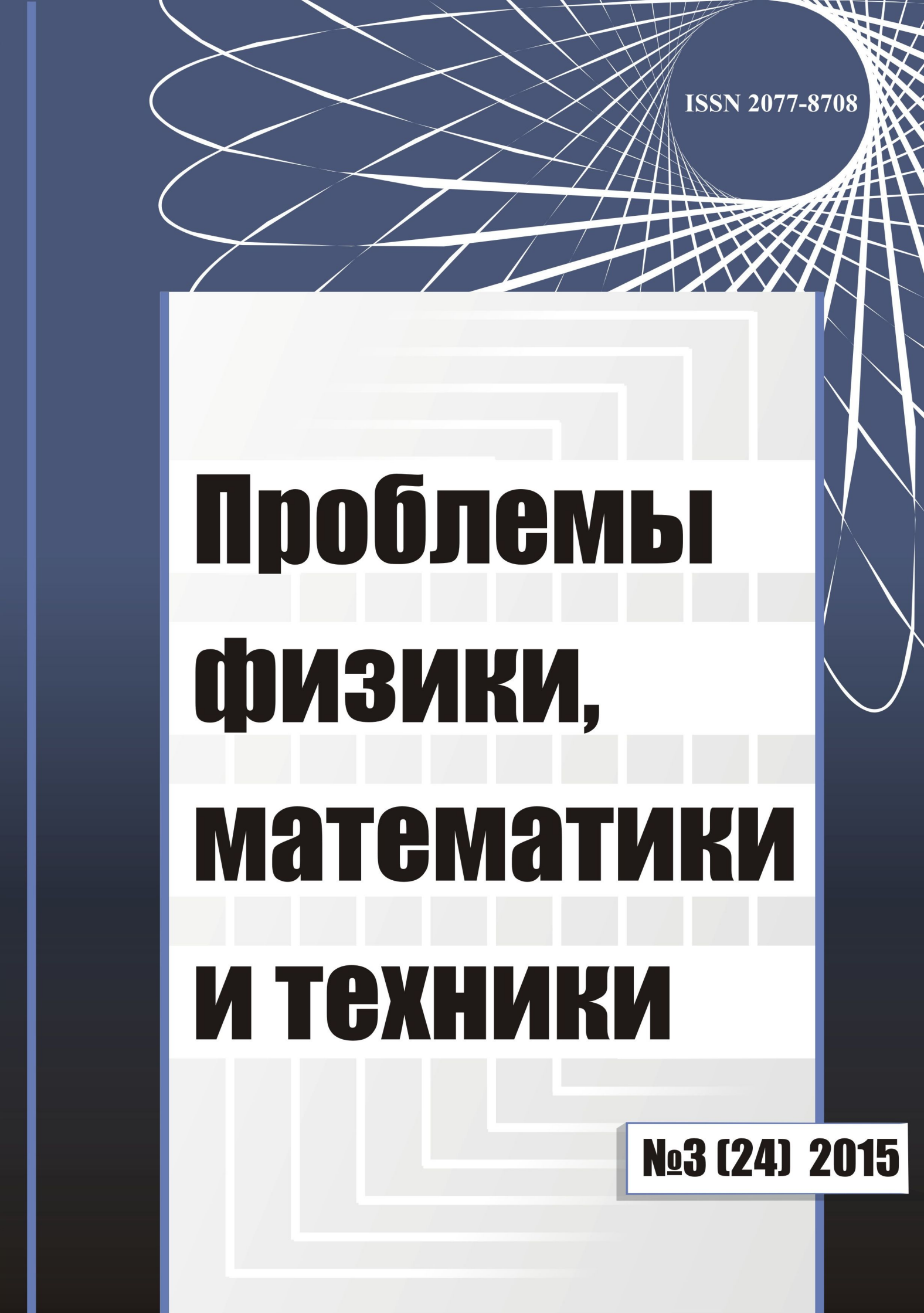




ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№3 (24) 2015

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (24) 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Гиргель С.С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью	7
Колядко Ж.В., Шепелевич В.В., Давыдовская В.В. Распространение сингулярных пучков в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле	10
Матук Е.В., Гайда Л.С., Гузатов Д.В. Движение металлической наночастицы вблизи поверхности пузырька воздуха в жидкости под действием силы светового давления	17
Овсиюк Е.М. Электромагнитное поле в формализме Майораны – Оппенгеймера во Вселенной анти де Ситтера	21
Руденков А.С. Влияние концентрации металла на фазовый состав, структуру и свойства углерод-металлических покрытий	26
Стаськов Н.И., Парашков С.О., Шилов А.В., Кречотень Н.А. Аналитическое решение обратной задачи спектрофотометрии для поглощающего слоя на поглощающей подложке с диэлектрическим слоем	33
Юревич Ю.В., Юревич В.А. Модуляция оптического излучения при отражении тонкой пленкой плотной резонансной среды	38

МАТЕМАТИКА

Белоконь Л.М. К вопросу о пересечениях максимальных θ -подгрупп конечных групп	46
Белокурский М.С. Задача Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы в одном случае ненулевого среднего периодического коэффициента	51
Бородич Р.В., Быков С.Н. Об операторном обобщении подгруппы Фраттини	55
Каморников С.Ф. Разрешимые ЕТ-функторы	59
Мироненко В.В. О периодических решениях дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью	63
Сазонова А.Т. О результатах исследования упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости	66
Скиба А.Н. О σ -свойствах конечных групп II	70
Старовойтов А.П., Кечко Е.П. О локализации нулей аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций	84

ИНФОРМАТИКА

Быховцев В.Е., Прокопенко Д.В., Цурганова Л.А. Расчет РИТ-свай по первому предельному состоянию	90
Жданов О.Н., Соколов А.В. Алгоритм построения оптимальных по критерию нулевой корреляции недровичных блоков замен	94
Маслович С.Ф., Горбач А.Б., Галушко В.Н., Дробов А.В. Web-приложение электрических расчетов	98

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):

- **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
- **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 03.09.15. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 10,9. Тираж 100 экз. Заказ № 501.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2015
© Проблемы физики, математики и техники, 2015
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2015

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 3 (24) 2015

CONTENTS

PHYSICS

Girgel S.S. Beams of Kummer without the Gaussian apodization with transferable terminating power	7
Kolyadko Zh.V., Shepelevich V.V., Davydovskaya V.V. Propagation of singular beams in a cubic optically active photorefractive crystal	10
Matuk E.V., Gaida L.S., Guzatov D.V. The movement of the metal nanoparticles near the surface of the air bubble in the liquid by the radiation pressure force	17
Ovsiyuk E.M. Electromagnetic field in the Majorana – Oppenheimer formalism in the anti de Sitter Universe	21
Rudenko A.S. Influence of metal concentration on the phase composition, structure and properties of carbon-metal coating	26
Staskov N.I., Parashkov S.O., Shylov A.V., Krekoten N.A. Analytical solution of the inverse problem of a spectrophotometer absorbing layer on an absorbing substrate with a dielectric layer	33
Yurevich Yu.V., Yurevich V.A. Modulation of optical radiation in case of thin film reflection of dense resonant medium	38

MATHEMATICS

Belokon L.M. On the problem of intersections of the maximal θ -subgroups of finite groups	46
Belokursky M.S. Erugin's problem on the existence of irregular solutions in one case of the linear system with nonzero mean of periodic coefficient	51
Borodich R.V., Bykov S.N. On operator generalization of Frattini subgroup	55
Kamornikov S.F. Solvable NT-functors	59
Mironenko V.V. On periodic solutions of differential equation with linear-fractional right-hand part	63
Sazonova A.T. On the results of the study of simplified systems in the problem of motion of four bodies in a plane	66
Skiba A.N. On σ -properties of finite groups II	70
Starovoitov A.P., Kechko E.P. On localization of the zeroes Hermite – Padé approximants to the exponential functions	84

INFORMATION SCIENCE

Bykhoutsev V.E., Prokopenko D.V., <u>Curganova L.A.</u> Calculation of piles-CIT on the first limiting condition	90
Zhdanov O.N., Sokolov A.V. Algorithm of construction of optimal according to criterion of zero correlation non-binary S -boxes	94
Maslovich S.F., Gorbach A.B., Halushko V.N., Drobov A.V. Web-application electrical calculations	98

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Data-bases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.42+537.86

ПУЧКИ КУММЕРА БЕЗ ГАУССОВОЙ АПОДИЗАЦИИ С ПЕРЕНОСИМОЙ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТЬЮ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

BEAMS OF KUMMER WITHOUT THE GAUSSIAN APODIZATION WITH TRANSFERABLE TERMINATING POWER

S.S. Girel

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Предложены новые решения параболического уравнения, описывающие параксиальные световые пучки. Такие пучки описываются функциями Куммера комплексного аргумента с двумя свободными параметрами без гауссиана. Установлены ограничения на эти параметры, при которых пучки Куммера переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми.

Ключевые слова: параксиальные пучки, пучки Куммера, квадратичная интегрируемость.

The new solutions of the parabolic equation featuring paraxial light beams are offered. Such beams are featured by Kummer functions of complex argument with two free parameters without a Gaussian. Restrictions on these parameters, at which beams of Kummer transfer terminating power and are physically realized, are discovered.

Keywords: paraxial beams, beams of Kummer, square integrability.

Введение

Многие решения волнового уравнения описывают волновые поля, которые переносят бесконечную мощность через поперечное сечение перпендикулярно оси z пучка. Следовательно, такие функции не являются квадратично интегрируемыми (КИ) и поэтому характеризуются ими волновые поля во всем пространстве являются физически нереализуемыми. Примеры: плоские волны, цилиндрические и сферические волны.

Обычно для параксиальных пучков используется аподизация соответствующей функции в форме гауссиана, чтобы функция, описывающая такой пучок, была КИ. Например, плоской волне ставится в соответствие гауссов пучок, волне Бесселя – пучок Бесселя-Гаусса.

В настоящей работе будет показано, что возможен новый тип параксиальных световых пучков (пучков Куммера), у которых гауссова аподизация отсутствует. Такие пучки описываются функциями Куммера, которые обладают квадратичной интегрируемостью при определенных ограничениях на их свободные параметры. Поэтому световые пучки Куммера физически реализуемы.

1 Пучки Куммера

Для монохроматических волн вида

$$f(r, t) = f \exp(kz - \omega t)$$

скалярное параболическое уравнение, решением которого является амплитуда f параксиального светового 2-D пучка, имеет вид [1]–[5]:

$$(\partial_{x,x}^2 + 2i\partial_z)f = 0. \quad (1.1)$$

Целесообразно далее перейти к безразмерным переменным

$$X = x/x_0, \quad Z = z/z_0. \quad (1.2)$$

Здесь $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OZ соответственно. Теперь параболическое уравнение (1.1) можно записать в безразмерном виде:

$$(\partial_{XX}^2 + 2i\partial_Z)f = 0. \quad (1.3)$$

Для получения искомых решений выполним нелинейную замену переменного X в (1.3):

$$X_1 = \sqrt{\frac{i}{Q}} \cdot X. \quad (1.4)$$

Вместо стандартного комплексного параметра пучка $q = z - q_0$, где z – расстояние от начала координат до точки, лежащей на оси пучка, в которой определяются характеристики волнового поля, введем комплексный безразмерный параметр пучка $Q = q/z_0$ и запишем, учитывая формулы (1.2):

$$Q = Z - Q_0, \text{ где } Q_0 = Q'_0 + Q''_0. \quad (1.5)$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$\partial_{X_1, X_1}^2 f + \frac{4i}{Q} X_1 \partial_{X_1} f + 4Q \partial_Z f = 0. \quad (1.6)$$

Разделяя переменные, получаем [6] решениями уравнения (1.1) без гауссовой аподизации функции f^o и f^e :

$$f \equiv f^o + f^e = \left[A \cdot X_1 \cdot M \left(\frac{1}{2}, -\frac{v}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2 \right) + B \cdot M \left(-\frac{v}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2 \right) \right] Q^{\frac{v}{2}}. \quad (1.7)$$

Постоянная разделения переменных v является, в общем случае, свободным комплексным параметром: $v = v' + v''$. Комплексный аргумент X_1 функций $f^o(X_1)$ и $f^e(X_1)$ зависит от поперечной координаты X и комплексного параметра пучка Q : $X_1 = \sqrt{\frac{i}{Q}} \cdot X$. Функция Куммера M является конфлюэнтной гипергеометрической функцией ${}_1F_1$ [7], A и B – некоторые произвольные постоянные. Индексы o и e помечают соответственно четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций f^e и f^o относительно изменения знака аргумента X_1 .

Пучки, описываемые функциями $f^o(X_1)$ и $f^e(X_1)$, будем называть пучками Куммера. Функции (1.7) зависят от двух произвольных комплексных параметров Q и v . Подчеркнем, что, в соответствии с (1.7), для произвольного набора комплексных параметров (Q_0, v) всегда существуют два независимых решения f^e и f^o – четное и нечетное относительно изменения знака переменной X .

Заметим, что трехмерные скалярные решения для пучков Куммера можно построить как произведения 2-D решений типа (1.7):

$$f(X, Y, Z) = f(X, Q_X, v_X) \cdot f(Y, Q_Y, v_Y). \quad (1.8)$$

При этом возможна любая комбинация четностей. Поэтому, в общем случае, амплитуда 3-D скалярного пучка Куммера зависит от трех координат и четырех свободных комплексных параметров.

2 Условия физической реализуемости пучков Куммера

Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности [1], [2]. Амплитуда такого пучка должна быть ограниченной при всех X . Более того, при $X \rightarrow \pm\infty$ амплитуда f должна стремиться к нулю и быть квадратично интегрируемой, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dX_1$ должен сходиться.

Чтобы гауссов пучок был физически реализуем, как отмечалось выше, достаточно одного простого ограничения: $Q_0'' > 0$.

Проведем анализ условий КИ для пучков Куммера. Для этого исследуем асимптотический предел функций f при $f \rightarrow \infty$. Асимптотическое

поведение конфлюэнтной гипергеометрической функции ${}_1F_1(a, b, \Phi)$ при $|\Phi| \rightarrow \infty$ описывается формулой [7]

$${}_1F_1(a, b, \Phi) = \frac{\exp(-i\pi a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \Phi^{-a} + \frac{\exp(\Phi) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a)} \Phi^{a-b}, \quad (2.1)$$

где Γ – гамма-функция и $a \neq 0, -1, -3, \dots$. Учитывая (2.1) применительно к (1.7), получим условия КИ для пучков, соответствующие различным частным ситуациям, рассмотренным ниже.

Можно убедиться, что условия физической реализуемости, т. е. КИ для четных и нечетных мод Куммера одинаковы, поэтому далее индексы o и e при f опускаем. Можно показать также, что необходимое условие КИ пучков Куммера – $Q_0'' > 0$. Дальнейшие дополнительные ограничения зависят только от вещественной части v' комплексного параметра $v = v' + v''$.

Если $v' < -\frac{1}{2}$, то пучок является КИ.

Если $v' \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, то $|f| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$,

но пучок – не КИ.

Если $v' = 0$, то $|f| \rightarrow \text{const} \neq 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ и пучок – не КИ.

Если $v' > 0$, то $|f| \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ и пучок – не КИ.

Для 3-D пучков Куммера условия КИ в плоскостях XZ и YZ аналогичны.

Принципиальным моментом, отличающим пучки Куммера от обычных пучков, является отсутствие гауссовой аподизации для обеспечения переносимой конечной мощности. Во всех случаях мнимая часть v'' комплексного параметра $v = v' + v''$ не влияет на КИ. Все найденные выше условия КИ для функций, используемых при описании пучков Куммера, подтверждаются также при графическом моделировании их свойств.

Существенно, что пучки Куммера являются структурно устойчивыми, поскольку условия КИ, как можно проверить, не зависят от их децентрировки.

Как известно, пучки Гаусса и стандартные пучки Эрмита – Гаусса пучки распространяются в свободном пространстве, сохраняя свою форму. Остальные пучки Куммера – Гаусса [4]–[6], [8] в процессе распространения изменяют свой поперечный профиль. Поэтому их можно назвать пучками с изменяющейся геометрией профиля. К их числу относятся и пучки Куммера.

Заключение

В данной работе представлены новые решения скалярного параболического уравнения для

параксиальных 2-D световых пучков. Такие пучки описываются функциями Куммера комплексного аргумента с двумя свободными параметрами без гауссовой аподизации.

Установлено, что каждому набору двух свободных комплексных параметров (Q_0, ν) всегда соответствуют два типа световых пучков – описываемых четными (f^e) и нечетными (f^o) функциями аргумента X . Фазовая и амплитудная поверхности пучков даже при распространении в свободном пространстве непрерывно трансформируются. Поэтому пучки Куммера являются пучками с изменяющейся геометрией.

Найдены ограничения на параметры, при соблюдении которых полученные решения соответствуют параксиальным пучкам с конечной энергией, то есть физически реализуемым. При этом не требуется гауссовой аподизации функций Куммера. Установлено также, что условия физической реализуемости для пучков Куммера, описываемых четными и нечетными функциями, одинаковы.

Установлено также, что пучки Куммера являются структурно устойчивыми, поскольку условия КИ не зависят от их децентрировки.

Отмечено, что выражения, полученные для описания 2-D пучков Куммера, легко обобщаются в формулы, соответствующие 3-D пучкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М.: Наука, 1990. – 264 с.
2. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 142 с.
3. *Гиргель, С.С.* Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
4. *Гиргель, С.С.* Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19–23.
5. *Bandres, M.A.* Cartesian beams / M.A. Bandres and J. C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.
6. *Гиргель, С.С.* Пучки Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Материалы научного семинара по оптике и теоретической физике, посвященный 70-летию со дня рождения А.Н. Сердюкова. – Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – С. 8–12.
7. *Флюгге, З.* Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.
8. *Гиргель, С.С.* Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера – Гаусса / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 19–23.

Поступила в редакцию 08.06.15.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ В КУБИЧЕСКОМ ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОМ ФОТОРЕФРАКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ

Ж.В. Колядко, В.В. Шепелевич, В.В. Давыдовская

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

PROPAGATION OF SINGULAR BEAMS IN A CUBIC OPTICALLY ACTIVE PHOTOREFRACTIVE CRYSTAL

Zh.V. Kolyadko, V.V. Shepelevich, V.V. Davydovskaya

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus

Исследованы особенности распространения сингулярных пучков с различными знаками топологического заряда в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле среза $(\bar{1}\bar{1}0)$, к которому приложено внешнее электрическое поле. Анализируется зависимость угла поворота сингулярного пучка от величины внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, и знака единичного топологического заряда пучка. Показано, каким образом оптическая активность влияет на распространение сингулярного пучка в кристалле.

Ключевые слова: сингулярный пучок, фоторефрактивный кристалл, оптическая активность.

The features of the propagation of singular beams with various signs of the topological charge in a cubic optically active photorefractive crystal of $(\bar{1}\bar{1}0)$ cut, to which an external electric field is applied, are investigated. The dependence of the angle of rotation of the singular beam on value of external electric field applied to the crystal and sign of unit topological charge of the beam is analyzed. It is shown how the optical activity affects the distribution of singular beam in the crystal.

Keywords: singular beam, photorefractive crystal, optical activity.

Введение

Впервые фазовые сингулярности (дислокации волнового фронта) были описаны в 1974 г. Дж.Ф. Наем и М. Берри в работе [1], где показано, что волновые импульсы, отраженные от шероховатой поверхности, содержат дефекты. Согласно этой работе существуют три типа дислокаций волнового фронта: винтовая дислокация (вихревая дислокация со спиральной фазой), краевая дислокация со сдвигом фазы на π и смешанная винтово-краевая дислокация. Пучки с винтовой фазовой дислокацией, наложенной на светлый фоновый пучок, называют оптическими вихрями («optical vortices»), вихревыми («vortex») или сингулярными («singular») пучками [2]–[4].

Сингулярные пучки представляют собой распространяющееся световое поле, в поперечном сечении которого имеется нуль интенсивности, вокруг которого фаза этого пучка циркулирует, изменяясь при распространении от 0 до 2π . Описанная циркуляция фазы приводит к винтовой структуре волнового фронта. Знак целого числа m (положительный или отрицательный) определяет направление вращения (правое или левое [4] соответственно) винтовой фазовой поверхности.

Так как волновой фронт имеет винтовую форму, то вектор Пойтинга, перпендикулярный поверхности волнового фронта, в каждой его точке имеет ненулевую тангенциальную компоненту, пропорциональную интенсивности пучка.

Происходит «завихрение» энергетического потока [1], [2], [4]. Следствием присутствия потока энергии, обволакивающего ось, направленную в сторону движения сингулярного пучка, является существование орбитального углового момента [3] в пучке.

На сегодняшний день существует много научных работ (см., например [5]), посвященных изучению спонтанного рождения и уничтожения оптических вихрей в лазерных резонаторах, причём физические параметры, связанные с вихрями, которые появляются спонтанно, обычно не контролируются. Наиболее известные способы создания оптических вихрей, физическими параметрами которых можно управлять, заключаются в использовании спиральной фазовой пластинки [6]–[8], винтового зеркала [9], дифракционного оптического элемента, генерированного компьютерной голограммой [10].

Благодаря особым свойствам оптических вихрей известны различные их приложения для лазерных технологий, медицины, микробиологии, метрологии, астрономии и др. Так, например, оптические вихри используют для изготовления оптических «пинцетов», которые применяются для захвата частиц [11], [12]. В астрономии оптические вихри используют для увеличения контрастности астрономических наблюдений в коронографах, которые применяются для поиска внесолнечных планет [13]. Использование сингулярного пучка в сдвиговом интерферометре позволяет определять малые углы поворота

светоделительного элемента [14]. Среди применений оптического вихря можно отметить его использование в оптическом вихревом когерентном фильтре [15].

Одним из наиболее важных приложений оптических вихревых солитонов является их использование для создания перестраиваемых волноводов [16], [17], которые можно применять в оптическом переключении. Впервые оптические вихревые солитоны экспериментально наблюдались в дефокусирующей керровской нелинейной среде с использованием квазивинтовой фазовой маски [18]. Условия формирования оптического вихревого солитона и использования его как волновода в фоторефрактивных кристаллах SBN и LiNbO₃ изучены в работах [19] и [20] соответственно.

Солитоноподобное распространение сингулярных оптических пучков в кубических фоторефрактивных кристаллах (см., например, [21]) исследовано сравнительно мало. Недостаток информации об особенностях распространения таких пучков в кубических фоторефрактивных кристаллах ограничивает эффективность их использования в различных оптических элементах управления оптическим излучением. В частности, не решена задача оптимизации условий квазисолитонного распространения сингулярных пучков с различным топологическим зарядом в этих кристаллах.

Целью настоящей работы является дальнейшее изучение особенностей распространения сингулярных оптических пучков (оптических вихрей) с различными топологическими зарядами в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле класса симметрии 23. При описании исследования и результатов, полученных в ходе численного эксперимента, будет использоваться только термин «сингулярный пучок», представляющий собой фазовую дислокацию, «насаженную» на фоновый гауссов пучок, который на входе в кристалл линейно поляризован вдоль оси x и имеет радиус перетяжки r_0 .

1 Теоретическая модель

Для исследования распространения сингулярного пучка в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле будем использовать систему скалярных дифференциальных уравнений в частных производных (см. также [22]), полученную в параксиальном приближении на базе уравнений Максвелла, основных уравнений фоторефрактивного эффекта [23] и ковариантных выражений для электрооптического тензора [24]:

$$i \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_0^3}{2} \left[r_{41} \left(\left(E_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (\mu_1 A_x + \mu_2 A_y) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial y} (\mu_2 A_x + \mu_3 A_y) \right) \Big] - i \rho A_y = 0,$$

$$i \frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_0^3}{2} \left[r_{41} \left(\left(E_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (\mu_2 A_x + \mu_3 A_y) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial y} (\mu_3 A_x + \mu_4 A_y) \right) \Big] + i \rho A_x = 0,$$

где r_{41} – электрооптический коэффициент, k_0 – длина волнового вектора в вакууме, n_0 – невозмущенный показатель преломления кристалла,

$$\mu_1 = 3 \sin \theta \cos^2 \theta,$$

$$\mu_2 = \cos \theta (1 - 3 \sin^2 \theta),$$

$$\mu_3 = \sin \theta (1 - 3 \cos^2 \theta),$$

$$\mu_4 = 3 \cos \theta \sin^2 \theta,$$

θ – ориентационный угол, отсчитываемый по часовой стрелке от направления $[1\bar{1}0]$ к направлению оси x рабочей системы координат, вдоль которой приложено внешнее электрическое поле с напряженностью E_0 , ρ – удельное вращение плоскости поляризации в кристалле, A_x и A_y – x - и y -составляющие комплексного вектора $\vec{A}$, характеризующего медленно изменяющуюся вдоль направления z векторную амплитуду напряженности электрического поля светового пучка.

Функция $\varphi(x, y)$ внутри кристалла определяется уравнением:

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \ln(1 + I) \cdot \nabla \varphi = E_0 \frac{\partial}{\partial x} \ln(1 + I),$$

$$\vec{E}_{sc} = -\nabla \varphi + \vec{E}_0,$$

где $I = (n_0 / 2\eta_0)(|A_x|^2 + |A_y|^2) / I_d$ – относительная интенсивность светового пучка, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$, μ_0 – магнитная постоянная, ϵ_0 – диэлектрическая постоянная, I_d – темновая интенсивность (в общем случае она включает также интенсивность подсветки), $\vec{E}_{sc}$ – вектор напряженности электрического поля пространственного заряда, создаваемого световым пучком, φ – переопределенный электрический потенциал, связанный с потенциалом поля пространственного заряда ϕ соотношением [22] $\varphi = \phi + E_0 x$.

x -составляющую комплексного вектора $\vec{A}$ сингулярного пучка можно представить в виде (см., например, [4], [20])

$$A_x = (r / r_0)^{|m|} \cdot \exp(-r^2 / 2r_0^2 + im\alpha),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, x и y – координаты в поперечной плоскости пучка, $\alpha = \arctg(y / x)$ – азимутальная координата, m – топологический заряд сингулярного пучка.

Пусть сингулярный пучок падает перпендикулярно на фоторефрактивный оптически активный кристалл среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ толщиной $d = 1$ см. Для исследования особенностей распространения сингулярных пучков с длиной волны $\lambda = 0.6328$ мкм и радиусом перетяжки $r_0 = 25$ мкм используются параметры, близкие к электрооптическим параметрам кристалла $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$: $n_0 = 2.54$, $r_{41} = 5 \cdot 10^{-12}$ м/В, $\rho = 22$ град/мм.

На рисунке 1.1 (а) показано поперечное сечение сингулярного пучка на входе в кристалл. Если смотреть в направлении, параллельном оси распространения, сингулярный пучок выглядит как темная область в центре яркого концентрического кольца света [10]. В данной работе под внутренним и внешним диаметрами сингулярного пучка будем понимать удвоенные внутренний и внешний радиусы светлого кольца, измеренные на уровне световой интенсивности, уменьшенной в e раз относительно её максимального значения. Внутренний ($x_{\text{вх1}}$) и внешний ($x_{\text{вх2}}$) диаметры сингулярного пучка на входе в кристалл равны 14.2 мкм и 34.8 мкм.

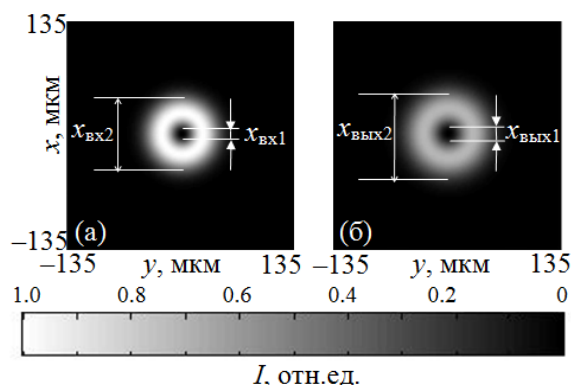


Рисунок 1.1 – Распределение относительной интенсивности ($I_{\text{отн.ед.}} = I / I_{\text{max}}$) сингулярного пучка на входе (а) и выходе (б) из кристалла в отсутствие нелинейности

На рисунке 1.1 (б) показано поперечное сечение сингулярного пучка на выходе из кристалла в отсутствие нелинейности. Видно, что внутренний и внешний диаметры сингулярного пучка увеличиваются наряду с уменьшением его относительной интенсивности. Внутренний ($x_{\text{вых1}}$) и внешний ($x_{\text{вых2}}$) диаметры сингулярного пучка при $E_0 = 0$ равны соответственно 16.4 мкм и 41.1 мкм.

2 Численный эксперимент

Исследуем влияние внешнего электрического поля, приложенного к рассматриваемому кристаллу класса 23, и оптической активности кристалла на распространение сингулярного пучка с топологическими зарядами $m = 1$ и $m = -1$. Рассмотрим случай, когда внешнее электрическое поле параллельно кристаллографическому направлению $[1\bar{1}\bar{1}]$. В этом случае $\theta = 35.3^\circ$.

Численные расчеты показывают (рисунок 2.1, первый и второй столбец), что для сингулярного пучка с топологическим зарядом $m = 1$ при изменении E_0 от -0.5 кВ/см до -4.0 кВ/см происходит сужение темной области сингулярного пучка в направлении, перпендикулярном направлению большой оси деформированного кольца. Изначально круговой симметричный пучок с темным ядром вытягивается и принимает форму, напоминающую эллипс. При этом в ранее однородном светлом кольце в процессе его деформирования наблюдается формирование двух областей с повышенной световой интенсивностью.

Под квазисолитонным распространением сингулярного пучка будем понимать такое его распространение в кристалле, при котором на выходе из кристалла наименьший диаметр x_0 деформированного темного кольца (малая ось эллипса [25]) остаётся таким же, как и при входе, то есть $x_0 = x_{\text{вх1}}$.

В соответствии с этим определением квазисолитонный режим распространения сингулярного пучка с топологическим зарядом $m = 1$ с учетом оптической активности достигается при $E_0 \approx -2.0$ кВ/см, а при «выключении» оптической активности – при $E_0 \approx -2.5$ кВ/см.

Симметричная форма сингулярного пучка разрушается при его распространении в кристалле под действием поперечной анизотропии, которая появляется под влиянием внешнего электрического поля, частично экранированного световым пучком. Относительно разных поперечных направлений пучок находится в различных условиях распространения. В частности, в направлениях, близких к осям y и x соответственно, пучок частично фокусируется и дефокусируется. Анизотропия нелинейности уравнивает в отдельных поперечных направлениях естественную расходимость сингулярного пучка, ориентируя его под небольшим углом к оси x .

Описанное поведение сингулярного пучка в некоторой степени напоминает поведение двумерного гауссова пучка в фоторефрактивном кристалле, когда при увеличении значения внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, первоначально круговой симметричный пучок становится эллиптическим [22], [26].

Результаты численного моделирования сингулярного пучка с топологическим зарядом $m = -1$ при изменении E_0 от -0.5 кВ/см до -4.0 кВ/см с учетом и без учета оптической активности показаны на рисунке 2.1, третий и четвертый столбец соответственно. В этом случае квазисолитонный режим распространения сингулярного пучка с учетом оптической активности достигается при $E_0 \approx -3.0$ кВ/см, то есть при большем значении внешнего электрического поля, чем для сингулярного пучка с $m = 1$, а при «выключении» оптической активности – при $E_0 \approx -2.5$ кВ/см, то есть приблизительно при таком же поле, как и для сингулярного пучка с $m = 1$.

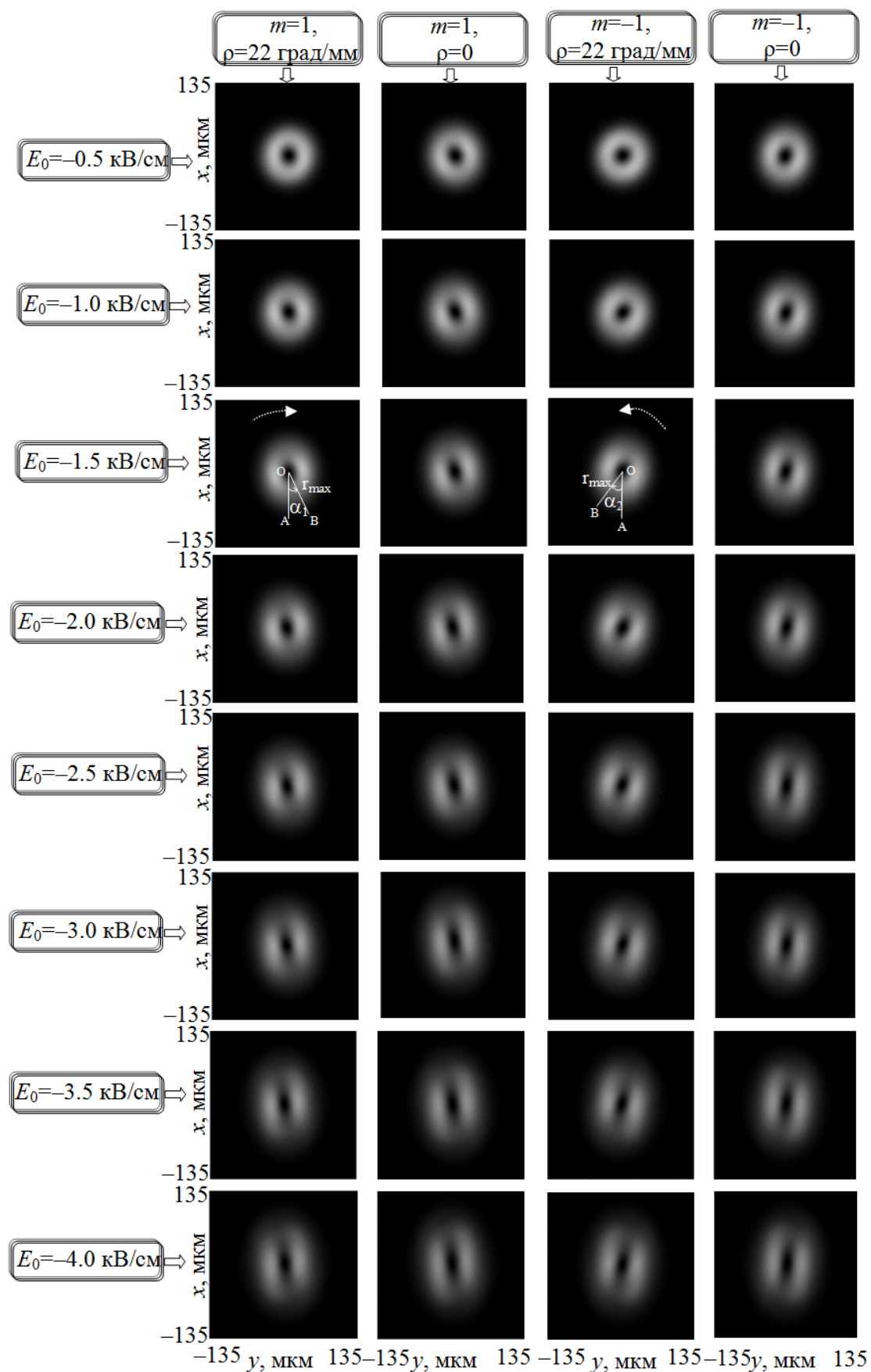


Рисунок 2.1 – Распределение относительной интенсивности сингулярного пучка на выходе из фоторефрактивного кристалла при $\theta = 35.3^\circ$

Введем угол поворота сингулярного пучка α , под которым будем понимать угол между вертикалью, направленной вниз (ОА), и большей осью эллиптического распределения интенсивности ($OB = r_{\max}$) пучка. Углы поворота α , направленные против часовой стрелки, считаются положительными, а углы, направленные по часовой стрелке – отрицательными. Так на рисунке 2.1 через $\alpha_1 \approx 20^\circ$ и $\alpha_2 \approx -27.5^\circ$ (первый и третий столбец, третий ряд) обозначены углы между ОА и $r_{\max}$ сингулярного пучка с топологическим зарядом $m = 1$ и $m = -1$ соответственно.

Как видно из рисунка 2.1 при положительном знаке топологического заряда при постепенном увеличении модуля внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, угол поворота α уменьшается. При этом вращение сингулярного пучка происходит по часовой стрелке (рисунк 2.1, первый столбец, третий ряд, пунктирная стрелка). При отрицательном знаке топологического заряда при постепенном увеличении модуля внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, угол поворота сингулярного пучка α также по модулю уменьшается, однако поворот пучка происходит уже против часовой стрелки (рисунк 2.1, третий столбец, третий ряд, пунктирная стрелка).

Для большей наглядности на рисунке 2.2 показаны зависимости угла поворота сингулярного пучка α с топологическим зарядом $|m| = 1$, полученные с учетом и без учета оптической активности, при различных значениях внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу. При численных экспериментах, которые были выполнены для значений $E_0 = -0.1, -0.5, -1, -1.5, -2, -2.5, -3, -3.5, -4$ кВ/см, получены значения углов α , обозначенные на рисунке 2.2 следующими знаками серого цвета: круги – $m = 1$, $\rho = 22$ град/мм, квадраты – $m = 1$, $\rho = 0$, треугольники – $m = -1$, $\rho = 22$ град/мм, ромбы – $m = -1$, $\rho = 0$. Кривые на рисунке 2.2 были получены в результате интерполяции множества точек, полученных в результате численного эксперимента.

Из рисунка 2.2 видно, что максимальный модуль угла поворота сингулярного пучка при «выключенной» оптической активности наблюдаются при $E_0 = -0.1$ кВ/см, а при увеличении модуля внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, от $|E_0| = 0.1$ кВ/см до $|E_0| = 4.0$ кВ/см модуль угла α постепенно уменьшается. Из анализа рисунка также следует, что «выключение» оптической активности приводит к практически зеркальному расположению кривых 2 и 4 относительно оси E_0 , так как модули значений углов для сингулярного пучка с $m = 1$ (кривая 2 на рисунке 2.2) и $m = -1$ (кривая 4 на рисунке 2.2) почти совпадают. Таким образом, в такой ситуации можно говорить о зеркальном отображении распространения сингулярного пучка с одинако-

выми по значению, но противоположными по знаку топологическими зарядами, что также характерно при распространении оптического вихря в фоторефрактивном кристалле SBN [20], который не обладает оптической активностью.

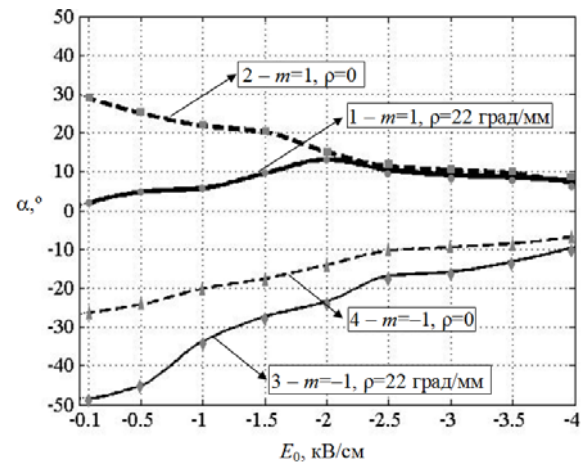


Рисунок 2.2 – Зависимость угла поворота сингулярного пучка α с топологическим зарядом $|m| = 1$ с учетом и без учета оптической активности при различных значениях внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу

При «выключении» оптической активности при $E_0 > -2.4$ кВ/см угол поворота α для сингулярного пучка с $m = 1$ близок к углу поворота, который наблюдается при распространении сингулярного пучка с $m = 1$ с учетом оптической активности, кривые 1 и 2 асимптотически приближаются к значению $\alpha \approx 8^\circ$.

Из рисунка 2.1 трудно определить характер изменения диаметров деформированного темного кольца сингулярного пучка. Поэтому ниже для наглядности построена зависимость эллиптичности k темного деформированного кольца сингулярного пучка от величины внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу. В численных расчетах под эллиптичностью k понималось отношение наименьшего диаметра темного деформированного кольца сингулярного пучка к наибольшему.

Как видно из рисунка 2.3 при увеличении внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, эллиптичность возрастает для всех случаев распространения сингулярного пучка: кривые 1 ($m = 1$) и 3 ($m = -1$) – с учетом и кривые 2 ($m = 1$) и 4 ($m = -1$) – без учета оптической активности. «Волнообразный» характер кривых зависимостей k от E_0 , в частности кривых 1 и 3, свидетельствует о разной скорости изменения k в различных диапазонах значений электрического поля.

При $E_0 \approx -0.45$ кВ/см для сингулярных пучков с $m = 1$ и $m = -1$ эллиптичности, полученные с учетом и без учета оптической активности приблизительно совпадают (точка А на рисунке 2.3 соответственно). При $E_0 \approx -1.2$ кВ/см,

при $E_0 \approx -1.8$ кВ/см и при $E_0 \approx -3.8$ кВ/см для сингулярных пучков с $m = 1$ и $m = -1$ эллиптичности, полученные с учетом оптической активности, также практически совпадают (точки Б, В и Г на рисунке 2.3 соответственно).

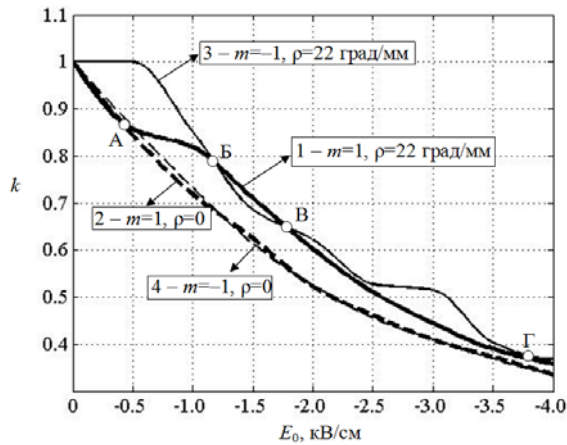


Рисунок 2.3 – Зависимость эллиптичности k сингулярного пучка от величины внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу

Эллиптичности k , полученные при «выключении» оптической активности в среднем принимают меньшие значения, чем эллиптичности k , полученные с учетом оптической активности. Из рисунка 2.3 (кривая 2 ($m = 1$) и кривая 4 ($m = -1$)) также видно, что эллиптичности k , которые были получены при численном моделировании при «выключении» оптической активности, принимают близкие значения.

Для объяснения зависимостей, показанных на рисунках 2.2 и 2.3, следует учитывать одновременное действие оптической активности кристалла и орбитального углового момента сингулярного пучка. Если смотреть в «хвост» распространения пучка (как и показано на рисунке 2.2), оптическая активность поворачивает пучок против часовой стрелки. При этом, как известно, удельное вращение плоскости поляризации приводит к периодическому изменению условий распространения светового пучка. Как было сказано ранее, положительный или отрицательный знак топологического заряда сингулярного пучка определяет направление вращения (против или по часовой стрелке соответственно) орбитально-углового момента в пучке.

При положительном знаке топологического заряда ($m = 1$) удельное вращение плоскости поляризации направлено против часовой стрелки, а угловой орбитальный момент — по часовой стрелке, что приводит к «подавлению» вращения сингулярного пучка. Поэтому при таких условиях распространения угол поворота изменяется незначительно (рисунок 2.2, кривая 1) и достигает максимального значения при $E_0 \approx -2.0$ кВ/см. Отметим, что при таком же значении E_0 наблюдается

квазисолитонный режим распространения сингулярного пучка с $m = 1$.

При отрицательном знаке топологического заряда ($m = -1$) вращение плоскости поляризации и угловой орбитальный момент направлены по часовой стрелке, что приводит к «усилению» поворота сингулярного пучка также по часовой стрелке. При таких условиях распространения модуль угла поворота α имеет наибольшие значения (рисунок 2.2, кривая 3).

При «выключении» оптической активности на распространение сингулярного пучка влияет только орбитальный угловой момент пучка, что приводит к практически одинаковым положениям отдельных точек кривых, которые были получены без учета оптической активности, то есть точек кривых 2 и 4 на рисунке 2.2 и точек кривых 2 и 4 на рисунке 2.3.

Заключение

Установлено, что увеличение нелинейности, связанное с возрастанием величины внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, приводит к нарушению симметричной формы сингулярного пучка: кольцевая форма пучка деформируется, и он принимает вытянутую форму, напоминающую форму эллипса.

Построена зависимость эллиптичности k сингулярного пучка от величины внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу. Установлено, что при увеличении модуля внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу, величина k убывает.

Построена зависимость угла поворота α от величины внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу. Показано, что при увеличении модуля внешнего электрического поля происходит поворот сингулярного пучка относительно вертикали и направление этого поворота зависит от знака топологического заряда. Обнаружено, что при «выключении» оптической активности при $E_0 > -2.4$ кВ/см угол поворота α для сингулярного пучка с $m = 1$ близок к углу поворота, который наблюдается при распространении сингулярного пучка с $m = 1$ с учетом оптической активности.

Показано, что «выключение» оптической активности приводит к зеркальному отображению зависимости угла поворота эллиптического распределения интенсивности в пучке с одинаковыми по значению, но противоположными по знаку топологическими зарядами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nye, J.F. Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1974. — Vol. 336. — P. 165–190.
2. Spatial correlation singularity of a vortex field / D.M. Palacios [et al.] // Physical Review Let-

- ters. – 2004. – Vol. 92, № 14. – P. 143905–4–143905–4.
3. *Soskin, M.S.* Singular optics / M.S. Soskin, M.V. Vasetsov // *Prog. Opt.* – 2001. – Vol. 42. – P. 219–276.
 4. *Казак, Л.А.* Формирование, суперпозиция и устойчивость вихревых оптических пучков различного порядка / Л.А. Казак, А.Л. Толстик // *Вестник БГУ. Сер. 1.* – 2010. – № 2. – С. 3–7.
 5. *He, Y.J.* Fusion of necklace-ring patterns into vortex and fundamental solitons in dissipative media / Y.J. He, H.Z. Wang, B.A. Malomed // *Opt. Express.* – 2007. – Vol. 15, № 26. – P. 17502–17508.
 6. *Котляр, В.В.* Трех- и четырехуровневые спиральные фазовые пластинки / В.В. Котляр, А.А. Ковалев // *Компьютерная оптика.* – 2008. – Т. 32, №1. – С. 9–14.
 7. *Ковалев, А.А.* Дифракция Фраунгофера на многоуровневой (квантованной) спиральной фазовой пластинке / А.А. Ковалев, В.В. Котляр // *Компьютерная оптика.* – 2007. – Т. 31, №3. – С. 9–13.
 8. *Izdebskaya, Y.* Generation of higher-order optical vortices by a dielectric wedge / Y. Izdebskaya, V. Shvedov, A. Volyar // *Opt. Lett.* – 2005. – Vol. 30, № 18. – P. 2472–2474.
 9. *Strohaber, J.* Ultrashort intense-field optical vortices produced with laser-etched mirrors / J. Strohaber, T.D. Scarborough, G.J. Uiterwaal // *Appl. Opt.* – 2007. – Vol. 46, № 36. – P. 8583–8590.
 10. *Making optical vortices with computer-generated holograms* / A.V. Carpentier [et al.] // *Am. J. Phys.* – 2008. – Vol. 76, № 10. – P. 916–921.
 11. *Gahagan, K.T.* Optical vortex trapping of particles / K.T. Gahagan, G.A. Swartzlander, Jr. // *Opt. Lett.* – 1996. – Vol. 21, № 11. – P. 827–829.
 12. *Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner* / N.B. Simpson [et al.] // *Opt. Lett.* – 1997. – Vol. 22. – P. 52–54.
 13. *Foo, G.* Optical vortex coronagraph / G. Foo, D.M. Palacios, G.A. Swartzlander, Jr. // *Opt. Lett.* – 2005. – Vol. 30, № 24. – P. 3308–3310.
 14. *Хорошун, А.Н.* Определение малых углов поворота светоделителя в оптическом вихревом интерферометре сдвига / А.Н. Хорошун, Д.Н. Арцишевский // *Письма в ЖТФ.* – 2010. – Т. 36, № 8. – С. 75–81.
 15. *Optical vortex filtering for the detection of electromagnetically induced transparency* / N.B. Phillips [et al.] // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 2011. – Vol. 28, № 9. – P. 2129–2133.
 16. *Linear and nonlinear waveguides induced by optical vortex solitons* / A.H. Carlsson [et al.] // *Opt. Lett.* – 2000. – Vol. 25, № 9. – P. 660–662.
 17. *Law, C.T.* Waveguiding properties of optical vortex solitons / C.T. Law, X. Zhang G.A. Swartzlander Jr. // *Opt. Lett.* – 2000. – Vol. 25, № 1. – P. 55–57.
 18. *Swartzlander Jr., G.A.* Optical vortex solitons observed in Kerr nonlinear media / G.A. Swartzlander Jr., C.T. Law // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – Vol. 69. – P. 2503–2506.
 19. *Mamaev, A.V.* Propagation of a mutually incoherent optical vortex pair in anisotropic nonlinear media / A.V. Mamaev, M. Saffman, A.A. Zozulya // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* – 2004. – Vol. 6. – P. S318–S322.
 20. *Passier, R.* Impact of tensorial nature of the electro-optic effect on vortex beam propagation in photorefractive media / R. Passier, F. Devaux, M. Chauvet // *Opt. Express.* – 2008. – Vol. 16, № 10. – P. 7134–7141.
 21. *Корниенко, Т.А.* Электрооптические эффекты и самовоздействие гауссовых и сингулярных световых пучков в кристаллах $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ и $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ / Т.А. Корниенко, Ю.И. Миксюк, К.А. Сачеников, А.Л. Толстик // *IV Конгресс физиков Беларуси, 24–26 апреля 2013 г.: сборник научных трудов / редкол.: С.Я. Килин (гл. ред.) [и др.]* – Минск: Ковчег, 2013. – С. 139–140.
 22. *Давыдовская, В.В.* Влияние оптической активности на оптимальные условия фокусировки одномерных и двумерных световых пучков различных профилей в кубическом фоторефрактивном кристалле / В.В. Давыдовская, Ж.В. Колядко, В.В. Шепелевич // *Оптика и спектроскопия.* – 2012. – Т. 113, № 3. – С. 598–606.
 23. *Holographic storage in electrooptic crystals. i. steady state* / N.V. Kukhtarev [et al.] // *Ferroelectrics.* – 1979. – Vol. 22. – P. 949–961.
 24. *Оптические свойства кристаллов* / А.Ф. Константинова [и др.] // *Минск: Наука и техника.* – 1995. – 302 с.
 25. *Справочник по высшей математике* / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
 26. *Формирование низкоинтенсивных пространственных солитонов в фоторефрактивном кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$* / Т.В. Габрусева [и др.] // *Известия РАН. Серия физическая* – 2006. – Т. 70, № 12. – С. 1775–1747.

Поступила в редакцию 13.03.15.

УДК 535.36

ДВИЖЕНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ НАНОЧАСТИЦЫ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ПУЗЫРЬКА ВОЗДУХА В ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Е.В. Матук, Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

THE MOVEMENT OF THE METAL NANOPARTICLES NEAR THE SURFACE OF THE AIR BUBBLE IN THE LIQUID BY THE RADIATION PRESSURE FORCE

E.V. Matuk, L.S. Gaida, D.V. Guzatov

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Экспериментально исследован эффект светового давления лазерного излучения на металлические наночастицы, находящиеся вблизи пузырька воздуха в воде. Обсуждены причины наблюдаемого движения наночастиц вдоль поверхности пузырька.

Ключевые слова: световое давление лазерного излучения, металлические наночастицы.

The effect of laser radiation pressure on the metal nanoparticles located near an air bubble in water is experimentally investigated. The reasons of the observed movement of nanoparticles along a bubble surface are discussed.

Keywords: light pressure of laser radiation, metal nanoparticles.

Введение

Управление локализацией микро- и наноразмерных объектов с помощью сил светового давления может иметь целый ряд практических применений, например, для манипуляции вирусами, бактериями без их повреждения [1]. Силу светового давления можно использовать для терапевтических целей на клеточном уровне. Например, если на металлическую наночастицу воздействуют интенсивным лазерным излучением, это приводит к нагреву частицы и ее движению вдоль лазерного пучка под действием силы светового давления. Разогретая таким образом наночастица может проделать отверстие в мембране клетки и, тем самым, облегчить доставку лекарств внутрь нее [2].

В физике исследование светового давления также представляет большой интерес. Например, силы светового давления в интерференционном световом поле позволяют упорядочить расположение микрочастиц [3], что позволяет создавать гетерогенные среды на основе взвешенных в жидкости микрочастиц, обладающих интересными оптическими свойствами [4]–[6]. Например, данные среды могут иметь большие значения оптического коэффициента Керра и использоваться в качестве широкополосной нелинейной среды для лазерного излучения малой интенсивности и большой длительности [4].

Таким образом, исследование силы светового давления является на сегодняшний день актуальной и весьма важной задачей.

Целью работы является экспериментальное исследование транспортировки металлических наночастиц под действием сил светового давления лазерного излучения вблизи границы раздела воздуха и жидкости.

1 Теоретические положения

Как хорошо известно [7], транспортировка микро- и наночастиц в лазерном пучке происходит под действием сил светового давления. При рассмотрении сил светового давления, действующих на наночастицу, условно выделяют две составляющие [8]: компоненту силы, действующую вдоль градиента интенсивности поля и отличную от нуля только в неоднородном электрическом поле, т. е. градиентную силу F_{grad} , и силу, действующую вдоль направления распространения излучения, являющуюся суммой сил поглощения F_{abs} и рассеяния F_{scat} . Таким образом, полную силу светового давления на наночастицу можно представить в следующем общем виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{grad} + \mathbf{F}_{abs} + \mathbf{F}_{scat}. \quad (1.1)$$

В случае сферической наночастицы получаем [9]:

$$\mathbf{F}_{grad} = \frac{2\pi n_m \alpha'}{c} \nabla I, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{F}_{abs} = \frac{n_m \sigma_{abs} I}{c}, \quad \mathbf{F}_{scat} = \frac{n_m \sigma_{scat} I}{c},$$

где α , σ_{abs} и σ_{scat} – поляризуемость сферической наночастицы, ее поперечные сечения поглощения и рассеяния, соответственно, для которых можно записать выражения [10]:

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'' = R^3 \left(\frac{n_p^2 - n_m^2}{n_p^2 + 2n_m^2} \right), \quad (1.3)$$

$$\sigma_{abs} = 4\pi k_m \alpha'', \quad \sigma_{scat} = \frac{8\pi}{3} k_m^4 |\alpha|^2.$$

В выражениях (1.2) и (1.3): I – интенсивность излучения, действующего на наночастицу, ∇ – оператор градиента, $k_m = 2\pi n_m / \lambda$ – волновое число, n_m – показатель преломления данной среды, λ – длина волны в вакууме, c – скорость света в вакууме, R – радиус наночастицы, n_p – показатель преломления материала наночастицы. Заметим, что записанные выше выражения справедливы для световых полей любой степени неоднородности.

