$ .

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$\begin{aligned}
 p(x) & \left[ \lambda + \omega + \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M \mu_{(i,u)} I_{\{n_{(i,u)} \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N \tau_i I_{\{m_i \neq 0\}} + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^N \left( v_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i) I_{\{l_i \neq r_i\}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \varphi_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i) I_{\{l_i \neq 0\}} \right) \right] = \\
 & = \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M \left[ p(x - e_{(i,u)}) \lambda p_{0(i,u)} I_{\{n_{(i,u)} \neq 0\}} + \right. \\
 & + p(x - e_{(i,M+1)}) \omega q_{0i} I_{\{m_i \neq 0\}} + p(x + e_{(i,u)}) \mu_{(i,u)} p_{(i,u)0} + \\
 & + p(x + e_{(i,M+1)} + e_{(i,M+2)}) \tau_i p_i^- I_{\{l_i \neq r_i\}} + \\
 & + p(x + e_{(i,M+1)} - e_{(i,M+2)}) \tau_i p_i^+ I_{\{l_i \neq 0\}} + \\
 & + p(x + e_{(i,M+1)}) \tau_i p_i^- I_{\{l_i=0\}} + p(x + e_{(i,M+1)}) \tau_i p_i^+ I_{\{l_i=r_i\}} + \\
 & + \sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M \left[ p(x - e_{(i,u)} + e_{(j,v)}) \mu_{(j,v)} p_{(j,v)(i,u)} I_{\{n_{(i,u)} \neq 0\}} + \right. \\
 & \left. + p(x - e_{(i,M+1)} + e_{(j,v)}) \mu_{(j,v)} q_{(j,v)i} I_{\{m_i \neq 0\}} \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^N \left[ p(x - e_{(i,M+2)}) v_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i - 1) I_{\{l_i \neq 0\}} + \right. \\
 & \left. + p(x + e_{(i,M+2)}) \varphi_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i + 1) I_{\{l_i \neq r_i\}} \right], \\
 & x \in X.
 \end{aligned}$$

Здесь  $e_{(i,k)}$  – единичный вектор размерности  $([M+2] \cdot N)$  с единицей в  $((M+2)(i-1) + k)$ -ой позиции.

**Теорема 2.1.** Пусть для любых  $i = \overline{1, N}$ ,  $u = \overline{1, M}$  выполняются условия обратимости (2.1) и неравенства

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha_{(i,u)}}{\mu_{(i,u)}} < 1, \quad \frac{\beta_i}{\tau_i} < 1, \\
 \sup_{(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i) \in X_i} [v_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i) + \\
 + \varphi_i(n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, l_i)] = c_i < \infty,
 \end{aligned}$$

тогда марковский процесс  $x(t)$  эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид:

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_N(x_N), \quad x \in X,$$

где

$$\begin{aligned}
 p_i(x_i) & = \prod_{u=1}^M \left( \frac{\alpha_{(i,u)}}{\mu_{(i,u)}} \right)^{n_{(i,u)}} \left( \frac{\beta_i}{\tau_i} \right)^{m_i} \times \\
 & \times \prod_{k=1}^{l_i} \frac{v_i(\overline{0}, k-1) + \beta_i p_i^+}{\varphi_i(\overline{0}, k) + \beta_i p_i^-} p_i(0), \\
 p_i(0) & = \prod_{u=1}^M \left( 1 - \frac{\alpha_{(i,u)}}{\mu_{(i,u)}} \right) \left( 1 - \frac{\beta_i}{\tau_i} \right) \times \\
 & \times \left( \sum_{l_i=0}^{r_i} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{v_i(\overline{0}, k-1) + \beta_i p_i^+}{\varphi_i(\overline{0}, k) + \beta_i p_i^-} \right)^{-1},
 \end{aligned}$$

$(\alpha_{(i,u)}, \beta_i, i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M})$  – решение уравнений трафика.

Доказательство теоремы проводится стандартным образом, подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Летунович, Ю.Е.* Открытые неоднородные сети с многорежимными стратегиями обслуживания и ограничением на время пребывания / Ю.Е. Летунович // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы междунар. науч. конф. «Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 26–29 января 2009 г. / БГУ; редкол.: А.Н. Дудин (отв. ред.) [и др.]. – Минск, 2009. – Вып. 20. – С. 132–137.
2. *Якубович, О.В.* Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок / О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 74–77.
3. *Jackson, J.R.* Jobshop-like Queueing Systems / J.R. Jackson // Manag. Sci. – 1963. – Vol. 10, № 1. – P. 131–142.

Поступила в редакцию 05.02.16.

УДК 656.11: 625.7

## ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМОЙ РЕГИОНА

А.Т. Лановой

*Национальный транспортный университет, Киев*

## OPTIMIZATION OF THE REGION'S TRANSPORT SYSTEM MANAGEMENT

A.T. Lanovy

*National Transport University, Kyiv*

Исследуется функционирование сети автомобильных дорог общего пользования как элемента транспортной системы Украины, причем как элемент сложной системы сеть автомобильных дорог может рассматриваться как транспортная система во время ее функционирования, имеет целью обеспечение условий непрерывного, безопасного и удобного движения транспортных потоков автомобильными дорогами общего пользования Украины. Для достижения этой цели необходима оптимизация управления транспортной системой региона с определением необходимых критериев управления. Доказано, что наиболее полно отвечает целям функционирования сети автомобильных дорог показатель «Производительность работы автомобильной дороги», который является показателем эффективности ее функционирования в том, что наилучшим образом описывает движение больших по объемам транспортных потоков с достаточно большими скоростями движения при условии обеспечения необходимого уровня безопасности дорожного движения. Главным преимуществом этого показателя является учет скорости движения транспортного потока наряду с учетом его интенсивности. Доказано, что транспортная система региона является управляемой, так как процессы, которые в ней происходят, могут быть оптимизированы.

**Ключевые слова:** сеть автомобильных дорог, функционирование, развитие в условиях непрерывного, безопасного и удобного движения транспортных потоков, транспортная система региона, управление функционирования сети автомобильных дорог общего пользования.

The network of public roads as a part of the transport system of Ukraine is studied. As a part of a complex system of network of roads it can be considered the transport system in operation, which aims at to ensure the conditions of continuous, safe and convenient movement of traffic public roadways for the use in Ukraine. To achieve this goal it is necessary to get optimization of the transport control system in the region with the necessary determination management of criteria. It is proved that the indicator "Performance of the highway" fully meets the purpose of the highways network, which is a measure of the efficiency of its operation that best describes the movement of large volumes of traffic with high enough speeds, provided that the required level of road movement. The main advantage of this indicator is a consideration the speed of the traffic flow along the light intensity. It is proved that the transport system of the region is controlled so that the processes that occur in it can be optimized.

**Keywords:** road network, operation, development and conditions continuous, safe and comfortable traffic flows regional transport system, management functioning network of public roads.

### Введение

Ограниченность природных, производственных и трудовых ресурсов не позволяет достичь идеального состояния жизнедеятельности общества. Совокупность всех материальных потребностей человечества превышает производительные возможности всех имеющихся ресурсов. Поэтому абсолютный материальный достаток является недостижимым. Итак, существует проблема эффективного использования ограниченных ресурсов или управления ими с целью максимального удовлетворения материальных потребностей общества. При этом анализ функционирования сети автомобильных дорог в транспортной системе Украины может обнаружить их эффективность не только со стороны улучшения показателей материального производства, но и решение многих социальных вопросов, возникающих в обществе. Корни указанного кроются в проблеме эффективного использования ограниченных ресурсов [1].

В статье исследуется само функционирование сети автомобильных дорог общего пользования

как элемента транспортной системы Украины, причем как элемент сложной системы сеть автомобильных дорог может рассматриваться как транспортная система во время ее функционирования, имеет целью обеспечение условий непрерывности, безопасности и удобства движения транспортных потоков автомобильными дорогами общего пользования Украины.

### 1 Принципы эффективного функционирования и развития транспортной системы региона

Анализ макроуровня функционирования сети автомобильных дорог общего пользования [2] следует ограничивать границами отдельных регионов Украины из-за разнообразия административных, экономических и социальных факторов, присущих отдельным областям нашей страны, а также из-за факторов природно-климатического и дорожно-транспортного характера. Далее рассмотрены вопросы, касающиеся возможности управления транспортной системой «Автомобильные дороги государственного и местного значения – Национальные и международные

транспортные потоки» (АДГМ – НМТП) именно для региона (области или района).

При оптимизации управления транспортной системой региона АДГМ – НМТП (микроуровень анализа функционирования сети автомобильных дорог общего пользования) можно стремиться к достижению различных целей (критериев оптимальности) и, в зависимости от этих целей, рассматривать различные задачи рационального управления функционированием этой транспортной системы. На автомобильном транспорте, включая в это понятие сеть его путей сообщения (автомобильные дороги), важнейшими считались такие задачи [3]:

- обеспечение наименьшего времени сообщения при ограниченных и заранее заданных дорожных расходах;
- обеспечение заданного (расчетного) времени сообщения при возможно наименьших дорожных расходах;
- обеспечение наименьших транспортных расходов при ограниченном (заданном) уровне дорожных расходов;
- обеспечение наименьших дорожных расходов при ограниченном (заданном) уровне транспортных расходов;
- обеспечение максимально возможного уровня безопасности движения при ограниченном (заданном) уровне дорожно-эксплуатационных затрат;
- обеспечение заданного (необходимого) уровня безопасности движения при наименьших возможных дорожно-эксплуатационных затратах;
- достижение минимума дорожно-эксплуатационных затрат при обеспечении заданного объема перевозок (движения), заданной скорости и необходимой безопасности движения;
- обеспечение максимальной пропускной способности дороги при ограниченном (заданном) уровне дорожно-эксплуатационных затрат.

