



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№4 (21) 2014

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:

В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:

V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:

F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (21) 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Груздев В.А., Залесский В.Г., Солдатенко П.Н. Источники низкоэнергетичных пучков заряженных частиц	7
Есман А.К., Кулешов В.К., Зыков Г.Л. Селективный приемник терагерцового излучения ..	10
Кулак Г.В., Крох Г.В., Николаенко Т.В., Ропот П.И. Поляризационно-независимая акустооптическая модуляция бесселевых световых пучков в кристаллах теллура	14
Митюрин Г.С., Черненко Е.В., Свиридова В.В., Сердюков А.Н. Термооптическая генерация звука бесселевыми световыми пучками в гиротропных низкоразмерных структурах	19
Остриков О.М., Шматок Е.В. Деформационное двойникование ферромагнитного монокристалла Ni_2MnGa с эффектом памяти формы	24
Пилипович В.А., Залесский В.Б., Конойко А.И., Кравченко В.М., Решиков К.А. Метод стабилизации светомодуляционных характеристик электрооптического модулятора Фабри – Перо для широкополосного излучения	30
Тюменков Г.Ю., Ельников Е.П., Фирагина Е.В. Моделирование радиальной функции плотности гравитирующего шара	36
Цянь Сонгсонг, Банний В.А., Самофалов А.Л., Семченко И.В., Хахомов С.А. Поглотители электромагнитного излучения СВЧ-диапазона на основе полимерных композитов и киральных структур	40

МАТЕМАТИКА

Белоконь Л.М. О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп	46
Габасов Р., Кириллова Ф.М., Во Тхи Тань Ха. Наблюдение линейных систем по принципу размыкаемого контура	60
Лысюк Е.С. Представление решений дифференциальных систем третьего порядка в виде рядов экспонент от дробно-линейных функций	70
Семенов М.Г. Формула инъектора конечной π -разрешимой группы	77
Скиба А.Н. О σ -свойствах конечных групп I	89
Тютянов В.Н., Бычков П.В. О конечных группах с минимальными \mathbb{P} -субнормальными подгруппами	97
Чирик И.К. О p -сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с примарными индексами сомножителей	100

ИНФОРМАТИКА

Кулиниченко В.Н., Демиденко О.М., Чечет П.Л. Об одном подходе к определению пропускной способности каналов ЛВС по протоколам TCP/IP, ICMP и UDP	106
---	-----

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 11.12.14. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,0. Уч.-изд. л. 11,3. Тираж 100 экз. Заказ № 694.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2014
© Проблемы физики, математики и техники, 2014
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2014

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 4 (21) 2014

CONTENTS

PHYSICS

Gruzdev V.A., Zalesski V.G., Soldatenko P.N. Sources of low-energy charged particle beams ...	7
Esman A.K., Kuleshov V.K., Zykov G.L. Selective receiver of the terahertz radiation	10
Kulak G.V., Krokhh G.V., Nikolaenko T.V., Ropot P.I. Polarization-independent acousto-optical modulation of Bessel light beams in the tellurium crystals	14
Mityurich G.S., Chernenok E.V., Sviridova V.V., Serdyukov A.N. Thermo-optical sound generation by Bessel light beams in gyrotropic low-dimensional structures	19
Ostrikov O.M., Shmatok E.V. Deformation twinning of the ferromagnetic single crystal of Ni_2MnGa with the shape memory effect	24
Pilipovich V.A., Zalesski V.B., Konojko A.I., Kravchenko V.M., Reshikov C.A. The method of stabilization of light-modulating responses of electro-optic Fabry – Perot modulator for broadband radiation	30
Tyumenkov G.Yu., El'nikov E.P., Firagina E.V. Modeling of the radial density function of a gravitating globe	36
Qian Songsong, Bannyi V.A., Samofalov A.L., Semchenko I.V., Khakhomov S.A. Absorbers of microwaves based on polymer composites and chiral structures	40

MATHEMATICS

Belokon L.M. On the intersections of the maximal subgroups of finite groups	46
Gabasov R., Kirillova F.M., Vo Thi Thanh Ha. Observation of linear systems on the principle of disclosable loop	60
Lysiuk A.S. Representation of solutions of the differential systems of a third-order in the form of exponential series out of linear fractional functions	70
Semenov M.G. Formula of an injector of a finite π -soluble group	77
Skiba A.N. On σ -properties of finite groups I	89
Tyutyanov V.N., Bychkov P.V. On finite groups with minimal \mathbb{P} -subnormal subgroups	97
Chirik I.K. On p -supersolubility of a finite factorized group with prime indexes of factors	100

INFORMATION SCIENCE

Kulinchenko V.N., Demidenko O.M., Chechat P.L. An approach to identify channel capacity of LAN on TCP/IP, ICMP AND UDP protocols	106
---	-----

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 537.533; 621.384

ИСТОЧНИКИ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В.А. Груздев, В.Г. Залесский, П.Н. Солдатенко

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

SOURCES OF LOW-ENERGY CHARGED PARTICLE BEAMS

V.A. Gruzdev, V.G. Zalesski, P.N. Soldatenko

Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus

В работе представлены некоторые результаты, полученные при разработке низкоэнергетических плазменных источников электронов, формирующих электронные и ионные пучки с параметрами, достаточными для реализации ряда технологий модификации поверхностей.

Ключевые слова: низкоэнергетические пучки, плазменный источник электронов, электродная структура.

Some results obtained in the development of low-energy IEP forming electron and ion beams with parameters sufficient for a number of surface modification technologies are presented.

Keywords: low-energy beams, electron source, electrode structure.

Введение

В последнее время, в связи с расширением области применения плазмохимических технологий (электронно-лучевое диспергирование и распыление диэлектрических материалов, нанесение многослойных покрытий и т.д.), усилился интерес к получению низкоэнергетических пучков заряженных частиц с энергией до 5 кэВ [1]. Применение известных конструкций высокоэнергетических плазменных источников электронов (ИЭП) затруднено, что обусловлено высоким первеансом низкоэнергетического ускоряющего промежутка и, как следствие, высокой нестабильностью тока эмиссии из-за ионизационных и сопутствующих процессов. Поэтому существует необходимость создания специализированных источников таких пучков.

1 Конструкции экспериментальных источников

Возможно два способа реализации воздействия на обрабатываемую поверхность – пучковый, обусловленный воздействием пучками заряженных частиц, ускоренными в промежутке ускорения, или слоевой, основанный на использовании такой конструкции газоразрядной структуры, в которой обрабатываемое изделие является составной частью одного из электродов структуры.

На рисунке 1.1 представлен один из вариантов конструкции низкоэнергетического ИЭП (НИЭП) на основе модифицированного отражательного разряда (ОРМ) с расширителем и дополнительным электродом, который позволяет формировать как электронные, так и ионные пучки. Наличие дополнительного электрода позволяет снизить влияние потенциала расширителя на условия горения разряда и расширить перечень вариантов подключения электродов, обеспечивающих поиск

условий устойчивого горения разряда при максимальной эффективности эмиссии электронов и ионов.

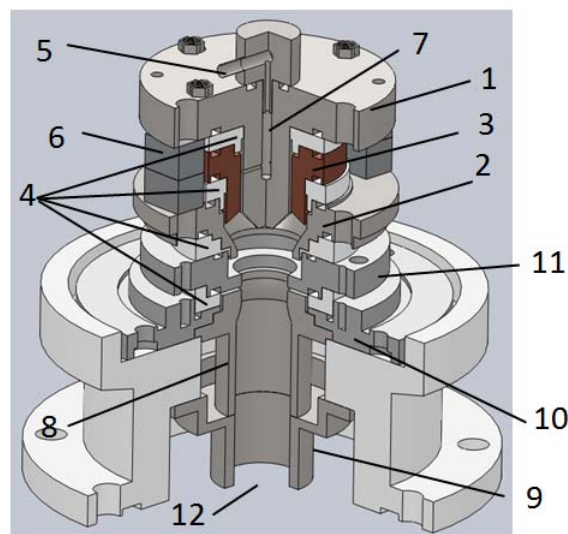


Рисунок 1.1 – Внешний вид электродной структуры НИЭП на основе ОРМ с дополнительным электродом

- 1 – внешний катод;
- 2 – внутренний катод;
- 3 – анод;
- 4 – изоляторы;
- 5 – напуск газа;
- 6 – постоянные магниты;
- 7 – отверстие для напуска газа;
- 8 – расширитель плазмы;
- 9 – ускоряющий электрод;
- 10 – фланец;
- 11 – дополнительный электрод;
- 12 – область размещения обрабатываемого изделия

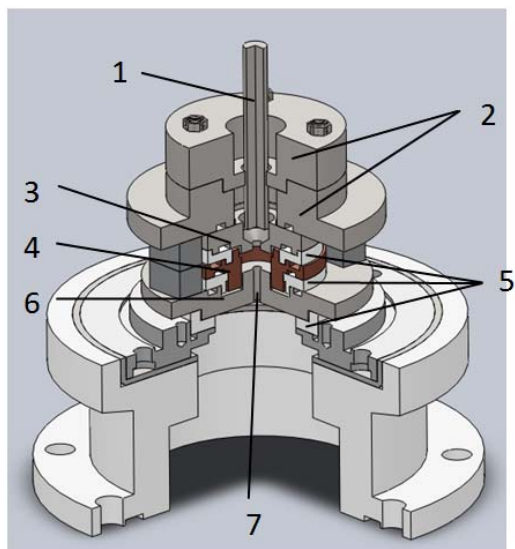


Рисунок 1.2 – Внешний вид электродной структуры НИЭП на основе ОРПК
 1 – обрабатываемое изделие;
 2 – элементы узла вакуумного уплотнения изделия;
 3 – полый катод;
 4 – анод;
 5 – изоляторы;
 6 – элементы конструкции отражательного катода;
 7 – отверстие для напуска или откачки газа

Основная ионизация газа осуществляется в области ограниченной внешним 1 и внутренним 2 катодами и анодом 3. Между катодами 1 и 2 с помощью постоянных магнитов 6 формируется магнитное поле, ограничивающее подвижность электронов из плазмы на анод 3. Из межкатодного пространства плазма проникает в расширитель 8, формируя эмитирующую поверхность. Обрабатываемое изделие устанавливается под расширителем и выполняет, совместно с электродом 9, роль ускоряющего электрода с нулевым (заземлённым) потенциалом. Плазмообразующий газ в разрядную

структуру напускается через канал в штуцере 5 и катоде 1. При помощи фланца 10, разрядная структура соединяется с вакуумной камерой. Конструкция опорного изолятора и корпуса ИЭП определяются типом вакуумной камеры и технологическими условиями (интенсивность охлаждения, технологический цикл).

На рисунке 1.2 представлен вариант конструкции источника для слоевого воздействия на основе отражательного разряда с полым катодом (ОРПК).

В данной структуре основная ионизация осуществляется в промежутке между катодом 3, анодом 4 и электродом (изделием) 1, на который может подаваться постоянное (например, катодное) или импульсное напряжение, с полярностью и величиной, обеспечивающими требуемое электронное или ионное воздействие.

Отсутствие ускоряющего промежутка и более развитая плазменная эмитирующая поверхность в случае слоевого воздействия, делает перспективной разработку таких структур для модификации поверхности малогабаритных изделий, типа метчики, сверла, в которых модифицирующее воздействие является необходимым не на весь объем детали, а только на его некоторую область (режущую часть). При этом, поскольку отбор электронов из области интенсивной ионизации приводит к срыву горения разряда, импульсный режим является наиболее предпочтительным для таких источников.

2 Экспериментальные характеристики

Исследования НИЭП на основе ОРМ проводились при различных длинах и потенциалах электрода-расширителя: анодный, катодный, промежуточный. Оказалось, что в зависимости от длины электрода-расширителя качественный вид ВАХ разряда при его различных потенциалах не изменяется, а только смещается в область больших напряжений горения разряда, что обусловлено изменением интенсивности ионизационных процессов. На рисунках 2.1, 2.2 представлены некоторые

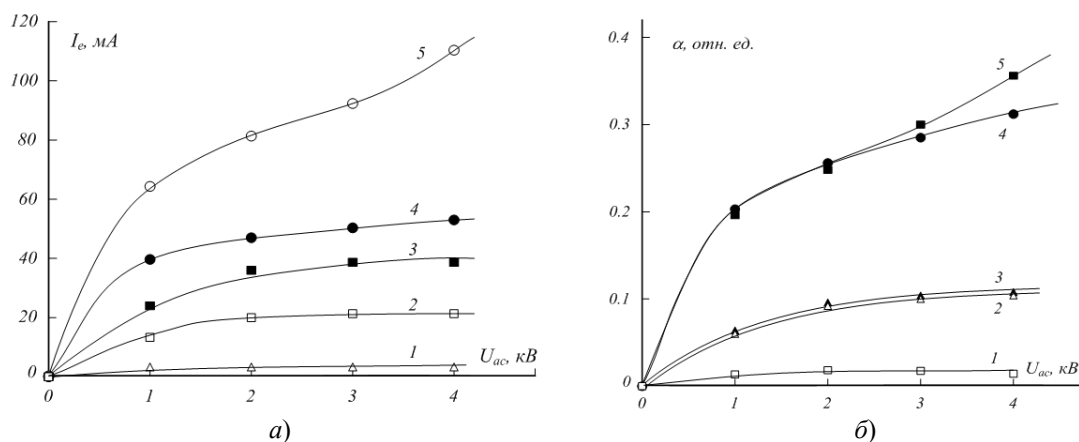


Рисунок 2.1 – Электронный ток эмиссии (а) и эффективность извлечения (б) в НИЭП на основе ОРМ (ток разряда, mA: 2, 4 – 200; 1, 3, 5 – 350; потенциал расширителя: 1 – катодный, 2, 3 – анодный, 4, 5 – промежуточный)

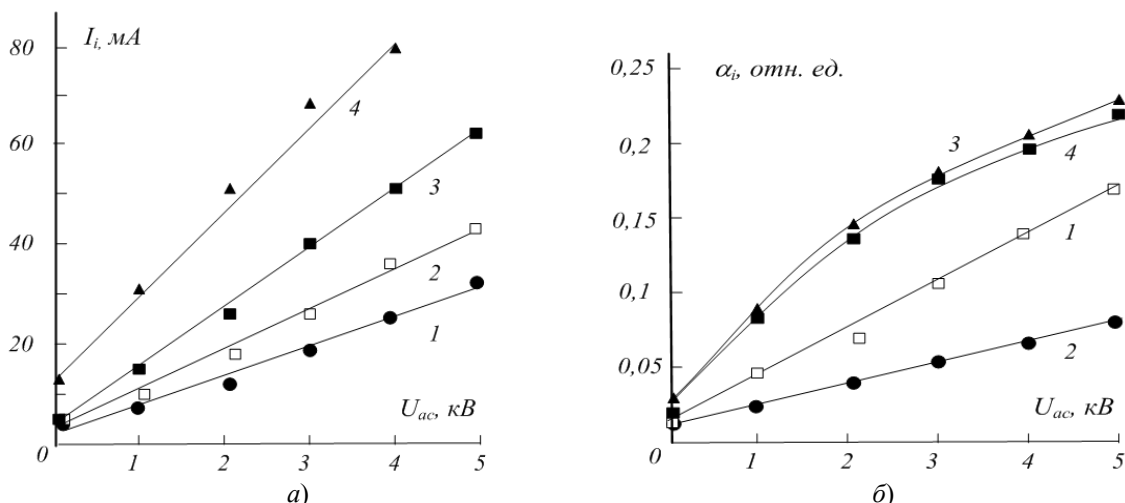


Рисунок 2.2 – Ионный ток эмиссии (а) и эффективность извлечения ионов (б) в НИЭП на основе ОРМ (потенциал электрода-расширителя: 1, 2 – анодный, 3, 4 – катодный; ток разряда, мА: 1, 3 – 150, 2, 4 – 300; длина расширителя – 27 мм)

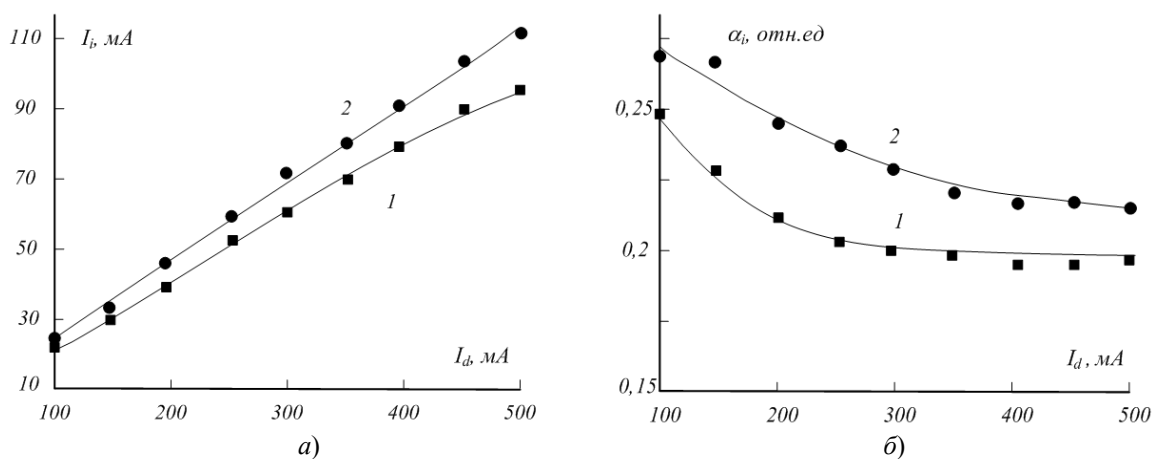


Рисунок 2.3 – Зависимость ионного тока эмиссии (а) и эффективности извлечения ионов (б) от тока разряда а) напуск газа: 1 – Q_1 , 2 – $Q_2 > Q_1$, б) напуск газа: 1 – Q_1 , 2 – $Q_2 > Q_1$; отсутствие (1), наличие (2) дополнительных магнитов

характеристики разработанной конструкции. Из рисунков видно, что наиболее эффективная электронная эмиссия реализуется в случае промежуточного потенциала электрода-расширителя (рисунок 2.1, а кривые 4, 5), что обусловлено, вероятно, более высокой концентрацией плазмы, достигаемой в этих условиях. При этом величина тока разряда не влияет на эффективность извлечения (рисунок 2.1, б, кривые 4, 5).

Возможность формирования ионных пучков, характеристики которых представлены на рисунке 2.2, открывает перспективы применения НИЭП для реализации попеременного термического (электронного) и модифицирующего (ионного) воздействия.

Представленный на рисунке 1.2 вариант конструкции источника на основе ОРПК предназначен для обработки свёрл и метчиков. На рисунке 2.3 показаны его некоторые характеристики,

анализ которых свидетельствует о перспективности разработки источников такого типа.

Полученные результаты свидетельствуют о возможности применения разработанных конструкций для создания источников низкоэнергетических пучков промышленного назначения. Для повышения токов эмиссии, увеличения эффективности воздействия и снижения технологического времени воздействия целесообразно применение импульсных режимов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плазменные эмиссионные системы с не-накапливаемыми катодами для ионно-плазменных технологий / В.Т. Барченко [и др.], под общ. ред. В.Т. Барченко. – СПб. : Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011. – 220 с.

Поступила в редакцию 15.09.14.

УДК 621.382.323

СЕЛЕКТИВНЫЙ ПРИЕМНИК ТЕРАГЕРЦОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А.К. Есман, В.К. Кулешов, Г.Л. Зыков

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь

SELECTIVE RECEIVER OF THE TERAHERTZ RADIATION

A.K. Esman, V.K. Kuleshov, G.L. Zykov

B.I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Предложена оригинальная конструкция селективного высокоэффективного приемника терагерцового излучения на основе диода Шоттки с балочными выводами и показано, что при оптимизации размеров его элементов и расположении в эластичном слое диэлектрика периодических решеток можно достичь потерь на отражение -38 дБ, эффективности преобразования 97% и резонансной частоты детектирования $-36,5$ ТГц.

Ключевые слова: терагерцовое излучение, низкобарьерный диод Шоттки с нулевым смещением, слой эластичного диэлектрика, объемная проводимость, n^+ -слой, эпитаксиальный слой n -типа.

An original design of a selective high-efficiency receiver on the basis of the Schottky diode with beamed outputs is proposed. It is shown that the optimization of the sizes of its elements and location of the periodic lattices in the layer of elastic dielectric lead to the reflection losses -38 dB, conversion efficiency 97% and resonance frequency detection of 36,5 THz.

Keywords: terahertz radiation, low-barrier zero-bias Schottky diode, layer of the elastic dielectric, bulk conductivity, n^+ -layer, epitaxial layer of n -type.

Введение

В последнее десятилетие проводятся интенсивные исследования по разработке и созданию высокоэффективных твердотельных приемников в терагерцовой (ТГц) области частот на основе низкобарьерных диодов Шоттки. Для микроволнового излучения в неохлаждаемых приёмниках у них практически нет конкурентов [1], [2]. Область электромагнитных волн указанного диапазона привлекает к себе внимание исследователей, как с теоретической, так и с практической точки зрения из-за её востребованности в различных областях науки и техники. Поэтому открываются перспективы создания оптоэлектронной техники нового поколения не только в космической отрасли, но и в биомедицинских приложениях, системах безопасности жизнедеятельности, системах неразрушающего контроля материалов, диагностирования раковых заболеваний и многих других областях.

Так как на ТГц частотах предварительное усиление сопряжено со значительными трудностями, то чувствительность и быстродействие детектора являются основными параметрами, определяющими его практическую пригодность. Особенно активно развивается подход к конструированию приемников ТГц диапазона на основе δ -легированных низкобарьерных диодов Шоттки с балочными выводами без смещения [3], [4], встроенных в планарные антенны: логопериодические и спиральные (широкополосные) или дипольные и щелевые [5]. Расширение рабочего диапазона в сторону увеличения

частоты затруднено из-за ряда существенных ограничений. С одной стороны предельная частота детектирования определяется сопротивлением потерь и емкостью перехода, а с другой – качеством пластин исходного материала, уровнем развития технологии и паразитными параметрами, зависящими от его конструкции. Уменьшение последовательного сопротивления потерь путем увеличения легирования полупроводника ограничено достигнутым значением концентрации легирующих примесей [6]. Емкость перехода диода без смещения с площадью активной области в единицы квадратных микрон составляет в настоящее время единицы фемтофард. Одним из основных паразитных параметров является конструктивная емкость диода, которая определяется диэлектрической проницаемостью и структурой эластичного диэлектрика, расположенного между катодным и анодным балочными выводами, а также их размерами и взаимным расположением. Известно, что диоды Шоттки с низким потенциальным барьером используются в качестве детекторов инфракрасного излучения для области длин волн 8–14 мкм, однако эффективность их при комнатной температуре недостаточная для широкого практического применения [7]–[9].

Целью работы является улучшение основных параметров и характеристик приемника ТГц излучения на основе диода Шоттки с балочными выводами за счет оптимизации его конструкции путем изменения конфигурации эластичного слоя.

1 Конструкция приемника

В работе рассматривается один из возможных путей решения поставленной задачи за счет совершенствования структуры эластичного диэлектрика низкобарьерного диода Шоттки с δ -легированием и балочными выводами без смещения [10]. Предложенная конструкция приемника на основе диода Шоттки с балочными выводами представлена на рисунке 1.1, где в полупроводниковой подложке 9 друг над другом сформированы n^+ -слой 8 и n -слой 7. На поверхности n -слоя 7 нанесена пленка диэлектрика 6 с вырезом, над которым расположен анодный балочный вывод 5 с контактом 11 к слою полупроводника 7. А катодный балочный вывод 4 расположен на пленке диэлектрика 6 с катодным контактом 10 к слою полупроводника 8. Сверху на катодном 4 и анодном 5 балочных выводах выполнен слой эластичного диэлектрика 2, имеющий в центре над подложкой 9 окно 3, а по краям – периодические решетки 1, каждая из которых содержит четыре отверстия прямоугольной формы.

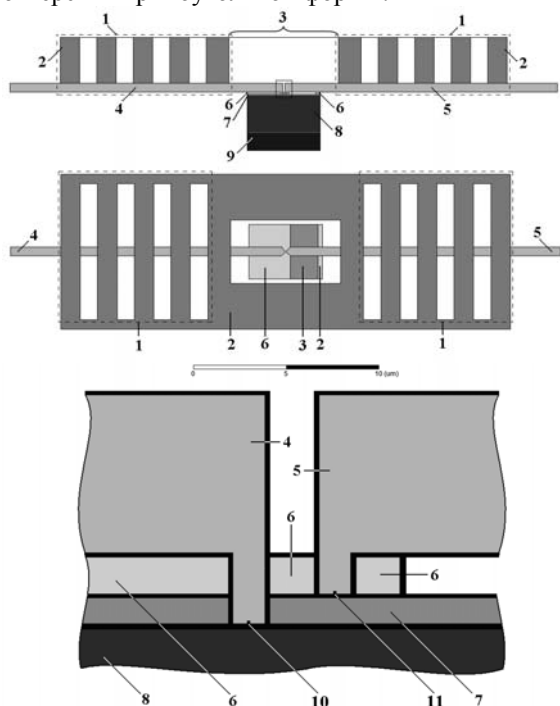


Рисунок 1.1 – Схематичное изображение сечений приемника ТГц излучения по горизонтали (верхнее) и вертикали (среднее), а также его увеличенный фрагмент (снизу), где:

- 1 – периодические решетки,
- 2 – слой эластичного диэлектрика,
- 3 – окно,
- 4 – катодный балочный вывод,
- 5 – анодный балочный вывод,
- 6 – пленка диэлектрика,
- 7 – n -слой,
- 8 – n^+ -слой,
- 9 – подложка,
- 10 – катодный контакт,
- 11 – анодный контакт

2 Результаты компьютерного эксперимента

Компьютерный эксперимент по исследованию параметров и характеристик приемника ТГц излучения проводился с использованием программы HFSS, которая позволяет вычислять одно- и многомодовые S -параметры и электромагнитные поля в трехмерных структурах произвольной формы [11], [12]. При моделировании использовались следующие данные: геометрические размеры подложки 9, n^+ -слоя 8, n -слоя 7 и пленки диэлектрика 6 в окне 3 составляли $4 \text{ мкм} \times 3 \text{ мкм}$ с толщинами соответственно – 1 мкм , 2 мкм , $0,1 \text{ мкм}$ и $0,1 \text{ мкм}$. Пленка диэлектрика 6 выполнена из диоксида кремния, а n^+ -слой 8 и n -слой 7 – из арсенида галлия с объемными проводимостями $14,3 \times 10^4 \text{ См/м}$ и $45,45 \times 10^3 \text{ См/м}$ соответственно. Размеры выреза в пленке диэлектрика 6 под анодным балочным выводом 5 выбраны следующие: $1,5 \text{ мкм} \times 3 \text{ мкм} \times 0,1 \text{ мкм}$. Оптимальные общие геометрические размеры (длина, ширина и толщина) балочных выводов 4 и 5, выполненных из золота, составляли $30 \text{ мкм} \times 0,5 \text{ мкм} \times 0,5 \text{ мкм}$. Слой эластичного диэлектрика 2 выполнен из полиимида длиной $24,5 \text{ мкм}$, шириной $8,5 \text{ мкм}$, а толщина его варьировалась в пределах от 2 мкм до 3 мкм . Оптимизация рассматриваемой конструкции приемника осуществлялась за счет введения в слой эластичного диэлектрика 2 периодических решеток 1 и выбора соответствующих размеров выреза в пленке диэлектрика 6, балочных выводов 4, 5 и окна 3.

Численный расчет проводился в пределах ограниченной области пространства с учетом требуемых граничных условий для данной конструкции, при мощности входного излучения, равной 1 мВт . Размеры области моделирования и расстояние между источником излучения и детекторным диодом задавались не менее одной четверти резонансной длины волны принимаемого электромагнитного излучения с целью обеспечения требуемой точности вычислений.

На рисунке 2.1 приведены зависимости резонансной частоты приемника ТГц излучения от толщины слоя эластичного диэлектрика 2 и геометрических размеров прямоугольных отверстий периодических решеток 1, расположенных в этом слое. Из приведенных частот f_{res} от толщины слоя эластичного диэлектрика d с периодическими решетками (сплошная линия) и без них (штриховая линия) следует, что максимальные значения резонансных частот f_{res} достигаются при $d = 2,5 \text{ мкм}$ и $2,3 \text{ мкм}$ и составляют $36,5 \text{ ТГц}$ и $30,9 \text{ ТГц}$ соответственно. При этом на вставке, приведенной на рисунке 2.1, показано, что резонансная частота f_{res} приемника с периодическими решетками 1 принимает максимальное значение $36,5 \text{ ТГц}$ при ширине w прямоугольных отверстий периодических решеток 1, равной $1,1 \text{ мкм}$.

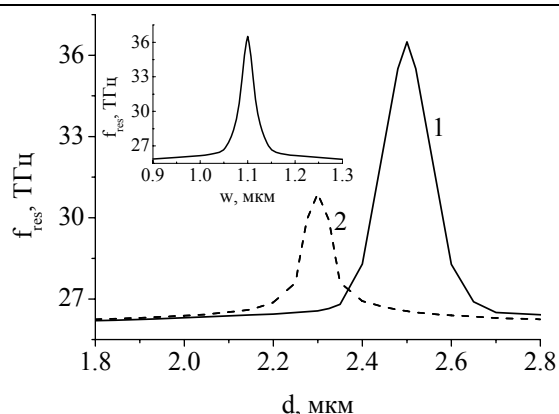


Рисунок 2.1 – Зависимость резонансной частоты f_{res} приемника с периодическими решетками (1) и без них (2) от толщины слоя эластичного диэлектрика. На вставке – зависимость резонансной частоты f_{res} его с периодическими решетками от ширины отверстий в них

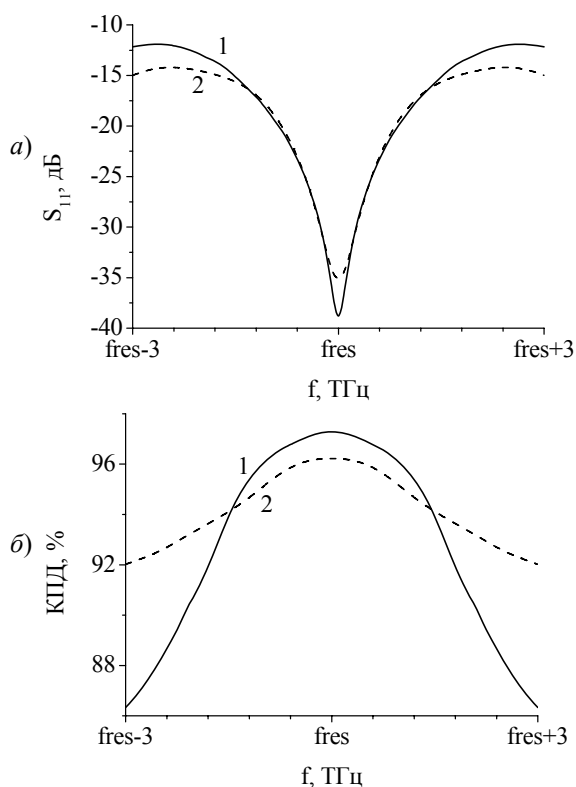


Рисунок 2.2 – Частотная зависимость потерь на отражение S_{11} приемника (а) с периодическими решетками (1) (сплошная линия) и без них (2) (штриховая линия) и коэффициента полезного действия (б) соответственно: с решетками (1) – сплошная линия и без них (2) – штриховая линия

Частотные зависимости потерь на отражение S_{11} и коэффициента полезного действия (КУД) приемника с указанными выше размерами приведены на рисунке 2.2. Откуда следует, что на резонансных частотах f_{res} потери на отражение для диода с периодическими решетками 1 в

эластичном диэлектрике 2 составляют $-38,81$ дБ и без них $-35,05$ дБ (рисунок 2.2 а), а КПД – $97,32\%$ и $96,22\%$ (рисунок 2.2 б) соответственно.

Предлагаемая конструкция приемника ТГц излучения на основе диода Шоттки с балочными выводами позволяет эффективно согласовать его по входу и выходу, т.е. снизить потери на отражение и увеличить поглощение на резонансной частоте за счет использования двух периодических решеток 1, каждая из которых содержит четыре отверстия прямоугольной формы. А один из вариантов физической реализации разработанной конструкции приемника без гальванических связей с остальными компонентами может быть выполнен, как в [13].

Заключение

Проведенный компьютерный эксперимент показал, что при расположении в эластичном слое диэлектрика диода Шоттки с балочными выводами периодических решеток и оптимизации его конструкции можно повысить резонансную частоту приемника до $36,5$ ТГц при уменьшении потерь на отражение до -38 дБ и увеличить КПД до 97% . Предложенная конструкция на основе диода Шоттки может быть использована не только при создании селективных, высокоэффективных, малогабаритных неохлаждаемых приемников ТГц излучения, но и в качестве элементной базы детекторных и смесительных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fast THz detectors based on InGaAs Schottky Diodes* / C. Sydlo [et al.] // *Frequenz*. – 2008. – Vol. 62. № 5–6. – P. 107–110.
2. *Ferguson, B. Materials for terahertz science and technology* / B. Ferguson, X.-C. Zhang // *Nature Materials*. – 2002. – № 1. – P. 26–33.
3. *Шушкин, В.И. Диагностика низкобарьерных диодов Шоттки с приповерхностным δ -легированием* / В.И. Шушкин, А.В. Мурель // *Физика и техника полупроводников*. – 2008. – Т. 42, вып. 4. – С. 500–502.
4. *Sassen, S. Barrier height engineering on GaAs THz schottky diodes by means of high – low doping, InGaAs – and InGaP – layers* / S. Sassen, B. Witzigmann, C. Wolk, H. Brugger // *IEEE Transaction on Electron Devices*. – 2000. – Vol. 47. – P. 24–32.
5. *Brown, E.R. A system-level analysis of Schottky diodes for incoherent THz imaging arrays* / E.R. Brown // *Solid-State Electronics*. – 2004. – Vol. 48, Issue 10–11. – P. 2051–2053.
6. *Pure rotational spectrum of HCM in the terahertz region: use of a new planar schottky diode multiplier* / F. Maiwald [et al.] // *J. Mol. Spectrosc.* – 2000. – Vol. 202. – P. 166–168.
7. *Электрические свойства диодов Шоттки на основе узкозонного HgMnTe* / Л.А. Косяченко

[и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2002. – Т. 36, вып. 10. – С. 1217–1224.

8. Шевчик-Шекера, А.В. Реальная и предельная чувствительность некоторых приемников излучения ТГц/суб-ТГц-диапазонов / А.В. Шевчик-Шекера // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2012. – № 1. – С. 3–6.

9. *First THz and IR characterization of nanometer-scaled antenna-coupled InGaAs/InP Schottky diode detectors for room temperature infrared imaging* / H. Kazemi [et al.] // Proc. of SPIE. – 2007. – Vol. 6542. – P. 65421J–1–4.

10. *Детекторный диод с балочными выводами*: патент на пол. модель 9936 Респ. Беларусь, МПК Н 01L 29/86 / А.К. Есман, В.К. Кулешов, Г.Л. Зыков ; заявитель ГНУ «Институт физики

им. Б.И. Степанова НАН Беларуси», № 020130690; заявл. 20.08.13, реш. о выдаче 04.10.13 // Афіцыйны бюл. / Нац. Цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2014. – № 1.

11. *HFSS v12.0 User Manual*. Pittsburgh, PA: Ansoft Corporation, 2009.

12. Банков, С.Е. Решение оптических и СВЧ задач с помощью HFSS / С.Е. Банков, Э.М. Гутцайт, А.А. Курушин А.А. – М. : ООО «Оркада», 2012. – 250 с.

13. *A Planar-Diode Frequency Tripler at 1.9 THz* / A. Maestrini [et al.] // IEEE MTT-S Digest. – 2003. – № 3. – P. 747–750.

Поступила в редакцию 28.03.14.

УДК 535.42:534.8

ПОЛЯРИЗАЦИОННО-НЕЗАВИСИМАЯ АКУСТООПТИЧЕСКАЯ МОДУЛЯЦИЯ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В КРИСТАЛЛАХ ТЕЛЛУРА

Г.В. Кулак, Г.В. Крох, Т.В. Николаенко, П.И. Ропот

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

POLARIZATION-INDEPENDENT ACOUSTO-OPTICAL MODULATION OF BESSEL LIGHT BEAMS IN THE TELLURIUM CRYSTALS

G.V. Kulak, G.V. Krokh, T.V. Nikolaenko, P.I. Ropot

I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus

Исследована поляризационно-независимая акустооптическая модуляция квазибездифракционных бesselевых световых пучков (БСП) инфракрасного диапазона спектра, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла теллура на медленных сдвиговых ультразвуковых волнах. Показано, что при любых интенсивностях ультразвука для XZ -среза кристалла теллура имеет место слабая зависимость эффективности дифракции БСП от поляризации падающего света. Установлена поляризационно-независимая модуляция БСП при брэгговской дифракции на ультразвуке в плоскости YZ кристалла на сдвиговой ультразвуковой волне, поляризованной под углом -63° к оси Z в плоскости YX .

Ключевые слова: ультразвуковая волна, дифракция света, гиротропный кристалл, поляризация, бesselев световой пучок, акустооптическая дифракция, инфракрасное излучение.

Polarization-independent acousto-optical modulation of the nearly-non-diffracted Bessel light beams (BLB) of infrared spectral range, traveling at the vicinity of tellurium optical axis on the slowly shear ultrasonic waves is investigated. It is shown that less dependency of diffraction efficiency of BLB from the light polarization taken place under any ultrasonic intensity for XZ -cut of tellurium crystals. Polarization-independent modulation of BLB under the Bragg diffraction by ultrasound in YZ crystal plane on the shear ultrasonic wave polarized under -63° to Z axis in a YX plane is stated.

Keywords: ultrasonic wave, light diffraction, gyrotropic crystal, Bessel light beam, acousto-optical diffraction, infra-red radiation.

Введение

В настоящее время значительный интерес исследователей и разработчиков представляют квазибездифракционные световые пучки, которые соответствуют световым пучкам с сохраняющимся в процессе распространения поперечным распределением амплитуды поля. Важным классом квазибездифракционных полей являются бesselевы световые пучки (БСП) [1]–[3]. Энергия в поперечном сечении БСП распределена в виде яркого центрального пятна, окруженного системой концентрических колец, причем интенсивность в кольцевых зонах уменьшается с увеличением радиальной координаты. Отличительной особенностью БСП в сравнении с традиционными гауссовыми пучками является бездифракционность в заданной области пространства и способность самореконструкции волнового фронта за экраном [4].

Важным направлением исследований в области БСП является разработка акустооптических (АО) методов управления энергетическими и поляризационными параметрами бesselевых пучков. Использование для этих целей АО взаимодействия БСП в кристаллах представляет собой новую и мало изученную область исследований.

Для целей оптимизации АО устройств (модуляторов, дефлекторов, процессоров) необходимо

учитывать влияние поляризации падающего света на характеристики дифрагированных световых пучков [5], [6]. В работах [7], [8] теоретически и экспериментально исследована поляризационно-независимая АО модуляция гауссовых световых пучков в кристаллах парателлуриата (TeO_2) на медленной сдвиговой ультразвуковой (УЗ) волне. Показано, что для гауссовых пучков поляризационная независимость обусловлена одновременным влиянием оптической гиротропии и линейной анизотропии кристалла. Особенности поляризационно-независимой АО модуляции БСП, распространяющихся в окрестности оптической оси одноосного кристалла парателлуриата, теоретически исследованы в работе [9].

В работе [10] исследованы характеристики АО дефлектора на основе XZ -среза кристалла теллура (Te), использующего сдвиговые УЗ волны, распространяющиеся вдоль оси X $||$ [100], для света с длиной волны $\lambda_0 = 10,6$ мкм, распространяющегося под малыми углами к оптической оси Z $||$ [001]. Показано, что учет оптической активности Te позволяет существенно расширить ширину полосы АО дефлектора инфракрасного (ИК) диапазона. Экспериментальное исследование АО модулятора ИК диапазона с эффективностью дифракции около 80% на продольном ультразвуке, распространяющемся вдоль оси X , и световой

волны, поляризованной в плоскости дифракции XZ , проведено в работе [11]. При этом быстродействие дефлектора составило $\tau = 1,1 \cdot 10^{-7}$ с. Оптические, акустические и акустооптические свойства кристаллов Te для их применения в АО устройствах среднего и дальнего ИК диапазона исследованы в работе [12]. Показано, что наибольший интерес в акустооптике представляют XZ - и YZ -срезы кристалла. При этом дифракция на медленной сдвиговой $УЗ$ волне в плоскости YZ кристалла предпочтительнее.

В настоящей работе исследуются особенности брэгговской АО дифракции БСП, распространяющихся вблизи оптической оси одноосного гиротропного кристалла теллура на бегущей $УЗ$ волне. Теоретическое описание АО взаимодействия БСП в одноосных кристаллах основано на аналитическом и численном анализе уравнений связанных волн для дифрагированных бесселевых пучков в режиме брэгговской дифракции [9]. Для этого используется метод, основанный на анализе интегралов перекрытия БСП, который ранее применен для изучения процессов нелинейно-частотного преобразования [13]. При этом математическое описание АО взаимодействия БСП проводится на основе уравнений связанных волн, распространяющихся в окрестности оптической оси гиротропного кристалла теллура.

1 Теоретические результаты

Рассмотрим геометрию АО взаимодействия (рисунок 1.1 а), для которой $УЗ$ волна распространяется в кристалле Te в направлении оси X и занимает пространство между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Ось падающего БСП расположена в плоскости XZ под углом φ_1 к фронту $УЗ$ волны.

Сечение поверхности волновых векторов плоскостью дифракции XZ и расположение волновых векторов $(\vec{k}_{o,e})$ преломленных бесселевых пучков и волновых векторов $(\vec{k}'_{o,e})$ дифрагированных показано на рисунке 1.1 б), в). При этом в направлении дифракционного порядка, как видно из рисунка 1.1 б), в), дают вклады два вида векторных взаимодействий:

$$\vec{k}_o + \vec{K}_1 = \vec{k}'_e, \quad \vec{k}_e + \vec{K}_2 = \vec{k}'_o.$$

Для пространственной части электрического вектора $\vec{E}_i(\rho_0, r_i)$ преломленного БСП в кристалле имеем [9]:

$$\vec{E}_i(\rho_0, r_i) = A_+(\rho_0) \vec{e}_+ e^{i\vec{k}_+ \cdot \vec{r}_i} + A_-(\rho_0) \vec{e}_- e^{i\vec{k}_- \cdot \vec{r}_i}, \quad (1.1)$$

где $A_{\pm}(\rho_0) = \frac{A^0 J_0[k_{\pm} \sin(\gamma_{\pm}) \rho_0]}{\sqrt{\pi} R_B J_1[k_{\pm} \sin(\gamma_{\pm}) R_B]}$ – амплитуды бесселевых пучков с правой и левой эллиптической поляризацией, $\vec{k}_{\pm} = \frac{\omega}{c} n_{\pm} \vec{n}$, γ_{\pm} – углы конуса бесселевых пучков; n_{\pm} – показатели преломления

собственных БСП, $\vec{e}_{\pm} = \frac{\vec{e}_{p,2} + i\tau \vec{e}_{z,p}}{\sqrt{1+\tau^2}}$ – векторы поляризации преломленных БСП, причем τ – эллиптичности распространяющихся БСП; \vec{e}_2 – единичный вектор, перпендикулярный плоскости дифракции; $\vec{e}_p = \frac{[\vec{e}_2 \vec{n}]}{||[\vec{e}_2 \vec{n}]||}$ – единичные векторы,

лежащие в плоскости дифракции XZ , \vec{n} – волновая нормаль вдоль совпадающих осей преломленных БСП, поскольку различие углов преломления собственных мод пренебрежимо мало. Здесь $J_{0,1}(x')$ – функции Бесселя, нулевого и первого порядка.

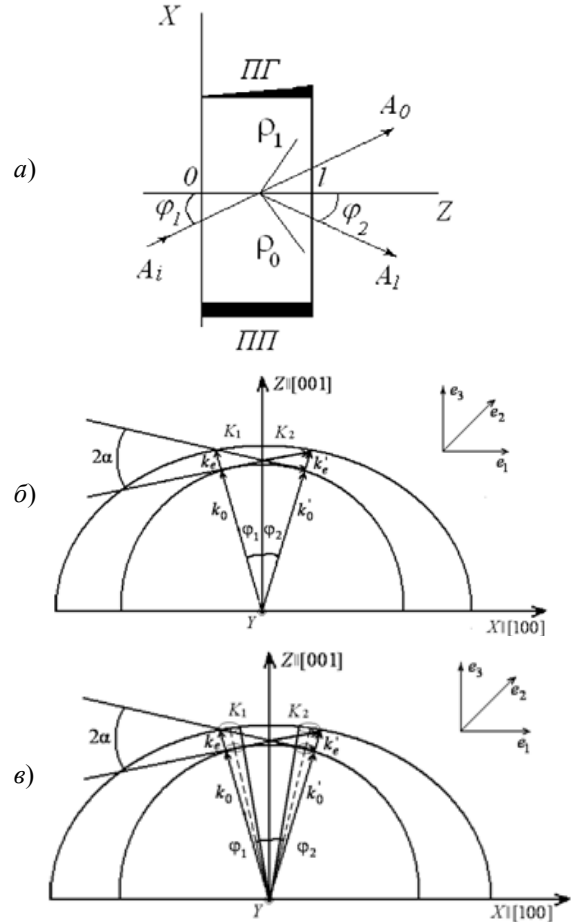


Рисунок 1.1 – Геометрия анизотропной акустооптической дифракции ограниченных световых пучков (ПП – пьезопреобразователь, ПГ – поглотитель): а) схема расположения преломленной и дифрагированной плосковолновых компонент БСП в плоскости дифракции кристалла Te ($\vec{K}_{1,2}$ – волновые векторы ультразвука, $\vec{k}_{o,e}$, $\vec{k}'_{o,e}$ – волновые векторы преломленной и дифрагированной волн, 2α – угол между акустическими векторами \vec{K}_1 и \vec{K}_2); б) схема расположения волновых векторов преломленных $(\vec{k}_{o,e})$ и дифрагированных $\vec{k}'_{o,e}$ волновых векторов БСП в)

Векторы смещений $\vec{U}_{1,2}$ для плоских УЗ волн с волновыми векторами $\vec{K}_{1,2}$ задаются следующими выражениями [8], [16]:

$$\vec{U}_{1,2} = \vec{U}_0 \exp[i(K_{1,2}x - \Omega t)], \quad (1.2)$$

где $\Omega = 2\pi f$ – центральная частота УЗ источника, \vec{U}_0 – амплитуда УЗ волны; $|\vec{K}_{1,2}| = K = \Omega / \nu$ (ν – фазовая скорость УЗ волны). УЗ волна создает периодическое в пространстве и времени изменение тензора диэлектрической проницаемости $\Delta \varepsilon_{ij'}$, связанное с тензором упругих деформаций $U_{i'k'} = (\nabla_{k'} U_{i'} + \nabla_{i'} U_{k'}) / 2$ и тензором фотоупругих постоянных $p_{ij'k'}$ ($i', j' = 1 \div 3$).