Как следует из (1.3) увеличение действия силы светового давления на металлическую наночастицу, по сравнению с диэлектрической, происходит за счет увеличения поляризуемости металлической наночастицы. При этом возрастает как сечение рассеяния σ_{scat} , так и сечение поглощения σ_{abs} . Еще большее увеличение силы светового давления можно получить, если возбудить в металлической наночастице плазмонный резонанс [11]. Для дальнейшего экспериментального исследования силы светового давления были использованы металлические наночастицы.

2 Результаты экспериментальных исследований

Для исследования сил светового давления использовалась лазерная установка, представленная на рисунке 2.1.

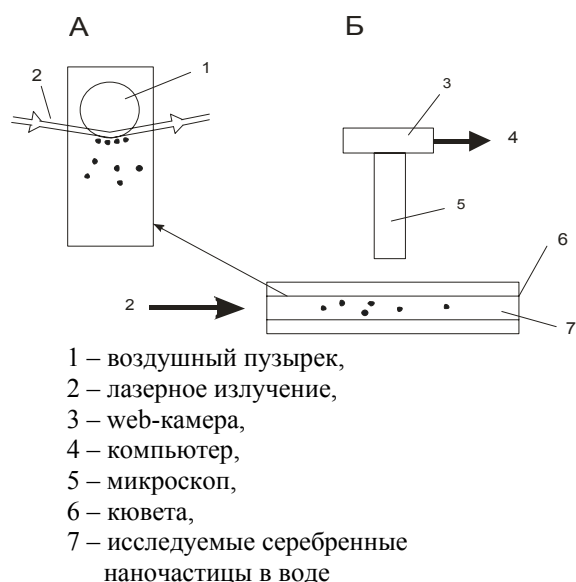


Рисунок 2.1 – А) демонстрационная модель и Б) схема экспериментальной установки по исследованию эффекта светового давления лазерного излучения на серебряные наночастицы, находящиеся вблизи пузырька воздуха в воде

Источником оптического излучения являлся лазер ЛТИ-701 (с длиной волны 532 нм и максимальной мощностью 4 Вт). Исследуемыми объектами были серебряные наночастицы в воде, помещенные в кювету под микроскопом. В кювете с наночастицами имелся воздушный пузырек, на который лазерный луч направлялся под небольшим углом (рисунок 2.1). Наблюдение за движением наночастиц в световом поле луча осуществлялось при помощи цифровой видеокамеры, подключенной к компьютеру.

На рисунке 2.2 (снимки цифровой камеры) показаны результаты экспериментального исследования. На снимках представлена часть поверхности воздушного пузырька, отделяющего воздух (снизу) и воду (сверху). Положение наночастицы указано стрелкой.

Первоначально наночастица была расположена с правой стороны рисунка 2.2 (1). Далее частица постепенно смещается вдоль поверхности и затем, на снимке 7, располагается слева. Следует отметить, что в данном случае движение наночастицы вблизи поверхности пузырька носит направленный характер, по сравнению с частицами, находящимися вдали от пузырька. Можно указать несколько причин, вызывающих такое движение металлических наночастиц. При длительном воздействии лазерного излучения на наночастицы в жидкости происходит нагрев жидкости, в результате чего образуются конвекционные потоки и, как следствие, частицы начинают совершать тепловое хаотическое движение. Когда наночастицы в результате теплового движения проходят вблизи пузырька, на них действует сила поверхностного натяжения, стремящаяся их приблизить и расположить вдоль поверхности пузырька [12]. Далее, под действием силы светового давления наночастицы серебра начинают упорядоченно двигаться по поверхности воздушного пузырька. Оценка компонент силы светового давления, направленных вдоль пучка, по формулам (1.2) дает следующие значения: сила рассеяния $F_{scat} \approx 7,4 \cdot 10^{-12}$ Н, сила поглощения $F_{abs} \approx 0,72 \cdot 10^{-14}$ Н. Следовательно, основной вклад в силу светового давления в эксперименте дает сила рассеяния и именно она двигает частицу вдоль действия лазерного излучения.

Скорость движения наночастиц, полученная в ходе эксперимента, оценочно равна ~87 мкм/с. Эта величина хорошо согласуется со скоростью ~90 мкм/с, полученной в работе [12], в которой также рассматривалось движение наночастицы вдоль поверхности воздушного пузырька. Заметим, что скорость движения наночастицы в эксперименте оказалась достаточно большой, что позволяет думать о практическом использовании эффекта светового давления, например, для задач нанооптики.

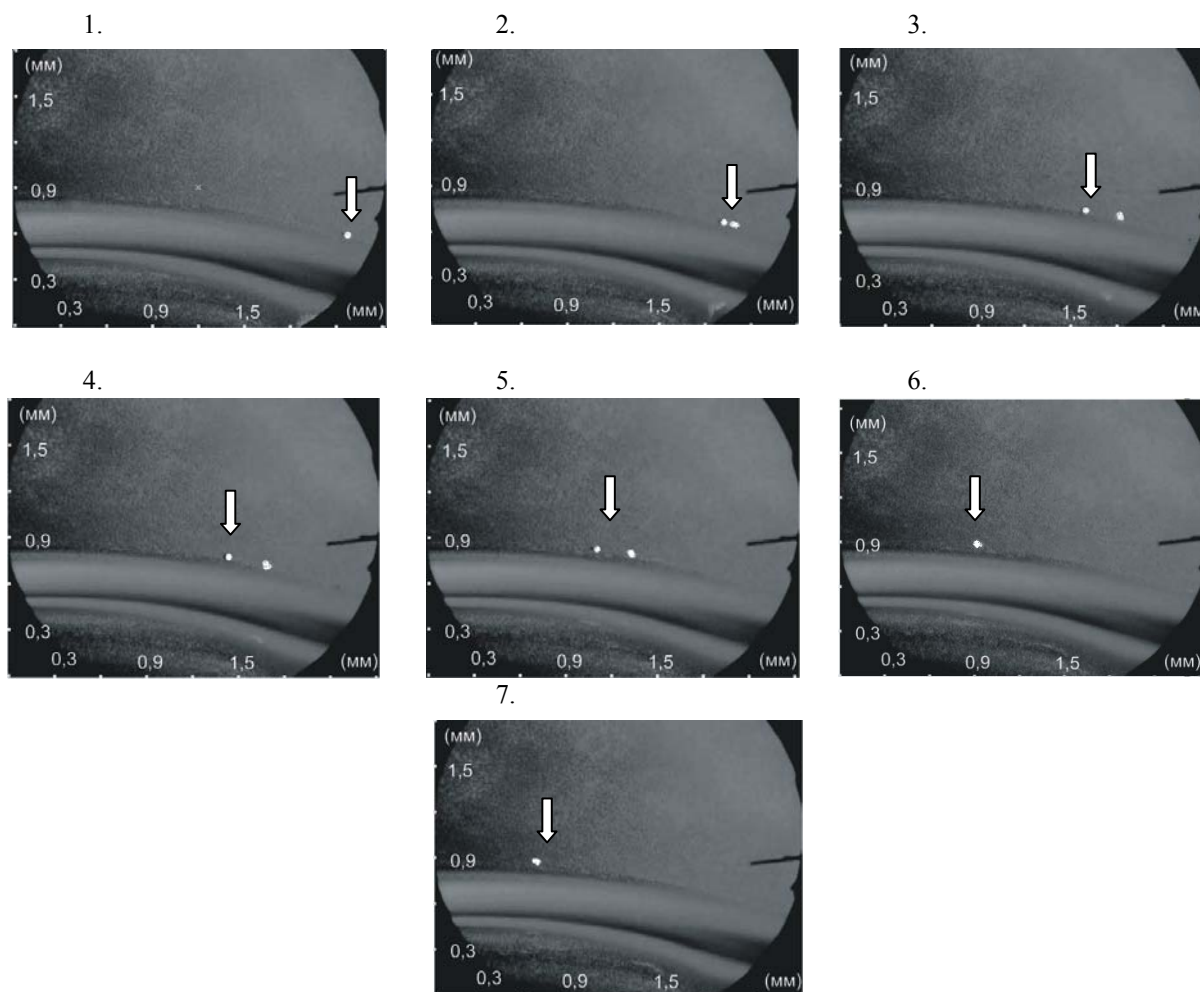


Рисунок 2.2 – Последовательные снимки движения наночастиц вблизи поверхности пузырька в поле лазерного излучения (временная задержка между снимками 2,5 секунды)

Заключение

Таким образом, в настоящей работе разработан макет экспериментальной установки по исследованию сил светового давления на микро- и наночастицы. Экспериментально исследован эффект светового давления лазерного излучения на металлические наночастицы, находящиеся вблизи пузырька воздуха в воде. Обнаружено, что в результате действия конвекционных потоков в жидкости и сил поверхностного натяжения наночастица прикрепляется к поверхности пузырька и под действием силы светового давления она смещается вдоль поверхности. При этом смещение происходит преимущественно вдоль действия излучения под действием компоненты силы светового давления, связанной с рассеянием излучения металлической наночастицей. Экспериментально оценена скорость движения наночастицы, составившая ~ 87 мкм/с.

Результаты работы могут быть использованы для разработки экспериментов по воздействию силы светового давления лазерного излучения на металлические наночастицы в жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ashkin, A. Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria* / A. Ashkin, J.M. Dziedzic // *Science*. – 1987. – Vol. 235. – P. 1517–1520.
2. *IPHT Jena annual report 2007* / ed. by J. Popp, F. Sondermann. – Zwickau: Color-Druck Zwickau GmbH & Co. KG, 2008. – 148 p.
3. *Модуляция концентрации частиц в интерференционном поле лазерного излучения* / А.А. Афанасьев [и др.] // *ЖПС*. – 2002. – Т. 69, № 5. – С. 675–678.
4. *Четырехволновое смещение в жидкой суспензии диэлектрических прозрачных микросфер* / А.А. Афанасьев [и др.] // *ЖЭТФ*. – 2005. – Т. 128, № 3. – С. 451–463.
5. *Wulf, K.D. Aberration correction in holographic optical tweezers* / K.D. Wulf // *Opt. Express*. – 2006. – Vol. 14, № 9. – P. 4170–4175.
6. *Smith, P.W. Four-wave mixing in an artificial Kerr medium* / P.W. Smith, A. Ashkin, W.J. Tomlinson // *Opt. Lett.* – 1981. – Vol. 6. – P. 284–286.
7. *Эшкин, А. Давление лазерного излучения* / А. Эшкин // *УФН*. – 1973. – Т. 110, № 1. – С. 101–116.

8. Chaumet, P.C. Time-averaged total force on a dipolar sphere in an electromagnetic field / P.C. Chaumet, M. Nieto-Vesperinas // Opt. Lett. – 2000. – Vol. 25, № 15. – P. 1065–1067.

9. Кац, А.В. Радиационная сила, действующая на частицу в электромагнитном поле при произвольном соотношении между размером частицы и длиной волны / А.В. Кац // Изв. высш. уч. зав. Радиофизика. – 1975. – Т. XVIII, № 4. – С. 566–575.

10. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1982. – 602 с.

11. Климов, В.В. Наноплазмоника / В.В. Климов. – М.: Физмалит, 2009. – 480 с.

12. Zhao, C. Theory and experiment on particle trapping and manipulation via optothermally generated bubbles / Chenglong Zhao, Yuliang Xie, Zhangming Mao, Yanhui Zhao, Joseph Rufo, Shikuan Yang, Feng Guo, John D. Mai and Tony Jun Huang // Lab Chip. – 2014. – № 14. – P. 384–391.

Поступила в редакцию 15.02.15.

УДК 539.12

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ФОРМАЛИЗМЕ МАЙОРАНЫ – ОППЕНГЕЙМЕРА ВО ВСЕЛЕННОЙ АНТИ ДЕ СИТТЕРА

Е.М. Овсюк

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE MAJORANA – OPPENHEIMER FORMALISM IN THE ANTI DE SITTER UNIVERSE

E.M. Ovsyuk

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus

Построены точные решения уравнений Максвелла со сферической симметрией на фоне осциллирующей во времени Вселенной анти де Ситтера. Использован 3-мерный комплексный формализм Майораны – Оппенгеймера, обобщенный на псевдоримановы модели пространства-времени в соответствии с тетрадным рецептом. Установленный характер зависимости решений от времени приводит к независимости вектора Пойнтинга для построенных решений от времени, т. е. факт изменения геометрии пространства во времени невозможно установить, измеряя плотность потока энергии электромагнитного поля.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, тетрадный формализм, Вселенная анти де Ситтера, нестатические координаты, комплексный формализм Майораны – Оппенгеймера, точные решения.

Exact solutions with spherical symmetry of the Maxwell equations in the oscillating anti de Sitter Universe are constructed. 3-Dimensional complex formalism by Majorana – Oppenheimer, generalized to pseudo-Riemannian space-time models in accordance with the tetrad method, is applied. The established dependence of the constructed solutions on the time variable leads to independence of the Poynting vector on time. This means that the change in time of the anti de Sitter geometry cannot be seen by measuring the energy flow density.

Keywords: Maxwell's equations, tetrad formalism, anti de Sitter Universe, non-static coordinates, complex formalism of the Majorana – Oppenheimer, exact solutions.

Введение

Цель настоящей работы – получение решений уравнений Максвелла в осциллирующей во времени Вселенной де Ситтера с метрикой

$$dS^2 = dt^2 - \cos^2 t \times \\ \times [dr^2 + \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]; \quad (0.1)$$

стоящее в квадратных скобках выражение представляет метрику гиперболической модели Лобачевского в сферической системе координат (используем безразмерные координаты).

Решение системы уравнений Максвелла является намного более сложной задачей, чем, например, решение уравнения скалярного поля или уравнения Дирака. Сложность задачи связана главным образом с большим числом полевых переменных: шестью при описании электромагнитного поля антисимметричным тензором второго ранга и десятью при использовании набора из тензора и 4-мерного электромагнитного вектора. В работе будем пользоваться формулировкой уравнений Максвелла, восходящей к комплексному формализму Римана – Зильберштейна – Оппенгеймера – Майораны [1]–[10] и обобщенной для применения в произвольном псевдоримановом пространстве-времени в соответствии с тетрадным рецептом Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко [11]–[15]. Относительная простота

этого формализма связана с тем, что вещественное электромагнитное 6-компонентное тензорное поле при этом описывается 3-мерным комплексным вектором. Это уменьшает количество уравнений и тем самым облегчает процедуру построения аналитических решений уравнений Максвелла.

1 Разделение переменных

Исходим из уравнений Максвелла в матричной тетрадной форме в римановом пространстве в формализме Майораны – Оппенгеймера (используем обозначения из [15])

$$\alpha^c \left(e_{(c)}^p \partial_p + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc} \right) \Psi = 0,$$

$$\alpha^0 = -iI,$$

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix}.$$

В более детальной записи это уравнение имеет вид:

$$-i \left(e_{(0)}^p \partial_p + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{ab0} \right) \Psi + \\ + \alpha^k \left(e_{(k)}^p \partial_p + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abk} \right) \Psi = 0. \quad (1.1)$$

Приведем явный вид трех основных матриц α^k и трех генераторов S^k в декартовом базисе [15]:

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$S^1 = j^{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{vmatrix}, \quad S^2 = j^{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{vmatrix},$$

$$S^3 = j^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

Будем рассматривать уравнение (1.1) в нестатических координатах пространства анти де Ситтера (0.1); при этом используем тетраду

$$e_{(0)}^a = (1, 0, 0, 0),$$

$$e_{(1)}^a = \left(0, 0, \frac{1}{\cosh r}, 0 \right),$$

$$e_{(2)}^a = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\cosh r \sin \theta} \right),$$

$$e_{(3)}^a = \left(0, \frac{1}{\cosh r}, 0, 0 \right).$$

Уравнение (1.1) в выбранных координатах и тетраде принимает следующий явный вид:

$$\left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} - i \tanh r (\alpha^1 S^1 + \alpha^2 S^2 + \alpha^3 S^3) + \frac{1}{\cosh r} \left(\alpha^3 \partial_r + \frac{\alpha^1 S^2 - \alpha^2 S^1}{\tanh r} \right) + \frac{1}{\cosh r \sin \theta} \Sigma_{\theta\phi} \right\} \Psi = 0,$$

где зависящий от угловых переменных оператор $\Sigma_{\theta\phi}$ определен равенством

$$\Sigma_{\theta\phi} = \left(\alpha^1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \phi} + S^3 \cos \theta \right). \quad (1.2)$$

При разделении переменных удобно иметь матрицу j^{12} диагональной. Этого можно добиться с помощью преобразования к циклическому базису [15]:

$$\Psi' = U_4 \Psi, \quad U_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{vmatrix},$$

$$U \tau_1 U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix} = \tau'_1, \quad j'^{23} = s_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau'_1 \end{vmatrix},$$

$$U \tau_2 U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \tau'_2, \quad j'^{31} = s_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau'_2 \end{vmatrix},$$

$$U \tau_3 U^{-1} = -i \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \tau'_3, \quad j'^{12} = s_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau'_3 \end{vmatrix},$$

$$\alpha'^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix},$$

$$\alpha'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & -i \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha'^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i \end{vmatrix}.$$

Уравнение (1.2) примет в циклическом базисе тот же вид (для краткости штрихи будем опускать).

Диагонализуем на решениях квадрат и третью проекцию полного момента электромагнитного поля, этому отвечает подстановка для полевой функции

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \phi_1(t, r) D_{-1} \\ \phi_2(t, r) D_0 \\ \phi_3(t, r) D_{+1} \end{vmatrix},$$

где использованы краткие обозначения для D -функций Вигнера $D_\sigma = D_{-m, \sigma}^j(\phi, \theta, 0)$, $\sigma = -1, 0, +1$; j, m определяют квадрат и третью проекцию полного момента.

С применением рекуррентных соотношений для функций Вигнера [14]

$$\partial_\theta D_{-1} = \frac{1}{2} (a D_{-2} - v D_0),$$

$$\frac{m - \cos \theta}{\sin \theta} D_{-1} = \frac{1}{2} (a D_{-2} + v D_0),$$

$$\partial_\theta D_0 = \frac{1}{2} (v D_{-1} - v D_{+1}),$$

$$\frac{m}{\sin \theta} D_0 = \frac{1}{2} (v D_{-1} + v D_{+1}),$$

$$\partial_\theta D_{+1} = \frac{1}{2} (v D_0 - a D_{+2}),$$

$$\frac{m + \cos \theta}{\sin \theta} D_{+1} = \frac{1}{2} (v D_0 + a D_{+2}),$$

$$v = \sqrt{j(j+1)}, \quad a = \sqrt{(j-1)(j+2)}$$

получаем систему уравнений в переменных (t, r) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{\tanh r} \right) \phi_2 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} (\phi_1 + \phi_3) = 0,$$

$$-\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} - 2 \sin t \right) \phi_1 -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r} \right) \phi_1 - \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} \phi_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} -\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} - 2 \sin t\right) \varphi_2 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} (\varphi_1 - \varphi_3) = 0, \\ -\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} - 2 \sin t\right) \varphi_3 + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right) \varphi_3 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} \varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

2 Решение системы уравнений

Во всех трех функциях выделим множитель:

$$\varphi_j = \frac{1}{\cos^2 t} \frac{1}{\sinh r} F_j; \quad (2.1)$$

в результате система (1.3) формально упрощается

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right) F_2 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} (F_1 + F_3) = 0, \quad (2.2)$$

$$-\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_1 - \frac{\partial}{\partial r} F_1 - \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} F_2 = 0, \quad (2.3)$$

$$-\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_2 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} (F_1 - F_3) = 0, \quad (2.4)$$

$$-\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_3 + \frac{\partial}{\partial r} F_3 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} F_2 = 0. \quad (2.5)$$

Складывая и вычитая уравнения (2.3) и (2.5) с учетом (2.4), получим (введем промежуточное обозначение $v/\sqrt{2} = b$) два уравнения

$$-\cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) - \frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3) = 0, \quad (2.6)$$

$$\cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 - F_3) + \frac{\partial}{\partial r} (F_1 + F_3) + \frac{2b}{\sinh r} F_2 = 0.$$

Покажем, что уравнение (2.2) является следствием уравнений (2.3)–(2.5). Для этого продифференцируем по времени уравнение (2.2):

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right) \frac{\partial}{\partial t} F_2 + \frac{b}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = 0.$$

Учитывая (2.4), получим уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right) \frac{b}{\cos t \sinh r} (F_1 - F_3) + \\ + \frac{b}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = 0 \end{aligned}$$

эквивалентное следующему уравнению:

$$\frac{b}{\cos t \sinh r} \frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3) + \frac{b}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = 0.$$

Если учесть здесь уравнение (2.6) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = -\frac{1}{\cos t} \frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3),$$

то придем к тождеству $0 \equiv 0$. Это означает, что уравнение (2.2) является следствием уравнений (2.3)–(2.5). В дальнейшем используем три (независимых) уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_2 = \frac{b}{\cos t \sinh r} (F_1 - F_3),$$

$$\cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) + \frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3) = 0,$$

$$\cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 - F_3) + \frac{\partial}{\partial r} (F_1 + F_3) + \frac{2b}{\sinh r} F_2 = 0. \quad (2.7)$$

Исключим функцию F_2 из третьего уравнения в (2.7); для этого продифференцируем его по времени и воспользуемся первым уравнением в (2.7):

$$\begin{aligned} \cos t \frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 - F_3) + \cos t \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (F_1 + F_3) + \\ + \frac{2b^2}{\sinh^2 r} (F_1 - F_3) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо (2.7) имеем эквивалентную ей систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_2 &= \frac{b}{\cos t \sinh r} (F_1 - F_3), \\ \cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) &= -\frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3), \\ \cos t \frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 - F_3) + \\ + \cos t \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (F_1 + F_3) + \\ + \frac{2b^2}{\sinh^2 r} (F_1 - F_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из третьего уравнения в (2.8) можно с помощью второго уравнения в (2.8) исключить комбинацию $(F_1 + F_3)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_2 &= \frac{b}{\cos t \sinh r} (F_1 - F_3), \\ \cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) &= -\frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right) (F_1 - F_3) = 0.$$

Чтобы упростить обозначения введем функции:

$$F = F_1 + F_3, \quad G = F_1 - F_3,$$

тогда система (2.9) переписывается следующим образом:

$$\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_2 = \frac{b}{\sinh r} G, \quad (2.10)$$

$$\cos t \frac{\partial}{\partial t} F = -\frac{\partial}{\partial r} G,$$

$$\left(-\cos t \frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right) G = 0.$$

В новой переменной

$$d\tau = \frac{dt}{\cos t}$$

система (2.10) представима в виде

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right) G = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F_2 = \frac{b}{\sinh r} G, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} F = -\frac{\partial}{\partial r} G.$$

Решим уравнение для функции G методом разделения переменных:

$$G = T(\tau)R(r),$$

$$\frac{1}{T(\tau)} \frac{d^2}{d\tau^2} T(\tau) = \frac{1}{R(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{\sinh^2 r} \right) R(r) = -\omega^2,$$

введена постоянная разделения ω^2 ; далее получаем

$$T(\tau) = e^{-i\omega\tau},$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \omega^2 - \frac{j(j+1)}{\sinh^2 r} \right) R(r) = 0.$$

Чтобы решить уравнение в радиальной переменной, введем новую переменную $z = 1 - e^{-2r}$:

$$4(1-z)^2 \frac{d^2 R}{dz^2} - 4(1-z) \frac{dR}{dz} + \omega^2 R - \frac{4(1-z)v^2}{z^2} R = 0.$$

Для функции R вводим подстановку $R = z^a(1-z)^b f(z)$:

$$z(1-z) \frac{d^2 f}{dz^2} + [2a - (2a+2b+1)z] \frac{df}{dz} + \left[-\frac{\omega^2}{4} - (a+b)^2 + (a(a-1)-v^2) \frac{1}{z} + \left(b^2 + \frac{\omega^2}{4} \right) \frac{1}{1-z} \right] f = 0.$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится, если потребовать $a = j+1, -j$, $b = \pm i\omega/2$. В результате для функции f получаем уравнение

$$z(1-z) \frac{d^2 f}{dz^2} + [2a - (2a+2b+1)z] \frac{df}{dz} - \left[(a+b)^2 + \frac{\omega^2}{4} \right] f = 0,$$

которое является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)F'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]F' - \alpha\beta F = 0.$$

Параметры определяются соотношениями

$$\gamma = 2a, \quad \alpha = a + b - \frac{i\omega}{2}, \quad \beta = a + b + \frac{i\omega}{2}. \quad (2.11)$$

Выбор $a = j+1, -j$, $b = \pm i\omega/2$ обеспечивает, что по радиальной переменной построены регулярные в нуле вещественные решения, соответствующие стоячим волнам. Кроме того, очевидно, что установленный характер зависимости решений от времени означает независимость вектора Пойнтинга для построенных решений от времени, другими словами, факт изменения геометрии пространства во времени невозможно установить, измеряя плотность потока энергии электромагнитного поля.

Заключение

Исходная нестатическая метрика (0.1) после преобразования к использованной выше временной координате τ (см. (2.11)) примет вид

$$dS^2 = \cos^{-2} \tau \times$$

$$\times [d\tau^2 - (dr^2 + \sinh^2 r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))].$$

Эта метрика отличается конформным множителем $\cos^{-2} \tau$ от метрики статической Вселенной Эйнштейна [16]. Построенные решения в осцилирующей модели де Ситтера связаны конформным преобразованием с решениями уравнений Максвелла в статической Вселенной Лобачевского (формула (2.1)).

Заметим также, что поскольку формализм Майораны – Оппенгеймера использует только составляющие электромагнитного тензора, то этот подход не позволяет следить за калибровочными степенями свободы электромагнитного поля. Такой анализ выполним на основе 10-мерного формализма.

Аналогичный анализ может быть выполнен в случае расширяющейся Вселенной де Ситтера [17], когда исходная метрика пространства-времени задается выражением

$$dS^2 = dt^2 - \cosh^2 t [dr^2 + \sin^2 r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)],$$

которое приводится преобразованием временной координаты к виду

$$dS^2 = \cos^{-2} \tau [d\tau^2 - (dr^2 + \sin^2 r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))].$$

Эта метрика отличается от статической метрики Эйнштейна конформным множителем $\cos^{-2} \tau$.

Добавим, что запас систем координат в 3-мерных пространствах Лобачевского и Римана достаточно велик [18]; любая из них может использоваться при рассмотрении волновых уравнений (Максвелла, Дирака и других) в нестатических моделях де Ситтера. Можно утверждать, что в случае электромагнитного поля из факта конформной инвариантности уравнений Максвелла следует возможность построения решений в моделях де Ситтера, если удастся построить соответствующие решения в статических моделях Лобачевского – Римана.

Автор благодарна В.М. Редькову за советы и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weber, H. Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen / H. Weber. – Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1901.
2. Silberstein, L. Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. Phys. (Leipzig). – 1907. – Vol. 22. – P. 579–586.
3. Silberstein, L. Nachtrag zur Abhandlung Über elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. der Phys. – 1907. – Vol. 24. – P. 783–784.
4. Silberstein, L. The Theory of Relativity / L. Silberstein. – London: Macmillan, 1914.
5. Bateman, H. The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion on the Basis of

Maxwells Equations / H. Bateman. – Cambridge: University Press, 1915.

6. *Majorana, E.* Scientific Papers. (Unpublished). Deposited at the «Domus Galileana». Pisa, quaderno 2, p. 101/1; 3, p. 11, 160; 15, p. 16;17, p. 83, 159.

7. *Oppenheimer, J.* Note on Light Quanta and the Electromagnetic Field / J. Oppenheimer // Phys. Rev. – 1931. – Vol. 38. – P. 725–746.

8. *Bialynicki-Birula, I.* On the Wave Function of the Photon / I. Bialynicki-Birula // Acta Phys. Polon. – 1994. – Vol. 86. – P. 97–116.

9. *Bialynicki-Birula, I.* Photon Wave Function / I. Bialynicki-Birula // Progress in Optics. – 1996. – Vol. 36. – P. 248–294.

10. *Rodrigues, W.A.* The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations / W.A. Rodrigues, E.C. de Oliveira // Lecture Notes in Physics. – Springer. – 2007. – Vol. 722.

11. *Maxwell Equations in Complex form of Majorana – Oppenheimer, Solutions with Cylindric Symmetry in Riemann S_3 and Lobachevsky H_3 spaces* / A.A. Bogush, G.G. Krylov, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov // Ricerche di matematica. – 2010. – Vol. 59, № 1. – P. 59–96.

12. *Red'kov, V.M.* Majorana – Oppenheimer Approach to Maxwell Electrodynamics. Part I. Minkowski Space / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, G.J. Spix // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2012. – Vol. 22. – P. 1129–1149.

13. *Red'kov, V.M.* Majorana – Oppenheimer Approach to Maxwell Electrodynamics. Part II. Curved

Riemannian Space / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, G.J. Spix // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2013. – Vol. 23. – P. 165–178.

14. *Redkov, V.M.* Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V.M. Redkov, E.M. Ovsyuk. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 p.

15. *Овсюк, Е.* Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией / Е. Овсюк, В. Редьков. – 2-е изд. – Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 242 с.

16. *Hawking, S.W.* The large scale structure of space-time / S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. – Cambridge: University Press, 1973.

17. *Electromagnetic Field on de Sitter Expanding Universe: Majorana – Oppenheimer Formalism, Exact Solutions in non-Static Coordinates* / O.V. Veiko, N.D. Vlasii, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov, Yu.A. Sitenko // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2014. – Vol. 17, № 1. – P. 17–39.

18. *Олевский, М.Н.* Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 U + \lambda U = 0$ допускает полное разделение переменных / М.Н. Олевский // Мат. Сб. – 1950. – Т. 27. – С. 379–426.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф14АРМ-021) в рамках сотрудничества между Беларусью и Арменией.

Поступила в редакцию 18.03.15.

УДК 669.14.018.8: 621.45.038.72

ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ МЕТАЛЛА НА ФАЗОВЫЙ СОСТАВ, СТРУКТУРУ И СВОЙСТВА УГЛЕРОД-МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ

А.С. Руденков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

INFLUENCE OF METAL CONCENTRATION ON THE PHASE COMPOSITION, STRUCTURE AND PROPERTIES OF CARBON-METAL COATING

A.S. Rudenkov

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Определены морфологические особенности, фазовый состав, микротвердость и триботехнические свойства композиционных углеродных покрытий, сформированных совместным осаждением углеродных плазменных потоков из импульсного катодно-дугового разряда и потоков атомов, ионов металла (Cr, Ti, Cu), генерируемых магнетронным распылением, их зависимость от мощности источника распыления. Показано, что такие слои характеризуются высокой плотностью и упорядоченностью sp^2 -кластеров, низкой шероховатостью. При увеличении мощности магнетронного разряда установлено повышение твердости и снижение интенсивности изнашивания контртела.

Ключевые слова: углеродные покрытия, sp^2 -кластеры, легирование, магнетрон, фазовый состав, морфология, шероховатость, твердость, трение, износ.

The morphological features, phase composition, microhardness and tribological properties of composite carbon coatings formed by co-precipitation of carbon plasma streams of pulsed cathodic arc discharge and flows of atoms of the metal ions (Cr, Ti, Cu) generated by magnetron sputtering, and their dependence on the power source sputtering are determined. It is shown that such layers are characterized by high density and order of sp^2 -clusters and low roughness. The hardness increases and the wear rate of counterbody decreases with increasing the power of magnetron.

Keywords: carbon coatings, sp^2 -clusters, alloying, magnetron, phase composition, morphology, roughness, hardness, friction, wear.

Введение

Легированные углеродные покрытия являются сложными объектами, физико-химические и механические свойства которых определяются условиями осаждения, природой отдельных ингредиентов, характером распределения фаз в объеме матрицы [1]–[4]. Известно, что при формировании наноконпозиционных углеродных покрытий из импульсной плазмы протекают сложные, как правило, нестационарные процессы, оказывающие влияние на химический состав, структуру и свойства формируемых слоев [5]–[7]. Детальное рассмотрение процессов генерации таких потоков является необходимым условием при определении наиболее эффективных приемов управления свойствами осаждаемых систем. В случае формирования легированных металлами углеродных покрытий важными факторами, влияющими на фазовое, структурное состояние углеродной матрицы, химический состав межфазных слоев и, соответственно, свойства покрытий, являются химическая активность металла по отношению к углероду, энергия атомарных частиц, дисперсность генерируемых металлических частиц, которые в свою очередь зависят от метода испарения или распыления, его режимов.

Отметим, что особенности легирования углеродных покрытий металлами достаточно подробно

рассмотрены при использовании электродугового и электроискрового испарения металлов, характеризующихся присутствием в потоке испаренных частиц капельной фазы, которая оказывает влияние на морфологию покрытий, их структуру и свойства [2]. В связи с этим интерес представляет изучение закономерностей осаждения, структуры и свойств металл-углеродных покрытий, при формировании которых используются предельно диспергированные потоки атомов, ионов металла. Такие условия достигаются при генерации летучих частиц металла магнетронным распылением.

Основной целью настоящей работы является определение особенностей влияния условий и режима магнетронного распыления металла на структуру и свойства формируемых композиционных металлосодержащих углеродных покрытий.

1 Методика эксперимента

Синтез легированных ионами и атомами металлов углеродных покрытий осуществлялся путем одновременного нанесения углерода из источника плазмы импульсного катодно-дугового разряда с графитовым катодом и металла из потока генерируемого магнетронной распылительной системы. Покрытия осаждали на кремниевые подложки. В качестве легирующих металлов

использовались Cr, Ti, Cu, отличающиеся химической активностью по отношению к углероду.

Формирование покрытий производили путем последовательного выполнения следующих основных операций: очистка и нагрев подложки с помощью ионного источника «Радикал» (рабочий газ – аргон, $P_{Ar}=10^{-1}$ Па, ток – 0,2 А, ускоряющее напряжение 2 кВ, ток соленоида – 3 А, время обработки 15 минут); осаждение легированных углеродных покрытий из потока частиц, генерируемых импульсным катодно-дуговым источником углеродной плазмы (5000 импульсов; частота следования импульсов – 20 Гц, напряжение разряда 350 В) и магнетронным распылением металла (рабочий газ – аргон; остаточное давление – 10^{-1} Па; мощность разряда – 40, 120, 200, 280 и 400 Вт; энергия ионов аргона ~300 эВ). Концентрацию легирующих элементов в углеродном покрытии регулировали путем изменения мощности разряда магнетрона.

Изучение морфологии легированных углеродных покрытий проводилось методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) в режимах измерения топографии и фазового контраста с помощью прибора Solver Pro производства NT-MDT (Москва, Россия).

Определение фазового состава углеродных покрытий осуществлялось посредством анализа спектров комбинационного рассеяния, полученных на спектрометре Senterra с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм, мощностью 10 мВт. Регистрируемые спектры были разложены на D- (~1400 см^{-1}) и G-пики (~1550 см^{-1}) по методу Гаусса. Химический состав и структура углеродных связей определялись методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС). Измерения проводились посредством прибора РНІ Quanterra при возбуждении вещества Ka-излучением алюминия с энергией кванта 1486,6 эВ и суммарной мощностью 250 Вт.

Для измерения микротвердости по Кнуппу в проведенных исследованиях применялся микротвердомер DM-8 (AFFRI, Италия). Нагрузка на алмазную пирамиду равнялась 245 мН, продолжительность вдавливания пирамиды – 10 с.

Триботехнические испытания проводили по схеме «сфера – плоскость» (шарик радиусом 5 мм из закаленной стали ШХ15, покрытие наносили на кремниевую подложку). Нагрузка составляла 0,98 Н, средняя скорость перемещения – 0,0087 м/с. После проведения истирания определялся диаметр пятна контакта, объем изношенного металла и выполнялся расчет объемного коэффициента изнашивания по формуле:

$$j = V / F L [\text{м}^3/(\text{Н} \cdot \text{м})], \quad (1.1)$$

где F – нагрузка (Н); L – путь трения (м); V – объем шарового сегмента изношенного материала (м^3).

2 Результаты и их обсуждение

Установлено, что дисперсность структурных углеродных образований покрытий, легированных

металлами, по сравнению с однокомпонентными увеличивается (рисунок 2.1).

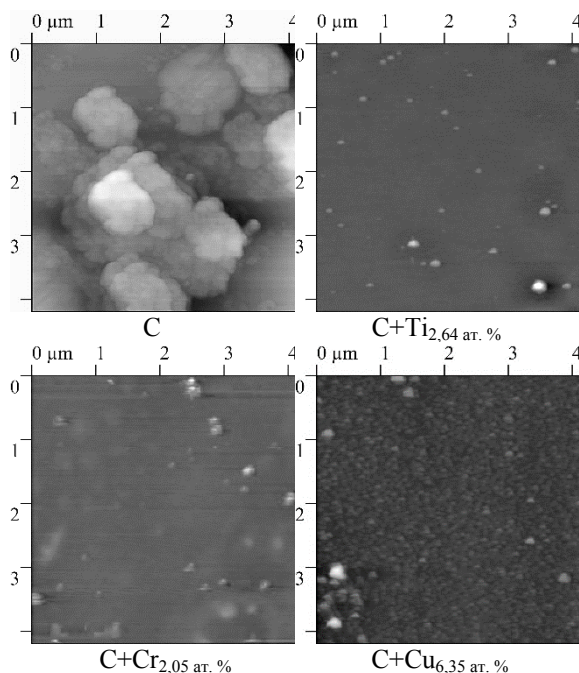


Рисунок 2.1 – Топография однокомпонентных и легированных металлом углеродных покрытий

При введении в покрытие хрома значения субшероховатости легированных углеродных покрытий снижается более чем в 6 раз, меди – 11 раз, титана – в 13 раз в сравнении с нелегированными углеродными слоями. Плотность отдельных структурных образований (далее зерен) не проявляет выраженную зависимость от концентрации металла, однако их латеральный размер и высота уменьшается (таблица 2.1).

Из анализа КР-спектров следует, что легирование металлами углеродных покрытий методом магнетронного распыления приводит к сужению ширины G-пика, увеличению соотношения I_D / I_G , смещению G- и D-пика в сторону меньших волновых чисел. Установлено, что рост соотношения I_D / I_G и уменьшение ширины G пика, а значит, увеличение числа и степени упорядоченности sp^2 кластеров, связан с увеличением мощности магнетрона и концентрации легирующего элемента (рисунок 2.2).

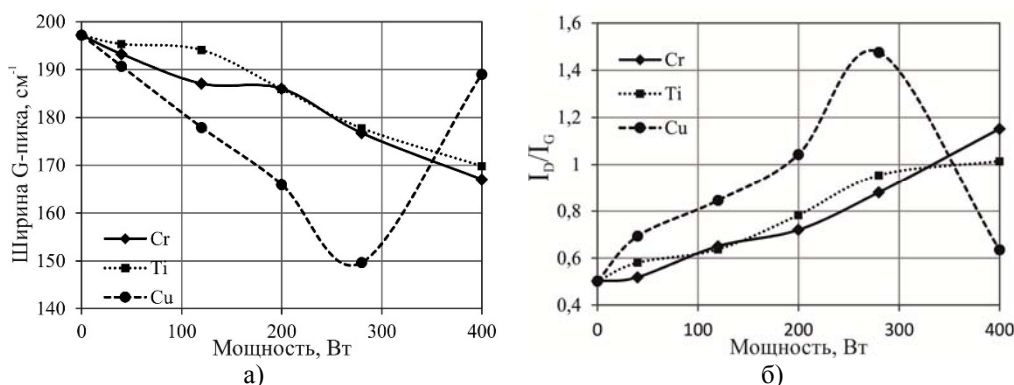
Известно [8], что увеличение соотношения I_D / I_G и смещение соответствующих пиков в низкочастотную область объясняется увеличением содержания sp^2 -гибридизированных атомов углерода. Кроме того, согласно [9] уменьшение размеров sp^2 -кластеров также приводит к увеличению соотношения I_D / I_G .

$$I_D / I_G = c(\lambda) / L_a, \quad (2.1)$$

где I_D и I_G – интенсивности соответствующих пиков, $c(\lambda)$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от длины волны возбуждающего излучения, L_a – размер зерен графита (нм).

Таблица 2.1 – Статистическая обработка результатов АСМ

Покрывтие	Мощность магнетрона, Вт	Концентрация легирующего элемента, ат. %	Средняя высота, нм	R_{ms} , нм	Плотность зерен	Средний диаметр зерен, нм
C	—	—	81,4	22,8	54	163,8
C+Cr	40	0,19	14,9	6,1	41	107,2
	120	0,30	32,5	13,6	32	119,7
	200	1,81	34,2	9,1	58	88,0
	280	2,44	13,4	3,6	77	82,2
	400	2,05	19,7	7,7	49	92,5
C+Cu	40	1,02	13,7	5,0	64	103,5
	120	1,43	6,4	2,0	84	67,0
	200	2,24	17,9	5,0	98	86,5
	280	4,74	14,5	4,4	108	66,0
	400	6,35	41,1	11,5	42	77,0
C+Ti	40	0,55	16,6	4,3	65	71,7
	120	0,35	12,8	4,0	46	70,7
	200	2,11	9,5	2,9	47	82,2
	280	2,41	4,4	1,7	38	61,2
	400	2,64	10,7	2,4	44	67,7

Рисунок 2.2 – Влияние мощности магнетрона на ширину G пика (а) и соотношение I_D / I_G (б) КР-спектров легированных углеродных покрытий

Данный факт подтверждается результатами атомно-силовой микроскопии, свидетельствующими об уменьшении латеральных размеров структурных углеродных образований на поверхности углеродных покрытий. Сужение ширины G-пика, в свою очередь, объясняется увеличением степени упорядоченности sp^2 -кластеров [10].

Наибольшим значением соотношения I_D / I_G (1,47) и наименьшей шириной G-пика (149 cm^{-1}) характеризуются легированные углеродные покрытия с содержанием меди 4,74 ат. %, сформированные при мощности магнетрона 280 Вт. В то время как для нелегированных покрытий соотношение I_D / I_G не превышает 0,5, а ширина G-пика – не менее 197 cm^{-1} . Данный факт объясняется тем, что медь способствует процессу графитизации углеродных покрытий. При дальнейшем увеличении концентрации до 6,35 ат. % и мощности до 400 Вт соотношение I_D / I_G падает, что может объясняться увеличением числа sp^2 -кластеров с размером менее 2 нм, что подтверждается

данными атомно-силовой микроскопии. В таком случае вместо формулы 2.1 действует формула 2.2:

$$I_D / I_G = c(\lambda) \cdot L_a^2, \quad (2.2)$$

Кроме того, медь обладает наибольшей скоростью распыления среди выбранных легирующих элементов, что подтверждается ее наибольшей концентрацией в покрытиях. Таким образом, при легировании медью при мощности 400 Вт в процессе роста углеродные покрытия подвергаются бомбардировке максимальным количеством ионов и атомов металла, что может приводить к снижению размеров углеродных кластеров. Также при мощности 400 Вт увеличивается ширина G-пика, что может объясняться снижением упорядоченности структуры, вызванным лавинным ростом числа радиационных дефектов вследствие ионной бомбардировки при высокой плотности потока металлической плазмы.

Рост содержания sp^2 -связей при легировании металлом углеродных покрытий подтверждается также анализом данных рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии.

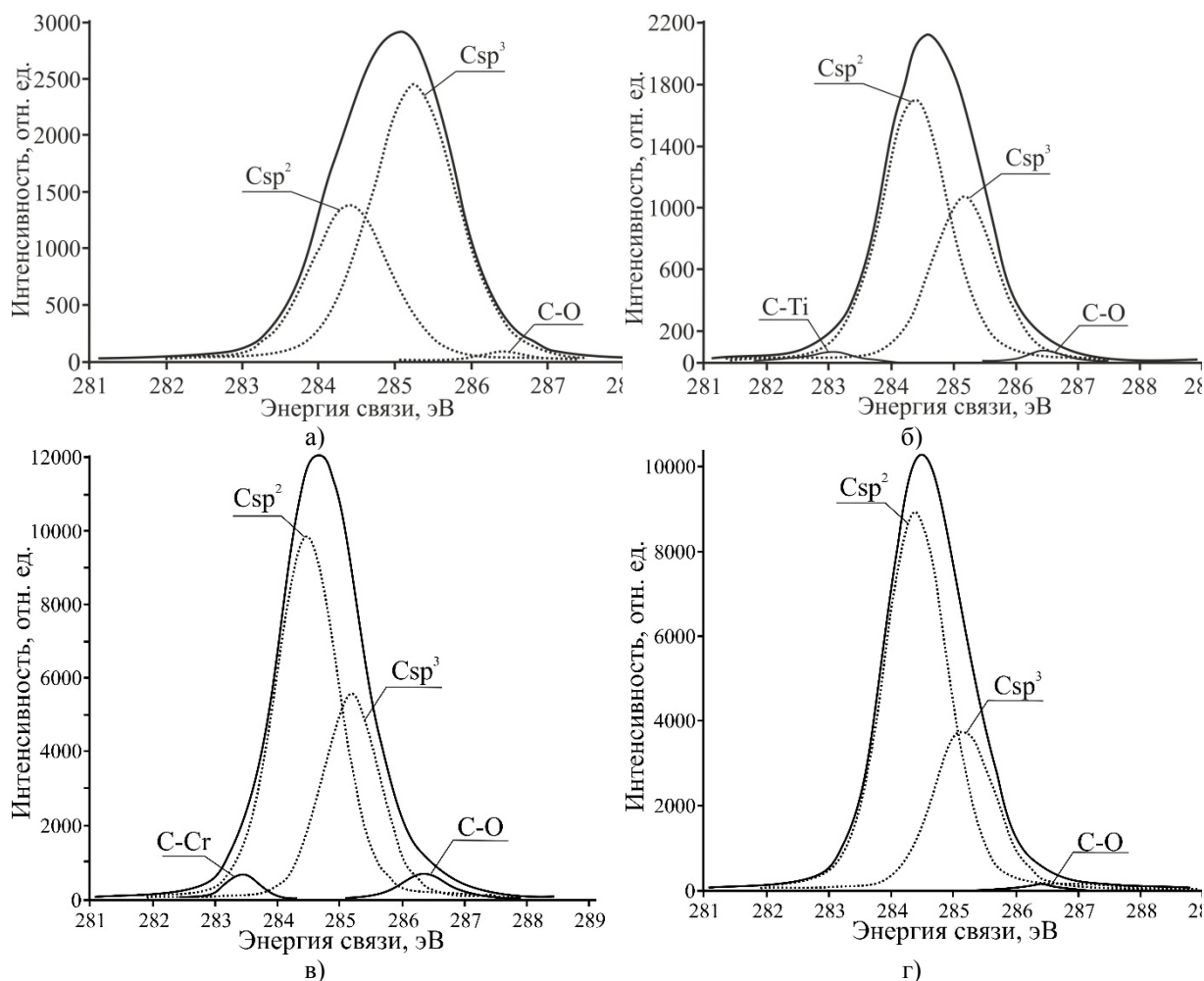


Рисунок 2.3 – C1s пик РФЭС углеродных покрытий (а) и углеродных покрытий легированных титаном (б), хромом (в) и медью (г)

C1s пик РФЭС углеродных покрытий раскладывается при помощи функции Лоренца-Гаусса на следующие компоненты: Csp² с энергией связи ~284,4 эВ, Csp³ с энергией связи ~285,2 эВ, Me-C с энергией связи ~283,2 эВ и C-O ~286,5 эВ [8], [11], [12].

Вклад интегральной площади компоненты Csp² для углеродных покрытий составляет 33,98 %, для покрытий легированных Ti – 58,49 %, Cr – 61,87 % и Cu – 73,88 % при концентрации легирующего элемента 2...2,5 ат. % (рисунок 2.3). Необходимо отметить, что металлы в покрытиях находятся преимущественно в виде оксидов. Низкое содержание карбида хрома и карбида титана можно объяснить бомбардировкой покрытия в процессе роста ионами металла и углерода, а также ионами и атомами рабочего газа, что приводит к разрушению Ti-C и Cr-C связей. Кроме того, высокая плотность и неоднородность потоков может препятствовать образованию карбидов в плазме.

Повышение содержания sp²-фазы в покрытии при увеличении мощности магнетрона, либо с увеличением скорости распыления металла

объясняется тем, что увеличивается плотность потока плазмы, что, в свою очередь, ведет к увеличению числа неупругих соударений между частицами металла и углерода, а также отраженными и нейтральзованными атомами рабочего газа. Данный процесс сопровождается снижением энергии ионов углерода в потоке углеродной плазмы за счет рассеивания на атомах и ионах металла и аргона, что в свою очередь снижает вероятность образования sp³-фазы углерода при осаждении на подложке. Кроме этого, с ростом мощности магнетронного разряда увеличивается количество ионов и атомов, бомбардирующих покрытие в процессе роста. Такая ионная бомбардировка активирует диффузионные процессы в покрытии, что приводит к возникновению sp²-кластеров меньших размеров, стимулирует фазовые превращения sp³ → sp², повышает степень упорядоченности sp²-кластеров.

Установлено, что с ростом мощности магнетрона и концентрации легирующего карбидообразующего металла, микротвердость покрытий на основе углерода монотонно возрастает (рисунок 2.4).

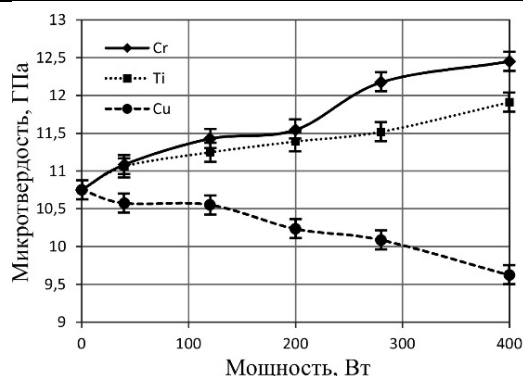


Рисунок 2.4 – Влияние мощности магнетрона на микротвердость легированных углеродных покрытий

Данный эффект согласуется с представленными в работе [13] данными, свидетельствующими об образовании твердых карбидных фаз внедрения, которые и обуславливают возрастание твердости покрытия в целом. Кроме этого, согласно данным атомно-силовой микроскопии и КР-спектроскопии, наблюдается увеличение числа и снижение размеров sp^2 -кластеров, что позволяет также объяснить увеличение микротвердости с точки зрения закона Холла-Петча. Данный закон гласит, что уменьшение среднего размера зерна d приводит к росту предела текучести σ , а значит и микротвердости H материала [14]:

$$\sigma = k_1 + k_2 d^{-1/2} \quad (2.3)$$

$$H = H_0 + k_H d^{-1/2}, \quad (2.4)$$

где k_1 – параметр, характеризующий движение дислокаций в материале (барьер Пайерлса), k_2 (k_H) зависит от сопротивления границ зерна движению дислокаций. В основе этой зависимости лежат дислокационные механизмы пластической деформации: границы зёрен тормозят движение дислокаций.

Снижение микротвердости легированных медью углеродных покрытий при увеличении мощности магнетрона и концентрации меди можно объяснить с точки зрения обратного эффекта Холла-Петча, согласно которому для наноматериалов с размером зерна менее 10 нм предел текучести уменьшается, что подтверждается данными атомно-силовой микроскопии. Кроме этого, такое снижение микротвердости можно объяснить тем, что медь не образует химических соединений с углеродом и в объеме покрытия представлена в виде отдельной более мягкой фазы.

Установлено, что в общем случае коэффициент трения легированных углеродных покрытий увеличивается с ростом концентрации легирующего металла (рисунок 2.5).

Данное наблюдение согласуется с результатами, представленными в работах [4], [5], [15]. Наименьшим коэффициентом трения характеризуются покрытия с содержанием меди 2,24 ат. % (200 Вт). Однако при дальнейшем росте концентрации коэффициент трения также возрастает.

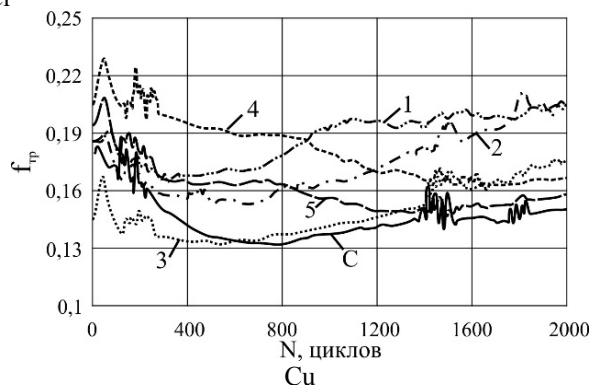
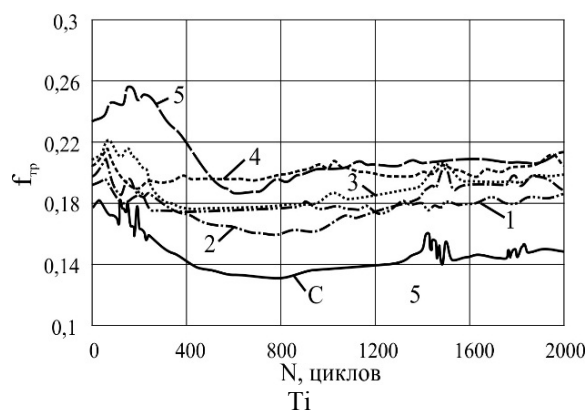
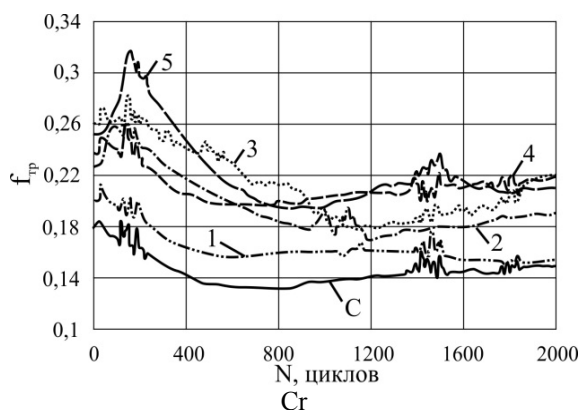


Рисунок 2.5 – Кинетические зависимости коэффициента трения нелегированных (С) и легированных углеродных покрытий, сформированных при различной мощности магнетрона:

1 – 40 Вт, 2 – 120 Вт, 3 – 200 Вт, 4 – 280 Вт, 5 – 400 Вт

Данный факт объясняется тем, что при относительно небольшой концентрации медь в покрытии способна выполнять роль твердой смазки и обеспечивать низкий коэффициент трения [13].