По своим параметрам транспортная система АДГМ – НМТП относится к сложным системам, основными характеристиками функционирования которых являются: показатель эффективности; устойчивость; помехозащищенность; надежность. Далее под надежностью функционирования системы следует понимать обеспечение необходимого уровня безопасности дорожного движения, под помехозащищенностью – обеспечение условий непрерывного движения, а под устойчивостью – достижение необходимой скорости движения.

Итак, для управления транспортной системой АДГМ – НМТП нужными является исследование и разработка следующих задач:

- оценка и прогнозирование интенсивности движения и состава транспортных потоков;
- оценка и прогнозирование скоростей движения транспортных потоков;
- оценка дорожных условий;
- оценка и прогнозирование условий непрерывного движения;

– оценка и прогнозирование уровней безопасности движения;

– оценка и прогнозирование условий удобного движения;

– оценка и прогнозирование дорожных расходов на улучшение условий движения;

– оценка и прогнозирование производительности работы автомобильных дорог;

– разработка системы сбора и переработки информации с целью оценки и прогнозирования работы транспортной системы АДГМ – НМТП (этот вопрос включает также разработку технических средств для сбора и переработки информации);

– организация системы управления с оценкой и прогнозированием показателей функционирования транспортной системы АДГМ – НМТП.

В качестве показателя эффективности транспортной системы АДГМ – НМТП должен быть избран максимум объема и скорости движения, с которыми справляется система при условии, что уровни безопасности и удобства движения не ниже, а дорожные расходы обеспечивают достижения показателем эффективности соответствующей величины.

Имея значение показателя эффективности и допустимые пределы снижения уровня эффективности при неудовлетворительных условиях функционирования системы (отказ, препятствия и т. п.), можно предложить обоснованные требования к надежности, устойчивости, помехозащищенности, качества управления, других свойств системы, а также возможного ресурсного обеспечения ее функционирования.

Для расчетов, связанных с определением требований к сложным системам, и, непосредственно, к системе АДГМ – НМТП, необходимо использовать методы математического моделирования. При расчете отдельные элементы сложных систем заменяются упрощенными эквивалентными схемами (алгоритмами). Построенная таким образом статистическая модель используется для определения эффективности различных вариантов структуры и набора параметров, а также выбора оптимального варианта.

Для обеспечения эффективного функционирования транспортной системы региона АДГМ – НМТП нужной является организация специального органа управления – службы по оценке и прогнозированию показателей функционирования этой системы.

Автомобильные дороги являются первичным элементом благоустройства, активно возникают на территориях, которые вводятся в планирование любого региона, независимо от степени их общей архитектурно-планировочной подготовки.

Существуют территории, на которых строятся автомобильные дороги, которые уже имеют какую-то сеть дорог. Такая существующая сеть дорог ограничивает проектную деятельность. При

этом приходится ограничивать область возможных вариантов инженерно-планировочных решений, приспособлявая их к существующей сети автомобильных дорог, или же полностью или частично изменять очерк сети, прокладывая новые дороги и истребляя старые или переводя их в категорию автомобильных дорог местного значения.

Следует подчеркнуть, что повышение объемов движения приводит к необходимости увеличения ширины проезжих частей и плотности сети автомобильных дорог.

На конфигурацию сети автомобильных дорог региона также влияют:

- функциональное зонирование территории региона;
- размещения грузообразующих и грузопоглощающих пунктов в регионе;
- направление и мощность внешних и внутренних транспортных связей;
- характер и размещения туристических маршрутов и зон отдыха в регионе;
- природно-климатические, гидрологические и гидрогеологические условия региона;
- роль и зона влияния городов-центров (промышленных, административных, культурных), обслуживающих жителей отдельных областей в регионах, которые рассматриваются.

Формализованная схема анализа функционирования транспортной системы региона АДГМ – НМТП складывается из пяти уровней-принципов анализа.

*Первый уровень-принцип «Обстановка, сложившаяся исторически»* – рассмотрение социально-экономических условий регионов, которые исторически сложились:

- население региона, тыс. чел.;
- площадь региона, кв. км;
- средний радиус удаленности границ региона от автомобильных дорог государственного значения, км;
- плотность сети дорог (отдельно – государственного и местного значения) в регионе, км / кв. км.

*Второй уровень-принцип «Экономико-географический»:*

- расположение автомобильных магистралей относительно основных грузо- и пассажирообразующих, грузо- и пассажиропоглощающих точек региона с учетом их влияния на экономику региона и страны;
- размещение городов региона и обеспеченность их автомобильным сообщением;
- макроэкономические показатели регионов, которые соединяют автомобильные магистрали между собой и с другими странами.

*Третий уровень-принцип «Дорожно-транспортный»:*

- количество автомобильных дорог местного значения, пересекающих автомобильные дороги государственного значения и их удаленность друг от друга;

- направление и мощность внешних и внутренних транспортных связей;
- наличие параллельных автомобильных дорог государственного значения.

*Четвертый уровень-принцип «Критериальный»* (факторы управляемые):

- определение средней величины зоны влияния различных маршрутов движения к сети автомобильных дорог государственного значения;
- обеспеченность различных частей региона по времени сообщения;
- обеспеченность необходимого уровня безопасности дорожного движения;
- обеспеченность необходимого уровня удобства дорожного движения;
- определение эффективности функционирования транспортной системы региона АДГМ – НМТП.

*Пятый уровень-принцип «Управляющие воздействия»:*

- совершенствование инженерно-планировочных решений автомобильных дорог, в том числе: совершенствование параметров геометрических элементов автомобильных дорог, включающих увеличение радиусов кривых в плане, уширения проезжей части на одну полосу движения, приведение в соответствие габаритов мостов к ширине проезжей части автомобильных дорог на подходах к мостам и т. д.;
- повышение транспортно-эксплуатационного состояния автомобильных дорог, в том числе: совершенствование транспортно-эксплуатационных характеристик покрытий проезжей части и обочин автомобильных дорог, включая оборудование покрытий проезжей части шероховатой поверхностной обработкой, обеспечение необходимого равенства покрытий, укрепления обочин и кромки проезжей части и т. д.;
- внедрение рациональных схем организации дорожного движения, в том числе: совершенствование обустройства автомобильных дорог путем устройства дорожной разметки, установка дорожных знаков и транспортных и пешеходных ограждений, оборудование переходно-скоростных полос, площадок для стоянки автомобилей у придорожных сооружений дорожного сервиса, площадок отдыха, автобусных остановок и автопавильонов, освещение дорог, строительства пешеходных дорожек и т. д.;
- внедрение интеллектуальных транспортных систем на автомобильных магистралях, а также строительство новых автомобильных дорог.

Первые три уровня-принципы являются исходными для четвертого и, особенно, пятого уровня-принципа анализа системы, как определяющих по эффективному функционированию и развитию транспортной системы региона АДГМ – НМТП.

Необходимо остановиться на двух последних уровнях-принципах формализованной схемы

анализа функционирования транспортной системы региона АДГМ-НМТП. Для фактического обоснования совершенствования инженерно-планировочных решений автомобильных дорог и рациональных схем организации дорожного движения ими, национальных и международных транспортных потоков, необходимо пользоваться принципом обеспеченности разных регионов по времени сообщения:

$$T_{АДГЗ} \leq T_{АДМЗ},$$

где  $T_{АДГЗ}$  – время движения с использованием автомобильной дороги государственного значения.

При этом движение с использованием автомобильной дороги государственного значения предполагает движение непосредственно по ней и отдельным подъездом к ней:

$$T_{АДГЗ} = T_n + T_{АМ},$$

где  $T_n$  – время движения по направлению подъезда к автомобильной дороге государственного значения;  $T_{АМ}$  – время движения непосредственно по автомобильной дороге государственного значения.

Опуская промежуточные расчеты, минимально необходимая скорость движения по автомобильной дороге государственного значения (по автомагистрали), исходя из указанных выше соотношений, должна быть

$$V_{АМ} \geq \frac{V_{АДМЗ}(L_n + L_{АМ})}{L_{АДМЗ}},$$

но не менее заранее заданной скорости движения в соответствии с показателем эффективности транспортной системы региона АДГМ – НМТП.

Для существующих автомобильных магистралей обратным действием можно найти зоны района (региона), транспортное использование которых тяготеет к использованию автомобильной дороги государственного значения:

$$L_n = V_n \left( \frac{L_{АДМЗ}}{V_{АДМЗ}} - \frac{L_{АМ}}{V_{АМ}} \right).$$

Пользуясь знанием зоны тяготения к автомобильной магистрали, можно определить нижний предел средней скорости соединения с использованием сети автомобильных дорог государственного значения.

Вышеупомянутым критериям (через признание зоны тяготения к автомобильной магистрали и время движения по маршруту с ее использованием) проверяется увязка функционирования сети дорог государственного значения с планировочной структурой региона и влияние на его транспортную обеспеченность.

Таким образом, условно можно при районировании периферийной сети автомобильных дорог выделить три зоны:

1) где движение происходит непосредственно по безымянной дороге местного значения с выходом на автомобильную дорогу государственного значения;

2) где необходимо часть пути преодолеть по сети автомобильных дорог местного значения к выходу на автомобильную дорогу государственного значения;

3) где движение является рациональным только по сети дорог местного значения.

Последнее может быть определено после расчета всех вариантов для возможных направлений движения с учетом территорий региона, которые сложились.

Обычно (по работам проф. Сильянова В.В.) считают, что лучшим образом автомобильная дорога функционирует, когда скорость и плотность движения являются оптимальными из условий максимального объема движения или, другими словами, пропускной способности дороги. При этом рассчитывают уровни удобства, значению каждого из которых соответствуют определенные диапазоны трех коэффициентов: загрузка движением, скорости движения и насыщения движением. В работе [4] эта методика проанализирована и, таким образом, установлено, что оценка условий движения существующими коэффициентами не позволяет определить возможности автомобильной дороги по обслуживанию транспортных потоков, а также выявить наличие резерва. Этот метод не может быть использован для управления движением и получения оценки условий движения в конкретный момент времени. Кроме того, непонятно, как совершенствование условий движения можно связать с необходимым ресурсным обеспечением выполнения дорожных работ.