Из уравнений Максвелла и материальных уравнений следует волновое уравнение для напряженности светового поля в области, занятой ультразвуком [11]. Решение волнового уравнения будем искать в виде суммы двух связанных эллиптически поляризованных волн с медленно изменяющимися амплитудами [13]:

$$\vec{E} = \vec{u}_i A_i(z) j_0(q_0 \rho_0) e^{i[\vec{k}_i \vec{r}_i - \omega t]} + \sum_{m=1}^M \vec{u}_d A_{dm}(z) j_0(q_{1m} \rho_1) e^{i[\vec{k}_d \vec{r}_d - \omega t]}, \quad (1.3)$$

где $\rho_{0,1} = (\rho^2 \pm x^2 \sin^2 \varphi_{1,2})^{1/2}$, $\rho_{0,1} \approx \rho$ для $\varphi_{1,2} \ll 1$; ρ – цилиндрическая координата светового пучка, распространяющегося вдоль оптической оси кристалла, l – длина АО взаимодействия; $\vec{u}_{i,d}$ – единичные векторы эллиптической поляризации дифрагированных волн (например, при $o-e$ – преобразовании i заменяют на o и d на e); $\omega_d = \omega \pm \Omega$, где ω – частота падающей световой волны; $k_{ix} = (\omega/c)n_i \sin \varphi_1$ и $k_{iz} = (\omega/c)n_i \cos \varphi_1$, компоненты волновых векторов преломленной волны,

$$k_{dx} = \left[\frac{\omega \pm \Omega}{c} n_d \sin \varphi_2 \right], \quad k_{dz} = \left[\frac{\omega \pm \Omega}{c} n_d \cos \varphi_2 \right]$$

– компоненты волнового вектора дифрагированной волны; c – скорость света в вакууме; $n_i = \sqrt{\varepsilon_{ij'} \vec{k}_{0i} \vec{k}_{0j'}}$, $n_d = \sqrt{\varepsilon_{ij'} \vec{k}_{1i} \vec{k}_{1j'}}$, причем \vec{k}_i (\vec{k}_d) – единичные векторы преломленной и дифрагированной волн. В (1.3) введены нормированные функции Бесселя $j_0(q_0 \rho_0)$ и $j_0(q_{1m} \rho_1)$ [15]:

$$j_0(q_0 \rho_0) = \frac{J_0(q_0 \rho_0)}{\sqrt{\pi R_B J_1(q_0 R_B)}}, \quad j_0(q_{1m} \rho_1) = \frac{J_0(q_{1m} \rho_1)}{\sqrt{\pi R_B J_1(q_{1m} R_B)}}, \quad (1.4)$$

где $q_0 = k_i \gamma$, $q_{1m} = k_{dm} \gamma$, причем R_B – радиус падающего бесселевого светового пучка, 2γ – угол конуса БСП, M – число колец в бесселевом световом пучке частотой ω_d . При $\rho = R_B$ и

$q_{1m} R_B = (m-0,25)\pi$ функции Бесселя обращаются в нуль, то есть формула (1.4) представляет собой разложение по модам цилиндрической области радиусом R_B .

Подставив выражение (1.3) в волновое уравнение для напряженности светового поля \vec{E} получим систему уравнений связанных волн [9]:

$$\frac{dA_i}{dz} - \chi_i \sum_{m=1}^M g_{im} A_{dm} = 0, \quad \frac{dA_{dm}}{dz} + i \Delta k_z A_{dm} + \chi_d g_{dm} A_i = 0, \quad (1.5)$$

где

$$g_{im} = \frac{\int_0^{R_B} j_0(q_0 \rho_0) j_0(q_{1m} \rho_1) \rho_0 d\rho_0}{\int_0^{R_B} j_0^2(q_0 \rho_0) \rho_0 d\rho_0}, \quad g_{dm} = \frac{\int_0^{R_B} j_0(q_{1m} \rho_1) j_0(q_0 \rho_0) \rho_1 d\rho_1}{\int_0^{R_B} j_0^2(q_{1m} \rho_1) \rho_1 d\rho_1}, \quad (1.6)$$

причем коэффициенты связи мод $\chi_{i,d}$ выражаются через свертки тензора диэлектрической проницаемости $\Delta \varepsilon_{ij'}$ с векторами поляризации; Δk_z – расстройка фазового синхронизма; n_o (n_e) – обыкновенный (необыкновенный) показатели преломления кристалла. Интегралы перекрытия (1.6) достигают максимального значения равного единице, при условии $q_{1m} = q_0$. Это означает, что дифрагированное световое поле при достаточно больших $R_B \sim 1$ мм является единичным БСП с углом конуса, равным углу конуса падающего БСП.

В уравнениях (1.5) учитывается наличие фазовой расстройки $\Delta k_z = k_{dz} - k_{iz} - K$ для продольных компонент волновых векторов БСП:

$$k_{iz} = (k_i^2 - q_0^2)^{1/2}, \quad k_{dz}^m = (k_d^2 - q_{1m}^2)^{1/2}.$$

Решение системы уравнений (1.5)–(1.6) находим с использованием граничных условий: $A_i(z=0) = A^0$, $A_{dm}(z=0) = 0$. Тогда общее решение для дифрагированного поля $A_{dm}(z=l)$ на выходной грани кристалла можно представить в виде:

$$A_{dm} = \frac{-\chi A^0 e^{-i \Delta k_z l / 2} g_{1m}}{\Delta \bar{k}_z} \sin(\Delta \bar{k}_z l), \quad (1.7)$$

где $\chi = \chi_i \approx \chi_d$, $\Delta \bar{k}_z = \left[\frac{(\Delta k_z)^2}{4} + \chi^2 \sum_{m=1}^M g_{im} g_{dm} \right]^{1/2}$.

Величина χ определяется сверткой тензора приращений диэлектрической проницаемости $\Delta \varepsilon_{ij'}$ с единичными векторами эллиптической

поляризации $u_{o,e} = \frac{e_{p,2} + i \tau_{o,e} e_{2,p}}{\sqrt{1 + \tau_{o,e}^2}}$ ($\tau_{o,e}$ – эллип-

тичности дифрагированных волн, обусловленные

линейной анизотропией и гиротропией [14]), то есть $\chi \sim |(\vec{u}_o^* \Delta \varepsilon \vec{u}_e)|$ (знак «*» означает комплексное сопряжение) [5].

Расчеты проводились для анизотропной АО дифракции бесселевых пучков, распространяющихся вблизи оптической оси гиротропного кристалла *Te*. Дифракция осуществляется на медленной сдвиговой УЗ волне, распространяющейся под малым углом α к оси [100] и оси [010]; фазовая скорость УЗ волны, распространяющейся вблизи оси [100] и поляризованной под углом $\theta = -63^\circ$ к оси [001] (в плоскости *XZ*) составляет $v_s = 1,005 \cdot 10^3$ м/с и медленной УЗ волны, распространяющейся вблизи оси [010] – $v_s = 1,5 \cdot 10^3$ м/с [12].

Эффективности АО дифракции при $o \rightarrow e$ ($e \rightarrow o$) преобразовании задаются соотношениями:

$$\eta_{oe(eo)} = \sin^2(\chi_{oe(eo)} l). \quad (1.8)$$

При АО дифракции в плоскости *XZ* кристалла *Te* (1.8) следует полагать:

$$\chi_{oe} = \frac{\pi U \sqrt{(1 + \tau_o \tau_e)^2 \Delta \varepsilon_{12}^2 + (\tau_o \Delta \varepsilon_{22} - \tau_e \Delta \varepsilon_{11})^2}}{2 \lambda_0 \sqrt{n_o n_e} (1 + \tau_o^2)(1 + \tau_e^2)}. \quad (1.9)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Delta \varepsilon_{11} = n_o^4 [p_{11} \cos \theta (1 + \cos \theta \sin \alpha) + p_{12} \sin \theta \sin \alpha],$$

$$\Delta \varepsilon_{12} = n_o^4 [p_{14} \cos \theta (\sin \alpha + \cos^2 \alpha) + \sin \theta (p_{11} - p_{12}) (\cos \alpha - \sin \alpha) / 2],$$

$$\Delta \varepsilon_{22} = n_o^4 [p_{12} \cos \alpha (1 + \cos \theta \sin \alpha) - 2 p_{11} \sin \theta \sin \alpha - p_{14} \cos \theta \sin 2\alpha / 2],$$

причем $U = \left[\frac{2 I_a}{\cos(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha + \varphi_2) \rho v_s^3} \right]^{1/2}$

(I_a – интенсивность УЗ волны, v_s – фазовая скорость УЗ волны, ρ – плотность кристалла; p_{11}, p_{12}, p_{14} – фотоупругие постоянные [12]); $\tau_{o(e)}$ – эллиптичности собственных волн; n_o (n_e) – обыкновенный (необыкновенный) показатель преломления световой волны, λ_0 – длина световой волны в вакууме. В случае $e \rightarrow o$ преобразования БСП в формулах (1.9) следует положить: $\alpha \rightarrow -\alpha$, $o \leftrightarrow e$.

В случае АО дифракции на медленной сдвиговой УЗ волне в плоскости *YZ* в выражениях (1.8), (1.9) следует полагать:

$$\Delta \varepsilon_{11} = 0,$$

$$\Delta \varepsilon_{22} = n_o^4 (p_{12} \cos \alpha),$$

$$\Delta \varepsilon_{12} = n_o^4 [p_{14} \sin \alpha + (p_{11} - p_{12}) \cos \alpha / 2].$$

Тогда на рисунке 1.1 следует положить: $X||[010]$, и выполнить замены: $e_1 \leftrightarrow e_2$.

Эффективность дифракции η для падающего на входную грань кристалла БСП, имеющего эллиптическую поляризацию с эллиптичностью τ и ориентацией большой оси эллипса под углом ψ

к плоскости дифракции находится с помощью выражения:

$$\eta = \frac{1}{1 + \tau^2} \left[(\cos^2 \psi + \tau^2 \sin^2 \psi) \eta_{oe} + (\sin^2 \psi + \tau^2 \cos^2 \psi) \eta_{eo} \right], \quad (1.10)$$

где η_{oe} и η_{eo} даются выражениями (1.8). Следует отметить, что выражение (1.9) для эффективности дифракции идеального БСП совпадает с выражением для эффективности дифракции в приближении падающей плоской волны [5]. Это объясняется тем, что каждая плосковолновая компонента, принадлежащая коническому спектру падающего БСП, рассеивается в соответствующую компоненту дифрагированного БСП с эффективностью, близкой к ста процентам.

2 Результаты численных расчетов

На основе выражений (1.9)–(1.10) проводились численные расчеты для АО дифракции бесселевых эллиптически- и линейно-поляризованных падающих световых пучков с длиной волны $\lambda_0 = 10,6$ мкм, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла *Te*.

На основе формулы (1.10) исследована эффективность дифракции η от азимута поляризации падающего БСП.

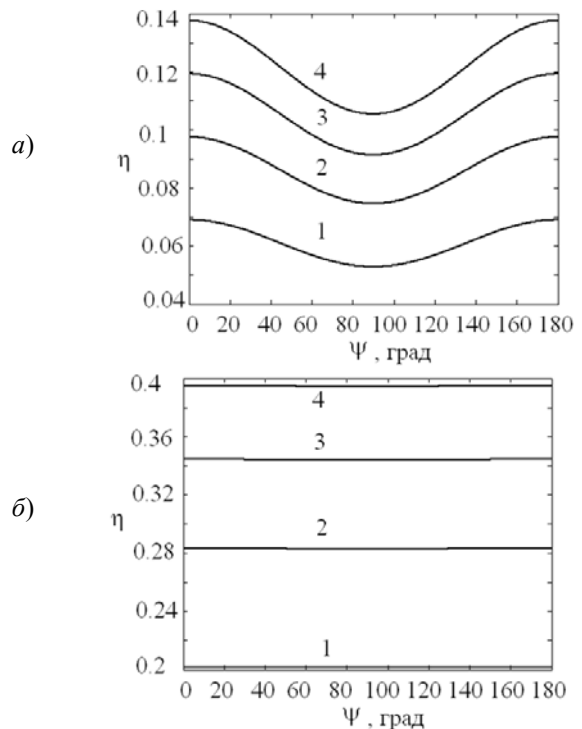


Рисунок 2.1 – Зависимость эффективности дифракции η от азимута поляризации падающего света ψ при различных интенсивностях УЗ волны I_a : 1–2, 2–4, 3–6, 4–8 Вт/см²

($l = 3$ мм, $n_o = 4,8$; $n_e = 6,25$; $\varphi_1 = 1,2^\circ$, $\varphi_2 = 0,1^\circ$, $\gamma = 0,5^0$, $\alpha = 4^0$, $f = 9$ МГц, $p_{11} = 0,164$, $p_{12} = 0,138$, $p_{14} = -0,04$; $\tau_o = 0,9$, $\tau_e = 0,916$; $\rho = 6,25$ кг/см³, $R_B = 1$ мм; $v_s = 1,005 \cdot 10^3$ м/с (а), $v_s = 1,5 \cdot 10^3$ м/с (б); *Te*)

На рисунке 2.1 приведены рассчитанные зависимости эффективности дифракции η от азимута поляризации ψ падающего линейно-поляризованного бесселева пучка при различных интенсивностях ультразвука I_a в кристалле *Te*. Из рисунка 2.1 а) следует, что при любых интенсивностях ультразвука и XZ-среза кристалла *Te* имеет место слабая зависимость эффективности дифракции БСП от поляризации падающего света. При этом наиболее слабая поляризационная зависимость достигается при минимальной интенсивности ультразвука. Для YZ-среза кристалла *Te*, как следует из рисунка 2.1 б), эффективность дифракции не зависит от азимута поляризации падающего света, то есть осуществляется поляризационно-независимая модуляция БСП. При этом эффективность АО дифракции значительно выше и составляет $\sim 39\%$ при длине АО взаимодействия $l = 3$ мм и интенсивности УЗ волны $I_a = 8$ Вт/см².

Заключение

Полученные результаты показывают, что в гиротропных кристаллах теллура при дифракции бесселевых световых пучков ИК диапазона оптического спектра осуществляется поляризационно-независимая модуляция света. Оптимальные условия поляризационно-независимой модуляции для YZ-среза кристалла реализуются при соответствующем выборе длины АО взаимодействия и интенсивности ультразвука. На этой основе возможно создание нового типа АО модуляторов для квазибездифракционных пучков бесселева типа, отличительной особенностью которых является независимость эффективности дифракции от состояния поляризации падающего БСП. Такие поляризационно-независимые модуляторы перспективны для применений в лазерных технологиях (в частности для лазерной резки и сварки), для зондирования поглощающих и рассеивающих сред на большую глубину, лазерной локации, микроскопии высокого разрешения и других областях, а также для решения проблем лазерной диагностики и контроля в промышленности, микро- и нанотехнологиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams / J. Durnin // J. Opt. Soc. Am. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.
2. Durnin, J. Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberli // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58, № 15. – P. 1499–1501.
3. Turunen, J. Realization of general nondiffracting beams with compute generated holograms / J. Turunen, A. Vasara, A.T. Friberg // J. Opt. Soc. Am. – 1989. – Vol. A6, № 11. – P. 1748–1754.
4. Herman, R.M. Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam / R.M. Herman, T.A. Wiggins // J. Opt. Soc. Am. – 1991. – Vol. 8, № 6. – P. 932–942.
5. Балакиши, В.Н. Физические основы акустооптики / В.Н. Балакиши, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М. : Радио и связь, 1985. – 279 с.
6. Кулак, Г.В. Акустооптическое взаимодействие световых пучков в условиях внутренней конической рефракции / Г.В. Кулак // Опт. и спектр. – 2001. – Т. 90, №3. – С. 405–407.
7. Белый, В.Н. Поляризационно-независимая модуляция света при акустооптической дифракции в одноосных гиротропных кристаллах / В.Н. Белый, Г.В. Кулак // Опт. и спектр. – 1993. – Т. 75, В.1. – С. 105–109.
8. Кулак, Г.В. Поляризационно-независимая модуляция света в парателлурите / Г.В. Кулак, П.И. Ропот, Г.А. Пашкевич // Докл. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1991. – Т. 35, № 5. – С. 803–808.
9. Белый, В.Н. Поляризационно-независимая акустооптическая модуляция бесселевых световых пучков / В.Н. Белый, Г.В. Кулак, Г.В. Крох, О.В. Шакин // Журн. прикл. спектр. – 2014. – Т. 81, № 1. – С. 83–88.
10. Adler, E.L. Acousto-optic light deflection for CO₂ laser in optically active tellurium / E.L. Adler, A.A. Gundjian, D. Souilhac, C.H. Champness // IEEE Ultrasonics: Proc. Of Intern. Symp. New York, Oct. 1982. – P. 430–435.
11. Дьяконов, А.М. Исследование акустооптического взаимодействия ИК излучения со звуком в теллуре / А.М. Дьяконов, Ю.В. Илизавский, Э.Э. Яхкинд // ЖТФ. – 1981. – Т. 51, № 7. – С. 1494–1502.
12. Балакиши, В.И. Исследование акустооптических характеристик теллура в режиме анизотропной дифракции света / В.И. Балакиши, В.Б. Волошинов, Г.А. Князев, Л.А. Кулакова // ЖТФ. – 2008. – Т. 78, № 10. – С. 87–95.
13. Белый, В.Н. Генерация второй гармоники бесселевыми световыми пучками в кристаллах КТР / В.Н. Белый, Н.С. Казак, Н.В. Кондратюк, Н.А. Хило, А.А. Шагов // Квант. электрон. – 1998. – Т. 25, №11. – С. 1037–1042.
14. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М. : Мир, 1987. – 616 с.
15. Белый, В.Н. Преобразование частоты бесселевых световых пучков нелинейными кристаллами / В.Н. Белый, Н.С. Казак, Н.А. Хило // Квант. электрон. – 2000. – Т. 30, №9. – С. 753–766.

Поступила в редакцию 12.07.14.

УДК 535.16:534.341

ТЕРМООПТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА БЕССЕЛЕВЫМИ СВЕТОВЫМИ ПУЧКАМИ В ГИРОТРОПНЫХ НИЗКОРАЗМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ

Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, В.В. Свиридова, А.Н. Сердюков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

THERMOOPTICAL SOUND GENERATION BY BESSEL LIGHT BEAMS IN GYROTROPIC LOW-DIMENSIONAL STRUCTURES

G.S. Mityurich, E.V. Chernenok, V.V. Sviridova, A.N. Serdyukov

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Исследована термооптическая генерация звука бesselевыми световыми пучками (БСП) в естественно-гиротропных двухслойных сверхрешетках для случая регистрации результирующего сигнала методом газо-микрофонной ячейки. Установлено, что скорость диссипации энергии ТЕ-моды БСП существенно зависит от радиальной координаты ρ , диссипативных параметров сверхрешетки ε_1'' , ε_2'' , относительной толщины образца $x = d_1/D$, а также угла конусности БСП α . Показано, что изменение амплитуды фотоакустического сигнала в гиротропных сверхрешетках достигается путем формирования ТЕ- и ТН-мод БСП за счет использования аксиконов с регулируемым углом конусности.

Ключевые слова: фотоакустический эффект, гиротропная сверхрешетка, бesselевы световые пучки, скорость диссипации энергии, амплитуда фотоакустического сигнала, функция Бесселя, уравнение теплопроводности.

Thermo-optical sound generation by Bessel light beam (BLB) in the naturally-gyrotropic two-layer superlattices for the case of registration of the resulting signal by gas-microphone cell method is investigated. It was found that the rate of energy dissipation of the TE-mode BLB essentially depends on the radial coordinate ρ , dissipative parameters of the superlattice ε_1'' , ε_2'' , the relative thickness of the sample $x = d_1/D$, as well as BLB taper angle α . It is shown that the change in the amplitude of the photoacoustic signal in gyrotropic superlattices is achieved through the formation TE- and TH-modes BLB by using axicon with an adjustable cone angle.

Keywords: photoacoustic effect, gyrotropic superlattice, Bessel light beam, energy dissipation rate, amplitude of the photoacoustic signal, Bessel function, heat equation.

Введение

Создание новых материалов в области наноэлектроники является одной из актуальных задач в физике низкоразмерных структур [1]–[3]. Важным достоинством наноструктур является возможность изменением геометрических размеров и конфигурации нанообъектов влиять на свойства создаваемых наноматериалов. В этой связи изучение структуры слоистых и пространственно-периодических низкоразмерных сред, таких, например, как сверхрешетки, привлекает внимание многих исследователей [4]–[8]. Существующие и вновь создаваемые искусственные материалы и структуры могут обладать необычными физическими свойствами, что связано с проявлением, например, резонансных квантовых явлений, интерференцией электронных состояний в сверхтонких полупроводниковых гетероструктурах и т. д. К тому же, в естественно-гиротропных и магнитоактивных сверхрешетках существует возможность управления их свойствами при воздействии внешних электрических и магнитных полей [9]–[11]. Поэтому ясное понимание закономерностей физических процессов формирования низкоразмерных структур требует разработки методов неразрушающей диагностики

таких сред. К одним из достаточно эффективных методов относится метод лазерной фотоакустической спектроскопии [12], [13], основанный на явлении термооптического возбуждения звука в исследуемом образце.

1 Скорость диссипации энергии бesselевых световых пучков

Рассмотрим фотоакустическое преобразование бesselевых световых пучков (БСП) в поглощающих сверхрешетках, обладающих эффектами пространственной дисперсии (гиротропия, дихроизм) [14]. Использование в качестве возбуждающего звук излучения различных поляризованных мод квазибездифракционных световых пучков обусловлено наличием у них уникальных свойств [15]–[18]. Таких, например, как бездифракционность пучка при его распространении в пространстве. Дифракция в действительности имеет место, но распределенный по длине фокального отрезка боковой подвод энергии излучения компенсирует расходимость [17].

Пусть ТЕ-мода БСП, амплитудно-модулированная на частоте Ω , нормально падает к границе слоев, образующих естественно гиротропную сверхрешетку, помещенную в фотоакустическую

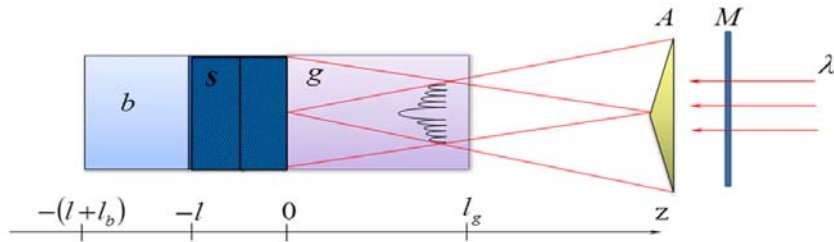


Рисунок 1.1 – Схема газо-микрофонной регистрации фотоакустического сигнала: M – модулятор, A – аксикон, s – исследуемая гиротропная двухслойная сверхрешетка, g – газ, b – подложка

ячейку (рисунок 1.1). Предполагается, что для сверхрешетки выполняется длинноволновое приближение $D = d_1 + d_2 \ll \lambda$, где D – период сверхрешетки, d_1, d_2 – толщины слоев, λ – длина волны.

Сверхрешетка, состоящая из слоев поглощающих гиротропных кубических кристаллов, характеризуется одноосными комплексными тензорами диэлектрической проницаемости ε_e и оптической активности γ_e [9], [10]

$$\begin{aligned} (\varepsilon_e)_{11} &= (\varepsilon_e)_{22} = x\varepsilon_1 + (1-x)\varepsilon_2, \\ (\gamma_e)_{11} &= (\gamma_e)_{22} = x\gamma_1 + (1-x)\gamma_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x = d_1/D$, $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon'_{1,2} + i\varepsilon''_{1,2}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость, $\gamma_{1,2} = \gamma'_{1,2} + i\gamma''_{1,2}$ – комплексный параметр оптической активности, где реальная часть γ $\text{Re}\gamma = \gamma'$ отвечает за удельное вращение плоскости поляризации, а мнимая $\text{Im}\gamma = \gamma''$ связана с циркулярным дихроизмом.

Основываясь на материальных уравнениях для гиротропной среды [14]

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + i\gamma \vec{H}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} - i\gamma \vec{E}, \quad \mu = 1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

а также на уравнениях Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= [\nabla \vec{E}] = ik_0 \vec{B}, \\ \text{rot } \vec{B} &= [\nabla \vec{B}] = ik_0 \vec{D}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

получим в цилиндрической системе координат выражение для скорости диссипации энергии ТЕ-моды БСП, аналогично [18]

$$\begin{aligned} Q^{TE} &= \frac{\omega I_0 |\varepsilon_1 x + (1-x)\varepsilon_2| (\varepsilon_1'' x + (1-x)\varepsilon_2'')}{2\pi} \times \\ &\times \left[\left(\frac{m}{q\rho} \right)^2 J_m^2(q\rho) + J_m'^2(q\rho) + \right. \\ &+ \frac{2mk'_z (\gamma_1'' x + (1-x)\gamma_2'')}{\rho k_0^2 (\varepsilon_1 x + (1-x)\varepsilon_2)^{3/2} \sin^3 \alpha} \times \\ &\left. \times J_m(q\rho) J_m'(q\rho) \right] \cdot e^{-2k'_z z}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} k_z &= k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \cos \alpha, \quad k_0 = \omega / c, \\ \langle \varepsilon \rangle &= \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 (1-x), \\ q &= k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \sin \alpha, \\ k'_0 &= k_0 \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha, \end{aligned}$$

α – параметр конусности БСП, равный половине угла при вершине конуса волновых векторов, определяющий спектр пространственных частот пучка, I_0 – интенсивность света, $J_m(q\rho)$ – функции Бесселя первого рода m -го порядка, $J'_m(q\rho) = \frac{\partial}{\partial \rho} J_m(q\rho)$ – производная по радиальной координате от функции Бесселя.

Выражение для скорости диссипации ТН-моды БСП получается аналогично, но ввиду громоздкости, не приводится.

Анализ соотношения (1.4) показывает, что скорость диссипации энергии ТЕ-моды БСП сильно осциллирует в зависимости от значения радиальной координаты (рисунок 1.2), а максимумы осцилляций нулевой и первой моды находятся в противофазе.

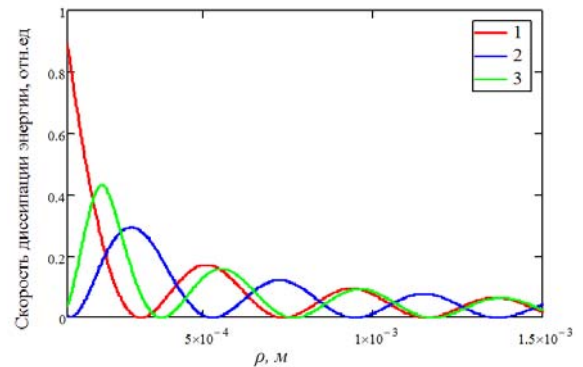


Рисунок 1.2 – Зависимость скорости диссипации энергии Q^{TE} ТЕ-моды БСП от радиальной координаты для разных мод ($1 - m = 0, 2 - m = 1, 3 - m = 2$)

На графике зависимость диссипации энергии Q^{TE} от угла конусности БСП (рисунок 1.3)

осцилляции синхронны и с увеличением мнимой части диэлектрической проницаемости ε_1'' первого слоя сверхрешетки амплитуда осцилляций возрастает.

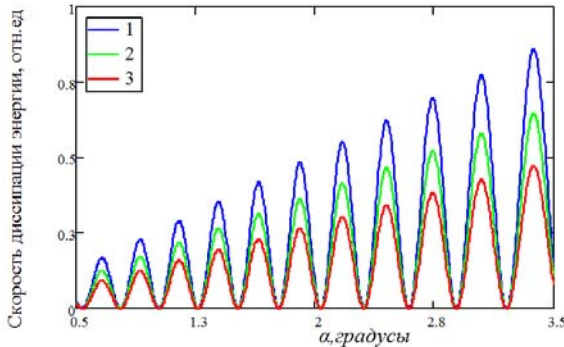


Рисунок 1.3 – Зависимость скорости диссипации энергии ТЕ-моды БСП от угла конусности ($1 - \varepsilon_1'' = 1 \cdot 10^{-2}$, $2 - \varepsilon_1'' = 0,5 \cdot 10^{-2}$, $3 - \varepsilon_1'' = 1 \cdot 10^{-3}$)

Существенное влияние угла конусности на величину скорости диссипации энергии дает практическую возможность влиять на распределение тепловых полей в исследуемом образце. Как будет показано ниже, формирование фотоакустического сигнала определяется соотношением длин термической диффузии $\mu_s = a_s^{-1}$ ($a_s^{-1} = \sqrt{\Omega / 2\beta_s}$ – коэффициент термодиффузии, β_s – коэффициент температуропроводности), оптического поглощения μ_a и периода сверхрешетки $D = d_1 + d_2$. При этом важным является распределение температурного поля на границе гиротропная сверхрешетка-детекторный газ в фотоакустической ячейке.

Оптические схемы с перестраиваемым углом конусности БСП и изменением их пространственной структуры были предложены ранее в работах [19]–[23]. Сегодняшние направления исследований связаны с созданием быстродействующих перестраиваемых устройств, реализующих зависимость пространственного распределения интенсивности светового поля от угла конусности бесселевых пучков [24], [25].

Как следует из рисунка 1.4, функциональная зависимость $Q^{TE} = f(\varepsilon_1'')$ является прямо пропорциональной, причем угол наклона прямой к оси абсцисс определяется параметром $x = d_1/D$, задающим соотношение толщин компонент сверхрешетки. Точка пересечения кривых для разных x определяет то значение мнимой части для электрической проницаемости, отвечающей за поглощение в первом слое образца, при котором диссипация энергии ТЕ-моды для трех различных образцов совпадает. Данное обстоятельство необходимо иметь в виду при разработке методов контроля над геометрическими параметрами сверхрешетки в процессе ее изготовления.

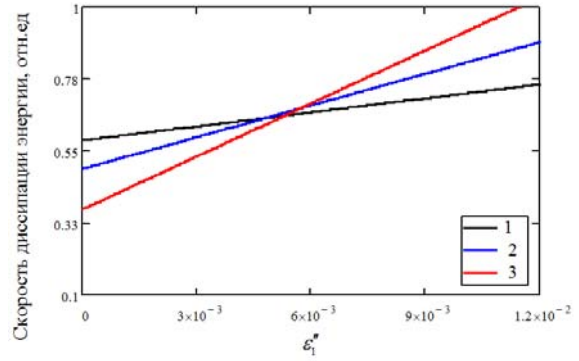


Рисунок 1.4 – Зависимость скорости диссипации энергии Q^{TE} ТЕ-моды БСП от ε_1''

2 Амплитуда фотоакустического сигнала

Расчет амплитуды фотоакустического сигнала выполним для случая регистрации отклика газомикрофонным методом (рисунок 1.1). Решения системы уравнений теплопроводности с учетом выражения для скорости диссипации энергии (1.4) будет иметь следующий вид

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\beta_j} \frac{\partial T}{\partial t} = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq l_g; \\ -\frac{Q^{TE}}{2k_s} (1 + e^{i\Omega t}), & -l \leq z \leq 0; \\ 0, & -l - l_b \leq z \leq -l; \end{cases}$$

$$\Theta^{TE} = \frac{(L - G)(b - 1)e^{\sigma_s l} - (L + G)(b + 1)e^{-\sigma_s l} + 2H}{(b + 1)(g + 1)e^{\sigma_s l} - (b - 1)(g - 1)e^{-\sigma_s l}},$$

где Θ^{TE} – комплексная температура на границе гиротропная сверхрешетка-детекторный газ,

$$L \pm G = h_0 (r_0 \pm 1),$$

$$r_0 = (1 - i)\alpha_0 / 2\alpha_s,$$

$$H = 2h_0 (b - r_0) e^{-\alpha_0 l},$$

$$h_0 = \frac{A}{\alpha_0^2 - \sigma_s^2},$$

$$\sigma_s = (1 + i)\alpha_s,$$

$$\alpha_s = \sqrt{\Omega / 2\beta_s},$$

$$\alpha_0 = 2[x\varepsilon_1'' + (1 - x)\varepsilon_2''],$$

$$A_0 = \frac{\omega I_0}{2\pi} |\langle \varepsilon \rangle| \text{Im} \langle \varepsilon \rangle \times$$

$$\times \left[\left(\frac{m}{\rho k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \sin \alpha} \right)^2 J_m^2(q\rho) + J_m'^2(q\rho) + \frac{2mk_z' \text{Im} \langle \gamma \rangle}{\rho k_0^2 \langle \varepsilon \rangle^{3/2} \sin^3 \alpha} J_m(q\rho) J_m'(q\rho) \right],$$

$$\langle \gamma \rangle = \gamma_1 x + (1 - x)\gamma_2,$$

остальные обозначения стандартные и соответствуют принятым в работе [13].

Анализ зависимости амплитуды фотоакустического сигнала как функции радиальной координаты ρ (рисунок 2.1) для разных относительных толщин сверхрешеток x показывает, что величина сигнала синфазно осциллирует, спадая по экспоненте с возрастанием ρ . Соотношения толщин компонент исследуемых образцов сказываются только на глубине модуляции сигнала, определяемой значениями функций Бесселя.

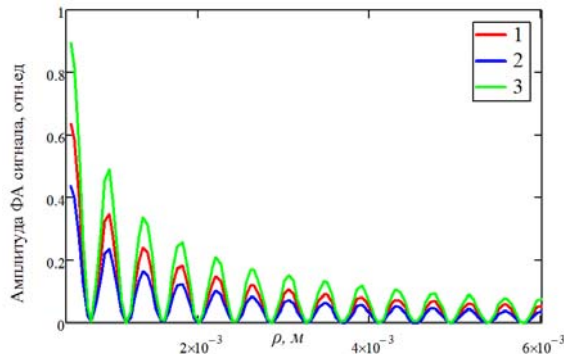


Рисунок 2.1 – Зависимость ФА сигнала от радиальной координаты для разных относительных толщин x ($1 - x = 0,2$, $2 - x = 0,4$, $3 - x = 0,6$)

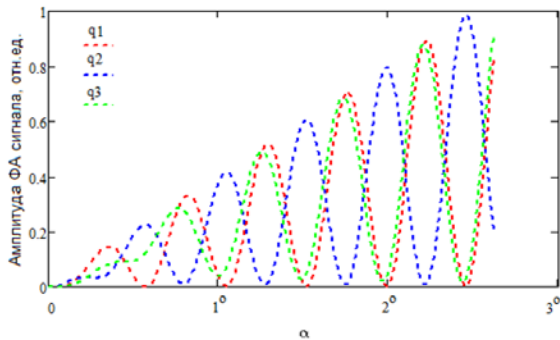


Рисунок 2.2 – Зависимость амплитуды ФА сигнала от угла конусности БСП для разных мод: $m_1 = 0$; $m_2 = 1$; $m_3 = 2$

Изменение угла конусности α для различных поляризационных мод БСП оказывают значительное влияние на значение амплитудного сигнала, как следует из рисунка 2.2. Для малых углов конусности, примерно, до $0,5^\circ$, наблюдается смещение максимумов осцилляций ФА сигнала для различных мод БСП, что связано с процессом термической инерционности фотоакустического преобразования типа свет-тепло-звук. В дальнейшем с увеличением угла конусности амплитуда ФА сигнала возрастает, при этом осцилляции для нулевой и более высоких мод происходят в противофазе.

Изменение амплитуды фотоакустического сигнала в зависимости от мнимой части $\varepsilon_1'' = \text{Im} \varepsilon_1$, при различных x , имеет нелинейный характер (рисунок 2.3) в отличие от диссипационной зависимости $Q^{TE} = f(\varepsilon_1'')$.

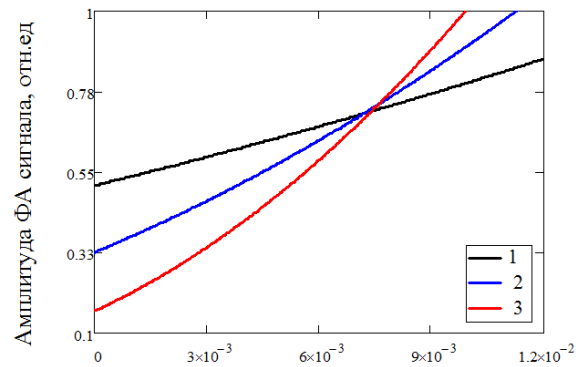


Рисунок 2.3 – Зависимость амплитуды фотоакустического сигнала от ε_1''

Точка пересечения графиков для разных x соответствует тому значению ε_1'' , для которого величина результирующего фотоакустического сигнала q является постоянной. Таким образом, экспериментальное измерение амплитуды фотоакустического сигнала для различных образцов позволяет определить на основании функциональной зависимости $q = f(\varepsilon_1'')$ параметр мнимой части диэлектрической проницаемости ε_1'' , отвечающий за поглощающую способность сверхрешетки. Влияние дихроичных параметров сверхрешетки γ_1'' и γ_2'' на процесс фотоакустического преобразования существенно ниже ε'' , что объясняется малостью величины $\gamma'' \approx 10^{-5} - 10^{-6}$. Тем не менее, метод лазерной фотоакустической спектроскопии позволяет экспериментально определить циркулярный дихроизм оптически активных комплексных соединений и кристаллов (см., например, [26]–[27]).

Заключение

В работе исследовано фотоакустическое преобразование в низкоразмерных структурах, таких как естественно-гиротропные сверхрешетки для случая регистрации результирующего сигнала методом газомикрофонной ячейки

На основе проведенного анализа выявлена возможность управления термооптической генерацией звука, возбуждаемого световыми пучками с бесселевым профилем распределения интенсивности. Управление амплитудой фотоакустического сигнала и распределением интенсивности термоупругих полей в гиротропных сверхрешетках достигается путем формирования требуемых поляризационных ТЕ- и ТН-мод квазибездифракционного излучения, за счет использования аксиконов с регулируемым углом конусности или реализации оптических схем с перестраиваемой конусностью бесселевых световых пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев, А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии / А.И. Гусев. – М. : Физматлит, 2005. – 416 с.
 2. Шик, А.Я. Физика низкоразмерных систем / А.Я. Шик, Л.Г. Бакуева, С.Ф. Мусихин, С.А. Рыков. – СПб. : Наука, 2001. – 160 с.
 3. Демиховский, В.Я. Физика квантовых низкоразмерных структур / В.Я. Демиховский. – М. : Логос, 2000 – 248 с.
 4. Широков, В.Б. Оптические свойства сверхрешетки $\text{Ba}_{0,8}\text{Sr}_{0,2}\text{TiO}_3/(\text{Bi}_{0,92}, \text{Nd}_{0,02})\text{FeO}_3$ / В.Б. Широков, Ю.И. Головкин, В.М. Мухортов, Ю.В. Ревинский // ЖТФ. – 2014. – Т. 84, вып. 4. – С. 104–108.
 5. Елисеева, С.В. Дефектные моды и магнитооптическая активность одномерного фотонного кристалла / С.В. Елисеева, Д.И. Семенов // ЖЭТФ. – 2011. – Т. 139, № 2. – С.235–240.
 6. Макаров, Д.Г. Многослойные структуры с управляемыми магнитным полем оптическими характеристиками / Д.Г. Макаров, В.В. Данилов, В.Ф. Коваленко // Опт. и спектр. – 2004. – Т. 97, № 4. – С. 624–628.
 7. Малышев, К.В. Терагерцовый лазер на квазипериодических AlGaAs-сверхрешетках / К.В. Малышев // Квант. электр. – 2013. – Т. 43, № 6. – С. 503–508.
 8. Пентин, И.В. Полупроводниковая сверхрешетка – твердотельный терагерцовый гетеродинамический источник для электронно-разогреваемого NbN-смесителя / И.В. Пентин, А.В. Смирнов, С.А. Рябчун, Р.В. Ожегов, Г.Н. Гольцман, В.Л. Вакс, С.И. Приползин, Д.Г. Павельев, Ю.И. Кошуринов, А.С. Иванов // ЖТФ. – 2012. – Т. 82, вып. 7. – С. 75–78.
 9. Семченко, И.В. Гиротропные свойства сверхрешеток в длинноволновом приближении / И.В. Семченко // Кристаллография. – 1990. – Т. 35, № 5. – С. 1047–1050.
 10. Гайшун, В.Е. Гиротропные свойства сверхрешеток с магнитной структурой в длинноволновом приближении / В.Е. Гайшун, И.В. Семченко, А.Н. Сердюков // Кристаллография. – 1993. – Т. 38, № 3. – С. 24–27.
 11. Румянцев, В.В. Оптическая активность неидеальных 1D-сверхрешеток с вакансиями в примесных слоях / В.В. Румянцев, С.А. Федоров, М.В. Проскурено // ЖТФ. – 2014. – Т. 84, вып. 10. – С. 79–82.
 12. Rosenwaig, A. Photoacoustic and photoacoustics spectroscopy / A. Rosenwaig. – N.-Y. – 1980. – 309 p.
 13. Mityurich, G.S. Modern photoacoustic spectroscopy problems. Theory and experiment. / G.S. Mityurich, J. Motylewski, J. Rahachowski // IFPT Polish Academy of Science, Warszawa. – 1993. – № 41. – 164 p.
 14. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров // Минск : Наука и техника. – 1976. – 456 с.
 15. Durnin, J. Exact solution for nondiffraction beams / J. Durnin // JOSA. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.
 16. Белый, В.Н. Преобразования частоты бесселевых световых пучков нелинейными кристаллами / В.Н. Белый, Н.С. Казак, Н.А. Хило // Квант. электр. – 2000. – Т. 30, № 9. – С. 753–766.
 17. Пятницкий, Л.Н. Волновые бесселевы пучки / Л.Н. Пятницкий // М. : Физматлит. – 2012. – 407 с.
 18. Митюрин, Г.С. Термооптическое возбуждение звука бесселевыми световыми пучками в кристаллических средах с внутренними напряжениями / Г.С. Митюрин, А.Н. Сердюков // Кристаллография. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 392–397.
 19. Vaicaitis, V. Formation of Bessel beams with continuously variable cone angle / V. Vaicaitis, S. Paulikas // Optical and Quantum Electronics. – 2003. – Vol. 35. – P. 1065–1071.
 20. Klewitz, S. Bessel-beam-pumped tunable distributed feedback laser / S. Klewitz, F. Brinkmann, S. Herminghaus, P. Leiderer // Appl. Opt. – 1995. – Vol. 34. – P. 7670–7673.
 21. Borghi, R. Axial intensity of aperture Bessel beams / R. Borghi, M. Santarsiero // J. Opt. Soc. Am. A. – 1997. – Vol. 14, № 1. – P. 23–26.
 22. Dubietis, A. Axial emission and spectral broadening in self-focusing of femtosecond Bessel beams / A. Dubietis, P. Polesana, G. Valiulis, A. Stabinis, P. Di Trapani, A. Piskarskas // Opt. Expr. – 2007. – Vol. 15, № 7. – P. 4168–4175.
 23. Akturk, S. Generation of high quality tunable Bessel beams using a liquid-immersion axicon // Opt. Comm. – 2009. – Vol. 282, № 16. – P. 3206–3209.
 24. Kazak, N.S. A controlled conical lens for the formation of Bessel light beams / N.S. Kazak, M. Krening, A.G. Mashchenko, P.I. Ropot // Opt. Spectr. – 2007. – Vol. 103, № 5. – P. 826–830.
 25. Солоневич, С.В. Перестраиваемые кольцевые световые поля и их возможности для лазерной обработки материалов / С.В. Солоневич, А.А. Рыжович, Н.С. Казак, М.К. Аль-Муханна, С.Х. Аль-Ховайтер, Т.С.М. Аль-Сауд // Материалы 9-ой международной конфер. «Взаимодействие излучения с твердым телом», 20–22 сентября, Минск. – 2011. – С. 451–452.
 26. Fournier, D. Dichroism measurements in photoacoustic spectroscopy / D. Fournier, A.C. Vocara, J. Badoz // Appl. Phys. Lett. – 1978. – Vol. 32, № 10. – P. 640–642.
 27. Tran, C.D. Ultrasensitive thermal lens-circular dichroism spectropolarimeter for small volume sample / C.D. Tran, M. Xu // Rev. Sci. Instrum. – 1989. – Vol. 60, № 10. – P. 3207–3211.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Грант №Ф14–047).
- Поступила в редакцию 06.09.14.

УДК 539.4

ДЕФОРМАЦИОННОЕ ДВОЙНИКОВАНИЕ ФЕРРОМАГНИТНОГО МОНОКРИСТАЛЛА Ni_2MnGa С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

О.М. Остриков, Е.В. Шматок

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь

DEFORMATION TWINNING OF THE FERROMAGNETIC SINGLE CRYSTAL OF Ni_2MnGa WITH THE SHAPE MEMORY EFFECT

O.M. Ostrikov, E.V. Shmatok

P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel, Belarus

Изучены особенности формы линзовидных двойников, двойниковых прослоек, а также вторичных клиновидных двойников в монокристалле Ni_2MnGa . Проанализированы механизмы взаимодействия друг с другом двойников различных систем двойникования. Установлено, что на границах и у вершин двойников образуются клиновидные двойники второго порядка. Рассмотрены особенности взаимодействия двойников с различными дефектами кристаллической решетки.

Ключевые слова: двойникование, память формы, магнитные сплавы.

The features of the shape of lenticular twins, twin interlayers, as well as secondary wedge-shaped twins in a single crystal Ni_2MnGa are studied. The mechanisms of exposure to each other twins with different twinning systems are analyzed. It has been established that at the boundaries and vertices of twins the wedge-shaped counterparts of the second order are formed.

Keywords: twinning, shape memory, magnetic alloys.

Введение

Локализованное напряженно-деформированное состояние монокристалла Ni_2MnGa обусловленное макро- и микродефектами структуры различной природы часто приводит к разрушению [1], [2]. Первостепенной, требующей решения задачей при практическом использовании того или иного материала является прогнозирование его служебной долговечности. Разрушение металлов – процесс многостадийный [1], на начальных этапах которого, напряжения от внешней нагрузки компенсируется двойникующимся материалом посредством упругого или остаточного двойникования. В результате множественного взаимодействия двойников друг с другом, а также с иными дефектами, происходит локальная компенсация либо рост внутренних напряжений, посредством которых тормозятся или открываются каналы зарождения трещин [1]. Поэтому исследование процессов механического двойникования деформируемых твердых тел является важной научной и практической задачей [3]–[6].

Перспективность технического применения материала Ni_2MnGa определяется его уникальными физико-механическими свойствами и соответствием требованиям к его усталостно-прочностным характеристикам [7], [8]. В связи с этим исследование особенностей двойникования и разрушения ферромагнитного сплава Ni_2MnGa с эффектом запоминания формы в настоящее время является актуальным.

Целью данной работы стал анализ особенностей уникального двойникового рельефа на

поверхности монокристалла Ni_2MnGa с эффектом памяти формы и механизмов взаимодействия двойников с различными структурными неоднородностями.

1 Методика эксперимента

Монокристаллы ферромагнитного сплава Ni_2MnGa были получены методом Бриджмена. Призматическая форма образцов размером $20 \times 2 \times 2$ мм формировалась при помощи технологии электроискрового резания вдоль заданных кристаллографических плоскостей. Полученные грани призмы обрабатывались полированием [7]. Велась оптическая микроскопия поверхности $\{100\}$ образца деформированного одноосными знакопеременными нагрузками величиной до 2 МПа.

2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 2.1 представлены две двойниковые прослойки с участками когерентных и некогерентных границ. В теле двойника 2 (рисунок 2.1, а) имеются несдвойникованные области, показанные стрелками 1 и 2, которые образовались в процессе огибания двойникующими дислокациями препятствия (область 3 на рисунке 2.1, а). Структурная неоднородность в отмеченной на рисунке 2.1, а области 3 является концентратором больших внутренних напряжений, о чем свидетельствует компенсирующее их появление двойников (стрелки 4 на рисунке 2.1, а). Двойники 5 (рисунок 2.1, а) являются тонкими и остаточными, отличающиеся от тонких упругих двойников [9] тем, что не исчезают после снятия нагрузки.

Картина на рисунке 2.1, б) является продолжением рисунка 2.1, а) и отражает некогерентную область двойниковой прослойки, приобретающей клиновидную форму. В данной области границы двойников некогерентны в связи с чем создают большие внутренние напряжения, которые компенсируются группой тонких параллельных двойников (области 6 и 7 на рисунке 2.1, б). Как показано в [1], наибольшие напряжения сосредоточены у вершины двойника, где у двойника 2 на рисунке 2.1, б) наблюдается группа вторичных двойников. Данные напряжения в совокупности с напряжениями от внешней нагрузки привели к образованию клиновидных двойников, отмеченных на рисунке 2.1, б) стрелкой 8.