Из рисунка 2.6 видно, что введение металла в состав углеродных покрытий способствует снижению объемного коэффициента изнашивания контртела в 1,5...4 раза по сравнению с нелегированными покрытиями.

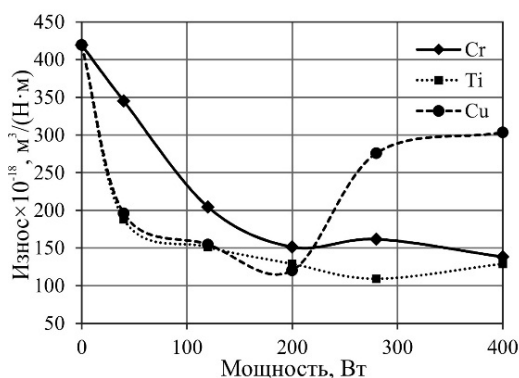


Рисунок 2.6 – Влияние режима легирования углеродных покрытий на объемный коэффициент изнашивания контртела

Данный факт может объясняться тем, что легирование углеродных покрытий металлом способствует увеличению содержания и степени упорядоченности sp^2 -кластеров. В процессе трения формируется так называемый слой переноса [5], состоящий в основном из графита, который выступает в роли твердой смазки.

Выводы

Установлены основные закономерности изменения свойств и фазового состава углеродных покрытий, легированных металлами Cr, Ti, Cu из плазмы магнетронного разряда при различных условиях и режимах, а именно:

- увеличение плотности и степени упорядоченности sp^2 -кластеров атомов углерода в 1,7–1,8 раза при легировании карбидообразующими металлами при повышении мощности магнетрона и в 2,2 раза – при легировании медью;
- увеличение на 10...20 % микротвердости углеродных покрытий при их легировании Cr, Ti из плазмы магнетронного разряда с ростом мощности разряда магнетрона от 40 Вт до 400 Вт;
- уменьшение шероховатости R_{ms} до 2...3 нм и коэффициента изнашивания контртела в 1,5...4 раза при трении в паре с углеродным покрытием, легированным металлом магнетронным распылением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Robertson, J. Diamond-like amorphous carbon / J. Robertson // Material Science and Engineering: Elsevier Science. – 2002. – Vol. R, № 37. – P. 129–281.

2. Рогачев, А.В. Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.

3. Фролов, К.В. Научно-технический прогресс в машиностроении: Современные методы упрочнения поверхностей деталей машин: обзор. информ. / К.В. Фролов. – М., 1991. – Вып. 9. – 187 с.

4. Diamond-like carbon based functionally gradient coatings for space tribology / C. Donnet [et al.] // Surface and Coatings Technology: Elsevier Science. – 1999. – Vol. 120. – P. 548–554.

5. Grill, A. Tribology of diamond-like carbon and related materials: an updated review // Surface and Coatings Technology. – Elsevier Science, 1997. – Vol. 95. – P. 507–513.

6. Synthesis of superlow friction carbon films from highly hydrogenated methane plasmas / A. Erdemir [et al.] // Surface and Coatings Technology. – Elsevier Science, 2000. – Vol. 134. – P. 448–454.

7. Donnet, C. Tribology of Diamond-like Carbon Films: Fundamentals and Applications / C. Donnet, A. Erdemir. – Springer Science & Business Media, 2007. – 680 p.

8. Long-term stability of hydrogenated DLC coatings: Effects of aging on the structural, chemical and mechanical properties / M. Cloutier [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2014. – Vol. 48. – P. 65–72.

9. Ferrari, A.C. Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon / A.C. Ferrari, J. Robertson // Physical Review B. – 2000. – Vol. 61. – P. 4095–4107.

10. Detailed Raman study of DLC coating on Si (100) made by RF-PECVD / A. Varade [et al.] // Procedia Engineering. – 2014. – Vol. 97. – P. 1452–1456.

11. Chrcanovic, B.R. Chemical and topographic analysis of treated surfaces of five different commercial dental titanium implants / B.R. Chrcanovic, A.R. Pedrosa, M.D. Martins. – Materials Research. – 2012. – Vol. 15. – P. 372–382.

12. Structure and characterization of the multilayered Ti-DLC films by FCVA / Y-H. Lin [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2010. – Vol. 19. – P. 1034–1039.

13. Пилипцов, Д.Г. Высоколегированные металлами углеродные покрытия: механические свойства, морфология, влияние природы и концентрации металла / А.В. Рогачев, Д.Г. Пилипцов, Н.Н. Федосенко, А.С. Руденков // Материалы, технологии, инструменты. – 2011. – Т. 16, № 3. – С. 26–30.

14. Зайченко, С.Г. Дислокационный механизм пластической деформации нанокристаллических материалов / С.Г. Зайченко, А.М. Глезер // Физика твердого тела. – 1997. – № 11. – С. 2023–2028.

15. *Effects of Cr concentrations on the microstructure, hardness, and temperature-dependent tribological properties of Cr-DLC coatings* / C.W. Zou [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2013. – Vol. 286. – P. 137–141.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РБ в рамках ГПНИ «Функциональные и машиностроительные

материалы, наноматериалы», подпрограмма «Материалы в технике», задание 4.5.01, № гос/р 20140966 «Разработка конструкции, состава материала для элементов оснастки, использующейся при производстве изделий электроники, метода его формирования путем осаждения покрытий, их ионного легирования».

Поступила в редакцию 19.06.15.

УДК 535.51

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРОФОТОМЕТРИИ ДЛЯ ПОГЛОЩАЮЩЕГО СЛОЯ НА ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПОДЛОЖКЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

Н.И. Стаськов¹, С.О. Парашков¹, А.В. Шилов¹, Н.А. Крекотень²¹Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев, Беларусь²ОАО «Интеграл», Минск, Беларусь

ANALYTICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF A SPECTROPHOTOMETER ABSORBING LAYER ON AN ABSORBING SUBSTRATE WITH A DIELECTRIC LAYER

N.I. Staskov¹, S.O. Parashkov¹, A.V. Shylov¹, N.A. Krekoten²¹A.A. Kuleshov Mogilev State University, Mogilev, Belarus²JSC "INTEGRAL", Minsk, Belarus

На примере двухслойной структуры полупроводник – диэлектрик – полупроводник рассмотрена возможность аналитического определения оптических параметров $n_i(\lambda)$, $k_i(\lambda)$ и толщины d_i верхнего слоя по огибающим спектров отражения при нормальном падении света. Рассчитать такие функции даже для случая отсутствия переходных зон между слоями очень сложно. Несовпадение огибающих расчетных и измеренных коэффициентов отражения в определенных областях спектров указывает на наличие неоднородных поверхностных и переходных зон в реальных структурах pSi – SiO₂ – cSi.

Ключевые слова: двухслойная структура, оптические спектры, огибающие экстремумов, переходные слои, pSi – SiO₂ – cSi.

On the example of a two-layer structure of a semiconductor – insulator – semiconductor the possibility of an analytical determination of the optical parameters and thickness of the upper layer on the reflection spectrum envelope at normal incidence of light is considered. It is very difficult to calculate these functions even in the case of absence of the transition zones between the layers. Mismatching envelopes calculated and measured reflection coefficients in certain areas of the spectra indicates the presence of inhomogeneous surface and transition zones in real structures pSi – SiO₂ – cSi.

Keywords: bilayer structure, optical spectra, envelopes extrema, transition layers, pSi – SiO₂ – cSi.

Введение

В настоящее время считается, что одним из наиболее перспективных оптических методов определения всех параметров многослойной структуры является интерференционная спектрофотометрия отраженного и прошедшего света [1]–[3]. Разрабатываются методики решения ее основных уравнений для определения коэффициентов Френеля на границах раздела структуры и аналитического расчета оптических и геометрических характеристик слоев и подложки. Для этого на спектрах (отражения $R(\varphi, \lambda)$ или пропускания $T(\varphi, \lambda)$), измеренных или при постоянном угле падения (φ), или при постоянной длине волны (λ), строят огибающие экстремумов. Из данных работы [4], полученных на основании модельных расчетов, следует, что в случае пяти толстых ($d > \lambda$) диэлектрических слоев спектры $R(\varphi)$ и $T(\varphi)$ не похожи на интерференционные спектры одного слоя на подложке. Их максимумы и минимумы имеют разную интенсивность. Они не имеют четкой периодичности. На отдельных интервалах по таким спектрам затруднительно

определить положение огибающих экстремумов. Такая операция является основной при решении обратных задач по определению электродинамических параметров структуры. О трудностях построения огибающих для двухслойной структуры отмечалось в работе [5].

Можно ли вообще построить огибающие спектра $R(\varphi, \lambda)$, например, двухслойной структуры, и определить коэффициенты отражения хотя бы одного слоя? В данной работе мы попытались решить эту задачу при нормальном ($\varphi = 0$) падении света и рассмотреть возможность аналитического определения параметров поглощающего слоя ($n_1(\lambda)$, $k_1(\lambda)$, d_1) на известной поглощающей подложке ($n_3(\lambda)$, $k_3(\lambda)$) с диэлектрическим слоем ($n_2(\lambda)$, d_2). Цель работы определяется тем, что двухслойные структуры полупроводник – диэлектрик – полупроводник на основе кремния широко используются в микро и оптоэлектронном приборостроении. В связи с этим особый интерес представляет разработка оптического метода контроля параметров слоя поликристаллического кремния (pSi), нанесенного

на подложку кристаллического кремния (cSi) со слоем оксида кремния (SiO₂). Так как толстые ($d = 3$ мм) полупроводниковые подложки непрозрачны для видимого света, то анализ обсуждаемой структуры можно проводить только по спектрам отражения.

Для определения двух характеристик первого слоя в рассматриваемом случае можно выполнить измерения спектров $R(\lambda)$ в двух средах.

1 Теория метода

Пусть свет падает из среды с $n_0(\lambda)$ на слой pSi. Если это воздух, то $n_0^*(\lambda) = 1$. В другом случае это может быть прозрачная иммерсионная жидкость, например, вода с показателем преломления

$$n_0^{**}(\lambda) = 1,3226 + 4,1654 \cdot 10^{-3} \lambda^{-2} - 2,4851 \cdot 10^{-4} \lambda^{-4} \quad (\lambda \text{ в } \mu\text{m}).$$

Представим комплексные показатели преломления поглощающих сред в форме $N = n - ik$. Выражение для отражательной способности нашей структуры при нормальном падении света имеет вид [6]

$$R(\lambda) = \left| \frac{r_{01}(\lambda) + r_{13}(\lambda) \exp(-i2\delta_1(\lambda))}{1 + r_{01}(\lambda)r_{13}(\lambda) \exp(-i2\delta_1(\lambda))} \right|^2, \quad (1.1)$$

где

$$r_{13}(\lambda) = \frac{r_{12}(\lambda) + r_{23}(\lambda) \exp(-i2\delta_2(\lambda))}{1 + r_{12}(\lambda)r_{23}(\lambda) \exp(-i2\delta_2(\lambda))},$$

$$r_{01}(\lambda) = \frac{n_0(\lambda) - N_1(\lambda)}{n_0(\lambda) + N_1(\lambda)},$$

$$r_{12}(\lambda) = \frac{N_1(\lambda) - n_2(\lambda)}{N_1(\lambda) + n_2(\lambda)},$$

$$r_{23}(\lambda) = \frac{n_2(\lambda) - N_3(\lambda)}{n_2(\lambda) + N_3(\lambda)},$$

$$\delta_1(\lambda) = 2\pi d_1 \lambda^{-1} N_1(\lambda),$$

$$\delta_2(\lambda) = 2\pi d_2 \lambda^{-1} n_2(\lambda).$$

В таком случае легко найти выражения для огибающих максимумов (+) и минимумов (–) спектра $R(\lambda)$

$$R_{\pm}(\lambda) = \left| \frac{|r_{01}(\lambda)| \pm |r_{13}(\lambda)| \exp(-4\pi d_1 \lambda^{-1} k_1(\lambda))}{1 + |r_{01}(\lambda)| |r_{13}(\lambda)| \exp(-4\pi d_1 \lambda^{-1} k_1(\lambda))} \right|^2. \quad (1.2)$$

Это в свою очередь позволяет рассчитать отражательную способность $|r_{01}(\lambda)|^2 = R_{01}(\lambda)$ на границе раздела среда с $n_0(\lambda)$ – подложка с $N_1(\lambda)$

$$R_{01}(\lambda) = \left| \frac{1 + \sqrt{R_+(\lambda)R_-(\lambda)} - \sqrt{(1-R_+(\lambda))(1-R_-(\lambda))}}{\sqrt{R_+(\lambda)} + \sqrt{R_-(\lambda)}} \right|^2 \quad (1.3)$$

и параметр $[|r_{13}(\lambda)| \exp(-4\pi d_1 \lambda^{-1} k_1(\lambda))]^2 = R_{13}(\lambda)$,

который характеризует отражение света на границе раздела среда с $N_1(\lambda)$ – подложка $N_3(\lambda)$ с диэлектрическим слоем

$$R_{13}(\lambda) = \left| \frac{1 - \sqrt{R_+(\lambda)R_-(\lambda)} - \sqrt{(1-R_+(\lambda))(1-R_-(\lambda))}}{\sqrt{R_+(\lambda)} - \sqrt{R_-(\lambda)}} \right|^2. \quad (1.4)$$

Таким образом, для аналитического определения оптических функций первого слоя $n_1(\lambda)$, $k_1(\lambda)$ необходимо:

- измерить спектры $R^*(\lambda)$ и $R^{**}(\lambda)$ в двух средах с $n_0^*(\lambda)$ и $n_0^{**}(\lambda)$;
- построить две пары соответствующих огибающих ($R_+^*(\lambda)$, $R_+^{**}(\lambda)$);
- по выражению (1.3) определить отражательные способности $R_{01}^*(\lambda)$ (воздух – среда с $N_1(\lambda)$) и $R_{01}^{**}(\lambda)$ (иммерсионная жидкость – среда с $N_1(\lambda)$).

После этого находим неизвестные оптические характеристики слоя

$$n_1(\lambda) = \frac{0.5(R_{01}^{**}(\lambda) - 1)(R_{01}^*(\lambda) - 1)[(n_0^{**}(\lambda))^2 - 1]}{(R_{01}^*(\lambda) + 1)(R_{01}^{**}(\lambda) - 1) - n_0^{**}(\lambda)(R_{01}^*(\lambda) + 1)(R_{01}^*(\lambda) - 1)}, \quad (1.5)$$

$$k_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2n_1(\lambda)(R_{01}^*(\lambda) + 1)}{1 - R_{01}^*(\lambda)} - (n_0^{**}(\lambda))^2 - 1}. \quad (1.6)$$

Для определения толщины первого слоя (d_1) необходимо найти длины волн не менее, чем двух экстремумов в спектре $R(\lambda)$ и при этих длинах волн рассчитать фазы $\alpha_{01}(\lambda_m)$ и $\alpha_{13}(\lambda_m)$ коэффициентов отражения

$$r_{01}(\lambda_m) = |r_{01}(\lambda_m)| \exp(i\alpha_{01}(\lambda_m)),$$

$$r_{13}(\lambda_m) = |r_{13}(\lambda_m)| \exp(i\alpha_{13}(\lambda_m)).$$

Так как

$$r(\lambda_m) = \sqrt{R(\lambda_m)} \exp(i\alpha(\lambda_m)),$$

то

$$\alpha(\lambda_m) = \alpha_{13}(\lambda_m) - \alpha_{01}(\lambda_m) + 4\pi d_1 \lambda_m^{-1} n_1(\lambda). \quad (1.7)$$

Если принять во внимание, что максимумы порядка m приходятся на длины волн, удовлетворяющих условию $\alpha(\lambda_m) = 2m\pi$, а минимуму – на длины волн, удовлетворяющих условию $\alpha(\lambda_{m+1}) = (2m+1)\pi$, то можно получить два выражения для определения толщины первого слоя. В работе [1] для определения толщины слоя на подложке рекомендовано использование экстремумов m и $m+p$ порядков. В таком случае нет необходимости определять m . Удобно номер, например, максимума (v) присваивать по спектру слева на право. Тогда, для двух любых максимумов с $\lambda_v < \lambda_{v+p}$ на основании (1.4) получаем выражение для определения толщины слоя

$$d_1(\lambda) = \frac{[2p\pi + \alpha_{13}(\lambda_v) - \alpha_{13}(\lambda_{v+p}) - \alpha_{01}(\lambda_v) + \alpha_{01}(\lambda_{v+p})] \lambda_v \lambda_{v+p}}{4\pi[\lambda_{v+p} n_1(\lambda_v) - \lambda_v n_1(\lambda_{v+p})]} \quad (1.8)$$

Для двух соседних экстремумов с длинами волн для максимума λ_1 и для минимума λ_2 при $\lambda_1 > \lambda_2$ имеем

$$d_1 = \frac{[-\pi + \alpha_{01}(\lambda_1) - \alpha_{13}(\lambda_1) - \alpha_{01}(\lambda_2) + \alpha_{13}(\lambda_2)] \lambda_1 \lambda_2}{4\pi[\lambda_2 n_1(\lambda_1) - \lambda_1 n_1(\lambda_2)]} \quad (1.9)$$

2 Эксперимент

На растровом электронном микроскопе РЭМ S-4800 фирмы Hitachi было получено изображение скола промышленной структуры pSi – SiO₂ – cSi (КДБ12) (рисунок 2.1), из которого можно оценить толщины слоев pSi (0,38μm) и SiO₂ (0,10μm).

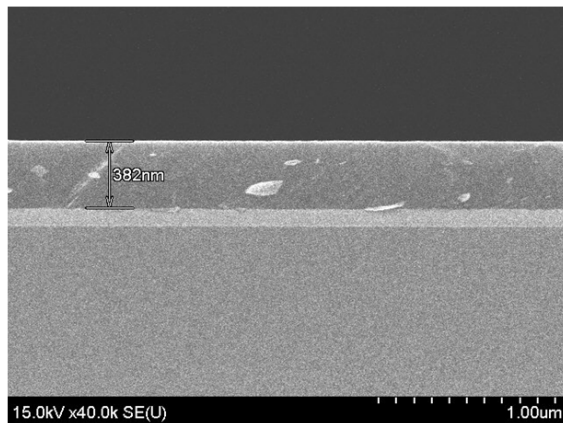


Рисунок 2.1 – Фотография скола структуры pSi – SiO₂ – cSi

Спектры $R_e(\lambda)$ (рисунок 2.2, кривая 1) этого образца измеряли в воздухе на спектрофотометре MPV – SP фирмы Leica (Германия) в видимой области спектра от 0,4μm до 0,8μm при нормальном падении света. По этому спектру строились огибающие максимумов и минимумов (кривые 3, 4).

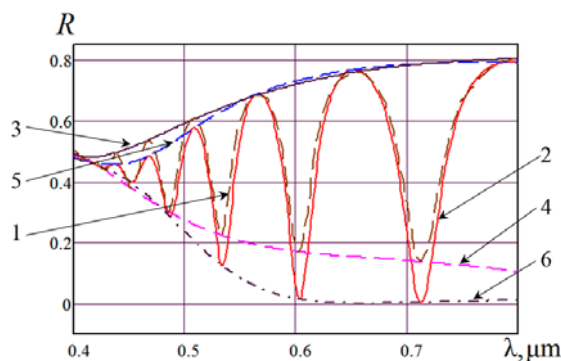


Рисунок 2.2 – Измеренный (1) и рассчитанный (2) спектры $R(\lambda)$ структуры pSi – SiO₂ – cSi и им соответствующие спектры огибающих (3, 4) и (5, 6) при $n_0(\lambda)=1$

3 Численное моделирование

Для численного моделирования спектры ($0,4\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8\mu\text{m}$) оптических характеристик pSi и подложки cSi (КДБ12) со слоем SiO₂ взяты соответственно из ПО к спектральному эллипсометру ES-2 и работы [7]. Толщина слоя SiO₂ варьировалась в пределах от 0 до 1μm. На основании спектров оптических характеристик материалов слоев и подложки численно определялись такие толщины d_1 и d_2 , при которых соответствующие длины волн максимумов и минимумов измеренного и на основании выражения (1.1) рассчитанного спектров отражения (рисунок 2.2, кривые 1 и 2) совпадали. Оказалось, что $d_1 = 0,374\mu\text{m}$ и $d_2 = 0,103\mu\text{m}$. В дальнейшем при моделировании структуры толщина слоя pSi не изменялась. На рисунке 3.1 приведены спектры (кривые 1) модельной структуры в воздухе для $d_2 = 0$ (а) и $d_2 = 0,6\mu\text{m}$ (б) и воде $d_2 = 0,103\mu\text{m}$ (в), которые были рассчитаны по выражениям (1.1). На основании выражения (1.2) построены спектры огибающих максимумов (+) (кривые 2) и минимумов (–) (кривые 3).

Такие же огибающие $R_{\pm}^*(\lambda)$ рассчитаны для спектра 2 (рисунок 2.2, кривые 5 и 6). Подобные расчеты были выполнены для исследуемой структуры, помещенной в воду.

При нормальном падении света глубина проникновения оценивается условно по выражению $d_p(\lambda) = \lambda(4\pi k_1(\lambda))^{-1}$. С увеличением длины волны в области $0,4\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8\mu\text{m}$ уменьшается показатель поглощения слоя поликристаллического кремния. Это приводит к увеличению глубины проникновения света в структуру и увеличению влияния параметров слоя оксида кремния и подложки на коэффициенты отражения $R^*(\lambda)$, $R^{**}(\lambda)$ и их огибающие. При отсутствии слоя SiO₂ (рисунок 3.1, а) огибающие являются монотонно убывающими функциями, которые легко найти аналитически по экстремумам спектра. Когда толщина оксидного слоя равна длине волны средней части спектра (б), такую операцию выполнить очень трудно. Появляются максимумы и минимумы, которые отсутствуют при $d_2 = 0$. Эти экстремумы не являются следствием интерференции света только на первом слое. Отмеченный эффект сильнее проявляется при использовании иммерсии.

Мы рассмотрели возможность оценки толщины первого слоя двухслойной структуры по выражению (1.8), в которое подставляли длины волн максимумов (таблица 1) из спектров $R(\lambda)$ (рисунок 2.2). Для определения фаз отраженных лучей по (1.1) и (1.7) использовались дисперсионные функции материалов слоев, подложки и

значения параметра $d_2 = 0,103 \mu\text{m}$. Оказалось (таблица 3.1), что толщина слоя поликристаллического кремния очень хорошо совпадает с найденной численно $d_1 = (0,374 \pm 0,004) \mu\text{m}$. Это позволило определить номера максимумов m в интерференционном спектре (последний столбец таблицы) и тем самым проверить выражение (1.8).

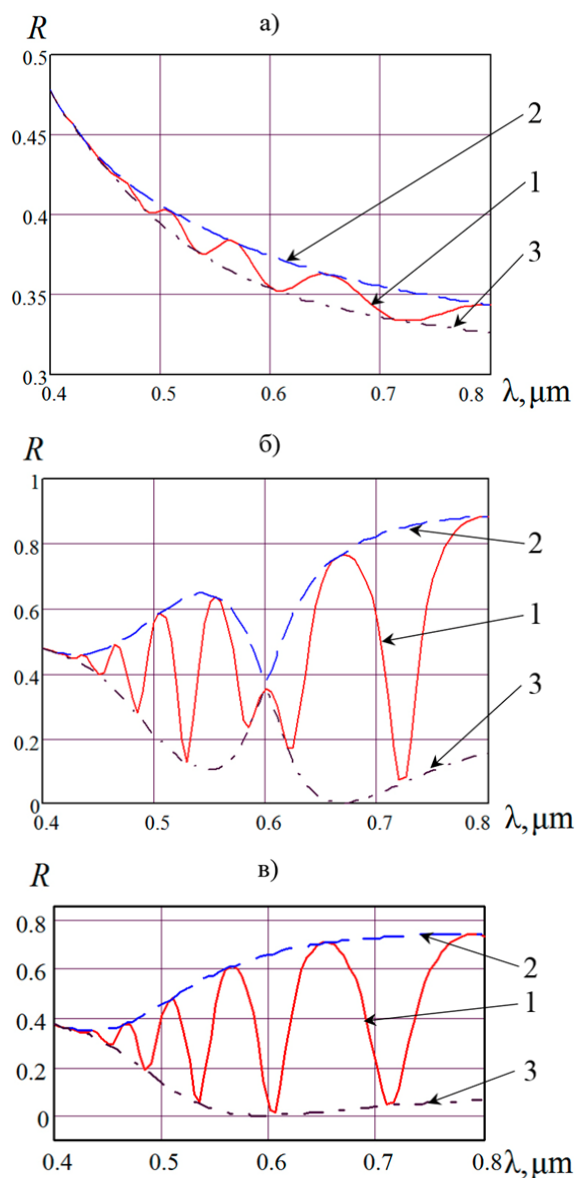


Рисунок 3.1 – Расчетные спектры структуры pSi – SiO₂ – cSi в воздухе а), б) и в воде в) при $d_1 = 0,374 \mu\text{m}$

v	$\lambda_v, \mu\text{m}$	$v, v + p$	$d_1, \mu\text{m}$	m
1	0,438	1, 6	0,375	7,854 (8)
2	0,468	2, 3	0,373	6,895 (7)
3	0,509	3, 6	0,374	5,915 (6)
4	0,566	1, 4	0,378	4,973 (5)
5	0,655	2, 5	0,373	3,995 (4)
6	0,798	4, 6	0,371	3,059 (3)

Как отмечалось выше, спектры $R^*(\lambda)$, $R^{**}(\lambda)$ и их огибающие $R_{\pm}^*(\lambda)$ и $R_{\pm}^{**}(\lambda)$ чувствительны к оптическим характеристикам среды, из которой падает свет, параметрам второго слоя и подложки. Поэтому, отражательные способности $|r_{01}^*(\lambda)|^2$ и $|r_{01}^{**}(\lambda)|^2$ из выражений (1.1) (рисунок 3.2, кривые соответственно 1 и 2) лишь частично ($\lambda < 0,63 \mu\text{m}$) совпадают с соответствующими спектрами $R_{01}^*(\lambda)$ и $R_{01}^{**}(\lambda)$ (кривые 3 и 4), определенными по огибающим $R_{\pm}^*(\lambda)$ и $R_{\pm}^{**}(\lambda)$ спектра 2 (рисунок 2.2) и соответственно спектра на рисунок 3.1 в).

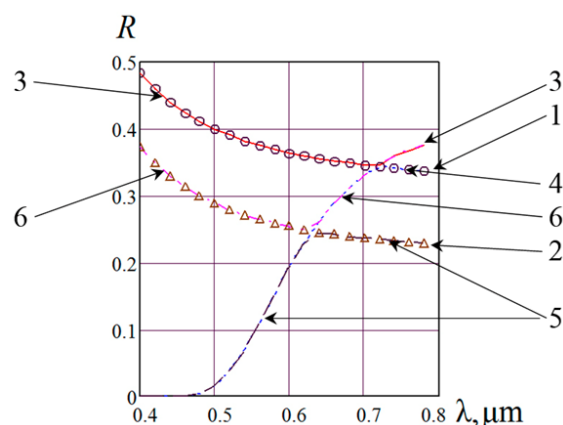


Рисунок 3.2 – Спектры отражательных способностей разных лучей

Более того в области от $0,63 \mu\text{m}$ до $0,72 \mu\text{m}$ спектр $|r_{01}^{**}(\lambda)|^2$ совпадает со спектром $R_{13}^{**}(\lambda)$, а в области от $0,72 \mu\text{m}$ до $0,8 \mu\text{m}$ для аналитического определения оптических спектров первого слоя необходимо будет в выражениях (1.5) и (1.6) $R_{01}^*(\lambda)$ и $R_{01}^{**}(\lambda)$ заменить соответственно на $R_{13}^*(\lambda)$ и $R_{13}^{**}(\lambda)$ (кривые 5 и 6).

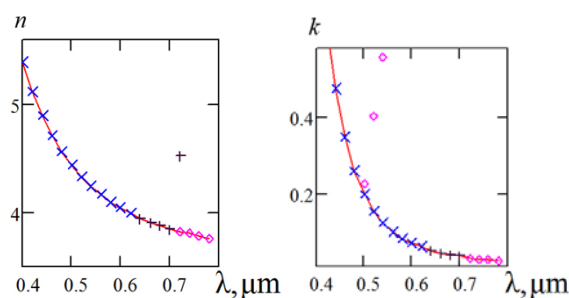


Рисунок 3.3 – Спектры $n_1(\lambda)$ и $k_1(\lambda)$ первого слоя модельной структуры

Рассчитанные на основании (1.5) и (1.6) по спектрам $R_{01}^*(\lambda)$ и $R_{01}^{**}(\lambda)$ спектры $n_1(\lambda)$ и $k_1(\lambda)$ (рисунок 3.3, крестики $\times \times \times$) лишь в области от $0,4 \mu\text{m}$ до $0,63 \mu\text{m}$ совпадают с заданными аналитически (сплошные кривые). В области от

0,63 μm спектры $n_1(\lambda)$ и $k_1(\lambda)$ (рисунок 3.3, дискретные точки) совпадают с аналитически заданными (сплошные кривые), если выполнить вышеуказанную замену $R_{01}^{**}(\lambda)$ на $R_{13}^{**}(\lambda)$ ($0,63 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,72 \mu\text{m}$, + + +) и $R_{01}^*(\lambda)$ и $R_{01}^{**}(\lambda)$ на $R_{13}^*(\lambda)$ и $R_{13}^{**}(\lambda)$ ($0,72 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8 \mu\text{m}$, $\diamond \diamond \diamond$).

Попробуем качественно объяснить несовпадение интенсивностей экстремумов спектров 1 и 2 на рисунке 2.2. Как уже отмечалось, глубина проникновения света в однородную среду при нормальном падении зависит от длины волны и показателя поглощения. В исследуемой спектральной области ее величина составляет примерно от 0,033 μm до 3 μm . Ранее в работах [8] и [9] соответственно методами спектральной и многоугловой эллипсометрии структур pSi – SiO₂ – cSi с более тонкими слоями ($d_1 \sim 0,2 \mu\text{m}$, $d_2 \sim 0,04 \mu\text{m}$) было показано, что границы раздела воздух – pSi [8] и воздух – pSi – SiO₂ – cSi [9] являются переходными зонами. Следовательно, при $0,4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,5 \mu\text{m}$ информативность спектра обуславливает сложный по структуре слой pSi, на котором находится переходная зона (приповерхностный слой) с воздушными порами. Эта область по данным многоугловой эллипсометрии имеет толщину около 0,011 μm и с помощью модели Бруггемана представляется состоящей из воздушных пор, аморфного кремния и оксида SiO₂. В области $0,5 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,6 \mu\text{m}$ вклад в спектр $R_e(\lambda)$ добавляет слой оксида с окруженными переходными зонами. Толщина зоны pSi – SiO₂ около 0,008 μm . При $\lambda > 0,6 \mu\text{m}$ вклад в спектр вносит пятислойная структура pSi – SiO₂ – cSi с переходной зоной SiO₂ – cSi. Толщина этой зоны около 0,012 μm . Доля переходной зоны воздух – pSi очень мала по отношению к толщине всего покрытия на подложке. На это указывает различие соответствующих огибающих $R_+(\lambda)$ (рисунок 2.2, кривые 3 и 5) в области от 0,4 μm до 0,55 μm и $R_-(\lambda)$ (кривые 4 и 6) в области $\lambda > 0,48 \mu\text{m}$.

Заключение

Таким образом, по предложенному выражению (1.8) можно аналитически определить толщину верхнего слоя двухслойной структуры, например, полупроводник – диэлектрик – полупроводник с известными дисперсионными функциями материалов слоев и подложки. Рассчитать

такие функции для верхнего слоя методом огибающих даже для случая отсутствия переходных зон между слоями очень сложно. Несовпадение огибающих расчетных и измеренных коэффициентов отражения в определенных областях спектров указывает на наличие неоднородных поверхностных и переходных зон в реальных структурах pSi – SiO₂ – cSi.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов, В.В. Аналитический метод определения оптических постоянных и толщины поглощающих пленок по спектрам отражения / В.В. Филиппов // Оптика и спектроскопия. – 1995. – Т. 78, № 5. – С. 798–801.
2. Minkov, D. Computation of the optical constants of a thin dielectric layer on a transmitting substrate from the reflection spectrum at inclined incidence of light / D. Minkov // JOSA A. – 1991. – Vol. 8, № 2. – P. 306–310.
3. Комраков, В.М. Измерение параметров оптических покрытий. / В.М. Комраков, Б.А. Шапочкин // Машиностроение, 1986. – 136 с.
4. Кособуцкий, П.С. Аналитические функции огибающих спектров Фабри – Перо многослойных структур / П.С. Кособуцкий // Письма в ЖТФ. – 2008. – Т. 34, № 10. – С. 79–82.
5. Филиппов, В.В. Метод огибающих для исследования системы двух пленок на отражающей подложке / В.В. Филиппов // Оптика и спектроскопия. – 2006. – Т. 101, № 3. – С. 485–489.
6. Борн, М. Основы оптики; пер. с англ. / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
7. Стаськов, Н.И. Эллипсометрия переходных слоев полупроводник – диэлектрик / Н.И. Стаськов, И.В. Ивашкевич, Н.А. Кречотень // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2 (15). – С. 18–24.
8. Беляева, А.И. Границы раздела слоев и шероховатость в многослойной кремниевой структуре. / А.И. Беляева, А.А. Галуза, С.Н. Коломиец // Физика и техника полупроводников. – 2004. – Т. 38, № 9. – С. 1050–1055.
9. Стаськов, Н.И. Моделирование переходных слоев в структуре полупроводник – диэлектрик – полупроводник / Н.И. Стаськов, И.В. Ивашкевич // Оптика неоднородных структур: материалы III междунар. науч.-практ. конф., Могилев, 2011 г. / МГУ им. А.А. Кулешова; ред.: В.А. Карпенко (отв. ред.). – Могилев, 2011. – С. 92 – 94.

Поступила в редакцию 14.09.14.

УДК 535.178

МОДУЛЯЦИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ТОНКОЙ ПЛЕНКОЙ ПЛОТНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЫ

Ю.В. Юревич¹, В.А. Юревич²

¹Могилёвский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев, Беларусь

²Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилев, Беларусь

MODULATION OF OPTICAL RADIATION IN CASE OF THIN FILM REFLECTION OF DENSE RESONANT MEDIUM

Yu.V. Yurevich¹, V.A. Yurevich²

¹A.A. Kuleshov Mogilev State University, Mogilev, Belarus

²Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus

Теоретически установлена возможность временной модуляции квазинепрерывного излучения в ходе резонансного отражения тонким активным слоем для условий относительной слабости релаксационных процессов. Резонансное преобразование светового поля при отражении в режиме когерентного взаимодействия можно использовать для формирования оптических сигналов в сверхбыстрых процессах взаимодействия излучения.

Ключевые слова: резонансное отражение, тонкие оптические плёнки, плотная резонансная среда, диполь-дипольное взаимодействие.

The possibility of temporal modulation of quasi-continuous radiation in the reflection of thin film of dense resonant medium is theoretically defined for the relative weakness of the relaxation processes. Resonant conversion of the light field in the reflection mode coherent interaction can be used to form the optical signals in ultrafast interaction processes of light radiation with thin layers.

Keywords: resonant reflection, thin optical films, dense resonant medium, dipole-dipolar interaction.

Введение

Известно, что в нестационарном энергообмене когерентного излучения с плотной резонансной средой способен сильно проявляться фазовый эффект, обусловленный диполь-дипольным взаимодействием. Влияние ближних полей диполей на положение центра и контур резонансной линии поглощения зарегистрированы в экспериментах [1], [2]. Кроме спектроскопических, предсказаны и наблюдались некоторые другие нелинейные оптические эффекты, инициированные этим фактором. В частности, оказались возможными оптическая бистабильность в пропускании сред с резонансным поглощением, называемая внутренней [3], [4], самоиндуцированная неустойчивость, приводящая к развитию автоколебаний в прошедшем излучении, и солитонное распространение ультракоротких импульсов в подобных материалах [5], [6].

Развитие лазерно-оптических технологий в направлении миниатюризации оптических элементов ведёт к необходимости применения и изучения физических свойств материалов с большой концентрацией активных центров (атомов, молекул, ионов, экситонов и т. д.), то есть именно плотных резонансных сред. Особые перспективы открываются с связи с применением тонких слоев плотных сред на основе полупроводниковых наноструктур, образованных квантовыми

точками [7]–[9]. Элементы наноструктур обладают большими дипольными моментами, связанными с экситонными переходами: их величина в структурах на основе, например, *GaInAsSb* или *InGaAs/GaAs*, способна достигать значения до $1...3 \cdot 10^{-28} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ [7]. Применение квантовой резонансной модели взаимодействия при анализе динамики когерентных оптических явлений в используемых в лазерной физике полупроводниках детально обосновано, например, в [10].

Особенность активных граничных плёнок состоит в том, что при резонансном воздействии света в отраженных пучках существенна дополнительная к френелевскому отражению (преломлению) составляющая, которая обусловлена резонансной поверхностной поляризацией [11]. Влияние этого компонента (его называют сверхизлучательным) на отражательную способность тонкого слоя ещё более значительно в условиях больших дипольных моментов экситонных частиц – возникает особый нелинейный вклад в эффективную частотную отстройку поля и резонансной поляризованности. В случае, если вещество граничной тонкой плёнки представляет собой плотную резонансную среду, влияние нелинейной фазовой модуляции на динамику эффективного отражения оптической среды способно стимулироваться диполь-дипольным взаимодействием в структуре активного слоя.

В этой связи представляет интерес характеристика динамики осцилляторных режимов отражения оптического излучения, действующего на граничные слои, образованные плотными резонансными средами на планарной поверхности линейного оптического вещества. В настоящей работе анализируется динамическая устойчивость материальных переменных, определяющих в указанных условиях воздействия нестационарный резонансный отклик тонких плёнок. Изучение закономерностей возникновения временных осцилляций в отражённом световом поле даёт возможность оценки динамических светомодуляционных свойств тонких активных плёнок из материалов, обычно используемых в оптике и лазерной физике.

1 Основные уравнения

При формулировке основных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие световых импульсов с подобными объектами, будем придерживаться приближения особо тонкого слоя резонансных атомов [12]. Граничная планарная плёнка с толщиной l значительно меньшей длины волны света $\lambda = 2\pi c/\omega$ находится на поверхности линейной оптической среды. Для определенности обычно ограничиваются подробным рассмотрением лишь ТЕ-волн, поэтому в задаче взаимодействия поля зондирующего светового излучения несущей частоты ω с ансамблем частиц, образующим активный поверхностный слой, применимо плосковолновое приближение. Отличие анализируемой граничной задачи от задачи распространения света в протяжённой резонансной среде состоит в использовании вместо уравнений Максвелла соответствующих электродинамических условий, связывающих комплексные напряженности полей и поляризованность в среде поверхностного слоя. Из граничных условий вытекают соотношения между квазистационарными амплитудами внешнего, прошедшего и отражённого электрического поля (E_i , E и E_r) и амплитудой вероятности поляризованности ρ . В случае нормального падения плоской волны из газовой среды на плёнку с нерезонансным показателем преломления η соотношения запишутся так:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{\eta+1} E_i - \frac{\mu N l \omega}{\varepsilon_0 (\eta+1) c} \rho, \\ E_r &= -\frac{\eta-1}{\eta+1} E_i - \frac{\mu N l \omega}{\varepsilon_0 (\eta+1) c} \rho. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь μ – средний дипольный момент активных центров, N – их концентрация; учтено, что амплитуда макроскопической объёмной резонансной поляризованности связана с вероятностной величиной ρ так: $P(t) = \mu N \rho(t)$. Согласование системы «быстропеременное электромагнитное поле – среда», в которой поле действующей

внутри слоя волны зависит от резонансных свойств элементарных диполей и, в свою очередь, определяет их динамику в условиях одно-квантового резонанса, требует уравнений для отклика среды на поле. Условия связи полей (1.1) должны быть дополнены квантовомеханическими уравнениями для квазистационарных переменных поляризованности ρ и разности населённостей n уровней резонансного перехода. Переменная светового поля в этой схеме для случая плотной резонансной среды должна выражать действующее поле E' , то есть содержать усреднённую составляющую, которой учитывается ближние поля диполей. Как показано в [13], эффективная динамика лорентцовой составляющей действующего поля E' также должна определяться, в основном, резонансной поляризованностью, то есть, в приближении среднего поля: $E'(t) = E(t) + i\mu N \rho(t) / 3\varepsilon_0$. В итоге согласования формулируется модификация уравнений Максвелла – Блоха, далее используемая для анализа динамики энергообмена поля внешнего излучения с активными центрами в тонком слое плотной резонансной среды:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\mu}{\hbar} n \left[\frac{2}{\eta+1} E_i - \frac{\mu N l \omega}{\varepsilon_0 (\eta+1) c} \rho \right] - \\ &\quad - i \left(\omega_0 - \omega - \frac{\mu^2 N}{3\varepsilon_0 \hbar} n \right) \rho - \frac{\rho}{T_2}, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{\mu}{\hbar} \left[\frac{2}{\eta+1} E_i \operatorname{Re} \rho - \frac{\mu N l \omega}{\varepsilon_0 (\eta+1) c} |\rho|^2 \right], \\ E_r &= -r_0 E_i - \frac{\mu N l \omega}{\varepsilon_0 (\eta+1) c} \rho. \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ω_0 – среднее значение собственной частоты атомного осциллятора, $r_0 = (\eta - 1) / (\eta + 1)$ – френелевский амплитудный коэффициент отражения, T_2 – время необратимой фазовой релаксации, релаксационный член в материальном уравнении для поляризованности существенен при некогерентном взаимодействии. Частотная отстройка в этом уравнении выражается суммой дефекта частоты $\omega - \omega_0$ и лорентцовой поправки с коэффициентом $\mu^2 N / 3\varepsilon_0 \hbar$, величина которой может изменяться по мере насыщения поглощения.

Представляется удобным перейти далее к безразмерным переменным и параметрам:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{T_2}, \quad e(\tau) = \frac{\mu}{\hbar} T_2 E(\tau), \\ \Delta\omega &= (\omega - \omega_0) T_2; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$\kappa = \frac{\mu^2 N l \omega}{\varepsilon_0 \hbar c (\eta+1)} T_2$ – показатель резонансного поглощения, $\gamma = \frac{(\eta+1)\lambda}{6\pi l}$ – нормирующий коэффициент при лорентцовой поправке. В соответствии

с процедурой масштабирования (1.3) система (1.2) в переменных $R = \text{Re} p$, $S = \text{Im} p$ и n принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau} &= nt_0 e_i - \kappa n R - (\Delta\omega + \gamma \kappa n) S - R, \\ \frac{dR}{d\tau} &= (\Delta\omega + \gamma \kappa n) R - \kappa n S - S, \\ \frac{dn}{d\tau} &= -t_0 e_i R + \kappa (R^2 + S^2), \\ e_r^2 &= (r_0 e_i + \kappa R)^2 + \kappa^2 S^2, \\ t_0 &= \frac{2}{\eta + 1}.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Динамика отражения согласно уравнениям (1.4) должна определяться осцилляциями поляризованности в условиях её релаксации. Существенным может быть влияние фазовой модуляции, эффективной в условиях отстройки частоты внешнего сигнала, и вариации фазового соотношения, вызванной влиянием ближних полей элементарных диполей в структуре тонкой резонансной плёнки.

2 Равновесные состояния модели

В этом разделе дана характеристика устойчивости материальных переменных системы (1.4) для случая стационарного внешнего оптического поля в условиях когерентного взаимодействия. Определяя устойчивость равновесных состояний динамической модели (1.4), можно дать оценку возможности осцилляторного поведения отражённого поля в случае, если внешний сигнал представляет прямоугольный выброс поля. Предполагается, таким образом, что время воздействия такого светового импульса с амплитудой $e_i(t) = e_0$ мало по сравнению с временем фазовой релаксации. В системах (1.2) или (1.4) влияние релаксационного члена тогда незначительно. В этом случае динамическая задача упрощается – переменные системы (1.4) связаны соотношением для закона сохранения вектора Блоха:

$$R^2 + S^2 + n^2 = 1. \quad (2.1)$$

Для точного резонанса ($\omega = \omega_0$) в пренебрежении диполь-дипольным взаимодействием решение системы, подобной (1.4), в задаче о сверхизлучении Дикке, получается аналитически [14]. Тогда при действии квазистационарного поля с напряжённостью выше определённого значения предсказываются нутационные осцилляции материальных переменных, а интенсивность проходящего среду поля должна испытывать регулярные колебания с частотой Раби, то есть с частотой, пропорциональной $\mu E / \hbar$. Переходные нутационные осцилляции p и n знакопеременны и развиваются в окрестности точки тривиального положения равновесия, то есть точки в фазовом

пространстве с координатами $|\rho_s| = 0$, $n_s = 0$. Механизм возникновения пульсаций известен: действующее излучение накачивает (инвертирует) ансамбль активных частиц в структуре среды, за время сверхизлучения $\tau_R = (\eta + 1) \epsilon_0 \hbar c / \mu^2 N \omega$ происходит сброс инверсии и высвечивание поглощённой энергии. В случае точного резонанса колебания поля и поляризованности когерентны. Переходный процесс в течение всего времени действия инициирующего внешнего поля нестационарен и носит характер автоколебаний.

В общем и более реальном случае существования дефекта резонанса ($\omega \neq \omega_0$) и нелинейного смещения частоты, определяемого вариацией населённости (при $\gamma \neq 0$), в схеме взаимодействия возникает амплитудно-фазовая связь. Модификация системы Максвелла – Блоха (1.4) поэтому характеризуется особыми равновесными значениями переменных R_s , S_s , n_s , которые определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}R_s &= \frac{\kappa n_s^2 t_0 e_0}{\kappa^2 n_s^2 + (\Delta\omega + \gamma \kappa n_s)^2}, \\ S_s &= \frac{n_s (\Delta\omega + \gamma \kappa n_s) t_0 e_0}{\kappa^2 n_s^2 + (\Delta\omega + \gamma \kappa n_s)^2},\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$n_s^2 t_0^2 e_0^2 = (1 - n_s^2) [\kappa^2 n_s^2 + (\Delta\omega + \gamma \kappa n_s)^2]. \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) следует из закона сохранения вектора Блоха (2.1) с учетом выражений (2.2) и означает, что равновесные значения разности населённости, а, следовательно, и поляризованности (2.2), могут неоднозначно определяться величиной плотности входного излучения. На рисунке 2.1 (а, б) в разных вариантах проиллюстрирована полученная параметрическим расчётом (2.2), (2.3) зависимость разности населённостей от нормированной величины плотности излучения.

Кривые 1–3 различаются значениями ненасыщенного поглощения в предположении, что вариации резонансного поглощения в слое определяются изменением концентрации активных центров N . При выборе параметров моделирования, которые использовались для определения коэффициентов системы (1.4) в данном разделе и далее, при численном моделировании нестационарных процессов, исходили, как правило, из тех оценок, которые известны, например, из работы [7], где рассмотрены структуры на основе *InGaAs*, нелинейно реагирующие на излучение в экситонной области спектра. Масштаб явления по уровню средней напряжённости e_0 соответствовал резонансному отражению прямоугольного импульса с интенсивностью не выше $2 \cdot 10^8$ Вт/см² планарной плёнки толщины l , не превышающей $\sim 10^{-7}$ м; плотность активных центров N предполагалась в пределах $1 \dots 4 \cdot 10^{24}$ м⁻³, частота резонанса ω_0 избрана примерно равной $1.45 \cdot 10^{15}$ рад/с.

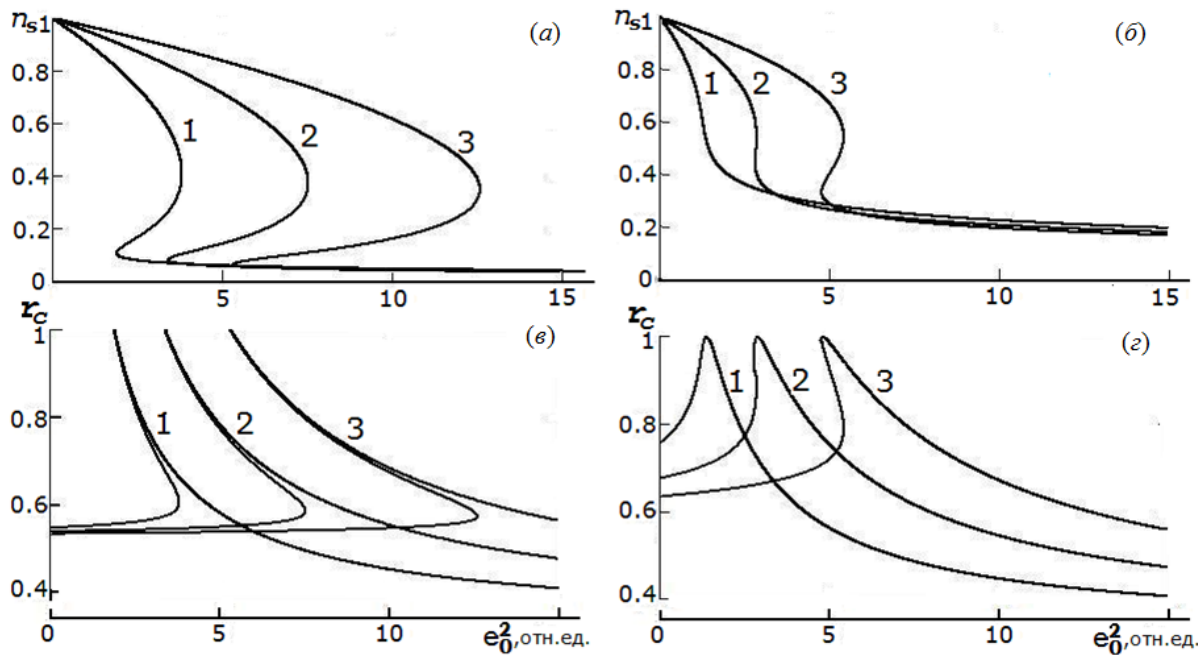


Рисунок 2.1 – Нелинейная зависимость разности населённостей от плотности внешнего излучения (а, б) и эффективного коэффициента отражения слоя (в, г): $\kappa = 0.6$ (кривая 1), 0.8 (2), 1.0 (3), $\Delta\omega = -0.1$ (а, в), -0.5 (б, г); $\gamma = 1.58$, $\eta = 3.6$, $T_2 = 5.0 \cdot 10^{-12} \text{ с}$, $\lambda = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$

Неоднозначность зависимости $n_s(e_0^2)$, как известно, означает бистабильность – одному и тому же значению плотности входного излучения соответствуют два равновесных значения материальных переменных. При изменении плотности e_0^2 среда обычно плавно переходит к новому равновесному состоянию. С наличием же бистабильного свойства отклика в точках поворота кривых такой переход совершается скачком. При циклическом изменении плотности излучения стационарный отклик среды демонстрирует гистерезис. Проявление гистерезиса происходит при отрицательных значениях дефекта $\Delta\omega$. В этом случае при изменении населённости система способна достичь эффективного резонанса – частотная отстройка в (1.2) или (1.4) становится нулевой. Ширина гистерезиса (расстояние между точками поворота кривых) зависит от значений уровня резонансного поглощения κ и особо критична к величине дефекта резонанса – это следует из сравнения кривых на рисунках 2.1 (а) и 2.1 (б). Эту критичность отклика системы по отношению к резонансу интересно отметить на гистерезисных зависимостях эффективного стационарного отражения $r_c = e_r^2 / e_0^2$ (рисунок 2.1 (в, г)), рассчитываемого для когерентного режима также на основе (2.2), (2.3):

$$r_c = \frac{\kappa^2 n_s^2 + r_0^2 (\Delta\omega + \kappa n_s)^2}{\kappa^2 n_s^2 + (\Delta\omega + \kappa n_s)^2}.$$

Зависимости $r_c(e_0^2)$ представлены сильно деформированными резонансными кривыми. Нулевая частотная отстройка в этом режиме означает, что тонкий слой при определённых значениях входной интенсивности может полностью отразить сигнал. На подобную особенность когерентного отражения указано ещё в работе [12], где не рассматривалась фазовая модуляция. Важно, что тогда при циклическом изменении интенсивности внешнего импульсного поля из-за гистерезиса оказывается возможным резкое переключение отражения, которое способно эффективно деформировать импульс.