Также следует подчеркнуть, что при достижении максимального значения интенсивности движение по любой дороге становится колонным. Вероятность смены полосы при колонном движении очень мала. Остановка какого-то из транспортных средств (пытается перестроиться) приведет к кратковременному затору.

Для анализа эффективности функционирования сети автомобильных дорог общего пользования на микроуровне анализа функционирования транспортной системы региона АДГМ – НМТП является необходимой разработка нового системного подхода с определением производительности работы каждой автомобильной дороги как предприятия по предоставлению общественных услуг по обеспечению непрерывного, безопасного и удобного дорожного движения.

## 2 Экономико-математическая модель оптимального управления транспортной системой АДГМ – НМТП

Проведенные исследования показали [5], что транспортная система АДГМ – НМТП является управляемой, так как процессы, которые в ней происходят, могут быть оптимизированы. Экономико-математическая модель задачи оптимального управления транспортной системой АДГМ – НМТП имеет вид:

$$\begin{aligned} P(l_{ab}) \rightarrow \max, & \quad (2.1) \\ \bar{V} \geq V_3, \quad N \leq N(q_{opt}), \\ SL \geq \bar{SL}, \quad P(MR) \geq AC(MC), \end{aligned}$$

где  $P(l_{ab})$  – производительность работы участка автомобильной дороги длиной  $l_{ab}$ ;  $\bar{V}$  – средняя скорость движения транспортного потока на участке дороги длиной  $l_{ab}$ ;  $V_3$  – заданный уровень скорости движения транспортного потока;  $N$  – интенсивность движения транспортного потока на участке дороги длиной  $l_{ab}$ ;  $N(q_{opt})$  – интенсивность движения, соответствующая оптимальной плотности транспортного потока, исходя из условий достижения общественно-экономической эффективности работы дороги;  $SL$  – уровень безопасности движения на участке дороги;  $\bar{SL}$  – минимально необходимый уровень безопасности движения на участке дороги;  $P(MR)$  – транспортная ценность движения, соответствует предельным общественным выгодам через совершенствование условий движения транспортных потоков по автомобильной дороге;  $AC$  – средние общие общественные расходы на совершенствование условий движения транспортных потоков по автомобильной дороге;  $MC$  – предельные общественные затраты на совершенствование условий движения транспортных потоков по автомобильной дороге.

Представленная система управления достаточно отражает задачу оптимизации системы для отдельной дороги. В случае оптимизации системы для всей сети автомобильных дорог общего пользования математическая модель будет выглядеть сложнее:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \Pi \rightarrow \max, \quad P(l_{ab}) \rightarrow \max, & \quad (2.2) \\ \bar{V}_{ab} \geq V_3, \quad N_{ab} \leq N(q_{opt}), \\ SL_{ab} \geq \bar{SL}, \quad P(MR)_{ab} \geq AC_{ab}(MC_{ab}), \end{aligned}$$

где  $l_{ab}$  – длина участка автомобильной дороги.

Основным параметрам, входящим в показатель производительности работы автомобильной дороги, является средняя скорость движения и объем транспортного потока (интенсивность дорожного движения). Последние, в свою очередь, являются функциями плотности движения. Таким образом, плотность движения является интегральным параметром функционирования автомобильной дороги, а ее величина существенно зависит от дорожных условий и состава транспортного потока. Следовательно, показатель производительности дороги имеет измеритель: автомобиле-километров в сутки (авт.-км/сут). Преимуществом такого измерителя является то, что если рассматривать производительность дороги с позиции пользователя дороги, то можно учитывать его как скорость движения автомобиля пользователя на рассматриваемом отрезке дороги.

Если же рассматривать этот измеритель с позиции дорожной организации, которая содержит дорогу, то он (измеритель) демонстрирует необходимость обеспечения соответствующей интенсивности непрерывного движения на участке дороги длиной в один километр. Из этого следует, что данный измеритель имеет универсальный характер, что позволяет применять его как главный универсальный измеритель эффективности работы автомобильной дороги.

### Заключение

В последующих исследованиях следует рассмотреть ограничения моделей (2.1) и (2.2) и их влияние на целевую функцию, где  $P(MR)$  – транспортная ценность движения;  $MR$  – предельные общественные выгоды от совершенствования условий движения;  $AC$  – средние общие дорожные расходы на совершенствование условий движения;  $MC$  – предельные дорожные расходы на совершенствование условий движения, а также методологические основы определения уровней безопасности движения  $SL$  и уровней удобства движения с учетом заданных значений скорости движения транспортного потока.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лановий, О.Т. Макроекономічна ефективність функціонування автомобільних доріг загального користування України / О.Т. Лановий // Вісник Національного транспортного університету. – 2006. – Випуск 11. – С. 122–125.
2. Лановий, О.Т. Застосування системного підходу до оцінки значення функціонування мережі автомобільних доріг для соціально-економічного розвитку країни / О.Т. Лановий // Вісник Національного транспортного університету. В 2-х частинах: Ч. 2. – 2012. – Випуск 26. – С. 197–202.
3. Гуков, Н.И. Исследование соответствия дорожных условий требованиям транспортного потока: дисс... канд. техн. наук: 05.22.10 / Н.И. Гуков. – Киев: КАДИ, 1979. – 166 л.
4. Пальчик, А.Н. Усовершенствование методов оценки условий движения на основе учета состава транспортного потока: дисс. ... канд. техн. наук: 05.22.10 / А.Н. Пальчик. – Киев: КАДИ, 1987. – 174 л.
5. Лановий, О.Т. Продуктивність роботи автомобільної дороги загального користування як критерій ефективності її функціонування / Лановий О.Т. // Вісник Національного транспортного університету. В 2-х частинах: Ч. 2. – 2011. – Випуск 21. – С. 173–178.



This publication is the result of the project implementation TEMPUS CERES: Centers of Excellence for young REsearchers Reg.No. 544137-TEMPUS-1-2013-1-SK-TEMPUS-JPHES.

Поступила в редакцию 14.01.16.

## РЕСТРУКТУРИЗАЦИЯ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В.С. Смородин, А.В. Клименко, Е.И. Сукач, О.А. Шимчик

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## RESTRUCTURING OF SIMULATION MODELS OF CONTROLLED SYSTEMS IN AUTOMATION OF PROJECT SIMULATION

V.S. Smorodin, A.V. Klimenko, E.I. Sukach, O.A. Shimchik

*F. Scorina Gomel State University*

Предложен способ реструктуризации имитационных моделей вероятностных технологических процессов, имеющих управляющую систему, для решения многокритериальных задач оптимизации структуры управления при автоматизации проектного моделирования новых технологических объектов. Приведено теоретическое обоснование способа реструктуризации и технология его применения на основе адаптации структуры имитационной модели системы управления к условиям функционирования технологического цикла. Обоснована возможность использования предложенного подхода для оценки качества проектного моделирования при построении оптимальной структуры системы управления технологическим циклом производства.

**Ключевые слова:** автоматизация проектного моделирования, реструктуризация имитационных моделей, управляемые системы, многокритериальная задача оптимизации.

The process of restructuring of simulation models of probabilistic technological processes with a control system for solving multi-criteria optimization problems in the management structure of the automation of project modeling of new technological facilities is offered. The theoretical substantiation of a way of restructuring and technology of its application on the basis of the adaptation of the structure of the control system of a simulation model to the conditions of functioning of the technological cycle are shown. The ability to use the proposed approach for assessing the quality of project simulation in constructing optimal structure of the control system of the technological cycle of production is justified.

**Keywords:** automation of project simulation, restructuring simulation model, controlled systems, multi-criteria optimization problem.

### Введение

При исследовании сложных технологических объектов часто приходится сталкиваться с недостаточной результативностью известных методов, в особенности, если дело касается проектирования, проектного моделирования или анализа функционирования, когда структура таких объектов изменяется в процессе их эволюции. Это связано, в первую очередь, с их многообразием и сложностью практических задач, которые возникают уже на стадии проектного моделирования, а также при оценке уровня надежности и безопасности потенциально опасных сложных технических систем [1].

В этой связи является актуальной разработка подхода к исследованию сложных систем на стадии автоматизации их проектного моделирования, который позволял бы учитывать изменение структурных связей управляющей системы при изменении структуры технологического цикла вероятностного технологического процесса производства.

В основу такого подхода может быть положена процедура проектного моделирования объекта исследования, опирающаяся на адаптируемую структуру имитационной модели системы управления, которая изменяется в процессе функционирования технологического цикла производства при

решении многокритериальных задач оптимизации управления.

Как известно, основной задачей эффективного управления технологическим циклом производства является реализация конкретной последовательности универсальных управляющих воздействий, позволяющих оптимизировать выходные параметры технологической системы при возможных изменениях структуры технологического цикла, которые могут возникнуть, например, в условиях наличия элементов потенциально опасного производства [2], в рамках решаемой многокритериальной задачи управления.

Проводимые в последнее время в этой области исследования показывают, что качественный анализ функционирования систем управления предполагает учет влияния огромного числа факторов, которые претерпевают изменения в процессе реализации функционирования объекта исследования, что, как известно, достигается средствами построения имитационных моделей исследуемых систем.

### 1 Автоматизация проектного моделирования управляемых систем и решение многокритериальной задачи оптимизации управления

Автоматизация проектного моделирования управляемых систем реализуется рядом этапов



создания, испытания и реализации имитационной модели системы управления (СУ) технологическим процессом производства (ТПП).

На *этапе 1* задается текущая структура СУ ТПП. Вначале формируется таблица параметров  $PR.SOST_{ij}$  и создается таблица коммутации процессов, в которой все элементы упорядочены по возрастанию номеров. Для отображения надежных характеристик оборудования задаются следующие матрицы: времени  $\|Q_{lr ij}\|$  наработки оборудования; функций  $\|F_{1ij}(\tau)\|$  условного распределения времени пребывания технологического процесса в текущих состояниях; функций  $F_{2ij}(C)$  условного распределения стоимости выполнения технологических операций; вероятностей  $\|P_{av kj}\|$  возникновения аварий на оборудовании номера  $k$  в  $j$ -м состоянии; времени  $\|F_{3ij}(\tau_{BO})\|$  безотказной работы  $k$ -го устройства оборудования; длины интервала  $\|F_{4ij}(\tau_{VO})\|$  восстановления работоспособности оборудования с номером  $k$ ; интервалов времени  $\|F_{5ij}(\tau_{AV})\|$  ликвидации аварийной ситуации на устройстве в  $j$ -м состоянии технологического цикла производства.