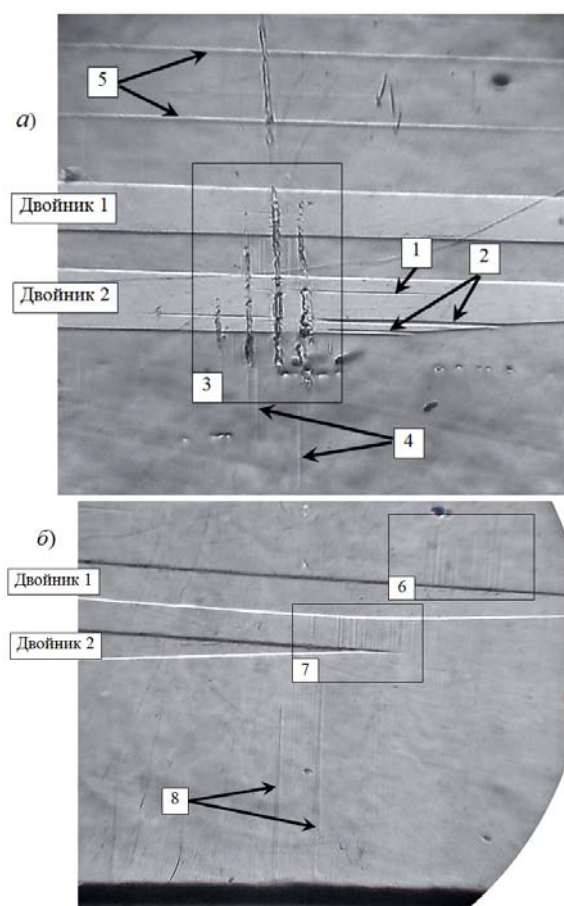


Рисунок 2.1 – Двойниковые прослойки в деформированном монокристалле Ni_2MnGa : а) области двойниковых прослоек с когерентными и слабокогерентными участками границ; б) клиновидные области двойников с некогерентными границами; стрелки 1 и 2 – несдвоенные области внутри двойниковой прослойки; область 3 – микроструктурные дефекты; 4 – тонкие линзовидные двойники; 5 – тонкие двойниковые прослойки; 6 – тонкие двойники, перпендикулярные когерентной границе двойниковой прослойки; 7 – группа параллельных тонких двойников у клиновидной вершины нетонкого двойника; 8 – клиновидные двойники у поверхности образца ($\times 150$)

На рисунке 2.2 представлен некогерентный участок двойниковой прослойки 1 с углом раствора α . На верхней границе прослойки 1 видна группа вторичных параллельных двойников (область 2). В данной группе наиболее широкий двойник 3 образовался в месте сближения границ двойника 1 в области формирования тонкой части двойника. На тонком участке прослойки 1 видно, что плотность вторичных двойников к вершине двойника уменьшается с уменьшением их длины. Это указывает на то, что тонкий участок у вершины двойника приводит к релаксации внутренних напряжений от некогерентных границ двойника 1.

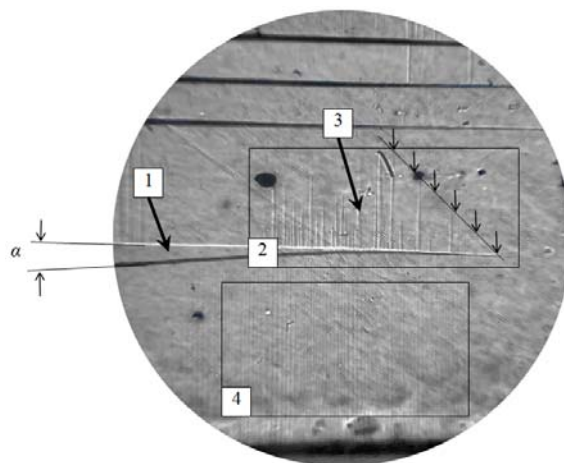


Рисунок 2.2 – Клиновидный участок двойниковой прослойки: 1 – двойник; 2 – группа параллельных двойников; 3 – двойник, имеющий в группе наибольшую ширину; 4 – система полос скольжения, соединяющих двойник 1 и поверхность ($\times 150$)

Нижняя граница данной прослойки 1 на рисунке 2.2 имеет вогнутую форму [2]. Под этой границей видны параллельные полосы скольжения (область 4 на рисунке 2.2), исходящие от поверхности кристалла. Плотность полос скольжения максимальна у искривленного участка границы двойниковой прослойки и уменьшается при продвижении к вершине прослойки 1. Это указывает на то, что напряжения от искривленной некогерентной границы двойника 1 убывают по мере следования к его вершине.

В результате движения границы раздела фаз аустенит-мартенсит посредством одноосного сжатия монокристалла Ni_2MnGa в плоскости типа $\{010\}$ образовалась аустенитная прослойка 1 (рисунок 2.3), заключенная в мартенситной фазе. Границы прослойки в некоторых областях имеют слабовыраженные неровности, имеющие правильную зубчатую форму, что указывает на существовавшие ранее в этих областях двойниковые прослойки, расположенные в плоскостях, перпендикулярных границе раздела аустенит-мартенсит.

На исследуемой поверхности (001) также имеются следы взаимодействия существовавших ранее двойников двух типов (стрелки 2 на рисунке 2.3), плоскости двойникования разориентированных друг по отношению к другу на малый угол порядка 6° [7]. Взаимодействие таких двойников часто приводит к образованию каналов Розе и трещин [7].

Препятствие 3 на рисунке 2.3 не огибается прослойкой и не формирует несдвоенные области, как в случаях инородных включений [10], следовательно, можно предположить, что это сопряженные с выкрашиванием пластические зоны.

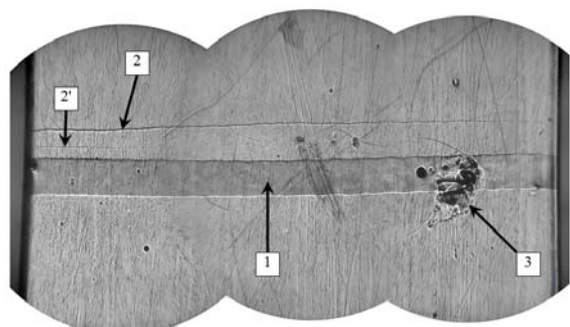


Рисунок 2.3 – Аустенитная прослойка (отмечена стрелкой 1) в мартенситной фазе монокристалла Ni_2MnGa ; 2 – следы взаимодействия существовавших ранее двойников двух типов; 3 – область неоднородности структуры монокристалла ($\times 150$)

На рисунке 2.4 показана аустенитная прослойка 1 с неровными границами и видимыми в мартенситной фазе 2 перпендикулярными границам прослойки 1 двойниками 3. Следует отметить, что двойники 3 на рисунке 2.4 наблюдаются только в мартенситной фазе.

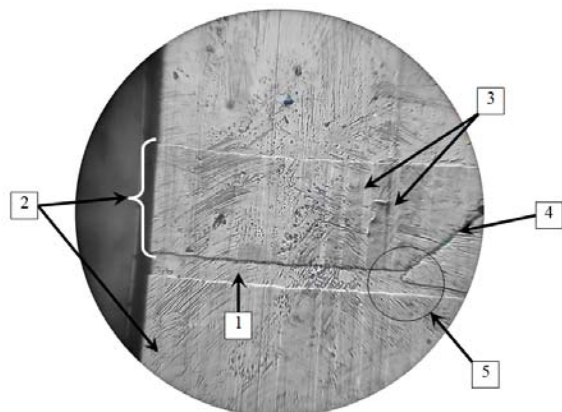


Рисунок 2.4 – Двойникование мартенситной фазы монокристалла Ni_2MnGa : 1 – аустенитная прослойка; 2 – мартенситная фаза; 3 – двойники в мартенситной фазе; 4 – фрагмент трещины; 5 – область взаимодействия трещины с аустенитной прослойкой ($\times 150$)

Взаимодействие аустенитной прослойки 1 с вершиной трещины 4 (рисунок 2.4) спровоцировало появление участка, в котором не прошли бездиффузионные превращения мартенсита в аустенит (область 5), что указывает блокирование трещиной бездиффузионных фазовых превращений.

На рисунке 2.5 представлен случай объемного разрушения монокристалла. Интересно заметить наличие мартенситной прослойки 1, имеющей в своем объеме двойники 2, перпендикулярные границе раздела аустенит-мартенсит и придающие этой границе периодичный рельеф. Данная мартенситная прослойка «прижата» к трещине 3 внешними напряжениями. В области 3' на рисунке 2.5 представлен переход трещины в другую плоскость с сопутствующим выкрашиванием и формированием полос аккомодации 4, а также образованием микротрещины 5–5', параллельной трещине 3–3' (см. рисунок 2.5). В областях 6 видны следы пластической деформации в виде нескольких групп параллельных полос сдвига, разделенных областями без следов пластической деформации. Это указывает на то, что полосы 6 образовались в параллельных двойниковых прослойках, исчезнувших после приложенной нагрузки обратного знака.

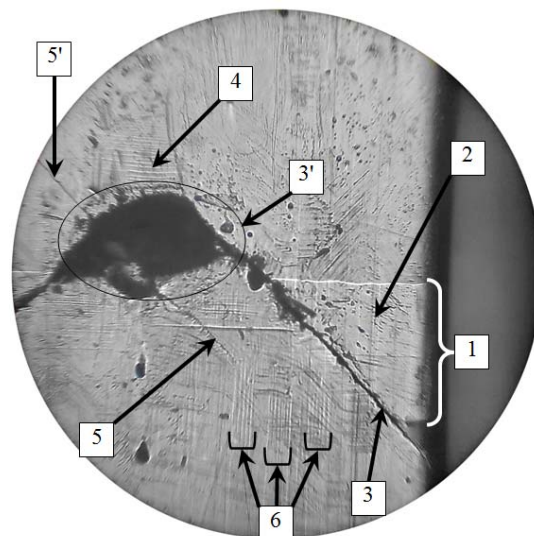


Рисунок 2.5 – Макроскопическая трещина в системе следов пластической деформации в монокристалле Ni_2MnGa : 1 – мартенситная прослойка; 2 – двойник в мартенситной прослойке; 3–3' – трещина с областью ее перехода в другую плоскость при интенсивном выкрашивании; 4 – полосы аккомодации; 5–5' – микротрещина; 6 – полосы сдвига параллельных двойниковых прослойках ($\times 150$)

Группы двойниковых прослоек с когерентными и некогерентными границами изображены на рисунке 2.6. Типичная для этого случая двойниковая прослойка 1 имеет когерентные

прямолинейные участки границ и искривленные некогерентные участки. Следует отметить наличие в представленной на рисунке 2.6 области тонких линзовидных двойников 2, перпендикулярных границам двойников типа 1. В двойниках данного типа линзовидные двойники отсутствуют, что указывает на аустенитную природу двойников типа 1. Данные двойники, как видно из рисунка 2.6, препятствуют развитию двойников типа 2, длина которых определяется величиной пространства между аустенитными прослойками.

На рисунке 2.6 также представлены тонкие двойники типа 3, которые незначительно влияют на длину двойников типа 2 и пересекают их под углом 90° .

В позиции 4 на рисунке 2.6 виден отпечаток алмазной пирамиды Вика, который в области 5 взаимодействует с окрестными двойниками. Видно, что двойники удалены от отпечатка индентора. Это указывает на существование поля остаточных напряжений и структурных изменений, вызванных пластической деформацией при индентировании.

Кратер 6 на рисунке 2.6 стопором для развития двойника 7 не явился. Об этом свидетельствует наличие двух вершин линзовидного двойника 7 по обе стороны кратера. Однако заметно влияние кратера 6 на ширину двойника 7, что указывает на концентрацию напряжений у кратера и активизацию под их действием процесса генерации двойникообразующих дислокаций.

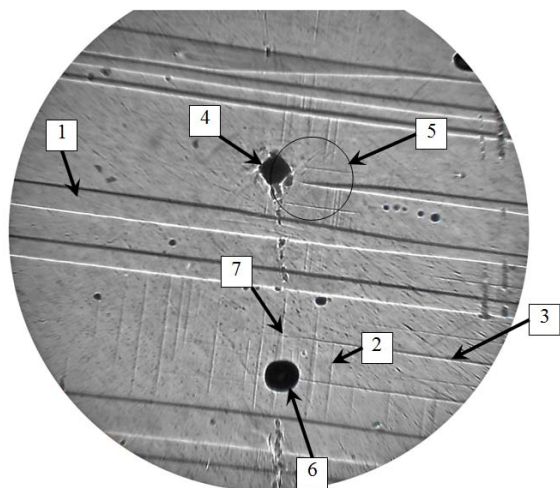


Рисунок 2.6 – Группы двойниковых прослоек с когерентными и некогерентными границами в монокристалле Ni_2MnGa : 1 – двойниковая прослойка с участками когерентных и слабо некогерентных границ; 2 – тонкие линзовидные двойники, перпендикулярные границам двойниковых прослоек типа 1; 3 – тонкий остаточный двойник; 4 – отпечаток пирамиды Вика; 5 – фрагмент картины взаимодействия двойников с полем остаточных напряжений вокруг отпечатка индентора 4; 6 – кратер; 7 – линзовидный двойник, проходящий через кратер ($\times 150$)

На рисунке 2.7 показан торец образца и «прижатые» к нему тонкие параллельные двойниковые прослойки типа 1. Следует отметить, что чем ближе к краю образца, тем меньше ширина и выраженность двойниковых прослоек этого типа. Наблюдаемая на рисунке 2.7 трещина 2 – след взаимодействия описанных в [7] двойников двух типов в плоскостях двойникования, ориентированных друг к другу под малым углом. Наблюдаются также продольные полосы типа 3, являющиеся системой границ двойниковых прослоек, перпендикулярных границам поперечных прослоек типа 1. Из рисунка 2.7 видно, что двойниковые прослойки 1 испытывают сопротивление при выходе на торцевую поверхность. Это означает, что подвижность двойниковых границ у торцевых поверхностей образца ниже, чем в средней его части.

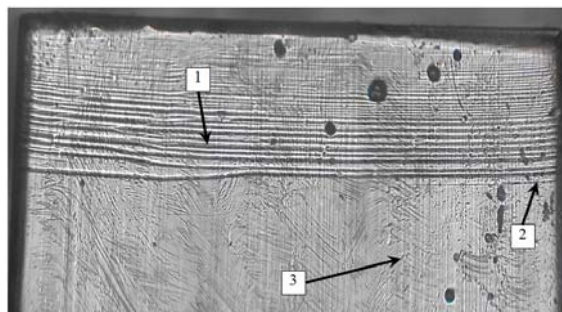


Рисунок 2.7 – Торец монокристаллического призматического образца Ni_2MnGa : 1 – система тонких параллельных двойников; 2 – микротрещина; 3 – система параллельных границ двойников, перпендикулярных границам двойников типа 1 ($\times 10$)

Картина взаимодействия тонких двойников с перпендикулярными в плоскости $\{100\}$ следами плоскостей двойникования представлена на рисунке 2.8. Двойники 1 и 2 тонкие и имеют разную малую ширину. В области взаимодействия тонкого двойника 1 и перпендикулярного ему двойника типа 3 наблюдается искривление границ двойника 1 отмеченные стрелками 4. Это указывает на то, что двойник 1 не является непреодолимым препятствием для двойника 3 и данные двойники являются деформационными двойниками мартенситной фазы монокристалла Ni_2MnGa .

Рисунок 2.9 отображает деформационную картину, возникшую у поверхности 1 образца. Данный рисунок является продолжением рисунка 2.8. Двойники 2 и 3 на рисунке 2.9 являются частями двойников 1 и 2 на рисунке 2.8. Как видно из сравнения рисунков 2.8 и 2.9, тонких линзовидных двойников больше в области, представленной на рисунке 2.9, что указывает на наличие в этой области внутренних напряжений более высокого уровня, чем в области на рисунке 2.8. Наибольшее количество тонких линзовидных

двойников наблюдается в области неоднородности 5 (рисунок 2.9), где ширина двойников типа 6 наибольшая. Это обусловлено тем, что неоднородности в деформируемом твердом теле являются концентраторами больших внутренних напряжений [11], которые в зависимости от знака могут не только активировать процесс двойникования, но и приводить к частичному раздвойникованию, как в случае двойников 7 (рисунок 2.9).

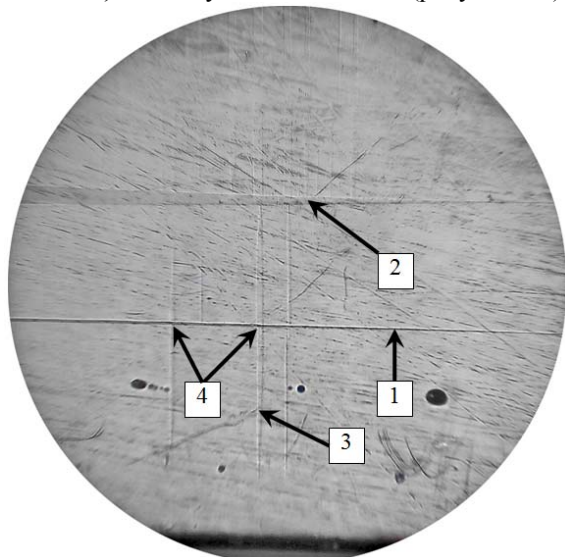


Рисунок 2.8 – Картина взаимодействия тонких двойников, следы плоскостей двойникования которых перпендикулярны друг другу:
1 – тонкий двойник; 2 – тонкий двойник клиновидной формы; 3 – линзовидный двойник в плоскости двойникования, след которой в плоскости {100} перпендикулярен следу плоскости двойникования двойника 1; 4 – области искривления тонкого двойника 1 в результате взаимодействия с двойниками типа 3 ($\times 150$)

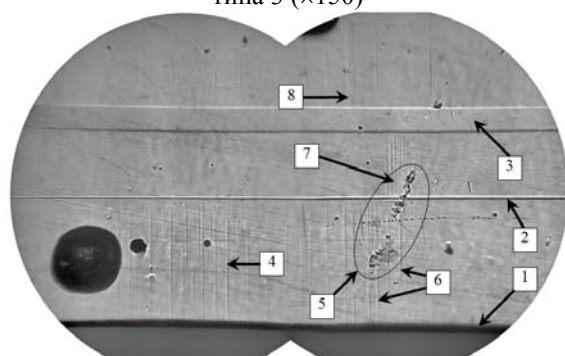


Рисунок 2.9 – Деформационная картина у поверхности образца: 1 – поверхность; 2 – тонкий двойник; 3 – двойниковая прослойка; 4 – тонкие линзовидные двойники, перпендикулярные двойникам 2 и 3; 5 – локальная неоднородность; 6 – линзовидные двойники с наибольшей шириной; 7 – двойники, подвергнутые частичному раздвойникованию; 8 – двойник с вершиной, получившей расслоение в результате взаимодействия с двойником 3 ($\times 150$)

На рисунке 2.9 интересно также отметить наличие двойника 8, взаимодействующего с двойником 3. В результате такого взаимодействия вершина двойника 8 получила расслоение в результате образования несдвойникованных областей.

Заключение

Таким образом, при помощи метода оптической микроскопии изучены особенности картины компенсации деформирующих воздействий. Обнаружена возможность образования клиновидных двойников в перпендикулярных плоскостях двойникования.

Авторы благодарят научного руководителя «AdaptaMat Ltd.» (Финляндия, Хельсинки) А.Л. Созинова за любезно предоставленные образцы Ni_2MnGa .

ЛИТЕРАТУРА

1. Финкель, В.М. Разрушение кристаллов при механическом двойниковании / В.М. Финкель, В.А. Федоров, А.П. Королев. – Ростов-на-Дону. – 1990. – 172 с.
2. Остриков, О.М. Механика двойникования твердых тел. Монография / О.М. Остриков. – Гомель: Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», 2008. – 301 с.
3. Остриков, О.М. Особенности механического двойникования, локального разрушения и формирования каналов Розе в монокристаллах Ni_2MnGa при индентировании их поверхности пирамидой Виккерса / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 5–10.
4. Остриков, О.М. Закономерности механического двойникования мартенситной фазы монокристалла Ni_2MnGa при деформировании его поверхности пирамидой Виккерса / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2013. – № 3 (54). – С. 37–42.
5. Остриков, О.М. Особенности механического двойникования и локального разрушения монокристаллического сплава Ni_2MnGa при индентировании его поверхности / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, № 4 (часть 2). – С. 1924–1925.
6. Остриков, О.М. Четырехфункциональный метод расчета напряженно-деформированного состояния в системе параллельных остаточных линзовидных деформационных двойников в мартенситной фазе Ni_2MnGa / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2013. – № 12. – С. 95–100.
7. Giant magnetic-field-induced strain in $NiMnGa$ seven-layered martensitic phase / A. Sozinov [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2002. – Vol. 80. – P. 1746–1748.

8. *Остриков, О.М.* Исследование пластической деформации поверхности монокристалла Ni_2MnGa методом индентирования / О.М. Остриков, А.Л. Созинов, А.В. Сорока // Инженерно-физический журнал. – 2012. – Т. 85, № 5. – С. 1132–1141.

9. *Косевич, А.М.* Дислокационная теория упругого двойникования кристаллов / А.М. Косевич, В.С. Бойко // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104, № 2. – С. 101–255.

10. *Остриков, О.М.* Особенности двойникования монокристаллов висмута, облученных ионами тантала / О.М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2000. – Т. 89, № 6. – С. 99–103.

11. *Работнов, Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 712 с.

Поступила в редакцию 16.06.14.

УДК 535.5

МЕТОД СТАБИЛИЗАЦИИ СВЕТОМОДУЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОГО МОДУЛЯТОРА ФАБРИ – ПЕРО ДЛЯ ШИРОКОПОЛОСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В.А. Пилипович, В.Б. Залесский, А.И. Конойко, В.М. Кравченко, К.А. Решиков

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь

THE METHOD OF STABILIZATION OF LIGHT-MODULATING RESPONSES OF ELECTROOPTIC FABRY – PEROT MODULATOR FOR BROADBAND RADIATION

V.A. Pilipovich, V.B. Zalesski, A.I. Konojko, V.M. Kravchenko, C.A. Reshikov

B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk, Belarus

Рассматривается метод стабилизации светомодуляционных характеристик электрооптического модулятора Фабри – Перо широкополосного излучения, который можно осуществить за счет использования в модуляторе двух одинаковых резонаторов, находящихся в одинаковых температурных условиях, в которых осуществляется противоположный фазовый сдвиг интерферирующих волн.

Ключевые слова: электрооптический эффект, амплитудная модуляция, фазовая модуляция, многолучевая интерференция, модулятор Фабри – Перо, широкополосное излучение.

The method of stabilization of light-modulating responses of electrooptic Fabry – Perot modulator is considered. The method uses modulator with two equal resonators placed in equal thermal conditions in which the opposite phase shift of interfering waves is performed.

Keywords: electrooptic effect, amplitude modulation, phase modulation, multi-beam interference, Fabry – Perot modulator, broadband radiation.

Введение

Общим недостатком электрооптических модуляторов Фабри – Перо является тот факт, что при их работе в реальных условиях под воздействием внешних факторов, например, изменения температуры происходит изменение оптической базы резонатора [1], [2]. Это приводит к смещению спектральной характеристики коэффициента пропускания модулятора, что снижает эффективность его работы, а, следовательно, ограничивает применение, как в лазерной технике, так и визуализации ИК излучения [3]. Поэтому представляет интерес рассмотрение метода стабилизации светомодуляционных характеристик электрооптического модулятора Фабри – Перо для широкополосного излучения.

1 Метод стабилизации светомодуляционных характеристик электрооптического модулятора Фабри – Перо широкополосного излучения

Сущность метода состоит в использовании в модуляторе широкополосного излучения двух одинаковых электрооптически управляемых резонаторов Фабри – Перо, находящихся в одинаковых температурных условиях, поэтому изменение температуры приводит к сдвигу как спектральной характеристики коэффициента светопропускания модулятора $Q_{\text{мод}}(\lambda) = Q_{\text{рез}}^2(\lambda)$; где

$Q_{\text{рез}}(\lambda)$ – коэффициент пропускания резонатора, так и спектра выходного широкополосного излучения. Но не приводит к изменению его суммарной интенсивности излучения на выходе.

Выражение для определения спектральной характеристики коэффициента светопропускания одного резонатора Фабри – Перо имеет следующий вид

$$Q_{\text{рез}}(\lambda) = \frac{T^2}{\left[(1-R)^2 + 4vR \left(\sin\left(\frac{\delta(\lambda)}{2}\right) \right)^2 \right]}, \quad (1.1)$$

где T – коэффициент пропускания зеркал резонатора; R – коэффициент отражения зеркал резонатора; v – коэффициент пропускания кристалла резонатора; $\delta(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot 2n_0l \cdot \cos(\alpha)$ – разность

фаз между интерферирующими в резонаторе световыми волнами; n – показатель преломления кристалла резонатора; l – геометрическая длина кристалла резонатора; α – угол падения луча на поверхность зеркала.

Выражение для определения спектральной характеристики коэффициента светопропускания модулятора Фабри – Перо со стабилизацией характеристик имеет следующий вид

$$Q(\lambda) = Q_{\text{рез}}^2(\lambda) =$$

$$T^4 = \left[(1-R)^2 + 4vR \left(\sin\left(\frac{\delta(\lambda)}{2}\right) \right)^2 \right]^{-2} \quad (1.2)$$

На рисунке 1.1 представлены спектральные характеристики коэффициента светопропускания резонаторов Фабри – Перо при отсутствии управляющего напряжения и при приложении управляющего поля.

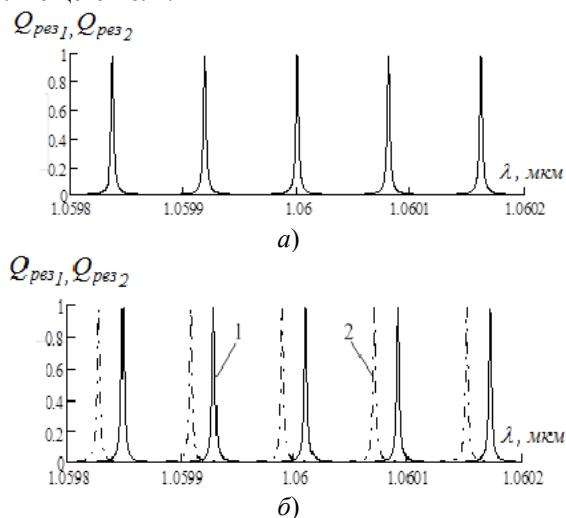


Рисунок 1.1 – Спектральные характеристики коэффициентов светопропускания резонаторов Фабри – Перо

а) – при отсутствии управляющего напряжения, б) – при приложении управляющего поля

На рисунке 1.2 представлены спектральные характеристика коэффициента светопропускания модулятора Фабри – Перо со стабилизацией характеристик при отсутствии управляющего напряжения и при приложении управляющего поля при наведенном фазовом сдвиге $\Delta\delta = \pi/4$.

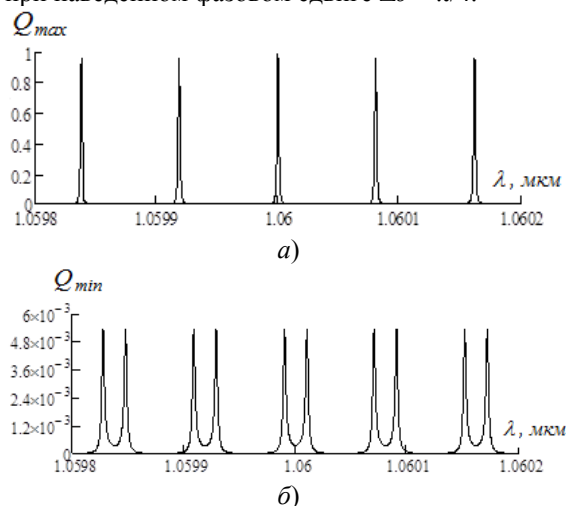


Рисунок 1.2 – Спектральная характеристика коэффициента пропускания модулятора Фабри – Перо со стабилизацией характеристик а) при отсутствии управляющего напряжения, б) – при приложении управляющего поля при наведенном фазовом сдвиге $\Delta\delta = \pi/4$

В случае приложения управляющего электрического поля в резонаторах наводится противоположное изменение показателя преломления, что вызывает, как показано на рисунке 1.1, б, противоположный сдвиг спектральных характеристик коэффициентов светопропускания резонаторов Фабри – Перо, и, как следствие этого, резкое уменьшение коэффициента пропускания модулятора (рисунок 1.2, б). Светомодуляционная характеристика модулятора Фабри – Перо со стабилизацией характеристик представлена на рисунке 1.3.

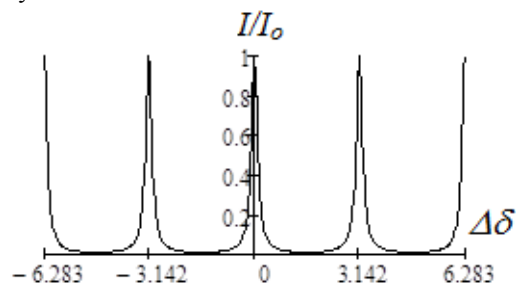


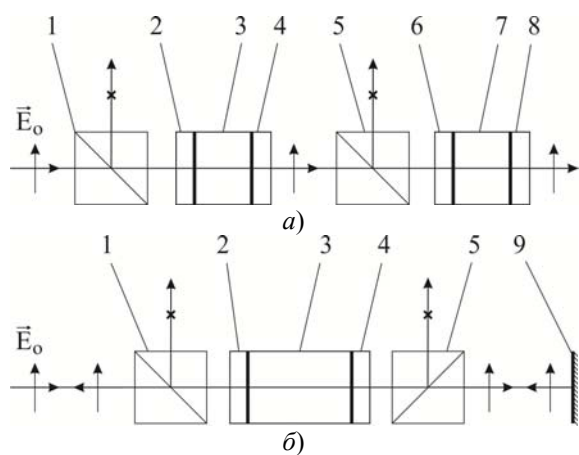
Рисунок 1.3 – Светомодуляционная характеристика модулятора Фабри – Перо со стабилизацией характеристик

2 Высокостабильный амплитудный модулятор Фабри-Перо с прямым ходом светового пучка

Реализацию рассмотренного метода можно осуществить, во-первых, за счёт использования в оптической схеме двух идентичных управляемых резонаторов с отсутствием обратной связи (в таких резонаторах могут быть использованы управляющие элементы как с продольным, так и поперечным электрооптическим эффектом). Во-вторых, одного резонатора Фабри – Перо, осуществляющего для двух ортогонально поляризованных волн, распространяющихся в противоположных направлениях, разные по знаку фазовые сдвиги, что возможно при использовании продольного электрооптического эффекта, например, в кристаллах DKDP. Оптические схемы, реализующие данный метод, представлены на рисунке 2.1.

В приведенных оптических схемах вращатели плоскости поляризации служат для исключения паразитной обратной связи между лазерным резонатором и управляемыми резонаторами модулятора, а в случае модулятора с обратным ходом светового пучка дополнительно еще между его резонатором и глухим зеркалом. Вращатели осуществляют поворот плоскости поляризации за один проход на угол 45° , каждый, а за проход в прямом и обратном направлении – на угол 90° . Каждый вращатель представляет собой последовательность из двух повернутых друг относительно друга на угол 45° одинаковых постоянных фазовых элементов, вносящих оптическую разность хода, равную $\lambda/4$. Оси индикаторы показателей преломления первого фазового

элемента вращателя по ходу пучка должны быть ориентированы к плоскости поляризации падающего излучения под углом 45° . Благодаря этому свет, отразившийся от входного зеркала управляемого резонатора, не будет возвращаться как к выходному зеркалу лазерного резонатора, так и выходному зеркалу предыдущего управляемого резонатора. Он будет фильтроваться анализаторами плоскости поляризации светового пучка. А в случае модулятора с обратным ходом свет, отразившийся от выходного зеркала управляемого резонатора, не будет возвращаться к глухому зеркалу. Принцип работы таких вращателей плоскости поляризации описан в [4].



- 1, 5 – анализаторы поляризации световых пучков;
- 2, 4, 6, 8 – вращатели плоскости поляризации;
- 3, 7 – управляемые резонаторы Фабри – Перо;
- 9 – глухое зеркало

Рисунок 2.1 – Оптические схемы стабилизированных амплитудных модуляторов Фабри – Перо с а) – прямым и б) – обратным ходом светового пучка

В приведенных оптических схемах амплитудного модулятора оси наведенной анизотропии электрооптических элементов управляемых резонаторов Фабри – Перо ориентированы под углом 45° к кристаллографическим осям ближайших фазовых элементов $\lambda/4$ вращателей плоскости поляризации светового пучка, а так же главным плоскостям анализаторов поляризации световых пучков и параллельны осям более дальних фазовых элементов $\lambda/4$. Электрооптические элементы выполнены, например, из электрооптического кристалла DKDP z-среза с врезными электродами и работают на продольном электрооптическом эффекте, зеркала – в виде диэлектрических отражающих покрытий, фазовые элементы $\lambda/4$ вращателей плоскости поляризации светового пучка – в виде плоскопараллельных пластин из кристаллического кварца, анализаторы поляризации световых пучков – в виде поляризационных призм Глана.

В амплитудном модуляторе с прямым ходом светового пучка могут отсутствовать второй и четвертый вращатели плоскости поляризации. Только в этом случае второй анализатор плоскости поляризации и третий вращатель плоскости поляризации должны быть повернуты относительно предыдущих однотипных элементов на угол 45° , что несколько усложнит конструкцию корпуса модулятора.

Амплитудный модулятор с прямым ходом светового пучка работает следующим образом. Падающий плоскополяризованный световой пучок, пройдя первый анализатор поляризации и первый вращатель плоскости поляризации, падает на первое зеркало первого управляемого резонатора Фабри – Перо, при этом его плоскость поляризации повернута на угол 45° относительно исходной.

Для излучения с длинами волн, соответствующими минимумам характеристики светопропускания резонатора, основная часть энергии отражается от первого зеркала резонатора и отфильтровывается первым анализатором поляризации светового пучка. Это является следствием того, что отражённый от первого зеркала резонатора Фабри – Перо световой пучок при выходе в обратном направлении из первого вращателя поляризации приобретает плоскость поляризации, перпендикулярную к плоскости поляризации падающего пучка. Таким образом, после второго зеркала резонатора Фабри – Перо имеется излучение, интенсивность которого в $1/Q_{min}$ раз ослаблена по сравнению с интенсивностью падающего на модулятор светового пучка, где Q_{min} – коэффициент пропускания, соответствующий минимуму спектральной характеристики светопропускания. На выходе второго вращателя плоскость поляризации излучения параллельна плоскости поляризации падающего на модулятор светового пучка. Поэтому оно последовательно проходит через второй анализатор поляризации светового пучка. Далее пройдя третий вращатель плоскости поляризации светового пучка, оно попадает на входное зеркало второго управляемого резонатора Фабри – Перо, при этом его плоскость поляризации повернута на угол 45° относительно исходной. Так как электрооптический модулятор Фабри – Перо пропускает для рассматриваемых длин волн минимум световой энергии, то основная энергия этого излучения отражается и отфильтровывается вторым анализатором поляризации светового пучка. Это является следствием того, что отраженное от входного зеркала резонатора излучение при выходе из третьего вращателя в обратном направлении приобретает плоскость поляризации перпендикулярную к плоскости поляризации падающего пучка. Таким образом, на выходе второго управляемого резонатора Фабри – Перо получается излучение, интенсивность которого в

$1/Q_{min}^2$ раз ослаблена по сравнению с интенсивностью падающего на модулятор светового пучка.

Для излучения с длинами волн, соответствующими максимумам характеристики пропускания резонатора, основная часть энергии последовательно проходит через первый управляемый резонатор и второй вращатель плоскости поляризации. Плоскость поляризации излучения на выходе второго вращателя параллельна плоскости поляризации светового пучка падающего на резонатор Фабри – Перо. Поэтому он последовательно проходит через второй анализатор поляризации, третий вращатель плоскости поляризации, второй управляемый резонатор Фабри – Перо и четвертый вращатель плоскости поляризации. На выходе амплитудного модулятора с прямым ходом плоскость поляризации излучения будет параллельна плоскости поляризации входного светового пучка. Величина коэффициента светопропускания модулятора может быть найдена из выражения (1.2).

В случае приложения управляющего электрического поля в резонаторах наводится противоположное изменение показателя преломления, что вызывает противоположный сдвиг спектральных характеристик коэффициентов светопропускания резонаторов Фабри – Перо а, следовательно, резкое уменьшение коэффициента пропускания модулятора со стабилизацией характеристик. Светомодуляционная характеристика модулятора Фабри – Перо со стабилизацией характеристик представлена на рисунке 1.3.

3 Высокостабильный модулятор Фабри – Перо с обратным ходом светового пучка

Амплитудный модулятор с обратным ходом светового пучка работает следующим образом. Падающий плоскополяризованный световой пучок, пройдя первый анализатор поляризации и первый вращатель плоскости поляризации светового пучка, падает на первое зеркало управляемого резонатора Фабри – Перо, при этом его плоскость поляризации повернута на угол 45° относительно исходной. Спектральная характеристика светопропускания резонатора Фабри – Перо имеет одинаковый периодический вид, как в прямом, так и обратном ходе. Это является следствием того, что в случае отсутствия управляющего поля z -среза кристалла DKDP соответствует круговое сечение индикатрисы показателей, представленное на рисунке 3.1.

Для излучения с длинами волн, соответствующими минимумам характеристики светопропускания, основная часть энергии отражается от первого зеркала резонатора и отфильтровывается первым анализатором поляризации светового пучка. Это является следствием того, что отражённое от первого зеркала резонатора Фабри – Перо световое излучение при выходе в обратном

направлении из первого вращателя плоскости поляризации приобретает плоскость поляризации, перпендикулярную к плоскости поляризации падающего пучка. Таким образом, после второго зеркала резонатора Фабри – Перо имеется излучение, интенсивность которого в $1/Q_{min}$ раз ослаблена по сравнению с интенсивностью падающего на модулятор светового пучка. На выходе второго вращателя плоскость поляризации излучения параллельна плоскости поляризации падающего на модулятор светового пучка. Поэтому он проходит через второй анализатор поляризации в прямом, и, испытав отражение от глухого зеркала, в обратном направлении. В итоге, пройдя второй вращатель плоскости поляризации в обратном ходе, он попадает на второе зеркало резонатора Фабри – Перо. При этом плоскость поляризации излучения идущего в обратном ходе, ортогональна плоскости поляризации светового пучка, идущего в прямом ходе.

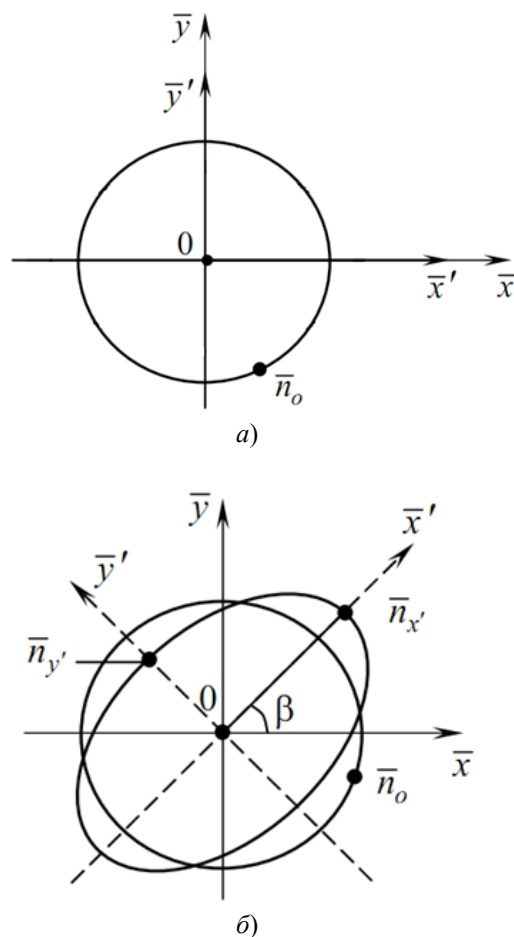


Рисунок 3.1 – Сечение оптической индикатрисы кристалла DKDP а) – при отсутствии внешнего электрического поля; б) – при приложении электрического поля

Так как электрооптический модулятор Фабри – Перо пропускает для рассматриваемых длин волн минимум световой энергии, то основная энергия отражается и отфильтровывается вторым

анализатором поляризации светового пучка. Это является следствием того, что отраженный от второго зеркала резонатора световой пучок при выходе из второго вращателя приобретает плоскость поляризации, перпендикулярную к плоскости поляризации падающего пучка. Таким образом, в обратном ходе после первого зеркала резонатора Фабри – Перо получается излучение, интенсивность которого в $1/Q_{min}^2$ раз ослаблена по сравнению с интенсивностью падающего на модулятор светового пучка.

Для излучения с длинами волн, соответствующими максимумам спектральной характеристики пропускания, основная часть энергии проходит через резонатор. Плоскость поляризации излучения на выходе второго вращателя плоскости поляризации параллельна плоскости поляризации светового пучка падающего на резонатор Фабри – Перо, поэтому оно проходит через все оптические элементы модулятора в прямом, и испытав отражение от глухого зеркала, в обратном направлении. Плоскость поляризации светового пучка, проходящего электрооптический элемент резонатора Фабри – Перо в обратном ходе, становится ортогональной плоскости поляризации излучения, идущего в прямом ходе. При прохождении излучения первого вращателя в обратном направлении его плоскость поляризации приобретает ориентацию параллельную плоскости поляризации светового пучка, идущего в прямом ходе. Поэтому выходной световой пучок беспрепятственно проходит через первый анализатор поляризации светового пучка в обратном направлении по пути входного пучка. Величина коэффициента светопропускания модулятора может быть найдена из выражения (1.2).

В случае приложения управляющего поля к электрооптическому элементу резонатора вдоль осей наведенной анизотропии x' и y' наводится противоположное по знаку изменение показателя преломления (рисунок 3.1). Вследствие этого изменения, ортогонально поляризованные световые волны, распространяющиеся в резонаторе, приобретают противоположные по знаку фазовые сдвиги. Это приводит к противоположным сдвигам спектральных характеристик светопропускания резонатора для световых пучков, распространяющихся в прямом и обратном ходе. В итоге на выходе модулятора возникает резкое уменьшение коэффициента пропускания модулятора. Светомодуляционная характеристика модулятора Фабри – Перо со стабилизацией характеристик представлена на рисунке 1.3.

Стабильность светомодуляционных характеристик обеспечивается тем, что, в случае изменения температуры, возникающая при этом добавочная разность фаз одинакова для световых пучков, идущих в прямом и в обратном ходе. При этом максимумы и минимумы спектральных

характеристик пропускания в прямом и в обратном ходе одинаково сдвигаются по длине волны, но не сдвигаются друг относительно друга. Как результат, изменение температуры приводит лишь к сдвигу характеристики пропускания модулятора и спектра выходного широкополосного излучения, но не приводит к изменению суммарной мощности выходного излучения, которая зависит только от взаимного расположения характеристик одна относительно другой.

Таким образом, в рассмотренной оптической схеме осуществляется стабилизированная амплитудная модуляция широкополосного оптического излучения.

Одними из основных характеристик амплитудных модуляторов является величина управляющего напряжения U и эффективность η [1]. На рисунке 3.2 приведены графики зависимости величины эффективности и управляющего напряжения модулятора от ширины спектра $\Delta\lambda$ для случая сплошного спектрального распределения интенсивности входного излучения, соответствующего функции Гаусса, позволяющего получать на выходе модулятора отношение сигнал/фон порядка 50.

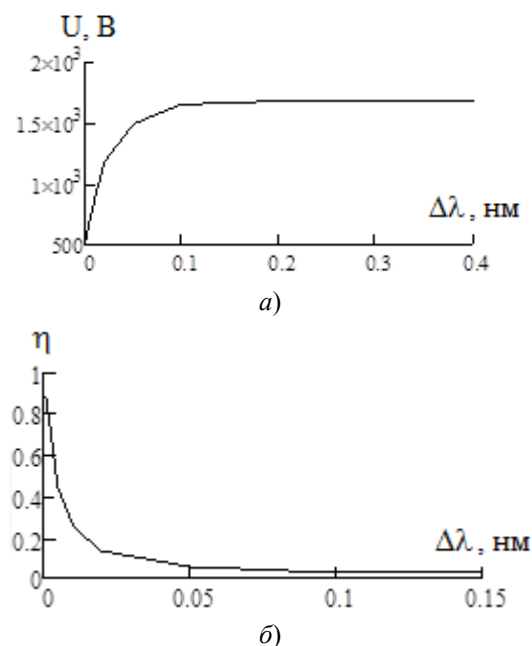


Рисунок 3.2 – Зависимость величины а) – управляющего напряжения U и б) – эффективности модулятора η от ширины спектра $\Delta\lambda$

Как видно из приведенных графиков (рисунок 3.2), при малых значениях ширины спектра входного излучения $\Delta\lambda$, значения величины управляющего напряжения U резко снижаются. При этом растёт значение эффективности модулятора η . Рост эффективности модулятора в данном случае объясняется тем, что при малых значениях ширины спектра входного излучения всё это излучение соответствует одному из максимумов характеристики пропускания модулятора,

поэтому оно проходит модулятор практически без потерь. Уменьшение величины управляющего напряжения определяется при этом не формой характеристики пропускания модулятора, а формой спектра входного излучения. Однако при данных обстоятельствах нарушается термостабильность оптической схемы, что не позволяет осуществить термостабильную амплитудную модуляцию узкополосного входного сигнала.

С ростом значения ширины спектра входного излучения $\Delta\lambda$ значение величины управляющего напряжения растёт, достигая некоторого фиксированного значения, которое в 2,4 раза меньше по сравнению с величиной управляющего напряжения электрооптических лазерных затворов на продольном электрооптическом эффекте. При этом значения эффективности модулятора снижаются, также достигая своих фиксированных значений. Эти значения данных величин соответствуют термостабильному режиму амплитудной модуляции.

Заключение

Предложен метод стабилизации светомодуляционных характеристик электрооптического модулятора Фабри – Перо широкополосного излучения, который можно осуществить за счет использования в модуляторе двух одинаковых резонаторов, находящихся в одинаковых температурных условиях, в которых осуществляется противоположный фазовый сдвиг интерферирующих волн.

Научная новизна полученных результатов заключается в разработке метода стабилизации светомодуляционных характеристик электрооптического модулятора Фабри – Перо широкополосного излучения, отличительной особенностью которого является высокая стабильность светомодуляционных характеристик. Кроме того он, в отличие от известных методов, позволяет

снизить величину управляющего напряжения не менее чем в 2,4 раза по сравнению с электрооптическими лазерными затворами на продольном электрооптическом эффекте, что имеет важное значение для модуляции добротности лазерных резонаторов, генерирующих излучение с длиной волны порядка 1,06 мкм. Практическая новизна полученных результатов заключается в том, что на основе метода стабилизации светомодуляционных характеристик электрооптического модулятора Фабри – Перо широкополосного излучения могут быть созданы высокоэффективные лазерные затворы для видимой и ближней ИК области спектра, обладающие величиной управляющего напряжения вдвое меньшей, чем существующие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мустель, Е.П. Методы модуляции и сканирования света / Е.П. Мустель, В.Н. Парыгин. – М. : Наука, 1970. – 296 с.
2. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх ; пер. с англ. С.Г. Кривошлыкова, Н.И. Петрова ; под ред. И.Н. Сисакяна. – М. : Мир, 1987. – 616 с.
3. *Novel low-cost uncooled infrared camera* / Ming Wu [et al.] // SPIE Proc. – 2005. – Vol. 5783. – P. 69401I–1...11.
4. Пилипович, В.А. Амплитудная модуляция света за счет управления многолучевой интерференцией в интерферометре Фабри – Перо / В.А. Пилипович, А.И. Конойко, А.И. Демченко, В.Ф. Ярмолицкий // Радиолокация, навигация, связь : VI междунар. науч.-техн. конф. Воронеж, 2000 г. / под ред. проф. В.Н. Азарова. – Воронеж : Воронежский НИИ связи, 2000. Т. 1. – С. 94–100.

Поступила в редакцию 21.10.14.

УДК 521.1; 524.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ШАРА

Г.Ю. Тюменков¹, Е.П. Ельников², Е.В. Фирагина¹¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь²Гомельский городской лицей № 1, Гомель, Беларусь

MODELING OF THE RADIAL DENSITY FUNCTION OF A GRAVITATING GLOBE

G.Yu. Tyumenkov¹, E.P. El'nikov², E.V. Firagina¹¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus²Gomel City Lyceum №1, Gomel, Belarus

В статье в приближении сферической симметрии и с учетом физически корректного радиального поведения проведено моделирование функции плотности в виде линейной, экспоненциальной и обратной функций. На этой основе предложена обобщенная форма функции плотности для слоистой структуры. Произведен расчет масс планет земной группы по усредненным характеристикам. Дана оценка возможности применения результатов моделирования.

Ключевые слова: функция плотности, шаровой слой, гипергеометрическая функция, гамма-функция, функция Хэвисайда, планета земной группы.