Качественное изучение устойчивости решений (1.4) вблизи равновесных состояний (2.2), (2.3) дает возможность оценить характер его стабильности, указать зону параметров, в которой процесс перехода к положению равновесия принимает форму осцилляций. Линеаризация системы (1.4) в окрестности точек равновесия позволяет сформулировать характеристический полином относительно β – коэффициента в показателе экспоненциального решения $\exp(\beta\tau)$ линеаризованного аналога системы. Решение характеристического уравнения записывается в виде:

$$\beta = -\kappa n_s \pm \frac{i}{n_s} \sqrt{(\Delta\omega + \kappa n_s)(\Delta\omega + \kappa n_s^3)}. \quad (2.4)$$

Рисунок 2.2 демонстрирует полученную параметрическим расчётом нелинейную зависимость коэффициента β . Для поглощающих сред точки равновесия могут представлять собой

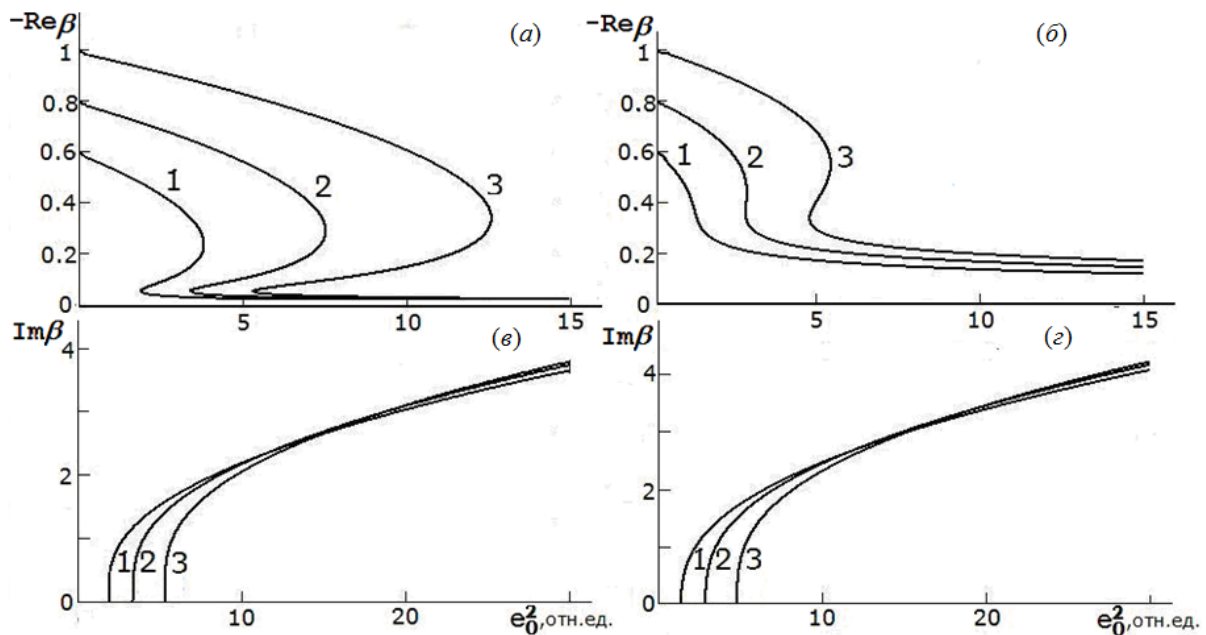


Рисунок 2.2 – Нелинейная зависимость действительной (а, б) и мнимой части (в, г) корней характеристического уравнения: $\kappa = 0.6$ (кривая 1), 0.8 (2), 1.0 (3), $\Delta\omega = -0.1$ (а, в), -0.5 (б, г); $\gamma = 1.58$, $\eta = 3.6$, $T_2 = 5.0 \cdot 10^{-12}$ с, $\lambda = 1.3 \cdot 10^{-6}$ м

устойчивый узел или устойчивый фокус. В последнем случае при относительно малых значениях n_s должно быть выраженным осцилляторное поведение решений. Это заметно из сравнения поведения кривых $n_s(e_0^2)$ рисунка 2.1 с кривыми $\text{Re}\beta(e_0^2)$ и $\text{Im}\beta(e_0^2)$ рисунка 2.2 – устойчивостью осцилляторного типа обладают точки, которые образуют нижнюю ветвь нелинейных кривых $n_s(e_0^2)$. Для них характерны ненулевая мнимая часть (рисунок 2.2 (в, г)), выражающая частоту осцилляций, и снижающееся с нарастанием мощности возбуждения затухание (рисунок 2.2 (а, б)). Для развития осцилляторных режимов перехода к равновесному состоянию необходимо достижение определённой плотности излучения – на шкале нелинейной зависимости кривые $\text{Im}\beta$ обладают пороговой особенностью (рисунок 2.2 (в, г)). В случае бистабильности пороговая плотность соответствует плотности e_0^2 в «левой» точке поворота гистерезисной кривой. Переход к осцилляторному режиму совершается скачком, частота осцилляций по мере нарастания уровня возбуждения должна увеличиваться.

Отметим далее, что, судя по результату расчёта $n_s(e_0^2)$, для небольших величин дефекта частоты $\Delta\omega$ (см., например, рисунок 2.1 (а), где в зоне бистабильности – $n_s \ll 1$) стационарные значения n_s , для которых возможен осцилляторный режим, в нижней ветви бистабильной кривой относительно малы. Решение уравнения (2.3) для n_s и, соответственно, выражение для

коэффициента β тогда определяется довольно просто:

$$n_s = \frac{|\Delta|}{\sqrt{t_0^2 e_0^2 - \kappa^2 - \kappa\gamma}}, \quad (2.5)$$

$$\beta = -\kappa n_s \pm i\sqrt{t_0^2 e_0^2 - \kappa^2 - \kappa\gamma\sqrt{t_0^2 e_0^2 - \kappa^2}}.$$

Из (2.5) следует, что затухание переходных осцилляций должно возрастать с увеличением резонансной отстройки частоты излучения, а частота осцилляций при относительно малых величинах дефекта $\Delta\omega$ от этого параметра не зависит. На нелинейной шкале пороговым условием возникновения переходных осцилляций, очевидно, будет требование

$$e_0^2 > \frac{\kappa^2(1+\gamma^2)}{t_0^2}.$$

Незатухающими нутационные осцилляции должны быть только при условии точного резонанса.

3 Результаты моделирования процесса отражения

Далее в рамках численного решения (1.4) изучена динамика реакции тонкого слоя на стационарное внешнее оптическое поле. При качественном анализе модели (1.4) можно было вместо уравнения для населённости использовать соотношение (2.1), чтобы сформулировать выражение (2.3). В численном моделировании процесса отражения закон сохранения вектора Блоха непосредственно использоваться не будет, поскольку колебания разности населённостей при когерентном взаимодействии знакопеременны, а

ввод соотношения (2.1) в систему (1.4) не даст возможности этого не учесть. Интегрирование системы (1.4) проводилось для начальных условий, очевидно соответствующих невозбужденному состоянию слоя: для разности населённости — $n(\tau=0)=1$ (поглощение не насыщено), для составляющих поляризованности — $R(\tau=0)=0$, $S(\tau=0)=0$ (поляризующее влияние внешнего излучения первоначально отсутствует). Рассчитывалась временная зависимость безразмерной плотности поля отражённого излучения $e_r^2(\tau)$.

На рисунках 3.1 и 3.2 было целесообразно привести типичные решения (1.4) для переменной $e_r^2(t)$, выраженной в относительных единицах на пикосекундной шкале времени, для общего случая ненулевого дефекта частоты, обуславливающего линейную фазовую модуляцию. Одновременно учитывается фактор ближних полей, вызывающий нелинейную модуляцию фазы, и в вариантах рисунка 3.1 отслеживается его динамическая роль на основе сравнения с решениями для случаев «формального» резонанса ($\Delta\omega=0$, $\gamma\neq 0$) и «полного» резонанса ($\Delta\omega=0$, $\gamma=0$).

В общем случае решения (1.4) описывают осцилляторный режим перехода к равновесному состоянию (рисунок 3.1 (а, з)). Релаксация к стационарному значению плотности отражённого поля, определяемому уровнем возбуждения e_0^2 , объясняется потерей когерентности осцилляций поля и поляризованности из-за отстройки частоты и вызванной им линейной фазовой модуляции. Решения для обоих резонансов соответствуют сценарию колебаний $e_r^2(t)$ без затухания (рисунок 3.1 (б, в, д, е)). В случае «формального»

резонанса частота пульсаций $e_r^2(t)$, порождённых нутационными осцилляциями материальных переменных, снижается (рисунок 3.1 (б, д)) по отношению к случаю «полного» резонанса (рисунок 3.1 (в, е)); форма пульсаций усложняется. Эти изменения стимулируются действием дополнительного фактора «раскачки» колебаний, обусловленного действием ближних полей диполей и способного периодически изменять фазовое соотношение поля и поляризованности.

Отметим, что особенности зависимости характера решений нелинейной системы (1.4) от параметров дефекта частоты и уровня поглощения качественно описываются соотношениями (2.3)–(2.5), формулируемыми для линеаризованного аналога модели. Это подтверждается и вариантами расчёта развёрток $e_r^2(t)$, приведенных на рисунке 3.2.

Рисунок 3.2 демонстрирует зависимость переходной динамики отражённого излучения от уровня возбуждения. Здесь же приведены фазовые портреты соответствующих решений (1.4) (рисунок 3.2 (а'–з')). Для относительно слабого возбуждения характерен апериодичный режим выхода на стационарный режим (рисунок 3.2 (а, д)). В области бистабильности возможен резкий переход к осцилляторному сценарию переходной динамики — фазовая кривая способна «захватить» окрестность точки равновесия с меньшим значением n_s и относительно слабым затуханием. Наиболее явно это выражено на вариантах рисунка 3.2 (б, е) (при уровне возбуждения, соответствующем вариантам рисунка 3.2 (а, д), этого не происходит).

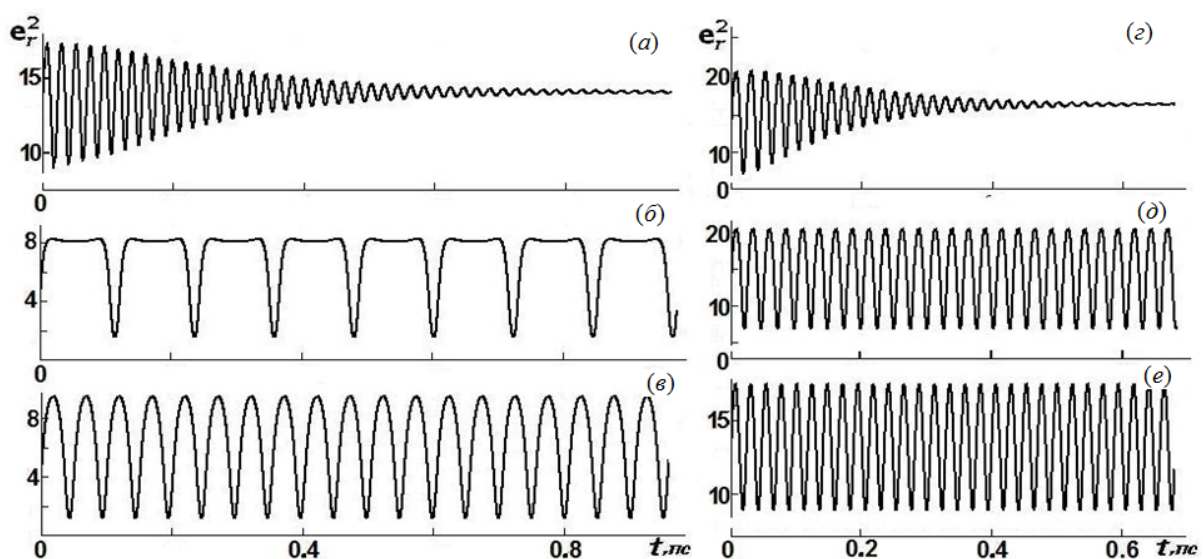


Рисунок 3.1 – Временная структура плотности отражённого поля, $\kappa = 0.6$ (а–в), 1.0 (з–е),

$e_0^2 = 40$ (а, з–е), 13.5 (б, в), $\Delta\omega = -0.3$ (а, з), 0 (б, в, д, е);

$\gamma = 1.58$ (а, б, з, д), 0 (в, е), $T_2 = 5.0 \cdot 10^{-13}$ с, $\lambda = 1.3 \cdot 10^{-6}$ м

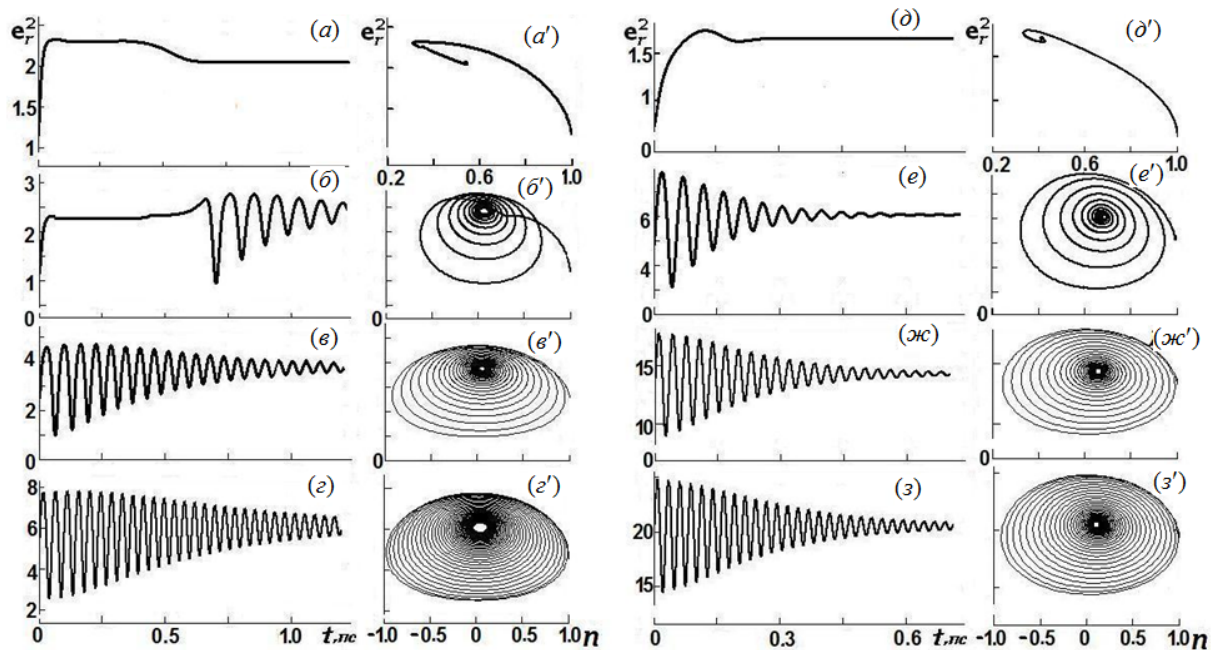


Рисунок 3.2 – Временная картина отражённого излучения (а–з) и соответствующие фазовые кривые системы (1.4) (а'–з'): $\kappa = 0.6$, $\Delta\omega = -0.1$ (а–г), -0.5 (д–е), $e_0^2 = 3.55$ (а), 3.56 (б), 7.5 (в), 15 (г, е), 1.9 (д), 40 (ж), 60 (з), $T_2 = 5.0 \cdot 10^{-13}$ с, $\lambda = 1.3 \cdot 10^{-6}$ м

Аналогичный «захват» фазовых траекторий в окрестности особых точек с «меньшей» степенью устойчивости типичен для остальных вариантов расчёта (рисунок 3.2 (в, г, ж, з)). Отметим, что пульсации e_r^2 объясняются именно нутационным фактором – колебания населенности, затухая к равновесному значению $n_s > 0$, знакопеременны (рисунок 3.2 (б'–г', е'–з')), то есть происходит накачка среды и высвечивание возбужденных центров. С ростом уровня возбуждения, как показывают и оценки значений мнимой части β на основе (2.5), частота пульсаций e_r^2 нарастает, время их релаксации из-за потери когерентности с увеличением отстройки $\Delta\omega$ снижается. Сравнение вариантов рисунка 3.2 (соответственно, б'–г' и е'–з') показывает, что при меньшем уровне поглощения контраст картины осцилляций выше. Динамические закономерности переходных процессов резонансного отражения в случае незначительной отстройки от резонанса поглощения можно, таким образом, эффективно использовать для модуляции излучения.

Заключение

Анализ динамики отражения резонансного излучения поверхностной активной плёнкой выполнен в работе в рамках приближения особо тонкого слоя, использованного для уравнений Максвелла – Блоха. Учёт диполь-дипольного взаимодействия, типичного для плотных резонансных сред, при этом даёт возможность рассмотреть

следствия линейной и нелинейной фазовой модуляции излучения. Для модельных параметров, соответствующих квантоворазмерным полупроводниковым структурам, качественный анализ и численное моделирование предложенной схемы расчёта вскрывают нелинейные осцилляторные особенности переходных динамических процессов в системе «квазистационарное поле излучения – резонансная плёнка». Характеристики осцилляций, в том числе амплитуда, частота и контраст, определяются мощностью отражаемого излучения, его спектральной близостью к резонансу поглощения, уровнем резонансного поглощения.

Основным результатом работы является установление возможности временной модуляции первоначально квазинепрерывного излучения в ходе резонансного отражения тонким активным слоем для условий относительной слабости релаксационных процессов. Резонансное преобразование светового поля при отражении в режиме когерентного взаимодействия можно использовать для формирования оптических сигналов в сверхбыстрых процессах взаимодействия излучения с тонкими активными плёнками, а также для целей диагностики оптических свойств структур пониженной размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Linear and Nonlinear Optical Measurements of the Lorentz Local Field* / J.J. Maki [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1991. – Vol. 67, № 8. – P. 972–975.

2. *Excitation dependence of resonance line self-broadening at different atomic densities* / H. Li [et al.] // *Journal of Phys. B: Atomic, Mol. and Opt. Phys.* – 2009. – Vol. 42. – P. 065203–9.
 3. *Boyd, R.W.* Local field effects in enhancing the nonlinear susceptibility of optical materials / R.W. Boyd, J.J. Maki, J.E. Sipeb // *Nonlinear Optics: Fundamentals, Materials and Devices.* – 1992. – P. 63–76.
 4. *Афанасьев, А.А.* Влияние ближних диполь-дипольных взаимодействий на действительную часть восприимчивости плотной резонансной среды / А.А. Афанасьев, С.Ю. Михневич // *ЖПС.* – 2002. – Т. 69, № 3. – С. 343–346.
 5. *Малышев, В.А.* Оптическое переключение и автоосцилляции отражения, вызванные локальным полем / В.А. Малышев, Э.К. Харке // *Опт. и спектр.* – 1997. – Т. 82, № 4. – С. 630–634.
 6. *Афанасьев, А.А.* Оптические солитоны в плотных резонансных средах / А.А. Афанасьев, Р.А. Власов, А.Г. Черствый // *ЖЭТФ.* – 2000. – Т. 117, № 3. – С. 489–495.
 7. *Panzarini, G.* Self-induced transparency in semiconductor quantum dots / G. Panzarini, U. Hohenester, E. Molinari // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 65, № 16. – P. 165322-1–6.
 8. *Каплан, А.Е.* Поведение локальных полей в нанорешётках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, «магические» числа и оптическая бистабильность / А.Е. Каплан, С.Н. Волков // *УФН.* – 2009. – Т. 179, № 5. – С. 539–547.
 9. *Damping of exciton rabi rotations by acoustic phonons in optically excited InGaAs/GaAs quantum dots* / A.J. Ramsay [et al.] // *Phys. Rev. Letts.* – 2010. – Vol. 104. – P. 01740-2–6.
 10. *Haug, H.* Quantum theory of the optical and electronic properties of semiconductors / H. Haug, S.W. Koch // *Singapore: World Scientific,* 1994. – 492 p.
 11. *Гадомский, О.Н.* Эхо-спектроскопия поверхности / О.Н. Гадомский, Р.А. Власов // *Мн.: Наука і тэхніка,* 1990. – 216 с.
 12. *Рупасов, В.И.* О граничных задачах в нелинейной оптике резонансных сред / В.И. Рупасов, В.И. Юдсон // *Квантовая электроника.* – 1982. – Т. 9, №11. – С. 2179–2186.
 13. *Захаров, С.М.* Нелинейное взаимодействие света с тонким слоем поверхностных резонансных атомов / С.М. Захаров, Э.А. Манькин // *ЖЭТФ.* – 1994. – Т. 106. – С. 1053–1065.
 14. *Allen, L.* Optical Resonance and Two-level Atoms / L. Allen, J.H. Eberly. – New-York: Wiley, 1975. – 256 p.
- Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект Ф14М – 146).*
- Поступила в редакцию 21.01.15.*

УДК 512.542

К ВОПРОСУ О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ Θ-ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь

ON THE PROBLEM OF INTERSECTIONS OF THE MAXIMAL Θ-SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, π – некоторое множество простых чисел. Доказаны теоремы, отражающие общие закономерности пересечений максимальных подгрупп конечной группы G взаимно простых с числами из π индексов, включающие утверждения о пересечениях $\Phi_{\pi, \mathfrak{F}_{\Theta_\pi}(G)}(G)$ и $\Delta_{\pi, \mathfrak{F}_{\Lambda_\pi}^\delta}(G)$.

Ключевые слова: формации конечных групп, подгрупповой m -функтор, пересечения максимальных θ -подгрупп конечной группы.

Let $\mathfrak{F}$ be a nonempty formation, π – some set of prime numbers. The theorems reflecting the general regularities on intersections of maximal subgroups of a finite group mutually simple with numbers from π indexes including statements on the intersections $\Phi_{\pi, \mathfrak{F}_{\Theta_\pi}(G)}(G)$ and $\Delta_{\pi, \mathfrak{F}_{\Lambda_\pi}^\delta}(G)$ are received.

Keywords: formations of finite groups, subgroup m -functor, intersections of maximal θ -subgroups in a finite group.

Введение

Результаты В.С. Монахова [1], [2] о пересечениях всех максимальных подгрупп и всех максимальных абнормальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга $F(G)$, в конечной разрешимой ненильпотентной группе G были распространены в работе [3] на пересечения всех максимальных подгрупп π' -индексов $\pi'd$ -группы, π – некоторое множество простых чисел, и на пересечения всех максимальных $\mathfrak{F}$ -абнормальных подгрупп π' -индексов конечной не $\mathfrak{F}$ -группы, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_π -замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$, в том числе на случай $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$, а также на пересечения соответствующих максимальных подгрупп без ограничений на их индексы (случаи, возникающие при $\pi = \emptyset$). В работе доказанные ранее утверждения включены в результаты, отражающие общие закономерности пересечений максимальных подгрупп, полученные с использованием понятия подгруппового m -функтора, определённого в [4]. Для случая $\pi = \emptyset$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ распространение результатов [1], [2] на необязательно разрешимые конечные группы с применением функторного метода было осуществлено в работе [5].

1 Предварительные сведения и результаты

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [6].

Под подгрупповым m -функтором будем понимать всякое отображение θ , которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и некоторых её максимальных подгрупп. Подгруппы множества $\theta(G)$ называют θ -подгруппами группы G .

Подгрупповой m -функтор θ , удовлетворяющий условию $\theta(G^\varphi) = \{H^\varphi \mid H \in \theta(G)\}$ для любого изоморфизма φ группы G , назовём подгрупповым m_i -функтором.

Определение подгруппового m -функтора, рассматриваемого как подгрупповой m_i -функтор, принадлежит авторам книги [4, с. 13–14].

Подгрупповой m -функтор θ назовём подгрупповым m_s -функтором при выполнении условия: если $H \in \theta(G)$, то $H^x \in \theta(G)$ для всех $x \in G$.

Подгрупповые m_i -функтор и m_s -функтор будем называть также подгрупповыми m -функторами, обладающими свойствами i и s соответственно.

Пусть θ – подгрупповой m -функтор. Через $\Phi_\theta(G)$ обозначают пересечение всех θ -подгрупп группы G . Легко видеть, что подгруппа $\Phi_\theta(G)$ является характеристической в G , если θ – подгрупповой m_i -функтор, и подгруппа $\Phi_\theta(G)$ нормальна в G , если θ – подгрупповой m_s -функтор.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, θ – подгрупповой m -функтор. Согласно принятым в [7] обозначениям, пересечение всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных θ -подгрупп группы G обозначаем через $\Phi_\theta^\mathfrak{F}(G)$. Если для любой группы G множество $\theta(G)$ включает все $\mathfrak{F}$ -абнормальные максимальные подгруппы группы G , то θ будем называть $\mathfrak{F}$ -абнормально полным подгрупповым m -функтором. В частном случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, получаем определение абнормально полного подгруппового m -функтора, введенного и рассматриваемого для подгруппового m_s -функтора в [7].

Подгрупповой m -функтор θ называется регулярным (эпиморфным) [4], если для любой нормальной подгруппы N группы G выполняются следующие условия:

- 1) из $H \in \theta(G)$ всегда следует $HN/N \in \theta(G/N)$;
- 2) из $H/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $H \in \theta(G)$.

Обозначаем через π некоторое множество простых чисел, $\pi' = P \setminus \pi$, где P – множество всех простых чисел, считаем также, что $\pi \neq P$. Пусть θ – подгрупповой m -функтор, $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Через θ_π будем обозначать подгрупповой m -функтор, сопоставляющий каждой группе G саму группу G и множество всех тех её максимальных θ -подгрупп, индекс каждой из которых не делится на числа из π ; пересечение всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных θ_π -подгрупп группы G обозначают $\Phi_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G)$. Если для любой группы G множество $\theta(G) \setminus \{G\}$ совпадает с множеством всех максимальных (всех максимальных $\mathfrak{F}$ -абнормальных) подгрупп в G , то $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_\pi(G)$, $(\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$, соответственно). В случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ используются обозначения $\Phi_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G) = \Delta_{\theta_\pi}(G)$, $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) = \Delta_\pi(G)$.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G . Через $\Phi_{\theta, N}^\mathfrak{F}(G)$ ($\Phi_{\theta, N}(G)$) обозначаем пересечение всех максимальных θ -подгрупп группы G , не содержащих (содержащих, соответственно) N , θ – подгрупповой m -функтор. Пересечение всех максимальных (всех максимальных $\mathfrak{F}$ -абнормальных) подгрупп группы G , каждая из которых имеет взаимно простой с числами из π

индекс и не содержит N , обозначаем через $\Phi_{\pi, N}^\mathfrak{F}(G)$ ($\Delta_{\pi, N}^\mathfrak{F}(G)$ соответственно).

Если в группе G не существует максимальных подгрупп, отвечающих указанным требованиям, соответствующие пересечения считаем совпадающими с G .

Подгруппа $\tilde{F}_N(G)$ группы G , N – нормальная подгруппа в G , определяется следующим образом: $\tilde{F}_N(G) \supseteq N$, $\text{Soc}(G/N) = \tilde{F}_N(G)/N$ [3]. Пусть θ – подгрупповой m_s -функтор. Тогда подгруппы $\Phi_{\theta_\pi}(G)$, $\Delta_{\theta_\pi}(G)$ нормальны в группе G . Через $\tilde{F}_{\Phi_\theta}(G)$ обозначаем в дальнейшем $\tilde{F}_N(G)$, если $N = \Phi_\theta(G)$. В случаях, когда $N \in \{\Phi_\pi(G), \Phi_{\theta_\pi}(G), \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G), \Delta_\pi(G), \Delta_{\theta_\pi}(G), \Delta(G)\}$, используем обозначения $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$, $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$, $\tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)$, $\tilde{F}_{\Delta_\pi}(G)$, $\tilde{F}_{\Delta_{\theta_\pi}}(G)$ и $\tilde{F}_\Delta(G)$ соответственно.

Лемма 1.1. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – непустые формации, $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) = \emptyset$, $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$. Для всякой формации $\mathfrak{F}_3$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_3 \subseteq \mathfrak{F}_0$, и максимальной, $\pi(\mathfrak{F}_2)$ -индекса подгруппы H в группе G равносильны условия: подгруппа H $\mathfrak{F}_i$ -абнормальна в G , $i \in \{0, 2, 3\}$.

Доказательство. Докажем вначале, что условие $\mathfrak{F}_0$ -абнормальности максимальной, $\pi(\mathfrak{F}_2)$ -индекса подгруппы группы G равносильно условию её $\mathfrak{F}_2$ -абнормальности в G .

Так как $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$, то $G^{\mathfrak{F}_0} \subseteq G^{\mathfrak{F}_2}$, а значит, $\mathfrak{F}_0$ -абнормальность всякой максимальной подгруппы группы G влечёт её $\mathfrak{F}_2$ -абнормальность в G .

Пусть H – $\mathfrak{F}_2$ -абнормальная максимальная, $\pi(\mathfrak{F}_2)$ -индекса подгруппа группы G . Значит, $G \neq 1$, и предположим, что H $\mathfrak{F}_0$ -нормальна в G , т. е. $G^{\mathfrak{F}_0} \subseteq H$. Обозначая $\bar{G} = G/G^{\mathfrak{F}_0} \in \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$, $\bar{H} = H/G^{\mathfrak{F}_0}$, имеем: $(\bar{G})^{\mathfrak{F}_2} = \bar{N} = N/G^{\mathfrak{F}_0} \in \mathfrak{F}_1$, $\bar{G}/\bar{N} \in \mathfrak{F}_2$. Обозначим $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi$, тогда $\pi(\mathfrak{F}_2) \subseteq \pi'$. Если $\bar{H}$ не содержит $\bar{N}$, то $\bar{H}\bar{N} = \bar{G}$, $|\bar{G} : \bar{H}|$ – π -число, что противоречит условию $|G : H|$ – π' -число. Значит, $\bar{N} \subseteq \bar{H}$, а потому $N \subseteq H$. Так как $G/N \cong \bar{G}/\bar{N}$, то $G^{\mathfrak{F}_2} \subseteq N \subseteq H$. Полученное противоречие с $\mathfrak{F}_2$ -абнормальностью H означает, что предположение о $\mathfrak{F}_0$ -нормальности H в G неверно, подгруппа H $\mathfrak{F}_0$ -абнормальна в G .

Завершение доказательства леммы следует из того, что $G^{\mathfrak{F}_0} \subseteq G^{\mathfrak{F}_3} \subseteq G^{\mathfrak{F}_2}$.

В работе [8] вводилось определение радикальной локальной формации $\mathfrak{F}_\pi \mathfrak{J}_{\pi'}^M$, содержащей $\mathfrak{F}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$; $\mathfrak{J}_{\pi'}^M = \bigcap_{\varphi \in M} (\mathfrak{J}_\varphi)_{\pi'}$, где $(\mathfrak{J}_\varphi)_{\pi'}$ – формация всех φ -дисперсивных π' -групп, φ пробегает некоторое множество M линейных упорядочений множества всех простых π' -чисел. В случае $\pi = \emptyset$ для формации $\mathfrak{J}_{\pi'}^M$ принимается обозначение $\mathfrak{J}^M = \bigcap_{\varphi \in M} \mathfrak{J}_\varphi$.

Следствие 1.1.1. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Условие абнормальности максимальной, π' -индекса подгруппы H в группе G равносильно условию $\mathfrak{N}_{\pi'}$ -абнормальности и условию $\mathfrak{F}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$ -абнормальности H в G .*

(2) *Условия $\mathfrak{F}_\pi \mathfrak{J}_{\pi'}^M$ -абнормальности и $\mathfrak{J}_{\pi'}^M$ -абнормальности максимальной, π' -индекса подгруппы H в группе G равносильны.*

Группу M называют квазинильпотентной ([9], с. 124), если $HC_M(H/K) = M$ для любого главного фактора H/K группы M . Через $\mathfrak{N}_{\pi'}^*$ ($\mathfrak{N}^*$) обозначаем формацию всех квазинильпотентных π' -групп, $2 \in \pi'$ (формацию всех квазинильпотентных групп, соответственно); $F_{\pi'}^*(G)$ – $\mathfrak{F}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}^*$ -радикал группы G .

Теорема 1.1. *Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , то:*

$$(1) F_{\pi'}^*(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G);$$

$$(2) \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi}(G).$$

Доказательство. (1) Ввиду S_n -замкнутости формации $\mathfrak{F}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}^*$ нормальная в $G/\Phi_\pi(G)$ π' -подгруппа $F_{\pi'}^*(G)/\Phi_\pi(G)$ содержится в $\mathfrak{N}_{\pi'}^* \subseteq \mathfrak{N}^*$, а значит, с учётом леммы 2.4 (3) из [3],

$$F_{\pi'}^*(G)/\Phi_\pi(G) \subseteq F^*(G/\Phi_\pi(G)) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)/\Phi_\pi(G).$$

Следовательно, $F_{\pi'}^*(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$.

Утверждение (2) вытекает из теоремы 3.2 [3], согласно которой $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi \cap \mathfrak{N}_{\pi'}^*}(G)$, и утверждения (1) следствия 1.1.1 леммы 1.1. Теорема доказана.

Следствие 1.1.1 [5]. Для любой группы G справедливо включение $F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$.

Следствие 1.1.2 [3]. Для любой группы G справедливо равенство $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_\Delta(G)$.

Лемма 1.2. *Пусть G – группа, $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если θ – $\mathfrak{F}$ -абнормально полный подгрупповой t -функтор, то $\Phi_\theta^\mathfrak{F}(G) = \Delta^\mathfrak{F}(G)$ и*

$\Phi_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G) = \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$. В частности, $\Delta_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G)$, если θ – абнормально полный подгрупповой t -функтор.

(2) *Пусть θ – абнормально полный подгрупповой t -функтор. Если формация $\mathfrak{F}$ содержит формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, то подгрупповой t -функтор θ является $\mathfrak{F}$ -абнормально полным и*

$$\Delta_\pi(G) = \Delta_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G) = \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G).$$

Доказательство. (1) Так как множество $\theta(G)$ включает все $\mathfrak{F}$ -абнормальные максимальные подгруппы G , то множество всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных подгрупп группы G совпадает с множеством всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных θ -подгрупп группы G , откуда $\Delta^\mathfrak{F}(G) = \Phi_\theta^\mathfrak{F}(G)$. Множество всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных θ -подгрупп π' -индексов в G , следовательно, совпадает с множеством всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных подгрупп π' -индексов в G , а значит, $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G)$.

(2) Так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то, очевидно, множество всех абнормальных максимальных подгрупп группы G содержит все $\mathfrak{F}$ -абнормальные максимальные подгруппы группы G , откуда $\Delta(G) \subseteq \Delta^\mathfrak{F}(G)$ и $\Delta_\pi(G) \subseteq \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$. А так как θ – абнормально полный подгрупповой t -функтор, то множество $\theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы, а значит, и все $\mathfrak{F}$ -абнормальные максимальные подгруппы группы G , т. е. θ – $\mathfrak{F}$ -абнормально полный подгрупповой t -функтор. По утверждению (1) $\Delta_\pi(G) = \Delta_{\theta_\pi}(G)$ и $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G)$. Лемма доказана.

Следствие 1.2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ – абнормально полный подгрупповой t -функтор. Тогда $\Phi_\theta^\mathfrak{F}(G) = \Delta^\mathfrak{F}(G) \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 1.2.1 вытекает непосредственно из леммы 1.2 и известного результата Селькина М.В. [6, следствие 8.7.1], указывая на избыточность требования регулярности подгруппового t -функтора θ и обладания им свойством s в условии следствия 5 работы [7].

Следствие 1.2.2. *Пусть θ – абнормально полный подгрупповой t_s -функтор. Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , то*

$$\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G) = \tilde{F}_{\Delta_{\theta_\pi}}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi}(G).$$

(2) $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_{\Phi_0}(G) = \tilde{F}_\Delta(G)$ для любой группы G .

Доказательство. (1) Понятно, что

$$\Phi_{\pi}(G) \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subseteq \Delta_{\theta_{\pi}}(G) = \Delta_{\pi}(G)$$

ввиду утверждения (1) леммы 1.2. Следовательно, по лемме 3.3 [3]

$$\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Delta_{\theta_{\pi}}}(G) = \tilde{F}_{\Delta_{\pi}}(G).$$

По теореме 1.1 (2) $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G) = \tilde{F}_{\Delta_{\pi}}(G)$. Утверждение (2) вытекает из утверждения (1), если положить $\pi = \emptyset$. Следствие доказано.

2 Достаточные условия справедливости утверждения $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}, \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)}(G) \neq G$ **для группы G и подгруппового m_s -функтора θ и вытекающие из него следствия**

Теорема 2.1. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) Для всякой группы G и подгруппового m_s -функтора θ справедливо равенство

$$\Phi_{\theta_{\pi}, \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G).$$

(2) Пусть θ – $\mathfrak{F}$ -абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть группа $G \notin \mathfrak{F}$, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда $\Phi_{\theta_{\pi}, \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)}(G) \neq G$.

Доказательство. (1) Заметим, что для всякой группы G , подгруппового m_s -функтора θ и нормальной в G подгруппы N подгруппа $\Phi_{\theta_{\pi}, N}(G)$ нормальна в G . Обозначим $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) = N$.

Если $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = G$, то по определению $\Phi_{\theta_{\pi}, N}(G) = G$. Пусть $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \neq G$. Тогда $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subset N$. Предположим, $\Phi_{\theta_{\pi}, N}(G) \neq \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$. Тогда, очевидно, $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}, N}(G) \cap \Phi_{\theta_{\pi}, N}(G)$. Пусть $K/\Phi_{\theta_{\pi}}(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi_{\theta_{\pi}}(G)$ из $\Phi_{\theta_{\pi}, N}(G)/\Phi_{\theta_{\pi}}(G)$. Так как $K \subseteq N$, то $K \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}, N}(G)$. Таким образом, $K/\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}, N}(G) \cap \Phi_{\theta_{\pi}, N}(G)/\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = 1$, что противоречит предположению о том, что $\Phi_{\theta_{\pi}, N}(G) \neq \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$. Значит, $\Phi_{\theta_{\pi}, \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$.

Утверждение (1) доказано.

(2) Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, содержащая все нильпотентные π' -группы $\mathfrak{N}_{\pi'}$, а подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ группы G обладает свойством C_{π} , то по лемме 4 из [8] $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. По утверждению (1) леммы 1.2 $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $\Phi_{\theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G) \subset G$.

Следовательно, $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \neq G$, ибо $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Из утверждения (1) следует $\Phi_{\theta_{\pi}, \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)}(G) \neq G$.

Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Если подгрупповой m -функтор θ является $\mathfrak{F}$ -абнормально полным, то

$$\Phi_{\pi}(G) \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subseteq \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$$

для любой группы G . Следующий результат вытекает из теоремы 2.1, так как $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$, если для подгруппового m_s -функтора θ положить $\theta(G)$ состоящим из группы G и всех её $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных подгрупп.

Следствие 2.1.1 [3, теорема 3.7]. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть группа $G \notin \mathfrak{F}$, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда $\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}}(G)}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$.

(2) Для всякой группы G и непустой формации $\mathfrak{F}$ выполняется равенство

$$\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}}(G)}^{\mathfrak{F}}(G).$$

Полагая для подгруппового m_s -функтора θ и любой группы G множество $\theta(G)$ состоящим из группы G и всех её максимальных подгрупп, получаем $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = \Phi_{\pi}(G)$. А так как $\Phi_{\pi}(G) \neq G$ для π' -д-группы G при условии $\Phi_{\pi}(G) \in C_{\pi}$, то применение теоремы 2.1 (1) приводит к следующему результату.

Следствие 2.1.2 [3, теорема 2.4]. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) Для всякой группы G выполняется равенство $\Phi_{\pi}(G) = \Phi_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)}(G)$.

(2) Пусть G – π' -д-группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда в G существует хотя бы одна максимальная подгруппа, имеющая взаимно простой с числами из π индекс и не содержащая $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)$.

Теорема 2.2. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, G – группа. И пусть подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) $\Phi_{\theta_{\pi}, \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$;

(2) если $G \neq \Phi_{\pi'}(G)$, то $\Phi_{\theta_{\pi}, \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)}(G) \neq G$.

Доказательство. По следствию 1.2.2 (1) леммы 1.2 $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)$. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'} \supseteq \mathfrak{N}$,

то абнормально полный подгрупповой m_s -функтор θ является и $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ -абнормально полным. Поэтому теорема 2.2 следует из теоремы 2.1.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы 2.2. Пусть подгрупповой абнормально полный m_s -функтор θ выделяет в каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и всех её абнормальных максимальных подгрупп. В этом случае из теоремы 2.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.2.1. Пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π . Тогда:

$$(1) \Delta_{\pi, \overline{F_{\Phi_\pi}(G)}}(G) = \Delta_\pi(G);$$

(2) если $G \neq F_\pi(G)$, то в G существуют максимальные абнормальные подгруппы, имеющие взаимно простые с числами из π индексы и не содержащие $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$, т. е. $\Delta_{\pi, \overline{F_{\Phi_\pi}(G)}}(G) \neq G$.

Следующий результат получается из теоремы 2.2 при $\pi = \emptyset$ и доказан в [5] для случая θ – эпиморфный абнормально полный подгрупповой m_i -функтор.

Следствие 2.2.2. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор. Тогда для любой группы G справедливы утверждения:

$$(1) \Phi_{\theta, \overline{F(G)}}(G) = \Phi_\theta(G);$$

$$(2) \text{ если } G \neq F(G), \text{ то } \Phi_{\theta, \overline{F(G)}}(G) \neq G.$$

Отметим также, что следствие 1 работы [5], а также следствие 2.4.1 теоремы 2.4 работы [3] о совпадении пересечения всех максимальных подгрупп неединичной группы G с пересечением всех её максимальных подгрупп, не содержащих $\tilde{F}(G)$, вытекает как из следствия 2.1.2 теоремы 2.1 (в случае $\pi = \emptyset$), так и из утверждения 1 следствия 2.2.2 теоремы 2.2 (множество $\theta(G)$ состоит из группы G и всех её максимальных подгрупп).

В случае, когда абнормально полный подгрупповой m_s -функтор θ выделяет в каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и всех её абнормальных максимальных подгрупп, из следствия 2.2.2 теоремы 2.2 вытекает лемма 1.4 и следствие 2 работы [5], а также следствие 3.7.5 теоремы 3.7 работы [3] о том, что в

каждой ненильпотентной группе G существуют ненормальные максимальные подгруппы M такие, что $M\tilde{F}(G) = G$; пересечение всех таких максимальных ненормальных подгрупп совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$. Этот результат вытекает также из следствия 2.2.1 теоремы 2.2 при $\pi = \emptyset$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – №4 (47). – С. 31–33.
2. Монахов, В.С. Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – 2004. – № 6 (27). – С. 81.
3. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.
4. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. навука, 2003. – 254 с.
5. Васильев, А.Ф. Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.В. Сыроковашин // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 62–64.
6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
7. Бородич, Е.Н. О пересечениях $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных θ -подгрупп / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич // Весці Нацыянальнай Акадэміі Навук Беларусі. – 2007. – № 3. – С. 47–52.
8. Белоконь, Л.М. Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 3–10.
9. Huppert, B. Finite groups III. / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1982. – 454 p.

Поступила в редакцию 03.04.15.

УДК 517.925

ЗАДАЧА ЕРУГИНА О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОМ СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОГО СРЕДНЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА

М.С. Белокурский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ERUGIN'S PROBLEM ON THE EXISTENCE OF IRREGULAR SOLUTIONS IN ONE CASE OF THE LINEAR SYSTEM WITH NONZERO MEAN OF PERIODIC COEFFICIENT

M.S. Belokursky

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Получены необходимые и достаточные условия существования сильно нерегулярного периодического решения линейной периодической дифференциальной системы.

Ключевые слова: сильно нерегулярное периодическое решение, линейная дифференциальная система, периодический коэффициент.

The necessary and sufficient conditions under which linear periodic differential system has strongly irregular periodic solutions were obtained.

Keywords: strongly irregular periodic solution, linear differential system, periodic coefficient.

Введение

Как известно, периодическая дифференциальная система при определенных условиях может иметь периодические решения, период которых несоизмерим с периодом самой системы [1]–[6] и др. Такие периодические решения присущи достаточно широким классам дифференциальных систем, и названы сильно нерегулярными. Отметим, что сильно нерегулярные периодические колебания имеют место, например, в системе с двумя степенями свободы, представляющей собой два одинаковых маятника, соединенных упругой горизонтальной связью с жесткостью, периодически зависящей от времени. Такого рода колебания могут возникать и в электрическом аналоге такой системы – двух колебательных контурах, соединенных периодически меняющейся емкостью.

В монографии [3, §36] Н.П. Еругин рассматривал линейную систему вида

$$\dot{x} = (AP(t) + B)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad n \geq 2, \quad (0.1)$$

где A, B – постоянные $(n \times n)$ -матрицы, $P(t)$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица. В системе (0.1) матрицы A и $P(t)$ будем называть стационарным и периодическим коэффициентами соответственно. Для системы (0.1) с диагональным периодическим коэффициентом $P(t)$ Н.П. Еругиным изучены вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений, при этом, в частности, было доказано, что если матрица A невырожденная, то искомые решения

у системы (0.1) отсутствуют. Случай треугольного периодического коэффициента $P(t)$ был рассмотрен в работе [7]. Случай произвольного периодического коэффициента, но с нулевым средним значением, был исследован в работе [8].

Следует отметить, что системы вида (0.1) рассматриваются при решении задач управления асимптотическими инвариантами, в том числе показателями Ляпунова, стационарных управляемых систем при помощи периодических управлений [9], [10], а также задач стабилизации линейных систем управления периодической обратной связью, включая проблему Брокетта [11], [12].

1 Сильно нерегулярное периодическое решение линейной системы

Пусть K – кольцо матриц размерности $n \times n$ над полем $\mathbb{R}$ и $M \in K$. Множество матриц

$$\text{Ann}_l M = \{Z \mid ZM = 0, \quad Z \in K\}$$

будем называть левым аннулятором матрицы M .

Предположим, что стационарный коэффициент и усреднение периодического коэффициента удовлетворяют условию

$$A \in \text{Ann}_l \hat{P}. \quad (1.1)$$

В силу условия (1.1) стационарный коэффициент является вырожденным. Для определенности будем считать, что

$$\text{rank } A = q < n. \quad (1.2)$$

Пусть $x(t)$ – Ω -периодическое решение системы (0.1), при этом считаем, что хотя бы одна

из его компонент отлична от стационарной, а отношение ω/Ω является иррациональным числом. При выполнении условия (1.2) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица S такая, что у матрицы SA первые q строк будут линейно независимыми, а остальные $n - q$ строк будут нулевыми. Введем замену переменных

$$x = S^{-1}z, \quad (1.3)$$

которая приводит систему (0.1) к системе

$$\dot{z} = (SAP(t)S^{-1} + SBS^{-1})z, \quad (1.4)$$

где $SAP(t)S^{-1}$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица, у которой последние $n - q$ строк нулевые.

Тогда в силу [5] Ω -периодический вектор $z(t) = Sx(t)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (S\hat{A}PS^{-1} + SBS^{-1})z, \\ (S\hat{A}P(t)S^{-1} - S\hat{A}PS^{-1})z &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

С учетом условия (1.1) система (1.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Cz, \quad G(t)z = 0 \\ (C &= SBS^{-1}, \quad G(t) = SAP(t)S^{-1}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Обозначим через $G_1(t)$ матрицу размерности $q \times n$, составленную из первых q строк матрицы $G(t)$. Тогда, учитывая структуру матрицы SA , систему (1.6) можно записать в виде

$$\dot{z} = Cz, \quad G_1(t)z = 0. \quad (1.7)$$

Если столбцы матрицы $G_1(t)$ линейно независимы, то из второй системы в (1.7) следует тривиальность $z(t)$, что противоречит сделанному допущению. Значит, матрица $G_1(t)$ имеет неполный столбцовый ранг

$$\text{rank}_{\text{col}} G_1 = r < n. \quad (1.8)$$

При выполнении условия (1.8) согласно [6, с. 43] найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица Q такая, что у матрицы $G_1(t)Q$ первые $n - r = p$ столбцов будут нулевыми, в то время как остальные r столбцов будут линейно независимыми. Введем еще одну замену переменных

$$z = Qy, \quad (1.9)$$

которая приводит систему (1.7) к системе

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Dy, \quad G_2(t)y = 0 \\ (D &= Q^{-1}SBS^{-1}Q, \quad G_2(t) = G_1(t)Q). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Эта система имеет сильно нерегулярное периодическое решение $y(t) = Q^{-1}Sx(t)$. Так как у матрицы $G_2(t)$ первые p столбцов нулевые, а остальные r столбцов линейно независимы, то из второй системы в (1.10) на основании [6, с. 43] следует, что последние r компонент вектора $y(t)$ будут тривиальными, т. е.

$$y(t) = \text{col}(y^{[p]}(t), y_{[r]}(t)),$$

$$y^{[p]}(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_p(t)),$$

$$y_{[r]}(t) = \text{col}(y_{p+1}(t), \dots, y_n(t)) \equiv 0.$$

Это означает, что система (1.10) имеет следующую структуру

$$\dot{y}^{[p]} = D_{p,p}y^{[p]}, \quad D_{r,p}y^{[p]} = 0, \quad y_{[r]} = 0, \quad (1.11)$$

где $D_{p,p}$, $D_{r,p}$ – левые верхний и нижний блоки матрицы D (нижние индексы указывают размерность). Как видно из (1.11), Ω -периодический вектор $y^{[p]}(t)$ является решением линейной стационарной системы. Поэтому среди собственных значений матрицы коэффициентов $D_{p,p}$ первой системы в (1.11) будут числа

$$\pm i\lambda_j, \quad (j = 1, \dots, p'; \quad p' \leq [p/2]), \quad (1.12)$$

где $\lambda_j = 2m_j\pi/\Omega$, $m_j \in \mathbb{N}$. Пусть h_j – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению $\pm i\lambda_j$, $(j = 1, \dots, p'; \quad h_1 + \dots + h_{p'} = h; \quad 2h \leq p)$. Это означает, что вектор $y^{[p]}(t)$ представлен тригонометрическим полиномом вида

$$y^{[p]}(t) = \sum_{j=1}^{p'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t, \quad (1.13)$$

где коэффициенты a_j , b_j зависят от $2h$ произвольных вещественных постоянных. Поскольку $y^{[p]}(t)$ удовлетворяет и второй системе в (1.11), то имеет место тождество

$$D_{r,p} \sum_{j=1}^{p'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t \equiv 0. \quad (1.14)$$

Итак, если система (0.1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$, то выполняются условия (1.8), (1.12), (1.14) при этом

$$x(t) = S^{-1}Q \text{col}(y^{[p]}(t), 0, \dots, 0), \quad (1.15)$$

где вектор $y^{[p]}(t)$ определяется равенством (1.13).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. Обратимся к системе (1.7). В силу условия (1.8) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица Q такая, что замена переменных (1.9) приводит (1.7) к системе (1.10), где у матрицы $G_2(t)$ первые p столбцов нулевые, а остальные r столбцов линейно независимы. Согласно [6, с. 43] последнее обстоятельство означает, что

$$y = \text{col}(y^{[p]}, 0, \dots, 0), \quad y^{[p]} = \text{col}(y_1, \dots, y_p).$$

С учетом этого система (1.10) примет вид (1.11). Поскольку чисто мнимые числа (1.12) будут собственными значениями матрицы $D_{p,p}$, то первая система в (1.11) имеет $2h$ -параметрическое семейство Ω -периодических решений (1.13). Так как выполняется тождество (1.14), то система (1.11) имеет решение

$$y(t) = \text{col}(y^{[p]}(t), 0, \dots, 0).$$

Обратная замена переменных $y = Q^{-1}z$ позволяет найти Ω -периодическое решение системы (1.7), а значит и системы (1.6). В силу условия (1.1) вектор $z(t)$ удовлетворяет также и системе (1.5). Тогда из [5] вытекает, что $z(t)$ является Ω -периодическим решением системы (1.4). Возвращаясь к исходным переменным, заключаем, что тригонометрический многочлен (1.15) является сильно нерегулярным решением системы (0.1).

Таким образом, доказана

Теорема 1.1. Пусть в системе (0.1) стационарный коэффициент и усреднение периодического коэффициента удовлетворяют условию (1.1).

Если система (0.1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида (1.15). Для того чтобы (1.15) было решением системы (0.1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (1.8), (1.12), (1.14).

2 Пример нахождения сильно нерегулярного периодического решения линейной системы

Рассмотрим 2π -периодическую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x + y \cos t + z(2 - \cos t), \\ \dot{y} &= -6x + 2y \cos t + z(3 - 2 \cos t), \\ \dot{z} &= -6x + 3z.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Для этой системы

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ P(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & 1 & -1 - \cos t \\ \cos t & 1 - \cos t & -1 \\ -\cos t & -1 + \cos t & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{P} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Как видим, среднее значение периодического коэффициента является нетривиальным. Кроме этого, стационарный коэффициент является левым аннулятором среднего значения периодического коэффициента, т. е. выполнено условие (1.1).

С помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

система (2.1) приводится к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t & -\cos t & \cos t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Согласно [5], с учетом условия (1.1), искомое решение $(u(t), v(t), w(t))^T$ системы (2.2) удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cos t & -\cos t & \cos t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая структуру матрицы коэффициентов второй системы в (2.3) искомое решение $(u(t), v(t), w(t))^T$ удовлетворяет также и системе

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Еще одна замена переменных

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

приводит систему (2.4) к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{w}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица второй системы из (2.5) имеет один ненулевой столбец. Поэтому соответствующая компонента w_1 периодического нерегулярного решения должна быть нулевой. Тогда система (2.5) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = 0.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов редуцированной системы $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$. Поэтому последняя система имеет двухпараметрическое семейство сильно нерегулярных периодических решений

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \sqrt{3}t + b \sin \sqrt{3}t \\ \frac{1}{2}(b\sqrt{3} - a) \cos \sqrt{3}t - \frac{1}{2}(a\sqrt{3} + b) \sin \sqrt{3}t \end{pmatrix},$$

$$w_1 = 0,$$

где a, b – произвольные вещественные постоянные, которые удовлетворяют и системе (2.5). Теперь, возвращаясь к исходным переменным, находим решение системы (2.1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S^{-1} Q \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a \cos \sqrt{3}t + b \sin \sqrt{3}t \\ \frac{1}{2}(3a + b\sqrt{3}) \cos \sqrt{3}t + \frac{1}{2}(3b - a\sqrt{3}) \sin \sqrt{3}t \\ \frac{1}{2}(3a + b\sqrt{3}) \cos \sqrt{3}t + \frac{1}{2}(3b - a\sqrt{3}) \sin \sqrt{3}t \end{pmatrix},$$

период которого несоизмерим с периодом самой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Massera, J.L.* Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J.L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – Vol. 4, № 1. – P. 37–45.
2. *Курцвейль, Я.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.
3. *Еругин, Н.П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н.П. Еругин. – Мн.: АН БССР, 1963. – 273 с.
4. *Гайшун, И.В.* Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами / И.В. Гайшун // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 8. – С. 684–686.

5. *Грудо, Э.И.* О периодических решениях с несоизмеримыми периодами периодических дифференциальных систем / Э.И. Грудо // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 9. – С. 1499–1504.

6. *Деменчук, А.К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. / А.К. Деменчук. – Lambert Academic Publishing. Saarbrücken, 2012. – 186 с.

7. *Белокурский, М.С.* Решение задачи Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы с треугольным периодическим коэффициентом / М.С. Белокурский, А.К. Деменчук // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 4. – С. 17–22.

8. *Белокурский, М.С.* Решение задачи Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы с нулевым средним периодического коэффициента / М.С. Белокурский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 35–42.

9. *Зайцев, В.А.* Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами / В.А. Зайцев // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск. – 2003. – С. 31–62.

10. *Габдрахимов, А.Ф.* О ляпуновской приводимости стационарных управляемых систем / А.Ф. Габдрахимов, В.А. Зайцев // Изв. ИМИ УдГУ, 2006. – № 3 (37). – С. 21–22.

11. *Leonov, G.A.* Stabilization of linear system / G.A. Leonov, M.M. Shumafov // Cambridge Scientific Publishers, 2012. – 430 p.

12. *Леонов, Г.А.* Стабилизационная проблема Брокетта / Г.А. Леонов // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 5. – С. 190–193.

Поступила в редакцию 15.06.15.

УДК 512.542

ОБ ОПЕРАТОРНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ

Р.В. Бородич, С.Н. Быков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON OPERATOR GENERALIZATION OF FRATTINI SUBGROUP

R.V. Borodich, S.N. Bykov

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Изучается поведение нормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях.