На *этапе 2* организуется натурный эксперимент для получения исходной информации и последующей проверки адекватности имитационной модели текущей структуры управления реальному технологическому процессу производства. Для тех параметров, которые сложно получить в натурном эксперименте, используются экспертные оценки их значений. Основную трудность в подготовке исходной информации представляет определение вероятностных характеристик  $PR.SOST_{ij}$ . В случаях, когда не удается найти аналитический вид для аппроксимирующих функций распределения, используется табличная форма их представления, которая стандартизована для всех типов параметров.

На *этапе 3* осуществляется запись параметров  $PR.SOST_{ij}$  в базу данных  $BDM$  имитационной модели системы управления. При каждой записи значений параметров происходит их преобразование во внутреннее представление, контроль корректности вводимых значений и вывод результатов контроля для устранения ошибок в описании структуры ТПП. Взаимодействие с пользователем осуществляется путём реализации диалога в режиме «вопрос-ответ».

На *этапе 4* таблицы коммутации  $PR.SOST_{ij}$  с  $PR.UZEL_j$  проверяются на соответствие входов и выходов математических моделей компонентов структуры управления. Любое дублирование информации фиксируется с выдачей соответствующего сообщения на экран монитора. По окончании

этапа 4 выдётся структура таблиц коммутации, в которой отсутствуют синтаксические ошибки описания модели.

На *этапе 5* происходит инициализация и верификация базового варианта имитационной модели (ИМ) системы управления. Задаётся начальный состав ресурсов, материалов, исполнителей и оборудования ТПП, указываются условия окончания имитации, число реализаций процедуры Монте-Карло, проводится начальный запуск имитации базового варианта имитационной модели.

На *этапе 6* осуществляется испытание и исследование имитационной модели. Шаги данного этапа стандартизованы на основе известных методик испытания ИМ сложных систем: вначале оценивается ошибка имитации ( $\epsilon\%$ ), представляющая собой максимальный процент ошибок откликов модели; определяется длина переходного периода имитации ( $T_s$ ), означающая максимальное время стабилизации того отклика модели, который позже всех остальных переходит в установившееся состояние. Следующим шагом испытаний является проверка «чувствительности» откликов к изменениям параметров моделирования. Каждая составляющая вектора параметров модели ( $X_k$ ) изменяется в диапазоне от минимального ( $X_k^-$ ) до максимального ( $X_k^+$ ) значений, а остальные компоненты вектора параметров  $X_r$  устанавливаются в середине интервала ( $X_r^0$ ). Определяется приращение компонентов вектора откликов  $\Delta Y_h\%$  и проверяется их чувствительность к вариациям вектора параметров. Если приращение откликов меньше  $\epsilon\%$ , то считают что имитационная модель не «чувствительна» к вариациям вектора параметров. Те параметры  $X_r$ , которые оказались не «чувствительными», можно в дальнейшем исследовании исключить. Последним шагом этапа испытания является проверка адекватности модели: сравниваются средние значения откликов модели с параметрами реальной системы управления. При этом используется методика проверки адекватности, основанная на гипотезе о близости средних значений  $h$ -го отклика имитационной модели и реального технологического процесса производства, которая проверяется с помощью критерия Стьюдента.

На *этапе 7* организуется серия многопрогонных имитационных экспериментов согласно процедуре Монте-Карло, в которой каждый имитационный эксперимент (ИЭ) представляет  $l$ -ю реализацию имитационной модели. При завершении  $N$  прогонов имитационной модели в базе данных будут сформированы выборки статистик  $l$ -х реализаций. После проведения  $N$  опытов на имитационной модели из статистик имитации вычисляются отклики модели.

На *этапе* 8 с помощью подсистемы *PS.OBRABOT* из выборок, хранящихся в базе данных, формируются графики и диаграммы, определяются математические ожидания и дисперсии откликов имитации. Откликами имитационной модели являются усредненные по всем реализациям время и стоимость нахождения системы управления технологическим процессом в  $j$ -х состояниях

$$T_j^0 = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N T_{lj}; \quad C_j^0 = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N C_{lj}$$

а также общие значения времени восстановления и ликвидации аварий в процессе его реализации

$$T_{VO} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N T_{VOlj}; \quad T_{AV} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N T_{AVlj}.$$

Цель имитации состоит в минимизации значений компонентов вектора  $(T, C, T_{VO}, T_{AV})$ , при которой лучшим признается вариант организации структуры управления технологическим циклом, доставляющий минимум  $\Psi_0$  значению целевого функционала  $\Psi(T, C, T_{VO}, T_{AV})$ :

$$\Psi_0 = \min \Psi(T, C, T_{VO}, T_{AV}).$$

После усреднения результатов имитации в соответствии с процедурой метода Монте-Карло в виде графиков и диаграмм формируются интегральные статистики имитации.

С помощью подсистемы *PS.VIZUAL* графики и диаграммы выдаются на печать.

На *этапе* 9 диаграммы использования ресурсов сопоставляются в едином масштабе изменения модельного времени. По этим графикам и временным диаграммам определяются диапазоны расхода ресурсов ТПП при реализации текущей структуры системы управления. Результатом сопоставления является отбраковка тех режимов управления, которые требуют много ресурсов для своей реализации.

Наконец, на *этапе* 10, с помощью подсистемы *PS.RESHEN* анализируются варианты организации структуры управления технологическим циклом для принятия обоснованного решения при реализации соответствующих задач проектного моделирования.

## 2 Реструктуризация имитационных моделей управляемых систем

В основу описания математического аппарата, используемого при реструктуризации имитационных моделей управляемой системы, положена возможность возникновения отказов оборудования при выполнении агрегатов-имитаторов технологических операций, что ставит эксперта-технолога перед необходимостью на стадии проектирования предусмотреть выход из состояний, возникших после реализации аварии. На этот случай в имитационной модели предусматриваются «резервные» цепочки технологических

операций  $AMTXO_{ij}$ , которые активизируются только при появлении аварий. Переключение на «резервную» ветвь реализуется за счёт использования булевой матрицы коммутации  $\|\gamma_{ns}\|$ , формируемой экспертом-технологом до начала имитации. Строками этой матрицы ( $n$ ) являются номера агрегатов  $AMTXO_{ij}$  на входе агрегата-события  $ASOB_i$ , а столбцами ( $S$ ) являются номера резервных  $AMTXO_{ij}$  на выходе  $ASOB_j$ , которые необходимо инициировать в поставарийной ситуации. Подобное «технологическое резервирование» является динамическим регулятором поставарийной ситуации, возникшей при реализации текущей структуры системы управления моделируемым объектом.

Другим способом недопущения аварий оборудования является автоматический переход на резервные устройства, когда хотя бы для одного из устройств оборудования фактическая «наработка» превышает пороговые значения из множества  $\{ind_r\}$ . Элементы этого множества  $\{ind_r\}$  поступают в подсистему *PS.OPEREX*, которая проверяет близость к пороговому значению наработки всех устройств оборудования. При достижении близости к пороговым значениям у нескольких устройств формируются автоматические воздействия на систему управления ИМ: групповой переход на резервирование тех устройств, у которых наработка близка к критической ( $\alpha_1$ ); переход на общую профилактику оборудования из-за неэффективности группового резервирования или нехватки резервных устройств ( $\alpha_2$ ); допускается возможность аварии в тех случаях, когда процесс производства останавливать нельзя, и состояния индикаторов игнорируются ( $\alpha_3$ ).

Подсистема *PS.ANALEX* использует статистику имитаций  $\{ST_k\}$  и множество откликов модели  $\{Y_{0j}\}$ . Откликами  $Y_{0j}$  являются усреднённые по числу реализаций  $N$  их интегральные значения для  $h$ -го варианта управляемой производственной системы: критическое время выполнения  $(T_{KPh})$  технологического цикла производства, стоимость его реализации  $(C_{0h})$ , интегральный расход материалов и комплектующих изделий  $(mt_{oh})$ , количество использованных ресурсов  $r$ -го номера  $(v_{\Sigma rh})$ , суммарная стоимость ликвидации аварий  $(C_{ABh})$ , общие потери времени на профилактику  $(T_{OPh})$ . Интегральные отклики модели составляют многомерный вектор откликов  $V_{OH}$  варианта структуры системы

управления, у которого все компоненты подлежат минимизации, но имеют различную размерность и диапазоны изменения. Для сравнения вариантов структуры осуществляется «свёртка» этого вектора к скалярному показателю  $W_h$  способом весовых коэффициентов важности ( $\sum_j \delta_j = 1$ ;  $0 \leq \delta_j \leq 1$ ) откликов с номером  $j$ . Вариантам организации структуры управляемой производственной системы соответствуют значения вектора параметров  $\{X_{0jh}\}$  и постоянных параметров имитации множества  $\{G_h\}$ . Общее количество вариантов  $N_h$  ( $h = \overline{1, K_0}$ ) определяется стратегией изменения каждого уровня параметров.

Выбор оптимальной стратегии осуществляется на основе классических методов планирования экспериментов. Решением задачи построения оптимального варианта организации структуры системы управления технологическим циклом производства является минимальное значение  $W_h$  по всему множеству вариантов с номером  $h$ .

### 3 Динамическая имитация при автоматизации проектного моделирования систем управления

Динамическая имитация при автоматизации проектного моделирования систем управления осуществляется на основе построения компонентов динамической имитационной модели, при котором исходная структура управления технологическим объектом представляется конечным набором взаимосвязанных математических моделей.