Using the approximation of spherical symmetry and correct physical radial behavior the density function is simulated in several analytical forms. On this basis the density function generalized form for layered structure is proposed. Masses of terrestrial planets are calculated with averaged characteristics. The possible application of simulation results is evaluated.

Keywords: density function, spherical layer, hypergeometric function, gamma function, Heaviside step function, terrestrial planet.

Введение

В теории внутреннего строения звезд и планет [1]–[4], существеннейшую роль играет функция плотности $\rho(r)$. Она, как правило, радиально-симметрична и определяет массу гравитирующего шара, задаваемую интегралом

$$M_R = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr. \quad (0.1)$$

Кроме того, она фигурирует в уравнении равновесия

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho(r) \quad (0.2)$$

и в ряде других важных уравнений теории. Поэтому моделированию функции плотности $\rho(r)$ и посвящена данная работа. Вполне понятна физически обусловленная тенденция увеличения плотности в направлении центра гравитирующего шара. Следовательно, моделирование функции $\rho(r)$ допускает использование убывающей линейной, экспоненциальной и обратной функций.

1 Модельные функции плотности

1. Приближение линейной функцией

Смоделируем функцию плотности с линейной зависимостью от расстояния до центра шара r , что ранее уже было предложено в работе [5],

убывающую с ростом аргумента. В этом случае функция $\rho(r)$ задается выражением

$$\rho(r) = \rho_0 - \alpha r, \quad (1.1)$$

где ρ_0 – плотность в центре шара. Коэффициент α здесь определяется на основе данных о плотностях в центре и у поверхности

$$\alpha = \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R}. \quad (1.2)$$

На основе этого масса, заключенная внутри шара радиуса R , определяемая интегралом (0.1) оказывается равной

$$\begin{aligned} M(R) &= 4\pi \int_0^R (\rho_0 - \alpha r) r^2 dr = \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \left[\rho_0 - \frac{3\alpha R}{4} \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

II. Приближение экспоненциальной функцией

Рассмотрим функцию плотности с экспоненциальным поведением, также убывающую с ростом r . То есть определим $\rho(r)$ как

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\beta r}, \quad (1.4)$$

где ρ_0 имеет прежний смысл, а коэффициент β из аналогичных соображений оказывается равным

$$\beta = \frac{1}{R} \ln \frac{\rho_0}{\rho(R)}. \quad (1.5)$$

Подстановка формул (1.4) и (1.5) в (0.1) дает массу шара вида

$$M(R) = 4\pi \int_0^R \rho_0 e^{-\beta r} r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0}{\beta^3} \gamma(3; \beta R), \quad (1.6)$$

где $\gamma(3; \beta R)$ – нижняя неполная гамма-функция [6].

III. Приближение обратной функцией с размерным параметром

Введем плотность в виде обратной убывающей функции определенного вида [5], а именно, с размерным параметром

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \gamma r}. \quad (1.7)$$

Размерный параметр γ в выражении (1.7) находится из условия

$$\gamma = \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R\rho(R)}. \quad (1.8)$$

Выражения (1.7) и (1.8) приводят к массе шара равной

$$\begin{aligned} M(R) &= 4\pi \int_0^R \frac{\rho_0}{1 + \gamma r} r^2 dr = \\ &= \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} F(1; 3; 4; -\gamma R), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $F(1; 3; 4; -\gamma R)$ – гипергеометрическая функция [6], зависящая от радиуса R .

IV. Приближение обратной функцией с безразмерным параметром

Модифицируем функцию плотности и записываем ее в виде, отличном от первой убывающей обратной функции, введя безразмерный параметр

$$\rho(r) = \frac{\gamma\rho_0}{r + \frac{r}{R}}, \quad (1.10)$$

который будет равен

$$\gamma = \frac{\rho(R)}{\rho_0 - \rho(R)}. \quad (1.11)$$

Используя (1.10) и (1.11), находим массу $M(R)$, которая в этом случае оказывается равной

$$\begin{aligned} M(R) &= 4\pi \int_0^R \frac{\gamma\rho_0}{r + \frac{r}{R}} r^2 dr = \\ &= \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} F\left(1; 3; 4; -\frac{1}{\gamma}\right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $F\left(1; 3; 4; -\frac{1}{\gamma}\right)$ – гипергеометрическая функция, независящая от радиуса шара.

2 Функция плотности для шара со слоистой структурой

Метод обобщения используемых функций плотности на случай слоистой структуры шара

заключается в их суммировании по слоям с использованием обрезывающей на границе слоя функции Хэвисайда. При этом обобщенная функция плотности принимает вид

$$\rho(r) = \sum_{k=1}^n \Theta(r - r_k) \cdot \rho_{(j)k}(r) \cdot \Theta(r_{k+1} - r) \cdot A_{(j)k+1}, \quad (2.1)$$

где $\rho_{(j)k}(r)$ – функция плотности, присутствие у которой индекса j говорит о привязке к j -му приближению, а индекс k номерует слой; $A_{(j)k}$ – коэффициент сшивания, индексированный аналогично (в данной работе все коэффициенты сшивания приняты равными единице); $\Theta(r)$ – функция Хэвисайда; $r_1 = 0$.

Следует заметить, что прямое интегрирование функции плотности (2.1) необязательно, так как его результат может быть представлен в виде суммы масс шаровых слоев, получаемых при использовании формул (1.3), (1.6), (1.9) и (1.12). Таким образом, массу шара, состоящего из n слоев, записываем в виде

$$M = \sum_{k=1}^n \mu_k, \quad (2.2)$$

где μ_k – масса k -го шарового слоя, которая выражается как разность масс шаров различных радиусов. Линейное приближение функции плотности дает

$$\begin{aligned} \mu_k &= M(r_{k+1}) - M(r_k) = \\ &= \frac{4\pi}{3} \left[\rho_0 (r_{k+1}^3 - r_k^3) - \frac{3\alpha}{4} (r_{k+1}^4 - r_k^4) \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

экспоненциальное приближение приводит к

$$\begin{aligned} \mu_k &= M(r_{k+1}) - M(r_k) = \\ &= \frac{4\pi\rho_0}{\beta^3} [\gamma(3; \beta(r_{k+1})) - \gamma(3; \beta(r_k))], \end{aligned} \quad (2.4)$$

для обратного приближения с размерным коэффициентом получаем

$$\begin{aligned} \mu_k &= M(r_{k+1}) - M(r_k) = \\ &= \frac{4\pi\rho_0}{3} \left[r_{k+1}^3 F(1; 3; 4; -\gamma(r_{k+1})) - \right. \\ &\quad \left. - r_k^3 F(1; 3; 4; -\gamma(r_k)) \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

а для обратного приближения с безразмерным коэффициентом

$$\begin{aligned} \mu_k &= M(r_{k+1}) - M(r_k) = \\ &= \frac{4\pi\rho_0}{3} F\left(1; 3; 4; -\frac{1}{\gamma}\right) (r_{k+1}^3 - r_k^3). \end{aligned} \quad (2.6)$$

3 Результаты модельных расчетов для планет земной группы

Используем наши модельные функции плотности для расчета масс планет земной группы на основе известных средних значений радиусов, плотностей слоев и прочих характеристик [7]–[8], и сравним результат с действительными массами. Важным информационным источником

Таблица 3.1 – Расчетная масса в приближении одного слоя

Планета	Масса (кг)	Расчетная масса (кг)			
		Приближение			
		линейное I	экспоненциальное II	обратное III	обратное IV
Меркурий	$3,330 \cdot 10^{23}$	$3,724 \cdot 10^{23}$	$2,980 \cdot 10^{23}$	$3,453 \cdot 10^{23}$	$3,182 \cdot 10^{23}$
Венера	$4,869 \cdot 10^{24}$	$5,404 \cdot 10^{24}$	$4,359 \cdot 10^{24}$	$5,127 \cdot 10^{24}$	$4,622 \cdot 10^{24}$
Земля	$5,973 \cdot 10^{24}$	$6,848 \cdot 10^{24}$	$5,450 \cdot 10^{24}$	$6,382 \cdot 10^{24}$	$5,635 \cdot 10^{24}$
Марс	$6,419 \cdot 10^{23}$	$7,290 \cdot 10^{23}$	$5,770 \cdot 10^{23}$	$6,646 \cdot 10^{23}$	$6,292 \cdot 10^{23}$

Таблица 3.2 – Расчетная масса с учетом слоистой структуры

Планета	Масса (кг)	Расчетная масса (кг)		
		I–III–IV	III–IV–II	IV–I–III
Меркурий	$3,330 \cdot 10^{23}$	$3,333 \cdot 10^{23}$	$3,340 \cdot 10^{23}$	$3,251 \cdot 10^{23}$
Венера	$4,869 \cdot 10^{24}$	$4,957 \cdot 10^{24}$	$4,879 \cdot 10^{24}$	$4,768 \cdot 10^{24}$
Марс	$6,419 \cdot 10^{23}$	$6,476 \cdot 10^{23}$	$6,627 \cdot 10^{23}$	$6,260 \cdot 10^{23}$
		IV–III–II–IV–I	IV–II–I–IV–III	II–III–I–IV–III
Земля	$5,973 \cdot 10^{24}$	$6,042 \cdot 10^{24}$	$5,976 \cdot 10^{24}$	$5,761 \cdot 10^{24}$

также является интернет-ресурс [9], содержащий необходимые астрофизические данные.

Рассмотрим возможность использования только одной из четырех функций плотности. Результаты расчетов приведены в Таблице 3.1.

Лучшие из результатов отклоняются от реальных масс следующим образом:

- на 3,7% выше у Меркурия (III);
- на 5,3% ниже у Венеры (IV);
- на 6,0% ниже у Земли (IV);
- на 2,0% ниже у Марса (IV).

Полученные отклонения достаточно значительны, поэтому однослойное моделирование для планет земной группы с исследуемыми функциями плотности можно рассматривать как оценочное. Однако, очевиден факт преимущества функции плотности с безразмерным параметром (IV).

Учтем общепризнанную внутреннюю структуру исследуемых планет [8]–[9], состоящую из пяти компонентов у Земли (кора, верхняя мантия, мантия, внешнее ядро, внутреннее ядро) и трех компонентов у Меркурия, Венеры и Марса (кора, мантия, ядро).

Расчеты будем производить на основе формул (2.1), (2.3)–(2.6), варьируя комбинации функций плотности для указанных чисел слоев, что дает около 150 комбинаций.

В Таблице 3.2 приведены три лучших результата расчета масс в рамках указанного подхода.

Теперь лучшие результаты более точны и отклоняются от действительных масс следующим образом:

- на 0,09% выше у Меркурия (I–III–IV);
- на 0,2% выше у Венеры (III–IV–II);
- на 0,05% выше у Земли (IV–II–I–IV–III);
- на 0,89% выше у Марса (I–III–IV).

Полученные результаты можно рассматривать как вполне удовлетворительные, может

быть, за исключением Марса, а соответствующие функции плотности считать близкими к реальным и допускающими использование при решении соответствующих задач.

Заключение

Таким образом, в данной работе проведено моделирование функций плотности для массивного гравитирующего шара и на этой основе сделаны расчеты масс планет земной группы. При этом использовались простое однослойное приближение структуры и реальные многослойные. Расчеты показали, что предложенное поведение функций плотности является достаточно достоверным. Оно может быть использовано при проведении расчетов масс других планет, масс отдельных слоев внутренней структуры, решении уравнений динамического равновесия и прочих задач на их основе. Также несомненно, что к улучшению результатов моделирования может привести учет существующих малых, но физически существенных деформаций, связанных с центробежным эффектом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carroll, B.W. An Introduction to Modern Astrophysics / B.W. Carroll, D.A. Ostlie. – Pearson International Edition, 2007. – 1309 p.
2. Choudhuri, A.R. Astrophysics for Physicists / A.R. Choudhuri. – Cambridge University Press, 2010. – 471 p.
3. Магницкий, В.А. Внутреннее строение и физика Земли / В.А. Магницкий. – Москва : Наука, 2006. – 390 с.
4. Уильям, Б. Внутреннее строение планет / Б. Уильям. – Москва : Мир, 1987. – 328 с.
5. Фирагина, Е.В. Моделирование распределения плотности для планет земной группы /

Е.В. Фирагина / Актуальные вопросы физики и техники. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – Ч. 1. – С. 153–155.

6. Кузнецов, Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – Москва : Высшая школа, 1962. – 249 с.

7. Anderson, D.L. Theory of the Earth / D.L. Anderson. – Boston : Blackwell Publications, 1989. – 366 p.

8. Jordan, T.H. Structural Geology of the Earth's Interior / T.H. Jordan / Proceedings of the

National Academy of Sciences of the United States of America. – Boston : HighWire Press, 2014. – Vol. 76, № 8. – P. 4192–4200.

9. California Institute of Technology (USA) [Electronic resource] / NASA's Jet Propulsion Laboratory. – Pasadena, CA, 2004. – Mode of access : www.jpl.nasa.gov/solar-system/. – Date of access : 10.08.2014.

Поступила в редакцию 10.09.14.

ПОГЛОТИТЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СВЧ-ДИАПАЗОНА НА ОСНОВЕ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ И КИРАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Цянь Сонгсонг¹, В.А. Банний², А.Л. Самофалов³,
И.В. Семченко³, С.А. Хахомов³

¹Нанкинский университет науки и технологии, Нанкин, Китай

²Гомельский государственный медицинский университет, Гомель, Беларусь

³Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ABSORBERS OF MICROWAVES BASED ON POLYMER COMPOSITES AND CHIRAL STRUCTURES

Qian Songsong¹, V.A. Bannyi², A.L. Samofalov³,
I.V. Semchenko³, S.A. Khakhomov³

¹Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, China

²Gomel State Medical University, Gomel, Belarus

³F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Обоснована возможность использования киральных структур как компонентов поглотителей электромагнитного излучения СВЧ-диапазона. Экспериментально исследованы отражающие и поглощающие свойства полимерных композитов без киральных микроэлементов и при их наличии.

Ключевые слова: киральные микроэлементы, полимерные композиты, электромагнитное излучение СВЧ-диапазона, поглощающие покрытия, радиопоглощающие материалы, электромагнитные экраны.

The opportunity of using chiral structures as components of absorbers of microwaves has been proved. The reflecting and absorbing properties of polymer composites without chiral microelements and at their existence have been experimentally investigated.

Keywords: chiral microelements, polymer composites, microwaves, absorbing coating, radar-absorbing materials, electromagnetic screens.

Введение

В XXI веке значительно возросло количество разнообразных источников электромагнитного излучения (ЭМИ) и расширился используемый частотный диапазон. Воздействие ЭМИ на биологические и технические объекты является существенным фактором, влияющим на их жизнедеятельность и функционирование. Разработка систем защиты, экранирования и поглощения широкополосного ЭМИ является сложной теоретической и практической задачей. Технические требования, предъявляемые к таким системам, обуславливают необходимость поиска комплексных решений задачи защиты от ЭМИ, а также защиты информации, содержащейся в ЭМИ. Такие решения включают использование специальных радиопоглощающих материалов (РПМ) и покрытий, учет распространения радиоволн, оценку электродинамических свойств компонентов поглотителей и окружающей среды, конструктивных особенностей РПМ и электромагнитных экранов (ЭМЭ) и т. п. Многообразие компонентов, связующих, типов и конструкций РПМ и ЭМЭ приводит к необходимости определения целесообразности применения тех или иных устройств для решения конкретных задач.

Цель данной работы состояла в теоретическом обосновании возможности использования киральных структур как компонентов поглотителей ЭМИ СВЧ-диапазона, исследовании закономерностей взаимодействия СВЧ-излучения с киральными микроэлементами, разработке РПМ и ЭМЭ на основе полимерных композитов и киральных структур.

Вопросы создания поглощающих покрытий на основе однородных киральных структур изучены в работе [1]. В монографии под редакцией Л.М. Лынькова «Поглотители электромагнитного излучения. Применение в вооруженных силах» [2] рассмотрены методы обнаружения вооружения и военной техники, описаны виды маскировки военной техники, технология изготовления поглотителей ЭМИ, в том числе и на основе киральных сред. Например, в [3] описывается поглотитель, принцип действия которого основан на особых свойствах киральных сред. Киральность создается либо за счет геометрии включений (внутренняя), либо за счет структуры материала (созданием анизотропной многослойной конструкции) [4]. Киральные включения диспергированы в диэлектрическом материале с отличающейся комплексной диэлектрической

проницаемостью, в качестве которого могут применяться проводящие полимеры [5]. Характеристики материалов исследовались в диапазоне частот 8–18 ГГц [2].

В [6] предлагается использовать в качестве экранирующего покрытия искусственную среду, обладающую свойством киральности. Покрытие для защиты от ЭМИ может наноситься на объекты произвольной формы и не требует специального изменения форм конструкций. Покрытие представляет собой слой однородного диэлектрика, на поверхность которого нанесены полосковые металлические элементы в виде букв *S*. Причём элементы, размещённые на верхней и нижней поверхностях слоя, повернуты друг относительно друга на некоторый угол. Расстояние между соседними полосковыми элементами соотносится с длиной волны падающего ЭМИ. Результат заключается в возможности создания частотно- и поляризационно-селективного покрытия на основе полосковых элементов киральной формы. Покрытие является экранирующим для определённых полос частот, а для волн других частот является прозрачным. Полоса частот поглощения (или отражения) определяется размерами и формой киральных элементов, нанесённых на поверхности, а также расстоянием между ними [6].

В [7] рассматривается достоверность публикаций, заявляющих об использовании киральных сред (точнее комплексных микроволновых поглощающих материалов с киральными включениями) в качестве микроволновых поглотителей. Проведено сравнение киральных и некиральных поглотителей относительно поглощающих диэлектриков. Результатом является вывод о том, что авторы не обнаружили никакого физического механизма, позволявшего бы утверждать, что киральные включения улучшают характеристики микроволновых поглотителей. Обнаружено, что включения композитных материалов, состоящих из тонких металлических нитей, внесённых в сильно поглощающий диэлектрик, позволяют получить полуволновый резонанс, причиной которого не является геометрическая форма этих включений (являющаяся основным фактором поглощения).

1 Физическая модель полимерного слоистого ЭМЭ

Разработана физическая модель полимерного слоистого ЭМЭ (рисунок 1.1) [8]. В нем реализуются основные механизмы преобразования энергии ЭМИ. Предложено уравнение для описания потерь энергии ЭМИ, проходящего через этот экран.

Экран моделируется тремя слоями: диэлектрическим наружным (*D*), который обеспечивает согласование волнового сопротивления экрана и атмосферы, магнитным (*M*) и электропроводящим (*C*).

Потери энергии ЭМИ, прошедшего через него, складываются из потерь в слоях – диэлектрических E_D , магнитных E_M и вызванных электропроводностью E_C , а также ослабления энергии на границе раздела слоев E_{DM} и E_{MC} .

$$\Delta E = E_0 - E_h = E_D + E_M + E_C + E_{DM} + E_{MC}. \quad (1.1)$$

С учетом физических параметров слоев (ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, γ – удельная электропроводность), их толщины (h) и межфазного взаимодействия выражение (1.1) можно представить в виде суммы функций:

$$\Delta E = F_D(\varepsilon_D, h_D) + F_M(\mu_M, h_M) + F_C(\gamma_C, h_C) + F_{DM}(\varepsilon_{DM}, \mu_{DM}) + F_{MC}(\mu_{MC}, \gamma_{MC}). \quad (1.2)$$

Функции F_{DM} и F_{MC} определяют ослабление энергии вследствие поглощения и рассеяния электромагнитных волн (ЭМВ) на границах слоев. Оно зависит от диэлектрических (ε_{DM}) и магнитных (μ_{DM} , μ_{MC}) параметров границ раздела, являющихся функцией межфазного взаимодействия слоев и электропроводности (γ_{MC}) границы *MC*.

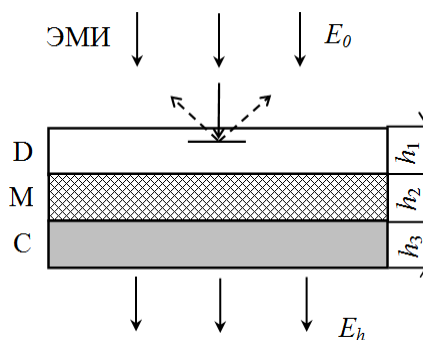


Рисунок 1.1 – Модель полимерного слоистого ЭМЭ

Модель показывает, что при разработке ЭМЭ необходимо учитывать как электромагнитные параметры каждого из слоев, так и их физико-химическое взаимодействие.

2 Способы формирования экспериментальных образцов РПМ и ЭМЭ

При проведении технологических экспериментов полиэтиленовое связующее механически смешивали с функциональным наполнителем (ФН) и затем подвергали гранулированию на экструзионной линии ЭК-75/1200, снабженной двухшнековым экструдером. Гранулят перерабатывали в листовые конструкционные РПМ с использованием типовых технологий формирования изделий из термопластов. Листовые монолитные РПМ формировали методами «горячего» прессования, волокнистые РПМ в виде нетканых полотен и конструктивных элементов – методом экструзии с пневматическим напылением полимерного расплава на формообразующую подложку (метод melt blowing) [8], [9]. В состав

полимерной матрицы в процессе их производства были введены углеродные и металлические нити, металлические спирали, углеродные ткани и металлические сетки (рисунок 2.1) различной структуры и электропроводности. Указанные операции были объединены в технологическом цикле и не требовали дополнительных приемов по скреплению волокон с компонентами.

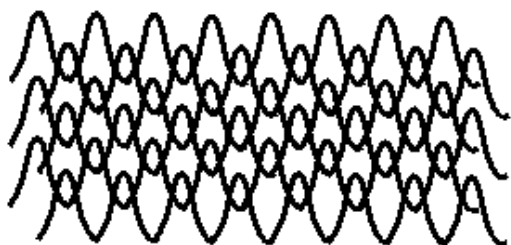


Рисунок 2.1 – Структура металлической сетки, введенной в состав комбинированного волокнистого РПМ

На рисунке 2.2 приведена схема расположения слоев в комбинированном волокнистом материале и изображения участков образцов волокнистых РПМ, армированных углеродными нитями (рисунок 2.3 а) и углеродной тканью (рисунок 2.3 б).

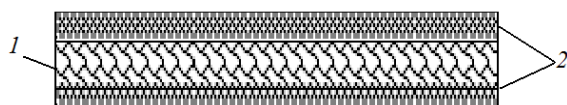


Рисунок 2.2 – Схема расположения слоев в комбинированном волокнистом материале:
1 – металлическая сетка;
2 – нетканый полимерный melt-blown материал

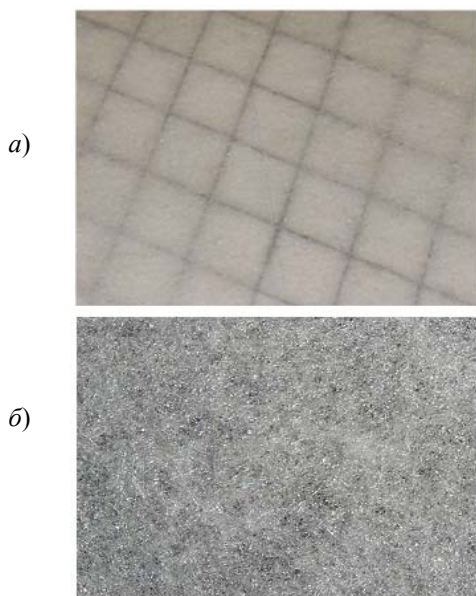


Рисунок 2.3 – Оптические изображения участков образцов волокнистых РПМ, армированных углеродными нитями (а) и углеродной тканью Бусофит ТР 3/2 (б) (масштаб 2:1)

Изготовлены комбинированные РПМ, типа «сэндвич», состоящие из чередующихся слоев волокнистого термопласта и углеродных тканей различной структуры и электропроводности. Толщина полимерных волокнистых слоев выбиралась кратной четверти средней длины волны из диапазона воздействующего ЭМИ. Слои адгезионно склеены или прошиты в многослойный композитный лист толщиной, не превышающей 14 мм.

3 Экспериментальное исследование

Частотные зависимости коэффициентов отражения (R) и ослабления (S) энергии нормально падающей плоской ЭМВ для экспериментальных образцов РПМ измерены в волноводных линиях в диапазоне частот 2–27 ГГц (рисунок 3.1).

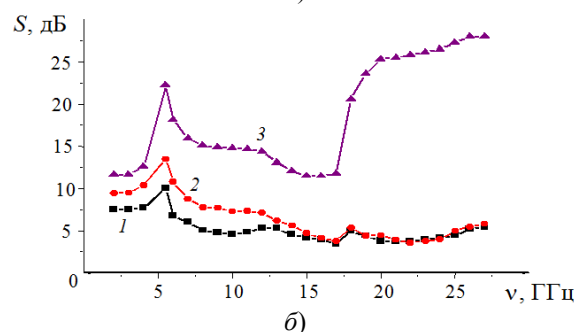
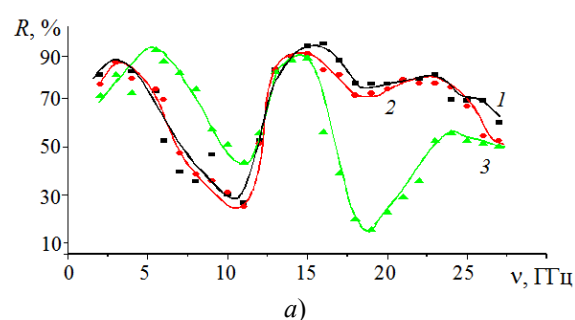


Рисунок 3.1 – Частотные зависимости для экспериментальных образцов РПМ:

а – коэффициентов отражения (R) и б – ослабления (S) энергии нормально падающей плоской ЭМВ (в волноводе) для образцов РПМ, толщиной $h = 3$ мм

Состав образцов:

- 1 – полиэтилен (ПЭ) + марганец-цинковый феррит (ММФ) (50% масс, $d = 50\text{--}200$ мкм);
- 2 – ПЭ + ММФ (50% масс, $d = 50\text{--}200$ мкм) + стеклосферы (10% масс, $d = 200\text{--}500$ мкм);
- 3 – ПЭ + ММФ (50% масс, $d = 50\text{--}200$ мкм) + углеродная ткань Бусофит ТР3/2.

Из графика на рисунке 3.1 видно, что замена части полимерного связующего стеклосферами и армирование композитного РПМ углеродной тканью улучшает параметры R и S . Это объясняется, во-первых, увеличением общего количества ФН, обеспечивающих магнитные, диэлектрические и джоулевы потери падающего на

композит СВЧ-излучения (при соблюдении оптимизированной по критерию минимального отражения ЭМВ степени наполнения); во-вторых, сочетанием разных механизмов потерь и, наконец, улучшением условий рассеяния ЭМИ на структурных неоднородностях композита. Введение в полимерную композицию углеродных или металлических волокон, разной длины и диаметра, позволяет расширить полосу и увеличить коэффициент поглощения РПМ [10], что аналогично введению полидисперсных наполнителей.

В безэховой камере в диапазоне частот ЭМИ 2–4 ГГц измерены радиофизические характеристики R и S некоторых листовых монолитных, волокнистых и комбинированных РПМ (размер образцов 40×30 см) (рисунок 3.2 и 3.3).

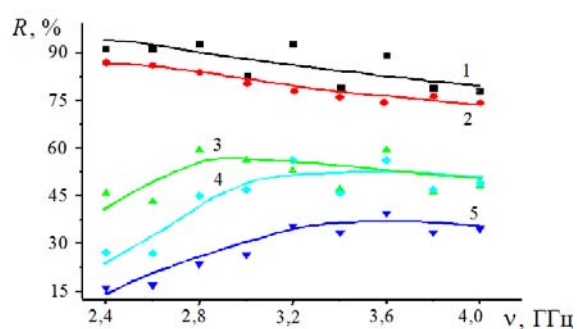


Рисунок 3.2 – Частотные зависимости коэффициентов отражения (R) нормально падающей плоской ЭМВ (в безэховой камере) для листовых образцов волокнистых комбинированных ($h = 3–3,5$ мм) и монолитных ($h = 10$ мм) РПМ:

- 1 – волокнистый ПЭ + металлическая сетка;
- 2 – волокнистый ПЭ + углеродные нити;
- 3 – волокнистый ПЭ + углеродная ткань Бусофит ТР3/2;
- 4 – монолитный ПЭ + ММФ (40% масс, $d = 50–200$ мкм);
- 5 – блочный ПЭ + ММФ (40% масс, $d = 50–200$ мкм) + стеклосферы (10% масс, $d = 200–500$ мкм)

Из рисунков 3.2 и 3.3. видно, что образцы 1 и 2 относятся к ЭМЭ отражающего типа: значение R велико и сравнимо с отражением от металлического листа. Чем толще углеродная нить, выше ее электропроводность и масса углеродных нитей, приходящаяся на единицу длины образца, тем характернее приближение свойств композитного материала к металлическому листу. Для сравнения, на рисунках 3.2, 3.3 приведены радиофизические характеристики монолитных образцов РПМ. Образцы 4, 5 можно рассматривать в качестве поглотителей ЭМИ в исследуемом частотном диапазоне. Эти образцы содержат в значительном количестве ММФ, обеспечивающий магнитные потери. По радиофизическим характеристикам образец 3 занимает промежуточное

положение между экранами поглощающего и отражающего типов.

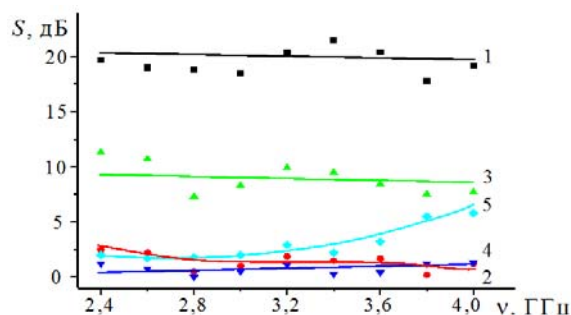


Рисунок 3.3 – Частотные зависимости ослабления (S) энергии ЭМИ, проходящего (в безэховой камере) через листовые образцы волокнистых комбинированных ($h = 3–3,5$ мм) и монолитных ($h = 10$ мм) РПМ:

- 1 – волокнистый ПЭ + металлическая сетка;
- 2 – волокнистый ПЭ + углеродные нити;
- 3 – волокнистый ПЭ + углеродная ткань Бусофит ТР3/2;
- 4 – монолитный ПЭ + ММФ (40% масс, $d = 50–200$ мкм);
- 5 – монолитный ПЭ + ММФ (40% масс, $d = 50–200$ мкм) + стеклосферы (10% масс, $d = 200–500$ мкм)

Эффективная площадь рассеяния (ЭПР) является важной характеристикой отражательной способности тела и рассчитывается по формуле (3.1):

$$\text{ЭПР} = R \times S_{\Pi} \text{ (м}^2\text{)}, \quad (3.1)$$

где S_{Π} – площадь поверхности образца, обращенной к падающему ЭМИ.

Значения ЭПР для образцов РПМ, содержащих в качестве ФН ММФ или металлические спирали, представлены в таблице 3.1, а содержащих в составе углеродные нити, углеродные ткани или металлические сетки, представлены в таблице 3.2.

Из таблицы 3.1 видно, что при замене металлической подложки на исследуемые образцы композитных РПМ на основе термопластов, ЭПР уменьшается в 3–6 раз. Из данных таблицы 3.2 следует, что ЭПР уменьшается в 1,1–2,3 раза при замене металлической подложки на исследуемые образцы композитных волокнистых РПМ. Во многих случаях такое уменьшение значения ЭПР достаточно, чтобы дезинформировать электронную систему радиолокационного наведения объектов военной техники.

Измерения радиофизических параметров экспериментальных образцов РПМ и ЭМЭ, содержащих различные по природе, размерам и форме ФН, показали, что практически все механизмы поглощения энергии ЭМИ (диэлектрические, магнитные, джоулевы потери и т. д.) могут быть реализованы в полимерных композитах.

Таблица 3.1 – Значения ЭПР листовых образцов РПМ, толщиной 10 мм, площадью $12 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, изготовленных методом термического прессования, в сравнении с металлическим экраном

Частота, ГГц	ЭПР, $\cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, для образцов РПМ			
	Металлическая подложка	ПЭ + металлические спирали (10% масс)	ПЭ + ММФ (40% масс)	ПЭ + ММФ (40%) + металлические спирали (10%)
2,45	12,0	2,6	2,0	3,0
3,0	12,0	4,8	3,2	5,6

Таблица 3.2 – Значения ЭПР листовых образцов комбинированных РПМ, толщиной 3,5 мм, площадью $12 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, изготовленных методом melt blowing в сравнении с металлическим экраном

Частота, ГГц	ЭПР, $\cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, для образцов			
	Металлическая подложка	Комбинированные волокнистые РПМ		
		ПЭ+металлическая сетка	ПЭ + углеродные нити	ПЭ + углеродная ткань
2,45	12,0	11,0	10,3	5,2
3,0	12,0	9,5	10,1	6,7

Хаотично распределенные в полимерном композите металлические спирали также вносят вклад в общую величину ослабления энергии СВЧ-излучения. Их вклад может быть более весомым при оптимизации размеров спиралей, направления и угла закрутки витков, количества витков, упорядочении их расположения в полимерной матрице и т. п. В каждой из этих спиралей под действием ЭМВ индуцируются одинаково значимые электрический дипольный момент и магнитный момент, направленные вдоль оси спирали. Поэтому материал, созданный на основе оптимальных спиралей, проявляет не только диэлектрические, но и магнитные свойства. Вблизи резонансной частоты относительная диэлектрическая проницаемость и относительная магнитная проницаемость метаматериала имеют приблизительно равные значения. Это равенство обеспечивает согласование входного импеданса поглотителя с волновым импедансом свободного пространства, то есть отсутствие отраженной волны. В этих условиях необходимо выбрать материал, из которого изготавливаются спирали, чтобы достичь поглощения СВЧ волны внутри искусственной структуры. Преимуществом оптимальных спиралей является их одинаково результативная активация как электрическим, так и магнитным полем. В результате поглощающие свойства структуры не будут зависеть от поляризации падающей волны. Кроме того, оптимальные свойства спиралей проявляются не только во внешних полях, но и при взаимном влиянии спиралей. Поэтому необходимые свойства поглотителя будут сохраняться и при высокой концентрации спиралей в материале.

Экспериментальная проверка ряда теоретических закономерностей распространения ЭМВ в

искусственных киральных средах проводится в Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины [11], [12]. Научная гипотеза работы состоит в возможности создания «совершенного» или «идеального» поглотителя, не отражающего ЭМВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mariotte, F.* Application of heterogeneous chiral materials to the design of radar absorbing materials / F. Mariotte, B. Sauviac, D. Gogny // Conf. Journées Maxwell' 95 : Proc. Journées Maxwell Int. Workshop, Bordeaux (France), 6–9 Jun 1995. – Bordeaux, 1995. – poster 16.
2. *Поглотители электромагнитного излучения. Применение в вооруженных силах: монография* / Т.В. Бороботько [и др.]; под ред. Л.М. Лынькова. – Минск : Бестпринт, 2006. – 228 с.
3. *Electromagnetic shield* : пат. 6001282, США, МПК Н 05 F 03/00 / Kanase; K. Rick, (Salem, OR); Electro K., Inc. (Los Angeles, CA). – № 312085; заявл. 15.05.1999; опубл. 14.12.1999.
4. *Electromagnetic shielding and absorptive materials* : пат. 4948922, США, МПК Н 05 К 09/00 / V.K. Varadan, K. Vijay (State College, PA); V.V. Varadan; V. Vasundara (State College, PA); The Pennsylvania State University (State College, PA). – № 252516; заявл. 30.09.1988; опубл. 14.08.1990.
5. *Apparatus and method for shielding electromagnetic wave* : пат. 6426457 США, МПК7 Н 05 К 09/00 / Toyoda, Junichi (Tokyo, JP); Iwashita, Sakan (Kanagawa, JP); Sony Corporation (Tokyo, JP). – № 292833, заявл. 16.04.1999; опубл. 30.07.2002.
6. *Неганов, В.А.* Селективное покрытие для защиты от электромагнитного излучения / В.А. Неганов, О.В. Осипов, А.А. Долбичкин // Физика и

технические приложения волновых процессов: тез. докл. и сообщ. 3 междунар. науч.-техн. конф., Волгоград, 6–12 сент. 2004 г. – Волгоград : Автор. перо, 2004. – С. 295–296.

7. Cloete, J.H. Scattering and absorption by thin metal wires in rectangular waveguide – chiral cranks versus non-chiral staples / J.H. Cloete; M. Bingle, D.B. Davidson // 8-th International Conference on Electromagnetics of Complex Media, Lisbon, 27–29 Sept. 2000. – Lisbon, 2000. – P. 353–359.

8. Банний, В.А. Взаимодействие радиоволн СВЧ диапазона с полимерными гетерогенными системами и разработка электромагнитных экранов на основе полиэтилена : дис. ... канд. техн. наук : 01.04.07 / В.А. Банний. – Гомель, 2005. – 132 л.

9. Банний, В.А. Физико-химические и технологические особенности формирования полимерных композитных радиопоглощающих материалов

/ В.А. Банний, Л.С. Пинчук, В.А. Гольдаде // Материаловедение. – 2007. – № 6. – С. 17–24.

10. Гибкие конструкции экранов электромагнитного излучения / Л.М. Лыньков [и др.]; под ред. Л.М. Лынькова. – Минск : БГУИР, 2000. – 284 с.

11. Семченко, И.В. Использование парных спиралей оптимальной формы для создания слабо отражающих покрытий в СВЧ диапазоне / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов // Проблемы физики, математики и техники. – 2009. – № 1. – P. 33–39.

12. Semchenko, I.V. Helices of optimal shape for nonreflecting covering / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // The European Physical Journal. Applied Physics. – 2010. – Vol. 49. – P. 33002.

Поступила в редакцию 06.09.14.

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Л.М. Белоконь

Белорусско-Российский университет, Могилёв, Беларусь

ON THE INTERSECTIONS OF THE MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

L.M. Belokon

Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus

Пусть \mathfrak{F} – непустая радикальная формация, π – некоторое множество простых чисел. Исследуются условия, при которых совпадают пересечения максимальных подгрупп конечной группы G взаимно простых с числами из π индексов: $\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\pi}(G)$; $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$; $\overline{\Delta}_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$. Установлены, вытекающие как следствия, результаты для необязательно разрешимой конечной группы G о пересечениях максимальных подгрупп без ограничений на индексы: $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi(G)$; $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$; $\overline{\Delta}_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$. Получены аналоги утверждений о пересечениях $\Phi_{\pi}(G)$ и $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ для необязательно радикальных формаций.

Ключевые слова: радикальные формации, \mathfrak{F} -радикалы, пересечения максимальных подгрупп конечной группы.

Let \mathfrak{F} be a nonempty radical formation and let π be a set of primes. Conditions under which intersections of the maximal subgroups of a finite group mutually simple with numbers from π indexes coincide: $\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\pi}(G)$; $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$; $\overline{\Delta}_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ are investigated. The results following as consequences were established for not necessarily solvable finite groups G on intersections of the maximal subgroups without restrictions on indexes: $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi(G)$; $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$; $\overline{\Delta}_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$. Analogs of statements on intersections $\Phi_{\pi}(G)$ and $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ for not necessarily radical formations are received.

Keywords: radical formations, \mathfrak{F} -radicals, intersections of maximal subgroups in a finite group.

Введение

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1]. Обозначаем через π некоторое множество простых чисел, $\pi' = P \setminus \pi$, где P – множество всех простых чисел, считаем также, что $\pi \neq P$. Через $\Phi_{\pi}(G)$ обозначают пересечение всех максимальных подгрупп группы G , индекс каждой из которых не делится на простые числа из π . Пусть N – нормальная подгруппа группы G . Пересечение всех максимальных подгрупп группы G , каждая из которых имеет взаимно простой с числами из π индекс и не содержит (содержит) N , обозначаем через $\Phi_{\pi, N}(G)$ ($\Phi_{\pi, N}(G)$ соответственно). При отсутствии ограничений на индексы максимальных подгрупп в соответствующих случаях применяем обозначения $\Phi_N(G)$ и $\Phi_N(G)$. Если в группе G не существует максимальных подгрупп, отвечающих указанным требованиям, соответствующие пересечения считаем совпадающими с G .

В работе [2] В.С. Монаховым установлено, что для всякой разрешимой неединичной группы G справедливо равенство $\Phi_{F(G)}(G) = \Phi(G)$; существенность условия разрешимости группы $G \neq 1$ подтверждается примером неразрешимой группы $SL(2, 5)$, в которой подгруппы Фраттини и Фиттинга совпадают, а значит, все максимальные подгруппы содержат подгруппу Фиттинга. Рассмотрим регулярное сплетение $G = P \wr H$, P – группа простого порядка p , H – простая неабелева группа. Тогда $G = KH$, K – элементарная абелева нормальная p -подгруппа G . Очевидно, $F(G) = K$, а так как каждая максимальная подгруппа G , содержащая H , не содержит K , то $\Phi(G) \subset F(G)$. Пусть $(|H|, p) = 1$. Тогда группа G p -разрешима. Множество всех максимальных подгрупп группы G , каждая из которых имеет p -индекс в G , совпадает с множеством всех максимальных подгрупп, не содержащих $F(G)$, а пересечение всех таких максимальных подгрупп $\Phi_{p'}(G)$ обладает свойством $C_{p'}$. По лемме 1 [3]

$$\Phi_{p'}(G)/O_{p'}(G) = \Phi(G/O_{p'}(G)).$$

Так как $O_{p'}(G) \subseteq H$, то $O_{p'}(G) = 1$. Следовательно, $\Phi_{p'}(G) = \Phi_{\overline{F(G)}}(G) = \Phi(G)$. Возникает задача об исследовании условий, при которых выполняется равенство $\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi(G)$, а также, в более общей ситуации, $\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \Phi_{\pi}(G)$ для необязательно разрешимой группы G и непустой радикальной формации \mathfrak{F} , $G_{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -радикал группы G . Аналогичная задача с вытекающими из неё случаями для $\pi = \emptyset$ решается в отношении пересечений всех максимальных \mathfrak{F} -абнормальных в G подгрупп, взаимно простых с числами из π индексов, не содержащих $G_{\mathfrak{F}}$, а также для пересечений всех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , не принадлежащих формации \mathfrak{F} , взаимно простых с числами из π индексов и не содержащих $G_{\mathfrak{F}}$. Доказаны теоремы о пересечениях всех максимальных и всех максимальных \mathfrak{F} -абнормальных подгрупп группы G , индексы которых взаимно просты с числами из π , для необязательно радикальной формации \mathfrak{F} .

1 Предварительные сведения

Помимо используемых в тексте статьи обозначений и результатов со ссылками на указанные в списке литературы опубликованные работы, приведём дополнительно некоторые необходимые для дальнейшего изложения сведения. Пусть $\mathfrak{J}_{\pi'}^M = \bigcap_{\varphi \in M} (\mathfrak{J}_{\varphi})_{\pi'}$, где $(\mathfrak{J}_{\varphi})_{\pi'}$ – формация всех φ -дисперсивных π' -групп, φ пробегает некоторое множество M линейных упорядочений множества всех простых π' -чисел. Тогда $\mathfrak{S}_{\pi'} \mathfrak{J}_{\pi'}^M$ – радикальная локальная формация, содержащая $\mathfrak{S}_{\pi'} \mathfrak{N}_{\pi'}$ [4]. В случае $\pi = \emptyset$ формацию $\mathfrak{J}_{\pi'}^M$ обозначаем $\mathfrak{J}^M = \bigcap_{\varphi \in M} \mathfrak{J}_{\varphi}$. Группа M называется квазинильпотентной [5, с. 124], если $HC_M(H/K) = M$ для любого главного фактора H/K группы M . Известно, что формация \mathfrak{N}_{π}^* всех квазинильпотентных групп является радикальной. Через $F^*(G)$ обозначают квазинильпотентный радикал группы G . Обозначим через \mathfrak{N}_{π}^* формацию всех квазинильпотентных π' -групп, $2 \in \pi'$; а через $F_{\pi'}^*(G) = \mathfrak{S}_{\pi'} \mathfrak{N}_{\pi'}^*$ -радикал группы G . Используем принятые обозначения \mathfrak{S} , \mathfrak{S}_{π} , $\mathfrak{S}^{\pi'}$ для формации всех разрешимых групп, формации всех разрешимых π -групп и для формации всех π' -разрешимых групп соответственно; $F_{\pi'}(G)$ – π' -нильпотентный радикал группы G .

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Следуя [3], обозначаем через $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ пересечение всех

\mathfrak{F} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , индекс каждой из которых не делится на простые числа из π , а через $\overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , не принадлежащих формации \mathfrak{F} , индекс каждой из которых не делится на простые числа из π . Пусть N – нормальная подгруппа группы G . Через $\Delta_{\pi, N}^{\mathfrak{F}}(G)$ ($\Delta_{\pi, N}^{\mathfrak{F}}(G)$) обозначаем пересечение всех тех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных подгрупп группы G , индекс каждой из которых не делится на простые числа из π и каждая из которых не содержит (содержит, соответственно) N , а через $\overline{\Delta}_{\pi, N}^{\mathfrak{F}}(G)$, ($\overline{\Delta}_{\pi, N}^{\mathfrak{F}}(G)$) – пересечение всех тех \mathfrak{F} -абнормальных, не принадлежащих формации \mathfrak{F} максимальных подгрупп группы G , индекс каждой из которых не делится на простые числа из π и каждая из которых не содержит (содержит, соответственно) N . При рассмотрении пересечений максимальных подгрупп без ограничений на индексы в соответствующих случаях используем обозначения $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, $\overline{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Delta_N^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Delta_N^{\mathfrak{F}}(G)$, $\overline{\Delta}_N^{\mathfrak{F}}(G)$, $\overline{\Delta}_N^{\mathfrak{F}}(G)$.

При отсутствии в группе G указанных максимальных подгрупп соответствующие пересечения полагаем совпадающими с группой G .

Определение. Пусть N – нормальная подгруппа группы G . Определим группу $\tilde{F}_N(G)$ следующим образом: $\tilde{F}_N(G) \supseteq N$, $Soc(G/N) = \tilde{F}_N(G)/N$. В соответствии с определением [1, с. 249–250] $Soc(1) = 1$, а значит, $\tilde{F}_N(N) = N$. Для $N = \Phi_{\pi}(G)$ ($N = \Phi(G)$) используем обозначения $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)$ и $\tilde{F}(G)$ соответственно. Известно [1, с. 79], что $\tilde{F}(G) = F(G)$, если $\tilde{F}(G)$ разрешима.

В случае \mathfrak{F} – непустая формация обозначаем $\tilde{F}_N(G) = \tilde{F}_{\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}}(G)$ ($\tilde{F}_N(G) = \tilde{F}_{\overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{F}}}(G)$), если $N = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ ($N = \overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$, соответственно).

В разделе 3 настоящей работы неоднократно используется следующая лемма из [4].

Лемма 1.1 [4]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{F}$ – локальная S_{π} -замкнутая формация, содержащая класс всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. Если в группе G подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} , то $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

2 Пересечения максимальных подгрупп конечной группы, не содержащих её \mathfrak{F} -радикал, \mathfrak{F} – радикальная формация

Основными результатами раздела 2 являются теорема 2.2 и теорема 2.3 с вытекающими из

них следствиями 2.2.1 и 2.3.1 соответственно. Теорема 2.4 распространяет результаты, относящиеся к пересечению $\Phi_{\pi, F_{\pi'}(G)}(G)$, а также к обобщающему ситуацию пересечению $\Phi_{\pi, G_{\pi'}}(G)$, \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех π' -нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi'}$, на случай, когда вместо формационного радикала группы G рассматривается подгруппа $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)$.

Лемма 2.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} , K – нормальная, а L – субнормальная подгруппы группы G такие, что $O_{\pi}(G) \subseteq K \subseteq \Phi_{\pi}(G) \cap L$. Тогда $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}K/K$.