Ключевые слова: формация, нормальная подгруппа, силовская p -подгруппа, группа операторов.

The behavior of normal subgroups in generalized Frattini extension is studied.

Keywords: formation, normal subgroups, Sylow p -subgroup, group of operators.**Введение**

Все рассматриваемые группы конечны. В обозначениях и определениях мы следуем монографиям [1], [2]. Исследование пересечений максимальных подгрупп восходит к работе Фраттини [3]. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многочисленных авторов. В частности, в работе В. Гашюца [4] исследовалось пересечение $\Delta(G)$ всех абнормальных максимальных подгрупп группы G . В работе Д. Бейдлемана и Т. Сео [5] изучалось поведение нормальных подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях.

В работе Д. Бейдлемана и Ш. Смита [6] был поставлен следующий вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G , содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H ?» Эта задача рассматривалась в работах многих авторов (см. монографию [2]). В данной работе этот вопрос рассматривается с позиции теории формаций и операторного обобщения подгруппы Фраттини.

1 Определения и обозначения

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \rightarrow \text{End}(G)$, где $\text{End}(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G . Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , то есть, $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A -допустимой для произвольной группы операторов.

В работе [7] Д. Горенштейн исследовал существование силовских A -допустимых подгрупп и установил, что для любого $p \in \pi(G)$, если группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда в ней существует A -допустимая силовская p -подгруппа и любые две из них сопряжены между собой в G .

Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда A -допустимую нормальную подгруппу H группы G назовем операторно-обобщенной подгруппой Фраттини, если $G = N_G(K)$ для каждой нормальной подгруппы L из G и каждой A -допустимой силовской подгруппы K из L такой, что $G = HN_G(K)$.

Через $F_p(G)$ обозначают p -нильпотентный радикал группы G , то есть, произведение всех нормальных p -нильпотентных подгрупп группы G .

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$; *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Отметим, что силовские подгруппы любой группы являются пронормальными.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G .

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

- 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;
- 2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Отображение f класса G всех групп в множество классов групп называют *экраном*, если для любой группы G выполняются следующие условия:

- 1) $f(G)$ – формация;
- 2) $f(G) \subseteq f(G^\circ) \cap f(\text{Ker } \varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G ;
- 3) $f(1) = G$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p -группах и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы G .

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Необходимо отметить, что не всякая максимальная подгруппа будет являться максимальной A -допустимой относительно некоторой группы операторов A .

Пример. Рассмотрим группу

$$G^* = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, bc = cb, b^a = c \rangle.$$

Тогда $G^* = [G]A$, где $G = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ и $A = \langle a \rangle$ – группа операторов группы G . Простая проверка показывает, что в группе G есть максимальная A -допустимая подгруппа $H = \langle bc \rangle$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например, b , являясь A -допустимыми. Отмеченный класс групп становится достаточно широким, если образовать группу $R = G^* \times Q$, где Q – сверхразрешимая группа и $(|G|, |Q|) = 1$.

2 Вспомогательные результаты

Лемма 2.1 [1]. Если подгруппа H пронормальна в группе G , то $N_G(H)$ – абнормальная подгруппа группы G .

Лемма 2.2 [1]. Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G / F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.

Лемма 2.3 [7]. Пусть группа G имеет группу операторов A , H – A -допустимая подгруппа группы G . Тогда $N_G(H)$ также является A -допустимой подгруппой в группе G .

Теорема 2.4 [8]. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $G \in \mathfrak{F}$ и p является простым делителем порядка группы G . Тогда формация $\mathfrak{F}$ содержит циклическую группу порядка p .

3 Свойства операторно-обобщенной подгруппы Фраттини

Теорема 3.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и H – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G . Тогда

- 1) H – нильпотентная подгруппа группы G ;
- 2) любая нормальная подгруппа, содержащаяся в операторно-обобщенной подгруппе Фраттини, является операторно-обобщенной подгруппой Фраттини;

3) если $\Delta(G) \neq G$, то $\Delta(G)$ – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G ;

4) $H\Phi(G)$ – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G ;

5) $HZ(G)$ – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G .

Доказательство. Пусть $p \in \pi(H)$ и K – силовская p -подгруппа подгруппы H . По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(K)H$. Так как H – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G , то $G = N_G(K)$. Итак, любая силовская p -подгруппа из H нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа H p -нильпотентна для любого простого числа $p \in \pi(H)$, следовательно, H – нильпотентная подгруппа группы G .

Пусть Q – нормальная подгруппа, содержащаяся в операторно-обобщенной подгруппе Фраттини H . Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие силовские p -подгруппы K из L , что $G = QN_G(K)$. Из того, что $Q \subseteq H$, следует, что $G = HN_G(K)$ и $G = N_G(K)$. Следовательно, Q – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G .

Рассмотрим для каждой нормальной подгруппы L из G такие силовские p -подгруппы K из L , что $G = \Delta(G)N_G(K)$. По лемме 2.1 $N_G(K)$ – абнормальная подгруппа группы G , следовательно, $N_G(K)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной подгруппе T . Так как $T \supseteq \Delta(G)$, то $G = T$. Из полученного противоречия получаем, что $G = N_G(K)$, а это означает, что $\Delta(G)$ – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G .

Следующие утверждения выполняются в силу того, что $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, а $Z(G)$ содержится в нормализаторе каждой подгруппы группы G . Теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини. Если N – нормальная подгруппа группы G и N/K π -замкнута, то N – π -замкнутая подгруппа группы G .

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_π -подгруппу H/K . Так как K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что S_π -подгруппа R из K является S_π -подгруппой в H . По теореме Шура-Цассенхауза H содержит S_π -подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H . По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учётом того, что $H = SR$, получаем $G = N_G(S)R$. Тогда по свойству 2 теоремы

3.1 R – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини. Следовательно $G = N_G(S)$, а значит S нормальна в G .

Следствие 3.2.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини, тогда $F_p(N/K) = F_p(N)/K$, в частности, $F(N/K) = F(N)/K$.

Теорема 3.3. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини и M – нормальная подгруппа группы G , содержащая K . Тогда M/K является операторно-обобщенной подгруппой Фраттини в G/K тогда и только тогда, когда M операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G .

Доказательство. Допустим, что M – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G . Пусть L/K – нормальная подгруппа из G/K и пусть H – A -допустимая силовская p -подгруппа нормальной подгруппы L из G , такая, что $G/K = (M/K)N_{G/K}(KH/K)$.

Тогда $G = MN_G(KH)$. Пусть $g = tx$, где $t \in M$ и $x \in N_G(KH)$. Тогда $H^x \subseteq KH$. Так как L – нормальная подгруппа группы G , то H и H^x – A -допустимые силовские p -подгруппы в подгруппе $L \cap KH$. Поэтому существует элемент y из $L \cap KH$, такой, что $H^{xy} = H$. Следовательно, $xy \in N_G(H)$. Тогда $gy = m(xy)$ содержится в $MN_G(H)$. Так как $MN_G(H)$ содержит KH . Отсюда следует, что $y \in MN_G(H)$, следовательно, $g \in MN_G(H)$. Мы показали, что $G = MN_G(H)$. В силу того, что M – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G , следует, что $G = N_G(H)$. Отсюда заключаем, что M/K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G/K .

Предположим, что M/K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини группы G/K . Пусть L – нормальная подгруппа группы G и пусть H – A -допустимая силовская p -подгруппа нормальной подгруппы L из G , такая, что $G = MN_G(H)$. Тогда

$$G/K = (M/K)N_{G/K}(KH/K).$$

Следовательно, так как KH/K – A -допустимая силовская p -подгруппа нормальной подгруппы KL/K из G/K , то $G/K = N_{G/K}(KH/K)$. Отсюда получаем, что KH – нормальная подгруппа группы G . Пусть H_1 – A -допустимая силовская p -подгруппа из KH , содержащая H . По обобщенной лемме Фраттини

$$G = KHN_G(H_1) = KN_G(H_1).$$

Следовательно, $G = N_G(H_1)$. Значит H_1 – нормальная подгруппа.

Из свойства 1 теоремы 3.1 следует, что M – нильпотентная подгруппа группы G . Тогда MH – нильпотентная подгруппа. Из того, что $G = MN_G(H)$, следует, что MH – нормальная нильпотентная подгруппа группы G .

Покажем, что $N_G(H)$ содержит MH . Пусть H_2 – A -допустимая силовская p -подгруппа подгруппы MH . Тогда H_2 нормальна в G . Следовательно, $H \subseteq H_2$. Пусть H_3 – A -допустимая силовская p -подгруппа группы G , содержащая H_2 . Так как L – нормальная подгруппа группы G , то $L \cap H_3 = H$ и $N_G(H_3) \subseteq N_G(H)$. Из этого следует, что $H_2 \subseteq N_G(H)$. Так как MH – нормальная нильпотентная подгруппа группы G , то $MH \subseteq N_G(H)$. Мы показали, что $G = N_G(H)$. Следовательно, M – обобщенная подгруппа группы G .

Теорема 3.4. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини, $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(K)$ и $H/O_\pi(K) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Согласно теореме 2.4 $\mathfrak{F}$ содержится в классе всех π -групп. Не ограничивая общности, можно считать, что K – π -группа. Таким образом H – π -группа и $H/K \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi$. Так как H – субнормальная подгруппа группы G и согласно следствия 3.2.1 $F_p(G/K) = F_p(G)/K$ получаем, что

$$F_p(H/K) = F_p(H)/K.$$

Так как $H/K \in \mathfrak{F}$, то, используя следствие 3.2.1 и лемму 2.2, получаем, что

$$(H/K)/F_p(H/K) = H/K/F_p(H)/K \\ H/F_p(H) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(H)$, то по лемме 2.2 подгруппа H входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ содержит формацию нильпотентных групп, $\pi = P$ и теорема 3.4 дает ответ на вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G , такая, что $H/K \in \mathfrak{F}$, где K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини, то будет ли $H \in \mathfrak{F}$?»

Если группа операторов A единична, а в качестве операторно-обобщенной подгруппы Фраттини выбрать подгруппу Гашюца $\Delta(G)$, то из теоремы 3.4 получаем

Следствие 3.4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Delta(G))$ и $H/O_\pi(\Delta(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Если группа операторов A единична и в качестве операторно-обобщенной подгруппы Фраттини выбрать подгруппу Фраттини $\Phi(G)$, то из теоремы 3.4 получаем результат работы [9].

Замечание. Если локальная формация $\mathfrak{F}$ не содержит формацию нильпотентных групп, то даже в случае единичной группы операторов из того, что $H/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ для субнормальной подгруппы H , не всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Действительно. Пусть $\mathfrak{F} = S_p$ – насыщенная формация всех p -групп, p – простое число. Рассмотрим $q \neq p$ и пусть $G = C_{p^2} \times C_{q^2}$ – циклическая группа порядка $p^2 q^2$. Если $H = C_{p^2} \Phi(G)$, тогда $H \triangleleft G$ и $H/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, но $H \notin \mathfrak{F}$.

Теорема 3.5. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини, $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N/N \cap K \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq K$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap K$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. По теореме 3.4 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – холловская π -подгруппа из N . Так как $N_2 \subseteq K$, то $N/DN_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap K$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя следствие 3.2.1 и лемму 2.2, получаем, что

$$\begin{aligned} (N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1) &= \\ &= N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1N_1/F_p(N_1) \in f(p). \end{aligned}$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 2.2 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 3.5.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, K – операторно-обобщенная подгруппа Фраттини, $\mathfrak{F}$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap K \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Если группа операторов A единична, а в качестве операторно-обобщенной подгруппы Фраттини выбрать подгруппу Гашюца $\Delta(G)$, то из теоремы 3.5 получаем

Следствие 3.5.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 3.5.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Если группа операторов A единична, а в качестве операторно-обобщенной подгруппы Фраттини выбрать подгруппу Фраттини $\Phi(G)$, то из теоремы 3.5 получаем результат работы [1].

Заключение

В работе установлены основные свойства операторно-обобщенной подгруппы Фраттини и описано её влияние на строение самой группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
3. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
4. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.
5. Beidleman, J.C. Generalized Frattini subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, T.K. Seo // Pacific journal of mathematics. – 1967. – Vol. 23. – № 3. – P. 441–450.
6. Beidleman, J.C. On Frattini-like subgroups / J.C. Beidleman, H. Smith // Glasgow Math. J. – 1993. – Vol. 35. – P. 95–98.
7. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York: Harper and Row, 1968. – 572 p.
8. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
9. Ballester-Bolinches, A. On $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Glasgow Math. J. – 1994. – Vol. 36. – P. 241–247.

Поступила в редакцию 26.02.15.

УДК 512.542

РАЗРЕШИМЫЕ ЕТ-ФУНКТОРЫ

С.Ф. Каморников

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь

SOLVABLE NT-FUNCTORS

S.F. Kamornikov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus

В работе решается задача характеристики всех наследственных регулярных транзитивных подгрупповых функторов. Доказывается, что любой естественный транзитивный подгрупповой функтор является $\mathfrak{X}$ -субнормальным для некоторого примитивного класса $\mathfrak{X}$.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, примитивная группа, подгрупповой функтор, естественный транзитивный подгрупповой функтор (ЕТ-функтор), формация.

The problem of characterization of all hereditary regular transitive subgroup functors is solved. It is proved that any natural transitive subgroup functor is $\mathfrak{X}$ -subnormal for some primitive class $\mathfrak{X}$.

Keywords: finite solvable group, primitive group, subgroup functor, natural transitive subgroup functor (NT-functor), formation.

Введение

Понятие «естественный функтор» впервые появилось в [1] в связи с классификацией подгрупповых функторов по заданным абстрактным групповым свойствам. По сути, оно аксиоматизирует такие известные абстрактные свойства систем подгрупп как наследственность в пересечениях и инвариантность при эндоморфизмах.

Большое внимание к наследственным регулярным подгрупповым функторам связано с тем, что многие хорошо известные подгрупповые функторы являются естественными. В частности, к таковым относятся функторы, которые выделяют в группах все $\mathfrak{F}$ -субнормальные (а также все $\mathfrak{F}$ -достижимые) подгруппы, если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация.

Особое место в классе естественных функторов занимают ЕТ-функторы – подгрупповые функторы, которые одновременно являются естественными и транзитивными. Во многом это обусловлено их широкими прикладными возможностями (см., например, [2]).

Интерес к ЕТ-функторам привел к общей задаче их описания. В явном виде эта задача сформулирована в [2] как вопрос 3: Пусть ω – подгрупповой ЕТ-функтор, заданный на классе всех конечных групп (всех конечных разрешимых групп). Существует ли такая наследственная формация $\mathfrak{F}$, что $\omega(G) = \text{sub}_{\mathfrak{F}}(G)$ для всякой конечной группы G ?

Данная задача попадает в орбиту следующего вопроса, сформулированного А.Н. Скибой в [3] под номером 1.2.12: можно ли классифицировать все регулярные транзитивные подгрупповые

функторы? Применительно к ЕТ-функторам этот вопрос может быть сформулирован как задача характеристики всех ЕТ-функторов.

В данной работе эта задача рассматривается в классе разрешимых групп. Центральный результат работы заключается в установлении того факта, что любой разрешимый ЕТ-функтор может быть охарактеризован как $\mathfrak{X}$ -субнормальный функтор $\text{sub}_{\mathfrak{X}}$ для некоторого примитивного класса $\mathfrak{X}$. Отсюда на основании результатов работы [4] следует, что все ЕТ-функторы размещаются в идеале $\text{SUB}(\mathfrak{S})$ решетки $\text{RT}(\mathfrak{S})$ всех регулярных транзитивных подгрупповых функторов.

1 Основные определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы и разрешимые подгрупповые функторы, т. е. функторы, определенные на классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых конечных групп. Используемые определения и обозначения теории конечных групп и подгрупповых функторов стандартны, их можно найти в [1]. Что касается терминологии теории классов, то мы отсылаем читателей к книгам [5]–[6]. Напомним только центральные определения, используемые в работе.

Отображение ω , сопоставляющее каждой группе G некоторую непустую систему $\omega(G)$ ее подгрупп, называется *подгрупповым функтором*, если для любого изоморфизма φ группы G выполняется равенство $(\omega(G))^{\varphi} = \omega(G^{\varphi})$.

Подгрупповой функтор ω называется:

1) *регулярным*, если

$$(\omega(A))^{\varphi} \subseteq \omega(B) \text{ и } (\omega(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \omega(A)$$

для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$;

2) *наследственным*, если $H \cap \omega(G) \subseteq \omega(H)$

для любой подгруппы H группы G ;

3) *транзитивным*, если для любой группы G всегда из $S \in \omega(H)$ и $H \in \omega(G)$ следует $S \in \omega(G)$.

Если $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, то подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$ -*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\text{sub}_{\mathfrak{X}}$ – отображение, ставящее в соответствие каждой группе G множество всех ее $\mathfrak{X}$ -субнормальных подгрупп. Простая проверка показывает, что $\text{sub}_{\mathfrak{X}}$ – подгрупповой функтор.

В дальнейшем через $\mathfrak{P}$ будем обозначать класс всех примитивных групп. Напомним, что группа G называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. Как показано в [7], разрешимая группа G примитивна тогда и только тогда, когда она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, которая дополняема в G . Это дополнение является максимальной подгруппой группы G с единичным ядром и называется ее *примитиватором*. Понятно, что если M – максимальная подгруппа группы G , то группа $G / \text{Core}_G(M)$ примитивна и $M / \text{Core}_G(M)$ – примитиватор группы $G / \text{Core}_G(M)$.

В дальнейшем любой (в том числе и пустой) подкласс класса $\mathfrak{P}$ будем называть *примитивным классом*.

Лемма 1.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый примитивный класс. Если H – $\mathfrak{X}$ -субнормальная подгруппа группы G , то HN / N – $\mathfrak{X}$ -субнормальная подгруппа группы G / N для любой нормальной подгруппы N группы G .

Доказательство. Пусть подгруппа H $\mathfrak{X}$ -субнормальна в G и $H \neq G$. Тогда существует такая максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G, \quad (1.1)$$

что $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим цепь

$$\begin{aligned} HN / N &= H_0N / N \subseteq \\ &\subseteq H_1N / N \subseteq \dots \subseteq H_nN / N = G / N. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Пусть H_{i-1} и H_i – такие члены цепи (1.1), что $H_{i-1}N \neq H_iN$. Покажем, что в этом случае $H_{i-1}N$ – максимальная подгруппа в H_iN .

Предположим, что $H_{i-1}N \subset L \subset H_iN$ для некоторой подгруппы L . Так как подгруппа H_{i-1}

максимальна в H_i , то из

$$H_{i-1} \subseteq H_{i-1} \cap L \subseteq H_i \cap L \subseteq H_i$$

следует, что либо $H_i \cap L = H_{i-1}$, либо $H_i \cap L = H_i$.

Если $H_i \cap L = H_{i-1}$, то ввиду равенства $L = H_iN \cap L = (H_i \cap L)N$ имеем $L = H_{i-1}N$.

Пришли к противоречию. Если $H_i \cap L = H_i$, то $H_i \subseteq L$, а значит, $H_iN \subseteq L$. Снова пришли к противоречию.

Итак, цепь (1.2) такова, что в ней для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеет место одно из утверждений:

$$1) H_{i-1}N / N = H_iN / N;$$

2) $H_{i-1}N / N$ – максимальная подгруппа в H_iN / N .

Не нарушая общности рассуждений, мы можем полагать далее, что все члены цепи (1.2) различны. Покажем, что

$$(H_iN / N) / \text{Core}_{H_iN/N}(H_{i-1}N / N) \in \mathfrak{X}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Очевидно,

$$\text{Core}_{H_iN/N}(H_{i-1}N / N) = \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N) / N.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (H_iN / N) / \text{Core}_{H_iN/N}(H_{i-1}N / N) &\simeq \\ &\simeq H_iN / \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N) = \\ &= H_i \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N) / \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N) \simeq \\ &\simeq H_i / H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N). \end{aligned}$$

Рассмотрим два возможных случая:

1. Пусть $H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N) \subseteq H_{i-1}$. Так как $H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N)$ – нормальная в H_i подгруппа, то из

$$H_i \supseteq H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N) \supseteq \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$$

следует, что $H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N) = \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (H_iN / N) / \text{Core}_{H_iN/N}(H_{i-1}N / N) &\simeq \\ &\simeq H_i / H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N) = H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

2. Пусть $H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N)$ не содержится в H_{i-1} . Так как подгруппа $H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N)$ нормальна в H_i , то из максимальной подгруппы H_{i-1} в H_i имеет место равенство $H_{i-1}(H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N)) = H_i$. Отсюда следует, что $H_{i-1}N(H_i \cap \text{Core}_{H_iN}(H_{i-1}N)) = H_iN$, а значит, $H_{i-1}N = H_iN$. Пришли к противоречию с тем, что все члены цепи (1.2) различны. Поэтому случай 2 не возможен.

Итак, цепь (1.2) максимальна и

$$(H_iN / N) / \text{Core}_{H_iN/N}(H_{i-1}N / N) \in \mathfrak{X}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$. По определению подгруппа HN / N $\mathfrak{X}$ -субнормальна в группе G / N . Лемма доказана.

Лемма 1.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый примитивный класс. Пусть H и N – подгруппы группы G , причем подгруппа N содержится в H и нормальна в G . Если подгруппа H/N $\mathfrak{X}$ -субнормальна в группе G/N , то подгруппа H $\mathfrak{X}$ -субнормальна в G .

Доказательство. Пусть подгруппа H/N $\mathfrak{X}$ -субнормальна в G/N и $H/N \neq G/N$. Тогда существует такая максимальная цепь подгрупп $H/N = H_0/N \subset H_1/N \subset \dots \subset H_n/N = G/N$, что $(H_i/N)/\text{Core}_{H_i/N}(H_{i-1}/N) \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как

$$\text{Core}_{H_i/N}(H_{i-1}/N) = \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})/N,$$

то

$(H_i/N)/\text{Core}_{H_i/N}(H_{i-1}/N) \cong H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Значит, подгруппа H является $\mathfrak{X}$ -субнормальной в группе G . Лемма доказана.

Лемма 1.3. Для любого примитивного класса $\mathfrak{X}$ подгрупповой функтор $\text{sub}_{\mathfrak{X}}$ является регулярным и транзитивным.

Доказательство. Регулярность подгруппового функтора $\text{sub}_{\mathfrak{X}}$ вытекает из лемм 1.1 и 1.2. Транзитивность $\text{sub}_{\mathfrak{X}}$ следует из определения $\mathfrak{X}$ -субнормальной подгруппы. Лемма доказана.

2 Достаточное условие наследственности функтора

В общем случае подгрупповой функтор $\text{sub}_{\mathfrak{X}}$, являясь на основании леммы 1.3 регулярным и транзитивным для любого примитивного класса $\mathfrak{X}$, может не быть наследственным. Пусть, например, $\mathfrak{X} = (\text{Sym}(3), Z_2)$, где $\text{Sym}(3)$ – симметрическая группа третьей степени, Z_2 – циклическая группа порядка 2. Очевидно, $\mathfrak{X}$ – примитивный класс. При этом $1 \in \text{sub}_{\mathfrak{X}}(\text{Sym}(3))$, но $1 \notin \text{sub}_{\mathfrak{X}}(\text{Alt}(3))$, где $\text{Alt}(3)$ – знакопеременная группа третьей степени.

Примитивный класс $\mathfrak{X}$ будем называть *секционно замкнутым*, если каждая примитивная секция любой группы из $\mathfrak{X}$ принадлежит $\mathfrak{X}$.

Лемма 2.1. Если $\mathfrak{X}$ – секционно замкнутый примитивный класс, то подгрупповой функтор $\text{sub}_{\mathfrak{X}}$ является наследственным.

Доказательство. Пусть $H \in \text{sub}_{\mathfrak{X}}(G)$ и K – некоторая подгруппа группы G . Тогда существует такая максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим цепь

$$H \cap K = H_0 \cap K \subseteq H_1 \cap K \subseteq \dots \subseteq H_n \cap K = K. \quad (2.1)$$

Так как $(H_i \cap K)/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1})/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$

подгруппа группы $H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$, то $(H_i \cap K)/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1})/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ – подгруппа некоторой $\mathfrak{X}$ -группы для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. Так как

$$\begin{aligned} (H_i \cap K)/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1})/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) &\cong \\ &\cong H_i \cap K / H_i \cap K \cap \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) = \\ &= H_i \cap K / K \cap \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}), \end{aligned}$$

то подгруппа $H_i \cap K / K \cap \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ изоморфно вкладывается в некоторую $\mathfrak{X}$ -группу. А так как подгруппа $K \cap \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ нормальна в $H_i \cap K$ и $K \cap \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \subseteq H_{i-1} \cap K$, то $K \cap \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \subseteq \text{Core}_{H_i \cap K}(H_{i-1} \cap K)$. Поэтому группа $H_i \cap K / K \cap \text{Core}_{H_i \cap K}(H_{i-1} \cap K)$ как гомоморфный образ группы $H_i \cap K / K \cap \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ изоморфна некоторой секции группы, принадлежащей классу $\mathfrak{X}$.

В цепи (2.1) выбросим повторяющиеся члены и уплотним ее до максимальной цепи. Рассмотрим участок этой цепи

$$H_{i-1} \cap K = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_t = H_i \cap K,$$

соединяющей подгруппы $H_{i-1} \cap K$ и $H_i \cap K$. Тогда для любого $j = 1, 2, \dots, t$ подгруппа $\text{Core}_{H_i \cap K}(H_{i-1} \cap K)$ содержится в L_j и нормальна в L_j . Поэтому $\text{Core}_{H_i \cap K}(H_{i-1} \cap K) \subseteq \text{Core}_{L_j}(L_{j-1})$ для всех $j = 1, 2, \dots, t$. А так как группа $H_i \cap K / K \cap \text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ изоморфна некоторой секции группы, принадлежащей классу $\mathfrak{X}$, то группа $L_j / \text{Core}_{L_j}(L_{j-1})$ также будет изоморфна некоторой секции группы, принадлежащей классу $\mathfrak{X}$.

Так как класс $\mathfrak{X}$ является секционно замкнутым, то из примитивности группы $H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ следует, что $L_j / \text{Core}_{L_j}(L_{j-1}) \in \mathfrak{X}$. Таким образом, $H \cap K \in \text{sub}_{\mathfrak{X}}(K)$. Лемма доказана.

Из лемм 1.3 и 2.1 имеем следующий результат.

Теорема 2.1. Если $\mathfrak{X}$ – секционно замкнутый примитивный класс, то подгрупповой функтор $\text{sub}_{\mathfrak{X}}$ является ЕТ-функтором.

Если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то класс всех примитивных групп, принадлежащих $\mathfrak{F}$, является секционно замкнутым. Поэтому из теоремы 2.1 следует, что для любой наследственной формации $\mathfrak{F}$ подгрупповой функтор $\text{sub}_{\mathfrak{F}}$ является ЕТ-функтором.

3 Характеризация ЕТ-функторов

В [4] показано, что в решетке $\text{RT}(\mathfrak{C})$ всех регулярных транзитивных подгрупповых функторов особую роль играют $\mathfrak{X}$ -субнормальные

подгрупповые функторы ($\mathfrak{X}$ – примитивный класс), формирующие в $\text{RT}(\mathfrak{S})$ идеал $\text{SUB}(\mathfrak{S})$. Ниже показывается, что каждый разрешимый ЕТ-функтор принадлежит $\text{SUB}(\mathfrak{S})$.

Лемма 3.1. Пусть ω – регулярный подгрупповой функтор. Если H – собственная подгруппа группы G , принадлежащая $\omega(G)$, то существует максимальная подгруппа M группы G , содержащая H и принадлежащая $\omega(G)$.

Доказательство. Пусть K – наибольшая нормальная подгруппа группы G , для которой $HK \neq G$. Пусть L/K – главный фактор группы G . Тогда из определения подгруппы K следует, что $HL = G$. В группе G/K подгруппа L/K является минимальной нормальной и, кроме того, справедливо равенство $G/K = (HK/K)(L/K)$. Так как L/K – абелева группа, то HK/K – максимальная подгруппа группы G/K , а HK – максимальная подгруппа группы G .

Так как подгрупповой функтор ω является регулярным, то $M/K = HK/K \in \omega(G/K)$, а следовательно, $M \in \omega(G)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть ω – ЕТ-функтор. Если H – собственная подгруппа группы G и $H \in \omega(G)$, то существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_i \in \omega(G)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Ввиду леммы 3.1 существует максимальная подгруппа M группы G , содержащая H и принадлежащая $\omega(G)$. Так как функтор ω является наследственным, то из $H \in \omega(G)$ следует $H \in \omega(M)$. Теперь из $|M| < |G|$ заключаем, что существует максимальная цепь $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} = M$, в которой $H_i \in \omega(M)$ для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. Так как функтор ω транзитивен, то из $M \in \omega(G)$ следует, что $H_i \in \omega(G)$ для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. Значит, цепь $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} = M \subset G$ является искомой. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы вытекает из леммы 3.2 и того, что подгрупповой функтор ω является наследственным.

Лемма 3.3. Пусть ω – ЕТ-функтор. Если H – собственная подгруппа группы G и $H \in \omega(G)$, то существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$$

что $H_{i-1} \in \omega(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Для ненулевого подгруппового функтора ω определим класс

$$\mathfrak{P}(\omega) = \{A \in \mathfrak{P} \mid \text{примитиватор группы } A \text{ принадлежит } \omega(A)\}.$$

Если ω – нулевой подгрупповой функтор (т. е.

$\omega(G) = \{G\}$ для любой группы G), то полагаем $\mathfrak{P}(\omega) = \emptyset$. Класс $\mathfrak{P}(\omega)$ будем называть *собственным примитивным классом* подгруппового функтора ω .

Следующий результат показывает, что любой ЕТ-функтор является $\mathfrak{X}$ -субнормальным для своего собственного примитивного класса $\mathfrak{X}$.

Теорема 3.1. Пусть ω – ЕТ-функтор. Тогда для любой группы G справедливо равенство $\omega(G) = \text{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G)$.

Доказательство. Пусть $H \in \omega(G)$. Если $H = G$, то, очевидно, $H \in \text{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G)$. Если H – собственная подгруппа группы G , то на основании леммы 3.3 существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_{i-1} \in \omega(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как ω – регулярный подгрупповой функтор, то из $H_{i-1} \in \omega(H_i)$ следует, что $H_{i-1}/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \omega(H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}))$. Следовательно, $H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{P}(\omega)$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Отсюда заключаем, что $H \in \text{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G)$, а значит, $\omega(G) \subseteq \text{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G)$.

Пусть теперь $S \in \text{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G)$. Тогда существует максимальная цепь $S = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_m = G$ такая, что $S_i/\text{Core}_{S_i}(S_{i-1}) \in \mathfrak{P}(\omega)$ для любого $i = 1, 2, \dots, m$. Отсюда и из регулярности подгруппового функтора ω имеем, что $S_{i-1} \in \omega(S_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. Так как подгрупповой функтор ω является транзитивным, то $S \in \omega(G)$. Следовательно, $\text{sub}_{\mathfrak{P}(\omega)}(G) \subseteq \omega(G)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 256 с.
2. Васильев, А.Ф. О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников // Сиб. мат. журнал. – 2001. – Т. 42, №1. – С. 30–40.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Каморников, С.Ф. О решетке всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 55–58.
5. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
7. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

Поступила в редакцию 26.11.14

УДК 517.925

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В.В. Мироненко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON PERIODIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATION WITH LINEAR-FRACTIONAL RIGHT-HAND PART

V.V. Mironenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Установлены условия существования периодического решения дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, отражающая функция, отображение Пуанкаре, дробно-линейная функция, периодическое решение.

The conditions of existence of periodic solutions of differential equation with linear-fractional right-hand side are given.

Keywords: differential equation, reflecting function, Poincare mapping, linear-fractional function, periodic solution.

Введение

Понятие отражающей функции было введено В.И. Мироненко в работе [1]. Подробно теория отражающей функции изложена в [2].

Отражающая функция дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad (0.1)$$

$t \in R, x \in R^n$, определяется по формуле

$$F(t, x) := \varphi(-t; t, x),$$

где $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ – общее решение этой дифференциальной системы в форме Коши.

Отражающая функция обладает следующими основными свойствами [2, с. 62–69]:

1. Для любого решения $x(t)$ дифференциальной системы (0.1), определённого на симметричном интервале $(-\alpha; \alpha)$, справедливо тождество $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$;

2. Если решение $x(t)$ определено на полуинтервале $[0; \alpha)$ и $x(t) \in D, F(t, x(t)) \in D$, то это решение продолжается и на полуинтервал $(-\alpha; 0]$ с помощью формулы $x(t) \equiv F(-t, x(-t))$;

3. Дифференцируемая функция $F(t, x)$ является отражающей функцией дифференциальной системы (0.1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F(t, x)) = 0, \\ F(0, x) = x.$$

4. Все дифференциальные системы вида (0.1), имеющие в качестве своей отражающей функции функцию $F(t, x)$, образуют класс эквивалентности,

который весь описывается дифференциальными системами вида

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + \\ + \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \right)^{-1} R(t, x) - R(-t, F(t, x)),$$

где $R(t, x)$ есть произвольная дифференцируемая вектор-функция.

5. Если существует стационарная (автономная) система дифференциальных уравнений, имеющая ту же отражающую функцию, что и дифференциальная система (0.1), то эта автономная дифференциальная система с необходимостью имеет вид $\frac{dy}{dt} = X(0, y)$.

6. Если дифференциальная система (0.1) является 2ω -периодической по t и $F(t, x)$ есть ее отражающая функция, то отображение $\Pi(x)$ за период $[-\omega; \omega]$ этой дифференциальной системы [3, с. 12] задается формулой $\Pi(x) = F(-\omega, x)$. Поэтому продолжимое на $[-\omega; \omega]$ решение $x(t) := \varphi(t; -\omega, x_0)$ дифференциальной системы (0.1) будет 2ω -периодическим тогда и только тогда, когда $x(-\omega)$ является решением уже недифференциальной системы $F(-\omega, x) = x$.

Последнее из сформулированных свойств говорит о том, что решения имеющих одну и ту же отражающую функцию дифференциальных систем (систем, эквивалентных в смысле совпадения отражающих функций) имеют одинаковые качественные свойства. В этом отношении представляет практический интерес следующая теорема, доказанная в работе [4].

Теорема 0.1. Пусть $\Delta_i(t, x)$, $i = 1, 2, 3, \dots$, суть решения системы в частных производных

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} X(t, x) - \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \Delta(t, x) = 0. \quad (0.2)$$

Тогда все дифференциальные системы вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_k(t) \Delta_k(t, x),$$

где $\alpha_k(t)$ – нечётные непрерывные скалярные функции, эквивалентны между собой и эквивалентны системе (0.1).

1 Некоторые возмущения дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью, не меняющие его отражающую функцию

Лемма 1.1. Пусть для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A(t)x + B(t)}{a(t)x + b(t)} \quad (1.1)$$

выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \dot{a}(t)b(t) - a(t)\dot{b}(t) + A(t)a(t) + \\ + C_0 B(t)a(t) - C_0 A(t)b(t) = 0, \\ A(t)a(t)b(t) + C_0 B(t)a(t)b(t) - \\ - C_0 A(t)b^2(t) - B(t)a^2(t) - \\ - C_0 B(t)a(t)b(t) + C_0 A(t)b^2(t) - \\ - A(t)a(t)b(t) + B(t)a^2(t) = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где C_0 – некоторая постоянная.

Тогда возмущение вида

$$\alpha(t) \left(C_0 - \frac{a(t)}{a(t)x + b(t)} \right),$$

где $\alpha(t)$ – произвольная непрерывная скалярная нечётная функция, не изменяет отражающую функцию дифференциального уравнения (1.1).

Доказательство. Введём обозначение

$$\Delta(t, x) := C_0 - \frac{a(t)}{a(t)x + b(t)}. \quad (1.3)$$

Частные производные функции $\Delta(t, x)$ по переменным t и x задаются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta(t, x)}{\partial t} &= \frac{\dot{a}(t)b(t) - a(t)\dot{b}(t)}{(a(t)x + b(t))^2}, \\ \frac{\partial \Delta(t, x)}{\partial x} &= \frac{a^2(t)}{(a(t)x + b(t))^2}, \end{aligned}$$

производная правой части дифференциального уравнения (1.1) определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A(t)x + B(t)}{a(t)x + b(t)} \right) = \frac{A(t)b(t) - B(t)a(t)}{(a(t)x + b(t))^2}.$$

Поэтому соотношение (0.2) для дифференциального уравнения (1.1) и возмущения $\Delta(t, x)$ принимает вид

$$\frac{\dot{a}(t)b(t) - a(t)\dot{b}(t)}{(a(t)x + b(t))^2} + \frac{a^2(t)(A(t)x + B(t))}{(a(t)x + b(t))^3} -$$

$$\begin{aligned} - \frac{A(t)b(t) - B(t)a(t)}{(a(t)x + b(t))^2} C_0 + \\ + \frac{(A(t)b(t) - B(t)a(t))a(t)}{(a(t)x + b(t))^3} = 0. \end{aligned}$$

Приведя левую часть записанного равенства к общему знаменателю и собирая коэффициенты при разных степенях переменной x , приходим к соотношениям (1.2). Лемма доказана.

2 Применение теоремы о возмущениях к поиску периодических решений дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью

Теорема 2.1. Пусть для дифференциального уравнения (1.1) с непрерывными 2ω -периодическими коэффициентами наряду с соотношением

$$B(t) + \alpha(t)(C_0 b(t) - a(t)) = 0, \quad (2.1)$$

где C_0 – некоторая постоянная, $\alpha(t)$ – непрерывная скалярная нечётная функция, выполнены условия (1.2). Тогда решение $x(t)$ дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(\omega) = 0$, будет 2ω -периодическим, если только оно продолжимо на отрезок $[-\omega; \omega]$.

Доказательство. Выполнение условий (1.2) означает справедливость леммы 1.1. Из соотношения (2.1) следует, что возмущение (1.3) сводит дифференциальное уравнение (1.1) к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M(t)x}{a(t)x + b(t)}, \quad (2.2)$$

$M(t) = A(t) + C_0 \alpha(t)a(t)$, обладающему той же отражающей функцией, что и уравнение (1.1).

У дифференциального уравнения (2.2) существует решение $x(t) \equiv 0$. Согласно первому из свойств отражающей функции, сформулированных во введении, из существования нулевого решения вытекает соотношение $F(t, 0) \equiv 0$. Пользуясь всё тем же первым свойством отражающей функции, можем утверждать, что для решения $x(t)$ исходного 2ω -периодического по t дифференциального уравнения (1.1), продолжимого на отрезок $[-\omega; \omega]$ и удовлетворяющего начальному условию $x(\omega) = 0$, имеет место цепочка равенств

$$x(-\omega) = F(\omega, x(\omega)) = F(\omega, 0) = x(\omega).$$

Из равенства $x(-\omega) = x(\omega)$ следует, что $x(-\omega)$ является неподвижной точкой отображения за период $[-\omega, \omega]$. Поэтому, согласно основному принципу теории периодических решений, решение $x(t)$ является 2ω -периодическим. Теорема доказана.

Заметим, что, отказавшись от 2ω -периодичности по t правой части дифференциального уравнения (1.1), совершенно аналогично теореме 2.1 можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.2. Пусть для дифференциального уравнения (1.1) наряду с соотношением (2.1), где C_0 – некоторая постоянная, $\alpha(t)$ – непрерывная скалярная нечётная функция, выполнены условия (1.2). Тогда для любого ω решение $x(t)$ дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(\omega) = 0$, будет решением краевой задачи $x(-\omega) = x(\omega)$.

Заключение

С использованием метода отражающей функции получены условия периодичности решений дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью.

ЛИТЕРАТУРА

1. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. МIRONENKO // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.
2. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: Монография / В.И. МIRONENKO. – Мин. образ. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196 с.
3. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966 – 332 с.
4. МIRONENKO, В.В. Возмущения нелинейных дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. МIRONENKO // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 1325–1332.

Поступила в редакцию 21.04.15.

О РЕЗУЛЬТАТАХ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРОЩЕННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ В ПЛОСКОСТИ

А.Т. Сазонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

ON THE RESULTS OF THE STUDY OF SIMPLIFIED SYSTEMS IN THE PROBLEM OF MOTION OF FOUR BODIES IN A PLANE

A.T. Sazonova

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Рассматривается система, описывающая движение четырех тел в плоскости. С помощью метода малого параметра установлены упрощенные системы, состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Для данных систем указаны наборы констант межчастичного взаимодействия, при которых все ее решения являются мероморфными функциями.

Ключевые слова: движение четырех тел в плоскости, константа взаимодействия, упрощенная система, мероморфная функция.

The system describing the motion of four bodies in a plane is considered. The method of the small parameter of a simplified system consisting of non-linear differential equations, each of which has a second order is determined. For these systems, a set of interparticle interaction constants in which all its solutions of the system are meromorphic functions is specified.

Keywords: motion of four bodies in a plane, interaction constant, simple system, meromorphic function.

Введение

Работы [1]–[5] посвящены исследованиям проблемы движения многих тел в плоскости. В них отображены и проанализированы (аналитически и численно) различные решения ограниченной плоской задачи многих тел. Для удобства рассмотрения математической модели движения многих тел в работе [2] физическая плоскость отождествляется с комплексной плоскостью. Тогда уравнения движения в плоскости становятся уравнениями движения N точек в комплексной ξ – плоскости и сводятся к системе [2], [3], состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\xi}_n = 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N a_{nm} \frac{\xi'_n \xi'_m}{\xi_n - \xi_m}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Зависимые переменные $\xi_n = \xi_n(\tau)$ являются комплексными. Константы межчастичного взаимодействия подчинены требованиям симметрии $a_{nm} = a_{mn}$. При отождествлении комплексной ξ – плоскости с физической плоскостью [2], [3] движение N точек ξ_n соответствует решению ограниченной задачи многих тел в плоскости.

1 Постановка задачи

Из исходной системы видно [2], [3], что центр масс $Z \equiv Z(\tau)$,

$$Z = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4}{4},$$

движется равномерно:

$$\ddot{Z} = 0,$$

$$Z(\tau) = Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau,$$

где V – произвольная постоянная.

В дальнейшем будем предполагать

$$a_{12} = a_{21} = a, \quad a_{13} = a_{31} = c, \quad a_{14} = a_{41} = d,$$

$$a_{23} = a_{32} = b, \quad a_{24} = a_{42} = e, \quad a_{34} = a_{43} = f.$$

Существует также интеграл движения (что непосредственно следует из [1]):

$$K = \xi'_1 \xi'_2 \xi'_3 \xi'_4 (\xi_1 - \xi_2)^{2a} (\xi_2 - \xi_3)^{2b} (\xi_3 - \xi_1)^{2c} \times \\ \times (\xi_4 - \xi_1)^{2d} (\xi_2 - \xi_4)^{2e} (\xi_3 - \xi_4)^{2f}.$$

Введем координаты относительно центра масс

$$u_n = \xi_n - Z, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

чтобы выполнялось условие $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

Для удобства обозначений положим

$$u_1 = x,$$

$$u_2 = y,$$

$$u_3 = z,$$

$$u_4 = -x - y - z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения и интеграл движения в терминах переменных x, y, z :

$$\ddot{x} = 2a \frac{(\dot{x} + V)(\dot{y} + V)}{x - y} + 2c \frac{(\dot{x} + V)(\dot{z} + V)}{x - z} - \\ - 2d \frac{(\dot{x} + V)(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} + V)}{2x + y + z},$$

$$\ddot{y} = -2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2e \frac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+2y+z},$$

$$\ddot{z} = -2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+y+2z},$$

$K = (\dot{x}+V)(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V) \times$
 $\times (x-y)^{2a} (y-z)^{2b} \times (z-x)^{2c} \times$
 $\times (2x+y+z)^{2d} (x+2y+z)^{2e} (x+y+2z)^{2f},$
 где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t = \tau - \tau_0$, V, K, τ_0 – произвольные постоянные.

Согласно [4] справедливо утверждение: для наличия у системы (1.1) мероморфного решения необходимо, чтобы все постоянные $\Gamma, \gamma_n, \beta_n$, $n = \overline{1, 6}$, определяемые через константы a, b, c, d, e, f с помощью соотношений

$$\Gamma = \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f},$$

$$\gamma_n = \frac{1}{1+a_n},$$

$$\beta_n = -2a_n, a_n \in \{a, b, c, d, e, f\},$$

$$n = 1, \dots, N.$$

принимали целочисленные или бесконечные значения.

Нетрудно выделить все значения констант взаимодействия, принадлежащие к определенной выше категории: для целочисленности показателей γ_n необходимо $a_n \in [-2; 0]$, а для целочисленности β_n константы взаимодействия должны быть сами целочисленными или полуцелочисленными.

В данной работе рассматриваются упрощенные системы для системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.1), описывающей движения четырех тел в плоскости.

Целью исследования является установление необходимых и достаточных условий для того, чтобы все решения упрощенных систем являлись мероморфными функциями. Заметим, что упрощенные системы ранее были рассмотрены в работах [6]–[8], однако, наборы, полученные в данных работах, целесообразно дополнить случаями, когда одна либо две константы взаимодействия не равны нулю.

2 Необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости являлись мероморфными функциями

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений шестого порядка

$$\ddot{x} = 2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d \frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y},$$

$$\ddot{y} = -2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e \frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y},$$

$$\ddot{z} = -2c \frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b \frac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y} - 2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y})}{x+y},$$

которая является инвариантной относительно замены переменных (t, x, y, z) на $(\varepsilon t, x, y, \varepsilon z)$, ε – параметр, а значит, является упрощенной для системы (1.1).

Опираясь на результаты, полученные в работах [6], [7], с учетом соотношений (1.2), заключаем о справедливости следующей теоремы.

Теорема 2.1. Для того, чтобы все решения системы (2.1) являлись мероморфными функциями, необходимо и достаточно, чтобы при выборе чисел $b, c, f \in \{-2; -1.5; -1; -0.5; 0\}$ постоянная Γ была целочисленной или бесконечной, и выполнялись условия:

- 1) $a = 0, d = e = -0.5, \Gamma = \frac{2}{1+b+c+f};$
- 2) $a = 0, d = e = -1, \Gamma = \frac{2}{b+c+f};$
- 3) $a = 0, d = e = -2, \Gamma = \frac{2}{-2+b+c+f};$
- 4) $a = 0, e = -0.5, d = -1.5, \Gamma = \frac{2}{b+c+f};$
- 5) $a = e = -0.5, d = -2, \Gamma = \frac{2}{-1+b+c+f};$
- 6) $a = e = -0.5, d = -1.5, \Gamma = \frac{2}{-0.5+b+c+f};$
- 7) $a = e = -0.5, d = -1, \Gamma = \frac{2}{b+c+f};$
- 8) $a = e = d = -0.5, \Gamma = \frac{2}{0.5+b+c+f};$
- 9) $a = e = -0.5, d = 0, \Gamma = \frac{2}{1+b+c+f};$
- 10) $a = d = -0.5, e = 0, \Gamma = \frac{2}{1+b+c+f};$
- 11) $a = d = e = -1, \Gamma = \frac{2}{-1+b+c+f};$
- 12) $a = -0.5, d = e = 0, \Gamma = \frac{4}{3+b+c+f};$
- 13) $a = d = e = 0, \Gamma = \frac{2}{2+b+c+f}.$

Доказательство. Как говорилось ранее, детальное доказательство справедливости утверждения для случаев 1)–11) приведено в работах [6], [7].

Проведем исследование случаев, когда $d = e = 0$. Тогда система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}, \\ \ddot{y} &= -2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}, \\ \ddot{z} &= -2c \frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b \frac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y} - 2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y})}{x+y}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Легко видеть, что для системы (2.2) выполнено соотношение $\dot{x} + \dot{y} = 0$, значит, $x + y = C_1 t + C_0$, где C_0, C_1 – произвольные постоянные. Выражая y из последнего соотношения и подставляя в первое уравнение системы (2.2) находим

$$\ddot{x} = 2a \frac{\dot{x}(C_1 - \dot{x})}{2x - C_1 t - C_0}.$$

Заменой $u = 2x - C_1 t - C_0$ последнее уравнение приводим к виду

$$u'' = -a \frac{u'^2}{u} + a \frac{C_1^2}{u}. \quad (2.3)$$

Заметим, что уравнение (2.3) легко привести к уравнениям второго порядка типа Пенлеве с помощью замены $w = 1/u$.

В соответствии с результатами, полученными в работе [9], заключаем, что при $a = -2, a = -1, 5, a = -1$ все решения уравнения (2.3) являются мероморфными функциями, а значит компонента решения x системы (2.2) является мероморфной функцией. Выражая x из соотношения $x + y = C_1 t + C_0$, где C_0, C_1 – произвольные постоянные, и подставляя в первое уравнение системы (2.2) получим дифференциальное уравнение второго порядка для компоненты y исследуемой системы вида (2.3).

Таким образом, компоненты решения системы (2.2) x, y являются мероморфными функциями, более того, согласно результатам, полученным в работе [10], компоненты решения x, y системы (2.2) являются целыми функциями.

Рассмотрим теперь третье уравнение системы (2.2). Обе его части разделим на $\dot{z} + V$:

$$\frac{\ddot{z}}{\dot{z} + V} = -2c \frac{\dot{x}}{x} - 2b \frac{\dot{y}}{y} - 2f \frac{\dot{x} + \dot{y}}{x + y}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\dot{z} = Ax^{-2c} y^{-2b} (x + y)^{-2f} - V, \quad (2.4)$$

где A – произвольная постоянная,

$$c, b, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}.$$

Заметим также, что если компоненты x, y решения системы (2.2) являются целыми функциями,

то и решение уравнения (2.4) при условии $c, b, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$ является целой функцией.

Следовательно, утверждение теоремы в случае 12) справедливо.

В случае 13) доказываемой теоремы система (2.1) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{z} &= -2c \frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b \frac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y} - 2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y})}{x+y},\end{aligned}\quad (2.5)$$

Из первого и второго уравнения системы (2.5) находим

$$x = A_1 t + A_0, \quad y = B_1 t + B_0,$$

где A_0, A_1, B_0, B_1 – произвольные постоянные.

Заметим, что компоненты x, y общего решения системы (2.5) являются целыми функциями, а выражение для компоненты z легко получить из третьего уравнения исследуемой системы, которое, как было показано ранее, сводится к уравнению (2.4), где

$$c, b, f \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}.$$

Таким образом, утверждение теоремы в случае 13) справедливо.

Заключение

Рассмотрена система (1.1), описывающая движение четырех тел в плоскости, для которой с помощью метода малого параметра получены упрощенные системы (2.1), состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок.

Для каждой упрощенной системы найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения исследуемых систем являлись мероморфными функциями. Интерес к исследованиям упрощенных систем обусловлен тем фактом, что необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения были мероморфными функциями, являются необходимыми условиями наличия мероморфных решений у исходной системы дифференциальных уравнений, описывающей движение четырех тел в плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Calogero, F. Classical Many-Body Problems amenable to exact treatments: lect. Notes in Phys. Monograph / F. Calogero. – Berlin: Springer, 2001. – 749 p.
2. Calogero, F. Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane / F. Calogero, J.-P. Francoise // Inverse Problems. – 2001. – Vol. 17. – P. 1–8.
3. Calogero, F. Integrable and solvable many-body problems in the plane via complexification / F. Calogero // J. Math. Phys. – 1998. – Vol. 39. – P. 5268–5291.

4. Calogero, F. Motion of poles and zeros of special solutions of nonlinear and linear partial differential equations and related "Solvable Many-Body Problems" / F. Calogero // *Nuovo Cimento*. – 1978. – Vol. 43 B. – P. 177–241.

5. Calogero, F. Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane. II. Analysis of various motions / F. Calogero, J.-P. Francoise, M. Sommacal // *J. Nonlinear Math. Phys.* – 2003. – Vol. 10. – P. 157–214.

6. Сазонова, А.Т. О решениях одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений, связанного с задачей четырех тел / А.Т. Сазонова // *Вестник ГрДУ. Серия 2. Математика. Фізика. Інформатика, вимірювальна техніка і керування*. – 2013. – № 3 (159). – С. 56–60.

7. Сазонова, А.Т. О решениях одной упрощенной системы нелинейных дифференциальных уравнений, связанной с задачей четырех тел / А.Т. Сазонова // *Проблемы физики, математики, техники*. – 2014. – № 1 (18). – С. 69–73.

8. Сазонова, А.Т. О некоторых случаях разрешимости упрощенных систем в задаче движения четырех тел под действием сил гравитации / А.Т. Сазонова // *Вестник ГрДУ. Серия 2. Математика. Фізика. Інформатика, вимірювальна техніка і керування*. – 2014. – № 1 (170). – С. 42–52.

9. Мартынов, И.П. Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем: пособие / И.П. Мартынов, Н.С. Березкина, В.А. Пронько. – Гродно: ГрГУ, 2009. – 395 с.

10. Лозовская, А.Т. О решениях одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, связанного с задачей трех тел / А.Т. Лозовская // *Наука* – 2008: сб. науч. ст. аспирантов и магистрантов ГрГУ им. Я. Купалы / редкол.: А.Ф. Проневич [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 294–301.

Поступила в редакцию 19.06.15.

О σ -СВОЙСТВАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП II

А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON σ -PROPERTIES OF FINITE GROUPS II

A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Пусть G – конечная группа, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ и Π – подмножество множества σ . Множество $\mathcal{H}$ подгрупп из G называется *полным холловым Π -множеством* в G , если $\mathcal{H}$ содержит в точности одну холлову σ_i -подгруппу из G для каждого такого $\sigma_i \in \Pi$, что $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$. Мы также говорим, что G является: Π -*полной*, если G обладает *полным холловым Π -множеством*; Π -*полной группой силовского типа*, если для всякого $\sigma_i \in \Pi$ каждая подгруппа E группы G является D_{σ_i} -группой, т. е. E содержит холлову σ_i -подгруппу H и каждая σ_i -подгруппа из E содержится в некоторой сопряженной с H подгруппой H^x ($x \in E$). В данной работе мы исследуем свойства конечных Π -полных групп. Работа продолжает исследования статьи [1].

Ключевые слова: конечная группа, Π -полная группа, σ -разрешимая группа, σ -нильпотентная группа, σ -квазинильпотентная группа.