Связь между компонентами математических моделей системы управления осуществляется посредством синхронизации взаимодействия агрегатов-имитаторов, входящих в состав компонентов-моделей. Для построения компонентов динамической имитационной модели системы управления используется агрегатная система автоматизации моделирования, реализующая агрегатный способ имитации сложных систем, в связи с чем используется шесть типов агрегатов-имитаторов:

$ATOP_{ij}$  – агрегаты-имитаторы выполнения технологических операций;

$ASOB_i$  – агрегаты-имитаторы свершения  $i$ -го события в процессе имитации функционирования системы управления;

$AOBIN_r$  – агрегаты-имитаторы функционирования оборудования;

$AKAN_r$  и  $AOBOP_r$  – агрегаты-имитаторы совместного использования оборудования общего пользования с помощью выделенных каналов;

$APROC_k$  – процедуры-имитаторы с номером  $k$  ликвидации аварийной ситуации при выполнении имитационной модели.

Агрегаты-имитаторы  $AMTXO_{ij}$  представляют собой четырехполюсные агрегаты, которые имитируют выполнение технологической операции  $MTXO_{ij}$ . В режиме прямой имитации сигнал приходит от агрегата  $ASOB_i$ , который по соответствующим функциям распределения формирует значения параметров агрегата ( $\tau_{ijl}$ ;  $c_{ijl}$ ;  $\{V_{rij}\}$ ;  $\{mt_{ijl}\}$ ;  $\{ko_{ijl}\}$ ) в  $l$ -ой реализации имитационной модели системы управления. Затем каждый агрегат  $ATOP_{ij}$  определяет индивидуальные запросы на ресурсы и оборудование в виде списков запросов ( $SPINRS_{ijl}$ ;  $SPOBR_{ijl}$ ;  $SPISP_{ijl}$ ). Далее происходит обращение к системе распределения ресурсов, которая выделяет требуемые ресурсы на время имитации  $MTXO_{ij}$ .

Агрегаты  $ASOB_i$  являются многополюсными с различным числом входов и выходов. Выходы у  $ASOB_i$  могут быть одиночными и «кустовыми». Из «кустовых» выходов агрегата формируются сигналы двух типов: действительный  $Sg_d$ , разыгрываемый по вектору вероятностей  $\{P_{ijkl}\}$  и  $(k-1)$  фиктивных сигналов  $Sg_f$ . Выходы  $ASOB_i$  нумеруются, поэтому при адресации сигнала указывается номер события  $i$  и номер входа  $r$  в агрегат  $ASOB_j$ . Только действительные сигналы  $Sg_d$ , поступающие в режиме прямой имитации на вход  $ATOP_{ij}$ , инициируют его работу по изложенному алгоритму. Фиктивные сигналы  $Sg_f$  обходят алгоритм выполнения  $ATOP_{ij}$ . При этом у агрегатов  $ASOB_j$  используется еще один тип выходных «кустовых» сигналов, называемых резервными выходами  $ASOB_j$ . С их помощью реализуется так называемое «технологическое резервирование».

Таким образом, на стадии автоматизации проектного моделирования систем управления эксперт-технолог имеет возможность динамического регулирования выполнения множества  $\{ATOP_{ij}\}$  в зависимости от текущей структуры системы управления с помощью комбинаций различных типов кустовых выходов и задания соответствующего количества их разветвлений. Окончательный вариант оптимизации структуры системы управления принимается на основе анализа статистической информации, собранной в процессе функционирования динамической имитационной модели.

### Заключение

Многочисленные попытки унификации системного подхода при решении конкретных задач привели к необходимости использования процедуры реструктуризации моделей в области

имитации для анализа функционирования сложных технических систем, представленных в качестве многопараметрических объектов конечным множеством математических моделей, каждая из которых отражает конкретную группу свойств исходной системы [3]. При этом сохраняется возможность выделить классы сложных технических систем со специфическими свойствами, на основании которых разрабатываются методологические принципы построения имитационных моделей, которые характеризуются единой математической терминологией и могут быть доступны специалистам различных предметных областей.

В качестве инструмента для реализации подобного подхода используются метод пошаговой реструктуризации имитационных моделей и динамическая имитация функционирования сложных технических объектов [4], на основе которых осуществляется синтез оптимальной структуры управления сложной технической системы в соответствии с решаемой многокритериальной задачей оптимизации ее функционирования.

В работе предложен новый подход к исследованию управляемых систем при автоматизации их проектного моделирования, основанный на адаптации структуры имитационной модели системы управления к условиям функционирования технологического цикла производства, который используется для решения многокритериальных задач оптимизации структуры управления.

Обоснована возможность использования данного метода для оценки качества проектного моделирования при построении оптимальной структуры системы управления технологическим циклом производства на основе реструктуризации имитационных моделей вероятностных технологических систем.

Новизна данного подхода состоит в адаптации текущей структуры имитационной модели системы управления к условиям функционирования вероятностного технологического процесса производства при решении многокритериальных задач оптимизации структуры управления. Предложенный метод позволяет выделить классы

управляемых систем со специфическими свойствами, которые характеризуются единой математической терминологией и могут иметь единые критерии оценки качества проектного моделирования для специалистов различных предметных областей.

Выделение классов управляемых систем со специфическими свойствами дает возможность разработки методологических принципов построения систем управления на стадии их проектного моделирования, а также основания рассчитывать на создание необходимой базы знаний, позволяющей работать с управляемыми системами любой степени сложности вне зависимости от их физической сущности и рамок формализации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимей, И.В.* Разработка имитационных моделей сложных технических систем: монография / И.В. Максимей, В.С. Смородин, О.М. Демиденко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – 298 с.
2. *Смородин, В.С.* Метод анализа систем управления технологическими процессами производства с элементами потенциальной опасности / В.С. Смородин // Юбилейная научно-практическая конференция, посвященная 85-летию ГГУ им. Ф. Скорины (Гомель, 17 июня 2015 г.): материалы в 4 ч. Ч. 4. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – С. 157–160.
3. *Смородин, В.С.* Интеллектуальный анализ систем управления потенциально опасными процессами производства / В.С. Смородин // Сборник трудов международной научной конференции им. Т.А. Таран: «Интеллектуальный анализ информации. ИАИ-2015». – Киев, 20–22 мая, 2015. – С. 212–219.
4. *Смородин, В.С.* Метод динамической имитации вероятностных производственных систем / В.С. Смородин // Математичні машини і системи. – 2012. – № 2. – С. 96–101.

*Поступила в редакцию 08.02.16.*

УДК 004.056.55

## ГЕНЕРАТОР ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ КЛЮЧЕВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ТРОЙСТВЕННЫХ НАБОРОВ БЕНТ-ФУНКЦИЙ

А.В. Соколов<sup>1</sup>, О.Н. Жданов<sup>2</sup>, Н.А. Барабанов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одесский национальный политехнический университет

<sup>2</sup>Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М.Ф. Решетнёва,  
Красноярск

### PSEUDO-RANDOM KEY SEQUENCE GENERATOR BASED ON TRIPLE SETS OF BENT-FUNCTIONS

A.V. Sokolov<sup>1</sup>, O.N. Zhdanov<sup>2</sup>, N.A. Barabanov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa National Polytechnic University

<sup>2</sup>M.F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

Предлагается схема генератора псевдослучайных ключевых последовательностей на основе математического аппарата многозначной логики и тройственных наборов бент-функций. Разработанный генератор обладает высоким уровнем криптографического и стохастического качества и может быть использован в современных телекоммуникационных системах. Построен и классифицирован полный класс 3-бент-последовательностей. Введено понятие троичной алгебраической нормальной формы, разработан быстрый метод её нахождения.

**Ключевые слова:** генератор ключевых последовательностей, многозначная логика, бент-функция, алгоритм поточного шифрования.

The scheme of multi-valued pseudorandom key sequence generator based on the triple sets of bent-functions is proposed. Designed generator has a high level of cryptographic and stochastic quality and can be used in modern telecommunication systems. The full class of 3-bent-sequences is constructed and classified. The concept of the ternary algebraic normal form is introduced and the fast method for its finding is developed.

**Keywords:** key sequences generator, multi-valued logic, bent-function, stream encryption algorithm.

#### Введение

Базовым компонентом современных алгоритмов поточного шифрования (АПШ) являются генераторы псевдослучайных ключевых последовательностей (ГПКП), которые во многом определяют их быстродействие и криптографическую устойчивость. Разработке ГПКП посвящено большое количество работ. На наш взгляд, одним из наиболее перспективных направлений является построение ГПКП на основе совершенных алгебраических конструкций [1]. Использование совершенных алгебраических конструкций позволяет добиться не только оптимальных стохастических свойств ГПКП, но и получить хорошие криптографические свойства генераторов.

Наиболее удобными совершенными алгебраическими конструкциями для построения ГПКП являются бент-функции (их таблицы истинности – бент-последовательности), что обуславливается их максимальным, среди булевых функций, удалением от множества аффинных функций, равномерным спектром амплитуд преобразования Уолша – Адамара. Схема ГПКП на основе множества бент-функций предложена в работе [1], тем не менее, исследования, проведенные в [2], показали её несовершенство в смысле стохастических свойств, в результате чего была предложена схема ГПКП на основе

дуальных пар бент-функций, которая удовлетворяет всем базовым стохастическим тестам [3]. Указанная схема ГПКП получила свое дальнейшее развитие в работе [4], благодаря которой удалось существенно повысить быстродействие данной схемы при сохранении стохастических и криптографических свойств генерируемых ею последовательностей.

Хорошо известны эффективные приложения функций многозначной логики для разработки и практической реализации схем защиты информации.

Целью настоящей работы является построение ГПКП на основе троичных бент-последовательностей (3-бент-последовательностей).