Доказательство. Пусть группа G и её подгруппы $\Phi_{\pi}(G)$, K и L удовлетворяют условию леммы, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация. Так как по теореме 7.3 [1] группа $H/K = L/K \cap (G/K)_{\mathfrak{F}}$ субнормальна в $(G/K)_{\mathfrak{F}}$, то ввиду S_n -замкнутости \mathfrak{F} , очевидно, $H/K \in \mathfrak{F}$. А так как H/K нормальна в L/K , то согласно следствию 7.7.2 [1] $H/K \subseteq (L/K)_{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, $(L/K)_{\mathfrak{F}} \subseteq H/K$ ввиду субнормальности $(L/K)_{\mathfrak{F}}$ в G/K . Значит, $H/K = (L/K)_{\mathfrak{F}}$. По лемме 1 [4] $(G/K)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}K/K$. Таким образом,

$$(L/K)_{\mathfrak{F}} = L/K \cap G_{\mathfrak{F}}K/K = L \cap G_{\mathfrak{F}}K/K = (L \cap G_{\mathfrak{F}})K/K = L_{\mathfrak{F}}K/K,$$

ибо \mathfrak{F} -подгруппа $L \cap G_{\mathfrak{F}}$ нормальна в L , а $L_{\mathfrak{F}}$ содержится в $G_{\mathfrak{F}}$ как субнормальная \mathfrak{F} -подгруппа G . Лемма доказана.

Следствие 2.1.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая класс всех nilпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} , K – нормальная, а L – субнормальная подгруппы группы G такие, что $O_{\pi}(G) \subseteq K \subseteq \Phi_{\pi}(G) \cap L$. Тогда $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$. В частности,

$$(G/\Phi_{\pi}(G))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Phi_{\pi}(G).$$

Другие очевидные следствия леммы 2.1, обобщающие соответствующие результаты из [4], получаем при $\pi = \emptyset$ для произвольной радикальной локальной формации \mathfrak{F} , а также для радикальной локальной формации \mathfrak{F} , содержащей формацию всех nilпотентных групп \mathfrak{N} .

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех π' -нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда

$$(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} = F_{\pi'}(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = \Phi_{\pi}(G); \text{ в частности, } F_{\pi'}(\Phi_{\pi, F_{\pi'}(G)}(G)) = \Phi_{\pi}(G).$$

Доказательство. Пусть G – группа, удовлетворяющая условию теоремы, \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi'}$. Докажем вначале, что $(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} = \Phi_{\pi}(G)$. Так как группа $(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}}$ является характеристической в группе $\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G)$, а $\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G)$ – характеристическая подгруппа G , то $(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}}$ содержится в $G_{\mathfrak{F}}$. Поэтому $(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} = \Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}}$. Если G – π -группа, то $G = G_{\mathfrak{F}}$, и по определению $\Phi_{\pi}(G) = G = \Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G)$, т. е. в этом случае доказываемое утверждение верно. Пусть G – π' -группа. Так как $\Phi_{\pi}(G) \in C_{\pi}$, то $\Phi_{\pi}(G) \neq G$. В случае $\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$, т. е. все максимальные подгруппы G , имеющие π' -индексы, содержат $G_{\mathfrak{F}}$, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\pi}(G)$. А так как ввиду леммы 1 [3] $\Phi_{\pi}(G) \subseteq F_{\pi'}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, то $G_{\mathfrak{F}} = \Phi_{\pi}(G)$. Следовательно, $(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} = \Phi_{\pi}(G)$. Полагаем поэтому, что $\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$. Предположим,

$$N = \Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \supset \Phi_{\pi}(G).$$

Так как \mathfrak{F} -подгруппа N нормальна в G , то $\Phi_{\pi}(G) \subset N \subseteq \Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\pi}(G)$ – противоречие. Следовательно, $\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}} = \Phi_{\pi}(G)$, т. е. $(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} = \Phi_{\pi}(G)$. А так как группа $\Phi_{\pi}(G)$ π' -нильпотентна, то

$$\Phi_{\pi}(G) \subseteq F_{\pi'}(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G)) \subseteq (\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}},$$

откуда $\Phi_{\pi}(G) = F_{\pi'}(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))$. Теорема доказана.

Следствие 2.1.1. Пусть \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех nilпотентных групп \mathfrak{N} . Для любой группы G справедливо равенство $(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} = F(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = \Phi(G)$; в частности, $F(\Phi_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G)) = \Phi(G)$.

Следствие 2.1.2. Пусть \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех π' -нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Если в G существуют максимальные, взаимно простых с числами из π индексов подгруппы M , удовлетворяющие условию $MG_{\mathfrak{F}} = G$, то \mathfrak{F} -радикал пересечения всех таких максимальных подгрупп M совпадает с π' -нильпотентным радикалом этого пересечения и с подгруппой $\Phi_{\pi}(G)$.

Следствие 2.1.3. Пусть \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . И пусть максимальная в группе G подгруппа H удовлетворяет условию $HG_{\mathfrak{F}} = G$. Тогда \mathfrak{F} -радикал пересечения всех таких максимальных подгрупп H совпадает с нильпотентным радикалом этого пересечения и с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$.

Следствие 2.1.4. Пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . И пусть \mathfrak{X} – одна из формаций $\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{J}_{\pi'}^M, \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}, \mathfrak{S}_{\pi'}$. Тогда $(\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = F_{\pi'}(\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G)) = \Phi_{\pi}(G)$.

Следствие 2.1.5. Пусть G – группа, и пусть \mathfrak{Y} – одна из формаций $\mathfrak{J}^M, \mathfrak{S}$. Тогда $(\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{Y}}}}(G))_{\mathfrak{Y}} = F(\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{Y}}}}(G)) = \Phi(G)$.

Следствие 2.1.6. Пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда справедливо равенство

$$F_{\pi'}^*(\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G)) = F_{\pi'}(\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G)) = \Phi_{\pi}(G).$$

Таким образом, если $F_{\pi'}(G) \neq F_{\pi'}^*(G)$, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} , то в G существуют максимальные, взаимно простых с числами из π индексов подгруппы M , удовлетворяющие условию $MF_{\pi'}^*(G) = G$; $\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}^*$ -радикал пересечения всех таких максимальных подгрупп M совпадает с π' -нильпотентным радикалом этого пересечения и с подгруппой $\Phi_{\pi}(G)$.

Доказательство. Если

$$F_{\pi'}(G) \neq F_{\pi'}^*(G), \quad \Phi_{\pi}(G) \in C_{\pi},$$

то ввиду леммы 1 [3] $\Phi_{\pi}(G) \subseteq F_{\pi'}(G) \subset F_{\pi'}^*(G)$. Значит, в G существуют максимальные, взаимно простых с числами из π индексов подгруппы M , не содержащие $F_{\pi'}^*(G)$. Теперь применим следствие 2.1.2.

Следствие 2.1.7. Для всякой группы G справедливо равенство

$$F^*(\Phi_{\overline{F^*(G)}}(G)) = F(\Phi_{\overline{F^*(G)}}(G)) = \Phi(G).$$

Таким образом, если $F(G) \subset F^*(G)$, то подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ совпадает с квазинильпотентным (и нильпотентным) радикалом пересечения всех таких максимальных подгрупп H группы G , что $HF^*(G) = G$.

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда

$$(\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{\pi}(G))_{\mathfrak{F}} = F_{\pi'}(\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{\pi}(G)) = 1.$$

Доказательство. В соответствии со следствием 2.1.1 леммы 2.1 имеем:

$$(\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{\pi}(G))_{\mathfrak{F}} = (\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G))_{\mathfrak{F}}/\Phi_{\pi}(G).$$

Теперь применим теорему 2.1. Лемма доказана.

Следствие 2.2.1. Пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда $F_{\pi'}(\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G)/\Phi_{\pi}(G)) = 1$.

Следствие 2.2.2. Пусть G – группа. Тогда $F(\Phi_{\overline{F(G)}}(G)/\Phi(G)) = 1$.

Лемма 2.3. Пусть \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех π' -нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда $F_{\pi'}(\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{\pi}(G)) = 1$.

Доказательство. Так как $F_{\pi'}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, то $\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G)$ и, значит,

$$\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{\pi}(G) \subseteq \Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G)/\Phi_{\pi}(G).$$

Теперь применим следствие 2.2.1 леммы 2.2, учитывая

$$F_{\pi'}(\Phi_{\pi, \overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{\pi}(G)) \subseteq F_{\pi'}(\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G)/\Phi_{\pi}(G)).$$

Лемма доказана.

Следствие 2.3.1. Пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда $F_{\pi'}(\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}^*(G)}}(G)/\Phi_{\pi}(G)) = 1$.

Следствие 2.3.2. Пусть G – группа. Тогда $F(\Phi_{\overline{F^*(G)}}(G)/\Phi(G)) = 1$.

Лемма 2.4. Пусть G – группа. Имеют место следующие утверждения:

(1) если подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} , то $F_{\pi'}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)$;

(2) тогда и только $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G) = F_{\pi'}(G)$, когда $Soc(G/\Phi_{\pi}(G))$ π' -разрешим и подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} ; следовательно, если группа $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)$ π' -разрешима, то $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G) = F_{\pi'}(G)$;

$$(3) \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)/\Phi_{\pi}(G) = F^*(G/\Phi_{\pi}(G)).$$

Доказательство. Обозначаем в дальнейшем $G/\Phi_{\pi}(G) = \overline{G}$, G – группа.

(1) Так как $F(\overline{G})/\Phi(\overline{G}) \subseteq Soc(\overline{G}/\Phi(\overline{G}))$, $\Phi(\overline{G}) \subseteq \Phi_{\pi}(\overline{G}) = \Phi_{\pi}(G)/\Phi_{\pi}(G) = 1$, то, учитывая лемму 2 [4], $F_{\pi'}(G)/\Phi_{\pi}(G) = F(\overline{G}) \subseteq Soc(\overline{G}) = \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)/\Phi_{\pi}(G)$, и $F_{\pi'}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)$.

(2) Пусть $Soc(\overline{G})$ π' -разрешим, $\Phi_{\pi}(G) \in C_{\pi}$. Значит, $Soc(\overline{G}) = \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)/\Phi_{\pi}(G) \in \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}$, и по следствию 2.1.1 леммы 2.1 $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G) \subseteq F_{\pi'}(G)$. Ввиду

утверждения (1) $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = F_{\pi'}(G)$. Обратное утверждение очевидно.

(3) Ввиду теоремы 13.8.X из [5], а также леммы 4.14.A из [6] $Soc(G) = F^*(G)$, если $\Phi(G) = 1$. Этот факт отмечен в [7, с. 155]. Следовательно, $Soc(G/\Phi_\pi(G)) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)/\Phi_\pi(G) = F^*(G/\Phi_\pi(G))$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. Пусть \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех π' -нильпотентных групп $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ π' -разрешима. Тогда:

- (1) в том и только в том случае $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$, когда $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$;
- (2) в том и только в том случае $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$, когда G – π -группа;
- (3) $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\pi(G)$.

Доказательство. (1) Понятно, что $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$, если $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Пусть $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$, и предположим, что $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$. Тогда $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$, $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ – π' -разрешимая группа, совпадающая по лемме 2.4 (2) с $F_{\pi'}(G)$. Так как $\Phi_\pi(G) \subseteq F_{\pi'}(G) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$ и $F_{\pi'}(G) \subseteq G_\mathfrak{F} \subseteq \Phi_\pi(G) \neq G$ ввиду предположения о том, что $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$, то $\Phi_\pi(G) = F_{\pi'}(G) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$, что возможно лишь в случае $\Phi_\pi(G) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = G$. Таким образом, допущение $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ приводит к двум взаимоисключающим заключениям. Значит, $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Утверждение (1) доказано.

(2) Если G – π -группа, то по определению $\Phi_\pi(G) = G$, а значит, $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$. Пусть $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$. По доказанному утверждению (1) $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = G$, откуда группа $G = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ π' -разрешима и по лемме 2.4 (2) совпадает с $F_{\pi'}(G)$. Если $\Phi_\pi(G) \neq G$, то $G_\mathfrak{F} \subseteq \Phi_\pi(G)$, так как $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$. Имеем: $G = F_{\pi'}(G) \subseteq G_\mathfrak{F} \subseteq \Phi_\pi(G)$, откуда $\Phi_\pi(G) = G$, противоречие. Значит, $G = \Phi_\pi(G) = F_{\pi'}(G)$, следовательно, G – π -группа. Утверждение (2) доказано.

(3) В случае $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ равенство $\Phi_\pi(G) = \Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G)$ выполняется, ибо в этом случае, как показано в пункте (2), G – π -группа. Пусть $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Ввиду π' -разрешимости группы

$A = \Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ подгруппа $\Phi_\pi(G) \in C_\pi$. Согласно лемме 2.3 имеем:

$$\begin{aligned} A/\Phi_\pi(G) &= \\ &= F_{\pi'}(A/\Phi_\pi(G)) \subseteq F_{\pi'}(\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\pi(G)) = 1. \end{aligned}$$

Значит, в группе $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\pi(G)$ нет неединичных нормальных подгрупп группы $G/\Phi_\pi(G)$, откуда $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\pi(G)$. Утверждение (3) и лемма доказаны.

Следствие 2.5.1. Пусть \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех nilпотентных групп \mathfrak{N} . И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}(G)$ разрешима. Тогда:

- (1) в том и только в том случае $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$, когда $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}(G) \neq G$;
- (2) в том и только в том случае $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) = G$, когда G – единичная группа;
- (3) $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) = \Phi(G)$.

Отметим, на основании леммы 2.5, что для всякой радикальной формации \mathfrak{F} , содержащей формацию всех π' -нильпотентных групп $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$, условие $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$ равносильно каждому из следующих двух условий: $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$ и G – π' d-группа, если группа $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ π' -разрешима. А ввиду следствия 2.5.1 для всякой радикальной формации \mathfrak{F} , содержащей формацию всех nilпотентных групп \mathfrak{N} , равносильны следующие три условия: $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$, $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}(G) \neq G$ и G – неединичная группа, если группа $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}(G)$ разрешима.

Теорема 2.2. Пусть \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех π' -нильпотентных групп $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$. Если группа $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ π' -разрешима и не совпадает с группой G , то $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\pi(G) \subseteq G_\mathfrak{F}$. В частности:

- (1) если $G \neq \Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G)$, группа $\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G)$ π' -разрешима (в частности, если в группе G существует π' -разрешимая, взаимно просто с числами из π индекса максимальная подгруппа, не содержащая $G_\mathfrak{F}$), то

$$\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = \Phi_\pi(G) \subseteq G_\mathfrak{F};$$

- (2) если G – π' d-группа, группа $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ π' -разрешима, то

$$\Phi_{\pi}(G) = \Phi_{\pi, G_{\delta}}(G) = \Phi_{\overline{F_{\pi'}(G)}}(G) \subset F_{\pi'}(G).$$

Доказательство. Так как

$$\Phi_{\pi}(G) \subseteq \Phi_{\pi, G_{\delta}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G),$$

то $\Phi_{\pi}(G) \in C_{\pi}$. По лемме 2.5(3) и ввиду леммы 1 [3] $\Phi_{\pi, G_{\delta}}(G) = \Phi_{\pi}(G) \subseteq F_{\pi'}(G) \subseteq G_{\delta}$. По утверждению (1) леммы 2.5 $\Phi_{\pi, G_{\delta}}(G) \neq G$, следовательно, $\Phi_{\pi, G_{\delta}}(G) \subset G_{\delta}$. Справедливость утверждения (1) очевидна.

(2) Пусть G – π' -группа, группа $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)$ π' -разрешима (что по лемме 2.4 (2) равносильно $\tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G) = F_{\pi'}(G)$). Тогда $\Phi_{\pi}(G) \in C_{\pi}$, $\Phi_{\pi}(G) \neq G$, а значит, $\Phi_{\pi}(G) \subset \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G) = F_{\pi'}(G)$. По лемме 2.5 $\Phi_{\overline{F_{\pi'}(G)}}(G) = \Phi_{\pi, G_{\delta}}(G) = \Phi_{\pi}(G)$. Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. Пусть \mathfrak{F} – радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . Если группа $\Phi_{\overline{G_{\delta}}}(G) \cap \tilde{F}(G)$ разрешима и не совпадает с группой G , то $\Phi_{\overline{G_{\delta}}}(G) = \Phi(G) \subset G_{\delta}$. В частности:

(1) если $\Phi_{\overline{G_{\delta}}}(G) \neq G$, группа $\Phi_{\overline{G_{\delta}}}(G)$ разрешима (в частности, если в группе G существует разрешимая максимальная подгруппа, не содержащая G_{δ}), то $\Phi_{\overline{G_{\delta}}}(G) = \Phi(G) \subset G_{\delta}$;

(2) если G – неединичная группа, группа $\tilde{F}(G)$ разрешима, то $\Phi(G) = \Phi_{\overline{G_{\delta}}}(G) = \Phi_{\overline{F(G)}}(G)$.

Следствие 2.2.2. Пусть группа $G \neq \Phi_{\overline{F(G)}}(G)$, группа $\Phi_{\overline{F(G)}}(G) \cap \tilde{F}(G)$ разрешима (в частности, пусть $\Phi_{\overline{F(G)}}(G) \neq G$, группа $\Phi_{\overline{F(G)}}(G)$ разрешима). Тогда $\Phi_{\overline{F(G)}}(G) = \Phi(G)$.

Следствие 2.2.3. Пусть группа $G \neq \Phi_{\pi, \bar{K}}(G)$, $R \in \{F_{\pi'}(G), G_{\mathfrak{G}_{\pi, \bar{K}}}, G_{\mathfrak{E}^{\pi}}, F_{\pi'}^*(G)\}$. Если группа $\Phi_{\pi, \bar{K}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)$ π' -разрешима, то $\Phi_{\pi, \bar{K}}(G) = \Phi_{\pi}(G) \subset R$.

Следствие 2.2.4. Пусть группа $G \neq \Phi_{\bar{K}}(G)$, $K \in \{G_{\mathfrak{J}^M}, G_{\mathfrak{E}}, F^*(G)\}$. Если группа $\Phi_{\bar{K}}(G) \cap \tilde{F}(G)$ разрешима, то $\Phi_{\bar{K}}(G) = \Phi(G)$.

Обозначим через $\Phi_{\pi}^{\ominus}(G)$ ($\Phi^{\ominus}(G)$) пересечение всех разрешимых максимальных подгрупп группы G взаимно простых с числами из π индексов (пересечение всех разрешимых максимальных подгрупп группы G , соответственно). При отсутствии в G указанных максимальных подгрупп соответствующие пересечения полагаем равными G .

Следствие 2.2.5. Пусть G – группа, $\Phi_{\pi}^{\ominus}(G) \neq G$. Если $F_{\pi'}(G) \subset F_{\pi'}^*(G)$, то:

(1) G – π -разрешимая группа,

$$\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}^*(G)}}(G) = \Phi_{\pi}(G);$$

(2) $F_{\pi'}(\Phi_{\pi}^{\ominus}(G)) = F_{\pi'}(G)$.

Доказательство. (1) Так как $F_{\pi'}(G) \neq F_{\pi'}^*(G)$, то $F_{\pi'}^*(G)$ не может принадлежать существующей в G разрешимой максимальной подгруппе; $2 \in \pi'$, π' -разрешимость группы равносильна её разрешимости; группа $F_{\pi'}^*(G)$, а значит, и группа G π -разрешимы. Применяя утверждение (1) теоремы 2.2, получаем $\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}^*(G)}}(G) = \Phi_{\pi}(G)$.

(2) Так как группа G неразрешима, то ясно, что $F_{\pi'}(G) \subseteq \Phi_{\pi}^{\ominus}(G)$. А так как $\Phi_{\pi}^{\ominus}(G)$ – характеристическая в G подгруппа, то

$$F_{\pi'}(\Phi_{\pi}^{\ominus}(G)) \subseteq F_{\pi'}(G).$$

Значит, $F_{\pi'}(\Phi_{\pi}^{\ominus}(G)) = F_{\pi'}(G)$.

Следствие 2.2.6. Пусть G – группа, $\Phi^{\ominus}(G) \neq G$. Если $F(G) \subset F^*(G)$, то:

(1) $\Phi_{\overline{F^*(G)}}(G) = \Phi(G)$;

(2) $F(\Phi^{\ominus}(G)) = F(G)$.

Теорема 2.3. Пусть G – группа, и пусть подгруппа $\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\pi}}(G)$ π' -разрешима. Тогда $\Phi_{\pi}(G) = \Phi_{\pi, \overline{G_{\delta}}}(G)$ для всякой радикальной формации \mathfrak{F} , содержащей формацию всех π' -нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'}$. Причём $\Phi_{\pi, \overline{G_{\delta}}}(G) \subset F_{\pi'}(G)$, если G – π' -группа.

Доказательство. По лемме 2.5 ($\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'}$) $\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G) = \Phi_{\pi}(G)$. А так как $F_{\pi'}(G) \subseteq G_{\delta}$ и, следовательно, $\Phi_{\pi}(G) \subseteq \Phi_{\pi, \overline{G_{\delta}}}(G) \subseteq \Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G)$, то $\Phi_{\pi}(G) = \Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G) = \Phi_{\pi, \overline{G_{\delta}}}(G)$. В случае G – π' -группа $\Phi_{\pi}(G) \neq G$, по теореме 2.2 $\Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G) \subset F_{\pi'}(G)$. Теорема доказана.

Следствие 2.3.1. Пусть G – группа, и пусть подгруппа $\Phi_{\overline{F(G)}}(G) \cap \tilde{F}(G)$ разрешима. Тогда $\Phi(G) = \Phi_{\overline{G_{\delta}}}(G)$ для всякой радикальной формации \mathfrak{F} , содержащей формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . Причём $\Phi_{\overline{G_{\delta}}}(G) \subset F(G)$, если G – неединичная группа.

Теорема 2.2, теорема 2.3 и их следствия включают результаты, обобщающие соответствующие утверждения, доказанные в [4].

Теорема 2.4. Имеют место следующие утверждения:

(1) Для всякой группы G выполняется равенство $\Phi_{\pi}(G) = \Phi_{\pi, \overline{F_{\pi'}(G)}}(G)$.

(2) Пусть G – $\pi'd$ -группа, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда в G существует хотя бы одна максимальная подгруппа, имеющая взаимно простой с числами из π индекс и не содержащая $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$.

Доказательство. (1) Если $\Phi_\pi(G) = G$, то $\Phi_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}(G) = \Phi_\pi(G)$. Пусть $\Phi_\pi(G) \neq G$, тогда $\text{Soc}(G/\Phi_\pi(G)) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)/\Phi_\pi(G) \neq 1$. Значит, в G существуют максимальные подгруппы, взаимно простые с числами из π индексов и не содержащие $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$. Предположим, $\Phi_\pi(G) \neq \Phi_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}(G)$.

Тогда $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$ и

$$\Phi_\pi(G) = \Phi_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}(G) \cap \Phi_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}(G).$$

Пусть $N/\Phi_\pi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа $G/\Phi_\pi(G)$ из $\Phi_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}(G)/\Phi_\pi(G)$. Так как $N/\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}(G)/\Phi_\pi(G)$, то

$$N/\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G)/\Phi_\pi(G) = 1.$$

Противоречие. Утверждение (1) доказано.

(2) Так как G – $\pi'd$ -группа, $\Phi_\pi(G) \in C_\pi$, то $\Phi_\pi(G) \neq G$, и утверждение (2) следует из доказательства (1). Теорема доказана.

Следствие 2.4.1 [8]. Подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ неединичной группы G совпадает с пересечением всех её максимальных подгрупп H таких, что $H\tilde{F}(G) = G$.

3 Пересечения \mathfrak{F} -абнормальных максимальных подгрупп конечной группы

Основными результатами данного раздела являются теорема 3.3 и теорема 3.6 с вытекающими из них следствиями, которым предшествуют вспомогательные утверждения, представляющие определённый самостоятельный интерес. Теорема 3.7 распространяет результаты о пересечении $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G)$, G – группа, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$, на случай локальной, S_n -замкнутой (необязательно радикальной) формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$, содержащей формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$.

Теорема 3.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда $(\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G))_\mathfrak{F} = \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$.

Доказательство. Пусть G – группа, удовлетворяющая условию теоремы, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – радикальная

локальная формация, содержащая $\mathfrak{N}_{\pi'}$. Предположим, $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G^\mathfrak{F} = 1$, все максимальные подгруппы \mathfrak{F} -нормальны в G , а значит, $\Delta^\mathfrak{F}(G) = G$ по определению. Следовательно, $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) = \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G) = G$, т. е. в этом случае теорема выполняется.

Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $G_\mathfrak{F} \subset G$. По лемме 1.1 $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) \in \mathfrak{F}$, значит, $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) \neq G$. Если при этом все максимальные \mathfrak{F} -абнормальные подгруппы G , имеющие взаимно простые с числами из π индексы, содержат $G_\mathfrak{F}$, то $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) = G_\mathfrak{F}$, а $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G) = G$ по определению. Следовательно, $(\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G))_\mathfrak{F} = G_\mathfrak{F} = \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$, т. е. теорема верна. Остаётся рассмотреть ситуацию, когда существуют максимальные \mathfrak{F} -абнормальные подгруппы G взаимно простых с числами из π индексов, не содержащие $G_\mathfrak{F}$, т. е. $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G) \neq G$. Ясно, что $(\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G))_\mathfrak{F} = \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G) \cap G_\mathfrak{F}$. Предположим, утверждение теоремы не выполняется, и

$$N = \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G) \cap G_\mathfrak{F} \supset \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G).$$

Так как \mathfrak{F} -подгруппа N нормальна в G , то $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) \subset N = \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G) \cap \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G) = \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$. Противоречие. Следовательно, сделанное предположение неверно, и $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) = \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G) \cap G_\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 3.1.1. Пусть \mathfrak{F} – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . Для любой группы G справедливо равенство $(\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G))_\mathfrak{F} = \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$.

Следствие 3.1.2. Для любой группы G справедливо равенство $F(\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^\mathfrak{F}(G)) = \Delta(G)$.

Лемма 3.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π ; K – нормальная, а L – субнормальная подгруппы группы G такие, что $\Phi_\pi(G) \subseteq K \subseteq \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) \cap L$. Тогда $(L/K)_\mathfrak{F} = L_\mathfrak{F}K/K$; в частности, $(G/\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G))_\mathfrak{F} = G_\mathfrak{F}\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)/\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$.

Доказательство. Пусть формация \mathfrak{F} , группа G и её подгруппы $\Phi_\pi(G)$, K и L удовлетворяют условию теоремы. Если $\Phi_\pi(G) = G$, то $K = L = G$ и справедливость утверждения леммы очевидна. Пусть $\Phi_\pi(G) \neq G$. Если при этом $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) = G$, то $G^\mathfrak{F} \subseteq \Phi_\pi(G)$. Тогда $G/\Phi_\pi(G) \in \mathfrak{F}$, а по лемме 2.1 $G_\mathfrak{F}\Phi_\pi(G)/\Phi_\pi(G) = (G/\Phi_\pi(G))_\mathfrak{F} = G/\Phi_\pi(G)$, и, значит, $G_\mathfrak{F}\Phi_\pi(G) = G$. Если

$G = G_{\mathfrak{F}}$, то утверждение леммы выполняется ввиду субнормальности подгруппы L , S_n -замкнутости и Q -замкнутости \mathfrak{F} . Пусть $G \neq G_{\mathfrak{F}}$. Так как $\Phi_{\pi}(G) \in \mathfrak{E}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'}$, $O_{\pi}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, то

$$\Phi_{\pi}(G)/\Phi_{\pi}(G) \cap G_{\mathfrak{F}} \cong G_{\mathfrak{F}} \Phi_{\pi}(G)/G_{\mathfrak{F}} = G/G_{\mathfrak{F}}$$

– π' -группа, т. е. в этом случае в G существует максимальная подгруппа M , содержащая $G_{\mathfrak{F}}$ и имеющая в G π' -индекс. Но тогда $M \supseteq \Phi_{\pi}(G)$, а значит, $M \supseteq G_{\mathfrak{F}} \Phi_{\pi}(G) = G$, что невозможно.

Полагаем поэтому в дальнейшем $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$.

Будем использовать следующие обозначения: $\bar{G} = G/\Phi_{\pi}(G)$, $\bar{K} = K/\Phi_{\pi}(G)$, $\bar{L} = L/\Phi_{\pi}(G)$. Ввиду леммы 2 [3] $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(\bar{G}) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_{\pi}(G)$; $\bar{L}_{\mathfrak{F}} = (L/\Phi_{\pi}(G))_{\mathfrak{F}}$, а $(\bar{L}/\bar{K})_{\mathfrak{F}} = (L/\Phi_{\pi}(G)/K/\Phi_{\pi}(G))_{\mathfrak{F}} \cong (L/K)_{\mathfrak{F}}$. Пусть $\Phi_{\pi}(G) \neq 1$. Так как группа \bar{G} и её подгруппы \bar{K} , \bar{L} , а также $\Phi_{\pi}(\bar{G}) = 1$ удовлетворяют условию леммы, то по индукции $(\bar{L}/\bar{K})_{\mathfrak{F}} = \bar{L}_{\mathfrak{F}} \bar{K}/\bar{K}$. По лемме 2.1 $\bar{L}_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \Phi_{\pi}(G)/\Phi_{\pi}(G)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} (\bar{L}/\bar{K})_{\mathfrak{F}} &= L_{\mathfrak{F}} \Phi_{\pi}(G) K / \Phi_{\pi}(G) / K / \Phi_{\pi}(G) \cong \\ &\cong L_{\mathfrak{F}} \Phi_{\pi}(G) K / K = L_{\mathfrak{F}} K / K. \end{aligned}$$

Так как $(\bar{L}/\bar{K})_{\mathfrak{F}} \cong (L/K)_{\mathfrak{F}}$ и $(\bar{L}/\bar{K})_{\mathfrak{F}} \cong L_{\mathfrak{F}} K / K$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} \cong L_{\mathfrak{F}} K / K$. А так как $L_{\mathfrak{F}} K / K \subseteq (L/K)_{\mathfrak{F}}$, то $L_{\mathfrak{F}} K / K = (L/K)_{\mathfrak{F}}$.

Пусть теперь $\Phi_{\pi}(G) = 1$. Тогда $O_{\pi}(G) = \Phi(G) = 1$. По теореме 1 [3] $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, а по теореме 8.6 [1] $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$. Значит, $K \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G) \cap R$, где $R/K = (L/K)_{\mathfrak{F}}$. Если $K = 1$, то утверждение леммы, конечно, выполняется. Пусть $K \neq 1$. Так как L субнормальна в G , то R субнормальна в G , т. е. существует цепь подгрупп $R = R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots \subseteq R_{n-1} \subseteq R_n = G$, в которой подгруппа R_i нормальна в R_{i+1} для всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Пусть \mathfrak{f} – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Так как G \mathfrak{f} -централизует любой свой главный фактор M/N , $M \subseteq K$, то в силу теоремы 4.7 [1] R_{n-1} также \mathfrak{f} -централизует M/N , т. е. нормальная в $G/C_G(M/N)$ подгруппа $R_{n-1} C_G(M/N) / C_G(M/N) \cong R_{n-1} / C_{R_{n-1}}(M/N) \in \mathfrak{f}(M/N)$. Так как R_{n-2} нормальна в R_{n-1} , то R_{n-2} \mathfrak{f} -централизует M/N и т. д. Таким образом, получаем: R \mathfrak{f} -централизует любой G -главный фактор из K , а значит, и любой R -главный фактор из K . Так как $R/K \in \mathfrak{F}$, то

$R \in \mathfrak{F}$, откуда $R \subseteq L_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $R = L_{\mathfrak{F}} \supseteq K$. Итак, $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$. Лемма доказана.

Следствие 3.1.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi} \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} ; K – нормальная, а L – субнормальная подгруппы группы G такие, что $\Phi_{\pi}(G) \subseteq K \subseteq \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \cap L$. Тогда $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности, $(G/\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Доказательство. Согласно лемме 1.1

$$\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}.$$

Следствие 3.1.2. Пусть \mathfrak{F} – радикальная локальная формация. И пусть G – группа, K – нормальная, а L – субнормальная подгруппы группы G такие, что $\Phi(G) \subseteq K \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \cap L$. Тогда $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} K / K$; в частности,

$$(G/\Delta^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \Delta^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta^{\mathfrak{F}}(G).$$

Следствие 3.1.3. Пусть \mathfrak{F} – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . И пусть G – группа, K – нормальная, а L – субнормальная подгруппы группы G такие, что $\Phi(G) \subseteq K \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \cap L$. Тогда $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности,

$$(G/\Delta^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/\Delta^{\mathfrak{F}}(G).$$

Лемма 3.2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi} \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех π' -нильпотентных групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда

$$(\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = F_{\pi'}(\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)) = 1.$$

Доказательство вытекает из следствия 3.1.1 леммы 3.1 и теоремы 3.1.

Следствие 3.2.1. Пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Тогда

$$F_{\pi'}(\Delta_{\pi, F_{\pi'}(G)}^{\mathfrak{E}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'}}(G) / \Delta_{\pi}^{\mathfrak{E}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'}}(G)) = 1.$$

Следствие 3.2.2. Пусть \mathfrak{F} – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} , G – группа. Тогда $(\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = F(\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta^{\mathfrak{F}}(G)) = 1$.

Следствие 3.2.3. Для любой группы G справедливо равенство $F(\Delta_{F(G)}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta(G)) = 1$.

Лемма 3.3. Пусть A и B – нормальные подгруппы группы G , $B \subset A$. Тогда $\tilde{F}_B(G) \subseteq \tilde{F}_A(G)$.

Доказательство. Если $A = G$, то $\tilde{F}_A(G) = G$, и доказываемое утверждение выполняется. Поэтому считаем, что $A \neq G$, $\tilde{F}_B(G) = N_1 N_2 \dots N_l$,

$N_i \supset B$, N_i/B – минимальная нормальная подгруппа в G/B , $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Предположим, для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ подгруппа N_i не содержится в A и N_iA/A не является минимальной нормальной подгруппой в G/A . Значит, существует минимальная нормальная подгруппа L/A в $G/A \neq 1$, такая, что $L/A \subset N_iA/A$. Тогда $L = L \cap N_iA = A(L \cap N_i)$. Так как N_i/B – минимальная нормальная подгруппа в G/B , то либо $L/B \cap N_i/B = L \cap N_i/B = B/B$, и тогда $L \cap N_i = B \subset A$, откуда $L = A$, что противоречит $L/A \neq 1$, либо $N_i/B \subset L/B$, что также невозможно, ибо в этом случае $N_iA \subseteq L$, что несовместимо с предположением о том, что $L/A \subset N_iA/A$. Следовательно, $N_iA/A \subseteq Soc(G/A)$. Значит, $N_i \subseteq \tilde{F}_A(G)$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, и $\tilde{F}_B(G) \subseteq \tilde{F}_A(G)$. Лемма доказана.

Теорема 3.2. Пусть G – группа, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда

$$\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G).$$

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$. Если при этом G – π -группа, $\Phi_\pi(G) = G = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$ по определению, а значит, $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G) = G$, т. е. теорема верна. Если G – π' -группа, то $\Phi_\pi(G) \neq G$ ввиду $\Phi_\pi(G) \in C_\pi$; $G^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi} = 1$, все максимальные подгруппы G , имеющие π' -индексы, $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ -нормальны в G , $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) = G$. По лемме 2.4 (1) $F_{\pi'}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$. Значит, $G = F_{\pi'}(G) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G)$. Считаем поэтому, что $G \neq F_{\pi'}(G)$. А так как согласно лемме 1.1 $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \subseteq F_{\pi'}(G)$, то $G/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \neq 1$. Ввиду $F_{\pi'}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ имеем $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$.

Пусть $\Phi_\pi(G) \neq 1$. По следствию 2.1.1 леммы 2.1 $G/\Phi_\pi(G) = \bar{G} \notin \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$. По индукции $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(\bar{G}) = \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(\bar{G})$. По лемме 2 [3]

$$\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(\bar{G}) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)/\Phi_\pi(G),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} Soc(\bar{G}/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(\bar{G})) &\cong Soc(G/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)) = \\ &= \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G)/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$Soc(\bar{G}/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(\bar{G})) = \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(\bar{G})/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(\bar{G}).$$

Значит,

$$\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(\bar{G})/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(\bar{G}) \cong \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G)/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G).$$

Так как $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(\bar{G})/\Phi_\pi(\bar{G}) = Soc(\bar{G}/\Phi_\pi(\bar{G}))$, $\Phi_\pi(\bar{G}) = 1$, то $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(\bar{G}) = Soc(\bar{G}) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)/\Phi_\pi(G)$, а потому $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(\bar{G})/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(\bar{G}) \cong \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$. Ввиду индуктивного предположения $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(\bar{G})/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(\bar{G}) = \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(\bar{G})/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(\bar{G})$; значит, $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \cong \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G)/\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$. А так как, согласно лемме 3.3, $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G)$, то $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G)$.

Пусть $\Phi_\pi(G) = 1$. Тогда $\Phi(G) = 1$, $F_{\pi'}(G) = F(G)$ – абелева π' -группа, $F(G) \subseteq \tilde{F}(G) = Soc(G)$. По теореме 1 [3] $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)/O_\pi(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G/O_\pi(G))$. Так как $O_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G)$, то $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$. Из теоремы 8.6 [1] следует $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) = Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$. Так как $\Phi_\pi(G) = \Phi(G) = 1$, то $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G)$. Докажем справедливость обратного включения $\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G) \subseteq \tilde{F}(G)$.

Пусть $\bar{N} = N/Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$ – произвольная минимальная нормальная подгруппа группы $G/Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$ из $\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}}(G)/Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$. Если \bar{N} – абелева группа, то $\bar{N} \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$. По следствию 3.1.3 леммы 3.1 $N \subseteq F_{\pi'}(G) = F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$.

Пусть \bar{N} – неабелева группа. Тогда $\bar{N} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 \times \dots \times \bar{N}_k$, $\bar{N}_i = N_i/Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$ – простая неабелева группа, $\bar{N}_i \cong \bar{N}_j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Так как $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \subseteq F_{\pi'}(G) = F(G)$, то $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) = Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) = F(N_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. В случае $Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) = 1$ группа $\bar{N} = N \subseteq \tilde{F}(G)$. Считаем поэтому $Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \neq 1$. Известно [1, с. 33], что формация всех p -нильпотентных групп (p – фиксированное простое число) имеет такой локальный экран f , что $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \mathfrak{G}$, $q \neq p$.

Согласно лемме 3.6 [1] функция \tilde{f} , задаваемая следующим образом: $\tilde{f}(H) = \mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p \cap f(H)$ для любой группы $H \neq 1$, определяет внутренний экран формации $\mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$. Значит, формация $\mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$ имеет внутренний локальный экран \tilde{f} такой, что $\tilde{f}(p) = \mathfrak{E}$, $\tilde{f}(q) = \mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$, $q \neq p$. В соответствии с замечанием 4 [1, с. 32] строим локальный экран φ такой, что $\varphi(r) = \mathfrak{N}_r \tilde{f}(r)$ для любого простого r . Экран φ – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$, причём $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p$, $\varphi(q) = \mathfrak{N}_q \tilde{f}(q) = \mathfrak{N}_q (\mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p) = \mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$, если $q \neq p$.

Так как $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$, $p \in \pi'$, то согласно лемме 5.13 [1] $\tilde{\varphi} \leq \varphi$, $\tilde{\varphi}$ – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$. Ввиду теоремы 4.7 [1] формация $\tilde{\varphi}(p)$ S_n -замкнута для любого простого p . Следовательно, N $\tilde{\varphi}$ -централизует каждый G -главный, а значит, каждый N -главный фактор из $Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$. Каждая из групп N_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\tilde{\varphi}$ -централизует все N -главные, а значит, и все N_i -главные факторы из $Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$. Таким образом,

$$N_i / C_{N_i}(L/K) \in \tilde{\varphi}(L/K) = \tilde{\varphi}(p) \subseteq \varphi(p) = \mathfrak{N}_p,$$

L/K – N_i -главный p -фактор из $Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$, $p \in \pi'$. Так как $N_i / Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$ – простая неабелева группа и $F(N_i) = Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \subseteq C_{N_i}(L/K)$, то $N_i = C_{N_i}(L/K)$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Значит, N_i централизует каждый свой главный фактор из $Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$. Кроме того, для главного в N_i фактора $N_i / Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$, конечно, справедливо равенство $N_i = N_i C_{N_i}(N_i / Z_\infty^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G))$. Следовательно, N_i – квазинильпотентная субнормальная подгруппа группы G . Так как формация \mathfrak{N}^* является радикальной, то согласно следствию 7.7.2 теоремы 7.7 из [1] $N_i \subseteq F^*(G)$. Из леммы 2.4 (3) следует $F^*(G) = \tilde{F}(G)$, а значит, $N_i \subseteq \tilde{F}(G)$,

$$N = N_1 N_2 \dots N_k \subseteq \tilde{F}(G).$$

Теорема доказана.

Следствие 3.2.1. Для всякой группы G справедливо равенство $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_\Delta(G)$.

Лемма 3.4. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп \mathfrak{N}_π . И пусть G – группа, подгруппа $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ π' -разрешима. Тогда:

- (1) в том и только в том случае $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, когда $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$;
- (2) в том и только в том случае $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) = G$, когда $G \in \mathfrak{F}$.
- (3) $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$.

Доказательство. (1) Понятно, что $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, если $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Пусть $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, и предположим, что $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Тогда $\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, а значит, $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, $\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ – π' -разрешимая группа. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \\ & = F_{\pi'}(\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq F_{\pi'}(G / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)) \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Так как $\Phi_\pi(G) \subseteq \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$, то $\Phi_\pi(G) \in C_\pi$. По следствию 3.1.1 леммы 3.1 $\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}$. По лемме 1.1 $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Значит, $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq G_\mathfrak{F}$, что противоречит предположению о том, что $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Следовательно, $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Утверждение (1) доказано.

(2) Если $G \in \mathfrak{F}$, то по определению 8.2 [1] $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = G$, а значит, $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Пусть $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Согласно утверждению (1)

$$\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) = G$$

и, следовательно, группа $G = \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ π' -разрешима. Тогда $G / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, а значит, $G \in \mathfrak{F}$ по следствию 3.1.1 леммы 3.1. Утверждение (2) доказано.

(3) Если $G \in \mathfrak{F}$, то, как показано в доказательстве пункта (2), $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G)$. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$, что по утверждению (2) равносильно $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$. По лемме 3.2 для нормальной подгруппы $\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \cap \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ группы $G / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ из $\text{Soc}(G / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))$ имеем:

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \cap \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \\ & = F_{\pi'}(\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \cap \Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq \\ & \subseteq F_{\pi'}(\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) / \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$. Лемма доказана.

Следствие 3.4.1. Пусть \mathfrak{F} – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . И пусть G – группа, подгруппа $\Delta_{G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$ разрешима.

Тогда:

- (1) в том и только в том случае $\Delta_{G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$, когда $\Delta_{G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$;
- (2) в том и только в том случае $\Delta_{G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) = G$, когда $G \in \mathfrak{F}$;
- (3) $\Delta_{G_\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$.

Отметим, на основании леммы 3.4, что для всякой радикальной локальной формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$, содержащей формацию всех нильпотентных π' -групп \mathfrak{N}_π , условие $G \notin \mathfrak{F}$ равносильно каждому из следующих двух условий:

$\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$ и $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$, если группа $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G)$ π' -разрешима. А ввиду следствия 3.4.1 для всякой радикальной локальной формации \mathfrak{F} , содержащей формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} , равносильны следующие три условия: $G \notin \mathfrak{F}$, $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$ и

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G,$$

если группа $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G)$ разрешима.

Теорема 3.3. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. Если группа $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G)$ π' -разрешима и не совпадает с G , то $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$. В частности:

(1) если $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$, группа $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G)$ π' -разрешима (в частности, если в G существует π' -разрешимая максимальная \mathfrak{F} -абнормальная подгруппа взаимно простого с числами из π индекса, не содержащая $G_{\mathfrak{F}}$), то

$$\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G;$$

(2) если $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$, причём подгруппа $\tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G)$ π' -разрешима, то

$$\Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) = \Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \subset \tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subset G.$$

Доказательство. Так как

$$\Phi_{\pi}(G) \subseteq \Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G),$$

то $\Phi_{\pi}(G) \in C_{\pi}$. По лемме 1.1 $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 3.4 $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) = \Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$, то $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}}$; $G \notin \mathfrak{F}$.

(2) Так как $\tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) / \Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \in \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ по следствию 3.1.1 леммы 3.1. Теорема доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 3.3, условие $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$ в пункте (2) заменяемо на условие $G \notin \mathfrak{F}$.

Следствие 3.3.1. Пусть для группы G выполняется одно из следующих двух условий:

$$(1) \Delta_{\pi, F_{\pi'}(G)}^{\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \neq G, \text{ группа } \Delta_{\pi, F_{\pi'}(G)}^{\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'}}(G)$$

π' -разрешима;

(2) $G \neq F_{\pi'}(G)$, группа $\tilde{F}_{F_{\pi'}}(G)$ π' -разрешима.

Тогда $\Delta_{\pi, F_{\pi'}(G)}^{\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \subset F_{\pi'}(G) \subset G$.

Доказательство вытекает из теоремы 3.3 и теоремы 3.2.

Следствие 3.3.2. Пусть \mathfrak{F} – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . Если группа $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G)$ разрешима и не совпадает с G , то $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) = \Delta^{\mathfrak{S}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}} \subset G$. В частности:

(1) если $G \neq \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G)$, группа $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G)$ разрешима (в частности, если в G существует разрешимая \mathfrak{F} -абнормальная максимальная подгруппа, не содержащая $G_{\mathfrak{F}}$), то $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) = \Delta^{\mathfrak{S}}(G)$;

(2) если $\Delta^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$, причём подгруппа $\tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G)$ разрешима, то

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) = \Delta^{\mathfrak{S}}(G) \subset \tilde{F}_{\Delta_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{S}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subset G.$$

Заметим, что условие $\Delta^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$ равносильно условию $G \notin \mathfrak{F}$, \mathfrak{F} – локальная формация.

Так как по следствию 3.2.1 теоремы 3.2 $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_{\Delta}^{\mathfrak{S}}(G)$, то имеет место следующее утверждение.

Следствие 3.3.3. Пусть для группы G выполняется одно из следующих двух условий:

$$(1) \Delta_{F(G)}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G, \text{ группа } \Delta_{F(G)}^{\mathfrak{S}}(G) \text{ разрешима};$$

$$(2) G \neq F(G), \text{ группа } \tilde{F}(G) \text{ разрешима.}$$

Тогда $\Delta(G) = \Delta_{F(G)}^{\mathfrak{S}}(G) \subset F(G) \subset G$.

Среди других следствий теоремы 3.3 отметим теорему 6 из [4], обобщающую результаты работ [9] и [10], а также следствия для радикальных локальных формаций $\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{J}_{\pi}^M$ и \mathfrak{J}^M (M – некоторое множество линейных упорядочений множества всех простых π' -чисел и всех простых чисел, соответственно), для формаций всех π' -разрешимых групп $\mathfrak{S}^{\pi'}$ и всех разрешимых групп \mathfrak{S} .

Теорема 3.4. Пусть G – группа. Имеют место следующие утверждения.

(1) Если \mathfrak{F} – непустая формация, $\overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$, то $\overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G)$.

(2) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$ – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. Если подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} и $\overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \neq G$, то $\overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Доказательство.

(1) Предположим, $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \subset \overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G)$. Тогда в G существует хотя бы одна максимальная \mathfrak{F} -абнормальная \mathfrak{F} -подгруппа H , взаимно простого с числами из π индекса такая, что $H \overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) = G$. Следовательно, $G / \overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \cong H / H \cap \overline{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{S}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Значит, $G^{\delta} \subseteq \bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G)$, что невозможно, а потому $\bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) = \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$. Утверждение (1) доказано. Утверждение (2) следует из (1) с учётом леммы 1.1.

Следствие 3.4.1. Пусть \mathfrak{F} – формация всех π' -сверхразрешимых групп. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} .

Если $\bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) \neq G$, то $\bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) = \Delta_{\pi}^{\delta}(G) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 3.4.2. Пусть \mathfrak{F} – формация всех сверхразрешимых групп. Если $\bar{\Delta}^{\delta}(G) \neq G$, то $\bar{\Delta}^{\delta}(G) = \Delta^{\delta}(G) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 3.4.3. Пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Если $\bar{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \neq G$, то $\bar{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) = \Delta_{\pi}^{\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \in \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}$.

Следствие 3.4.4. Пусть \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . Если $\bar{\Delta}^{\delta}(G) \neq G$, то $\bar{\Delta}^{\delta}(G) = \Delta^{\delta}(G) \in \mathfrak{F}$. В частности, если $\bar{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G) \neq G$, то $\bar{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta(G)$.