Let G be a finite group, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ some partition of the set $\mathbb{P}$ of all primes and Π a subset of the set σ . A set $\mathcal{H}$ of subgroups of G is said to be a *complete Hall Π -set* of G if $\mathcal{H}$ contains exact one Hall σ_i -subgroup of G for every $\sigma_i \in \Pi$ such that $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$. We say also that G is: Π -*full* if G possess a *complete Hall Π -set*; a Π -*full group of Sylow type* if for each $\sigma_i \in \Pi$, every subgroup E of G is a D_{σ_i} -group, that is, E has a Hall σ_i -subgroup H and every σ_i -subgroup of E is contained in some conjugate of H^x ($x \in E$). In this paper we study properties of finite Π -full groups. The work continues the research of the paper [1].

Keywords: finite group, Π -full group, σ -soluble group, σ -nilpotent group, σ -quasinilpotent group.

1 Basic concepts

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, $\mathbb{P}$ is the set of all primes, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. If n is an integer, then the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing $|n|$; as usual, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the order $|G|$ of G .

In what follows, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is some partition of $\mathbb{P}$, that is, $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$; Π is always supposed to be a subset of the set σ and $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$.

We put $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$, and we say that G is: σ -*primary* if either $G = 1$ or $|\sigma(G)| = 1$; σ -*biprimary* if $|\sigma(G)| = 2$; a Π -*group* if $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

A chief factor H/K of G is said to be σ -*central* (in G) if the semidirect product

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$$

is σ -primary, otherwise it is called σ -*eccentric* (in G).

Definition 1.1. We say that G is: (i) σ -*soluble* [2] if every chief factor of G is σ -primary; (ii) σ -*nilpotent* if every chief factor of G is σ -central.

Example 1.2. (i) Every σ -nilpotent group is also σ -soluble, and G is σ -soluble if and only if it is σ_i -separable for all $i \in I$; G is soluble (respectively nilpotent) if and only if it is σ -soluble (respectively σ -nilpotent), where $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ is the *smallest* partition of $\mathbb{P}$, that is, for any $i \in I$, σ_i is a one-element set.

(ii) G is π -separable if and only if it is σ -soluble, where $\sigma = \{\pi, \pi'\}$.

(iii) Let $\pi = \{p_1, \dots, p_t\}$. Then G is π -soluble if and only if it is σ -soluble, where $\sigma = \{\{p_1\}, \dots, \{p_t\}, \pi'\}$.

(iv) In view of Theorem 4.1 in [1], $G \neq 1$ is σ -nilpotent if and only if $G = O_{\sigma_1}(G) \times \dots \times O_{\sigma_t}(G)$, where $\{\sigma_1, \dots, \sigma_t\} = \sigma(G)$.

A set $\mathcal{H}$ of subgroups of G is said to be a *complete Hall Π -set* of G if $\mathcal{H}$ contains exact one Hall σ_i -subgroup of G for every $\sigma_i \in \Pi \cap \sigma(G)$.

Definition 1.3. We say that G is:

(i) Π -*full* if G possess a *complete Hall Π -set*;

(ii) a D_{Π} -*group* if for each $\sigma_i \in \Pi$, G is a D_{σ_i} -group.

(iii) a Π -full group of Sylow type if every subgroup of G is a D_Π -group.

Example 1.4. (i) If G is π -soluble, then G is a Π -full group of Sylow type for each $\Pi \subseteq \sigma$ such that $\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i \subseteq \pi$. In particular, if G is soluble, then G is a σ -full group of Sylow type for every partition σ of $\mathbb{P}$.

(ii) In more general case, we say that G is Π -soluble if every chief factor of G is either a Π' -group or a σ_i -group for some $\sigma_i \in \Pi$. If $\Pi \cap \sigma(G) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$, $\pi = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_t$ and $\sigma^* = \{\sigma_1, \dots, \sigma_t, \pi'\}$, then G is Π -soluble if and only if G is σ^* -soluble. Therefore, in view of Theorem B in [3], a Π -soluble group is a Π -full group of Sylow type.

(iii) Let $G = A \times B$, where $A = Ly$ is the Lyons group and B is a group of prime order $p > 67$. Let $\Pi = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, where $\sigma_1 = \{11, 67\}$ and $\sigma_2 = \{2, p\}$. Then G is a Π -full group of Sylow type. It is also clear that G is not Π -soluble.

(iv) In view of Example 1.2 (iv), every σ -nilpotent group $G \neq 1$ is σ -full, and if $\sigma(G) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$, then $\{O_{\sigma_1}(G), \dots, O_{\sigma_t}(G)\}$ is the unique complete Hall σ -set of G .

Recall that a group G is said to be *quasinilpotent* if for every its chief factor H/K and every $x \in G$, x induces an inner automorphism on H/K [4, X, Definition 13.2]. Note that since for every central chief factor H/K of G , an element of G induces the trivial automorphism on H/K , one can say that a group G is quasinilpotent if for every its *eccentric* chief factor H/K and for every $x \in G$, x induces an inner automorphism on H/K . This elementary observation allows us to consider the following analogue of quasinilpotency:

Definition 1.5. We say that G is σ -quasinilpotent if for every σ -eccentric chief factor H/K of G , every automorphism of H/K induced by an element of G is inner.

Example 1.6. (i) G is quasinilpotent if and only if it is σ -quasinilpotent, where σ is the smallest partition of $\mathbb{P}$.

(ii) Let $G = (A_5 \wr A_5) \times (A_7 \times A_{11})$ and $\sigma = \{\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}'\}$. Then G is σ -quasinilpotent but G is neither σ -nilpotent nor quasinilpotent.

We use G^{σ_0} to denote the σ -nilpotent residual of G , that is, the intersection of all normal subgroups N of G with σ -nilpotent quotient G/N .

Definition 1.7. (i) The product of all normal respectively σ -soluble, σ -nilpotent, σ -quasinilpotent subgroups of G is said to be respectively the σ -radical, the σ -Fitting subgroup, the generalized σ -Fitting subgroup of G and we denote it respectively by $R_\sigma(G)$, $F_\sigma(G)$, $F_\sigma^*(G)$.

(ii) We use $E_\sigma(G)$ to denote the σ -nilpotent residual of $F_\sigma^*(G)$, and we say that $E_\sigma(G)$ is the σ -layer of G .

Remark 1.8. It is clear that $F(G) \leq F_\sigma(G)$ and $F^*(G) \leq F_\sigma^*(G)$. Moreover, if σ is the *smallest* partition of $\mathbb{P}$, then $F_\sigma(G) = F(G)$ and $F_\sigma^*(G) = F^*(G)$ is the generalized Fitting subgroup of G . Note also that, in view of Example 1.2 (iv), $F_\sigma(G) = O_{\sigma_1}(G) \times \dots \times O_{\sigma_t}(G)$, where $\{\sigma_1, \dots, \sigma_t\} = \sigma(G)$.

Example 1.9. Let $G = (A_5 \times A_7) \wr \langle x \rangle = K \rtimes \langle x \rangle$, where $|x| = p > 5$ is a prime and K is the base group of the regular wreath product G . Let $R = A_5^2$ and $L = A_7^2$ (we use here the terminology in [5, Ch. A]). Finally, let $\sigma = \{\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}'\}$. Then $K = R \times L$ and so, in view of Example 1.2 (iv), $F_\sigma(G) = R$. It is clear also that $K \leq F_\sigma^*(G)$ and the automorphism of R induced by x is not inner. Hence $F_\sigma^*(G) = K$. It is also clear that $E_\sigma(G) = L$ and $E(G) = K$.

In Sections 2–4 we study properties and some applications of Π -full, σ -soluble, σ -nilpotent, and σ -quasinilpotent groups and, in particular, the relationship between the subgroups $F_\sigma(G)$, $F_\sigma^*(G)$ and $E_\sigma(G)$. In Section 5 we analyze some applications of the results in Sections 2–4 in the theory of permutable subgroups. Finally, in Section 6 we discuss some open questions.

2 Π -soluble groups

We use $\mathfrak{S}_\Pi$ to denote the class of all Π -soluble groups.

The direct calculations show that the following properties of Π -soluble groups are true.

Proposition 2.1. (i) The class $\mathfrak{S}_\Pi$ is closed under taking products of normal subgroups, homomorphic images and subgroups. Moreover, any extension of the Π -soluble group by a Π -soluble group is a Π -soluble group as well.

(ii) $\mathfrak{S}_\Pi \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi^*}$ for any partition $\sigma^* = \{\sigma_j^* \mid j \in J\}$ of $\mathbb{P}$ such that $J \subseteq I$ and $\sigma_j \subseteq \sigma_j^*$ for all $j \in J$ and for $\Pi^* \subseteq \sigma^*$ such that

$$\cup_{\sigma_j^* \in \Pi^*} \sigma_j^* = \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i.$$

Proposition 2.2. Let G be Π -soluble.

(i) If M is a maximal subgroup of G such that $\sigma(|G:M|) \cap \Pi \neq \emptyset$, then $|G:M|$ is σ -primary.

(ii) For every $\sigma_i \in \sigma(G) \cap \Pi$, G has a maximal subgroup M such that $|G:M|$ is a σ_i -number.

Let A , B and R be subgroups of G . Then A is said to R -permute with B [6] if for some $x \in R$ we have $AB^x = B^x A$.

A subgroup H of G is said to be: a *Hall Π -subgroup* of G [2] if H is a Π -subgroup of G and $|G:H|$ is a Π' -number; a *σ -Hall subgroup* of G if H is a Hall Π -subgroup of G for some $\Pi \subseteq \sigma$.

It is clear that every σ -Hall subgroup is also a Hall subgroup of the group. In the group $G = S_3 \times C_5$, S_3 is a Hall subgroup of G but it is not a σ -Hall subgroup of G , where $\sigma = \{\{3, 5\}, \{3, 5\}'\}$.

If G has a complete Hall set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ of type σ such that $H_i H_j = H_j H_i$ for all i, j , then $\mathcal{H}$ is said to be a σ -basis [3] of G .

By the classical Hall theorem, G is soluble if and only if it has a Sylow basis. The direct analogue of this result for σ -soluble groups is not true in general. Indeed, let $\sigma = \{\{2, 3\}, \{2, 3\}'\}$. Then the alternating group A_5 of degree 5 has a σ -basis and it is not σ -soluble. Nevertheless, the following generalizations of the Hall result are true.

Theorem 2.3 (Skiba [3]). *Let $R = R_\sigma(G)$ be the σ -radical of G . Then any two of the following conditions are equivalent:*

- (i) G is σ -soluble.
- (ii) For any Π , G has a Hall Π -subgroup and every σ -Hall subgroup of G R -permutes with every Sylow subgroup of G .
- (iii) G has a σ -basis $\{H_1, \dots, H_t\}$ such that for each $i \neq j$ every Sylow subgroup of H_i R -permutes with every Sylow subgroup of H_j .

Theorem 2.4 (Skiba [3]). *Let $R = R_\sigma(G)$ be the σ -radical of G . Then G is σ -soluble if and only if for any Π the following hold: G has a Hall Π -subgroup E , every Π -subgroup of G is contained in some conjugate of E and E R -permutes with every Sylow subgroup of G .*

Recall that G^{σ_1} is the nilpotent residual of G , that is, the smallest normal subgroup of G with nil-quotient.

As one of the steps in the proof of Theorem 2.3, the following useful fact can be used.

Proposition 2.5 (Skiba [7]). *Suppose that $G = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_1 A_3$, where A_1 , A_2 and A_3 are σ -soluble subgroups of G . If the three indices $|G:N_G(A_1^{\sigma_1})|$, $|G:N_G(A_2^{\sigma_1})|$, $|G:N_G(A_3^{\sigma_1})|$ are pairwise σ -coprime, then G is σ -soluble.*

From Theorems 2.3 and 2.4 we get the following characterizations of the π -separable groups.

Corollary 2.6. *Let R be the product of all normal π -separable subgroups of G . Then G is π -separable if and only if $G = AB$, where A and B are a Hall π -subgroup and a Hall π' -subgroup of G , respectively, and every Sylow subgroup of A R -permutes with every Sylow subgroup of B .*

Corollary 2.7. *Let R be the product of all normal π -separable subgroups of G . Then G is π -separable*

if and only if $G = AB$, where A and B are a Hall π -subgroup and a Hall π' -subgroup of G , respectively, and every Sylow subgroup of G R -permutes with A and with B .

Now we give a characterization of σ -soluble groups in the terms of the normalizers of Sylow subgroups.

Theorem 2.8 (Skiba [3]). *Let G be a σ -full group and $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ a complete Hall σ -set of G . Then any two of the following conditions are equivalent:*

- (i) G is σ -soluble.
- (ii) Every σ -biprimary subgroup of G is σ -soluble and for every chief factor H/K of G and every $A \in \mathcal{H}$ the number $|G:N_G((A \cap H)K)|$ is σ -primary.
- (iii) Every σ -biprimary subgroup of G is σ -soluble and for any $k \in \{1, \dots, t\}$ there is a normal series $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ of G such that the number $|G:N_G((H_k \cap G_i)G_{i-1})|$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, n$.

Definition 2.9 (sf. [8]). If G has a complete Hall Π -set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$, where H_i is nilpotent (respectively supersoluble) for all $i = 1, \dots, t$, then we say that $\mathcal{H}$ is a *Wielandt Π -set* (respectively a *generalized Wielandt Π -set*) of G .

Example 2.10. (i) If σ is the smallest partition of $\mathbb{P}$, then every complete Hall σ -set of G is clearly a Wielandt σ -set of G .

(ii) Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is such that $\sigma_1 = \{5, 11\}$ and σ_i is a one-element set for all $i \neq 1$. Then the group $PSL(2, 11)$ possess a generalized complete Wielandt σ -set, and it does not possess a complete Wielandt Π -set for every Π containing σ_1 .

Corollary 2.11. *Suppose that G has a complete Wielandt set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ of type σ . Then any two of the following conditions are equivalent:*

- (i) G is soluble.
- (ii) For every chief factor H/K of G and every $A \in \mathcal{H}$ the number $|G:N_G((A \cap H)K)|$ is σ -primary.
- (iii) For any $k \in \{1, \dots, t\}$ there is a normal series $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ of G such that the number $|G:N_G((H_k \cap G_i)G_{i-1})|$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, n$.

We say that an integer n is *primary* if $n = p^m$ is a power of some prime p .

Corollary 2.12 (Guo and Skiba [8]). *Let $S = \{P_1, \dots, P_t\}$ be a complete Sylow set of G . Then any two of the following conditions are equivalent:*

- (i) G is soluble.
- (ii) For every chief factor H/K of G and every $P \in S$ the number $|G:N_G((P \cap H)K)|$ is primary.

(iii) For any $k \in \{1, \dots, t\}$ there is a normal series $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ of G such that the number $|G : N_G((P_k \cap G_i)G_{i-1})|$ is primary for all $i = 1, \dots, n$.

Corollary 2.13. *If for every Sylow subgroup P of G and for every chief factor H/K of G , $|G/K : N_{G/K}((P \cap H)K/K)|$ is a prime power, then G is soluble.*

From Corollary 2.13 we get the following known result.

Corollary 2.14 (See Zhang [9] or Guo [10]). *If for every Sylow subgroup P of G the number $|G : N_G(P)|$ is a prime power, then G is soluble.*

The σ -system normalizers of σ -soluble groups.

If $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ is a σ -basis of G and $\mathcal{H}^* = \{Q_1, \dots, Q_t\}$, where $Q_i = H_1 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_t$, then we say that $\mathcal{H}^*$ is a Hall σ -system of G (corresponding $\mathcal{H}$).

Now, let $\sigma(G) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$ and Q_i be a Hall σ_i -subgroup of G (we say that Q_i is a σ_i -complement of G). Then $H_i = \cap_{j \neq i} Q_j$ is a Hall σ_i -subgroup of G and $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ is a σ -basis of G such that $\mathcal{H}^* = \{Q_1, \dots, Q_t\}$ is a Hall σ -system of G corresponding $\mathcal{H}$ (see [11, VI, Section 2]).

Theorem 2.15. *If G is σ -soluble, then any two σ -basis of G are conjugate, as are any two Hall σ -systems.*

Proof. See the proof of Theorem 2.4 in [11, VI].

Definition 2.16. Let $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ is a σ -basis of G and $\mathcal{H}^* = \{Q_1, \dots, Q_t\}$ is a Hall σ -system of G corresponding $\mathcal{H}$. Then

$N = N_G(H_1) \cap \dots \cap N_G(H_t) = N_G(Q_1) \cap \dots \cap N_G(Q_t)$ (see Section 11 in [11, VI]). We say that N is a σ -system normalizer of G (corresponding $\mathcal{H}$).

Example 2.17. Let $p < q < r$ be primes, where p divides $q-1$. Let $A = Q \rtimes P$ be a non-abelian group of order pq and B a group of order r . Let $G = A \wr B = K \rtimes B$, where K is the base group of the regular wreath product G . Let $R = Q^B$ (we again use here the terminology in [5, A]) and $Z = \{(a, \dots, a) \in K \mid a \in A\}$. Then R is a minimal normal subgroup of G by [5, A, 18.5]. It is clear that $C_G(R) = R$ and $[Z, B] = 1$. Let $\sigma = \{p, q, \{p, q\}'\}$. Then $\{K, B\}$ is a σ -basis of G , $D = N_G(B)$ is a σ -system normalizer of G and $R/1$ is a σ -eccentric chief factor of G . Hence D does not cover $R/1$ by Theorem 2.19 below. It is also clear that $R \cap D \neq 1$. Hence D does not avoid $R/1$. Therefore in view of Theorem 3.2 in [5, V] and Corollary 3.4 below, a σ -system normalizer of a soluble group G in general is not a system $\mathfrak{N}_\sigma$ -normalizer of G , where $\mathfrak{N}_\sigma$ is the class of all σ -nilpotent groups, in the sense of Definition 1.2 in [5, V].

Nevertheless, the following result shows that the σ -system normalizers of a σ -soluble group partially inherits the properties of the system normalizers of a soluble group.

Theorem 2.18. *Let G be σ -soluble and D a σ -system normalizer of G .*

(i) *Any σ -system normalizer of G is σ -nilpotent and any two are conjugate.*

(ii) *D covers every σ -central chief factor of G and it does not cover every σ -eccentric chief factor of G ; D avoids every σ -eccentric chief p -factor H/K of G such that $p \in \sigma_i$, a Hall σ_i -subgroup of G is nilpotent and G is p -soluble.*

(iii) $D^G = G$ and $D_G = Z_\sigma(G)$.

Proof. (i) See the proof of Theorem 11.2 in [11, VI].

(ii) Let H/K be a chief factor of G and $C = C_G(H/K)$. Since G is σ -soluble by hypothesis, H/K is a σ_i -group for some $\sigma_i \in \sigma(G)$. Let the σ -system normalizer D of G arises from a σ -basis $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ of G . Without loss of generality we can assume that $i = 1$. Let $\pi = \sigma_1$ and $S = H_2 \dots H_t$ of G . Then S is a σ_1 -complement of G .

First assume that H/K is σ -central in G , that is, $(H/K) \rtimes (G/C)$ is a σ_1 -group. Then G/C is a π' -group. Hence $S \leq C$, which implies that $SK/K \leq N_{G/K}(H/K)$. Hence

$$SH/K = (SK/K)(H/K) = (SK/K) \times (H/K).$$

Then SK is normal in SH and $|SH : SK|$ is a π -number. Applying the Frattini argument to the σ_1 -complement S of SH , we have $SH = SKN_{SH}(S) \leq N_G(S)K$. Therefore the normal π -subgroup H/K of G/K is contained in every Hall σ_1 -subgroup of NK/K , where $N = N_G(S)$. Let $H_0 = H_1 \cap N$. Since $G = H_1 S = H_1 N$, $N = (H_1 \cap N)S = H_0 S$. Therefore $|H_0| = |N : S|$, so H_0 is a Hall σ_1 -subgroup of N . Now, let $\mathcal{H}^* = \{Q_1, \dots, Q_t\} = \{S, Q_2, \dots, Q_t\}$ be a Hall σ -system of G corresponding $\mathcal{H}$. Then $H_1 \leq Q_2 \cap \dots \cap Q_t$ and hence $H_0 \leq \leq N_G(Q_2) \cap \dots \cap N_G(Q_t)$, so $H_0 \leq D$ since $H_0 \leq H_1$. Hence $H_0 K/K$ is a Hall σ_1 -subgroup of NK/K , and so we have $H/K \leq H_0 K/K \leq DK/K$. Hence $H = H \cap DK = K(H \cap D)$, so D covers H/K .

Now, suppose that H/K is σ -eccentric in G . Then H/K is σ -eccentric in G/K . Without loss of generality we can assume that $\sigma(G) = \sigma(G/K)$. Then $\mathcal{H}K/K = \{H_1 K/K, \dots, H_t K/K\}$ is a σ -basis of G/K . Moreover, if D^*/K is a σ -system normalizer of G/K corresponding $\mathcal{H}K/K$, then $DK/K \leq D^*/K$. If $K \neq 1$, then D^*/K does not cover (D^*/K) avoids, respectively) H/K by

induction and so DK/K does not cover (avoids, respectively) H/K . But then D does not cover (avoids, respectively) H/K .

Now assume that $K=1$. Suppose that $H \leq D$. Then $HH_i = H \times H_i$ for all $i > 1$, so G/C is a σ_1 -group and hence H/K is σ -central in G . This contradiction completes the proof of the first assertion of (ii). Finally, suppose that H is a p -group, where $p \in \sigma_1$, a Hall σ_1 -subgroup of G is nilpotent and G is p -soluble. Suppose that $D \cap H \neq 1$. Then $N_G(S) \cap R \neq 1$ and hence by Lemma 1.4 in [5, Ch. 5] we have $M \leq C_G(H)$, which implies that G/C is a σ_1 -group and hence $H/1$ is σ -central in G . This contradiction completes the proof of Assertion (ii).

(iii) Assume that $D^G < G$. Then, since G/D^G is σ -soluble, $G^{\mathfrak{N}_\sigma} D^G / D^G = (G/D^G)^{\mathfrak{N}_\sigma} < G/D^G$ and hence $G^{\mathfrak{N}_\sigma} D < G$, contrary to Assertion (ii). Hence $D^G = G$. The second assertion of the result is a corollary of Assertion (ii) and Proposition 3.5 (i) below. The theorem is proved.

Corollary 2.19. Assume that G has a σ -basis which is a Wielandt σ -set of G . Then a σ -system normalizer of G covers the σ -central chief factors of G and avoids the σ -eccentric chief factor of G .

Corollary 2.20 (P. Hall). A system normalizer of a soluble group G covers the central chief factors of G and avoids the eccentric chief factor of G .

3 General properties of the σ -nilpotent and σ -quasinilpotent groups

Recall that a subgroup A of G is σ -subnormal in G [2] if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$ such that either A_{i-1} is normal in A_i or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, n$.

The following theorem collects the main properties of σ -subnormal subgroups.

Theorem 3.1 (Skiba [2]). Let A , K and N be subgroups of G . Suppose that A is σ -subnormal in G and N is normal in G .

- (1) $A \cap K$ is σ -subnormal in K .
- (2) If K is a σ -subnormal subgroup of A , then K is σ -subnormal in G .
- (3) If K is σ -subnormal in G , then $A \cap K$ and $\langle A, K \rangle$ are σ -subnormal in G .
- (4) AN/N is σ -subnormal in G/N .
- (5) If $N \leq K$ and K/N is σ -subnormal in G/N , then K is σ -subnormal in G .
- (6) If $K \leq A$ and A is σ -nilpotent, then K is σ -subnormal in G .
- (7) If $H \neq 1$ is a Hall Π -subgroup of G and A is not a Π' -group, then $A \cap H \neq 1$ is a Hall Π -subgroup of A .
- (8) If $|G:A|$ is a Π -number, then $O^\Pi(A) = O^\Pi(G)$.

(9) If N is a Π -group of G , then $N \leq N_G(O^\Pi(A))$.

(10) If A is a σ -Hall subgroup of G , then A is normal in G .

(11) If G is a σ -group and A is σ -nilpotent, then A is contained in $F_\sigma(G)$.

In this theorem $O^\Pi(G)$ denotes the subgroup of G generated by all its Π' -subgroups. Instead of $O^{\{\sigma_i\}}(G)$ we write $O^{\sigma_i}(G)$.

Before continuing, let's consider the following elementary example.

Example 3.2. Let p, q, r be different primes, where q divide $p-1$. Let $P \rtimes Q$ be a non-abelian group of order pq and R a group of order r . Let $G = (P \rtimes Q) \wr R$ be the regular wreath product of the group $P \rtimes Q$ with R and $H = Q^1$. If $\sigma = \{\{p, q\}, \{p, q\}'\}$, then the subgroup H is σ -subnormal in G by Theorem 3.1(6) but it is not subnormal in G .

The following result indicates the importance of the concept of σ -subnormality.

Theorem 3.3. Any two of the following conditions are equivalent:

- (i) G is σ -nilpotent.
- (ii) Every chief factor of G is σ -central.
- (iii) G has a complete Hall σ -set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ such that $G = H_1 \times \dots \times H_t$.
- (iv) G has a complete Hall σ -set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ such that every member of $\mathcal{H}$ is σ -subnormal in G .
- (v) Every subgroup of G is σ -subnormal in G .
- (vi) Every maximal subgroup of G is σ -subnormal in G .

Proof. See the proof of Theorem 4.1 in [1].

We use $\mathfrak{N}_\sigma$ and $\mathfrak{N}_\sigma^*$ to denote the classes of all σ -nilpotent groups and of all σ -quasinilpotent groups, respectively.

Corollary 3.4. The class $\mathfrak{N}_\sigma$ is closed under taking products of normal subgroups, homomorphic images and subgroups. Moreover, if E is a normal subgroup of G and $E/\Phi(G) \cap E$ is σ -nilpotent, then E is σ -nilpotent.

A normal subgroup E of G is said to be σ -hypercentral (in G) if either $E = 1$ or every chief factor of G below E is σ -central (in G). We use $Z_\sigma(G)$ to denote the product of all normal σ -hypercentral subgroups of G . It is not difficult to show (see Proposition 3.5 (i) below) that $Z_\sigma(G)$ is also σ -hypercentral in G . We call the subgroup $Z_\sigma(G)$ the σ -hypercentre of G .

The next proposition collects the main properties of the σ -hypercentre.

Proposition 3.5 (Skiba [7]). Let G be a σ -full group and $Z = Z_\sigma(G)$. Let A , B and N be subgroups of G , where N is normal in G .

- (i) Every chief factor of G below Z is σ -central in G .
- (ii) $ZN/N \leq Z_\sigma(G/N)$.
- (iii) $Z_\sigma(A)N/N \leq Z_\sigma(AN/N)$.
- (iv) For every subgroup H of G we have $Z_\sigma(H) \cap A \leq Z_\sigma(H \cap A)$.
- (v) $G/C_G(Z)$ and Z are σ -nilpotent.
- (vi) If G/Z is σ -nilpotent, then G is also σ -nilpotent.
- (vii) If $N \leq Z$, then $Z/N = Z_\sigma(G/N)$.
- (viii) If A is σ -nilpotent, then ZA is also σ -nilpotent.
- (ix) If $G = A \times B$, then $Z = Z_\sigma(A) \times Z_\sigma(B)$. Moreover, if a subgroup U of G is subdirectly contained in G , then $Z_\sigma(U) = U \cap Z_\sigma(G)$.
- (x) If $N \leq Z$, then A is σ -subnormal in NA .
- (xi) If $N \leq Z$, then A is σ -subnormal in G if and only if NA/N is σ -subnormal in G/N .

Corollary 3.6. $[G^{\mathfrak{N}_\sigma}, Z_\sigma(G)] = 1$.

A subgroup H of G is said to be a *maximal σ -nilpotent subgroup* of G if H is σ -nilpotent subgroup but every subgroup E of G such that $H < E$ is not σ -nilpotent.

We have already known (see Theorem 2.18 (iii)) that if G is σ -soluble, then the σ -hypercentre $Z_\sigma(G)$ of G coincides with the intersection of all conjugates of H , where H is a σ -system normalizer of G . In the general case, we have

Theorem 3.7 (Skiba [7]). $Z_\sigma(G)$ coincides with the intersection of all maximal σ -nilpotent subgroups of G .

Corollary 3.8 (Baer). The hypercentre $Z_\infty(G)$ of G coincides with the intersection of all maximal nilpotent subgroups of G .

Lemma 3.9. (i) If G is σ -quasinilpotent group and N a normal subgroup of G , then N and G/N are σ -quasinilpotent.

(ii) If G/N and G/L are σ -quasinilpotent, then $G/(N \cap L)$ is σ -quasinilpotent.

Proof. (i), (ii) See the proof of Lemma 13.2 in [4, X].

Lemma 3.10. Let H/K be a chief factor of G . Then every automorphism of H/K induced by an element of G is inner if and only if

$$G = (H/K)C_G(H/K).$$

Proof. See the proof of Lemma 13.4 in [4].

Definition 3.11. We say that G is: σ -perfect if $G^{\mathfrak{N}_\sigma} = G$; σ -semisimple if either $G = 1$ or $G = A_1 \times \dots \times A_t$ is the direct product of non-abelian simple non- σ -primary groups $A_1, \dots, A_t$.

Note that if $\sigma = \{\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}'\}$ and $G = A_7 \times A_{11}$, then G is σ -semisimple and σ -perfect.

Lemma 3.12. Let N be a normal σ_i -subgroup of G . Then $N \leq Z_\sigma(G)$ if and only if $O^{\sigma_i}(G) \leq C_G(N)$.

Proof. If $O^{\sigma_i}(G) \leq C_G(N)$, then for every chief factor H/K of G below N both groups H/K and $G/C_G(H/K)$ are σ_i -group since $G/O^{\sigma_i}(G)$ is a σ_i -group, so $N \leq Z_\sigma(G)$.

Now assume that $N \leq Z_\sigma(G)$. Let $1 = Z_0 < Z_1 < \dots < Z_t = N$ be a chief series of G below N and $C_i = C_G(Z_i/Z_{i-1})$. Let $C = C_1 \cap \dots \cap C_t$. Then G/C is a σ_i -group. On the other hand, $C/C_G(N) \cong A \leq \text{Aut}(N)$ stabilizes the series $1 = Z_0 < Z_1 < \dots < Z_t = N$, so $C/C_G(N)$ is a $\pi(N)$ -group by Theorem 0.1 in [12]. Hence $G/C_G(N)$ is a σ_i -group, so $O^{\sigma_i}(G) \leq C_G(N)$. The lemma is proved.

Theorem 3.13. Given group G the following are equivalent:

- (i) G is σ -quasinilpotent.
- (ii) $G/Z_\sigma(G)$ is σ -semisimple.
- (iii) $G/F_\sigma(G)$ is σ -semisimple and

$$G = F_\sigma(G)C_G(F_\sigma(G)).$$

Proof. Let $Z = Z_\sigma(G)$. (i) $\Rightarrow$ (ii) Assume that this is false and let G be a counterexample of minimal order. Then the hypothesis holds for G/R by Lemma 3.9 (i). On the other hand, $Z_\sigma(G/Z) = 1$ by Proposition 3.5 (vii). Hence in the case when $Z \neq 1$, $G/Z_\sigma(G)$ is σ -semisimple by the choice of G .

Now assume that $Z = 1$ and let R be any minimal normal subgroup of G . Then $R/1$ is σ -eccentric since $Z(G) \leq Z = 1$. Hence R is non-abelian and $G = R \times C_G(R)$ by Lemma 3.10. Therefore

$$Z_\sigma(R) \times Z_\sigma(C_G(R)) = Z_\sigma(G) = 1$$

by Proposition 3.5 (ix). Hence the choice of G implies that R and $C_G(R)$ are σ -semisimple, so G is σ -semisimple, a contradiction. Hence G/Z is σ -semisimple.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) First note that $Z \leq F_\sigma(G)$ by Proposition 3.5 (v), so $Z = F_\sigma(G)$ since G/Z is σ -semisimple by hypothesis. But then $G/C_G(F_\sigma(G))$ is σ -nilpotent by Proposition 3.5(v). Hence $G = F_\sigma(G)C_G(F_\sigma(G))$ since $G/F_\sigma(G) = G/Z$ is σ -semisimple.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Let H/K be a chief factor of G . If $F_\sigma(G) \leq K$, then every automorphism of H/K induced by an element of G is inner by Lemma 3.10 since $G/F_\sigma(G)$ is σ -semisimple by hypothesis. Now suppose that $H \leq F_\sigma(G)$. Then

$$\begin{aligned} C_G(H/K) &= C_G(H/K) \cap F_\sigma(G)C_G(F_\sigma(G)) = \\ &= C_G(F_\sigma(G))C_{F_\sigma(G)}(H/K), \end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned} G/C_G(H/K) &= \\ &= F_\sigma(G)C_G(F_\sigma(G))/C_G(F_\sigma(G))C_{F_\sigma(G)}(H/K) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\sigma}(G) / F_{\sigma}(G) \cap C_G(F_{\sigma}(G)) C_{F_{\sigma}(G)}(H/K) &= \\
= F_{\sigma}(G) / C_{F_{\sigma}(G)}(H/K) Z(F_{\sigma}(G)) &= \\
= (F_{\sigma}(G) / C_{F_{\sigma}(G)}(H/K)) / (C_{F_{\sigma}(G)}(H/K) \times \\
\times Z(F_{\sigma}(G)) / C_{F_{\sigma}(G)}(H/K)) &
\end{aligned}$$

is σ -primary by Lemma 3.12. Therefore H/K is σ -central in G . Now applying the Jordan-Hölder theorem for the chief series [5] we get that for every σ -eccentric chief factor H/K of G , every automorphism of H/K induced by an element of G is inner. The theorem is proved.

Corollary 3.14. *Let G be σ -quasinilpotent.*

(i) *If G is σ -perfect, then $Z_{\sigma}(G) = Z(G)$.*

(ii) *If H is a normal σ -soluble subgroup of G , then $H \leq Z_{\sigma}(G)$.*

Proof. (i) This assertion follows from Proposition 3.5 (v) and Theorem 3.13.

(ii) This directly follows from Theorem 3.13.

Corollary 3.15. *If a σ -quasinilpotent group $G \neq 1$ is σ -soluble, then $G = O_{\sigma_1}(G) \times \dots \times O_{\sigma_l}(G)$, where $\{\sigma_1, \dots, \sigma_l\} = \sigma(G)$.*

Corollary 3.16. *Let $\pi = \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i$. If a σ -quasinilpotent group $G \neq 1$ is π -separable, then*

$$G = O_{\pi}(G) \times O_{\pi'}(G).$$

Corollary 3.17. *If a quasinilpotent group G is π -separable, then $G = O_{\pi}(G) \times O_{\pi'}(G)$.*

A formation is a class $\mathfrak{F}$ of groups with the following properties:

(i) Every homomorphic image of an $\mathfrak{F}$ -group is an $\mathfrak{F}$ -group.

(ii) If G/M and G/N are $\mathfrak{F}$ -groups, then also $G/(M \cap N)$ belongs to $\mathfrak{F}$.

The formation $\mathfrak{F}$ is said to be: (solubly) saturated if $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$ for some (soluble) normal subgroup N of G ; (normally) hereditary if $H \in \mathfrak{F}$ whenever $G \in \mathfrak{F}$ and H is a (normal) subgroup of G .

A class $\mathfrak{F}$ of groups is called a *Fitting class* if it is closed under taking normal subgroups and products of normal subgroups.

From Corollary 3.4 we get at once the following fact.

Theorem 3.18 *The class $\mathfrak{N}_{\sigma}$ is a hereditary saturated formation. Moreover, $\mathfrak{N}_{\sigma}$ is a Fitting class.*

We write $\text{Com}(G)$ to denote the class of all groups L such that L is isomorphic to some abelian composition factor of G ; $R(G)$ denotes the largest normal soluble subgroup of G .

For a formation function of the form

$$f: \mathbb{P} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{formations of groups}\} \quad (3.1)$$

we put, following [13],

$$\text{CLF}(f) = \{G \text{ is a group} \mid G/R(G) \in f(0)\}$$

and

$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ for any prime } p \in \pi(\text{Com}(G)).$$

If $\mathfrak{F} = \text{CLF}(f)$ for some formation function f , then we say that f is a *composition* satellite of the formation $\mathfrak{F}$.

From [14, I, 3.2] and Baer's Theorem [5, IV, 3.17], the following result follows.

Lemma 3.19. (i) *For any function f of the form (3.1), the class $\text{CLF}(f)$ is a solubly saturated formation.*

(ii) *For any non-empty solubly saturated formation $\mathfrak{F}$, there is a unique function F of the form (3.1) such that $\mathfrak{F} = \text{CLF}(F)$, $F(p) = \mathfrak{G}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ for all primes p , and $F(0) = \mathfrak{F}$.*

The function F in Lemma 3.19 (ii) is called the *canonical composition satellite* of $\mathfrak{F}$.

Now, being based on Theorem 3.13 and Lemma 3.19, we prove the following useful fact.

Theorem 3.20. *The class $\mathfrak{N}_{\sigma}^*$ is a normally hereditary solubly saturated formation. Moreover, $\mathfrak{N}_{\sigma}^*$ is a Fitting class.*

Proof. In order to prove the first assertion of the theorem, it is enough to prove, in view of Lemma 3.9, that $\mathfrak{N}_{\sigma}^*$ is a solubly saturated formation. Let $\mathfrak{M} = \text{CLF}(f)$, where $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is the class of all σ_i -groups for all $p \in \sigma_i$, and $f(0) = \mathfrak{N}_{\sigma}^*$. We show that $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\sigma}^*$. Let G be a group of minimal order in $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}_{\sigma}^*$ and R a minimal normal subgroup of G . Then, in view of Lemma 3.9, R is the unique minimal normal subgroup of G and G/R is σ -quasinilpotent. Therefore, in view of Theorem 3.13, R is not σ -central in G . Hence R is non-abelian. But then $R(G) = 1$ and so $G = G/R(G) \in f(0) = \mathfrak{N}_{\sigma}^*$, a contradiction. Thus $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}^*$. Now, assume that $\mathfrak{N}_{\sigma}^* \not\subseteq \mathfrak{M}$ and G be a group of minimal order in $\mathfrak{N}_{\sigma}^* \setminus \mathfrak{M}$ with a minimal normal subgroup R . Then $R = G^{\mathfrak{M}}$ is the unique minimal normal subgroup of G . If R is non-abelian, then $R(G) = 1$ and therefore $G = G/R(G) \in f(0) = \mathfrak{N}_{\sigma}^*$. Moreover, in this case we have $R \leq C^p(G)$ and

$$\begin{aligned}
G/C^p(G) &= (G/R)/(C^p(G)/R) = \\
&= (G/R)/C^p(G/R) \in f(p)
\end{aligned}$$

for all $p \in \pi(\text{Com}(G))$ since $G/R \in \mathfrak{M}$ and so $G \in \mathfrak{M}$, a contradiction. Hence R is a p -group for some prime $p \in \sigma_i$. But $G \in \mathfrak{N}_{\sigma}^*$, so $R \rtimes (G/C_G(R))$ is a σ_i -group. But then $G/C^p(G)$ is a σ_i -group and so $G \in \mathfrak{M}$. Hence $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\sigma}^*$. Therefore $\mathfrak{N}_{\sigma}^*$ is a solubly saturated formation by Lemma 3.19.

Since the class $\mathfrak{N}_{\sigma}^*$ is normally hereditary by Lemma 3.9, in order to prove the second assertion of

the theorem it is enough to show that if $G = AB$, where A and B are normal σ -quasinilpotent subgroups of G , then G is σ -quasinilpotent. Let R be a minimal normal subgroup of G and $C = C_G(R)$. By Lemma 2.9 (i), the hypothesis holds for G/R , so the choice of G implies that G/R is σ -quasinilpotent. Therefore in view of Lemma 2.9 (ii), R is the unique minimal normal subgroup of G .

Let $Z_1 = Z_\sigma(A)$ and $Z_2 = Z_\sigma(B)$. If $A \cap B = 1$, then $Z_\sigma(G) = Z_1 \times Z_2$ by Proposition 3.5 (ix). On the other hand, A/Z_1 and B/Z_2 are σ -semisimple by Theorem 3.13, so

$$G/Z = (A \times B)/(Z_1 \times Z_2) = (A/Z_1) \times (B/Z_2)$$

is σ -semisimple. Hence G is σ -quasinilpotent by Theorem 3.13.

Now suppose that $A \cap B \neq 1$. Then $R \leq A \cap B$. First assume that R is σ -primary, say R is a σ_i -group. Then by Proposition 3.5, $R \leq F(A) \cap F(B) \leq Z_1 \cap Z_2$. Then $AC/C \cong A/A \cap C$ and $BC/C \cong B/B \cap C$ are σ_i -groups and hence $G/C = (AC/C)(BC/C)$ is a σ_i -group. Hence R is σ -central in G . Therefore $R \leq Z_\sigma(G)$ and so $Z_\sigma(G/R) = Z_\sigma(G)/R$ by Proposition 3.5 (vii). Thus G is σ -quasinilpotent by Theorem 3.13.

Therefore R is not σ -primary. Hence R is non-abelian, so $C = 1$. Then $R = R_1 \times \dots \times R_t$, where $R_1, \dots, R_t$ are minimal normal subgroups of A . Let $C_i = C_A(R_i)$ ($i = 1, \dots, t$). Then $C = 1 = C_1 \cap \dots \cap C_t$. Since A is σ -quasinilpotent by hypothesis, $A = R_i C_i$ for all $i = 1, \dots, t$ by Lemma 3.9. Hence

$$\begin{aligned} R &= RC = R_1 \dots R_t (C_1 \cap \dots \cap C_t) = \\ &= R_1 \dots R_{t-1} (R_t C_t \cap C_{t-1} \cap \dots \cap C_1) = \\ &= R_1 \dots R_{t-1} (A \cap C_{t-1} \cap \dots \cap C_1) = \dots = R_1 C_1 = A. \end{aligned}$$

Similarly we can get that $B = R$, so $G = R$ is σ -semisimple. Hence G is σ -quasinilpotent. The theorem is proved.

4 The subgroups $F_\sigma(G)$, $F_\sigma^*(G)$, and $E_\sigma(G)$

We use the symbol $\Phi^*(G)$ to denote the subgroup $\Phi(R(G))$ [15].

The following result collect basic properties of the $F_\sigma(G)$, $F_\sigma^*(G)$ and $E_\sigma(G)$, and describes the main relations between them.

Theorem 4.1 (Skiba [7]). *Let G be a σ -full group. Let $F_\sigma = F_\sigma(G)$, $F_\sigma^* = F_\sigma^*(G)$ and $E_\sigma = E_\sigma(G)$.*

(i) F_σ^* is σ -quasinilpotent and $F_\sigma = Z_\sigma(F_\sigma^*)$. Hence F_σ^*/F_σ is σ -semisimple and F_σ^*/F_σ is the product of all minimal normal subgroups of G/F_σ contained in $F_\sigma C_G(F_\sigma)/F_\sigma$. Also $F_\sigma/Z_\sigma(G) = F_\sigma(G/Z_\sigma(G))$ and $F_\sigma^*/Z_\sigma(G) = F_\sigma^*(G/Z_\sigma(G))$.

(ii) $F_\sigma^* = E_\sigma F_\sigma = C_{F_\sigma^*}(F_\sigma)F_\sigma$ and $F_\sigma = C_{F_\sigma^*}(E_\sigma)$.

Also E_σ is a σ -perfect characteristic subgroup of F_σ^* and $E_\sigma/Z(E_\sigma)$ is σ -semisimple. Hence $E_\sigma(G) = E_\sigma(E_\sigma(G))$.

(iii) A σ -subnormal subgroup H of G is contained in F_σ^* (respectively in F_σ) if and only if it is σ -quasinilpotent (respectively σ -nilpotent). Moreover, if H also is σ -quasinilpotent σ -perfect, then $H \leq E_\sigma$.

(iv) $C_G(F_\sigma^*) \leq Z(F_\sigma^*)$.

(v) $F_\sigma(G/\Phi(G)) = F_\sigma/\Phi(G)$ and

$$F_\sigma^*(G/\Phi^*(G)) = F_\sigma^*/\Phi^*(G).$$

Corollary 4.2. *If G is σ -full, then for every σ -subnormal subgroup V of G we have $F_\sigma(G) \cap V = F_\sigma(V)$ and $F_\sigma^*(G) \cap V = F_\sigma^*(V)$.*

It is clear that if $R \leq E \leq G$, where R is a non-abelian minimal normal subgroup of G and E is normal in G , then R is the product of some minimal normal subgroups of E [5, A, 4.13]. Hence we get from Theorem 4.1 (i) the following

Corollary 4.3. *If G is σ -full, then $F_\sigma^*(G)/F_\sigma(G)$ is the group generated by all minimal normal subgroup of*

$$C_G(F_\sigma(G))F_\sigma(G)/F_\sigma(G).$$

From Theorem 4.1 (iv) we get

Corollary 4.4 (Skiba [1]). *If G is σ -soluble, then $C_G(F_\sigma(G)) \leq F_\sigma(G)$.*

Note that in view of Example 1.2 (ii) in the special case, when $\sigma = \{\pi, \pi'\}$, we get from Corollary 4.3 the following fact.

Corollary 4.5. *If G is π -separable, then*

$$C_G(O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)) \leq O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G).$$

Theorem 4.6. *Let G be a σ -full group and H a σ -soluble subgroup of G . If $E_\sigma(G) \leq N_G(H)$, then $E_\sigma(G) \leq N_G(H)$.*

Proof. Since $E_\sigma(G) \leq N_G(H)$, $[E_\sigma(G), H = 1] \leq E_\sigma(G) \cap H$ and $E_\sigma(G) \cap H$ is a σ -soluble normal of $E_\sigma(G)$. Hence $E_\sigma(G) \cap H \leq Z(E_\sigma(G))$ since $E_\sigma(G)/Z(E_\sigma(G))$ is σ -semisimple by Theorem 4.1 (ii). Hence $[E_\sigma(G), H, E_\sigma(G)] = 1$, so $[E_\sigma(G), H] = [E_\sigma(G), E_\sigma(G), H] = 1$ by the lemma on three subgroups [11, III, 1.10]. The theorem is proved.

Definition 4.7. A σ -component of $E_\sigma(G)$ (sf. [4, Definition 13.17]) is a σ -perfect normal subgroup H of $E_\sigma(G)$ such that that $H/Z(H)$ is simple.

Theorem 4.1 makes possible to prove the following two results.

Theorem 4.8 (Skiba [7]). *Suppose that G is σ -full and let $Z = Z(E_\sigma(G))$.*

(i) $E_\sigma(G)$ is the product of its σ -components but is not the product of any proper subset of them.

(ii) If H is a σ -component of $E_\sigma(G)$, then HZ/Z is a simple direct factor of $E_\sigma(G)$ and $Z(H) = H \cap Z$.

(iii) If H_1 and H_2 are distinct σ -components of $E_\sigma(G)$, then $[H_1, H_2] = 1$.

(iv) If R is a σ -subnormal subgroup of $E_\sigma(G)$, then R is the product of $R \cap Z$ and certain σ -component of $E_\sigma(G)$. In particular, R is normal in $E_\sigma(G)$. Also $Z(E_\sigma(G)) = ZR/R$ and $E_\sigma(G) = RC_{E_\sigma(G)}(R)$.

(v) If H is a σ -component of $E_\sigma(G)$ and $A \leq G$, then either $H \leq [H, A]$ or $[H, A] = 1$. If, further, $H \leq N_G(A)$, then either $H \leq E_\sigma(A)$ or $[H, A] = 1$.

Theorem 4.9 (Skiba [7]). Let G be a σ -full group and a Hall σ_1 -subgroup of G is nilpotent. Suppose that S is a σ_1 -subgroup of G . Then

$$O^{\sigma_1}(F_\sigma^*(N_G(S))) = O^{\sigma_1}(F_\sigma^*(C_G(S))) \leq C_G(O_\sigma(G)).$$

Corollary 4.10 (Bender [16]). If S is a p -subgroup of G , then

$$O^p(F^*(N_G(S))) = O^p(F^*(C_G(S))) \leq C_G(O_\sigma(G)).$$

Some other applications of Theorem 4.1. Theorem 4.1 not only covers a large number of known results, but it also allows you to establish a link between some of these results. Note for example that the following known results are special cases of Corollary 4.3.

Corollary 4.11 (See [17, Ch. 6, 1.3]). If G is soluble, then $C_G(F(G)) \leq F(G)$.

Corollary 4.12 (See [17, Ch. 6, 3.2]). If G is π -separable, then the following inclusion holds:

$$C_{G/O_\pi(G)}(O_\pi(G/O_\pi(G))) \leq O_\pi(G/O_\pi(G)).$$

In view of Example 1.2 (iii) and Remark 1.6, we get from Corollary 4.3 also the following

Corollary 4.13 (Monakhov and Shpyrko [18]). Let G be a π -soluble group.

$$(1) C_G(O_\pi(G) \times O_\pi(G)) \leq F(O_\pi(G)) \times O_\pi(G).$$

$$(2) \text{ If } O_\pi(G) = 1, \text{ then } C_G(F(G)) \leq F(G).$$

In the case, when σ is the smallest partition of $\mathbb{P}$, we get from Theorem 4.1 and Corollaries 4.2 and 4.3 the following known results.

Corollary 4.14 (See [4, X, 13.13]). $F^*(G)/F(G)$ is the group generated by all minimal normal subgroup of $C_G(F(G))F(G)/F(G)$.

Corollary 4.15 (See [4, X, 13.10]). $F^*(G)$ is quasinilpotent and every subnormal quasinilpotent subgroup of G is contained in $F^*(G)$.

Corollary 4.17 (See [5, A, 8.8]). $F(G)$ is generated by all subnormal nilpotent subgroup of G .

Corollary 4.18 (See [4, X, 13.15]).

$$F(G) = C_{F^*(G)}(E(G)).$$

5 Further applications

Let $\mathcal{L}$ be some non-empty set of subgroups of G and E a subgroup of G . Then a subgroup A of G is called $\mathcal{L}$ -permutable if $AH = HA$ for all $H \in \mathcal{L}$; $\mathcal{L}^E$ -permutable if $AH^x = H^x A$ for all $H \in \mathcal{L}$ and $x \in E$.

If $\mathcal{L}$ is a complete Sylow π -set of G (that is, $\mathcal{L}$ contains exact one Sylow p -subgroup for every $p \in \pi$ such that p divides $|G|$), then an $\mathcal{L}^G$ -permutable subgroup is called π -permutable or π -quasinormal [19] in G . Recall also that $\pi(G)$ -permutable subgroups are also called S -permutable or S -quasinormal in G .

In this section we deal with the following generalization of these concepts.

Definition 5.1. We say that a subgroup H of G is Π -permutable in G if G possess a complete Hall Π -set $\mathcal{H}$ such that H is $\mathcal{H}^G$ -permutable.

Example 5.2. (i) If G is nilpotent, then Sylow subgroups of G are normal in G , so every subgroup of G is σ -permutable in G for every partition σ of $\mathbb{P}$.

In more general case, when G is σ -nilpotent, every subgroup of G is Π -permutable in G for every $\Pi \subseteq \sigma$.

(ii) Now let p, q, r be different primes, where q divides $p-1$. Let $H = Q \rtimes R$ be a non-abelian group of order qr , P a simple $\mathbb{F}_p H$ -module which is faithful for H , and $G = P \rtimes H$.

Let $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, where $\sigma_1 = \{p, r\}$ and $\sigma_2 = \{p, r\}'$. Then G is not σ -nilpotent and $|P| > p$. Since q divides $p-1$, PQ is supersoluble and hence for some normal subgroup L of PQ we have $1 < L < P$. Then for every Hall σ_1 -subgroup V of G we have $L \leq P \leq V$, so $QV = V = VQ$. On the other hand, for every Hall σ_2 -subgroup W of G we have $W \leq PQ$, so $QW = WQ$. Hence Q is σ -permutable in G . It is also clear that L is not normal in G , so $LR \neq RL$, which implies that L is not S -permutable in G .

Theorem 5.3 (Skiba [20]). Let H be a Π -subgroup of G .

(i) If G is a Π -full group and H is Π -permutable in G , then H is σ -subnormal in G and H^G is a Π -group.

(iii) If G is a Π' -full group and H is Π' -permutable in G , then H^G has a σ -nilpotent Hall Π' -subgroup.

Corollary 5.4 (Kegel [19]). If a π -subgroup H of G is π -permutable in G , then H is subnormal in G .

A subgroup H of G is called a S -semipermutable in G if H permutes with all Sylow subgroups P of G such that $(|H|, |P|) = 1$.

Corollary 5.5 (Isaacs [21]). If a π -subgroup H of G is S -semipermutable in G , then the normal

closure H^G of H in G possess a nilpotent π -complement.

Theorem 5.3 was applied in the proofs of many results about Π -permutable subgroups. In particular, on the basis of this result the following fact can be proved.

Theorem 5.6 (Skiba [2]). *Let G be a σ -full group and $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$. If a subgroup H of G is σ -permutable in G , then H^G / H_G is σ -nilpotent and $D \leq N_G(H)$.*

Corollary 5.7 (Deskins [22]). *If a subgroup H of G is S -permutable in G , then H / H_G is nilpotent.*

As a direct consequence of Theorem 5.6, we also have

Corollary 5.8. *Suppose that G is a σ -full group of Sylow type. If $G^{\mathfrak{N}_\sigma} = G$, then every σ -permutable subgroup of G is normal.*

It is not difficult to show that if H / N is Π -permutable in G / N and G is a Π -full group of Sylow type, then H is Π -permutable in G as well. On the other hand, in view of Example 5.2 (i), every subgroup of every σ -nilpotent group is σ -permutable. Hence we also get from Theorem 5.6 the following facts.

Corollary 5.9. *Suppose that G is a σ -full group of Sylow type and let H be a subgroup of G . If H is σ -permutable in G , then $N_G(H)$ is also σ -permutable in G .*

Corollary 5.10 (Schmid [23]). *If a subgroup H of G is S -permutable in G , then $N_G(H)$ is also S -permutable.*

A group G is said to be a π -decomposable if $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$, that is, G is the direct product of its Hall π -subgroup and Hall π' -subgroup.

Taking in Theorem 5.6 $\sigma = \{\pi, \pi'\}$, we get

Corollary 5.11. *Assume that $G = A_1 A_2$, where A_1 are A_2 are Hall π -subgroup and Hall π' -subgroup of G , respectively. If a subgroup H of G permutes with A_i^x for all $x \in G$ and $i = 1, 2$, then H^G / H_G is π -decomposable.*

Corollary 5.12. *Assume that G has a p -complement. If a subgroup H of G permutes with every Sylow p -subgroup of G and every p -complement of G , then H^G / H_G is p -decomposable.*

It is well-known that in general the set of all quasinormal subgroups of G is not a sublattice of the lattice of all subgroups of G (Ito). Nevertheless, as another application of Theorem 5.3, the following result is proved.