Алгоритм поточного шифрования представляет собой набор из шести объектов, а именно [5]:

$$[X = \{x_i\}, K = \{k_i\}, Y = \{y_i\}, E, D, \bar{A}],$$

где  $X$  – вектор координат  $x_i$  открытого текста;  $K$  – вектор координат ключа  $k_i$ ;  $Y$  – вектор координат  $y_i$  шифротекста;  $E$  – множество правил зашифрования;  $D$  – множество правил расшифрования;  $\bar{A}$  – алфавит, над которым происходит преобразование.

Базовый принцип работы современных АПШ может быть сведен к следующим уравнениям зашифрования и расшифрования

$$\begin{cases} y_i = x_i \oplus_q z_i; \\ x_i = y_i \oplus_q (-z_i); \end{cases} \quad i = \overline{1, L},$$

где  $z_i$  – ключевая последовательность, генерируемая ГПКП на основе ключа  $K$ ;  $q$  – мощность применяемого алфавита  $\bar{A}$ ;  $L$  – длина исходного сообщения;  $\oplus_q$  – операция сложения по модулю  $q$ .

Наиболее употребительным является алфавит  $\bar{A} = \{0,1\}$ , т. е. полагают  $q = 2$ , тем не менее, развитие систем обработки и передачи информации, в частности, систем радиосвязи [6], определяет актуальность и других значений  $q$  для построения АПШ и ГПКП. В настоящей работе мы полагаем  $q = 3$ .

Для случая  $q = 2$  общепринятой схемой ГПКП является схема, основанная на Регистрах Сдвига с Линейной Обратной Связью (РСЛОС) и последующего нелинейного преобразования, позволяющего достичь высокого уровня криптографической стойкости, показанная на рисунке 0.1.

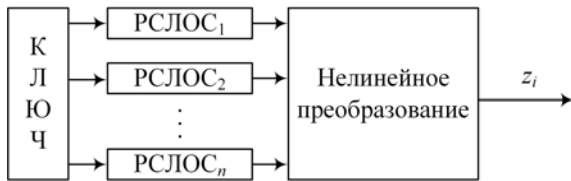


Рисунок 0.1 – Схема ГПКП на основе РСЛОС

В схеме, предложенной в [2], при работе над двоичным алфавитом  $\{0,1\}$  в качестве нелинейного преобразования применяются такие совершенные алгебраические конструкции, как дуальные пары бент-последовательностей.

**Определение 0.1** [7]. Бинарная последовательность

$$B = [b_0, b_1, \dots, b_i, \dots, b_{N-1}],$$

длины  $N = 2^{2^m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , где коэффициенты  $b_i \in \{\pm 1\}$ , называется бент-последовательностью, если она имеет равномерный по модулю спектр Уолша – Адамара, который представим в матричной форме

$$|W_B(\omega)| = |B \cdot A_N| = const, \quad (0.1)$$

$$\omega = \overline{0, N-1},$$

где  $A_N$  – матрица Уолша – Адамара порядка  $N$ .

Регулярный метод синтеза бент-последовательностей длины  $N = 16$  разработан в [8], в то время как метод синтеза бент-последовательностей длины  $N = 64$  разработан в [9]. Бент-последовательности больших длин могут быть получены с помощью таких рекуррентных конструкций, как конструкция Майорана – МакФарланда [7].

**Определение 0.2.** Дуальной парой бент-последовательностей называется такой набор из двух бент-последовательностей  $B_1, B_2$ , конкатенация таблиц истинности которых  $[B_1, B_2]$  является сбалансированной, т. е.

$$K^{-1} = K^{+1} = N.$$

Как показывают исследования, проведенные в работе [2], именно применение дуальных пар бент-последовательностей позволяет добиться наилучших стохастических и криптографических свойств ГПКП.

Разработка ГПКП для случая  $q = 3$  требует введения новых видов бент-последовательностей.

Отметим, что свойства бент-последовательности зависят от выбранного ортогонального базиса. В определении 0.1 используется ортогональное преобразование Уолша – Адамара. В свою очередь, каждая строка матрицы Адамара является кодовым словом линейного кода, а, следовательно, постоянные значения трансформант Уолша – Адамара подразумевают, что булева функция включает в себя равные кванты каждой из линейных функций. Это свойство определяет наилучшую криптографическую стойкость бент-последовательностей среди всего множества булевых функций.

Для распространения описанных конструкций на случай  $q = 3$  нам понадобятся следующие понятия.

**Определение 0.3** [10]. Функцией  $q$ -значной логики (далее  $q$ -функция)  $k$  переменных называется отображение

$$\{0, 1, 2, \dots, q-1\}^k \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q-1\}.$$

При  $q = 2$  получаем булевы функции.

В частности, функция трехзначной логики (3-функция) – это отображение

$$V_k = \{0, 1, 2\}^k \rightarrow \{0, 1, 2\},$$

т. е. правило, однозначно сопоставляющее вектору из  $k$  координат, принимающих значения 0, 1, 2 значение 0, 1 или 2.

Так же, как и булевы функции, 3-функции можно задать аналитически, в виде вектора, в виде таблицы. Важнейшей задачей является определение алгебраической нормальной формы (АНФ) 3-функций.

Пусть 3-функция двух переменных задана таблицей. Для нахождения АНФ данной функции запишем полином:

$$f(x_1, x_2) = a_{00} + a_{01}x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{10}x_1 + a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{22}x_1^2x_2^2, \quad (0.2)$$

где  $a_{ij} \in \{0, 1, 2\}$  – искомые коэффициенты,  $a_{ij}$  имеют двойную индексацию: показатель степени первой переменной, показатель степени второй переменной. Например,  $a_{12}$  – это коэффициент

при произведении первой степени  $x_1$  и второй степени  $x_2$ .

Для поиска коэффициентов  $a_{ij}$  составим соответствующую систему уравнений. Для этого подставляем в (0.2) значения переменных и приравниваем заданным значениям многочлена. Решение системы можно записать в виде таблицы 0.1.

Таблица 0.1 – Решение системы

	$f_{00}$	$f_{01}$	$f_{02}$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{20}$	$f_{21}$	$f_{22}$
$a_{00}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_{01}$	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
$a_{02}$	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
$a_{10}$	0	0	0	-1	0	0	1	0	0
$a_{11}$	0	0	0	0	1	-1	0	-1	1
$a_{12}$	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
$a_{20}$	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0
$a_{21}$	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
$a_{22}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Пример. Пусть  $k = 2$ ,  $x = (x_1, x_2) \in V_2$ , 3-функция задана таблицей истинности

$x_1$	$x_2$	$f(x)$
0	0	0
0	1	1
0	2	1
1	0	1
1	1	2
1	2	0
2	0	2
2	1	1
2	2	1

Векторное задание этой функции с помощью таблицы истинности:  $f(x) = \{011120211\}$ . По таблице 0.1 сразу определяем коэффициенты АНФ для нашего примера:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Таким образом, с учетом найденных коэффициентов можем записать АНФ исследуемой 3-функции:

$$\Phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2^2 + 2x_1^2x_2.$$

Проведем проверку:

$$\begin{aligned} \Phi(0, 0) &= 0; \Phi(0, 1) = 1; \\ \Phi(0, 2) &= 1; \Phi(1, 0) = 1; \\ \Phi(1, 1) &= 2; \Phi(1, 2) = 0; \end{aligned}$$

$$\Phi(2, 0) = 2; \Phi(2, 1) = 1;$$

$$\Phi(2, 2) = 1,$$

что подтверждает правильность вычисленной АНФ.

Отметим, что исследование особенностей структуры найденной матрицы преобразования, а также возможностей её обобщения для другого количества переменных 3-функций является важной задачей, которая все еще ожидает своего решения.

### 1 Тройчные бент-последовательности

Основываясь на понятии алгебраической нормальной формы 3-функции, можем теперь определить 3-аффинный код по аналогии с двоичным аффинным кодом.

**Определение 1.1.** Аффинной называется  $q$ -функция аналитического вида

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, \dots, x_{k-1}) &= \\ &= a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_{k-1}x_{k-1} + b \pmod{q} = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i x_i + b \pmod{q}, \end{aligned}$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, b \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ ;  $x_i$  может принимать значение  $0, 1, \dots, q-1$ .

Единственным отличием общего аналитического вида аффинных функций от линейных является наличие свободного члена  $b$ , при этом если  $b = 0$ , то функция является линейной. Множество всех аффинных функций от  $k$  переменных обозначим  $A_k$ .

Например, для случая  $k = 2$  могут быть выписаны все аффинные функции

$$A_3 = \left\{ \begin{array}{lll} 00000000 & 11111111 & 22222222 \\ 012012012 & 120120120 & 201201201 \\ 021021021 & 102102102 & 210210210 \\ 000111222 & 111222000 & 222000111 \\ 012120201 & 120201012 & 201012120 \\ 021102210 & 102210021 & 210021102 \\ 000222111 & 111000222 & 222111000 \\ 012201120 & 120012201 & 201120012 \\ 021210102 & 102021210 & 210102021 \end{array} \right\}.$$

По аналогии с двоичным случаем, на основе линейной части аффинного кода  $A_3$  и отображения

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow e^{j0^\circ}, \\ 1 &\rightarrow e^{j120^\circ}, \\ 2 &\rightarrow e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ}, \end{aligned}$$

где  $j = \sqrt{-1}$ , построим ортогональную матрицу, каждая строка которой представляет собой функцию Виленкина – Крестенсона, обобщение матрицы Адамара на трехзначный случай:

$$V = \begin{bmatrix} e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} \\ e^{j0^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j240^\circ} \\ e^{j0^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j120^\circ} \\ e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j240^\circ} \\ e^{j0^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j120^\circ} \\ e^{j0^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j0^\circ} \\ e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} \\ e^{j0^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j0^\circ} \\ e^{j0^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j240^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j120^\circ} & e^{j0^\circ} & e^{j240^\circ} \end{bmatrix}.$$

**Определение 1.2** [11]. Тройчная последовательность  $H = [h_0, h_1, \dots, h_i, \dots, h_{N-1}]$  длины  $N = 3^{2m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , где коэффициенты  $h_i \in \{e^{j0^\circ}, e^{j120^\circ}, e^{j240^\circ}\}$ , называется 3-бент-последовательностью, если она имеет равномерный по модулю спектр Виленкина – Крестенсона, который представим в матричной форме

$$\Omega_B(\omega) = |H \cdot V_N| = const, \quad \omega = \overline{0, N-1}, \quad (1.1)$$

где  $V_N$  – матрица Виленкина – Крестенсона порядка  $N$ .