Заметим, что согласно результату Шлыка В.В. [1, теорема 8.11] $\bar{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G) \neq G$ и $\bar{\Delta}^{\mathfrak{N}}(G) \in \mathfrak{N}$ для любой неразрешимой группы G .

Теорема 3.5. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} , $\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \neq G$. Тогда выполняются следующие равенства:

- (1) $(\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G))_{G_{\delta}} = \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$;
- (2) $(\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) / \bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G))_{\delta} =$
 $= F_{\pi}(\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) / \bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G)) = 1$.

Доказательство. (1) Так как $\bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) \subseteq \bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \neq G$,

то по теореме 3.4 (1) $\bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) = \Delta_{\pi}^{\delta}(G) \in \mathfrak{F}$. Ясно, что $(\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G))_{G_{\delta}} = \bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \cap G_{\delta}$. Предположим, утверждение (1) не выполняется, и

$$N = \bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \cap G_{\delta} \supset \Delta_{\pi}^{\delta}(G).$$

Так как \mathfrak{F} -подгруппа N нормальна в G , то

$$\begin{aligned} \Delta_{\pi}^{\delta}(G) \subset N &\subseteq \bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \cap \bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) = \\ &= \bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) = \Delta_{\pi}^{\delta}(G). \end{aligned}$$

Противоречие. Следовательно, сделанное предположение неверно, и $\Delta_{\pi}^{\delta}(G) = \bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \cap G_{\delta}$. Равенство (1) доказано.

(2) По следствию 3.1.1 леммы 3.1

$$(\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) / \bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G))_{\delta} = (\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G))_{G_{\delta}} / \bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) = 1$$

ввиду доказанного равенства (1); по теореме 3.4 $\bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) = \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$. Понятно также, что

$$F_{\pi}(\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) / \bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G)) \subseteq (\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) / \bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G))_{\delta}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.5.1. Пусть \mathfrak{F} – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . И пусть G – группа, $\bar{\Delta}_{G_{\delta}}^{\delta}(G) \neq G$. Тогда выполняются следующие равенства:

- (1) $(\bar{\Delta}_{G_{\delta}}^{\delta}(G))_{G_{\delta}} = \Delta^{\delta}(G)$;
- (2) $(\bar{\Delta}_{G_{\delta}}^{\delta}(G) / \bar{\Delta}^{\delta}(G))_{\delta} = F(\bar{\Delta}_{G_{\delta}}^{\delta}(G) / \bar{\Delta}^{\delta}(G)) = 1$.

Теорема 3.6. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. И пусть G – группа, $\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \neq G$. Если группа $\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_{\pi}^{\delta}}(G)$ π' -разрешима, то $\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) = \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$.

Доказательство. Так как

$$\bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) \subseteq \bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \neq G,$$

то по теореме 3.4 $\bar{\Delta}_{\pi}^{\delta}(G) = \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$. Так как

$$\Phi_{\pi}(G) \subseteq \bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_{\pi}^{\delta}}(G) = A,$$

группа A π' -разрешима, то $\Phi_{\pi}(G) \in C_{\pi}$. Допустим,

$$\Delta_{\pi}^{\delta}(G) \subset \bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G).$$

Применяя теорему 3.5 (2) для нормальной в $G / \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$ подгруппы $A / \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$ из $Soc(G / \Delta_{\pi}^{\delta}(G))$, имеем:

$$\begin{aligned} A / \Delta_{\pi}^{\delta}(G) &= \\ &= F_{\pi}(A / \Delta_{\pi}^{\delta}(G)) \subseteq F_{\pi}(\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) / \Delta_{\pi}^{\delta}(G)) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, в группе $\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) / \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$ нет неединичных нормальных подгрупп группы $G / \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$, значит, $\bar{\Delta}_{\pi, G_{\delta}}^{\delta}(G) = \Delta_{\pi}^{\delta}(G)$. Теорема доказана.

Следствие 3.6.1. Пусть \mathfrak{F} – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . И пусть G – группа, $\bar{\Delta}_{G_{\delta}}^{\delta}(G) \neq G$. Если группа $\bar{\Delta}_{G_{\delta}}^{\delta}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta^{\delta}}(G)$ разрешима, то $\bar{\Delta}_{G_{\delta}}^{\delta}(G) = \Delta^{\delta}(G)$.

Следствие 3.6.2. Пусть G – группа,

$$\bar{\Delta}_{\pi, \Phi_{\pi}(G)}^{\mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \neq G,$$

причём подгруппа $\overline{\Delta}_{\pi, \tilde{F}_\pi(G)}^{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ π' -разрешима. Тогда $\overline{\Delta}_{\pi, \tilde{F}_\pi(G)}^{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$.

Следствие 3.6.2 вытекает из теоремы 3.6 с учётом теоремы 3.2.

Следствие 3.6.3. Если в группе G существуют ненормальные нильпотентные максимальные подгруппы, не содержащие её подгруппу Фиттинга $F(G)$, причём группа

$$\overline{\Delta}_{F(G)}^{\mathfrak{N}}(G) \cap \tilde{F}(G)$$

разрешима, то пересечение всех таких максимальных подгрупп $\overline{\Delta}_{F(G)}^{\mathfrak{N}}(G)$ совпадает с подгруппой Гаюца $\Delta(G)$.

Теорема 3.7. Имеют место следующие утверждения:

(1) Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных π' -групп \mathfrak{N}_π . И пусть группа $G \notin \mathfrak{F}$, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда $\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S} \neq G$.

(2) Для всякой группы G и непустой формации \mathfrak{F} выполняется равенство

$$\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) = \Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G).$$

Доказательство. (1) По лемме 1.1 $\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) \neq G$. Значит, $\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) \subset \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, в G существует хотя бы одна максимальная \mathfrak{F} -абнормальная подгруппа, индекс которой в G взаимно прост с числами из π , не содержащая $\tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)$, т. е. утверждение (1) доказано.

(2) Если $\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) = G$, то по определению $\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G) = G$. Пусть $\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) \neq G$, тогда в G существуют максимальные \mathfrak{F} -абнормальные подгруппы, взаимно простых с числами из π индексов и не содержащие $\tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)$. Предположим, $\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) \neq \Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G)$. Тогда

$$\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) = \Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G) \cap \Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G).$$

Пусть $N/\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G)$ из $\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G)/\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G)$.

Так как

$$N/\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) \subseteq \Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G)/\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G),$$

то

$$N/\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) \subseteq \Delta_\pi^\mathfrak{S}(G)/\Delta_\pi^\mathfrak{S}(G) = 1.$$

Противоречие. Утверждение (2) доказано.

Следствие 3.7.1. Пусть \mathfrak{F} – локальная S_n -замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} . И пусть группа $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда в G существует хотя бы одна максимальная \mathfrak{F} -абнормальная подгруппа M такая, что $M\tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G) = G$, и пересечение всех таких максимальных подгрупп M совпадает с $\Delta^\mathfrak{S}(G)$.

Следствие 3.7.2. Пусть \mathfrak{F} – формация всех π' -сверхразрешимых групп, G – не π' -сверхразрешимая группа, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда $\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G) \neq G$ и

$$\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G) = \Delta_\pi^\mathfrak{S}(G).$$

Следствие 3.7.3. Пусть \mathfrak{F} – формация всех сверхразрешимых групп, и пусть G – не сверхразрешимая группа. Тогда $\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G) \neq G$ и $\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)}^\mathfrak{S}(G) = \Delta^\mathfrak{S}(G)$.

Следствие 3.7.4. Пусть группа $G \neq F_\pi(G)$, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда $\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi(G)}}^{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \neq G$, причём

$$\Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi(G)}}^{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G).$$

Доказательство вытекает из теоремы 3.7 и теоремы 3.2.

Следствие 3.7.5 [8]. Пусть G – нильпотентная группа. Тогда существует ненормальная максимальная подгруппа M группы G такая, что $M\tilde{F}(G) = G$; пересечение всех таких максимальных подгрупп M совпадает с подгруппой Гаюца $\Delta(G)$.

Отметим, что одно из утверждений следствия 3.3.1 теоремы 3.3 выводимо также из следствия 3.7.4, а одно из утверждений следствия 3.3.3 теоремы 3.3 – из следствия 3.7.5 теоремы 3.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.
2. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – № 4 (47). – С. 31–33.
3. Селькин, М.В. Пересечение максимальных подгрупп в конечных группах / М.В. Селькин, В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 67–72.
4. Белоконь, Л.М. Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 3–10.

5. Huppert, B. Finite groups III. / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer-Verlag, 1982. – 454 p.

6. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба – Москва : Наука, 1989. – 256 с.

8. Васильев, А.Ф. Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.В. Сыроковашин // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 62–64.

9. Монахов, В.С. Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (27). – С. 81.

10. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных подгрупп в конечных разрешимых группах / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2010. – № 5 (62). – С. 119–120.

Поступила в редакцию 25.06.14.

НАБЛЮДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО ПРИНЦИПУ РАЗМЫКАЕМОГО КОНТУРА

Р. Габасов¹, Ф.М. Кириллова², Во Тхи Тань Ха¹

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

OBSERVATION OF LINEAR SYSTEMS ON THE PRINCIPLE OF DISCLOSABLE LOOP

R. Gabasov¹, F.M. Kirillova², Vo Thi Thanh Ha¹

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus

²Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Рассматривается задача оптимального наблюдения нестационарного и стационарного объектов с использованием многомерных сигналов импульсного и дискретного измерительных устройств. Вводятся понятия априорного и текущего распределений начального состояния. Описывается метод реализации позиционного решения задачи оптимального наблюдения по принципу размыкаемого контура. С целью ускорения вычислений предлагается их распараллеливание. Для стационарного объекта дополнительное ускорение вычислений достигается с помощью рекуррентных уравнений, параллельных вычислений и метода «разновесов». Результаты иллюстрируются на примере динамического объекта 4-го порядка.

Ключевые слова: стационарный объект, нестационарный объект, импульсное измерительное устройство, дискретное измерительное устройство, наблюдение по принципу размыкаемого контура, наблюдение в реальном времени, реализация позиционного решения, распараллеливание вычислений, метод «разновесов».

By the use of multidimensional signals of impulse and discrete measuring devices an optimal observation problem for stationary and nonstationary objects is considered. Concepts of a priori and current distributions of the initial state are introduced. A realization method of positional solving of the optimal observation problem is presented on the base of disclosing loop. To accelerate the numerical computations it is suggested to use a parallelizing procedure. For the stationary objects additional accelerations of computations are achieved by recurrent equations, parallelizing procedures and the “set of weights” method. The results are illustrated by the examples of the 4th order dynamical object.

Keywords: stationary object, nonstationary object, impulse measuring devices, discrete measuring devices, observation on the principle of openable loop, on-line observation, positional solution, parallel computing, “set of weight” method.

Введение

Проблема наблюдения динамических объектов возникает при управлении ими в условиях неопределённости. Различают два типа неопределённости: стохастическая и множественная. Стохастическое управление и наблюдение (фильтрация) исследованы достаточно глубоко [1]. В случае множественной неопределённости проблемы наблюдения и управления менее разработаны. При управлении и наблюдении в условиях неопределённости исследуются: 1) управление и наблюдение по разомкнутому контуру (программное управление и априорное наблюдение), когда для формирования управляющих воздействий используется только априорная информация; 2) управление и наблюдение по размыкаемому контуру (апостериорные наблюдение и управление), когда для формирования текущих управляющих воздействий и оценок неопределённости используется информация, доступная к текущему моменту, но игнорируется информация о том, что подобные операции будут выполняться и в некоторые последующие моменты времени; 3) управление и наблюдение по замыкаемому

контуру (препостериорные наблюдение и управление), когда для формирования управляющих воздействий и оценок неопределённости кроме информации, доступной к текущему моменту, используется информация о том, что процедура наблюдения и управления будет использоваться в некоторые последующие моменты времени; 4) управление и наблюдение по замкнутому контуру представляет управление и наблюдение по замыкаемому контуру, когда учитывается, что эти действия будут осуществляться в каждый текущий и во все будущие моменты времени.

В классической теории управления по замкнутому контуру использовались детерминированные модели и прямые, обратные, комбинированные связи. Эти связи реализовывались с помощью существовавшей тогда аналоговой техники. Такой подход трудно реализуем для сложных систем управления в условиях множественной неопределённости и он не в полной мере учитывает возможности цифровой вычислительной техники и современные конструктивные методы решения экстремальных задач.

В работе описываются принципиальные алгоритмы построения реализаций позиционных решений задачи наблюдения по размыкаемому контуру. Они опираются на цифровую вычислительную технику и эффективные численные методы решения в реальном времени специальных экстремальных задач.

Структура работы. Во Введении приводятся краткие сведения о сути вопросов, рассмотренных в работе. В пункте 1 даётся постановка задачи наблюдения линейных динамических объектов с помощью импульсных измерительных устройств. Центральным понятием подхода является понятие «распределение неопределённости». Оно под другим названием введено в работе [2]. Из множества возможных задач наблюдения выбрана задача вычисления линейных оценок неопределённости, которая сопровождает задачу оптимального управления линейным объектом по принципу размыкаемого контура. Рассматриваемая задача наблюдения по принципу размыкаемого контура является, с одной стороны, двойственной к задаче управления в условиях неопределённости по размыкаемому контуру, а с другой – представляет простейшую задачу позиционного наблюдения.

Цель работы – синтез цифровых систем наблюдения в реальном времени. Конструкции метода наблюдения в реальном времени излагаются в пункте 2. Задачи наблюдения сводятся к задачам линейного программирования (ЛП). Реализация позиционного решения получается путём последовательной коррекции текущих опор. При этом коррекция проводится двойственным методом ЛП, который проявил себя эффективным методом решения подобных задач. В пункте 3 излагаются методы распараллеливания вычислений, которые существенно сокращают время коррекции за счёт небольшого увеличения оперативной памяти.

Эффективность предлагаемого метода наблюдения существенно повышается при наблюдении линейных стационарных систем (пункт 4). В этом случае в процессе наблюдения удаётся, с одной стороны, избавиться от интегрирования дифференциальных уравнений, а с другой – упростить операции распараллеливания. Дополнительно излагается метод разновесов.

Пункт 6 посвящён описанию метода наблюдения динамической системы с помощью дискретного измерительного устройства. Упомянутые выше конструкции переносятся на новый тип измерительных устройств. Полученные результаты иллюстрируются на примере задачи наблюдения системы 4-го порядка (четвертная модель автомобиля). Примеры показывают, что в процессе наблюдения коррекция опор осуществляется за небольшое число итераций двойственного метода.

В Приложении вынесен вспомогательный материал по сведению задачи наблюдения к задаче ЛП и по описанию основных операций использованного в основной части работы двойственного метода.

1 Наблюдение с помощью импульсного измерительного устройства

Пусть $T = [t_*, t^*]$ – конечный промежуток времени; $T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^*\}$, $T_h^+ = \{t_* + h, t_* + 2h, \dots, t^*\}$, $h = (t^* - t_*) / N$ – период квантования времени ($N > 1$ – натуральное число); $T^r = [t_*, \tau]$;

$$T_h^r = T^r \cap T_h, \tau \in T_h; T_h^{r+} = T^r \cap T_h^+, \tau \in T_h^+;$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in T$, – кусочно-непрерывная функция; $C(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $t \in T$, – непрерывная функция; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ – постоянные матрицы;

$$X_* = \{x \in \mathbb{R}^n : d_* \leq x \leq d^*\};$$

$$\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^r : \xi_* \leq \xi \leq \xi^*\};$$

$\xi_*, \xi^* \in \mathbb{R}^r$; $d_*, d^* \in \mathbb{R}^n$ – заданные векторы; $I = \{1, 2, \dots, r\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$; $A_h = \exp Ah$, $A_{-h} = \exp(-Ah)$, $\overline{A}_h = \int_0^h \exp As ds$.

Рассмотрим динамический объект, поведение которого описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x, t \in T, \quad (1.1)$$

где $x = x(t) = (x_j(t), j \in J) \in \mathbb{R}^n$ – состояние объекта в момент времени t .

Начальное состояние $x(t_*) = x_0$ объекта не задано, но известно, что оно принадлежит ограниченному множеству $X_* : x_0 \in X_*$. Множество X_* характеризует априорную неопределённость начального состояния. Назовем его априорным распределением начального состояния x_0 .

Для уменьшения априорной неопределённости будем вести наблюдение за поведением объекта (1.1), записывая сигналы импульсного измерительного устройства

$$y(\theta) = C(\theta)x(\theta) + \xi(\theta), \quad (1.2)$$

$$\xi(\theta) \in \Xi, \theta \in T_h,$$

где $C(t)x(t)$, $t \in T$, – наблюдаемый выходной сигнал объекта (1.1), $\xi(\theta) = (\xi_i(\theta), i \in I)$, $\theta \in T_h$, – неизвестные погрешности (ошибки) измерений.

Предположим, что процесс наблюдения осуществлён до момента $\tau \in T_h$ и получены сигналы $y_\tau(\cdot) = (y(\theta), \theta \in T_h^r)$.

Определение 1.1. Множество $X_*(\tau, y_\tau(\cdot))$ – текущее распределение начального состояния x_0 в позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$, если оно состоит из таких и только таких $x \in X_*$, которые способны вместе с некоторыми возможными $\xi_\tau(\cdot)$ получить $y_\tau(\cdot)$.

В задачах оптимального гарантирующего управления по размыкаемому контуру [3], [4] используются оценки неопределенности

$$\alpha = \alpha(X_*) = \max p'x, x \in X_*; \quad (1.3)$$

$$\alpha(\tau, y_\tau(\cdot)) = \max p'x, x \in X_*(\tau, y_\tau(\cdot)), \quad (1.4)$$

которые характеризуют протяженность множеств X_* , $X_*(\tau, y_\tau(\cdot))$ в направлении $p \in \mathbb{R}^n$, $\|p\|=1$. Вычисление оценки (1.3) назовем задачей априорного наблюдения или задачей наблюдения по разомкнутому контуру. Последняя задача представляет двойственный аналог программного управления (управление по разомкнутому контуру [1]).

Задача (1.4) в подробной записи (см. Приложение 1) имеет вид

$$p'x \rightarrow \max_x, \\ \xi_*(\theta) \leq D(\theta)x \leq \xi^*(\theta), \theta \in T_h^r; \quad (1.5) \\ d_* \leq x \leq d^*,$$

где $\xi_*(\theta) = \xi_* - y(\theta)$, $\xi^*(\theta) = \xi^* - y(\theta)$,

$$D(\theta) = -C(\theta)F(\theta) = \begin{pmatrix} d_{ij}(\theta), & j \in J \\ i \in I \end{pmatrix}, \theta \in T_h;$$

$F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in T$, – фундаментальная матрица решений:

$$\dot{F} = A(t)F, F(t_*) = E. \quad (1.6)$$

Вычисление оценки (1.4) для фиксированной позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$ называется текущей задачей наблюдения по принципу размыкаемого контура.

Пусть $Y_\tau(\cdot)$ – множество всех сигналов $y_\tau(\cdot)$, которые могут быть записаны устройством (1.2) к моменту времени τ .

Определение 1.2. Функцию

$$\alpha(\tau, y_\tau(\cdot)), y_\tau(\cdot) \in Y_\tau(\cdot), \tau \in T_h, \quad (1.7)$$

будем называть позиционным решением задачи наблюдения (1.4) по принципу размыкаемого контура, а ее построение – синтезом системы наблюдения с размыкаемым контуром (двойственный аналог синтеза системы управления с размыкаемым контуром [4], [5]).

Проблема априорного наблюдения (1.3) решается просто. Для решения задачи позиционного наблюдения (1.7) очевидны два метода – до начала процесса наблюдения: 1) построить функцию (1.7) в явном виде, 2) затабулировать её с необходимой точностью. При использовании этих методов основная работа выполняется до начала процесса наблюдения. В процессе наблюдения никакая вычислительная работа не осуществляется. Оба метода пригодны только для решения простейших задач. Опишем метод реализации позиционного решения (1.7) с помощью наблюдения в реальном времени.

При известной функции (1.7) наблюдение осуществляется следующим образом. Процесс наблюдения начинается в момент $t = t_*$, когда

поступает первый сигнал $y^*(t_*)$. По этому сигналу находится оценка $\alpha(t_*, y_{t_*}^*(\cdot))$, которая подается в управляющий орган в момент $t_* + s(t_*)$, где $s(t_*)$ – время поиска значения $\alpha(t_*, y_{t_*}^*(\cdot))$. Продолжая процесс наблюдения, получаем последовательность

$$\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot)), \tau \in T_h, \quad (1.8)$$

которая называется реализацией позиционного решения (1.7) в конкретном процессе наблюдения. Если для каждого момента $\tau \in T_h$ продолжительность $s(\tau)$ поиска значения $\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq s(\tau) < h$, то можно говорить, что наблюдение ведется в режиме реального времени.

Цель данной работы – описать методы построения реализации (1.8) позиционного решения (1.7) без знания функции (1.7), позволяющий для каждой текущей позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ вычислять значение $\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ за время $s(\tau) < h$. Он основан на двойственном методе (см. Приложение 2) и на распараллеливании вычислений.

2 Наблюдение в реальном времени

Простейший метод наблюдения в реальном времени линейной системы состоит в следующем. В каждый момент $\tau \in T_h$ для текущей позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ решается задача (1.4) и получается оценка $\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot))$. При использовании достаточно мощной вычислительной техники время вычисления оценки $\alpha(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ будет меньше h . Такой подход не учитывает специфики задачи (1.4), полученной из динамической задачи наблюдения.

Предлагается специальный метод наблюдения в реальном времени. До начала процесса наблюдения выполняется подготовительная работа. Множество

$Y_{t_*} = \{y \in \mathbb{R}^r : y = C(t_*)x_0 + \xi(t_*), x_0 \in X_*, \xi(t_*) \in \Xi\}$ покрывается ε -сетью $Y_{t_*}^\varepsilon$. Для каждого узла y^l сети решается задача

$$p'x \rightarrow \max; \\ y^l - \xi^* \leq C(t_*)x \leq y^l - \xi_*; \\ d_* \leq x \leq d^*.$$

Вычисляются и запоминаются:

- 1) $K_{\text{он}}^{l0} = \{S_{\text{он}}^{l0}, J_{\text{он}}^{l0}\}$;
- 2) $D_{(\text{он})}^{l0} = \begin{pmatrix} d_{ij}(\theta), & j \in J \\ \{i, \theta\} \in S_{\text{он}}^{l0} \end{pmatrix}$;
- 3) $F(t_* + h)$;
- 4) \varkappa^{l0} ;
- 5) $\zeta^{l0}(t_*)$.

Параметр ε выбирается так, чтобы для каждой точки $y \in Y_{t_*}$ существовал такой узел $y^l \in Y_{t_*}^\varepsilon$, что время коррекции оптимальной опоры $K_{\text{он}}^{l0}$ до оптимальной опоры $K_{\text{он}}^0(y)$ для точки y , не превосходило h .

Процесс наблюдения начинается в момент $t = t_*$, когда поступает первый сигнал $y^*(t_*)$. Двойственным методом решается задача

$$p'x \rightarrow \max_x,$$

$$\xi_*(t_*) \leq D(t_*)x \leq \xi^*(t_*),$$

$$d_* \leq x \leq d^*.$$

При этом в качестве начальной опоры $K_{\text{он}}(t_*)$ берется оптимальная опора $K_{\text{он}}^{l0}$ того узла y^l , для которого время коррекции $s(t_*)$ не превосходит h . Оценка $\alpha^*(t_*) = \alpha(t_*, y_{t_*}^*(\cdot))$ подается в управляющий орган в момент $t_* + s(t_*)$.

Пусть процесс наблюдения осуществлен на промежутке $[t_*, \tau - h]$, $\tau > t_*$, $\tau \in T_h$, и для позиции $(\tau - h, y_{\tau-h}^*(\cdot))$ сформирована и получена текущая оперативная информация $O(\tau - h)$:

- 1) $K_{\text{он}}^0(\tau - h) = \{S_{\text{он}}^0(\tau - h), J_{\text{он}}^0(\tau - h)\}$;
- 2) $D_{(\text{он})}^0(\tau - h) = \left\{ \begin{array}{l} d_{ij}(\theta), \quad j \in J \\ \{i, \theta\} \in S_{\text{он}}^0(\tau - h) \end{array} \right\}$;
- 3) $F(\tau)$;
- 4) $\alpha^0(\tau - h)$;
- 5) $\zeta^0(\theta | \tau - h)$, $\theta \in T_h^{\tau-h}$.

В момент τ поступает сигнал $y^*(\tau)$. Используя оперативную информацию $O(\tau - h)$, вычисляется $\zeta(\tau | \tau) = y^*(\tau) - C(\tau)F(\tau)\alpha^0(\tau - h)$.

Возможны два случая: 1) $\zeta(\tau | \tau) \in \Xi$, 2) $\zeta(\tau | \tau) \notin \Xi$.

В случае 1) оптимальная опора для момента $\tau - h$ остаётся оптимальной и для момента τ : $K_{\text{он}}^0(\tau) = K_{\text{он}}^0(\tau - h)$. В момент $\tau + s(\tau)$ в управляющий орган подается оценка $\alpha^*(\tau) = p'\alpha^0(\tau)$, $\alpha^0(\tau) = \alpha^0(\tau - h)$. В этом случае для формирования $O(\tau)$ достаточно вычислить значение $F(\tau + h)$ интегрированием уравнения (1.6) на отрезке $[\tau, \tau + h]$ с начальным условием $F(\tau)$ из $O(\tau - h)$.

В случае 2) осуществляется коррекция опоры $K_{\text{он}}^0(\tau - h)$ до оптимальной опоры $K_{\text{он}}^0(\tau)$ с помощью двойственного метода (см. Приложение 2). В этом случае на каждой итерации требуется 2 раза проинтегрировать уравнение (1.6) на промежутке $[t_*, \tau]$.

3 Ускорение построения реализации позиционного решения

До начала процесса наблюдения к подготовительной работе, описанной в пункте 2, добавляется новая. Выбираются моменты $\tau_l \in T_h$, $l = \overline{1, l^*}$: $t_* = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{l^*} = t^*$. Вычисляются и запоминаются значения

$$F(\tau_l) \in \mathbb{R}^n, l = \overline{1, l^*}. \quad (3.1)$$

Для ускорения коррекции опор процесс вычисления функции $F(\theta)$, $\theta \in T_h$, распараллеливается на l^* процессов вычислений на промежутках $T^l = [\tau_{l-1}, \tau_l]$, $l = \overline{1, l^*}$. Пусть $q(\tau)$ – количество итераций двойственного метода по коррекции оптимальной опоры $K_{\text{он}}^0(\tau) = K_{\text{он}}^0(\tau - h)$ до оптимальной опоры $K_{\text{он}}^0(\tau)$; $s(l)$ – время интегрирования дифференциального уравнения $\dot{F} = A(t)F$ на промежутке T^l . Тогда $s(\tau) \approx 2q(\tau) \max_l s(l)$. Величина $q(\tau)$ зависит от значения h и используемого метода коррекции опор. Величиной $\max_l s(l)$ можно управлять, выбирая точки τ_l , $l = \overline{1, l^*}$. В данной работе для коррекции опор применяется двойственный метод с длинным шагом [8]. Численные эксперименты показывают, что метод весьма эффективен (см., в частности, примеры в пунктах 5, 7).

4 Наблюдение стационарного объекта

Поведение динамического стационарного объекта описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in T = [0, t^*].$$

Записываются сигналы импульсного измерительного устройства

$$y(\theta) = Cx(\theta) + \xi(\theta), \quad \xi(\theta) \in \Xi, \quad \theta \in T_h.$$

Использование рекуррентных уравнений и параллельных вычислений. Для стационарного объекта функция $F(\theta)$, $\theta \in T_h$, удовлетворяет рекуррентным уравнениям:

– прямому

$$F(\theta + h) = A_h F(\theta), \quad F(0) = E, \quad \theta \in T_h; \quad (4.1)$$

– обратному

$$F(\theta - h) = A_{-h} F(\theta), \quad F(t^*) = A_h^N, \quad \theta \in T_h. \quad (4.2)$$

Поэтому в процессе наблюдения стационарного объекта отпадает необходимость интегрирования дифференциальных уравнений.

Ускорение вычислений функции $F(\theta)$, $\theta \in T_h$, с помощью параллельных вычислений осуществляется следующим образом. До начала процесса наблюдения выбираются произвольные моменты

$$\theta_q \in T_h, \quad q \in Q = \{1, 2, \dots, q^*\};$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{q^*} = t^*.$$

Множество T_h разбивается на подмножества

$$\{0, h, \dots, \theta_1 - h\}, \{\theta_1, \theta_1 + h, \dots, \theta_2 - h\}, \dots, \\ \{\theta_{q^*-1}, \theta_{q^*-1} + h, \dots, \theta_{q^*}\}.$$

По формуле (4.1) или (4.2) вычисляются и запоминаются значения $\bar{F}(\theta_q), q \in Q$. В процессе наблюдения значения функции $F(\vartheta), \vartheta \in T_h$, вычисляются по формуле (4.1) или (4.2) параллельно на всех подмножествах с начальными условиями $\bar{F}(\theta_q), q \in Q$.

Метод «разновесов». В случае стационарного объекта ускорения вычислений функции $F(\theta), \theta \in T_h$, можно добиться с помощью метода «разновесов». Положим

$$\Delta_1 = \theta_1 - \theta_0, \Delta_2 = \theta_2 - \theta_1, \dots, \Delta_{q^*} = \theta_{q^*} - \theta_{q^*-1}.$$

Пусть $\Delta_q, q \in Q$, – такой набор чисел, что для каждого $\theta \in T_h$ найдется поднабор $Q(\theta) \subset Q$, при котором $\theta = \sum_{q \in Q(\theta)} \Delta_q$. Имеет место формула

$$F(\theta) = \prod_{q \in Q(\theta)} F(\Delta_q). \quad (4.3)$$

Метод «разновесов» для вычисления функции $F(\theta), \theta \in T_h$, состоит в следующем. До начала процесса наблюдения выбирается набор $\Delta_q, q \in Q$. Для каждого $\theta \in T_h$ строится поднабор $Q(\theta) \subset Q$. Вычисляются и запоминаются значения $F(\Delta_q), q \in Q(\theta)$. В процессе наблюдения значения функции $F(\theta), \theta \in T_h$, вычисляются по формуле (4.3).

Процесс наблюдения стационарного объекта осуществляется по алгоритму, описанному в пункте 2. Дополнительно можно использовать метод «разновесов» и параллельные вычисления.

5 Пример 1

Рассматривается четвертная модель автомобиля (рисунок 5.1):

$$\dot{x}_1 = x_3; \quad \dot{x}_2 = x_4; \\ \dot{x}_3 = -\frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{k_1}{m_1} x_2; \quad \dot{x}_4 = \frac{k_1}{m_2} x_1 - \frac{k_1 + k_2}{m_2} x_2.$$

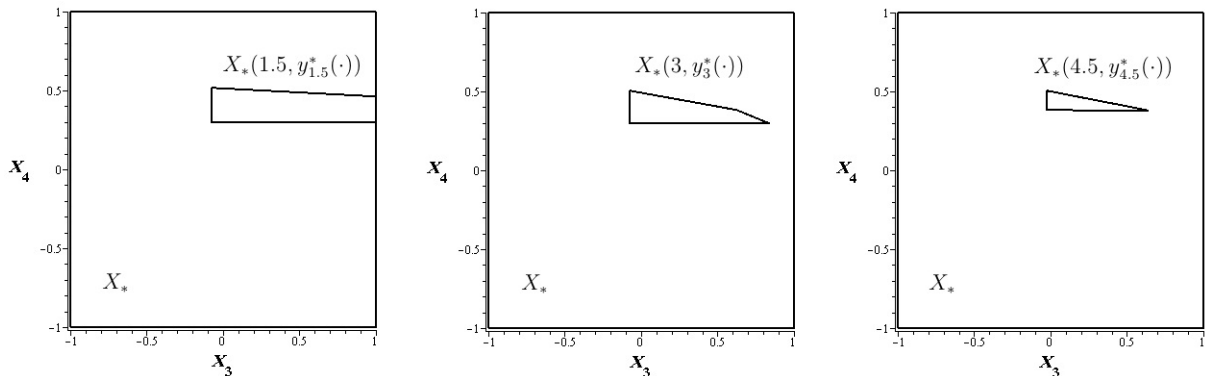


Рисунок 5.2 – Внешние аппроксимации текущих распределений начального состояния

Объект наблюдается на промежутке $T = [0; 4,5]$ при следующих значениях параметров: $k_1 = 1; k_2 = 10; m_1 = 1; m_2 = 10$. Пусть $h = 0,1; d_* = (0; 0; -1; -1); d^* = (0; 0; 1; 1); \xi_* = (-0,15; -0,1); \xi^* = (0,15; 0,1)$.

Используется импульсное измерительное устройство

$$y_1(\theta) = 0,1x_1(\theta) + \xi_1(\theta);$$

$$y_2(\theta) = 0,1x_2(\theta) + \xi_2(\theta), \theta \in T_h.$$

Неизвестные начальное состояние и ошибки измерения имеют вид: $x_0 = (0; 0; 0; 0,5)$;

$$\xi_1(t) = 0,15 \cos t; \xi_2(t) = 0,1 \cos(2t).$$

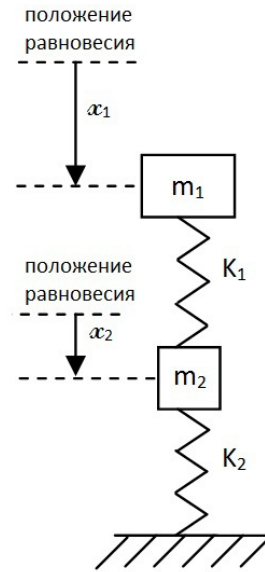


Рисунок 5.1 – Четвертная модель автомобиля

На рисунке 5.2 представлены внешние аппроксимации текущих распределений начального состояния, полученные с помощью направлений $p = (0; 0; \cos \frac{2k\pi}{20}; \sin \frac{2k\pi}{20}), k = \overline{1; 20}$; на рисунке 5.3 – изменение оценки неопределенности в некоторых направлениях.

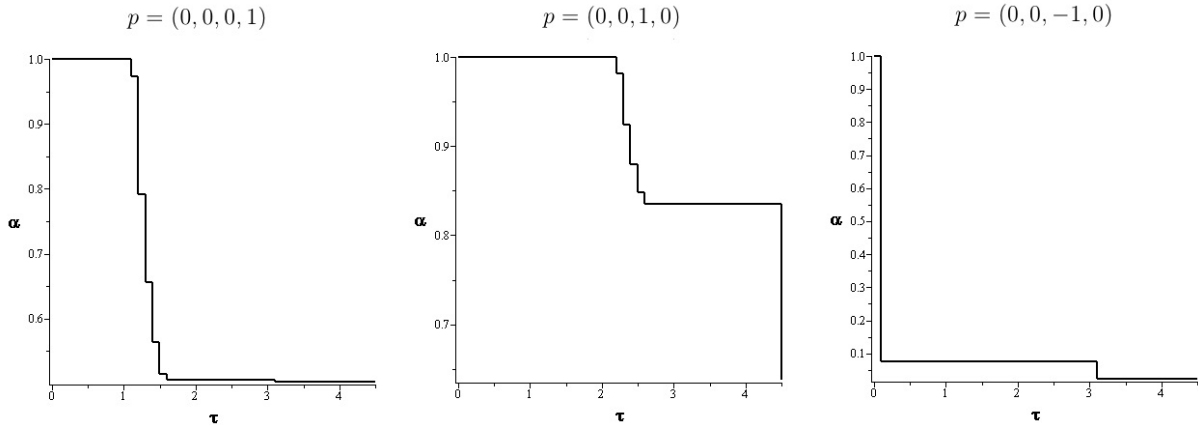


Рисунок 5.3 – Изменение оценки неопределенности

Таблица 5.1 – Количество итераций двойственного метода

$k \setminus \tau$	0	0.5	1	1.5	2	2.5
1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)
2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)
3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)
4	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (1)
5	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (1)	2 (1)
6	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (1)	1 (1)
7	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (1)	1 (1)
8	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (1)	1 (1)
9	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (1)	1 (1)
10	0 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (0)	1 (0)
11	0 (0)	2 (0)	2 (0)	5 (0)	5 (0)	0 (0)
12	0 (0)	2 (0)	2 (0)	5 (0)	5 (0)	0 (0)
13	0 (0)	2 (0)	2 (0)	5 (0)	5 (0)	0 (0)
14	0 (0)	2 (0)	2 (0)	5 (0)	5 (0)	0 (0)
15	0 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)
16	0 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)
17	0 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)
18	0 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)
19	0 (0)	1 (0)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)
20	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

Таблица 5.1 содержит информацию о количестве итераций двойственного метода (при $t^* = 2,5; h = 0,5$). Числа, записанные в скобках (), соответствуют примеру 2 (см. пункт 7). В левую колонку помещена информация о количестве итераций в случае использования пустой опоры в качестве начальной. Правая колонка содержит информацию о количестве итераций в случае использования предыдущей оптимальной опоры в качестве начальной.

6 Наблюдение с помощью дискретного измерительного устройства

Заменим импульсное измерительное устройство (1.2) на дискретное

$$y(\theta) = C(\theta) \int_{\theta-h}^{\theta} x(s) ds + \xi(\theta), \quad (6.1)$$

$$\xi(\theta) \in \Xi, \theta \in T_h^+$$

Новая задача наблюдения сводится к задаче (см. Приложение 1)

$$p'x \rightarrow \max_x,$$

$$\xi_*(\theta) \leq \bar{D}(\theta)x \leq \xi^*(\theta), \theta \in T_h^{t^*+}; \quad (6.2)$$

$$d_* \leq x \leq d^*,$$

где $\xi_*(\theta) = \xi_* - y(\theta), \xi^*(\theta) = \xi^* - y(\theta),$

$$\bar{D}(\theta) = -C(\theta) \int_{\theta-h}^{\theta} F(s) ds = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{ij}(\theta), & j \in J \\ i \in I \end{pmatrix}, \theta \in T_h^+.$$

До начала процесса наблюдения выполняется подготовительная работа. Множество

$$Y_{(t_*, h)} = \left\{ y \in \mathbb{R}^r : \right.$$

$$y = C(t_* + h) \int_{t_*}^{t_*+h} F(s) ds x_0 + \xi(t_* + h),$$

$$\left. x_0 \in X_*, \xi(t_* + h) \in \Xi \right\}$$

покрывается ε -сетью $Y_{(t_*, h)}^\varepsilon$. Для каждого узла

y^l сети решается задача

$$p'x \rightarrow \max;$$

$$y^l - \xi^* \leq C(t_* + h) \int_{t_*}^{t_*+h} F(s) ds x \leq y^l - \xi_*;$$

$$d_* \leq x \leq d^*.$$

Вычисляются и запоминаются:

1) $K_{\text{он}}^{l0} = \{S_{\text{он}}^{l0}, J_{\text{он}}^{l0}\};$

2) $\tilde{D}_{(\text{он})}^{l0};$

3) $F(t_* + 2h);$

4) $\alpha^{l0};$

5) $\zeta^{l0}(t_* + h)$. Параметр ε выбирается так, чтобы для каждой точки $y \in Y_{(t_*, h)}$ существовал такой узел $y^l \in Y_{(t_*, h)}^\varepsilon$, что время коррекции оптимальной опоры $K_{\text{он}}^{l0}$ до оптимальной $K_{\text{он}}^0(y)$ для точки y не превосходило h .

В момент t_* в управляющий орган подается априорная оценка неопределенности $\alpha^*(t_*) = \alpha$, в момент $t_* + h$ становится известным сигнал $y^*(t_* + h)$, для которого решается задача

$$p'x \rightarrow \max_x,$$

$$\xi_*(t_* + h) \leq \tilde{D}(t_* + h)x \leq \xi^*(t_* + h),$$

$$d_* \leq x \leq d^*.$$

В качестве начальной опоры берется оптимальная опора $K_{\text{он}}^{l0}$ того узла y^l , для которого $s(t_* + h) < h$. Процесс наблюдения продолжается по методу, описанному в пункте 2.

Рассмотрим стационарную задачу наблюдения с помощью дискретного измерительного устройства

$$y(\theta) = C \int_{\theta-h}^{\theta} x(s) ds + \xi(\theta), \xi(\theta) \in \Xi, \theta \in T_h^+.$$

Обозначим

$$\Phi_h(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} F(s) ds, \Phi_h(\theta + h) = \int_{\theta}^{\theta+h} F(s) ds, \theta \in T_h^+.$$

Используя замену переменного $t = s - h$, получим

$$\Phi_h(\theta + h) = \int_{\theta-h}^{\theta} F(t+h) dt = A_h \int_{\theta-h}^{\theta} F(t) dt = A_h \Phi_h(\theta),$$

т. е. функция $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, удовлетворяет рекуррентным уравнениям:

– прямому

$$\Phi_h(\theta + h) = A_h \Phi_h(\theta), \quad \Phi_h(h) = \bar{A}_h, \theta \in T_h^+; \quad (6.3)$$

– обратному

$$\Phi_h(\theta - h) = A_{-h} \Phi_h(\theta), \quad \Phi_h(t^*) = A_h^{N-1} \bar{A}_h, \theta \in T_h^+. \quad (6.4)$$

Согласно (6.3), (6.4) в процессе наблюдения стационарного объекта отпадает необходимость интегрирования дифференциальных уравнений.

Ускорение вычислений функции $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, с помощью параллельных вычислений осуществляется следующим образом. До начала процесса наблюдения выбираются произвольные моменты $\theta_q \in T_h, q \in Q = \{1, 2, \dots, q^*\}: h = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{q^*} = t^*$.

Множество T_h разбивается на подмножества

$$\{h, 2h, \dots, \theta_1 - h\}, \{\theta_1, \theta_1 + h, \dots, \theta_2 - h\}, \dots, \{\theta_{q^*-1}, \theta_{q^*-1} + h, \dots, \theta_{q^*}\}.$$

По формулам (6.3), (6.4) вычисляются и запоминаются значения $\bar{\Phi}_h(\theta_q), q \in Q$. В процессе наблюдения значения функции $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, вычисляются по формулам (6.3), (6.4) параллельно на всех подмножествах с начальными условиями $\bar{\Phi}_h(\theta_q), q \in Q$.

Вторым способом ускорения вычислений в случае стационарного объекта является метод «разновесов». Положим

$$\Delta_1 = \theta_1 - \theta_0, \Delta_2 = \theta_2 - \theta_1, \dots, \Delta_{q^*} = \theta_{q^*} - \theta_{q^*-1}.$$

Пусть $\Delta_q, q \in Q$, – такой набор чисел, что для каждого $\theta \in T_h$ найдется поднабор $Q(\theta) \subset Q$, при котором $\theta = \theta_0 + \sum_{q \in Q(\theta)} \Delta_q$. Имеет место формула

$$\Phi_h(\theta) = \Phi_h(\theta_0) \prod_{q \in Q(\theta)} F(\Delta_q). \quad (6.5)$$

Метод «разновесов» для вычисления функции $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, состоит в следующем. До начала процесса наблюдения выбирается набор $\Delta_q, q \in Q$. Для каждого $\theta \in T_h$ строится поднабор $Q(\theta) \subset Q$. Вычисляются и запоминаются значения $\Phi_h(\theta_0); F(\Delta_q), q \in Q(\theta)$. В процессе наблюдения значения функции $\Phi_h(\theta), \theta \in T_h$, вычисляются по формуле (6.5). Метод «разновесов» можно использовать вместе с параллельными вычислениями.

7 Пример 2

Рассмотрим пример, описанный в пункте 5, с заменой импульсного измерительного устройства на дискретное

$$y_1(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} 0, 1x_1(s) ds + \xi_1(\theta);$$

$$y_2(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} 0, 1x_2(s) ds + \xi_2(\theta), \theta \in T_h^+.$$

Полученные результаты представлены на рисунках 7.1 и 7.2.

На рисунках 7.3 и 7.4 приведены результаты, полученные при использовании измерительного устройства

$$y_1(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} x_1(s) ds + \xi_1(\theta);$$

$$y_2(\theta) = \int_{\theta-h}^{\theta} x_2(s) ds + \xi_2(\theta), \theta \in T_h^+.$$

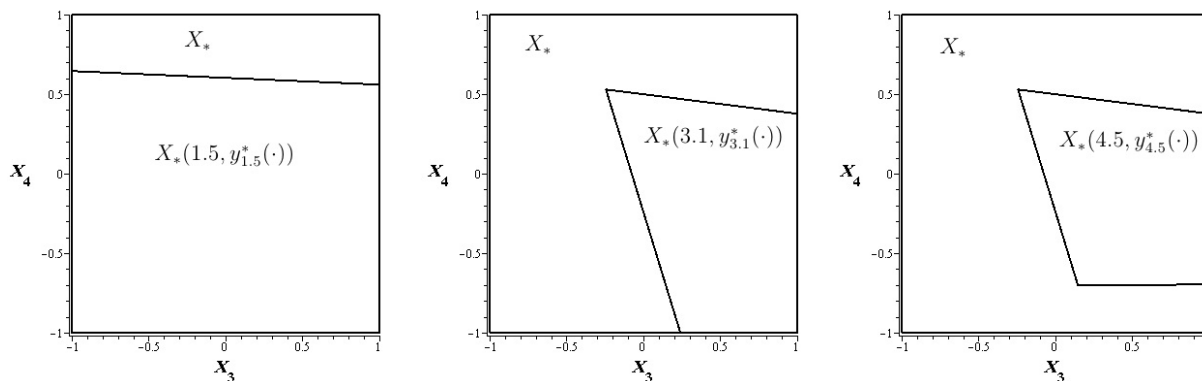


Рисунок 7.1 – Внешние аппроксимации текущего распределения начального состояния

$p = (0, 0, 0, 1)$

$p = (0, 0, 1, 0)$

$p = (0, 0, -1, 0)$

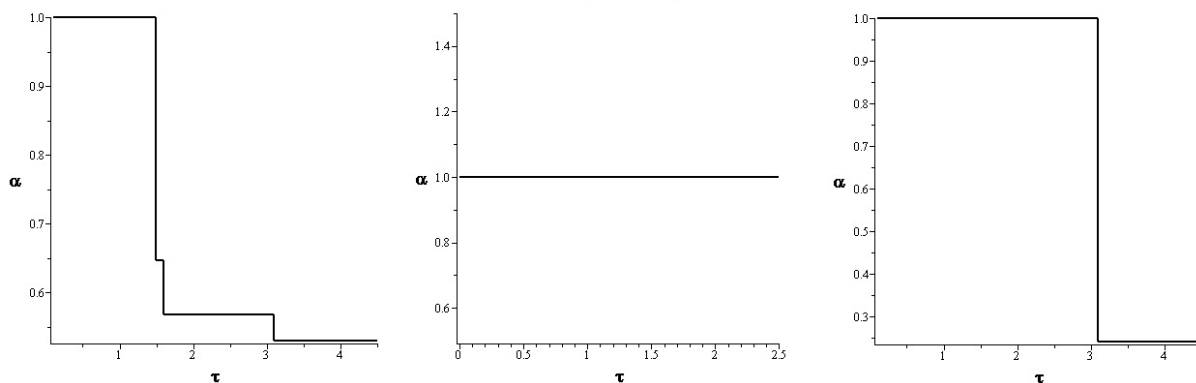


Рисунок 7.2 – Оценки неопределенности

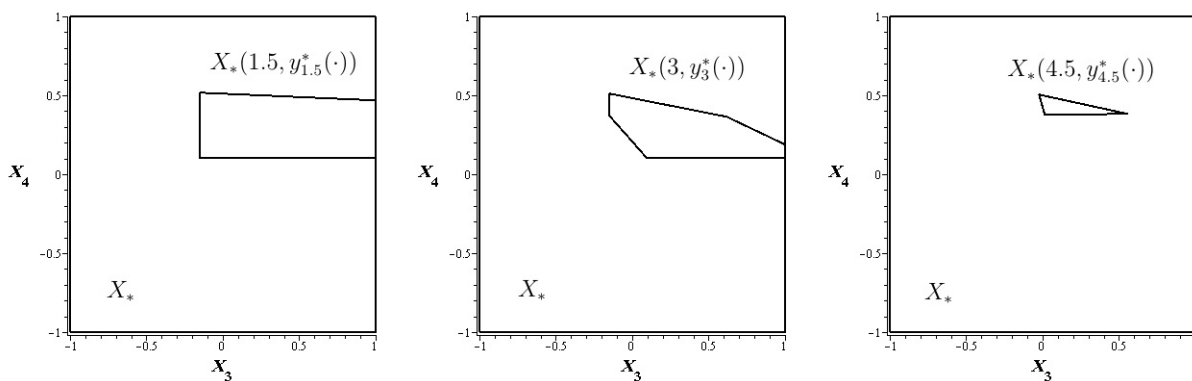


Рисунок 7.3 – Внешние аппроксимации текущего распределения начального состояния

$p = (0, 0, 0, 1)$

$p = (0, 0, 1, 0)$

$p = (0, 0, -1, 0)$

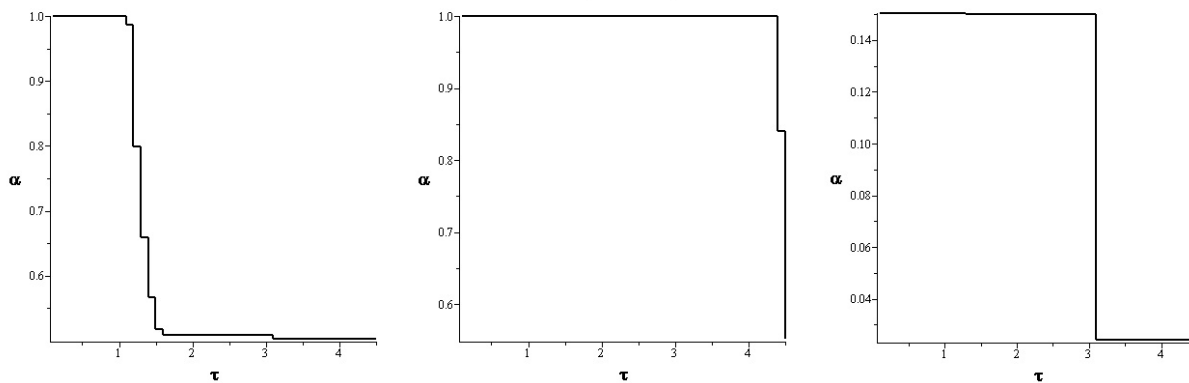


Рисунок 7.4 – Оценки неопределенности

Заключение

В работе описаны принципиальные конструкции цифровых эстиматоров, которые способны в режиме реального времени вычислять оценки неопределённости, имеющейся в начальном состоянии линейного динамического объекта, а также в сигналах импульсного и дискретного измерительных устройств.