Theorem 5.13 (Skiba [20]). *Let G be a Π -full group of Sylow type. Then the set of all σ -subnormal Π -permutable subgroups of G forms a sublattice of the lattice of all σ -subnormal subgroups of G .*

Corollary 5.14 (Kegel [19]). *The set of all subnormal π -permutable subgroups of G forms a sublattice of the lattice of all subnormal subgroups of G .*

In view of Theorem 5.6, we get from Theorem 5.13 the following result.

Corollary 5.15 (Skiba [2]). *Let G be a σ -full group of Sylow type. Then the set of all σ -permutable subgroups of G forms a sublattice of the lattice of all subgroups of G .*

Corollary 5.16 (Kegel [19]). *The set of all $\pi(G)$ -permutable subgroups of G forms a sublattice of the lattice of all subgroups of G .*

Note that Corollary 5.15 not only generalizes Corollary 5.16 but also gives a shorter proof of it.

Groups in which σ -permutability is a transitive relation. A group G is called a *PST-group* if S -permutability is a transitive relation on G , that is, every S -permutable subgroup of an S -permutable subgroup of G is S -permutable in G . In view of the Corollary 5.14 the class of all *PST*-groups coincides with the class of all groups, in which every subnormal subgroup is S -permutable.

The description of *PST*-groups was first obtained by Agrawal [24], for the soluble case, and by Robinson in [25], for the general case. In the further publications, authors (see, for example, the recent papers [26]–[35]) have found out and described many other interesting characterizations of soluble *PST*-groups.

The results of such kind are the motivations for the following

Question 5.17. *Let G be a σ -full group. What is the structure of G provided that every σ -subnormal subgroup of G is σ -permutable?*

The answer to this question for the case of an arbitrary σ -full group G is not known now. But a complete classification of such groups in the universe of all σ -soluble groups is known.

Theorem 5.18 (Skiba [2]). *Let G be a σ -soluble group. Then every σ -subnormal subgroup of G is σ -permutable if and only if $G = D \rtimes M$, where $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ is an abelian σ -Hall subgroup of odd order of G such that every element of M induces a power automorphism of D .*

Corollary 5.19 (Agrawal [24]). *Let G be a soluble group. Then G is a *PST*-group if and only if $G = D \rtimes M$, where $D = G^{\mathfrak{N}}$ is an abelian Hall subgroup of odd order of G such that every element of M induces a power automorphism of D .*

Two characterizations of σ -permutability.

Now we give two characterizations of the σ -permutable subgroups. The first of them uses the idea of description of the quasinormal subgroups which dates back to Theorem 5.1.1 in [36].

Theorem 5.20 (Skiba [20]). *Let G be a σ -full group of Sylow type. Then a subgroup A of G is σ -permutable in G if and only if A is σ -subnormal and, for each $i \in I$, the equality*

$$E \cap \langle A, H \rangle = \langle A, E \cap H \rangle$$

holds for every Hall σ_i -subgroup H of G and every subgroup E of G containing A .

Theorem 5.20 remains to be new also in the case when $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Corollary 5.21. *A subgroup A of G is S -permutable in G if and only if A is subnormal in G and the equality $E \cap \langle A, P \rangle = \langle A, E \cap P \rangle$ holds for every Sylow subgroup P of G and every subgroup E of G containing A .*

By making some small changes in the proof of Theorem 4.1 in [2], one can prove the following result.

Theorem 5.22. *Let G be a Π -full group of Sylow type. Then a subgroup A of G is Π -permutable in G if and only if A is σ -subnormal in G and A is Π -permutable in $\langle A, x \rangle$ for all $x \in G$.*

In the case when σ is the smallest partition of $\mathbb{P}$ we get from Theorem 5.22 the following fact.

Corollary 5.23. *A π -subgroup A of G is π -permutable in G if and only if A is subnormal in G and A is π -permutable in $\langle A, x \rangle$ for all $x \in G$.*

Since a subgroup A of G is subnormal in G if and only if A is subnormal in $\langle A, x \rangle$ for all $x \in G$ (Wielandt), from Theorem 5.22 we get also the following known result.

Corollary 5.24 (Ballester-Bolinchés and Esteban-Romero [37]). *A subgroup A of G is S -permutable in G if and only if A is S -permutable in $\langle A, x \rangle$ for all $x \in G$.*

The σ -permutable closure and the σ -core of subgroups. Let H be a subgroup of a Π -full group G . Then we use $H_{\Pi G}$ to denote the Π -core of H , that is, the subgroup of H generated by all those subgroups of H which are Π -permutable in G . We use $H^{\Pi G}$ to denote the Π -permutable closure of H in G , that is, the intersection of all Π -permutable subgroups of G containing H .

In the case, when $\Pi = \sigma$ and σ is the smallest partition of $\mathbb{P}$, these two constructions proved useful in the analysis of many aspects of the theory of groups (see, for example, [38]–[41]).

A subgroup H of G is called respectively *Hall normally embedded*, *Hall subnormally embedded* [42], *Hall S -quasinormally embedded* [43] in G if H is a Hall subgroup of respectively the normal closure H^G , the subnormal closure H^{-G} [5, A], the S -permutable closure $H^{\sigma G}$ [40] of H in G .

By analogy with it we say that a subgroup H of a σ -full group G is called *Hall σ -permutable embedded* in G if H is a σ -Hall subgroup of the σ -permutable closure $H^{\sigma G}$ of H in G . We say also that a subgroup H of a group G is called *Hall σ -subnormally embedded* in G if H is a σ -Hall subgroup of the σ -subnormal closure $H^{\text{sub}\sigma G}$ of H in G .

Theorem 5.25 (Skiba [44]). *Let G be a σ -full group. Then every subgroup of G is Hall σ -subnormally embedded in G if and only if every σ -subnormal subgroup E of G is a σ -soluble group of the form $E = D \rtimes M$, where $D = E^{\sigma G}$ is a σ -Hall subgroup of E with $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$, M is a σ -Carter subgroup of E and for every chief factor H/K of E below D there is a Sylow subgroup P of D such that $H = K \rtimes P$, so M acts irreducibly on every M -invariant Sylow subgroup of D .*

On the basis of Theorem 5.25 can be proved the following useful result.

Theorem 5.26. *Let G be a σ -full group of Sylow type. Then every subgroup of G is Hall σ -quasinormally embedded in G if and only if $G = D \rtimes M$, where $D = G^{\sigma G}$ is a σ -Hall cyclic subgroup of G of square-free order.*

Corollary 5.27 (Li and Liu [42]). *Every subgroup of G is Hall normally embedded in G if and only if $G = D \rtimes M$ is a split extension of a cyclic subgroup D of square-free order by a Dedekind group M , where D and M are both Hall subgroups of G .*

Proof. First assume that every subgroup of G is Hall normally embedded in G . Then by Theorem 5.26, $G = D \rtimes M$, where $D = G^{\sigma G}$ is a Hall cyclic subgroup of G of square-free order. On the other hand, G is clearly a T -group, so $M \cong G/D$ is a Dedekind group [45, Ch. 2, 2.1.11].

Conversely, if $H \leq G$, then $H^G \leq DH$ since G/D is a Dedekind group. Hence H is a Hall subgroup of DH , so H is a Hall subgroup of $H^{\sigma G}$. The corollary is proved.

Groups with given σ -cofactors of subgroups. Recall that the *cofactor* of the subgroup $H \leq G$ is the factor group H/H_G . By analogy with it, we say that $H/H_{\Pi G}$ is a Π -cofactor of H .

The structure of groups with given restrictions on the cofactors of subgroups were studied by many authors (see, for example, [46]–[51]).

Recall that G is said to be an *A -group* provided all Sylow subgroups of G are abelian. The class of all A -groups is a formation. We denote this formation by the symbol $\mathfrak{A}^*$.

Theorem 5.28 (Skiba [44]). *If the σ -cofactor of every subgroup of G is a cyclic σ -primary group, then G is σ -soluble and $G^{\mathfrak{A}^*} \leq Z_{\sigma}(G)$.*

From Theorem 5.28 we get

Corollary 5.29 (Poland [48]). *If the cofactor of every subgroup of G is a cyclic primary group, then G is soluble and $G^{\mathfrak{A}^*} \leq Z_{\infty}(G)$.*

Groups with maximal subgroups of Hall subgroups σ -permutablely embedded. We say that a subgroup H of G is said to be *σ -permutablely embedded* in G if, for every $\sigma_i \in \sigma(H)$, every Hall σ_i -subgroup

of H is also a Hall σ_i -subgroup of some σ -permutable subgroup of G . In particular, H of G is said to be S -permutably embedded in G [52] if, for every $p \in \pi(H)$, every Sylow p -subgroup of H is also a Sylow p -subgroup of some S -permutable subgroup of G .

Srinivasan proved [53] that G is supersoluble if every maximal subgroup of every Sylow subgroup of G is S -permutable in G . In the paper [54], Walls obtained a description of groups in which every maximal subgroup of every Sylow subgroup is normal. In the other direction, this result was amplified in the paper [52] where the authors have proved that G is supersoluble provided that every maximal subgroup of every Sylow subgroup is S -permutably embedded. These results are motivations for our two next results.

Theorem 5.30 (Skiba [20]). *Let G be a σ -full group of Sylow type and $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ be a complete Hall σ -set of G such that $H_i^{\sigma_i}$ is a Hall subgroup of H_i . Every maximal subgroup of every member of $\mathcal{H}$ is σ -permutably embedded in G if and only if $G = D \rtimes M$, where D and M are σ -Hall subgroups of G , $D = G^{\sigma_i}$ is nilpotent of odd order and every element of M induces a power automorphism on $D / \Phi(D)$.*

Corollary 5.31. *Every maximal subgroup of every Sylow subgroup of G is S -permutably embedded in G if and only if $G = D \rtimes M$, where D and M are Hall nilpotent subgroups of G , D is of odd order and every element of M induces a power automorphism on $D / \Phi(D)$.*

On the basis of Theorem 3.30 the following generalization of the Walls result was obtained in [20].

Theorem 5.32. *Let G be a σ -full group and $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ a complete Hall σ -set of G such that $H_i^{\sigma_i}$ is a Hall subgroup of H_i . Every maximal subgroup of every member of $\mathcal{H}$ is σ -permutably embedded in G if and only if $G = (A \times B) \rtimes C$, where (i) A , B and C are σ -Hall subgroups of G , (ii) A is a normal nilpotent subgroup of G of odd order, B is a normal σ -nilpotent subgroup of G and C is a cyclic subgroup of G such that $\pi(C) = \sigma(C)$ and $[B, C] = 1$, (iii) the generators of Sylow subgroups of C induce power automorphisms on $A / \Phi(A)$ and automorphisms of order dividing a prime on A .*

Corollary 5.33 (Srinivasan [53]). *If every maximal subgroup of every Sylow subgroup of G is S -permutable in G , then G is supersoluble.*

Corollary 5.34 (Walls [54]). *Every maximal subgroup of every Sylow subgroup of G is normal in G if and only if $G = H \rtimes \langle x \rangle$, where (i) H is a normal nilpotent Hall subgroup of G , (ii) the generators of*

Sylow subgroups of $\langle x \rangle$ induce power automorphisms on $H / \Phi(H)$ and automorphisms of order dividing a prime on H .

Corollary 5.35 (Ballester-Bolinches and Pedraza-Aguilera [52]). *If every maximal subgroup of every Sylow subgroup of G is S -permutable in G , then G is supersoluble.*

6 Final remarks and some open questions

1. In the case, when G is σ -soluble, Theorem 5.6 can be improved [20].

Theorem 6.1 (See [23, Theorem C]). *Let G be a σ -soluble group and H is a σ -permutable subgroup of G . If H permutes also with some σ -system normalizer of G , then $H^G / H_G \leq Z_{\sigma}(G / H_G)$.*

2. One of the key properties of σ -subnormal subgroups we get from the following (see Theorem 3.1 (7)).

Lemma 6.2. *If A is σ -subnormal in G , then $A \cap H$ is a Hall Π -subgroup of A for every Hall Π -subgroup H of G .*

Moreover, the following fact is true.

Proposition 6.3 (Skiba [3]). *If G is a σ -soluble, then a subgroup A of G is σ -subnormal in G if and only if $A \cap H$ is a Hall σ_i -subgroup of A for every Hall σ_i -subgroup H of G and every $i \in I$.*

In view of these observations, it seems natural to ask:

Question 6.4. *Is it true that a subgroup A of the σ -full group G is a σ -subnormal in G if and only if $H \cap A$ is a Hall σ_i -subgroup of A for every Hall σ_i -subgroup H of G and every $i \in I$?*

The answer to this question in the case when σ is the smallest partition of $\mathbb{P}$ is positive [55].

The remarks before Corollary 5.24 make natural the following question.

Question 6.5. *Suppose that for every $x \in G$, the subgroup H of G is σ -subnormal in $\langle H, x \rangle$. Is it true then that H is σ -subnormal in G ?*

Recall that the well-known Wielandt theorem states that

Theorem 6.6 (See [56, Ch. 4, 4.1.2]). *If H and K are subnormal subgroups of G such that $\pi(H / H^{\sigma_i}) \cap \pi(K / K^{\sigma_i})$ is empty, then $HK = KH$.*

In this theorem H^{σ_i} denotes the nilpotent residual of H .

Theorem 6.6 allows us to hope that the answer to the following question is positive.

Question 6.7. *Let H and K be σ -subnormal subgroups of G such that $\pi(H / H^{\sigma_i}) \cap \pi(K / K^{\sigma_i})$ is empty. Is it true then that $HK = KH$?*

3. It is known [57] that if a subgroup H of G is subnormal and H permutes with all members of some complete set of Sylow subgroups of G , then H / H_G is nilpotent. Nevertheless, we do not know the answer to the following question.

Question 6.8. Let G be a σ -full group and H a subgroup of G . Suppose that H is σ -subnormal in G and it permutes with all members of some complete Hall σ -set of G . Is it true then that H/H_G is σ -nilpotent?

4. Theorem 2.8 is a motivation for the following

Question 6.9. Let G be a σ -full group and $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ a complete Hall σ -set of G . What is the structure of G provided that for every chief factor H/K of G and every $A \in \mathcal{H}$ the number $|G : N_G((A \cap H)K)|$ is σ -primary?

Note that the answer to this question in the case when σ is the smallest partition of $\mathbb{P}$ is known [10].

5. The final stage in the proof of Theorem 5.3 (ii) is based on two useful observations.

The first of them is a σ -generalization of Wielandt's theorem on groups with a nilpotent Hall subgroup.

Proposition 6.10 (Skiba [7]). *If G possess a σ -nilpotent Hall Π -subgroup H , then every Π -subgroup of G is contained in a conjugate of H .*

In its turn, Proposition 6.10 has required the use of the following interesting result.

Proposition 6.11 (Skiba [7]). *Let G be σ -soluble and $\pi = \sigma_i$. If G is not π' -closed but every proper subgroup of G is π' -closed, then G is a Schmidt group.*

6. In the paper [58], V.A. Vedernikov proved the following important result.

Theorem 6.12 (Vedernikov [58]). *Let G be a D_π -group. If G is not π -decomposable but every proper subgroup of G is π -decomposable, then G is a Schmidt group.*

Corollary 6.13. *Let G be a D_σ -group. If G is not σ -nilpotent but every proper subgroup of G is σ -nilpotent, then G is a Schmidt group.*

REFERENCES

1. Skiba, A.N. On σ -properties of finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – Vol. 4, № 21. – P. 89–96.
2. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
3. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Application. – 2015 (in Press).
4. Huppert, B. Finite Groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin, New York: Springer-Verlag, 1982.
5. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
6. Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
7. Skiba, A.N. On some properties of finite σ -soluble and σ -nilpotent groups / A.N. Skiba. – Preprint, 2014.
8. Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2015. – Vol. 18. – P. 191–200.
9. Zhang, J. Sylow numbers of finite groups / J. Zhang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 176. – P. 111–123.
10. Guo, W. Finite groups with given indices of normalizers of Sylow subgroups / W. Guo // Siberian Math. J. – 1996. – Vol. 37. – P. 207–214.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.
12. Gagen, T.M. Topics in finite groups / T.M. Gagen. – London: Cambridge University press, London Math. Soc. Lectures Note Series 16, Cambridge Univ. Press, 1976.
13. Skiba, A.N. Multiply $\mathcal{L}$ -Composition Formations of Finite Groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainsk. Math. Z. – 2000. – Vol. 52, № 6. – P. 783–797.
14. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1978.
15. Guo, W. On $\mathfrak{F}\phi^*$ -hypercentral subgroups of finite groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2012. – Vol. 372. – P. 275–292.
16. Bender, H. On groups with abelian Sylow 2-subgroups / H. Bender // Math. Z. – 1970. – Vol. 117. – P. 164–176.
17. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York, Evanston, London: Harper & Row Publishers, 1968.
18. Monakhov, V.S. The nilpotent π -length of maximal Subgroups in finite π -soluble groups / V.S. Monakhov, O.A. Shpyrko // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2009. – Vol. 64, № 6. – P. 229–234.
19. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
20. Skiba, A.N. On Π -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba. – Preprint, 2015.
21. Isaacs, I.M. Semipermutable π -subgroups / I.M. Isaacs // Arch. Math. – 2014. – Vol. 102. – P. 1–6.
22. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.
23. Schmid, P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 207. – P. 285–293.
24. Agrawal, R.K. Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 47. – P. 77–83.
25. Robinson, D.J.S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–159.

26. Brice, R.A. The Wielandt subgroup of a finite soluble groups / R.A. Brice, J. Cossey // J. London Math. Soc. – 1989. – Vol. 40. – P. 244–256.
27. Beidleman, J.C. Criteria for permutability to be transitive in finite groups / J.C. Beidleman, B. Brewster, D.J.S. Robinson // J. Algebra. – 1999. – Vol. 222. – P. 400–412.
28. Ballester-Bolinches, A. Sylow permutable subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero // J. Algebra. – 2002. – Vol. 251. – P. 727–738.
29. Ballester-Bolinches, A. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute / A. Ballester-Bolinches, J.C. Beidleman, H. Heineken // Illinois J. Math. – 2003. – Vol. 47. – P. 63–69.
30. Ballester-Bolinches, A. A local approach to certain classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, J.C. Beidleman, H. Heineken // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31. – P. 5931–5942.
31. Asaad, M. Finite groups in which normality or quasinormality is transitive / M. Asaad // Arch. Math. – 2004. – Vol. 83, № 4. – P. 289–296.
32. Ballester-Bolinches, A. Totally permutable products of finite groups satisfying SC or PST / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey // Monatsh. Math. – 2005. – Vol. 145. – P. 89–93.
33. Some characterizations of finite groups in which semipermutability is a transitive relation / K. Al-Sharo [et al.] // Forum Math. – 2010. – Vol. 22. – P. 855–862.
34. Beidleman, J.C. Subnormal, permutable, and embedded subgroups in finite groups / J.C. Beidleman, M.F. Ragland // Central Eur. J. Math. – 2011. – Vol. 9, № 4. – P. 915–921.
35. Yi, X. Some new characterizations of PST-groups / X. Yi, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2014. – Vol. 399. – P. 39–54.
36. Schmidt, R. Subgroup lattices of groups / R. Schmidt. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
37. Ballester-Bolinches, A. On finite soluble groups in which Sylow permutability is a transitive relation / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero // Acta Math. Hungar. – 2003. – Vol. 101. – P. 193–202.
38. Skiba, A.N. On weakly s -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.
39. Shemetkov, L.A. On the $\mathcal{A}\Phi$ -hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 322. – P. 2106–2117.
40. Guo, W. Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.
41. Yi, X. Finite groups with cyclic S -cofactors of subgroups / X. Yi // J. Algebra Appl. – 2015. – Vol. 14. – P. 1–9.
42. Li, S. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S. Li, J. Liu // J. Algebra. – 2013. – Vol. 388. – P. 1–9.
43. Liu, J. CLT-groups with Hall S -quasinormally embedded subgroups / J. Liu, S. Li // Ukrainian Math. J. – 2015. – Vol. 66, № 8. – P. 1281–1288.
44. Skiba, A.N. The σ -permutable closure and the σ -core of subgroups / A.N. Skiba. – Preprint, 2015.
45. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2010.
46. Berkovich, Ya.G. Finite groups with big kernels of maximal subgroups / Ya.G. Berkovich // Siberian Math. J. – 1968. – Vol. 9. – P. 606–610.
47. Cutolo, G. Finite core- p -groups / G. Cutolo, E.I. Khukhro, J.C. Lennoks, J. Wiegold, S. Rinauro, H. Smith // J. Algebra. – 1997. – Vol. 188, № 2. – P. 701–719.
48. Poland, J. On finite groups whose subgroups have simple core factors / J. Poland // Proc. Japan Acad. – 1971. – Vol. 47. – P. 606–610.
49. Avdashkova, L.P. On a class of groups with given cofactors of maximal subgroups / L.P. Avdashkova, S.F. Kamornikov // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87, № 5/6. – P. 643–649.
50. Lemeshev, I.V. The solvability criteria for finite groups with restrictions on cofactors of maximal subgroups / I.V. Lemeshev, V.S. Monakhov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2012. – Vol. 2, № 11. – P. 88–94.
51. Liu, Y. Finite groups in which primary subgroups have cyclic cofactors / Y. Liu, X. Yi // Bull. Malaysian Math. Sciences Soc. – 2011. – Vol. 34, № 2. – P. 337–344.
52. Ballester-Bolinches, A. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Pure Appl. Algebra. – 1998. – Vol. 127. – P. 113–118.
53. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 35, № 3. – P. 210–214.
54. Walls, G.L. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal / G.L. Walls // Israel J. Math. – 1982. – Vol. 43, № 2. – P. 166–168.
55. Kleidman, P.B. A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups / P.B. Kleidman // Ann. Math. – 1977. – Vol. 133. – P. 369–428.
56. Lennox, J.C. Subnormal Subgroups of Groups / J.C. Lennox, S.E. Stonehewer. – Oxford: Clarendon Press, 1987.
57. Ballester-Bolinches, A. $\mathcal{Z}$ -permutable subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, A.A. Heliel, M.O. Almetadi. – Preprint.
58. Vedernikov, V.A. On π -properties of finite groups / V.A. Vedernikov // Arithmetic and Subgroup Structure of Finite Groups. – Mn.: Nauka i Tehnika, 1986. – P. 13–19.

Поступила в редакцию 14.07.15.

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON LOCALIZATION OF THE ZEROES HERMITE – PADÉ APPROXIMANTS TO THE EXPONENTIAL FUNCTIONS

A.P. Starovoitov, E.P. Kechko

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Установлены верхние оценки для модулей нулей многочленов Эрмита (аппроксимаций Эрмита – Паде I типа) системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, где $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Доказанные утверждения дополняют и обобщают известные результаты Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя, Ф. Вилонского о поведении нулей многочленов Эрмита для системы экспонент $\{e^{p z}\}_{p=0}^k$.

Ключевые слова: система экспонент, многочлены Эрмита, аппроксимации Эрмита – Паде, нули аппроксимаций Паде.

The upper estimates are determined for modules of the zeros of Hermite polynomials (Hermite – Padé approximation type I) of the exponential system $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, where $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ are arbitrary complex numbers. The proven statements complement and generalize known results about the behavior of the zeros of Hermite polynomials for exponential system $\{e^{p z}\}_{p=0}^k$ by E. Saff and R. Varga, H. Stahl, F. Wielonsky.

Keywords: exponential system, Hermite polynomials, Hermite – Padé approximation, zeros of Padé approximation.

Введение

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ целых неотрицательных чисел.

Аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_{n_p}^p(z)$, $\deg A_{n_p}^p \leq n_p - 1$, $p = 0, 1, \dots, k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^k A_{n_p}^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0+n_1+\dots+n_k-1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (0.1)$$

Если $n_0 = n_1 = \dots = n_k = n$, то элементы множества $\{A_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k$ называют диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ (по поводу терминологии см. [1]).

Многочлены $\{A_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k$ введены Эрмитом [2], [3] спустя некоторое время после выхода в свет его знаменитой работы [4], посвящённой доказательству трансцендентности числа e . Напомним, что в [4] Эрмит нашёл явный вид многочленов $Q_{kn}(z)$, $P_{kn}^j(z)$, $j = 1, 2, \dots, k$, степени не выше kn , удовлетворяющих условиям

$$Q_{kn}(z) e^{jz} - P_{kn}^j(z) = O(z^{kn+n+1}), \quad z \rightarrow 0,$$

которые единственным образом определяют рациональные функции

$$\pi_{kn}^j(z) = P_{kn}^j(z) / Q_{kn}(z), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Дробь $\{\pi_{kn}^1(z), \dots, \pi_{kn}^k(z)\}$ принято называть совместными рациональными приближениями, а многочлены $Q_{kn}(z)$, $P_{kn}^1(z), \dots, P_{kn}^k(z)$ – диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде II типа (German type) системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$.

Аппроксимации Эрмита – Паде I и II типов, явно различные в многомерном случае, неоднократно обобщались в самых различных направлениях, а теория таких аппроксимаций имеет интересную содержательную историю и составляет самостоятельное направление комплексного анализа и теории приближений [5]–[7]. Кроме традиционных приложений к теории диофантовых приближений [8]–[11] и приближениям аналитических функций [12]–[15], аппроксимации Эрмита – Паде оказались полезными в теории несимметричных разностных операторов [16], [17], в теории случайных матриц [18]–[20].

В одномерном случае, когда $k = 1$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $n_0 = n$, $n_1 = m$, аппроксимации Эрмита – Паде, удовлетворяющие равенствам (0.1), совпадают с классическими многочленами Паде экспоненты, которые при $m = 0$ являются многочленами Тейлора этой функции. При таких условиях

многочлены Паде $p_{n,m}(z) = -A_n^0(z)$, $q_{n,m}(z) = A_m^1(z)$ имеют, соответственно, степени $n-1$ и $m-1$ и определяются из условий

$$q_{n,m}(z)e^z - p_{n,m}(z) = O(z^{n+m-1}) \quad (0.2)$$

с точностью до однородной константы. Однородная константа задаётся удобными в конкретной ситуации условиями нормировки, которые однозначно определяют эти многочлены.

Мы хотим локализовать область, в которой находятся нули многочлена $A_{n,p}^p(z)$, в зависимости от выбора чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ и $\{n_p\}_{p=0}^k$. В отдельных частных случаях такая задача хорошо известна. Так Г. Сеге [21] исследовал поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспонентой. Э. Сафф и Р. Варга [22] нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде экспоненциальной функции. Им принадлежит следующая хорошо известная «теорема о кольце» (подробнее о других результатах, касающихся нулей многочленов Паде, см. [23]).

Теорема 0.1 [Э. Сафф, Р. Варга]. При $n \geq 2$ и $m \geq 1$ все нули многочленов Паде $p_{n,m}(z)$, $q_{n,m}(z)$ функции $\exp z$ лежат в кольце

$$K = \{z : (n+m-2)\mu < z < n+m-2/3\},$$

где $\mu = 0,278465$ – единственный положительный корень уравнения $te^{t+1} = 1$.

В работе [24] Ф. Вилонский получил оценку сверху для модулей нулей диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ системы экспонент $\{e^{p^2}\}_{p=0}^k$. Г. Шталь [25] исследовал расположение нулей, преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости. Эти исследования были продолжены в работе [26].

Если не принимать во внимание одномерный случай, когда, как уже было сказано, аппроксимации Эрмита – Паде совпадают с достаточно хорошо изученными классическими аппроксимациями Паде, то можно сказать, что до настоящего времени недиагональные аппроксимации оставались практически не исследованными [27].

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 0.2. Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n_p \geq 2$, $p = 0, 1, \dots, k$, $k \geq 1$ нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$, $0 \leq p \leq k$, находятся в круге $\{z : |z| < R_{n_p}^p\}$, где

$$R_{n_p}^p = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^k \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}. \quad (0.3)$$

При $k=1$, $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$, $n_0=n$, $n_1=m$ из теоремы 0.2 следует, что все нули многочленов Паде $q_{n,m}(z)$, $p_{n,m}(z)$ лежат в круге

$$\{z : |z| < n+m-2/3\},$$

что согласуется с теоремой Э. Саффа, Р. Варги.

Если $k \geq 2$, $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \dots, k$; $n_0 = n_1 = \dots = n_k = n$, то из (0.3) в качестве следствия вытекает теорема 2.2 из работы [24] Ф. Вилонского: все нули многочлена $A_n^p(z)$, принадлежат кругу $\{z : |z| < R_n^p\}$, где

$$R_n^p = 2 \left(n - \frac{1}{3} \right) \left[\sum_{j=1}^p \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{j} \right].$$

При тех же условиях, что и в теореме Ф. Вилонского, но для произвольных различных действительных $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$, из теоремы 2 следует утверждение, доказанное в работе [28]: все нули многочлена $A_n^p(z)$ лежат в круге $\{z : |z| < R_n^p\}$, где

$$R_n^p = 2 \left(n - \frac{1}{3} \right) \left[\sum_{j=1}^p \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_j|} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{|\lambda_{p+j} - \lambda_p|} \right].$$

В случаях, когда $p=0$ или $p=k$, соответственно, первая и вторая суммы в скобках в двух последних равенствах равны нулю.

Многочлены $\{A_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k$, удовлетворяющие равенству (0.1), могут быть получены решением линейной системы $n_0 + n_1 + \dots + n_k - 1$ однородных уравнений с $n_0 + n_1 + \dots + n_k$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Более того, такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что искомые многочлены можно представить в виде:

$$A_{n_p}^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\prod_{j=0}^k (\xi - \lambda_j)^{n_j}}, \quad 0 \leq p \leq k. \quad (0.4)$$

Заметим, что недиагональные квадратичные аппроксимации Эрмита – Паде II типа при произвольных различных комплексных $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ изучались в работе [29].

1 Доказательство теоремы 0.2

В линейном пространстве $\mathcal{P}$, состоящем из всех многочленов, определим линейные операторы $T_\lambda = \lambda I + D$,

где λ – произвольное комплексное число, I – единичный оператор, а $D = \frac{d}{dz}$ – оператор дифференцирования.

Лемма 1.1. Любые два оператора $T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}$ коммутативны, т. е. $T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2} = T_{\lambda_2} \cdot T_{\lambda_1}$.

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из легко проверяемого равенства

$$T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2}(S) = \lambda_1 \lambda_2 S + (\lambda_1 + \lambda_2)S' + S'', S \in \mathcal{P}.$$

Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ и $S \in \mathcal{P}$ справедливы тождества

$$D^p(e^{\lambda z} \cdot S(z)) = e^{\lambda z} \cdot T_{\lambda}^p(S(z)), p = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Доказательство. Так как

$$D(e^{\lambda z} \cdot S(z)) = e^{\lambda z} (\lambda S(z) + S'(z)),$$

то при $p=1$ тождество (1.1) доказано. Далее применим метод индукции. Предположим, что $p \geq 2$ и (1.1) справедливо при $p-1$. Тогда, используя утверждение леммы 1.1, получаем:

$$\begin{aligned} D^p(e^{\lambda z} \cdot S(z)) &= D[D^{p-1}(e^{\lambda z} \cdot S(z))] = \\ &= D[e^{\lambda z} (\lambda I + D)^{p-1}(S(z))] = \\ &= e^{\lambda z} \cdot T_{\lambda}^{p-1}(\lambda S(z) + S'(z)) = e^{\lambda z} \cdot T_{\lambda}^p(S(z)). \end{aligned}$$

Лемма 1.2 доказана.

Найдём явный вид обратного оператора к T_{λ}^m в случае, когда $m = 0, 1, 2, \dots$ и $\lambda \neq 0$. Для этого на $\mathcal{P}$ определим линейные операторы

$$A_{\lambda, m} S := \lambda^{-m} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \frac{D^j S}{\lambda^j}, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

где $\binom{l}{p} = l!p!(l-p)!$ – биномиальные коэффициенты.

Если $S \in \mathcal{P}$, то правая часть в (1.2) состоит из конечного числа слагаемых. Это следует из того, что при $j > \deg S$ j -ый член ряда в (1.2) равен нулю.

Лемма 1.3. При $\lambda \neq 0$ и $m = 0, 1, 2, \dots$ обратный оператор для оператора T_{λ}^m существует и, если обозначить его через T_{λ}^{-m} , то

$$T_{\lambda}^{-m} S := \lambda^{-m} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m-1+j}{m-1} \frac{D^j S}{\lambda^j} \quad (1.3)$$

Доказательство. При $m=0$ утверждение леммы справедливо, так как в этом случае из определения биномиальных коэффициентов [30, приложение I, п. 1.5] следует, что $T_{\lambda}^{-m} = I$. Пусть $m \geq 1$. Используя рекуррентную формулу для биномиальных коэффициентов и лемму 1.1, получаем:

$$\begin{aligned} A_{\lambda, m} \cdot (\lambda I + D) S &= \lambda A_{\lambda, m} \cdot \left(I + \frac{D}{\lambda} \right) S = \\ &= \lambda^{-m+1} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \frac{D^j S}{\lambda^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \frac{D^{j+1} S}{\lambda^{j+1}} \right] = \\ &= \lambda^{-m+1} \left[S + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \binom{-m}{j} + \binom{-m}{j-1} \right\} \frac{D^j S}{\lambda^j} \right] = \end{aligned}$$

$$= \lambda^{-m+1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m+1}{j} \frac{D^j S}{\lambda^j} = A_{\lambda, m-1} S.$$

Таким образом, $A_{\lambda, m} \cdot T_{\lambda} = A_{\lambda, m-1}$. Поэтому справедливы равенства

$$\begin{aligned} (A_{\lambda, m} \cdot T_{\lambda}^m) S &= A_{\lambda, m} \cdot T_{\lambda} \cdot T_{\lambda}^{m-1}(S) = \\ &= (A_{\lambda, m-1} \cdot T_{\lambda}^{m-1}) S = \dots = A_{\lambda, 0} S = S. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор $A_{\lambda, m}$ является левым обратным к оператору T_{λ}^m . Поскольку согласно лемме 1.1 эти операторы коммутативны, то $A_{\lambda, m}$ является и правым обратным к оператору T_{λ}^m .

Для биномиальных коэффициентов имеют место равенства

$$\binom{-m}{j} = (-1)^j \binom{m-1+j}{j} = (-1)^j \binom{m-1+j}{m-1}.$$

Поэтому из (1.2) следует, что оператор T_{λ}^{-m} можно представить в виде (1.3). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. При $n \geq 2, m \geq 2$ многочлены Паде $q_{n, m}, p_{n, m}$ можно нормировать так, что

$$\begin{aligned} q_{n, m}(z) &= T_1^{-n}(z^{m-1}) = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{n-1+j}{n-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-j)!} z^{m-1-j}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (0.2) n раз, с учётом леммы 1.2, получим

$$\begin{aligned} e^z T_1^n(q_{n, m}(z)) &= \\ &= c_m(n+m-1)(n+m-2) \dots m z^{m-1} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда, так как

$$\begin{aligned} e^{-z} &= 1 - z + \dots, \\ T_1^n(q_{n, m}(z)) &= \\ &= c_m(n+m-1)(n+m-2) \dots m z^{m-1} + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Слева в (1.5) стоит многочлен степени не выше $m-1$. Поэтому

$$T_1^n(q_{n, m}(z)) = c_m(n+m-1)(n+m-2) \dots m z^{m-1}.$$

Выбирая условия нормировки $q_{n, m}(z)$ так, чтобы

$$c_m = ((n+m-1)(n+m-2) \dots m)^{-1},$$

и, учитывая линейность оператора T_1^n , получим, что

$$T_1^n(q_{n, m}(z)) = z^{m-1}.$$

Теперь для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 1.3. Лемма 1.4 доказана.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 0.2. Сначала найдём новое представление для многочлена $A_{n_p}^p(z)$. Для этого разделим равенство (0.1) на $e^{\lambda_0 z}$ и затем продифференцируем n_0 раз. С учётом леммы 1.2, получим:

$$\begin{aligned} e^{(\lambda_k - \lambda_0)z} T_{\lambda_k - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_k}^k(z)) &+ e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_0)z} T_{\lambda_{k-1} - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_{k-1}}^{k-1}(z)) + \dots \\ &+ e^{(\lambda_1 - \lambda_0)z} T_{\lambda_1 - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_1}^1(z)) = O(z^{n_1 + n_2 + \dots + n_k - 1}). \end{aligned}$$

Разделим предыдущее равенство на $e^{(\lambda_1 - \lambda_0)z}$ и затем продифференцируем n_1 раз. В результате приходим к равенству

$$e^{(\lambda_k - \lambda_1)z} T_{\lambda_k - \lambda_1}^{n_1} T_{\lambda_k - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_k}^k(z)) + \\ + e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_1)z} T_{\lambda_{k-1} - \lambda_1}^{n_1} T_{\lambda_{k-1} - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_{k-1}}^{k-1}(z)) + \\ \dots + e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z} T_{\lambda_2 - \lambda_1}^{n_1} T_{\lambda_2 - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_2}^2(z)) = O(z^{n_2 + \dots + n_k - 1}).$$

Повторяя указанную последовательность действий ещё $p-2$ раз, получим, что

$$e^{(\lambda_k - \lambda_{p-1})z} T_{\lambda_k - \lambda_{p-1}}^{n_{p-1}} \dots T_{\lambda_k - \lambda_1}^{n_1} T_{\lambda_k - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_k}^k(z)) + \dots \\ + e^{(\lambda_p - \lambda_{p-1})z} T_{\lambda_p - \lambda_{p-1}}^{n_{p-1}} \dots T_{\lambda_p - \lambda_1}^{n_1} T_{\lambda_p - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_p}^p(z)) = \\ = O(z^{n_p + \dots + n_k - 1}).$$

Разделим теперь предыдущее равенство на $e^{(\lambda_k - \lambda_{p-1})z}$ и продифференцируем n_k раз. Повторив эту процедуру ещё $k-p$ раз, придём к окончательному результату:

$$T_{\lambda_p - \lambda_{p+1}}^{n_{p+1}} \dots T_{\lambda_p - \lambda_{k-1}}^{n_{k-1}} T_{\lambda_p - \lambda_k}^{n_k} \times \\ \times T_{\lambda_p - \lambda_{p-1}}^{n_{p-1}} \dots T_{\lambda_p - \lambda_1}^{n_1} T_{\lambda_p - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_p}^p(z)) = O(z^{n_p - 1}).$$

В левой части предыдущего равенства стоит многочлен степени не выше $n_p - 1$. Поэтому

$$T_{\lambda_p - \lambda_{p+1}}^{n_{p+1}} \dots T_{\lambda_p - \lambda_{k-1}}^{n_{k-1}} T_{\lambda_p - \lambda_k}^{n_k} \times \\ \times T_{\lambda_p - \lambda_{p-1}}^{n_{p-1}} \dots T_{\lambda_p - \lambda_1}^{n_1} T_{\lambda_p - \lambda_0}^{n_0} (A_{n_p}^p(z)) = c_p z^{n_p - 1}.$$

Отсюда, с учётом леммы 1.3, следует, что

$$A_{n_p}^p(z) = c_p T_{\lambda_p - \lambda_0}^{-n_0} T_{\lambda_p - \lambda_1}^{-n_1} \dots T_{\lambda_p - \lambda_{p-1}}^{-n_{p-1}} T_{\lambda_p - \lambda_k}^{-n_k} \times \\ \times T_{\lambda_p - \lambda_{k-1}}^{-n_{k-1}} \dots T_{\lambda_p - \lambda_{p+1}}^{-n_{p+1}} (z^{n_p - 1}). \quad (1.6)$$

Далее воспользуемся следующей теоремой Уолша [31], [32, гл. 4, §18, теорема 18.1].

Теорема 1.1 [Уолш]. *Предположим, что*

$$f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j,$$

$$g(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j = b_n \prod_{j=1}^n (z - \beta_j),$$

$$h(z) = \sum_{j=0}^n (n-j)! b_{n-j} f^{(j)}(z).$$

Тогда, если нули $f(z)$ лежат в круге U , то все нули $h(z)$ являются точками множества G , которое состоит из n кругов U_j , $j=1, 2, \dots, n$, где круг U_j получен параллельным переносом U в направлении вектора β_j на величину, равную длине вектора β_j .

Пусть S_{n_p-1} – произвольный многочлен степени не выше $n_p - 1$. Принимая во внимание равенство (1.3), нетрудно заметить, что функции

$$f(z) = S_{n_p-1}(z), \quad h(z) = T_{\lambda}^{-n_1} (S_{n_p-1}(z)), \quad \lambda \neq 0,$$

$$g(z) = \sum_{j=0}^{n_p-1} b_{n_p-1-j} z^{n_p-1-j} = \\ = \lambda^{-n_1} \sum_{j=0}^{n_p-1} \frac{(-1)^j}{(n_p-1-j)!} \binom{n_1-1+j}{n_1-1} \frac{z^{n_p-1-j}}{\lambda^j}$$

удовлетворяют условиям теоремы Уолша. Кроме того, если сравнить предыдущее равенство для многочлена $g(z)$ и равенство (1.4), то легко обнаружить, что

$$g(z) = \frac{\lambda^{-n_1-n_p+1}}{(n_p-1)!} q_{n_1, n_p}(\lambda z).$$

Из теоремы 0.1 следует, что нули многочлена Паде $q_{n_1, n_p}(\lambda z)$ по модулю меньше $(n_p + n_1 - 2/3)/|\lambda|$. Тогда, согласно теореме Уолша, нули многочлена $h(z) = T_{\lambda}^{-n_1} (S_{n_p-1}(z))$ по модулю меньше $\rho + (n_p + n_1 - 2/3)/|\lambda|$, где ρ – радиус круга с центром в нуле, который содержит все нули $S_{n_p-1}(z)$.

Применим предыдущее утверждение для

$$S_{n_p-1}(z) = z^{n_p-1} \quad \text{и} \quad h(z) = T_{\lambda_p - \lambda_{p+1}}^{-n_{p+1}} (z^{n_p-1}).$$

Тогда нули $h(z)$ по модулю меньше

$$\frac{n_p + n_{p+1} - 2/3}{|\lambda_{p+1} - \lambda_p|}.$$

Из равенства (1.3) следует, что степень многочлена $h(z)$ также равна $n_p - 1$. Поэтому, полагая

$$S_{n_p-1}(z) = T_{\lambda_p - \lambda_{p+1}}^{-n_{p+1}} (z^{n_p-1}),$$

$$h(z) = T_{\lambda_p - \lambda_{p+2}}^{-n_{p+2}} (S_{n_p-1}(z)),$$

ещё раз применим предыдущее утверждение. В результате получим, что нули $h(z)$ по модулю меньше

$$\frac{n_p + n_{p+1} - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_{p+1}|} + \frac{n_p + n_{p+2} - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_{p+2}|}.$$

Опираясь на равенство (1.6) и продолжая аналогичные рассуждения, после конечного числа шагов получим, что нули многочлена $A_{n_p}^p(z)$ по модулю меньше

$$\sum_{j=1}^p \frac{n_p + n_{p-j} - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_{p-j}|} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{n_p + n_{p+j} - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_{p+j}|}.$$

Теорема 0.2 доказана.

2 Точность оценки

Согласно теореме 0.2 нули многочленов Эрмита $A_{n_p}^p(z)$ лежат в круге с центром в нуле, радиус которого $R_{n_p}^p$ зависит как от степени многочленов, так и от взаимного расположения показателей системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме 0.2 верхней оценки для

модулей нулей $A_{n_p}^p(z)$ в случае, когда n_p – фиксированы, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ является сколь угодно малой величиной.

Представление многочленов $A_{n_p}^p(z)$ с помощью интегралов в виде (0.4) позволяет получить для них явные выражения, а при $n_p = 2, 3, 4$ найти точные значения всех нулей $A_{n_p}^p(z)$. Здесь ограничимся случаем, когда $n_0 = n_1 = \dots = n_k = n$ и $n = 2, 3$.

Напомним, что при $\varepsilon \rightarrow a$ две бесконечно большие функции $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$, принимающие положительные значения, имеют одинаковый порядок ($\varphi(\varepsilon) \asymp \psi(\varepsilon)$), если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow a} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} = A, \text{ где } 0 < A < +\infty.$$

Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1 - \varepsilon$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + \varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1$. Далее запись $A_n^p : z_j^p(\varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ означает, что $z_j^p(\varepsilon)$ – все нули многочлена $A_n^p(z)$. Пусть

$$r_n^p(\varepsilon) := \max\{|z_j^p(\varepsilon)| : j = 1, 2, \dots, n-1\},$$

а $R_n^p(\varepsilon)$ – радиус круга, содержащего все нули, который определяется равенством (0.3). С помощью элементарных вычислений получаем:

$$A_2^0 : z_1^0(\varepsilon) = -\frac{6-2\varepsilon}{1-\varepsilon^2},$$

$$A_2^1 : z_1^1(\varepsilon) = -\frac{3-5\varepsilon}{\varepsilon(1-\varepsilon)},$$

$$A_2^2 : z_1^2(\varepsilon) = 2,$$

$$A_2^3 : z_1^3(\varepsilon) = \frac{3+5\varepsilon}{\varepsilon(1+\varepsilon)}.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$r_2^p(\varepsilon) \asymp R_2^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon}, \text{ для } p = 1, 3,$$

$$6 \leftarrow r_2^0(\varepsilon) < R_2^0(\varepsilon) = (10/3)(1+2/(1-\varepsilon^2)),$$

$$2 = r_2^2(\varepsilon) < R_2^2(\varepsilon) = (10/3)(1+2/\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если $\varepsilon \rightarrow 1$, то

$$r_2^p(\varepsilon) \asymp R_2^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{1-\varepsilon}, \text{ для } p = 0, 1,$$

$$2 = r_2^2(\varepsilon) < R_2^2(\varepsilon) = (10/3)(1+2/\varepsilon),$$

$$4 \leftarrow r_2^3(\varepsilon) < R_2^3(\varepsilon) = (10/3)(1/(1+\varepsilon) + 3/(2\varepsilon)).$$

Аналогично:

$$A_3^0 : z_{1,2}^0(\varepsilon) = -\frac{9-\varepsilon^2 \pm i\sqrt{3}\sqrt{3+\varepsilon^4}}{1-\varepsilon^2},$$

$$A_3^1 : z_{1,2}^1(\varepsilon) = -\frac{9-15\varepsilon \pm i\sqrt{3}\sqrt{5-10\varepsilon+9\varepsilon^2}}{2\varepsilon(1-\varepsilon)},$$

$$A_3^2 : z_{1,2}^2(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon \pm i\sqrt{3}\sqrt{2+\varepsilon^2}}{\varepsilon},$$

$$A_3^3 : z_{1,2}^3(\varepsilon) = \frac{9+15\varepsilon \pm i\sqrt{3}\sqrt{5+10\varepsilon-9\varepsilon^2}}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}.$$

Поэтому, если $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$r_3^p(\varepsilon) \asymp R_3^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon}, \text{ для } p = 1, 2, 3,$$

$$\sqrt{90} \leftarrow r_3^0(\varepsilon) < R_3^0(\varepsilon) = (16/3)(1+2/(1-\varepsilon^2)).$$

При $\varepsilon \rightarrow 1$

$$r_3^p(\varepsilon) \asymp R_3^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{1-\varepsilon}, \text{ для } p = 0, 1,$$

$$\sqrt{13} \leftarrow r_3^2(\varepsilon) < R_3^2(\varepsilon) = (16/3)(1+2/\varepsilon),$$

$$\sqrt{582}/4 \leftarrow r_3^3(\varepsilon) < R_3^3(\varepsilon) =$$

$$= (16/3)(1/(1+\varepsilon) + 3/(2\varepsilon)).$$

Приведенный пример показывает, что для рассматриваемой системы экспонент при $n = 2, 3$ полученные в теореме 0.2 неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита – Паде являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 1$). Оценка является точной и в случае $n = 4$. При этом не все нули многочленов Эрмита – Паде с убыванием расстояния между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ стремятся к бесконечности. В частности, имеются нули, которые не зависят от ε ($z_1^2(\varepsilon) = 2$ при всех $0 < \varepsilon < 1$). Уже это говорит о том, что в общем случае нахождение нижних оценок для модулей нулей многочленов Эрмита – Паде и, в частности, получение для них некоторого аналога теоремы Э. Саффа и Р. Варги о кольце, является достаточно трудной задачей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – Vol. 19. – P. 95–166.
2. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.
3. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Oeuvres. – V.IV. – Paris: Gauthier-Villars – 1917. – Vol. 77. – P. 357–377.
4. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
5. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite-Padé polynomials, in “Progress in Approximation Theory” (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) – P. 127–167 / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York – Berlin: Springer-Verlag, 1992.

6. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.
7. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.
8. Mahler, K. Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – P. 118–150.
9. Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – Vol. 168. – P. 200–227.
10. Chudnovsky, G.V. Hermite-Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π , in “Lecture Notes in Math”. – Vol. 925. – P. 299–322 / G.V. Chudnovsky. – New York-Berlin: Springer-Verlag, 1982.
11. Аптекарев, А.И. Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения. Сборник статей. Совр. пробл. матем. Т. 9 / А.И. Аптекарев (ред.) – М.: МИАН, 1988.
12. Boyd, J.P. Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler’s equation: a Chebyshev – Hermite – Padé method / K. Mahler // J. of Comput. and Appl. Math. – 2009. – Vol. 223, № 2. – P. 693–702.
13. Beckermann, B. How well does the Hermite – Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon? / B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky // Math. Comput. – 2011. – Vol. 80, № 274. – P. 931–958.
14. Сорокин, В.Н. Циклические графы и теорема Аперри / В.Н. Сорокин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 3. – P. 931–958.
15. Assche, W. Van. Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation (University of Missouri-Columbia, Columbia, MO, USA, 1998) / W. Van Assche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.
16. Калягин, В.А. Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.
17. Aptekarev, A.I. Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.
18. Aptekarev, A.I. Large n limit of Gaussian random matrices with external source, Part II / A.I. Aptekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Comm. Math. Phys. – 2005. – Vol. 259, № 2. – P. 367 – 389.
19. Аптекарев, А.И. Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // ТМФ. – 2009. – Т. 159, № 1. – P. 34–57.
20. Аптекарев, А.И. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Матем. сб. – 2011. – Т. 202, № 2. – P. 3–56.
21. Szegő, G. Über einige Eigenschaften der Exponentialreihe / G. Szegő // Sitzungsberichte Berliner Math. Ges. – 1924. – Vol. 23. – P. 50–64.
22. Saff, E. On the zeros and poles of Padé approximations to e^z , II, in “Padé and Rational Approximations: Theory and Applications” / E. Saff, R. Varga. – New York: Academic Press, 1977.
23. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.
24. Wiselonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / H. Stahl // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.
25. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function / H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.
26. Kuijlaars, A.B.J. Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207. – P. 227–244.
27. Driver, K. Nondiagonal Hermite – Padé approximation to the exponential function / K. Driver // J. of Comput. and Appl. Math. – 1995. – Vol. 65. – P. 125–134.
28. Астафьева, А.В. О нулях многочленов Эрмита / А.В. Астафьева, Е.П. Кечко, А.П. Старовойтов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2015. – № 3 (90). – С. 104–110.
29. Старовойтов, А.П. Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, № 1 (2). – С. 88–91.
30. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981.
31. Walsh, J. On the location of the roots of certain types of polynomials / J. Walsh // Trans. Amer. Math. Soc. – 1922. – № 24. – С. 163–180.
32. Morden, M. Geometry of Polynomials / M. Morden. – American Mathematical Society, 1966.

Поступила в редакцию 27.05.15.

УДК 681.3.06:624.131

РАСЧЕТ РИТ-СВАИ ПО ПЕРВОМУ ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ

В.Е. Быховцев, Д.В. Прокопенко, Л.А. Цурганова

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

CALCULATION OF PILES-CIT ON THE FIRST LIMITING CONDITION

V.E. Bykhoutsev, D.V. Prokopenko, L.A. Curganova

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Рассматривается предельная несущая способность РИТ-свай в нелинейно-деформируемом грунтовом основании с учетом уплотнения грунта в зоне разрядно-импульсной обработки.

Ключевые слова: РИТ-свая, математическая модель, предельная несущая способность.

The limiting bearing ability of a pile-cit in the nonlinear-deformed soil basis, taking into account ground consolidation in zone running-impulse processing is considered.

Keywords: pile-cit, mathematical model, limiting bearing ability.

Введение

Характерной особенностью грунтов Беларуси является многообразие их структуры и свойств. Вследствие этого в плане строительного производства возникает необходимость исследований по конструированию экономически эффективных фундаментов зданий для каждой строительной площадки. При определённых свойствах грунтового основания строительной площадки экономически целесообразным может оказаться фундамент на основе свай с камуфлетным уширением, которые устроены с применением разрядно-импульсной технологии (РИТ-сваи) [6], [7]. Такой фундамент и грунтовое основание образуют сложную по структуре и свойствам нелинейную и неоднородную систему деформируемых твёрдых тел [3]. В СНиП для расчёта свай-РИТ предлагаются методики, основанные на обширном табличном материале и приближённых формулах, но при этом изменённое состояние грунтовых оснований вследствие устройства РИТ-свай и некоторые её конструктивные особенности учитываются недостаточно [6]. В настоящей работе для расчёта РИТ-свай по первому предельному состоянию предлагается численно-аналитический метод, учитывающий указанные особенности РИТ-свай и её грунтового основания как единой нелинейной физической системы, что, в целом, позволит значительно повысить точность определения несущей способности РИТ-свай. В качестве контрольного материала при выполнении указанных исследований были использованы результаты натурного эксперимента по определению предельной несущей способности РИТ-свай, выполненные в отделе «Основания и фундаменты» РУП БелНИИС.

1 Взаимодействие РИТ-свай с грунтовым основанием

По условиям взаимодействия РИТ-свай с грунтом их следует относить к висячим сваям, несмотря на высокую жёсткость системы свая-грунт. В расчёте висячих свай следует учитывать, что нагрузка передаётся основанию боковой поверхностью и нижним концом сваи.

Характер взаимодействия РИТ-свай с грунтовым основанием в силу имеющихся конструктивных особенностей и способа её устройства существенно влияет на величину осадки отдельной сваи и свайного фундамента в целом. При анализе деформационного процесса грунтового основания РИТ-свай можно выделить два этапа: устройство РИТ-свай и взаимодействие РИТ-свай с грунтовым основанием при действии сжимающей нагрузки. При устройстве РИТ-свай не происходит смятие грунта в цилиндрической области диаметра D_d . Уплотнение грунта будет происходить в подобласти камуфлетного уширения с постепенным убыванием до его начального естественного состояния.