Результаты вычислительных экспериментов таковы: существует 486 оптимальных последовательностей длины  $N = 3^2 = 9$ , удовлетворяющих свойству (1.1), являющихся 3-бент-последовательностями относительно преобразования Виленкина – Крестенсона [12].

Подробный анализ полного класса данных оптимальных последовательностей позволил провести их классификацию: они могут быть разделены на шесть подмножеств

$$\begin{matrix} K_0 & K_1 & K_2 & (J_i) \\ 1 & 4 & 4 & (54); \\ 2 & 2 & 5 & (108); \\ 2 & 5 & 2 & (108); \\ 4 & 1 & 4 & (54); \\ 4 & 4 & 1 & (54); \\ 5 & 2 & 2 & (108), \end{matrix} \quad (1.2)$$

где  $K_0, K_1, K_2$  – количество 0, 1, 2 в тройчной последовательности соответственно, с учетом однозначного отображения

$$0 \rightarrow e^{j0^\circ}, 1 \rightarrow e^{j120^\circ}, 2 \rightarrow e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ};$$

$J_i$  – количество последовательностей с заданной структурой.

**Определение 1.3.** Набор из трех 3-бент-последовательностей называется тройственным набором, если конкатенация его таблиц истинности является сбалансированной, т. е.

$$K^0 = K^1 = K^2.$$

Анализ (1.2) приводит к выводу, что тройственный набор 3-бент-последовательностей может быть составлен двумя различными способами, на основе множества структур

$$\{\{1, 4, 4\}, \{4, 1, 4\}, \{4, 4, 1\}\}$$

и  $\{\{5, 2, 2\}, \{2, 5, 2\}, \{2, 2, 5\}\}$ .

## 2 ГПКП на основе тройственных наборов бент-последовательностей

Предлагается схема ГПКП, основанная на свойствах полного класса 3-бент-последовательностей, разделенного на 2 типа тройственных наборов (рисунок 2.1).

Схема ГПКП на основе тройственных наборов 3-бент-последовательностей, представленная на рисунке 2.1, состоит из двух тройчных ЗРСЛОС, которые генерируют входные значения для 3-бент-последовательности, а также одного ЗРСЛОС, который производит выбор 3-бент-последовательности внутри тройственного набора. Схема содержит один двоичный РСЛОС, который на каждом такте производит выбор одного из двух возможных тройственных наборов (1.2).

Структуры соответствующих РСЛОС полностью определяются неприводимыми первообразными полиномами. Для двоичного случая неприводимые первообразные полиномы можно найти в [13], тогда как полные множества неприводимых  $W$  и первообразных неприводимых  $V$  полиномов степеней  $\deg(p(x)) = 2, 3, \dots, 7$  приведены в таблице 2.1, жирным шрифтом выделены первообразные полиномы.

Рассмотрим более подробно принципы работы разработанного ГПКП поясняя их конкретным примером. Пусть заданы 2 тройственных набора 3-бент-последовательностей

$$\begin{bmatrix} \text{Б}\Phi_1 = [011122122]; \\ \text{Б}\Phi_2 = [001022202]; \\ \text{Б}\Phi_3 = [001001112]; \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \text{Б}\Phi_4 = [002122212]; \\ \text{Б}\Phi_5 = [001112112]; \\ \text{Б}\Phi_6 = [000012021], \end{bmatrix}$$



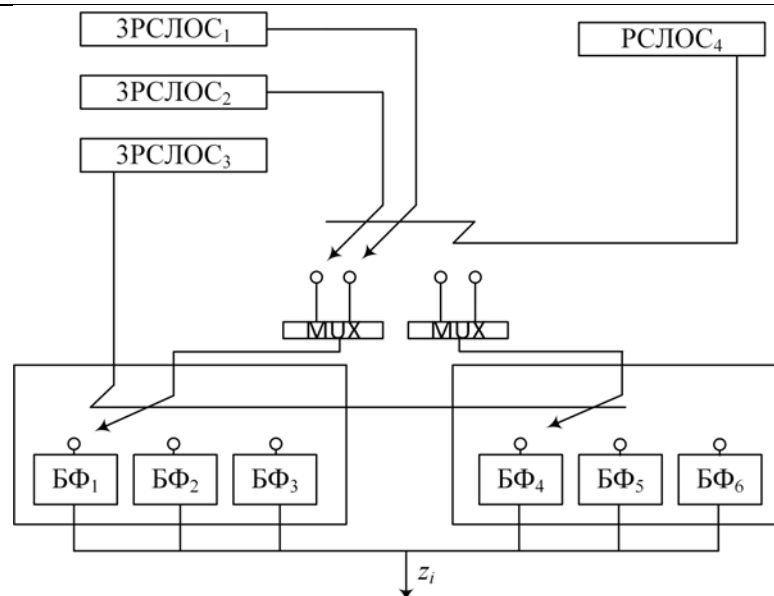


Рисунок 2.1 – ГПКП на основе тройственных наборов 3-бент-последовательностей

Таблица 2.1 – Неприводимые и первообразные полиномы в полях Галуа  $GF(3^k)$

Поле	$ W $	$ V $	$W, V$
$GF(9)$	3	2	10, 14, 17
$GF(27)$	8	4	34, 35, 38, 41, 43, 46, 49, 53
$GF(81)$	18	8	86, 89, 92, 94, 97, 101, 110, 115, 118, 121, 125, 134, 137, 139, 145, 149, 151, 158
$GF(243)$	48	22	250, 251, 257, 265, 274, 275, 281, 287, 289, 295, 307, 311, 314, 317, 319, 322, 326, 329, 331, 334, 337, 341, 355, 367, 373, 374, 379, 386, 389, 391, 397, 398, 406, 409, 413, 425, 428, 430, 437, 445, 446, 458, 461, 466, 469, 470, 478, 482
$GF(729)$	116	48	734, 737, 742, 745, 748, 761, 763, 766, 773, 781, 787, 791, 793, 797, 805, 829, 833, 836, 838, 841, 845, 854, 865, 869, 871, 878, 892, 901, 905, 908, 925, 929, 932, 934, 949, 956, 958, 962, 974, 977, 985, 1001, 1003, 1009, 1013, 1022, 1027, 1039, 1042, 1045, 1046, 1054, 1057, 1070, 1073, 1078, 1085, 1087, 1093, 1094, 1106, 1111, 1126, 1133, 1145, 1150, 1160, 1166, 1172, 1178, 1184, 1186, 1189, 1190, 1205, 1208, 1213, 1217, 1223, 1231, 1243, 1255, 1258, 1261, 1262, 1271, 1276, 1279, 1286, 1295, 1297, 1303, 1310, 1316, 1318, 1330, 1342, 1346, 1354, 1358, 1366, 1367, 1373, 1388, 1390, 1400, 1405, 1406, 1418, 1424, 1426, 1439, 1442, 1445, 1453, 1457
$GF(2187)$	312	156	2198, 2203, 2206, 2213, 2218, 2219, 2225, 2227, 2233, 2237, 2255, 2258, 2263, 2266, 2285, 2294, 2297, 2305, 2317, 2323, 2330, 2335, 2342, 2365, 2374, 2377, 2390, 2396, 2405, 2410, 2413, 2426, 2434, 2435, 2441, 2447, 2449, 2455, 2467, 2471, 2477, 2479, 2495, 2503, 2519, 2521, 2533, 2539, 2549, 2554, 2557, 2567, 2570, 2572, 2578, 2582, 2599, 2606, 2612, 2621, 2630, 2638, 2645, 2647, 2650, 2654, 2669, 2671, 2674, 2675, 2683, 2687, 2693, 2695, 2707, 2708, 2716, 2726, 2731, 2732, 2755, 2770, 2774, 2791, 2794, 2798, 2806, 2812, 2816, 2818, 2822, 2831, 2837, 2845, 2861, 2879, 2882, 2885, 2887, 2894, 2896, 2902, 2909, 2911, 2926, 2942, 2951, 2957, 2965, 2975, 2978, 2986, 2990, 2998, 3005, 3013, 3022, 3037, 3044, 3053, 3062, 3074, 3085, 3086, 3089, 3092, 3097, 3104, 3118, 3122, 3124, 3128, 3142, 3149, 3154, 3157, 3161, 3167, 3175, 3182, 3191, 3194, 3197, 3199, 3202, 3215, 3226, 3239, 3241, 3245, 3253, 3254, 3262, 3266, 3271, 3274, 3286, 3293, 3298, 3319, 3332, 3334, 3338, 3344, 3346, 3349, 3358, 3368, 3382, 3389, 3394, 3401, 3421, 3422, 3434, 3436, 3439, 3442, 3454, 3455, 3458, 3472, 3478, 3479, 3485, 3487, 3490, 3493, 3511, 3518, 3527, 3533, 3535, 3542, 3551, 3557, 3565, 3578, 3586, 3599, 3602, 3605, 3607, 3622, 3629, 3635, 3637, 3643, 3661, 3665, 3679, 3686, 3694, 3703, 3706, 3709, 3725, 3733, 3734, 3737, 3742, 3745, 3748, 3764, 3766, 3776, 3778, 3794, 3797, 3800, 3805, 3809, 3814, 3824, 3833, 3844, 3857, 3862, 3874, 3880, 3889, 3895, 3901, 3914, 3919, 3922, 3934, 3938, 3941, 3943, 3958, 3965, 3982, 3986, 3988, 3992, 3994, 3998, 4006, 4016, 4031, 4034, 4039, 4045, 4052, 4054, 4064, 4066, 4072, 4073, 4082, 4085, 4088, 4093, 4109, 4121, 4141, 4142, 4162, 4166, 4174, 4175, 4178, 4181, 4186, 4198, 4199, 4211, 4214, 4226, 4234, 4246, 4258, 4261, 4265, 4271, 4277, 4283, 4285, 4291, 4294, 4298, 4301, 4313, 4322, 4327, 4333, 4337, 4345, 4351, 4357, 4369