При построении эстиматоров используется принцип работы по размыкаемому контуру. Следуя предлагаемой схеме, можно построить эстиматоры, работающие по принципу замыкаемого контура. Первые результаты в этом направлении содержатся в статьях [6], [7], где для построения эстиматоров дополнительно используется пре-постериорный анализ.

Приложение 1

Сведение задачи наблюдения к задаче ЛП

В силу формулы Коши для объекта (1.1)

$$x(t) = F(t)x_0, t \in T,$$

из определения 1.1 следует

$$X_*(\tau, y_r(\cdot)) = \{x \in R^n :$$

$$\xi_* \leq \xi(\theta) = y(\theta) + D(\theta)x \leq \xi^*, \theta \in T_h^r;$$

$$d_* \leq x \leq d^*\}.$$

Поэтому задача

$$\alpha(\tau, y_r(\cdot)) = \max_x p'x, x \in X_*(\tau, y_r(\cdot)),$$

эквивалентна задаче ЛП

$$p'x \rightarrow \max_x,$$

$$\xi_* - y(\theta) \leq D(\theta)x \leq \xi^* - y(\theta), \theta \in T_h^r;$$

$$d_* \leq x \leq d^*,$$

т. е. задача (1.4) сводится к задаче (1.5).

В случае дискретного измерительного устройства (6.1) задача наблюдения (1.4) сводится к задаче (6.2) с заменой $D(\theta)$ на $\tilde{D}(\theta)$.

Приложение 2

Двойственный метод

Рассматривается интервальная задача линейного программирования:

$$c'x \rightarrow \max,$$

$$b_* \leq Ax \leq b^*,$$

$$d_* \leq x \leq d^*,$$

(П2.1)

$$x \in R^n, A \in R^{m \times n}.$$

Для решения задачи (П2.1) применяется двойственный метод, основным понятием которого является *опора*. Из множеств $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ выделяются такие произвольные подмножества $I_{\text{оп}} \subseteq I, J_{\text{оп}} \subseteq J$, что $|I_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$. Составляется матрица

$$A_{\text{оп}} = A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) = \begin{pmatrix} a_{ij}, & j \in J_{\text{оп}} \\ i \in I_{\text{оп}} \end{pmatrix}.$$

Если $\det A_{\text{оп}} \neq 0$, то пара $K_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ – опора задачи (П2.1). В случае $I_{\text{оп}} = \emptyset, J_{\text{оп}} = \emptyset$ пустое

множество $K_{\text{оп}} = \emptyset$ – (пустая) опора, по определению.

Опору сопровождают:

1) *вектор Лагранжа* $u = u(I) = (u_i, i \in I)$: $u_i = 0, i \in I_n = I \setminus I_{\text{оп}}; u'_{\text{оп}} A_{\text{оп}} = c'_{\text{оп}}$, где $u_{\text{оп}} = u(I_{\text{оп}}) = (u_i, i \in I_{\text{оп}}), c_{\text{оп}} = c(J_{\text{оп}}) = (c_j, j \in J_{\text{оп}})$. В случае пустой опоры полагаем $u = 0$;

2) *вектор оценок* $\delta = \delta(J) = (\delta_j, j \in J)$: $\delta' = c' - u'_{\text{оп}} A(I_{\text{оп}}, J)$; $\delta = c$, если $K_{\text{оп}} = \emptyset$;

3) *псевдоплан* $\varepsilon = \varepsilon(J) = (\varepsilon_j, j \in J)$ и *вектор псевдозатрат* $\xi = \xi(I) = (\xi_i, i \in I)$:

$$\xi_{\text{оп}} : \xi_i = \begin{cases} b_i^*, & \text{если } u_i > 0; \\ b_{*i}, & \text{если } u_i < 0; \\ \in [b_{*i}, b_i^*], & \text{если } u_i = 0, i \in I_{\text{оп}}; \end{cases}$$

$$\varepsilon_n : \varepsilon_j = \begin{cases} d_j^*, & \text{если } \delta_j > 0; \\ d_{*j}, & \text{если } \delta_j < 0; \\ \in [d_{*j}, d_j^*], & \text{если } \delta_j = 0, j \in J_n; \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\text{оп}} = A_{\text{оп}}^{-1} [\xi_{\text{оп}} - A(I_{\text{оп}}, J_n) \varepsilon_n]; \xi_n = A(I_n, J) \varepsilon.$$

Опора $K_{\text{оп}}$ называется *регулярной*, если выполняются соотношения $u_i \neq 0, i \in I_{\text{оп}}; \delta_j \neq 0, j \in J_n$. Регулярную опору сопровождают единственные псевдоплан и вектор псевдозатрат.

Критерий оптимальности опоры. Для оптимальности опоры $K_{\text{оп}}^0$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторых сопровождающих ее псевдоплана ε^0 и вектора псевдозатрат ξ^0 выполнялись неравенства:

$$d_{*j} \leq \varepsilon_j \leq d_j^*, j \in J_{\text{оп}};$$

$$b_{*i} \leq \xi_i \leq b_i^*, i \in I_n.$$

Решение задачи (П2.1) с помощью двойственного метода начинается с произвольной опоры $K_{\text{оп}}^1$ (возможно, пустой). Он представляет собой процесс преобразования опор, в результате которого получается оптимальная опора: $K_{\text{оп}}^1 \rightarrow \dots \rightarrow K_{\text{оп}}^2 \rightarrow \dots \rightarrow K_{\text{оп}}^0$. Псевдоплан ε^0 , сопровождающий оптимальную опору $K_{\text{оп}}^0$, является оптимальным планом $\varepsilon^0 = x^0$.

Итерация метода представляет замену старой опоры $K_{\text{оп}}$ на новую $\bar{K}_{\text{оп}}$, при которой выполняется неравенство $c' \bar{\varepsilon} \leq c' \varepsilon$. Для регулярной опоры $K_{\text{оп}}$ итерация выполняется следующим образом (общий случай описан в [8]).

Вычисляется $\alpha^1 = -\max \{\rho_{i_0}, \rho_{j_0}\}$, где

$$\rho_{i_0} = \max \rho(\xi_i, [b_{*i}, b_i^*]), i \in I_n;$$

$$\rho_{j_0} = \max \rho(\varepsilon_j, [d_{*j}, d_j^*]), j \in J_{\text{оп}};$$

$\rho(c, [a, b])$ – расстояние от числа c до отрезка $[a, b]$.

Если $\alpha^1 = 0$, то $K_{\text{оп}} = K_{\text{оп}}^0$ – оптимальная опора задачи (П2.1). При $\alpha^1 < 0$ опора $K_{\text{оп}}$ заменяется на новую $\bar{K}_{\text{оп}}$. Для этого строятся направление Δu изменения вектора Лагранжа и направление $\Delta \delta$ изменения вектора оценок. Возможны два случая: 1) $\alpha^1 = -\rho_{i_0}$; 2) $\alpha^1 = -\rho_{j_0}$.

$$\begin{aligned} &\text{В случае 1) полагается } \Delta u_{i_0} = \text{sign}(\xi_{i_0} - b_{*i_0}); \\ \Delta u_i &= 0, i \in I_{\text{н}} \setminus i_0; \Delta u'_{\text{оп}} = -A(i_0, J_{\text{оп}})A_{\text{оп}}^{-1}\Delta u_{i_0}; \\ \Delta \delta_{\text{оп}} &= 0; \Delta \delta'_n = -\Delta u' A(I, J_{\text{н}}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{В случае 2) полагается} \\ \Delta \delta_{j_0} &= \text{sign}(x_{j_0} - d_{*j_0}); \\ \Delta \delta_j &= 0, j \in J_{\text{оп}} \setminus j_0; \\ \Delta u_n &= 0; \Delta u'_{\text{оп}} A_{\text{оп}} = \Delta \delta'_{\text{оп}}; \\ \Delta \delta'_n &= -\Delta u'_{\text{оп}} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}}). \end{aligned}$$

Вычисляются

$$\begin{aligned} \sigma_i &= -u_i / \Delta u_i \quad \text{при } u_i \Delta u_i < 0; \\ \sigma_i &= \infty \quad \text{при } u_i \Delta u_i \geq 0, i \in I_{\text{оп}}; \\ \sigma_j &= -\delta_j / \Delta \delta_j \quad \text{при } \delta_j \Delta \delta_j < 0; \\ \sigma_j &= \infty \quad \text{при } \delta_j \Delta \delta_j \geq 0, j \in J_{\text{н}}. \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

Если среди этих чисел нет конечных, то задача (П2.1) не имеет решения из-за несовместности ограничений. В противном случае конечные числа из (П2.2) упорядочиваются: $\sigma^1 < \sigma^2 < \dots < \sigma^{k_*} < \infty$. Находится такой индекс k_0 , что $\alpha^{k_0} < 0$, $\alpha^{k_0+1} \geq 0$. Здесь $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta \alpha^k$;

$$\begin{aligned} \Delta \alpha^k &= (b_{i_k}^* - b_{*i_k}) |\Delta u_{i_k}|, \text{ если } \sigma^k = \sigma_{i_k}; \\ \Delta \alpha^k &= (d_{j_k}^* - d_{*j_k}) |\Delta \delta_{j_k}|, \text{ если } \sigma^k = \sigma_{j_k}, k = 1, k^*. \end{aligned}$$

Имеются две возможности: а) $\sigma^{k_0} = \sigma_{i_k}$; б) $\sigma^{k_0} = \sigma_{j_k}$. Компоненты новой опоры $\bar{K}_{\text{оп}}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} 1\text{а)} \quad \bar{I}_{\text{оп}} &= (I_{\text{оп}} \setminus i_*) \cup i_0, \bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}; \\ 1\text{б)} \quad \bar{I}_{\text{оп}} &= I_{\text{оп}} \cup i_0, \bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j_*; \\ 2\text{а)} \quad \bar{I}_{\text{оп}} &= I_{\text{оп}} \setminus i_*, \bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0; \\ 2\text{б)} \quad \bar{I}_{\text{оп}} &= I_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup j_*. \end{aligned}$$

Описанный метод конечен, если опоры на итерациях регулярны. Существует модификация метода, конечная для любой задачи [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах* / под ред. К.Т. Леондеса. – М. : Мир, 1980.
2. Schweppe, F.C. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs / F.C. Schweppe // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – Vol. 13, Issue 1. – P. 22–28.
3. Габасов, Р. Союзные задачи управления, наблюдения и идентификации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. АН БССР. – 1990. – Т. 34, № 9. – С. 777–780.
4. Габасов, Р. Синтез оптимальных управлений для динамических систем при неполной и неточной информации об их состояниях / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. – 1995. – Т. 211. – С. 140–152.
5. Габасов, Р. Оптимальное наблюдение за нестационарными системами / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 3. – С. 35–46.
6. Габасов, Р. Замыкаемая обратная связь для гарантированной оптимизации неопределенных систем управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Костина // Докл. РАН. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 180–183.
7. Габасов, Р. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.В. Балашевич // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 838–859.
8. Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации. Часть 1. Линейные задачи / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск : Изд-во Университетское, 1984.

Поступила в редакцию 05.09.14.

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ВИДЕ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ
ОТ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ**

Е.С. Лысюк

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

**REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL SYSTEMS
OF A THIRD-ORDER IN THE FORM OF EXPONENTIAL SERIES
OUT OF LINEAR FRACTIONAL FUNCTIONS**

A.S. Lysiuk

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Рассматриваются пять автономных систем трёх дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью. Изучены вопросы о сходимости рядов, представляющих решения данных систем; об инвариантности четырёх из рассматриваемых систем при определенном виде преобразованиях; о наличии трёхпараметрических решений с подвижной особой линией.

Ключевые слова: существенно особая точка, подвижная особая линия, область однозначности решения, ряд Дирихле, абсцисса абсолютной сходимости.

Five autonomous systems of three differential equations with quadratic right-hand side are considered. The issues of the series of convergence which represent the solution of this systems, under a certain mode of transformations, the invariance in four of the given systems and existence of three-parameter solutions with movable singular line were studied.

Keywords: essential singularity, movable singular line, area of the uniqueness of solution, Dirichlet series, abscissa of absolute convergence.

Введение

Рассмотрим автономную систему третьего порядка

$$\begin{cases} x' = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz, \\ y' = a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{23}yz, \\ z' = a_{31}xz + a_{32}yz + a_{33}z^2 + cxy, \end{cases} \quad (0.1)$$

где x, y, z – комплекснозначные функции, $c \neq 0$.

В [1] найдены условия, при которых система (0.1) имеет подвижную особую линию в случае

$$a_{13} = a_{23}, \quad a_{12} = a_{32}, \quad a_{21} = a_{31}. \quad (0.2)$$

В случаях, отличных от (0.2), в [2] получено двадцать семь систем третьего порядка вида (0.1), решения которых содержат подвижную особую линию с существенно особыми точками, ограничивающую область однозначности решения.

В настоящей работе для некоторых систем, полученных в [2]:

$$\begin{cases} x' = 2xy, \\ y' = -2y^2 + 3yz, \\ z' = 12xz - 3z^2 - 12xy; \end{cases} \quad (0.3)$$

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = 3xy + y^2 + yz, \\ z' = 2xz + \frac{8}{1 - 4/m^2} xy; \end{cases} \quad (0.4)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$ или $m = \infty$;

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = 3xy + y^2 - \nu yz, \\ z' = 2xz + z^2 - \frac{8(\nu + 2)}{\nu^2} xy; \end{cases} \quad (0.5)$$

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = (3 + \nu)xy + y^2 - \nu yz, \\ z' = z^2 - \frac{(\nu + 4)^2}{\nu^2} xy; \end{cases} \quad (0.6)$$

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = -(\nu + 1)xy + y^2 + (\nu + 4)yz, \\ z' = z^2 - \frac{\nu^2}{(\nu + 4)^2} xy; \end{cases} \quad (0.7)$$

где $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, построим решения в виде рядов Дирихле и рядов по экспонентам от дробно-линейных функций.

1 Предварительные результаты

Исключая y, z в системе (0.3), получим, что компонента x определяется уравнением

$$x''' = 12xx'' - 18x'^2, \quad (1.1)$$

при этом

$$y = \frac{x'}{2x}, \quad z = \frac{x''}{3x'}. \quad (1.2)$$

Как известно [3], уравнение Шази (1.1) имеет подвижную особую линию.

Как и в [4], [5], представим решение уравнения (1.1) в виде ряда Дирихле

$$x = -\frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k a^k e^{-kt}. \quad (1.3)$$

Подставляя ряд (1.3) в (1.1), получим a - произвольное, $\zeta_1 = 1$, остальные коэффициенты ζ_k , $k = 2, 3, 4, \dots$, определяются по рекуррентной формуле

$$\zeta_k = \frac{6}{k^2(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} (3kp - 5p^2) \zeta_p \zeta_{k-p}, \quad (1.4)$$

$$k = 2, 3, 4, \dots$$

Покажем, что существует $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\zeta_k a^k|}$.

Из (1.4) имеем $\zeta_2 = 3/2$. За счёт выбора a можем сделать $|\zeta_1 a| \leq |a|$, $|\zeta_2 a^2| \leq |a|$, если $0 < |a| \leq 2/3$. Предположим, что для всех $m < k$ верно $|\zeta_m a^m| \leq |a|$. Покажем, что $|\zeta_k a^k| \leq |a|$.

$$|\zeta_k a^k| = \left| \frac{6a^k}{k^2(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} (3kp - 5p^2) \zeta_p \zeta_{k-p} \right| \leq$$

$$\leq \frac{6}{k^2(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} |3kp - 5p^2| |\zeta_p a^p| |\zeta_{k-p} a^{p-k}| \leq$$

$$\leq \frac{6a^2}{k^2(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} (3kp + 5p^2) = \frac{19k^2 - 5k}{k^2} a^2 \leq |a|,$$

если $0 < |a| \leq 1/19$.

На основании метода математической индукции заключаем, что $|\zeta_k a^k| \leq |a|$, $k = 1, 2, 3, \dots$, если a подчинено условию $0 < |a| \leq 1/19$.

Используя полученную оценку, можем записать $\ln \sqrt[k]{|\zeta_k a^k|} \leq \frac{1}{k} \ln |a|$, $k = 1, 2, 3, \dots$, откуда следует, что справедлива

Лемма 1.1. *Существует*

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\zeta_k a^k|} = \sigma, \quad (1.5)$$

где a , ζ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ - коэффициенты ряда (1.3).

Число σ является абсциссой абсолютной сходимости ряда (1.3) [6, с. 115], поэтому в полуплоскости $\text{Re } t > \sigma$ ряд (1.3) сходится абсолютно, а в полуплоскости $\text{Re } t < \sigma$ он расходится.

Дифференциальное уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразования переменных

$$x(t) = f'(t)u(\tau) + \varphi(t), \quad \tau = f(t),$$

где f - дробно-линейная функция от t , причём $f'' = 2f'\varphi$, $\varphi' = \varphi^2$ [7, с. 299].

Тогда, как и в [8], можно записать трёхпараметрическое решение уравнения (1.1), полагая

$$\tau = \frac{h}{t-t_0} - \ln A,$$

$$x = -\frac{1}{t-t_0} + \frac{h}{12(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \quad (1.6)$$

где $\theta = aA$, h , t_0 - произвольные постоянные, $\zeta_1 = 1$, остальные коэффициенты ζ_k , $k = 2, 3, 4, \dots$, определяются по рекуррентной формуле (1.4).

Ряд (1.6) будет абсолютно сходящимся при условии $\text{Re} \frac{h}{t-t_0} > \mu$, где $\mu = \sigma + \ln |A|$, σ взято из (1.5).

В [8] установлено, что ряд (1.6) имеет место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением

$$2\mu t \bar{t} - (2\mu t_0 + h)\bar{t} - (2\mu \bar{t}_0 + \bar{h})t + 2\mu t_0 \bar{t}_0 + h\bar{t}_0 + \bar{h}t_0 = 0, \quad (1.7)$$

определяющим окружность, радиус которой равен $\rho = |h|/(2|\mu|)$, а центр находится в точке $t_1 = t_0 + h/(2\mu)$, $\mu \neq 0$ (если $\mu = 0$, то окружность вырождается в прямую), и координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для членов ряда (1.6).

С учётом (1.2), (1.6), запишем трёхпараметрическое решение системы (0.3):

$$x = -\frac{1}{t-t_0} + \frac{h}{12(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}},$$

$$y = \left(-h(t-t_0) + 6(t-t_0)^2 + \right.$$

$$\left. + 12h(t-t_0) \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} - \right.$$

$$\left. - 6h^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \right) / \left(h(t-t_0)^2 - \right.$$

$$\left. - 12(t-t_0)^3 - 2h(t-t_0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \right),$$

$$z = \left(h(t-t_0)^2 - 4h(t-t_0)^3 - 12h(t-t_0)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} + 12h^2(t-t_0) \sum_{k=1}^{\infty} k \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} - \right.$$

$$\left. - 2h^3 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \right) / \left(-h(t-t_0)^3 + \right.$$

$$\left. + 6(t-t_0)^4 + 12h(t-t_0)^3 \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} - 6h^2(t-t_0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \zeta_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \right). \quad (1.8)$$

Рассмотрим системы (0.4)–(0.7). В [2] установлено, что одна из компонент в каждой из систем (0.4)–(0.7) определяется уравнением, решение которого содержит подвижную особую линию с существенно особыми точками, ограничивающую область однозначности решения.

Будем искать решения систем (0.4)–(0.7) в виде рядов Дирихле

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a^k e^{-kt}, \\ y &= \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k b^k e^{-kt}, \\ z &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g^k e^{-kt}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Замечание 1.1. Систему (0.4) рассмотрим в случае $m = \infty$. При $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$ рассуждения аналогичны.

Подставляя ряды (1.9) в систему (0.4), получим a – произвольное, $\alpha_0 = \beta_0 = -1/4$, $\gamma_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -3$, $\gamma_1 = -12$, $b = g = a$, остальные коэффициенты α_k , β_k , g_k , $k = 2, 3, 4, \dots$, находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{8k^2(k-1)} \left((8k^2 - 6k - 3) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) + \right. \\ &\quad \left. + (2k-1) \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (4\beta_p + \gamma_p) \right), \\ \beta_k &= \frac{1}{8k^2(k-1)} \left((-8k^2 + 6k - 1) \times \right. \\ &\quad \times \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \\ &\quad \left. + (6k-3) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) - \right. \\ &\quad \left. - (4k-1) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (4\beta_p + \gamma_p) \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{2k^2(k-1)} \left((-4k^2 + 2k - 1) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (4\beta_p + \gamma_p) - \right. \\ &\quad \left. - (4k-1) \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) \right), \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Для системы (0.5) имеем следующие значения коэффициентов рядов (1.9): a – произвольное, $\alpha_0 = \beta_0 = -v/(4(v+2))$, $\gamma_0 = -1/(v+2)$, $b = g = a$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -(3v+8)/v$, $\gamma_1 = 4(3v^2+12v+16)/v^3$, остальные коэффициенты α_k , β_k , g_k , $k = 2, 3, 4, \dots$, находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{16(v+2)^2 k^2 (k-1)} \left((16(v+2)^2 k^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4(3v+8)(v+2)k - 2v(3v+4)) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) + \right. \\ &\quad \left. + v(4(v+2)k - 2v - 8) \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (3\alpha_p + \beta_p - v\gamma_p) - \right. \\ &\quad \left. - v^3 \sum_{p=1}^{k-1} \left(\alpha_{k-p} \left(2\gamma_p - \frac{8(v+2)}{v^2} \beta_p \right) + \gamma_p \gamma_{k-p} \right) \right), \\ \beta_k &= \frac{1}{16(v+2)^2 k^2 (k-1)} \left((16(v+2)^2 k^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4(3v+8)(v+2)k + 2v(v+4)) \times \right. \\ &\quad \times \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (v\gamma_p - 3\alpha_p - \beta_p) + v(12(v+2)k - \\ &\quad \left. - 2(3v+4)) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) + \right. \\ &\quad \left. + v^2(4(v+2)k - v) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{p=1}^{k-1} \left(\alpha_{k-p} \left(2\gamma_p - \frac{8(v+2)}{v^2} \beta_p \right) + \gamma_p \gamma_{k-p} \right) \right), \\ \gamma_k &= \frac{1}{4v(v+2)^2 k^2 (k-1)} \left((4v(v+2)^2 k^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2v^2(v+2)k + v^3) \sum_{p=1}^{k-1} \left(\alpha_{k-p} \left(\frac{8(v+2)}{v^2} \beta_p - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\gamma_p \right) - \gamma_p \gamma_{k-p} \right) + (16(v+2)k + 2v(3v+4)) \times \\ &\quad \times \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\alpha_p - \beta_p) + (8(v+2)^2 k - \\ &\quad \left. - 2v(v+4)) \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (3\alpha_p + \beta_p - v\gamma_p) \right), \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подставляя ряды (1.9) в систему (0.6), получим a – произвольное, $\alpha_0 = \beta_0 = -v/(4(v+2))$, $\gamma_0 = -(v+4)/(4(v+2))$, $b = g = a$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -(3v+8)/v$, $\gamma_1 = (v+4)^3/v^3$, остальные коэффициенты α_k , β_k , g_k , $k = 2, 3, 4, \dots$, находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{16(v+2)^2 k^2 (k-1)} \left((v+2)(16(v+2)k^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4(3v+8)k - v(v+4)) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) + \right. \\ &\quad \left. + v(4(v+2)k - 2v - 8) \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} ((v+3)\alpha_p + \beta_p - v\gamma_p) + \right. \\ &\quad \left. + v^3 \sum_{p=1}^{k-1} \left(\frac{(v+4)^2}{v^2} \alpha_p \beta_{k-p} - \gamma_p \gamma_{k-p} \right) \right), \\ \beta_k &= \frac{1}{16(v+2)^2 k^2 (k-1)} \left((16(v+2)^2 k^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4(3v+8)(v+2)k + 2v(v+4)) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (\nu \gamma_p - (\nu+3)\alpha_p - \beta_p) + \quad (1.12) \\ & + \nu(\nu+2)(4(\nu+3)k - \nu - 4) \times \\ & \times \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) + \nu^2(4(\nu+2)k - \nu) \times \\ & \times \sum_{p=1}^{k-1} \left(\gamma_p \gamma_{k-p} - \frac{(\nu+4)^2}{\nu^2} \alpha_p \beta_{k-p} \right), \\ \gamma_k = & \frac{1}{16\nu(\nu+2)^2 k^2 (k-1)} \left(\nu(16(\nu+2)^2 k^2 - \right. \\ & \left. - 8\nu(\nu+2)k + \nu^2(\nu+4)) \times \right. \\ & \times \sum_{p=1}^{k-1} \left(\frac{(\nu+4)^2}{\nu^2} \alpha_p \beta_{k-p} - \gamma_p \gamma_{k-p} \right) + \\ & + (\nu+2)(\nu+4)^2(4k + \nu) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\alpha_p - \beta_p) + \\ & \left. + 2(\nu+4)^2(2(\nu+2)k - \nu) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} ((\nu+3)\alpha_p + \beta_p - \nu\gamma_p) \right), \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Для системы (0.7) имеем следующие значения коэффициентов рядов (1.9): a – произвольное, $\alpha_0 = \beta_0 = -(\nu+4)/(4(\nu+2))$, $\gamma_0 = -\nu/(4(\nu+2))$, $b = g = a$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -(3\nu+4)/(\nu+4)$, $\gamma_1 = \nu^3/(\nu+4)^3$, остальные коэффициенты α_k , β_k , g_k , $k = 2, 3, 4, \dots$, находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \alpha_k = & \frac{1}{16(\nu+2)^2 k^2 (k-1)} \left((\nu+2)(16(\nu+2)k^2 - \right. \\ & \left. - 4(3\nu+4)k + \nu(\nu+4)) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) + \right. \\ & \left. + (\nu+4)(4(\nu+2)k - 2\nu) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (-(\nu+1)\alpha_p + \beta_p + (\nu+4)\gamma_p) + \right. \\ & \left. + (\nu+4)^3 \sum_{p=1}^{k-1} \left(-\frac{\nu^2}{(\nu+4)^2} \alpha_p \beta_{k-p} + \gamma_p \gamma_{k-p} \right) \right), \\ \beta_k = & \frac{1}{16(\nu+2)^2 k^2 (k-1)} \left((\nu+4)(\nu+2) \times \right. \\ & \times (4(\nu+1)k - \nu) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\alpha_p - \beta_p) + \\ & + (16(\nu+2)^2 k^2 - 4(\nu+2)(3\nu+4)k + \\ & + 2\nu(\nu+4)) \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} ((\nu+1)\alpha_p - \beta_p - \\ & \left. - (\nu+4)\gamma_p) - (\nu+4)^2(4(\nu+2)k - \nu - 4) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{p=1}^{k-1} \left(-\frac{\nu^2}{(\nu+4)^2} \alpha_p \beta_{k-p} + \gamma_p \gamma_{k-p} \right) \right), \quad (1.13) \\ \gamma_k = & \frac{1}{16(\nu+2)^2 (\nu+4)k^2 (k-1)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\nu^2(\nu+2)(4k - \nu - 4) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\alpha_p - \beta_p) + \right. \\ & \left. + \nu^2(4(\nu+2)k - 2\nu - 8) \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (-(\nu+1)\alpha_p + \right. \\ & \left. + \beta_p + (\nu+4)\gamma_p) - (16(\nu+4)(\nu+2)^2 k^2 - \right. \\ & \left. - 8(\nu+2)(\nu+4)^2 k - \nu(\nu+4)^3) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{p=1}^{k-1} \left(-\frac{\nu^2}{(\nu+4)^2} \alpha_p \beta_{k-p} + \gamma_p \gamma_{k-p} \right) \right), \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Покажем, что для каждого из наборов коэффициентов (1.10)–(1.13) существуют

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\alpha_k a^k|}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\beta_k b^k|}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\gamma_k g^k|}.$$

Из (1.10) имеем $\alpha_2 = 1/2$, $\beta_2 = -39/2$, $\gamma_2 = 6$.

За счёт выбора a можем сделать $|\alpha_k a^k| \leq \xi$, $|\beta_k b^k| \leq \xi$, $|\gamma_k g^k| \leq \xi$, $k = 1, 2$. Предположим, что для всех $m < k$ верно $|\alpha_m a^m| \leq \xi$, $|\beta_m b^m| \leq \xi$, $|\gamma_m g^m| \leq \xi$. Покажем, что $|\alpha_k a^k| \leq \xi$, $|\beta_k b^k| \leq \xi$, $|\gamma_k g^k| \leq \xi$.

$$\begin{aligned} |\alpha_k a^k| = & \left| a^k \frac{1}{8k^2(k-1)} \times \right. \\ & \times \left((8k^2 - 6k - 3) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) + \right. \\ & \left. + (2k-1) \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (4\beta_p + \gamma_p) \right) \leq \\ \leq & \frac{1}{8k^2(k-1)} \left((8k^2 - 6k - 3) \sum_{p=1}^{k-1} |\alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) a^k| + \right. \\ & \left. + (2k-1) \sum_{p=1}^{k-1} |\beta_{k-p} (3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) a^k| + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{k-1} |\alpha_{k-p} (4\beta_p + \gamma_p) a^k| \right) \leq \frac{\xi^2}{8k^2(k-1)} \times \\ \times & (2(8k^2 - 6k - 3)(k-1) + 5(2k-1)(k-1) + 5(k-1)) = \\ = & \frac{(16k^2 - 2k - 6)\xi^2}{8k^2} \leq \xi, \quad \text{если } 0 < \xi \leq 1/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\beta_k b^k| = & \left| b^k \frac{1}{8k^2(k-1)} \left((-8k^2 + 6k - 1) \times \right. \right. \\ & \times \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p} (3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \\ & \left. + (6k - 3) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (\beta_p - \alpha_p) - \right. \\ & \left. - (4k - 1) \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p} (4\beta_p + \gamma_p) \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{8k^2(k-1)} \left((8k^2 + 6k - 1) \times \right. \\ &\quad \times \sum_{p=1}^{k-1} |\beta_{k-p}(3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p)b^k| + \\ &\quad + (6k - 3) \sum_{p=1}^{k-1} |\alpha_{k-p}(\beta_p - \alpha_p)b^k| + \\ &\quad \left. + (4k - 1) \sum_{p=1}^{k-1} |\alpha_{k-p}(4\beta_p + \gamma_p)b^k| \right) \leq \\ &\leq \frac{\xi^2}{8k^2(k-1)} (5(8k^2 + 6k - 1)(k-1) + \\ &\quad + 2(6k - 3)(k-1) + 5(4k - 1)(k-1)) = \\ &= \frac{\xi^2(40k^2 + 62k - 16)}{8k^2} \leq \xi, \text{ если } 0 < \xi \leq 1/5. \\ &|\gamma_k g^k| = \left| g^k \frac{1}{2k^2(k-1)} \left((-4k^2 + 2k - 1) \times \right. \right. \\ &\quad \times \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{k-p}(4\beta_p + \gamma_p) - (4k - 1) \sum_{p=1}^{k-1} \beta_{k-p}(3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p) + \\ &\quad \left. \left. + 3 \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{k-p}(\beta_p - \alpha_p) \right) \right| \leq \frac{1}{2k^2(k-1)} \times \\ &\quad \times \left((4k^2 + 2k - 1) \sum_{p=1}^{k-1} |\alpha_{k-p}(4\beta_p + \gamma_p)g^k| + \right. \\ &\quad + (4k - 1) \sum_{p=1}^{k-1} |\beta_{k-p}(3\alpha_p + \beta_p + \gamma_p)g^k| + \\ &\quad \left. + 3 \sum_{k=1}^{p-1} |\alpha_{k-p}(\beta_p - \alpha_p)g^k| \right) \leq \frac{\xi^2}{2k^2(k-1)} \times \\ &\quad \times (5(4k^2 + 2k - 1)(k-1) + 5(4k - 1)(k-1) + 6(k-1)) = \\ &= \frac{\xi^2(20k^2 + 30k - 4)}{2k^2} \leq \xi, \text{ если } 0 < \xi \leq 1/10. \end{aligned}$$

На основании метода математической индукции получаем, что $|\alpha_k a^k| \leq \xi$, $|\beta_k b^k| \leq \xi$, $|\gamma_k g^k| \leq \xi$, $k = 1, 2, 3, \dots$, если ξ удовлетворяет условию $0 < \xi \leq 1/10$. Используя полученные оценки, можем записать

$$\begin{aligned} \ln |\alpha_k a^k|^{\frac{1}{k}} &\leq \frac{1}{k} \ln \xi, \quad \ln |\beta_k b^k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \ln \xi, \\ \ln |\gamma_k g^k|^{\frac{1}{k}} &\leq \frac{1}{k} \ln \xi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

Аналогично можно показать, что имеют место оценки вида (1.14) для коэффициентов рядов (1.9), определяющих формальные решения систем (0.5), (0.6), (0.7).

Значит, верна

Лемма 1.2. Для каждого из наборов коэффициентов (1.10)–(1.13) существуют

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\alpha_k a^k|} = \sigma_1, \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\beta_k b^k|} = \sigma_2,$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\gamma_k g^k|} = \sigma_3.$$

Числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ являются абсциссами абсолютной сходимости рядов (1.9) соответственно. Пусть

$$\sigma = \max_{\nu=1,2,3} \{\sigma_\nu\}. \quad (1.15)$$

Ряды (1.9) являются абсолютно сходящимися в области $\text{Re } t > \sigma$.

Лемма 1.3. Системы (0.4), (0.5) инвариантны относительно преобразования переменных

$$\begin{aligned} x(t) &= f'(t)u(\tau) + \varphi(t), \quad \tau = f(t), \\ x(t)y(t) &= f'^2(t)u(\tau)v(\tau), \quad \tau = f(t), \\ z(t) &= f'(t)w(\tau), \quad \tau = f(t), \end{aligned}$$

где f – дробно-линейная функция от t , причём $f'' = 2f'\varphi$, $\varphi' = \varphi^2$.

Лемма 1.4. Системы (0.6), (0.7) инвариантны при преобразовании переменных

$$\begin{aligned} x(t) &= f'(t)u(\tau) + \varphi(t), \quad \tau = f(t), \\ x(t)y(t) &= f'^2(t)u(\tau)v(\tau), \quad \tau = f(t), \\ z(t) &= f'(t)w(\tau) + \varphi(t), \quad \tau = f(t), \end{aligned}$$

где f – дробно-линейная функция от t , причём $f'' = 2f'\varphi$, $\varphi' = \varphi^2$.

Справедливость лемм 1.3, 1.4 легко проверить непосредственно.

$$\text{Используя лемму 1.3, полагая } \tau = \frac{h}{t-t_0} - \ln A,$$

запишем трёхпараметрическое решение системы (0.4)

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{t-t_0} + \frac{h}{4(t-t_0)^2} - \\ &\quad - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \\ y &= h^2 \left(1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} + \right. \\ &\quad \left. + 16 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p \beta_{k-p} \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \right) / \left(4h(t-t_0)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 16(t-t_0)^3 - 16h(t-t_0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \right), \\ z &= -\frac{h}{(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

и трёхпараметрическое решение системы (0.5)

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{t-t_0} + \frac{vh}{4(v+2)(t-t_0)^2} - \\ &\quad - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \\ y &= h^2 \left(\frac{v^2}{(v+2)^2} - \frac{4v}{v+2} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} + \right. \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$+16 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p \beta_{k-p} \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \Big/ \left(\frac{4vh}{v+2} (t-t_0)^2 - \right. \\ \left. -16(t-t_0)^3 - 16h(t-t_0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \right), \\ z = \frac{h}{(v+2)(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}.$$

$$-16(t-t_0)^3 - 16h(t-t_0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \Big), \\ z = -\frac{1}{t-t_0} + \frac{vh}{4(v+2)(t-t_0)^2} - \\ -\frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}.$$

Здесь $\theta = aA$, h, t_0 – произвольные постоянные. Для рядов (1.16) $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -3$, $\gamma_1 = -12$, остальные коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, k = 2, 3, 4, \dots$, находятся по рекуррентным формулам (1.10). Для рядов (1.17) $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -(3v+8)/v$, $\gamma_1 = 4(3v^2+12v+16)/v^3$, остальные коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, k = 2, 3, 4, \dots$, находятся по рекуррентным формулам (1.11).

Используя лемму 1.4, полагая $\tau = \frac{h}{t-t_0} - \ln A$, запишем трёхпараметрическое решение системы (0.6)

$$x = -\frac{1}{t-t_0} + \frac{vh}{4(v+2)(t-t_0)^2} - \\ -\frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \quad (1.18) \\ y = h^2 \left(\frac{v^2}{(v+2)^2} - \frac{4v}{v+2} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} + \right. \\ \left. +16 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p \beta_{k-p} \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \Big/ \left(\frac{4vh}{v+2} (t-t_0)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. -16(t-t_0)^3 - 16h(t-t_0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \right), \right. \\ \left. z = -\frac{1}{t-t_0} + \frac{(v+4)h}{4(v+2)(t-t_0)^2} - \right. \\ \left. -\frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \right.$$

и трёхпараметрическое решение системы (0.7)

$$x = -\frac{1}{t-t_0} + \frac{(v+4)h}{4(v+2)(t-t_0)^2} - \\ -\frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \quad (1.19) \\ y = h^2 \left(\frac{(v+4)^2}{(v+2)^2} - \right. \\ \left. -\frac{4(v+4)}{(v+2)} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} + \right. \\ \left. +16 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p \beta_{k-p} \theta^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \Big/ \left(\frac{4(v+4)h}{v+2} (t-t_0)^2 - \right. \right.$$

Здесь $\theta = aA$, h, t_0 – произвольные постоянные. Для рядов (1.18) $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -(3v+8)/v$, $\gamma_1 = (v+4)^3/v^3$, остальные коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, k = 2, 3, 4, \dots$, находятся по рекуррентным формулам (1.12). Для рядов (1.19) $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -(3v+4)/(v+4)$, $\gamma_1 = v^3/(v+4)^3$, остальные коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, k = 2, 3, 4, \dots$, находятся по рекуррентным формулам (1.13).

Ряды (1.16)–(1.19) являются абсолютно сходящимися при условии

$$\operatorname{Re} \frac{h}{t-t_0} > \mu,$$

где $\mu = \sigma + \ln |A|$, σ взято из (1.15).

Аналогично, как и для ряда (1.6), используя результаты, полученные в [8], заключаем, что ряды (1.16)–(1.19) имеют место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением (1.7). Координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для членов рядов (1.16)–(1.19).

2 Теорема о представлении решений дифференциальных систем (0.3)–(0.7)

Таким образом, с учётом леммы 1.1, леммы 1.2, заключаем, что справедлива

Теорема 2.1. Ряды (1.8), (1.16)–(1.19), имеющие место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением (1.7), представляют общее решение систем (0.3)–(0.7) соответственно. Координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для членов рядов (1.8), (1.16)–(1.19) соответственно.

Замечание 2.1. Аналогично можно построить трёхпараметрические решения и для некоторых других систем, полученных в работе [2].

Заключение

В работе для систем уравнений (0.3)–(0.7) построены решения в виде рядов Дирихле и рядов по экспонентам от дробно-линейных функций; установлено наличие трёхпараметрических решений с подвижной особой линией.

Полученные результаты исследования могут быть применены в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартынов, И.П.* О системах третьего порядка с подвижной особой линией / И.П. Мартынов // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 2. – С. 227–232.
2. *Андреева, Т.К.* О решениях с подвижной особой линией системы трёх дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью / Т.К. Андреева, Е.С. Лысюк, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Веснік ГрДУ. – Серья 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2014. – № 1 (170). – С. 34–41.
3. *Shazy, J.* Sur les equation differentielles du troisieme ordre et d'ordre suprieur, dont l'integrable a ses points critiques fixes / J. Shazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 4. – P. 317–385.
4. *Кравченко, Т.К.* Решение бесконечной граничной задачи для одного уравнения третьего порядка / Т.К. Кравченко, А.И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1, № 3. – С. 327–329.
5. *Кравченко, Т.К.* Об одной краевой задаче на полубесконечном отрезке / Т.К. Кравченко, А.И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, № 12. – С. 2180–2186.
6. *Леонтьев, А.Ф.* Ряды экспонент / А.Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1976. – 536 с.
7. *Мартынов, И.П.* Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем : пособие / И.П. Мартынов, Н.С. Берёзкина, В.А. Пронько. – Гродно : ГрГУ, 2009. – 395 с.
8. *Ванькова, Т.Н.* Об одном обобщении уравнения Шази с подвижной особой линией / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1085–1094.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Грант №Ф14М–148).

Поступила в редакцию 28.04.14.

УДК 512.542

ФОРМУЛА ИНЪЕКТОРА КОНЕЧНОЙ π -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

М.Г. Семенов

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь

FORMULA OF AN INJECTOR OF A FINITE π -SOLUBLE GROUP

M.G. Semenov

P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Пусть G – конечная π -разрешимая группа. Множество Фиттинга \mathcal{F} группы G будем называть π -насыщенным, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$, справедливо $H \in \mathcal{F}$. Доказано, что \mathcal{F} -инъектор группы G – это подгруппа вида $W \cdot C_{D_p}(W/W_{F(p)})$, где \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга, которое определяется полной локальной функцией F группы G , Σ – холловская система G , $D = N_G(\Sigma)$, $p \in \pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$, $D_p \in \Sigma \cap D$, W – \mathcal{F} -инъектор группы $O^p(G)$ и $\Sigma \setminus W$.

Ключевые слова: конечная π -разрешимая группа, π -насыщенное множество Фиттинга, \mathcal{F} -инъектор.

Let G be a finite π -soluble group. We say that a Fitting set \mathcal{F} of G is π -saturated if it verifies $H \in \mathcal{F}$ whenever $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$. It is proved that \mathcal{F} -injector of G is a subgroup of the form $W \cdot C_{D_p}(W/W_{F(p)})$, where \mathcal{F} is a π -saturated Fitting set, which is defined with full integrated H -function F of G , Σ – Hall system of G , $D = N_G(\Sigma)$, $p \in \pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$, $D_p \in \Sigma \cap D$, W is an \mathcal{F} -injector of $O^p(G)$ and $\Sigma \setminus W$.

Keywords: finite π -soluble group, π -saturated Fitting set, \mathcal{F} -injector.

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы.

В теории формаций известна теорема Брюстера [1] о том, что для любой π -насыщенной формации \mathfrak{F} в каждой π -разрешимой группе существуют \mathfrak{F} -проекторы и любые два из них сопряжены. Напомним, что \mathfrak{F} -проектором группы G называют такую подгруппу F , что FN/N – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа в G/N для любой нормальной подгруппы N из G . В теории классов Фиттинга результат дуальной теоремы Брюстера был получен Мартинесом Вердуччи [2]. В работе [2] было доказано, что для любого π -насыщенного класса Фиттинга \mathfrak{F} в π -разрешимой группе G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Особый интерес представляет задача описания общего метода построения \mathfrak{F} -инъекторов. В работах [3] и [4] были описаны \mathfrak{F} -инъекторы для некоторых специальных случаев локального класса Фиттинга \mathfrak{F} . Также описанию метода построения инъекторов для классов Хартли и локальных классов Фиттинга была посвящена работа [5]. Более того В.Н. Загурским и Н.Т. Воробьевым [6] была найдена формула \mathfrak{F} -инъектора в классе всех π -разрешимых групп для случая, когда π – множество всех простых делителей порядков всех групп из локального класса Фиттинга \mathfrak{F} .

В настоящей работе мы обобщаем основной результат работы [6], описывая формулу \mathcal{F} -инъектора в π -насыщенном множестве Фиттинга \mathcal{F} π -разрешимой группы. Напомним, что множеством Фиттинга группы G называют [7, с. 537] такое непустое множество подгрупп группы G , которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Заметим, что каждому классу Фиттинга \mathfrak{F} соответствует множество Фиттинга $\mathcal{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G) = \{H \leq G : H \in \mathfrak{F}\}$, которое называют следом класса Фиттинга \mathfrak{F} , хотя обратное в общем случае неверно [7, пример VIII.2.2(b)]. При этом, когда множество Фиттинга $\mathcal{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G)$, множества \mathfrak{F} -инъекторов и \mathcal{F} -инъекторов группы G совпадают. В определениях и обозначениях мы следуем [7].

1 Предварительные сведения

Напомним, что если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа. Её называют \mathfrak{F} -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Если \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фиттинга, то их произведением называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно [7, теорема IX.1.12], что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга. Символом $G_{\mathcal{F}}$ обозначим наибольшую из нормальных \mathcal{F} -подгрупп группы G . Такую подгруппу называют \mathcal{F} -радикалом группы G . Подгруппу V называют [7, с. 538] \mathcal{F} -инъектором группы G если $V \cap N$ является \mathcal{F} -максимальной подгруппой в N для любой субнормальной подгруппы N группы G .

Если $H \leq G$, то $\mathcal{F}_H = \{S \leq H : S \in \mathcal{F}\}$ является множеством Фиттинга группы G и, очевидно, является множеством Фиттинга группы H . Следуя [7], мы будем обозначать \mathcal{F}_H во многих случаях просто символом \mathcal{F} .

Лемма 1.1 [7, предположение VIII.2.4(d)]. Если \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G и N – субнормальная подгруппа группы G , то $G_{\mathcal{F}} \cap N = N_{\mathcal{F}}$.

Лемма 1.2 [7, свойство VIII.2.6]. Если \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G и K – субнормальная подгруппа группы G и V – \mathcal{F} -инъектор группы G , тогда подгруппа $V \cap K$ является \mathcal{F} -инъектором группы K .

Лемма 1.3 [7, лемма VIII.2.7]. Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G , $N \trianglelefteq G$ и V – \mathcal{F} -инъектор группы N . Тогда V^g – \mathcal{F} -инъектор группы N для любого элемента g группы G .