Учёт уплотнения математическими методами или методом компьютерного моделирования приводит к необходимости принятия некоторой модели структуры и свойств рассматриваемой физической системы. Решение этой задачи возможно только посредством лабораторного или натурного эксперимента. Наибольшей достоверностью будет характеризоваться натурный эксперимент, при этом можно ограничиться исследованием зависимости осадки РИТ-свай от её геометрических размеров, физико-механических характеристик грунтового основания и действующей нагрузки. В отделе оснований и фундаментов БелНИИСа были проведены соответствующие

шие натурные экспериментальные исследования. Анализ полученных результатов показал, что для всех поставленных задач зависимость осадки РИТ сваи от вдавливающей нагрузки является нелинейной, что показано на рисунке 1.1.

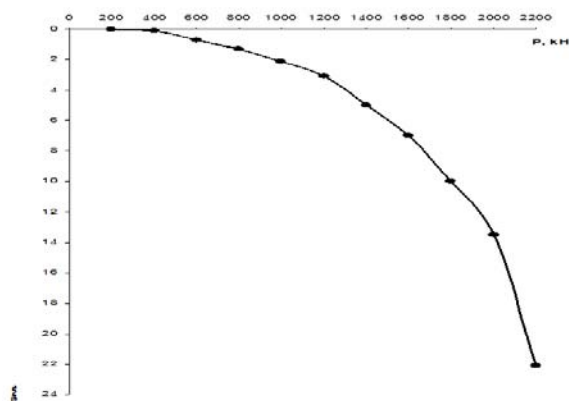


Рисунок 1.1 – График испытания РИТ-свай вдавливающей нагрузкой

2 Математические модели предельной несущей способности одиночной РИТ-свай по грунту основания

Для определения предельной несущей способности сваи РИТ в [2], исходя из условия равновесия одиночной прямой сваи, математически выведена формула:

$$P = 2\pi r_c L(c + \sigma_{np} \operatorname{tg} \varphi) + \pi r_y^2 \sigma_{np}.$$

Значение σ_{np} , используемое в этой формуле, может определяться экспериментально, что очень трудоёмко и дорого, или теоретически посредством решения задачи предельного равновесия грунта [1].

Полученное теоретическое решение задачи предельного равновесия грунта оказалось очень сложным для практического применения. Поэтому были разработаны соответствующие таблицы [1] и было предложено несущую способность РИТ-свай определять по формуле [6], [7]

$$F_d = g_{kk} g_{crin} (g_{ck} R_{rit} A_{rit} + g_{cf} \sum u_{irit} f_i h_i). \quad (2.1)$$

Формула (2.1) не учитывает нелинейность деформирования и уплотнение грунта вокруг камуфлетных уширений РИТ-свай, что ведет к значительному недоиспользованию несущей способности грунтового основания РИТ-свай.

3 Математическое моделирование уплотнения грунта в зоне РИО

Структурно РИТ-свай различаются количеством камуфлетных уширений, получаемых в процессе разрядно-импульсной обработки (РИО) грунтового основания. При этом происходит уплотнение грунта только в области камуфлетного уширения. Несущая способность уплотнённого грунта будет максимальной в контактной поверхности, постепенно убывая до её начального значения. В настоящем исследовании математическая

модель несущей способности уплотнённого грунта принята в виде степенной функции гиперболического типа:

$$\{y = ax^n, a > 0, n < 0\}. \quad (3.1)$$

В соответствии с (3.1) механико-математическая модель расчётного сопротивления уплотнённой зоны грунта в зоне РИО будет иметь вид

$$R_{rit} = ar_i^k, a > 0, k < 0, r_c < r_i < r_{\max}, \quad (3.2)$$

где $r_{\max}$ – радиус зоны уплотнения, r_c , r_{yu} – радиус ствола сваи и радиус уширения, R_{rit} – предельное расчётное сопротивление грунта.

При $r_i = r_{yu}$ предельное расчётное сопротивление грунта будет $R_{rit \max}$, при $r_i = r_{\max}$ предельное расчётное сопротивление грунта будет $R_{rit \min}$. При условии $r_i = r_{\max}$ из (3.2) определим значение параметра a :

$$a = \frac{R_{rit \min}}{r_{\max}^k}. \quad (3.3)$$

Подставив в (3.2) значение a из (3.3) при условии $r_i = r_{yu}$ получим

$$R_{rit \max} = R_{rit \min} \left(\frac{r_{\max}}{r_{yu}} \right)^n, \quad (3.4)$$

где $n = \frac{1 - \sin \varphi}{2 - \sin \varphi}$, $n = |k|$, φ – угол внутреннего трения.

Значения $R_{rit \min}$, r_{yu} и $r_{\max}$ определяются по таблицам СНиП [6], [7].

4 Методика расчёта РИТ-свай по первому предельному состоянию для грунтовых условий Беларуси

Базисным материалом настоящей методики являются основные положения строительных норм и правил и теоретические исследования по решению задачи определения предельного состояния грунтового основания по условиям прочности и деформируемости [1], [4]–[7].

Предлагаемая методика является дальнейшим развитием методики расчёта буронабивных свай по несущей способности методами математического и компьютерного моделирования и содержит оригинальный алгоритм учёта уплотнения грунтовых оснований вследствие РИО при устройстве свай с камуфлетными уширениями на конце свай и выше.

Расчёт производится для грунтов консолидации $B \geq 0$, для плотных песчаных грунтов и средней плотности с учётом насыпей, торфов и других слоёв пониженной несущей способности.

При расчёте РИТ-свай по первому предельному состоянию грунтовых оснований необходимы следующие исходные данные:

– материалы инженерно-геологических изысканий включающих характеристики физико-меха-

нических свойств грунтов: модуль деформации E , сцепление c , угол внутреннего трения φ ;

- условия производства работ;
- геометрические размеры РИТ-свай.

5 Алгоритм расчёта предельной несущей способности РИТ-свай при учёте уплотнения грунта в зоне РИО

Несущая способность свай, работающей на осевую сжимающую нагрузку, определяется в соответствии с формулой (2.1) как сумма расчётных сопротивлений грунтов основания под камуфлетным уширением на конце сваи и по её боковой поверхности при учёте уплотнения грунта по формуле

$$F_d = g_{kk} g_{crin} (g_{cR} R_{rit\max} A_{rit} + g_{cf} \sum u_{irit} f_{i\max} h_i), \quad (5.1)$$

где $R_{rit\max}$ – предельное расчётное сопротивление уплотнённого грунта, рассчитывается по формуле (3.4):

$$R_{rit\max} = R_{rit\min} \left(\frac{r_{\max}}{r_{yu}} \right)^n, \quad (5.2)$$

$f_{i\max}$ – расчётное сопротивление i -го слоя уплотнённого грунта на боковой поверхности сваи, рассчитывается только для зон РИО выше конца сваи, расчёт производится аналогично (5.2).

Все остальные параметры в (5.1) определяются в соответствии с (2.1).

6 Исследование предельной несущей способности РИТ-свай

Экспериментальные исследования несущей способности РИТ-свай.

Паспорт испытания РИТ-свай – 2–4 статической вдавливающей нагрузкой на опытной площадке ОП 2 (слоистое основание).

Характеристика РИТ-свай: бурунабивная с диаметром ствола $\varnothing 250$ мм, выполнены по технологии РИТ, длиной 16,7 м, с уширениями

$\varnothing 650$ мм вдоль ствола через 0,5 м начиная от уровня пяты.

Вид испытания: статической вдавливающей нагрузкой по СТБ 2242.

Грунтовые условия для РИТ-свай: слоистое основание из грунтов, сверху вниз.

1. Насыпной искусственный: Толщина слоя – 0,6 м, удельный вес γ , кН/м³ – 19,4, угол внутреннего трения φ , град – 23, сцепление c , МПа – 0,008, модуль деформации E , МПа – 8.

2. Супесь пылеватая текучая ($I_L > 1$) с примесью органических веществ, толщина – 1,4 м, удельный вес γ , кН/м³ – 20,10, угол внутреннего трения φ , град – 17, сцепление c , МПа – 0,014, модуль деформации E , МПа

3. Песок пылеватый средней прочности, насыщенный водой, толщина слоя – 9 м, удельный вес γ , кН/м³ – 18,00, угол внутреннего трения φ , град – 28, сцепление c , МПа – 0,004, модуль деформации E , МПа – 18

4. Песок мелкий средней прочности, насыщенный водой, толщина слоя – 1,5 м, удельный вес γ , кН/м³ – 17,40, угол внутреннего трения φ , град – 30, сцепление c , МПа – 0,001, модуль деформации E , МПа – 25

5. Песок средний, насыщенный водой, толщина слоя – 4,7 м, удельный вес γ , кН/м³ – 19,40, угол внутреннего трения φ , град – 33, сцепление c , МПа – 0,001, модуль деформации E , МПа – 28.

Расчёт по разработанному алгоритму предельной несущей способности РИТ-свай. Расчётные сопротивления грунта под нижним концом равны: $A_{rit} = 0,142$ м², $R_{rit0} = 4560$ кПа, $R_{rit\max} = 6410$ кПа, $g_{kk} = 0,85$.

Расчётные сопротивления грунта на боковой поверхности РИТ-свай (экспериментальные данные) при размере уширений взятых из таблиц СНиП, приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Данные для расчета РИТ-свай

№	Наименование грунта	h_i	Разбивка	Глубина	f_{i0}	$f_{i\max}$	D_{kui}/d_c	u_{irit}	u_{iritsr}	I_c	g_{cf}
1	Насыпной искусственный	0,65	0,65	0,33	0	0	–	–	0,79	0,65	1,3
2	Супесь пылев. текучая ($I_L > 1$) с прим. орг. вещ.	1,35	1,35	1,33	0	0	–	–	0,79	1,35	1,3
3	Песок пылеватый средней прочности, насыщенный водой	8,6	1,8	2,9	25	36,7	1,6	1,26	1	1	1,3
			1,8	4,7	29	42,6	1,6	1,26	1	1	1,3
			1,8	6,5	31	45,5	1,6	1,26	1	1	1,3
			1,8	8,3	33	48,5	1,6	1,26	1	1	1,3
			1,4	9,9	34	49,9	1,6	1,26	0,92	1	1,3
4	Песок мелкий средней прочности, насыщенный водой	1,35	1,35	11,28	48	69	1,7	1,34	1,13	0,5	1,3
5	Песок средний, насыщенный водой	4,75	1,9	12,9	49	68,9	1,8	1,41	1,08	1	1,3
			1,9	14,8	50	70,3	1,8	1,41	1,08	1	1,3
			0,95	16,23	52	73,1	1,8	1,41	1,08	0,5	1,3

$$F_d = g_{kk} g_{crin} (g_{cR} R_{rit} A_{rit} + g_{cf} \sum u_{irit} f_i h_i) = \\ = 0,85(942,808 + 761,691) = 1449 \text{ кН},$$

$$F_d = g_{kk} g_{crin} \left(g_{cR} R_{rit} \left(\frac{r_{yu}}{r_{max}} \right)^k A_{rit} + \right. \\ \left. + g_{cf} \sum u_{irit} f_i \left(\frac{r_{yu}}{r_{max}} \right)^k h_i \right) = \\ = 0,85(1325 + 1095) = 2057 \text{ кН}.$$

В итоге общую несущую способность свай РИТ по грунту получили равной 1449 кН, с учетом уплотнения 2057 кН. По экспериментальным данным – 2150 кН.

Из анализа полученных результатов следует, что учёт уплотнения и нелинейности деформирования грунтового основания вокруг камуфлетного уширения свай позволяет вычислить значения несущей способности РИТ-свай по грунту достаточно близкими экспериментальным данным, представленными отделом оснований и фундаментов БелНИИС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанцев, В.Г. Расчёт прочности оснований сооружений / В.Г. Березанцев. – Л.: Госстройиздат, 1960. – 139 с.

2. Быховцев, В.Е. Аналитический метод определения несущей способности свай РИТ в грунтовом основании / В.Е. Быховцев, Д.В. Прокopenко, С.В. Киргинцева // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 6 (87). – С. 129–132.

3. Быховцев, В.Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – 2007. – 219 с.

4. Винокуров, Е.Ф. Расчёт оптимальных конструкций фундаментов зданий и сооружений на ЭВМ / Е.Ф. Винокуров, В.Е. Быховцев, А.С. Карамышев. – Гомель: Гомельпромстрой. – 1979. – 28 с.

5. Цытович, Н.А. Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М.: Стройиздат, 1963. – 542 с.

6. Технические рекомендации по проектированию и устройству свайных фундаментов, выполненных с использованием разрядно-импульсной технологии для зданий повышенной этажности (свай-РИТ) ТР 50-180-06. – М.: 2006.

7. СНиП 2.02.03-85. Свайные фундаменты. Актуализированная редакция (СП 24, 13330, 2011). 20.05.2011.

Поступила в редакцию 08.01.15.

УДК 004.056.55

**АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО КРИТЕРИЮ
НУЛЕВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ НЕДВОИЧНЫХ БЛОКОВ ЗАМЕН****О.Н. Жданов¹, А.В. Соколов²**¹*Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М.Ф. Решетнёва,
Красноярск, Россия*²*Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина***ALGORITHM OF CONSTRUCTION OF OPTIMAL ACCORDING TO
CRITERION OF ZERO CORRELATION NON-BINARY S-BOXES****O.N. Zhdanov¹, A.V. Sokolov²**¹*M.F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia*²*Odessa National Polytechnic University, Odessa, Ukraine*

Рассматриваются вопросы построения криптографических S -блоков подстановки длины $N = 3^k$, оптимальных с точки зрения отсутствия корреляции между векторами выхода и входа. Построенные множества S -блоков подстановки могут быть рекомендованы для модернизации существующих блочных симметричных шифров, а также для конструирования новых быстродействующих алгоритмов шифрования, основанных на принципах многозначной логики.

Ключевые слова: S -блок подстановки, матрица коэффициентов корреляции, схема Кима.

This paper considers the construction of cryptographic S -boxes of the length $N = 3^k$, which are optimal from the point of view of the absence of correlation between the output and input vectors. Constructed sets of S -boxes can be recommended for upgrading of the existing block symmetric ciphers, as well as for the synthesis of new high-speed encryption algorithms based on the principles of multi-valued logic.

Keywords: S -box, matrix of correlation coefficients, Kim scheme.

Введение

Важнейшим компонентом современных блочных симметричных криптографических алгоритмов является S -блок подстановки, который представляет собой отображение множества входных битов во множество выходных битов. Данная конструкция во многом определяет криптостойкость и быстродействие блочных симметричных шифров, в которых она применяется.

К качеству S -блоков подстановки предъявляются определенные требования, в частности, низкая корреляционная связь векторов выхода и входа S -блока подстановки. Оптимальной является ситуация, когда каждый бит выходного блока статистически независим от каждого бита входного блока.

Считающийся стойким и являющийся одним из наиболее популярных в настоящее время алгоритм Rijndael [1] полностью определяет блок замен заданием неприводимого полинома над полем Галуа. Однако, будучи не единственно возможным (и не по всем параметрам оптимальным) для построения шифра, этот полином предлагается для применения всем пользователям, что не является бесспорным достоинством. Примером другого подхода служит алгоритм ГОСТ 28147-89 [2], в котором каждый пользователь применяет свои, уникальные блоки замен,

но алгоритм не определяет способ их построения. Из сказанного ясно, что для получения криптосистемы высокой надежности следует попытаться соединить достоинства обоих подходов, а именно: разработать такую методику, которая позволит получать большое количество высококачественных S -блоков каждому пользователю.

В статье мы рассматриваем последовательности входных и выходных битов как значения случайных величин и ставим себе задачу получение блока замен с нулевыми коэффициентами корреляции выходных и входных битовых последовательностей. Более формально: мы добиваемся того, что коэффициент корреляции векторов выхода y_μ и входа x_ν равен $r_{\nu,\mu} = 0$.

Работы [3], [4] посвящены построению корреляционно-иммунных S -блоков подстановки длины $N = 2^k$, соответствующих критерию нулевой корреляции между векторами выхода и входа.

Тем не менее, бурное развитие современных вычислительных устройств, а также активное внедрение m -ичных систем передачи и обработки информации [5] диктует необходимость разработки методов синтеза криптографически качественных S -блоков подстановки других длин N , например, $N = 3^k$.

Целью настоящей статьи является разработка алгоритма синтеза бесконечных семейств S -блоков подстановки соответствующих критерию нулевой корреляции векторов выхода и входа длин $N = 3^k$, $k = 2, 3, 4, \dots$

1 Методика вычисления матрицы коэффициентов корреляции

Определение 1.1. Матрицей коэффициентов корреляции S -блока длины $N = p^k$ назовем матрицу $P = \|p_{v,\mu}\|$, $v, \mu = \overline{1, k}$, элементы которой вычисляются в соответствии с формулой [6, с. 425]:

$$p_{v,\mu} = \frac{\sum_{t=1}^N x_{v,t} y_{\mu,t} - \frac{\sum_{t=1}^N x_{v,t} \sum_{t=1}^N y_{\mu,t}}{N}}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^N x_{v,t}^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^N x_{v,t} \right)^2}{N} \right] \cdot \left[\sum_{t=1}^N y_{\mu,t}^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^N y_{\mu,t} \right)^2}{N} \right]}}, \quad (1.1)$$

$$v, \mu = \overline{1, k},$$

где v, μ – номера компонентных булевых функций исследуемого S -блока и тривиальной подстановки $0, 1, \dots, N-1$ соответственно, $k = \log_p N$ – количество компонентных булевых функций.

Замечание. В случае, когда $\{x_v\}$ и $\{y_\mu\}$ – двоичные векторы, можно пользоваться частным случаем формулы (1.1) [3]:

$$r_{v,\mu} = 1 - 2^{-(k-1)} \sum_{t=1}^N (x_{v,t} \oplus y_{\mu,t}) = 0, \quad (1.2)$$

$$v, \mu = \overline{1, k}.$$

Определение 1.2. Нелинейное преобразование называется оптимальным, если все его коэффициенты корреляции равны нулю

$$p_{v,\mu} = 0, \quad \forall v, \mu = \overline{1, 2, \dots, k}.$$

2 Алгоритм синтеза оптимальных S -блоков

На наш взгляд, удачной является идея двухэтапного построения блоков [3]. На первом этапе генерируем блок замен небольшой длины, например, длины $N = 9$. Оптимальные S -блоки замен для данной длины могут быть легко найдены переборным методом. На втором этапе предлагается использование схемы Кима [5], которая позволяет из построенных небольших S -блоков получить блоки нужной длины при сохранении их оптимальности. Схема Кима в общем виде представлена на рисунке 2.1.

Пример. Рассмотрим последовательность, представляющую собой S -блок подстановки длины $N = 3^2 = 9$

$$S_9 = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right\}. \quad (2.1)$$

Вычисляя его матрицу коэффициентов корреляции в соответствии с (1.1), получаем

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Применим к блоку (2.1) схему рекуррентного увеличения длины (рисунок 2.1), которая, учитывая длину исходного S -блока $N = 9$ и длину требуемого S -блока $N = 27$ принимает вид (рисунок 2.2).

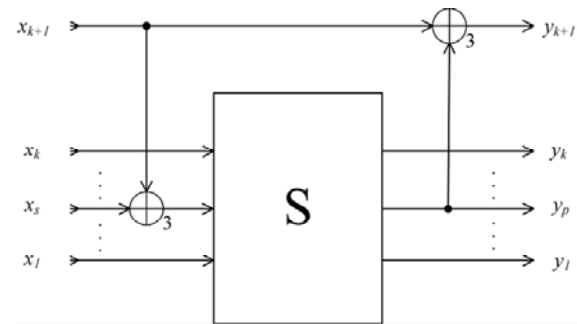


Рисунок 2.1 – Схема Кима

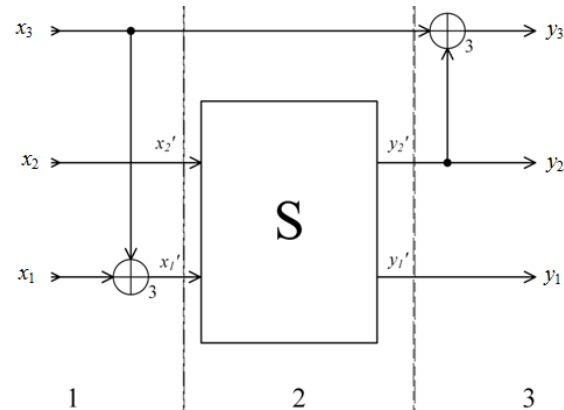


Рисунок 2.2 – Схема Кима для S -блока с двумя входами

Пример работы схемы Кима рассмотрим с помощью вычисления выходных значений на конкретных итерациях:

Значение нового S -блока на итерации 0. Пусть на вход схемы (рисунок 2.2) поступило сочетание исходных данных $X = (x_1, x_2, x_3)$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \Rightarrow X = 0,$$

тогда, вычисляя сумму в первом подблоке вычислений, получаем

$$x'_1 = x_1 + x_3 = 0 + 0 = 0, \quad x'_2 = 0,$$

после преобразования, во втором подблоке

$$S_9(0, 0) = S_9(0) = 0, \quad y'_1 = 0, \quad y'_2 = 0.$$

и наконец, вычисления в третьем подблоке схемы:

$$y_1 = y'_1 = 0, \quad y_2 = y'_2 = 0,$$

$$y_3 = x_3 + y'_2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow S_{27}(0) = 0.$$

Покажем вычисление значения нового S -блока на еще одной итерации, например, на итерации 19. Пусть на вход схемы (рисунок 2.2) поступило сочетание исходных данных $X = (x_1, x_2, x_3)$

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2 \Rightarrow X = 19,$$

тогда, вычисляя сумму в первом подблоке вычислений получаем

$$x'_1 = x_1 + x_3 = 1 + 2 = 0, \quad x'_2 = 0,$$

после преобразования, во втором подблоке

$$S_9(0, 0) = S_9(0) = 0,$$

$$y'_1 = 0, y'_2 = 0.$$

И наконец, вычисления в третьем подблоке схемы:

$$y_1 = y'_1 = 0, \quad y_2 = y'_2 = 0,$$

$$y_3 = x_3 + y'_2 = 2 + 0 = 2 \Rightarrow S_{27}(19) = 18.$$

Таким образом, проводя все итерации, в итоге получаем требуемый S -блок подстановки S_{27} длины $N = 27$:

$$S_{27} = \left\{ \begin{array}{l} 0, 2, 24, 26, 25, 14, 13, 12, \\ 1, 9, 11, 6, 8, 7, 23, 22, 21, 10, \\ 18, 20, 15, 17, 16, 5, 4, 3, 19 \end{array} \right\}.$$

По формуле (1.1) получаем матрицу коэффициентов корреляции данного блока

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

что подтверждает соответствие S -блока определению 1.2.

Данные проведенных вычислительных экспериментов позволили установить, что в полном множестве S -блоков подстановки длины $N = 9$, мощность которого $9! = 362880$, существует подмножество из $|\Omega| = 264$ оптимальных S -блоков подстановки. Непосредственными вычислениями нами установлено, что свойство оптимальности является инвариантным по отношению к операции перестановки столбцов S -блока в обратном порядке.

Таким образом, приведем алгоритм синтеза S -блоков подстановки, оптимальных по критерию нулевой корреляции между векторами выхода и входа.

Шаг 1. Методом перебора найти все S -блоки малой длины, соответствующие критерию нулевой корреляции между векторами выхода и входа.

Шаг 2. Применяя схему Кима (рисунок 2.1) увеличить длину S -блока в 3 раза. Отметим, что при этом соединения в схеме Кима могут быть выполнены k^2 различными способами.

Шаг 3. Производим размножение полученного множества S -блоков подстановки, основываясь на сохранении оптимальности, при перестановке столбцов в обратном порядке. Таким образом, мощность нового множества будет $J_{3^{k+1}} = 2k^2 J_{3^k}$.

Шаг 4. Если достигнута требуемая длина S -блока, завершаем работу алгоритма, иначе переходим к Шагу 2.

3 Результаты вычислительных экспериментов

Применяя рекуррентное увеличение длины, легко получить оптимальные блоки любой длины вида $N = 3^k$. Отметим, что используя полное множество из $|\Omega_9| = 264$ S -блоков длины $N = 9$, разработанным методом мы можем получить $2 \cdot 4 \cdot 264 = 2112$ S -блоков длины $N = 27$, $2 \cdot 9 \cdot 2112 = 38016$ S -блоков длины $N = 81$, $2 \cdot 16 \cdot 38016 = 1216512$ S -блоков длины $N = 243$ и т. д.

Например, после трехкратного проведения этой операции получим из исходного блока следующий, также являющийся оптимальным:

$$S_{243} = \left\{ \begin{array}{l} 0, 81, 162, 80, 161, 242, 12, 93, 174, 230, \\ 68, 149, 218, 56, 137, 214, 52, 133, 105, \\ 186, 24, 121, 202, 40, 109, 190, 28, 3, \\ 84, 165, 74, 155, 236, 15, 96, 177, 233, 71, \\ 152, 221, 59, 140, 208, 46, 127, 99, 180, \\ 18, 124, 205, 43, 112, 193, 31, 6, 87, 168, \\ 77, 158, 239, 9, 90, 171, 227, 65, 146, 224, \\ 62, 143, 211, 49, 130, 102, 183, 21, 118, \\ 199, 37, 115, 196, 34, 1, 82, 163, 78, 159, \\ 240, 13, 94, 175, 228, 66, 147, 216, 54, \\ 135, 215, 53, 134, 106, 187, 25, 122, 203, \\ 41, 110, 191, 29, 4, 85, 166, 72, 153, 234, \\ 16, 97, 178, 231, 69, 150, 219, 57, 138, \\ 209, 47, 128, 100, 181, 19, 125, 206, 44, \\ 113, 194, 32, 7, 88, 169, 75, 156, 237, 10, \\ 91, 172, 225, 63, 144, 222, 60, 141, 212, \\ 50, 131, 103, 184, 22, 119, 200, 38, 116, \\ 197, 35, 2, 83, 164, 79, 160, 241, 14, 95, \\ 176, 229, 67, 148, 217, 55, 136, 213, 51, \\ 132, 107, 188, 26, 120, 201, 39, 108, 189, \\ 27, 5, 86, 167, 73, 154, 235, 17, 98, 179, \\ 232, 70, 151, 220, 58, 139, 207, 45, 126, \\ 101, 182, 20, 123, 204, 42, 111, 192, 30, \\ 8, 89, 170, 76, 157, 238, 11, 92, 173, 226, \\ 64, 145, 223, 61, 142, 210, 48, 129, 104, \\ 185, 23, 117, 198, 36, 114, 195, 33 \end{array} \right\}.$$

Следующая итерация позволит получить блок размером $3^6 = 729$.

Мы можем работать с любым представлением блока: в виде десятичного числа или в виде троичного, а после выполнения замен переход (при необходимости) к двоичному (битовому) формату не вызывает затруднений. Получив множество блоков замен с нулевыми коэффициентами корреляции выходных и входных битов, можно выбрать из них блоки с максимально возможной нелинейностью [3], [4], [7], [8].

Замечание 3.1. Проведенные рассуждения и вычисления с достаточно очевидными изменениями можно провести для любого простого p . При этом чем больше p , тем меньшее количество итераций требуется для построения блоков сравнимой длины.

Так, например, для построения семейства S -блоков подстановки длины $N = 5^k$ может быть использован первоначальный оптимальный S -блок

$$S_{25} = \left\{ \begin{array}{l} 15, 8, 6, 17, 13, 24, 5, 20, \\ 4, 18, 3, 11, 9, 22, 2, 1, 7, \\ 21, 6, 12, 14, 23, 10, 19, 0 \end{array} \right\}.$$

Замечание 3.2. Представляет интерес получение достаточных (и легко проверяемых) условий оптимальности блока, что позволит отказаться от метода перебора при их построении.

Выводы

Дальнейшее развитие получил алгоритм Кима рекуррентного увеличения длины S -блоков подстановки, в рамках чего разработан метод построения S -блоков подстановки оптимальных по критерию нулевой корреляции векторов выхода и входа длины $N = 3^k$.

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают эффективность разработанного алгоритма для построения больших S -блоков подстановки, в частности, построен S -блок подстановки длины $N = 3^5 = 243$.

Построенные S -блоки подстановки могут быть использованы для модификации существующих и построения новых алгоритмов блочного симметричного шифрования.

ЛИТЕРАТУРА

1. FIPS 197 [Electronic resource]: Advanced encryption standard. – 2001. – Mode of access: <http://csrc.nist.gov/publications/>. – Date of access: 03.03.2015.
2. Системы обработки информации. Защита криптографическая. Алгоритм криптографического преобразования: ГОСТ 28147-89. – М.: ИПК Издательство стандартов, 1996. – 28 с.
3. Мазурков, М.И. Метод синтеза оптимальных подстановочных конструкций по критерию нулевой корреляции между выходными и входными векторами данных / М.И. Мазурков // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 12. – С. 12–22.
4. Мазурков, М.И. Метод синтеза S -блоков по критерию нулевой корреляции между выходными и входными векторами данных и строгому лавинному критерию / М.И. Мазурков, А.В. Соколов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2014. – Т. 57, № 8. – С. 54–60.
5. Kim, K. Construction of DES-like S -boxes Based on Boolean Functions Satisfying the SAC / K. Kim. – Proc. of Asiacrypt'91, Springer Verlag. – 1991. – P. 59–72.
6. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2004. – 573 с.
7. Жданов, О.Н. Методика выбора ключевой информации для алгоритма блочного шифрования / О.Н. Жданов. – М.: ИНФРА-М, 2013. – 90 с.
8. Мазурков, М.И. Нелинейные S -блоки подстановки на основе композиционных кодов степенных вычетов / М.И. Мазурков, А.В. Соколов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2013. – Т. 56, № 9. – С. 34–43.

Поступила в редакцию 24.03.15.

WEB-ПРИЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

С.Ф. Маслович¹, А.Б. Горбач¹, В.Н. Галушко², А.В. Дробов³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

³Гомельский государственный политехнический колледж, Гомель, Беларусь

WEB-APPLICATION ELECTRICAL CALCULATIONS

S.F. Maslovich¹, A.B. Gorbach¹, V.N. Halushko², A.V. Drobov³

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

²Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

³Gomel State Technical College, Gomel, Belarus

Рассматривается идея создания программного инструментария, с помощью которого можно автоматизировать расчеты для выбора рациональных схем и конструктивных исполнений электрических сетей, определения электрических нагрузок, потерь мощности и электроэнергии; компенсации реактивной мощности, поддержания требуемого качества напряжения, выбора числа и мощности трансформаторов.

Ключевые слова: программный инструментарий, web-приложение, электроснабжение, электропотребление, электрооборудование, электрическая схема.

The idea of creating software is considered. With this software, one can automate the calculations for determining the rational schemes and designs of electrical networks, determine the electrical load, loss of power and loss of supply, reactive power compensation, maintain the required voltage quality, quantity and variety of power transformers.

Keywords: software tools, web-application, power supply, power consumption, circuitry.

Введение

Системы электроснабжения, обеспечивающие электрической энергией промышленные объекты, оказывают существенное влияние на работу электроприводов, осветительных, преобразовательных и электротехнологических установок и, в конечном счете, на производственный процесс в целом. Надежное и экономичное снабжение электроприемников электроэнергией требуемого качества – необходимое условие нормального функционирования любого промышленного предприятия. В связи с этим для специалистов в области электроснабжения актуальна разработка программ, позволяющая автоматизировать следующие расчеты: выбор рациональных схем и конструктивное исполнение электрических сетей; определение электрических нагрузок; расчет потерь мощности и электроэнергии; компенсация реактивной мощности; поддержание требуемого качества напряжения; выбор числа и мощности трансформаторов; выбор защитных аппаратов и сечений проводников; учет потребляемой мощности и электроэнергии; рациональное использование электроэнергии.

В настоящее время среди разработчиков программного обеспечения для рынка электротехнических расчетов (CSoft Development, Multisim, Simulink) наблюдается тенденция к созданию простых, интуитивно понятных интерфейсов, содержащих обширную справочно-техническую информацию и подающих информацию в

удобном для пользователя виде (чертежи, обоснование и выбор изделий и оборудования) [1]. Также объединяются усилия разработчиков программного обеспечения и производителей электротехнологического оборудования и измерительных приборов (LabVIEW).

Целью рассматриваемого программного инструментария электрических расчетов является автоматизация различных электрических расчетов с учетом качественной и количественной связи с надежностью электрооборудования [2], [3].

1 Структура программного инструментария электрических расчетов

Предлагаемый программный инструментарий реализован в виде web-приложения (рисунок 1.1) и отдельной программой для персонального компьютера. Одним из преимуществ реализации расчета с помощью web-приложения является тот факт, что клиенты не зависят от конкретной операционной системы пользователя, а также удовлетворяются требования надежности и целостности данных.

Основные преимущества разработанного программного инструментария заключаются в следующем:

- отсутствует необходимость установки большого числа специализированных программ;
- наличие подсказок и ссылок (например, на действующие нормы и правила) на всех этапах расчета;

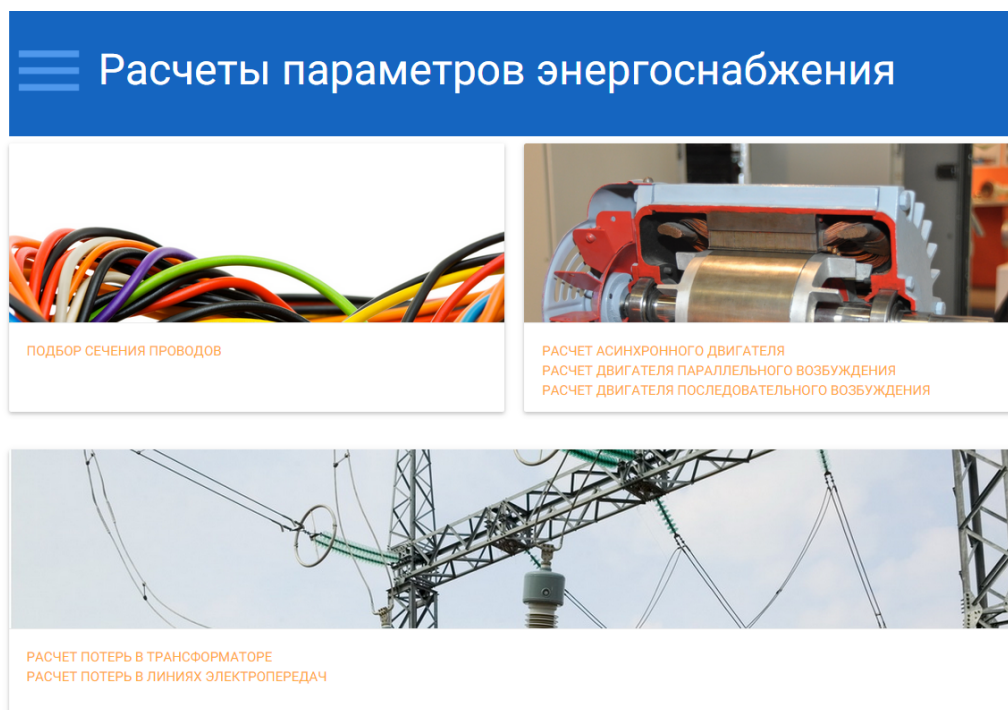


Рисунок 1.1 – Главная страница приложения

- наличие широкой встроенной базы данных справочно-информационной поддержки, включающей современную обширную теоретическо-образовательную, нормативную и справочную информацию;

- гибкость программ расчета к различным исходным данным, возможность «усредненного» расчета или подбор наиболее вероятных параметров;

- возможность обучения пользователей, контроль и проверка их знаний за счет встроенной литературы, лекций и примеров обучающей направленности, что позволяет повысить качество выполняемых расчетов и снизить число ошибок.

Используемые технологии и средства при реализации web-приложения:

1. Фреймворк ASP.NET MVC – универсальная технология, которая позволяет использовать себя как для небольших проектов, так и для крупных высоконагруженных систем.

ASP.NET MVC, реализуя шаблон MVC, облегчает управление сложными структурами путем разделения приложения на модель, представление и контроллер. Платформа ASP.NET MVC предоставляет следующие возможности:

- разделение задач приложения (логика ввода, бизнес-логика и логика пользовательского интерфейса). Все основные контракты платформы MVC основаны на интерфейсе и подлежат тестированию с помощью макетов объекта, которые имитируют поведение реальных объектов приложения;

- расширяемая и дополняемая платформа. Разработчик может подключать собственный механизм представлений, изменять политику маршрутизации URL-адресов, сериализацию параметров методов действий и другие компоненты;
- расширенная поддержка маршрутизации ASP.NET.

2. Шаблон MVC – это конструкционный шаблон, который описывает способ построения структуры приложения, сферы ответственности и взаимодействие каждой из частей в данной структуре.

3. Средства создания интерфейса взаимодействия с пользователем.

Razor – интеллектуальный обработчик программного кода динамических web-страниц на ASP.NET. Имеет простой, интуитивно понятный синтаксис встраивания программного кода в web-страницы. Также Razor – это механизм визуализации, поддерживаемый NET.Framework в рамках ASP.NET и предназначенный для создания web-приложений.

Для визуализации данных проведенных расчетов была использована библиотека Chart.js. Данная библиотека позволяет строить адаптивные графики на основе HTML5 Canvas-элемента. Существенным преимуществом является интерактивность получаемых графиков (можно настроить график таким образом, чтобы он реагировал на различные события, например, показывал более подробную информацию о выбранной категории при нажатии мыши).

4. Технология доступа к данным Entity Framework – объектно-ориентированная технология доступа к данным, является object-relational mapping решением для .NET Framework от Microsoft.

В основе разрабатываемой системы лежит архитектура «клиент-сервер», в которой задания или сетевая нагрузка распределены между поставщиками услуг (сервисов), называемых серверами, и заказчиками услуг, называемых клиентами. В качестве среды взаимодействия клиента с сервером используется интернет.

Web-приложение реализовано в виде решения, содержащего 4 проекта:

LossesCalculationCore – ядро приложения, библиотека классов, содержащая все необходимые расчёты;

ElectricityTests – проект unit-тестов, содержащий модульные тесты, отвечающие за правильность реализованных расчётов;

ElectricityWeb – непосредственно web-приложение ASP.NET MVC;

DataAccessLayer – библиотека классов, содержащая все необходимые средства доступа к базе данных (репозитории, модели данных и пр.).

2 Основные возможности программного инструментария электрических расчетов

Ниже приведено описание и обзор основных возможностей реализованных программ (рисунков 2.1).

I. Программа комплексных расчетов системы электроснабжения (СЭС) предназначена для определения электрических нагрузок электрических сетей, расчета потерь мощности и электроэнергии, поддержания требуемого качества напряжения, выбора защитных аппаратов и сечений проводников, учета потребляемой мощности и электроэнергии, рационального использования электроэнергии.

Формирование расчетной схемы системы электроснабжения в графической форме и внесение параметров ее элементов выполняется оператором в рабочем окне редактора. Одновременно в программе создается расчетная схема, выполняется расчет ее параметров (рисунок 2.2).

Выбор аппаратов защиты (автоматических выключателей и предохранителей) напряжением 380/220В удовлетворяет следующим требованиям ПУЭ и СП:

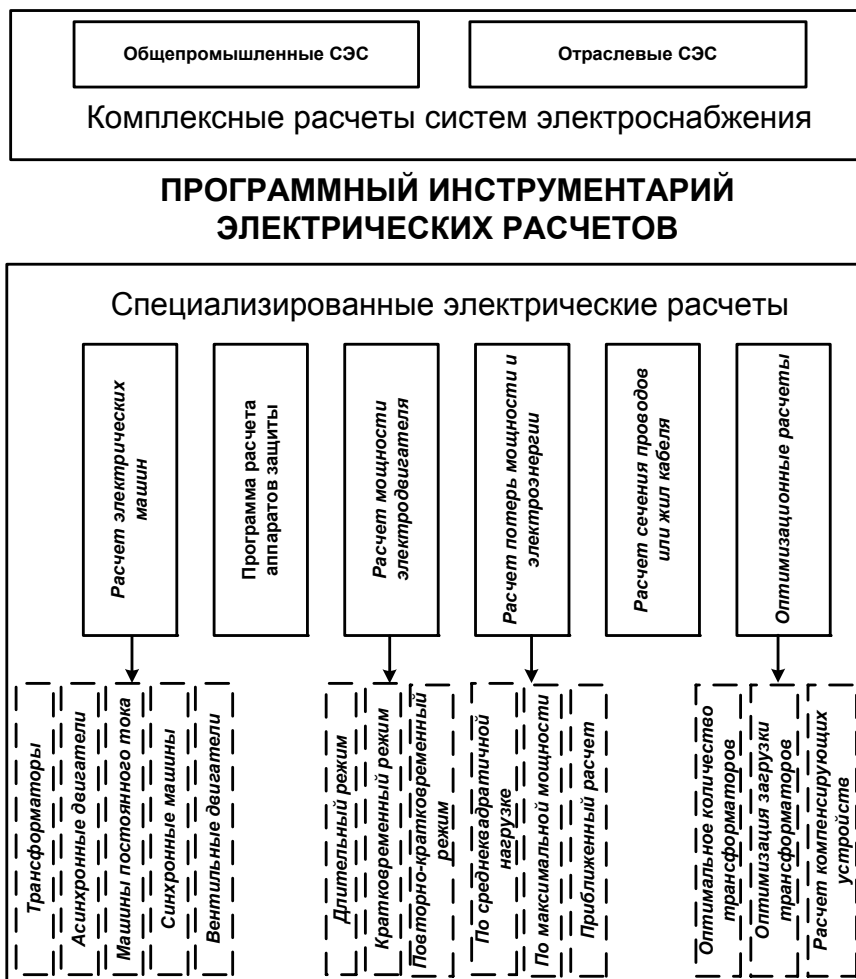


Рисунок 2.1 – Структура программного инструментария электрических расчетов

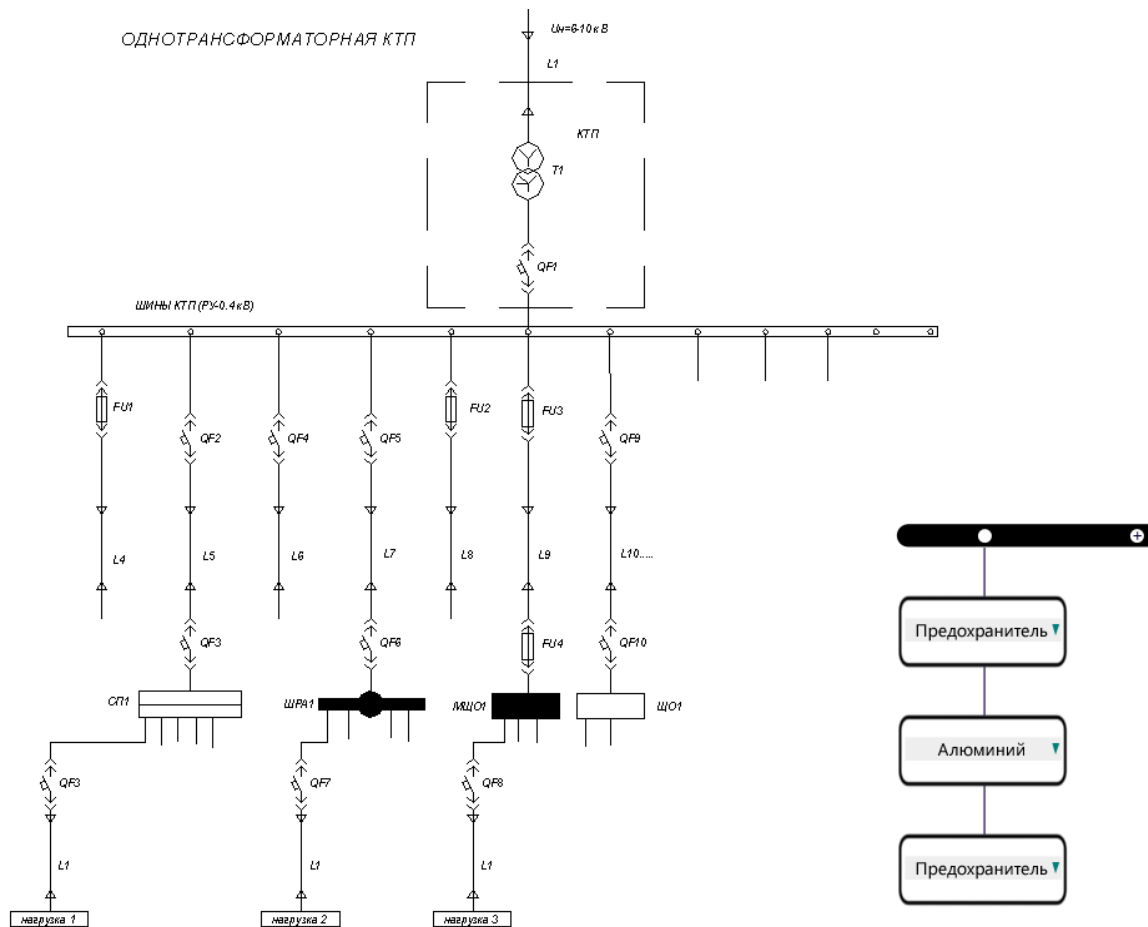


Рисунок 2.2 – Пример реализации программы комплексного расчета СЭС

Суточный расход электроэнергии на движение всех поездов по фидерной зоне	Вес грузового локомотива	4000	Результаты расчета			
	Вес локомотива пассажирского	1000				
	Вес поезда грузового	155				
	Вес пассажирского поезда	135				
	Число пар грузовых поездов	Годовые потери электроэнергии в проводах контактной сети для постоянного тока	Потери энергии в КС для двухпутного участка (при дуэстороннем питании)	2911,21285	1164485,14	кВт*ч
	Число пар пассажирских поездов	Площадь сечения проводов в медном эквиваленте при сроке окупаемости в 10 лет	Потери электроэнергии за год в проводах фидерной зоны при их сопротивлении 1 Ом, отнесенные к 1 км	3193134,71	625,43	мм²
	Удельный расход электроэнергии	Площадь сечения усиливающих алюминиевых проводов	Площадь сечения в медном эквиваленте	625,42	134,34	мм²
	Длина фидерной зоны	Ближайшая площадь сечения проводов контактной	Суточный расход электроэнергии на движение всех поездов по фидерной зоне	67,5	1324,70	А²
Суммарное время хода всех поездов по фидерной зоне	Техническая скорость	Квадрат эффективного тока фидера (при дуэстороннем питании)	Напряжение КС (при постоянном токе), В	3000		
	Техническая скорость		Время Т	24		
	Число грузовых поездов		Суммарное время движения поездов по фидерной зоне Лт	14,1		
	Число пассажирских поездов		Суммарное время движения поездов под током по фидерной зоне Лт	10,1		
Суммарное время хода поездов под током	Количество путей		Сопротивление двухпутного участка	0,034		
	Длина фидерной зоны		Коэффициент месячной неравномерности движения	1,12		
	Отношение полного времени поезда под током		Коэффициент учитывающий дополнительное	1,08		
	Суммарное время хода поездов	Потери напряжения в КС	Максимальная пропускная способность участка (2-х путного), (1 колонка (пасо) 2 колонка (груз))	42		
			Коэффициент эффективности при постоянном токе (=1)	13		
			Суточный расход электроэнергии на движение всех поездов по фидерной зоне	66,7	1822,24	В
			Время Т	24		
			Длина фидерной зоны	10,726		

Рисунок 2.3 – Пример реализации программы расчета контактной сети

– по своей отключающей способности проверяется соответствие максимальному значению тока короткого замыкания для обеспечения надежного отключения одно- и многофазных замыканий;

– по расчетному току и напряжению сети выполняется анализ аппаратов защиты на не отключение установок при перегрузках (одновременное включение нескольких электродвигателей, группы ламп, пики технологических нагрузок и т. п.);

– соответствие требованиям селективности.

В качестве отраслевых СЭС разработаны электрические расчеты, например, для железнодорожной отрасли (рисунок 2.3). Приведем некоторые расчетные пункты, реализованные в программе:

– определение экономического сечения проводов контактной сети, выбор типа подвески и сечения питающих и отсасывающих линий;

– проверка проводов контактной сети по нагреву;

– проверка проводов контактной подвески по минимально допустимому напряжению в контактной сети;

– расчёт нагрузок и максимально допустимых длин пролётов;

– расчёты при подборе опор на перегоне.

II. Программа расчета трансформаторов, асинхронных двигателей и машин постоянного тока (рисунок 2.4) позволяет определить:

– по паспортным данным трансформатора определяются: номинальные токи первичной и вторичной обмоток, графики зависимости КПД от коэффициента нагрузки для различных коэффициентах мощности $\eta = f(\beta)$, графики процентного изменения вторичного напряжения и вторичного напряжения от коэффициента нагрузки для различных коэффициентах мощности $U_2 = f(\beta)$;

– мощность электродвигателя для различных режимов работы привода с возможностью выбора из каталога технических данных электродвигателя;

– по паспортным данным асинхронного двигателя: активную мощность, потребляемую из сети; номинальный и критический моменты; номинальный и пусковой токи; зависимости электромагнитного момента от скольжения $M = f(s)$ и $n = f(M)$; значения пускового и критического моментов при изменении напряжения сети;

– по паспортным данным двигателя постоянного тока параллельного возбуждения: номинальный момент, номинальный ток якоря, обмотки возбуждения и ток, потребляемый из сети при различной нагрузке, сопротивление цепи возбуждения и цепи обмотки якоря, сопротивление пускового реостата, зависимости $n = f(I_a)$, $n = f(M)$, $\eta = f(I_a)$, изменение частоты вращения двигателя при изменении добавочного сопротивления;

– по паспортным данным двигателя постоянного тока последовательного возбуждения: мощность, потребляемую из сети, номинальный ток двигателя, номинальный момент, сопротивление якорной цепи и обмотки возбуждения, зависимости $n = f(I_a)$, $M = f(I_a)$ и $n = f(M)$.

При расчетах используется зависимость учитывающей нелинейный характер изменения магнитного потока от тока возбуждения $\Phi = f(I_B)$.

III. Программа определения мощности электродвигателя для различных режимов работы привода.

Реализован следующий выбор режимов работы привода: длительный переменный, кратковременный и повторно-кратковременный. На основании выполненных расчетов и проверки на перегрузочную способность предлагаются технические данные электродвигателей по различным справочникам, включенным в библиотеку программного инструментария.

IV. Программа расчета сечения проводов или жил кабеля трехфазной четырехпроводной или однофазной линии с различным напряжением на основании допустимой потери напряжения и экономической плотности тока. Сечение жил проводов и кабелей напряжением до 1 кВ по нагреву определяется по таблицам длительно-допустимых токов, составленных для нормальных условий прокладки.

В качестве исходных данных указываются следующие параметры: род тока, номинальное напряжение электроустановки, характер и мощность приемников электрической энергии, материал проводника и его тип, способ прокладки, тип изоляции, оболочки, количество жил, протяженность проводов линии и пр.

Программа позволяет определить потерю напряжения в линии по известному сечению проводов или по заданной потере рассчитать необходимое сечение проводов.

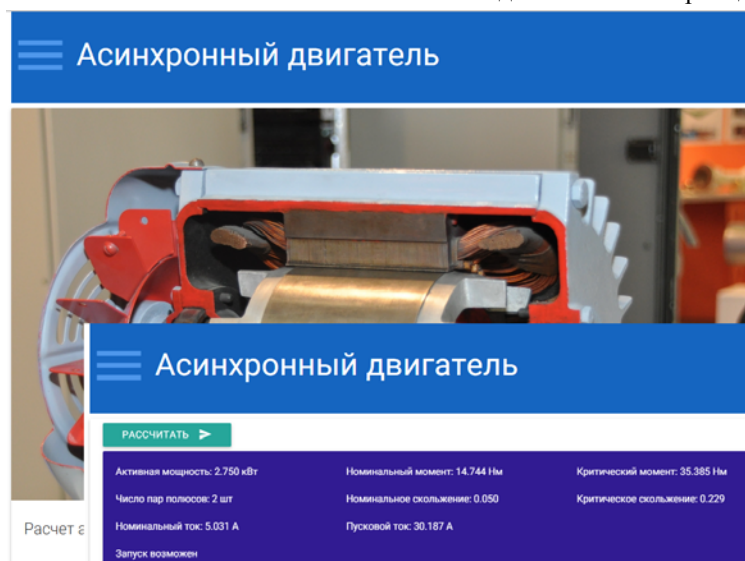


Рисунок 2.4 – Пример реализации программы расчета электрических машин

V. Программа расчета потерь мощности и электроэнергии в элементах системы электро-снабжения.

Определение расхода электроэнергии необходимо для осуществления расчетов за электро-потребление с энергоснабжающей организацией, для оценки удельного расхода электроэнергии на единицу выпускаемой продукции и с целью контроля энергоэффективности. Основные потери электрической энергии в системах электроснабжения имеют место в линиях электропередачи и трансформаторах.

В качестве исходных данных вводятся следующие: каталожные данные трансформаторов, расчетная полная мощность нагрузки, номинальная мощность трансформатора, количество трансформаторов, удельное сопротивление воздушных и кабельных линий, длина линий, время максимальных потерь, время использования максимума нагрузки.

В качестве дополнительной опции, расширяющей возможности программно-технологического инструментария, в программах анализа технических мероприятий по экономии электроэнергии предлагается анализ мероприятий, позволяющих снизить потери мощности и энергии. В качестве таких путей снижения потерь реализованы следующие:

- определение оптимального количества работающих трансформаторов;
- оптимизация загрузки трансформаторов;
- расчет потерь мощности и напряжения при применении компенсирующих устройств;

– расчет годового расхода активной и реактивной энергии потребителя.

Практическая значимость разработанного программного инструментария состоит в автоматизации электрических расчетов, повышении их надежности и достоверности при выборе и конструктивном исполнении электрических сетей, определении электрических нагрузок, компенсации реактивной мощности, выборе защитных аппаратов и сечений проводников, учете электроэнергии и пр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хернитер, М.Е.* Multisim 7: Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств / М.Е. Хернитер; пер. с англ. А.И. Осипов. – М.: Издательский дом ДМК-пресс, 2006. – 448 с.

2. *Галушко, В.Н.* Надежность электроустановок и энергетических систем : учеб-метод. пособие / В.Н. Галушко, С.Г. Додолев ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2014. – 154 с.

3. *Алферова, Т.В.* Моделирование параметров надежности электрооборудования на предприятиях железнодорожной отрасли / Т.В. Алферова, С.И. Бахур, В.Н. Галушко, А.А. Алферов. – Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2014. – № 3 (15). – С. 56–65.

Поступила в редакцию 15.08.15.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfint.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).