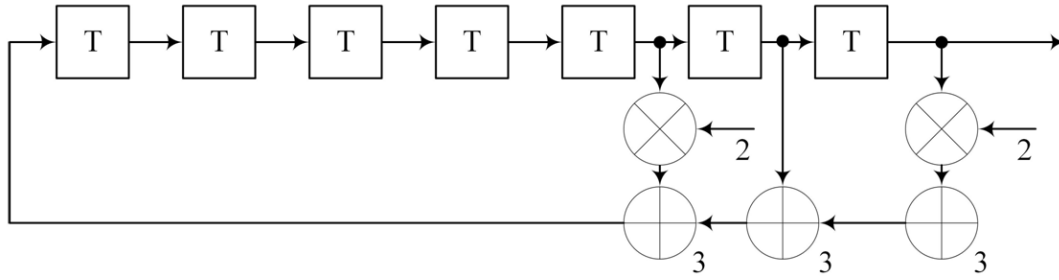


Рисунок 2.2 – ЗРСЛОС на основе первообразного полинома  $f_1(\rho) = \rho^7 + \rho^2 + 2\rho + 1$

а также выбраны первообразные полиномы (таблица 2.1), определяющие структуры соответствующих РСЛОС ( $f_{bin}$ ) и ЗРСЛОС ( $f_i$ )

$$\begin{cases} f_1(\rho) = 2203_{10} = \rho^7 + \rho^2 + 2\rho + 1; \\ f_2(\rho) = 734_{10} = \rho^6 + \rho + 2; \\ f_3(\rho) = 307_{10} = \rho^5 + 2\rho^3 + \rho^2 + 1; \\ f_{bin}(\rho) = \rho^{14} + 1, \end{cases}$$

и их исходные состояния

$$\beta_1 = \{1111111\}, \beta_2 = \{111111\}, \beta_3 = \{111111\}, \beta_4 = \{11111111111111\}. \quad (2.1)$$

На основе каждого полинома может быть построена схема РСЛОС, как это показано в [6]. Начальные условия РСЛОС представляют собой элемент ключевой информации. Например, схема ЗРСЛОС, основанная на полиноме

$$f_1(\rho) = \rho^7 + \rho^2 + 2\rho + 1,$$

приведена на рисунке 2.2.

Учитывая исходные состояния РСЛОС (2.1), генерируемые последовательности будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{11111112222212111200\dots\}; \\ \xi_2 &= \{11111100000100002100\dots\}; \\ \xi_3 &= \{11111220200200102222\dots\}; \\ \xi_4 &= \{11111111111111111000\dots\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим процесс генерации первого трита ключевой последовательности. Основываясь на рисунке 2.1 бит последовательности  $\xi_4$  определяет нам выбор тройственного набора, и поскольку он равен 1, то используется тройственный набор 1. Трит последовательности  $\xi_3$  определяет выбор 3-бент-последовательности внутри тройственного набора, и поскольку, в нашем случае, он также равен 1, выбирается 3-бент-последовательность БФ<sub>5</sub>. Триты последовательностей  $\xi_1$  и  $\xi_2$  являются аргументами 3-бент-функции или, соответственно, определяют конкретную координату таблицы истинности 3-бент-последовательности, которая подается на выход схемы. В нашем случае это  $11_3 = 4$  координата (нумерация начинается с 0) 3-бент-последовательности и поэтому  $\gamma = 1\dots$ . Повторяя

подобные расчеты, вычисляем последующие элементы результирующей ключевой последовательности  $\gamma = \{11111102022212112100\dots\}$ .

Результаты проведенного анализа стохастических характеристик [3] предложенного ГПКП для длины гаммы  $3^{12}$  бит представлены в таблице 2.2, где знак «+» означает, что данный критерий выполняется, а знак «-» – не выполняется.

Таблица 2.2 – Стохастические характеристики предложенного ГПКП

№ п/п	Критерии качества	Предложенный ГПКП
1	Сбалансированность	177402/177114/ 176925
2	Случайный внешний вид сигнала	+
3	Равномерное распределение гистограммы	+
4	Случайное распределение на плоскости	+
5	2-х граммное распределение	+
6	3-х граммное распределение	+
7	4-х граммное распределение	+
8	Монотонность	+
9	Линейная сложность	+
10	Максимальный боковой лепесток битовой АКФ	0,0092
11	Спектральный тест	+
12	Стопка книг [14]	+

Анализ данных таблицы 2.2 показывает, что разработанный ГПКП соответствует базовым стохастическим тестам, предложенным в [3], а также тесту «Стопка книг» [14].

Определим число уровней защиты [15] разработанного ГПКП для нашего примера. Начальное значение ЗРСЛОС<sub>1</sub> может быть выбрано  $3^7 - 1 = 2186$  способами, ЗРСЛОС<sub>2</sub> –  $3^6 - 1 = 728$  способами, ЗРСЛОС<sub>3</sub> –  $3^5 - 1 = 242$  способами, тогда как двоичного РСЛОС<sub>4</sub> –  $2^{14} - 1 = 16383$  способами. Шесть 3-бент-последовательностей из полного множества могут быть выбраны  $108^3 \cdot 54^3 \approx 1.07 \cdot 10^{13}$  способами. Таким образом,

число уровней защиты рассматриваемого в качестве примера ГПКП определяется как

$$\Psi = 1.07 \cdot 10^{13} \cdot 2186 \cdot 728 \cdot 242 \cdot 16383 \approx 6.75 \cdot 10^{25},$$

тогда как длина ключа равна  $|K| = \lceil \log_2 \Psi \rceil = 86$  бит или  $|K| = \lceil \log_3 \Psi \rceil = 55$  трит.

Число уровней защиты является легко масштабируемым за счет применения больших степеней полиномов для РСЛОС или больших длин 3-бент-последовательностей. Последнее, несомненно, требует детального изучения классов 3-бент-последовательностей больших длин, что может стать предметом дальнейших исследований.

### Заключение

Отметим основные результаты проведенных исследований:

1. Разработан троичный ГПКП на основе тройственных наборов 3-бент-последовательностей, обладающий высоким уровнем стохастического и криптографического качества, который может быть использован как в современных  $q$ -ичных телекоммуникационных системах, так и в криптографических приложениях. В частности, перспективным и более практичным, в сравнении с двоичным, является применение троичного варианта рассмотренных конструкций в JPEG и MPEG.

2. Найден полный класс 3-бент-последовательностей и проведена его классификация на тройственные наборы по критерию различных весовых структур.

3. Дальнейшее развитие получил метод нахождения АНФ логических функций, в рамках чего разработан алгоритм нахождения АНФ 3-функций, который может быть использован при решении многих прикладных задач.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонова, И.В. Криптографические свойства нелинейных булевых функций / И.В. Агафонова // Семинар по дискрет. гармон. анализу и геометр. моделированию. – СПб.: DNA & CAGD, 2007. – С. 1–24.

2. Мазурков, М.И. Генератор ключевых последовательностей на основе дуальных пар бент-функций / М.И. Мазурков, Н.А. Барабанов, А.В. Соколов. – Труды Одесского политехнического университета, 2013. – Вып. 3 (42). – С. 150–156.

3. Иванов, М.А. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей / М.А. Иванов, И.В. Чугунков. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. – 240 с.

4. Соколов, А.В. Быстродействующий генератор ключевых последовательностей на основе клеточных автоматов / А.В. Соколов. – Одесса: Труды ОНПУ, 2014. – № 1 (43). – С. 180–186.

5. Рябко, Б.Я. Основы современной криптографии и стеганографии / Б.Я. Рябко, А.Н. Фионов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2010. – 232 с.

6. Мазурков, М.И. Системы широкополосной радиосвязи / М.И. Мазурков // Одесса: Наука и Техника, 2010. – 340 с.

7. Токарева, Н.Н. Бент-функции: результаты и приложения. Обзор работ / Н.Н. Токарева // Прикладная дискретная математика. – Томск, 2009. – Сер. № 1 (3). – С. 15–37.

8. Мазурков, М.И. Регулярные правила построения полного класса бент-последовательностей длины 16 / М.И. Мазурков, А.В. Соколов // Труды ОНПУ. – 2013. – № 2 (41). – С. 231–237.

9. Meng Qing-shu. A novel algorithm enumerating bent functions / Meng Qing-shu, Yang min Cui jing-song // Discrete Mathematics. – 2008. – Vol. 308, Issue 23. – P. 5576–5584.

10. Амбросимов, А.С. Свойства бент-функций  $q$ -значной логики над конечными полями / А.С. Амбросимов // Дискретная математика. – 1994. – Т. 6, вып. 3. – С. 50–60.

11. Kumar, P.V. Generalized bent functions and their properties / P.V. Kumar, R.A. Scholtz, L.R. Welch // J. Combin. – Theory Ser A. – 1985. – № 40 (1). – P. 90–107.

12. Соколов, А.В. Построение троичных бент-последовательностей / А.В. Соколов, О.Н. Жданов, Н.А. Барабанов // Материалы XIX международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке», Харьков. – 2015. – Т. 3. – С.131–132.

13. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки / У. Питерсон, Э. Уэлдон. – М.: Мир, 1976. – 598 с.

14. Рябко, Б.Я. «Стопка книг» как новый статистический тест для случайных чисел / Б.Я. Рябко, А.И. Пестунов. – Проблемы передачи информации. – 2004. – № 40:1. – С. 73–78.

15. Мазурков, М.И. Трехуровневая криптографическая система блочного шифрования данных / М.И. Мазурков, В.Я. Чечельницкий, К. Некрасов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2010. – Т. 53, № 7. – С. 43–47.

Поступила в редакцию 15.12.15.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfimt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

## GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).