Класс групп \mathfrak{F} называют: *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует $G/N \in \mathfrak{F}$; *замкнутым относительно подпрямых произведений*, если из $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$; *формацией*, если он является гомоморфом замкнутым относительно подпрямых произведений; *формацией Фиттинга*, если он является формацией и классом Фиттинга.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Наименьшую нормальную подгруппу $G^{\mathfrak{F}}$ группы G , для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ называют \mathfrak{F} -корадикалом группы G . Пусть \mathfrak{X} – класс групп, тогда $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\}$ называют *корадикальным произведением*.

Лемма 1.4 [7, теорема IV.1.8]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} – непустые формации, а G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{X}} = (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{X}}$.

Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Напомним, что символом $O_{\pi}(G)$ обозначают наибольшую нормальную π -подгруппу группы G , а символом $O^{\pi}(G)$ – такую наименьшую нормальную подгруппу группы G , что факторгруппа $G/O^{\pi}(G)$ является π -группой.

Холловской системой [8] π -разрешимой группы G называется такое множество Σ холловских подгрупп из G , что выполняются следующие условия: 1) для всякого множества простых чисел ρ из π $G_{\rho} \in \Sigma$, а также $G_{\rho U \pi'} \in \Sigma$; 2) если

$H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$. Если R подгруппа группы G , то через $\Sigma \cap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \cap R \mid \forall S \in \Sigma\}$. Если $\Sigma \cap R$ – холловская система группы R , то говорят, что Σ *редуцирует* холловскую систему Σ_R подгруппы R и обозначают $\Sigma \searrow R$.

Подгруппа $N_G(\Sigma) = \{g \in G \mid H = H^g, \forall H \in \Sigma\}$ называется *нормализатором* холловской системы Σ . Подгруппа A π -разрешимой группы называется π -связной [9], если либо A – π -подгруппа, либо A содержит холловскую π' -подгруппу группы G .

Лемма 1.5 [9, с. 56]. Пусть H – π -связная подгруппа π -разрешимой группы G . Подгруппа H пронормальна тогда и только тогда, когда всякая холловская система Σ группы G редуцируется точно в одну подгруппу, сопряженную с H .

Лемма 1.6 [10, с. 126]. Пусть U и V – подгруппы π -разрешимой группы G , Σ – холловская система группы G . Если $\Sigma \searrow U$ и $\Sigma \searrow V$, то $\Sigma \searrow U \cap V$.

Лемма 1.7 [10, с. 126]. Пусть U и V – подгруппы π -разрешимой группы G , Σ – холловская система группы G . Если $\Sigma \searrow U$, $\Sigma \searrow V$ и $UV = VU$, то $\Sigma \searrow UV$.

Подгруппа A группы G называется *p -нормально погруженной* [7] в G , если для простого числа p силовская p -подгруппа A_p группы A будет силовской p -подгруппой некоторой нормальной в G подгруппы. Подгруппу A группы G назовем *π -нормально погруженной* в G , если A p -нормально погружена в G для любого p из π . Если для любого простого делителя p порядка группы A эта подгруппа является p -нормально погруженной в G , то A называется *нормально погруженной* в G .

2 Локальные множества Фиттинга

Локальный метод для изучения структуры классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [3]. Для этой цели в [3] используются отображения вида $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$. Такие отображения называют *функциями Хартли* или *H -функциями* [11]. При этом если класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \bigcap_p f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p$, для некоторой H -функции f ,

то его называют *локальным* [11]. По аналогии с функциями Хартли в теории классов Фиттинга определим H -функции для некоторой группы G .

Определение 2.1. *Локальной функцией Хартли или H -функцией группы G назовем отображение $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{множества Фиттинга группы } G\}$.*

Определение 2.2. *Произведением $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ множества Фиттинга \mathcal{F} группы G и класса Фиттинга \mathfrak{X} назовем множество подгрупп*

$$\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}.$$

Аналог известных свойств произведений классов Фиттинга [7, теорема IX.1.12] для множеств Фиттинга представляет

Лемма 2.3. Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G , \mathfrak{X} – класс Фиттинга и $H \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) произведение $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G ;
- 2) $(H/H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}} = H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}}/H_{\mathcal{F}}$;
- 3) если \mathfrak{X}_1 и \mathfrak{X}_2 – классы Фиттинга, то $(\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1) \circ \mathfrak{X}_2 = \mathcal{F} \circ (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2)$.

Доказательство. 1) Пусть $M \trianglelefteq N \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$. Тогда по лемме 1.1 $M \cap N_{\mathcal{F}} = M_{\mathcal{F}}$ и

$$M/M_{\mathcal{F}} = M/M \cap N_{\mathcal{F}} \cong MN_{\mathcal{F}}/N_{\mathcal{F}}.$$

Так как $MN_{\mathcal{F}}/N_{\mathcal{F}} \trianglelefteq N/N_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$, то $M/M_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$ и $M \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$. Значит, множество $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ замкнуто относительно нормальных подгрупп.

Пусть $M_1 M_2 = N$, $M_i \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ и $M_i \trianglelefteq N$, $i \in \{1, 2\}$. Тогда по лемме 1.1 $M_i \cap N_{\mathcal{F}} = (M_i)_{\mathcal{F}}$ и $M_i/(M_i)_{\mathcal{F}} = M_i/M_i \cap N_{\mathcal{F}} \cong M_i N_{\mathcal{F}}/N_{\mathcal{F}}$. Но $N/N_{\mathcal{F}} = (M_1 N_{\mathcal{F}}/N_{\mathcal{F}})(M_2 N_{\mathcal{F}}/N_{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{X}$. Значит, $N \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ и множество $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ является замкнутым относительно произведений нормальных подгрупп.

Пусть $N \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$. Покажем, что $N^x \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ для любого элемента $x \in G$. Для этого докажем сначала, что $(N^x)_{\mathcal{F}} = (N_{\mathcal{F}})^x$. Так как $(N_{\mathcal{F}})^x \in \mathcal{F}$ и $(N_{\mathcal{F}})^x \trianglelefteq N^x$, то $(N_{\mathcal{F}})^x \leq (N^x)_{\mathcal{F}}$. Следовательно, $N_{\mathcal{F}} \leq ((N^x)_{\mathcal{F}})^{x^{-1}} \in \mathcal{F}$. Тогда из определения \mathcal{F} -радикала и того, что $((N^x)_{\mathcal{F}})^{x^{-1}} \trianglelefteq N$ следует равенство $(N^x)_{\mathcal{F}} = (N_{\mathcal{F}})^x$. Заметим, что

$$\begin{aligned} N^x/(N_{\mathcal{F}})^x &= \{x^{-1}yx(N_{\mathcal{F}})^x \mid y \in N\} = \\ &= \{x^{-1}yN_{\mathcal{F}}x \mid y \in N\} = (N/N_{\mathcal{F}})^x \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Это означает, что $N^x \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ и утверждение 1) доказано.

2) Очевидно, из включения $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ следует $H_{\mathcal{F}} \subseteq H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}}$. Тогда по лемме 1.1 выполняется равенство $H_{\mathcal{F}} = H_{\mathcal{F}} \cap H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}} = (H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}})_{\mathcal{F}}$. Значит, $H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}}/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$ и $H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}}/H_{\mathcal{F}} \leq (H/H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}}$.

Пусть $R/H_{\mathcal{F}} = (H/H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}}$. Тогда по лемме 1.1 $R_{\mathcal{F}} = R \cap H_{\mathcal{F}} = H_{\mathcal{F}}$. Следовательно, $R/R_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$ и $R \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$. Значит, $(H/H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}} \leq H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}}/H_{\mathcal{F}}$ и $(H/H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}} = H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}}/H_{\mathcal{F}}$.

3) Пусть $H \leq G$. Используя определение 2.2, теорему об изоморфизмах факторгрупп и утверждение 2) настоящей леммы, мы получаем следующие эквивалентные утверждения:

- (1) $H \in (\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1) \circ \mathfrak{X}_2$;
- (2) $H/H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1} \in \mathfrak{X}_2$;
- (3) $(H/H_{\mathcal{F}})/(H_{\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1}/H_{\mathcal{F}}) \in \mathfrak{X}_2$;

$$(4) (H/H_{\mathcal{F}})/(H/H_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{X}_1} \in \mathfrak{X}_2;$$

$$(5) H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2;$$

$$(6) H \in \mathcal{F} \circ (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2).$$

Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем использовать также следующие свойства произведения множества Фиттинга группы G и класса Фиттинга.

Лемма 2.4. Пусть \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 – множества Фиттинга группы G . Тогда:

1) если \mathfrak{X} является одновременно классом Фиттинга и гомоморфом, то из включения $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ следует $\mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$;

2) если \mathfrak{X} – формация Фиттинга, то $(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \circ \mathfrak{X} = \mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X} \cap \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$;

3) если \mathfrak{X}_1 и \mathfrak{X}_2 – классы Фиттинга, то $\mathcal{F} \circ (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2) = \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_1 \cap \mathcal{F} \circ \mathfrak{X}_2$.

Доказательство. 1) Пусть $H \leq G$ и $H \in \mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X}$. Тогда $H/H_{\mathcal{F}_1} \in \mathfrak{X}$. Из того, что \mathfrak{X} является гомоморфом, следует

$$H/H_{\mathcal{F}_2} \cong H/H_{\mathcal{F}_1}/H_{\mathcal{F}_2}/H_{\mathcal{F}_1} \in \mathfrak{X}.$$

Значит, $H \in \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$ и $\mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$.

2) Очевидно, $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_i$ для $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, по утверждению 1)

$$(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \circ \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}_i \circ \mathfrak{X} \cap \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}.$$

Покажем справедливость обратного включения. Пусть $H \leq G$ и $H \in \mathcal{F}_1 \circ \mathfrak{X} \cap \mathcal{F}_2 \circ \mathfrak{X}$. Тогда $H/H_{\mathcal{F}_i} \in \mathfrak{X}$ для $i \in \{1, 2\}$. Так как \mathfrak{X} является формацией, то

$$H/(H_{\mathcal{F}_1} \cap H_{\mathcal{F}_2}) \in \mathfrak{X} \text{ и } H/H_{\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} \in \mathfrak{X}.$$

Значит, $H \in (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \circ \mathfrak{X}$. Утверждение 2) доказано.

3) Справедливость данного утверждения вытекает непосредственно из определения 2.2. Лемма доказана.

Определение 2.5. Множество Фиттинга \mathcal{F} группы G назовем *локальным*, если

$$\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$$

для некоторой H -функции f группы G . В данном случае f назовем H -функцией \mathcal{F} .

Приведем несколько примеров локальных множеств Фиттинга.

Примеры. 1. Пусть G – произвольная группа и H -функция f группы G такова, что $f(p) = \{1\}$ для всех простых p . Тогда

$$\begin{aligned} \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} &= \bigcap_p \{1\} \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = \\ &= \{1\} \circ \bigcap_p \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = \{1\} \circ \mathfrak{N} = \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Множество Фиттинга \mathcal{N} , состоящее из всех нильпотентных подгрупп группы G , является локальным множеством Фиттинга.

2. Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G и $f(p) = \mathcal{F}$ для всех простых p . Тогда множество Фиттинга

$$\mathcal{F} \circ \mathfrak{N} = \mathcal{F} \circ \bigcap_p \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'},$$

состоящее из тех подгрупп группы G фактор-группы по \mathcal{F} -радикалам которых нильпотентны, является локальным.

В работе [12] доказано, что каждый локальный класс Фиттинга определяется полной внутренней функцией Хартли. В связи с этим представляет интерес поиск аналога указанного выше результата для множества Фиттинга группы G . По аналогии с [12] введем следующее

Определение 2.6. Пусть f – H -функция, определяющая множество Фиттинга \mathcal{F} группы G . Тогда f назовем:

- 1) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathcal{F}$ для каждого простого p ;
- 2) *полной*, если $f(p) \circ \mathfrak{N}_p = f(p)$ для всех простых p .

Лемма 2.7. Каждое локальное множество Фиттинга группы G определяется полной внутренней H -функцией.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$

для некоторой H -функции f . Определим H -функцию φ следующим образом: $\varphi(p) = f(p) \cap \mathcal{F}$. Ввиду леммы 2.4, имеем

$$\begin{aligned} \bigcap_p \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} &= \bigcap_p \left(f(p) \cap \mathcal{F} \right) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = \\ &= \bigcap_p \left(f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \cap \mathcal{F} \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \right) = \\ &= \left(\bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \right) \cap \left(\bigcap_p \mathcal{F} \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \right) = \\ &= \mathcal{F} \cap \left(\bigcap_p \mathcal{F} \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} \right) = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\psi(p) = \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p$. Очевидно, что ψ – полная H -функция, определяющая множество Фиттинга \mathcal{F} . Покажем, что ψ является внутренней H -функцией. Пусть $H \leq G$ и $H \in \psi(p) = \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p$. Тогда $H \in \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$. Пусть q – некоторое простое число, отличное от p . Тогда $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{E}_{q'}$ и, следовательно,

$$H^{\mathfrak{E}_{q'}} \subseteq H^{\mathfrak{N}_p} \in \varphi(p) \subseteq \mathcal{F}.$$

Значит, $(H^{\mathfrak{E}_{q'}})^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \varphi(q)$. Используя лемму 1.4, получаем $(H^{\mathfrak{E}_{q'}})^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} = H^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'} \mathfrak{E}_{q'}} = H^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \varphi(q)$. Тогда

$$H / H_{\varphi(q)} \cong H / H^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} / H_{\varphi(q)} / H^{\mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}} \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{E}_{q'}.$$

Итак, мы показали, что $H \in \varphi(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ для всех простых p . Следовательно, $H \in \mathcal{F}$. Лемма доказана.

Известно [12, лемма 2], что каждый локальный класс Фиттинга является классом Фишера. Мы установим справедливость аналогичного утверждения и для теории множеств Фиттинга.

Определение 2.8 [7, с. 554]. Множество Фиттинга группы G называется *множеством Фишера*, если из того, что $L \leq G$, $K \trianglelefteq L \in \mathcal{F}$ и H/K – p -подгруппа L/K (p – простое число), всегда следует $H \in \mathcal{F}$.

Теорема 2.9. Каждое локальное множество Фиттинга группы G является множеством Фишера G .

Доказательство. Пусть \mathcal{F} – локальное множество Фиттинга группы G и $\mathcal{F} = \bigcap_p f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$.

Покажем, что произведение $f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ является множеством Фишера G для произвольного простого p .

Пусть $L \leq G$, $K \trianglelefteq L \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ и H/K – q -подгруппа L/K . Рассмотрим два случая:

1. $q \neq p$. В этом случае $H/K \in \mathfrak{E}_{p'}$. Из того, что $f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ является множеством Фиттинга, следует $K \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$. Значит,

$$H \in (f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}) \circ \mathfrak{E}_{p'} = f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}.$$

2. $q = p$. Пусть $P \in Syl_p(H)$. Заметим, что $L / L_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$. Следовательно, $P \leq L_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p}$. Тогда $[K, P] \leq K \cap L_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} = K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p}$. Значит, $K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P \leq KP = H$. Ввиду того, что

$$K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{N}_p,$$

имеем $K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'} = f(p) \circ \mathfrak{N}_p$. Так как $K / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$, то

$$\begin{aligned} H / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P &= KP / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P = \\ &= KK_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P \cong \\ &\cong K / K \cap K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} P = K / K_{f(p) \circ \mathfrak{N}_p} (K \cap P) \in \mathfrak{E}_{p'} \end{aligned}$$

Значит, $H \in f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$.

Итак, мы показали, что для любого простого p множество Фиттинга $f(p) \circ \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}$ является множеством Фишера. Следовательно, \mathcal{F} является множеством Фишера. Теорема доказана.

3 Перестановочные множества Фиттинга

Напомним, что класс Фиттинга \mathfrak{F} называют перестановочным, если \mathfrak{F} -инъектор каждой разрешимой группы G является системно перестановочной подгруппой в G . В работе [13] Локеттом был получен ряд результатов о перестановочных разрешимых классах Фиттинга. А именно, было доказано, что любой класс Фишера является перестановочным [13, теорема 4.5], а также был получен критерий перестановочности классов Фиттинга [13, теорема 4.14].

В настоящем разделе мы расширяем указанные результаты на случай перестановочного π -насыщенного множества Фиттинга π -разрешимой группы G . Заметим, что существование и сопряженность \mathcal{F} -инъекторов для π -насыщенного множества Фиттинга π -разрешимой группы G легко получить, следуя доказательству теоремы 2.3 [2].

Пусть Σ – холловская система π -разрешимой группы G . Подгруппа A называется Σ -перестановочной, если A перестановочна со всякой подгруппой из Σ . Если подгруппа A перестановочна с подгруппами из холловской системы группы G , то она называется *системно перестановочной*. Через $A \perp \Sigma$ обозначим Σ -перестановочность подгруппы A .

Определение 3.1. Множество Фиттинга \mathcal{F} группы G назовем *перестановочным*, если \mathcal{F} -инъектор каждой подгруппы H группы G является системно перестановочной подгруппой в H .

Определение 3.2. Множество Фиттинга \mathcal{F} группы G назовем *π -насыщенным*, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$, справедливо $H \in \mathcal{F}$.

Лемма 3.3 [2]. Пусть G – π -разрешимая группа и \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга группы G . Пусть N такая подгруппа группы G , что G/N является π' -группой или нильпотентной π -группой. Если W является \mathcal{F} -максимальной подгруппой группы N и V_1, V_2 такие \mathcal{F} -максимальные подгруппы G , что $W \leq V_1 \cap V_2$. Тогда V_1 и V_2 сопряжены в G .

В леммах 3.4–3.6 мы изучаем свойства \mathcal{F} -инъекторов π -разрешимой группы G для π -насыщенного множества Фиттинга \mathcal{F} группы G , которые мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 3.4. Пусть G – π -разрешимая группа, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга группы G , $N \trianglelefteq G$ и G/N является π' -группой или нильпотентной группой. Если максимальная \mathcal{F} -подгруппа V группы G содержит \mathcal{F} -инъектор W группы N , то V – \mathcal{F} -инъектор группы G .

Доказательство. Пусть V_1 – такой \mathcal{F} -инъектор группы G , что $W = V_1 \cap N = V \cap N$. Тогда из включения $W \leq V_1 \cap V$ и леммы 3.3 следует, что V_1 и V сопряжены в G . Значит, V – \mathcal{F} -инъектор группы G . Лемма доказана.

Лемма 3.5. Пусть G – π -разрешимая группа, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и $\{\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$ такой ряд группы G , что каждый фактор G_{i+1}/G_i , $i \in \{0, \dots, n-1\}$ является π' -группой или нильпотентной группой. V – \mathcal{F} -инъектор группы G тогда и только тогда, когда $G_i \cap V$ является

\mathcal{F} -максимальной подгруппой группы G_i для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Необходимость вытекает непосредственно из определения \mathcal{F} -инъектора группы G . Достаточность докажем методом математической индукции по числу n . Если $n = 0$, то утверждение очевидно. Если $n \geq 1$, то по предположению индукции $G_{n-1} \cap V$ – \mathcal{F} -инъектор группы G_{n-1} . Тогда по лемме 3.4 $G_n \cap V = G \cap V = V$ – \mathcal{F} -инъектор группы $G_n = G$. Лемма доказана.

Лемма 3.6. Пусть G – π -разрешимая группа, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и V – \mathcal{F} -инъектор группы G . Если $V \leq H \leq G$, то V также является \mathcal{F} -инъектором группы H .

Доказательство. Пусть

$$\{\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

– ряд удовлетворяющий условиям леммы 3.5. Рассмотрим ряд $\{\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_n = H$, определенный следующим образом: $H_i = H \cap G_i$, для $i \in \{0, \dots, n\}$. Так как

$$\begin{aligned} H_{i+1}/H_i &= G_{i+1} \cap H / G_i \cap H = \\ &= G_{i+1} \cap H / G_i \cap G_{i+1} \cap H = \\ &= (G_{i+1} \cap H)G_i / G_i \leq G_{i+1} / G_i \end{aligned}$$

и классы всех π' -групп и всех нильпотентных групп замкнуты относительно подгрупп, то ряд $(H_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ удовлетворяет требованиям леммы 3.5. Кроме того, $H_i \cap V = H \cap G_i \cap V = G_i \cap V$ – \mathcal{F} -максимальная подгруппа группы G_i для всех $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $H_i \cap V$ – \mathcal{F} -максимальная подгруппа группы H_i для всех $i = 1, \dots, n$ и по лемме 3.5 V является \mathcal{F} -инъектором группы H . Лемма доказана.

Определение 3.7 [7, определение I.6.1]. Пусть G – группа и $U \leq G$. Тогда U называют *пронормальной* в G (обозначают $U \text{ pr } G$) если подгруппы U и U^g сопряжены в $\langle U, U^g \rangle$ для всех элементов $g \in G$.

Лемма 3.8. Пусть G – π -разрешимая группа, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда каждый \mathcal{F} -инъектор V группы N является *пронормальной подгруппой* в G .

Доказательство. Для любого элемента V и V^g – \mathcal{F} -инъекторы группы N . Следовательно, по лемме 3.6 они являются \mathcal{F} -инъекторами в $\langle V, V^g \rangle$. Значит, V и V^g сопряжены в $\langle V, V^g \rangle$ и V является *пронормальной подгруппой* в G . Лемма доказана.

Свойства перестановочных подгрупп, которые мы будем в дальнейшем использовать, представляют следующие леммы.

Лемма 3.9. Если Σ – холловская система π -разрешимой группы G и A – Σ -перестановочная подгруппа группы G , то $\Sigma \searrow A$.

Доказательство. Пусть ρ и σ такие множества простых чисел, для которых в G существуют холловские подгруппы, принадлежащие Σ .

Пусть $G_\rho \in \Sigma$. Тогда учитывая $A \perp \Sigma$, получаем $A \perp G_\rho$. Так как AG_ρ является подгруппой и $A \cap G_\rho$ – ρ -группой, то $|A : A \cap G_\rho| = |AG_\rho : G_\rho|$ является ρ' -числом. Следовательно, $A \cap G_\rho \in \text{Hall}_\rho(A)$.

Если $G_\sigma \in \Sigma$, то $G_\rho G_\sigma = G_{\rho \cap \sigma}$. Тогда

$$(A \cap G_\rho)(A \cap G_\sigma) = A_\rho A_\sigma \subseteq G_{\rho \cup \sigma} \cap A \subseteq A_{\rho \cup \sigma},$$

где $A_{\rho \cup \sigma}$ – некоторая холловская $(\rho \cup \sigma)$ -подгруппа в A . Но $|A_\rho A_\sigma| = |A_{\rho \cup \sigma}|$ и поэтому $A_\rho A_\sigma = A_{\rho \cup \sigma} \leq A$. Значит, $A_\rho \perp A_\sigma$. Таким образом, $\Sigma \cap A$ будет холловской системой подгруппы A . Лемма доказана.

Лемма 3.10. Всякая нормально погруженная π -подгруппа π -разрешимой группы системно перестановочна.

Доказательство. Пусть H – нормально погруженная π -подгруппа π -разрешимой группы G и Σ – холловская система группы G , которая редуцируется в H . Пусть $p \in \pi$ и $G_p \in \Sigma$.

Докажем, что $HG_{p'}$ является подгруппой в G . Пусть $H_p \in \text{Syl}_p(H)$ и $K = \langle H_p^G \rangle$. Тогда по утверждению I.7.2(a) [7] $H_p \in \text{Syl}_p(K)$ и по лемме I.3.2(c) [7] $K_{p'} = K \cap G_{p'} \in \text{Hall}_{p'}(K)$. Учитывая $G_{p'} \in \Sigma$ и $\Sigma \searrow H$, получаем

$$H_{p'} = H \cap G_{p'} \in \text{Hall}_{p'}(H)$$

и, значит, $H_{p'} \subseteq G_{p'}$. Отсюда из $K = H_p K_{p'}$ и $K_{p'} \subseteq G_{p'}$ следует

$$KG_{p'} = H_p KG_{p'} = H_p H_p K_{p'} G_{p'} = HG_{p'}.$$

Но $KG_{p'} \leq G$ и поэтому $HG_{p'} \leq G$.

Пусть ρ – такое множество простых чисел, что $\rho' \subseteq \rho$ и $G_\rho \in \Sigma$. Тогда $\rho' \subseteq \pi$ и ввиду лемм 3.9 и 1.6 имеем $\Sigma \searrow (\bigcap_{p \in \rho'} G_{p'})$. Следовательно, $G_\rho = \bigcap_{p \in \rho'} G_{p'}$ и $\bigcap_{p \in \rho'} HG_{p'} = H(\bigcap_{p \in \rho'} G_{p'}) = HG_\rho$.

Пусть ρ – такое множество простых чисел, что $\rho \subseteq \pi$ и $G_\rho \in \Sigma$. Тогда, учитывая леммы 3.9 и 1.6 получаем $\Sigma \searrow (\bigcap_{p \in \rho' \cap \pi} (G_{p'} \cap G_\pi))$, причем $G_\pi \in \Sigma$ и $G_{p'} \in \Sigma$ для всех $p \in \rho' \cap \pi$. Следовательно, $G_\rho = \bigcap_{p \in \rho' \cap \pi} (G_{p'} \cap G_\pi)$. Так как H – π -подгруппа и $G_\pi \in \Sigma \searrow H$, то $H = H \cap G_\pi \subseteq G_\pi$. Значит, $\bigcap_{p \in \rho' \cap \pi} (HG_{p'} \cap HG_\pi) = H(\bigcap_{p \in \rho' \cap \pi} (G_{p'} \cap G_\pi)) = HG_\rho$.

Таким образом, H перестановочна со всякой подгруппой $G_p \in \Sigma$. Лемма доказана.

Лемма 3.11. Всякая π -нормально погруженная π -связная подгруппа π -разрешимой группы системно перестановочна.

Доказательство. Пусть H – π -нормально погруженная π -связная подгруппа π -разрешимой группы G и Σ – холловская система группы G , которая редуцируется в H . Так как H – π -нормально погружена, то H_π – нормально погружена и по лемме 3.10 H_π является Σ -перестановочной.

Из π -связности подгруппы H следует, что либо H является π -группой либо, либо содержит холловскую π' -подгруппу из G .

Если порядок группы H является π -числом, то $H = H_\pi$ и H – Σ -перестановочна.

Пусть $S \in \text{Hall}_{\pi'}(G)$ и $S \subseteq H$. Тогда $S \in \text{Hall}_{\pi'}(H)$. Если $G_{\pi'} \in \Sigma$, то

$$G_{\pi'} \cap H \in \text{Hall}_{\pi'}(H).$$

Следовательно, $|G_{\pi'} \cap H| = |S| = |G_{\pi'}|$ и поэтому $G_{\pi'} \cap H = G_{\pi'}$. Значит, $G_{\pi'} \subseteq H$. Так как $(|H : H_\pi|, |H : G_{\pi'}|) = 1$, то $H = H_\pi G_{\pi'}$. Пусть $M \in \Sigma$.

Теперь из $H = H_\pi G_{\pi'}$, $G_{\pi'} \in \Sigma$ и $H_\pi \perp S$ получаем

$$HM = H_\pi G_{\pi'} M = H_\pi M G_{\pi'} = M H_\pi G_{\pi'} = MH.$$

Таким образом, H – Σ -перестановочна. Лемма доказана.

Лемма 3.12. Пусть G – π -разрешимая группа, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа группы G . Если $G = LN$, где $L \in \mathcal{F}$ и $L \cap N$ является \mathcal{F} -инъектором N , то L – \mathcal{F} -инъектор группы G .

Доказательство. Доказательство проведем методом индукции по порядку группы G . Заметим, что лемма верна при $N = G$, в частности, при $G = 1$. Пусть M – такая максимальная нормальная подгруппа G , что $N \leq M$. Тогда $M = M \cap LN = (M \cap L)N$ и $(M \cap L) \cap N = L \cap N$ является \mathcal{F} -инъектором в M .

Покажем, что L – \mathcal{F} -максимальна в G . Предположим, что $L \leq W \in \mathcal{F}$. Следовательно, $L \cap N \leq W \cap N \in \mathcal{F}$. Тогда, в силу \mathcal{F} -максимальности $L \cap N$ в N получаем $W \cap N = L \cap N$. Значит, $W = W \cap LN = L(W \cap N) = L(L \cap N) = L$.

Итак, L – \mathcal{F} -максимальна в G и по лемме 3.4 L – \mathcal{F} -инъектор группы G . Лемма доказана.

Лемма 3.13. Пусть G – π -разрешимая группа, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) множество

$$\mathcal{F}_{G/N} = \{SN / N \mid S - \mathcal{F} \text{-инъектор } SN\}$$

является множеством Фиттинга группы G / N ;

2) если V – \mathcal{F} -инъектор группы G , то VN/N – $\mathcal{F}_{G/N}$ -инъектор группы G/N .

Доказательство. 1) Пусть $K/N \trianglelefteq SN/N$, где S – \mathcal{F} -инъектор SN . Так как $K \trianglelefteq SN$, то по лемме 1.2 $S \cap K \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(K)$. Тогда $K = SN \cap K = (S \cap K)N$ и $K/N = (S \cap K)N/N \in \mathcal{F}_{G/N}$.

Пусть $S_i N/N \in \mathcal{F}_{G/N}$, где $S_i \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(S_i N)$ и $S_i N \trianglelefteq (S_1 N)(S_2 N)$ для $i \in \{1, 2\}$. Пусть $T = (S_1 N)(S_2 N)$, $W \trianglelefteq \text{Inj}_{\mathcal{F}}(T)$ и $R_i = W \cap S_i N$. Из $S_i N \trianglelefteq T$ следует $R_i \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(S_i N)$. Тогда R_i и S_i сопряжены. Следовательно, $R_i N = S_i N$ и

$$T = (S_1 N)(S_2 N) = (R_1 N)(R_2 N) = R_1 R_2 N \leq WN \leq T.$$

Значит, $T/N = WN/N \in \mathcal{F}_{G/N}$.

По утверждению VIII.2.4. (a) [7] $\mathcal{F}^g = \mathcal{F}$ для $g \in G$. Если $S \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(SN)$, то $S^g \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(S^g N)$ и, следовательно, $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет всем требованиям определения множества Фиттинга.

2) Пусть R – \mathcal{F} -инъектор подгруппы N . Сначала докажем, что если $R \leq F$ – \mathcal{F} -максимальна в G , то FN/N – $\mathcal{F}_{G/N}$ -максимальна в G/N .

Пусть $R \leq F$ – \mathcal{F} -максимальна в G . Так как $R \leq F \cap N \trianglelefteq F \in \mathcal{F}$ и R – \mathcal{F} -инъектор подгруппы N , то $R = F \cap N$. Тогда по лемме 3.12 $F \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(FN)$ и, значит, $FN/N \in \mathcal{F}_{G/N}$. Предположим $FN/N \subsetneq SN/N \in \mathcal{F}_{G/N}$, где $S \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(SN)$. Следовательно, из $R = F \cap N \subseteq S \cap N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$ и R – \mathcal{F} -инъектор подгруппы N имеем $R = S \cap N$. Теперь $F/R \cong FN/N \subseteq SN/N \cong S/R$ и $F \subseteq S \in \mathcal{F}$. Значит, $F = S$ и FN/N – $\mathcal{F}_{G/N}$ -максимальна в G/N .

Пусть теперь V – \mathcal{F} -инъектор группы G и K/N – произвольная субнормальная подгруппа в G/N . По лемме 1.2 $V \cap K$ – \mathcal{F} -инъектор группы K и $V \cap N$ – \mathcal{F} -инъектор группы N . Тогда из $V \cap N \leq V \cap K$ – \mathcal{F} -максимальна в K , то $(V \cap K)N/N$ – $\mathcal{F}_{G/N}$ -максимальна в G/N . Но $(V \cap K)N = K \cap VN$ и $(V \cap K)N/N = K/N \cap VN/N$.

Таким образом, $K/N \cap VN/N$ – $\mathcal{F}_{G/N}$ -максимальна в K/N . Это означает, что VN/N является $\mathcal{F}_{G/N}$ -инъектором группы G/N . Лемма доказана.

Лемма 3.14. Пусть G – π -разрешимая группа, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фишера группы G и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда множество Фиттинга $\mathcal{F}_{G/N}$ является множеством Фишера группы G/N .

Доказательство. Пусть

$$K/N \leq H/N \leq SN/N \in \mathcal{F}_{G/N},$$

где $K/N \trianglelefteq SN/N$, $S \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(SN)$. Пусть $H/N/K/N \cong H/K$ является нильпотентной

подгруппой из $SN/N/K/N \cong SN/K$. Покажем, что $H/N \in \mathcal{F}_{G/N}$.

Так как $NS = KS$, то $H = H \cap NS = H \cap KS = (H \cap S)K$. Тогда

$$H/K = (H \cap S)K/K \cong H \cap S/K \cap S$$

и $SN/K \cong SK/K \cong S/K \cap S$.

Следовательно, $H \cap S/K \cap S$ – нильпотентная подгруппа из $S/K \cap S$. Так как $S \in \mathcal{F}$ и \mathcal{F} является множеством Фишера группы G , то $H \cap S \in \mathcal{F}$. Из того, что $(H \cap S) \cap N = S \cap N \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(N)$, по лемме 3.12 подгруппа $H \cap S$ – \mathcal{F} -инъектор группы $(H \cap S)N$. Значит, $(H \cap S)N/N \in \mathcal{F}_{G/N}$. Тогда, ввиду равенства $(H \cap S)N = H \cap SN = H$, получаем $H/N \in \mathcal{F}_{G/N}$. Итак, $\mathcal{F}_{G/N}$ является множеством Фишера группы G/N . Лемма доказана.

Лемма 3.15. Пусть G – π -разрешимая группа, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фишера группы G . Тогда \mathcal{F} -инъекторы группы G π -нормально погружены.

Доказательство. Пусть \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фишера π -разрешимой группы G наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется.

Пусть $V \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(G)$. Тогда по утверждению I.7.2.(a) [7] существует простое число p из π такое, что $P \in \text{Syl}_p(V)$ и $P \notin \text{Syl}_p(K)$, где $K = \langle P^G \rangle$.

Пусть $1 \neq N \trianglelefteq G$. Так как $|VN/N : PN/N|$ является p' -числом, то $PN/N \in \text{Syl}_p(VN/N)$. По лемме 3.14 и лемме 3.13 VN/N – $\mathcal{F}_{G/N}$ -инъектор в G/N и по индукции VN/N π -нормально погружен в G/N . Следовательно, по утверждению I.7.2.(a) [7] $PN/N \in \text{Syl}_p(\langle (PN/N)^{G/N} \rangle)$. Учитывая равенство $\langle (PN/N)^{G/N} \rangle = \langle P^G \rangle N/N$, получаем $PN/N \in \text{Syl}_p(KN/N)$.

Покажем, что выполнение любого из двух условий $N = O_{p'}(G)$ или $N = (O_p(G))_{\mathcal{F}}$ ведет к противоречию.

Если $N = O_{p'}(G)$, то из $PN/N \in \text{Syl}_p(KN/N)$ и равенства $|KN/N : PN/N| = |K : P|/|K \cap N : P \cap N|$ вытекает $P \in \text{Syl}_p(K)$. Получили противоречие. Значит, $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть $N = (O_p(G))_{\mathcal{F}}$. Если $P \subseteq K_p \in \text{Syl}_p(K)$, то из $PN/N \in \text{Syl}_p(KN/N)$ следует $PN/N = K_p N/N$. Тогда $PN = K_p N$ и $K_p = K_p \cap PN = P(K_p \cap N)$. Так как N – p -подгруппа, то $K_p \cap N = K \cap N$ и $K_p = P(K \cap N)$. Заметим, что

каждый \mathcal{F} -инъектор из $O_p(G)$ является субнормальной подгруппой и поэтому совпадает с $(O_p(G))_{\mathcal{F}}$. Теперь по лемме 1.2 $V \cap N \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(N)$. Но $N \in \mathcal{F}$ и поэтому $N \subseteq V$. Следовательно, $K \cap N$ – p -подгруппа из V и $P(K \cap N) = P$. Тогда $P = K_p \in \text{Syl}_p(K)$. Полученное противоречие показывает, что $(O_p(G))_{\mathcal{F}} = 1$.

Так как \mathcal{F} – множество Фишера и P является нильпотентной p -группой, то $P \in \mathcal{F}$. Но тогда $P \cap O_p(G)$ – субнормальная \mathcal{F} -подгруппа в P . Кроме того, $P \cap O_p(G)$ – субнормальная подгруппа в $O_p(G)$ и, значит,

$$P \cap O_p(G) = (P \cap O_p(G))_{\mathcal{F}} \leq (O_p(G))_{\mathcal{F}} = 1.$$

Теперь из $P \in \mathcal{F}$ и $P \cap O_p(G) = 1$ по лемме 3.12 следует $P \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(PO_p(G))$. Так как P является субнормальной подгруппой в $PO_p(G) \in \mathfrak{R}$, то $P = (PO_p(G))_{\mathcal{F}} \trianglelefteq PO_p(G)$. Тогда $PO_p(G) = P \times O_p(G)$ и $[P, O_p(G)] \leq P \cap O_p(G) = 1$. Следовательно, $P \leq C_G(O_p(G))$. По лемме 1 [9] $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$ и $P = P \cap C_G(O_p(G)) \subseteq P \cap O_p(G) = 1$.

Таким образом, $P = 1$ и $K = 1$. Получили противоречие с $P \notin \text{Syl}_p(K)$. Лемма доказана.

Теорема 3.16. *Всякое π -насыщенное множество Фишера \mathcal{F} π -разрешимой группы G является перестановочным.*

Доказательство. По лемме 3.15 все \mathcal{F} -инъекторы из G являются π -нормально погруженными π -связными подгруппами. Кроме того, по лемме 3.11 множество Фиттинга \mathcal{F} является перестановочным. Теорема доказана.

Лемма 3.17. *Пусть G – π -разрешимая группа и ρ – такое множество простых чисел, что либо $\rho \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \rho$. Если $G = G_1 G_2$, то существуют такие холловские ρ -подгруппы H, H_1 и H_2 соответственно в группах G, G_1 и G_2 , что $H = H_1 H_2$.*

Доказательство. Пусть R, R_1 и R_2 – холловские ρ -подгруппы соответственно в G, G_1 и G_2 . По теореме Чунихина [14] $R_i^{x_i} \subseteq R$ для некоторого $x_i \in G, i \in \{1, 2\}$. По лемме III.11.5 [15] существует такой элемент $z \in G$, что $G_i^{x_i z} = G_i, i \in \{1, 2\}$. Положим $R_i^{x_i z} = H_i, R^z = H$. Тогда H, H_1 и H_2 – холловские ρ -подгруппы соответственно в G, G_1 и G_2 , причем $H_i = R_i^{x_i z} \subseteq R^z = H$. Установим теперь справедливость равенства $H = H_1 H_2$.

Пусть $|H| = a, |H_i| = a_i, |G| = an, |G_i| = a_i n_i$. Следовательно,

$$|G_1 \cap G_2| = \frac{|G_1| |G_2|}{|G_1 G_2|} = \frac{a_1 a_2 n_1 n_2}{an}.$$

Но a, a_1, a_2 – ρ -числа и n, n_1, n_2 – ρ' -числа. Тогда a делит $a_1 a_2$ и n делит $n_1 n_2$. Следовательно, $|G_1 \cap G_2| = a' n'$, где $a' = a_1 a_2 / a$ и $n' = n_1 n_2 / n$.

Так как $H_1 \cap H_2 \subseteq G_1 \cap G_2$, то $|H_1 \cap H_2|$ делит a' . Поэтому

$$|H_1 H_2| = \frac{a_1 a_2}{|H_1 \cap H_2|} \geq \frac{a_1 a_2}{a'} = a = |H|.$$

Тогда из $H_1 H_2 \subseteq H$ следует $H_1 H_2 = H$. Лемма доказана.

Лемма 3.18. *Пусть A – подгруппа π -разрешимой группы G и $K \trianglelefteq G$, причем $G = AK$. Если ρ – такое множество простых чисел, что либо $\rho \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \rho, G/K \in \mathfrak{E}_{\rho}$ и $A_p \in \text{Hall}_{\rho}(A)$, то $G = A_p K$.*

Доказательство. Ввиду изоморфизма $AK/K \cong A/A \cap K$, получаем, что $|A : A \cap K|$ является ρ -числом. Тогда $(|A : A \cap K|, |A : A_p|) = 1$ и по лемме A.1.6.(b) [7] $A = A_p(A \cap K)$. Таким образом, $G = AK = A_p(A \cap K)K = A_p K$. Лемма доказана.

Лемма 3.19. *Пусть Σ – холловская система π -разрешимой группы G , и ρ – такое множество простых чисел, что либо $\rho = \{p\}$ для $p \in \pi$, либо $\rho = \pi'$, и $G_p, G_{p'} \in \Sigma$. Тогда $G_p \cap N_G(G_{p'})$ – ρ -холловская подгруппа в $N_G(G_p)$ и $N_G(\Sigma)$.*

Доказательство. Пусть $N = N_G(G_{p'})$. Так как $G = G_p G_{p'} = G_p N$, то $|N : N \cap G_p| = |NG_p : G_p| = |G : G_p|$ – ρ' -число. Следовательно, $N \cap G_p$ – холловская ρ -подгруппа в N . Пусть \mathfrak{K} – дополняющая система группы G такая, что $\mathfrak{K} \subseteq \Sigma$. Если $S \in \mathfrak{K} \setminus \{G_p\}$, то $N \cap G_p \leq G_p \leq S \leq N_G(S)$. Значит, $N \cap G_p \leq N_G(S)$ для всех подгрупп S из \mathfrak{K} . Тогда $N \cap G_p \leq N_G(\mathfrak{K}) = N_G(\Sigma) \leq N$. Отсюда $N \cap G_p$ – холловская ρ -подгруппа в $N_G(\Sigma)$. Лемма доказана.

Лемма 3.20. *Пусть Σ – холловская система π -разрешимой группы G . Если Σ редуцируется в пронормальную π -связную подгруппу H , то $N_G(\Sigma)$ нормализует подгруппу H и $\Sigma \setminus N_G(H)$.*

Доказательство. Обозначим $D = N_G(\Sigma)$. Если $d \in D$, то $\Sigma = \Sigma^d$ и $\Sigma^d \setminus H^d$. Следовательно, по лемме 1.5 $H = H^d$ и $D \subseteq N_G(H)$.

Пусть $\Sigma \setminus (N_G(H))^g$ для некоторого элемента $g \in G$. Тогда $H^g \trianglelefteq N_G(H^d) = (N_G(H))^g$ и

поэтому $\Sigma \searrow H^g$. По лемме 1.5 $H = H^g$. Следовательно, $\Sigma \searrow N_G(H)$. Лемма доказана.

Лемма 3.21. Пусть U – π -связная, системно перестановочная, пронормальная подгруппа π -разрешимой группы G . Если холловская система Σ группы G редуцируется в U , то подгруппа U является Σ -перестановочной в G .

Доказательство. Пусть Σ_0 – холловская система группы G такая, что $U \perp \Sigma_0$. Так как любые две холловские системы группы G сопряжены [8], то $\Sigma = \Sigma_0^g$ для некоторого элемента $g \in G$. Тогда $U^g \perp \Sigma_0^g$. По условию $\Sigma \searrow U$ и по лемме 3.9 $\Sigma_0^g \searrow U^g$. Следовательно, по лемме 1.5 $U = U^g$ и $U \perp \Sigma$. Лемма доказана.

Лемма 3.22. Пусть D, V – подгруппы π -разрешимой группы G . Пусть σ, ω – такие множества простых чисел, что $\sigma \cap \omega = \emptyset$ и либо $\sigma' \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \sigma'$ и либо $\omega' \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \omega'$. Если $K \trianglelefteq G$, $G_\sigma K \trianglelefteq G$, $G_\omega K \trianglelefteq G$, то выполняется следующее условие: если $D \perp V \cap G_\sigma K$ и $D \perp V \cap G_\omega K$, то $D(V \cap G_\sigma K) \cap D(V \cap G_\omega K) = D(V \cap G_\sigma K \cap G_\omega K)$.

Доказательство. По лемме IV.15.2 [15] следует $G_\sigma K / K \in \text{Hall}_\sigma(G/K)$ и $G_\omega K / K \in \text{Hall}_\omega(G/K)$. Тогда, учитывая $G/K / G_\sigma K / K \cong G/G_\sigma K$ и $G/K / G_\omega K / K \cong G/G_\omega K$, получаем $G/G_\sigma K \in \mathfrak{C}_\sigma$ и $G/G_\omega K \in \mathfrak{C}_\omega$. Но $\sigma \cap \omega = \emptyset$ и поэтому $(|G : G_\sigma K|, |G : G_\omega K|) = 1$. Следовательно, по лемме A.1.6.(c) [7] $V = (V \cap G_\sigma K)(V \cap G_\omega K)$. Так как $D \perp V \cap G_\sigma K$ и $D \perp V \cap G_\omega K$, то по лемме A.1.6.(c) [7] $V \cap D = (D \cap V \cap G_\sigma K)(D \cap V \cap G_\omega K)$. Значит, справедливо равенство $D \cap (V \cap G_\sigma K)(V \cap G_\omega K) = (D \cap V \cap G_\sigma K)(D \cap V \cap G_\omega K)$. Теперь по лемме A.1.2 [7] получаем $D(V \cap G_\sigma K) \cap D(V \cap G_\omega K) = D(V \cap G_\sigma K \cap G_\omega K)$. Лемма доказана.

Лемма 3.23. Пусть σ – такое множество простых чисел, что либо $\sigma \subseteq \pi$, либо $\pi' \subseteq \sigma$. Если подгруппа H π -разрешимой группы G перестановочна с G_σ и $K \trianglelefteq G$, то $HK \cap G_\sigma K = (H \cap G_\sigma)K$.

Доказательство. Установим вначале, что $HG_\sigma \cap K = (H \cap K)(G_\sigma \cap K)$. Так как $(|HG_\sigma : G_\sigma|, |HG_\sigma : H_\sigma|) = 1$, то по лемме A.1.6.(b) [7] $HG_\sigma = H_\sigma \cdot G_\sigma$. Тогда элемент $h \in HG_\sigma$ представим в виде $h = xy$, где $x \in H_\sigma, y \in G_\sigma$. Если $xy \in K$, то $xy \in KG_\sigma$ и поэтому $x \in KG_\sigma$. Выберем холловскую подгруппу $G_{\sigma'}$ такую, что $H_{\sigma'} \subseteq G_{\sigma'}$.

Следовательно, $x \in KG_\sigma \cap H_{\sigma'} \subseteq KG_\sigma \cap KG_{\sigma'}$. По лемме A.1.6.(c) [7] $KG_\sigma \cap KG_{\sigma'} = K(G_\sigma \cap G_{\sigma'}) = K$. Значит, $x \in N$ и поэтому $y \in N$. Отсюда $HG_\sigma \cap K \subseteq (H \cap K)(G_\sigma \cap K)$. Обратное включение очевидно.

Из равенства $HG_\sigma \cap K = (H \cap K)(G_\sigma \cap K)$ по лемме A.1.2 [7] получаем $HK \cap G_\sigma K = (H \cap G_\sigma)K$.

Лемма доказана.

Лемма 3.24. Пусть $\{G_{p_i} \mid p_i \in \mathbb{P}, i \in I\}$ – множество перестановочных холловских подгрупп группы G (I – конечное множество и $|I| \geq 2$).

Тогда $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i}) \perp G_{p_s}$ для любого $s \in I$.

Доказательство. Очевидно, что лемма справедлива для $|I| = 2$. Допустим, что $|I| > 2$ и для $|I|$ лемма верна. Пусть G_{p_k} – холловская подгруппа группы G такая, что $p_k \neq p_i$ и $G_{p_k} \perp G_{p_i}$ для всех $i \in I$.

Пусть $s \in I \cup \{k\}$. Если $s \in I$, то $G_{p_s} \perp G_{p_k}$ и по индукции $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i}) \perp G_{p_s}$. По лемме A.1.6.(c) [7] получаем $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i} \cap G_{p_k}) \perp G_{p_s}$.

С другой стороны, если $s = k$, то возьмем индекс $r \in I$ ($r \neq s$). Следовательно, $G_{p_r} \perp G_{p_i}$ и по индукции $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i}) \perp G_{p_r}$. По лемме A.1.6.(c) [7] $(\bigcap_{i \in I \setminus \{s\}} G_{p_i} \cap G_{p_r}) \perp G_{p_s}$. Таким образом, лемма верна при $|I| + 1$. Лемма доказана.

Лемма 3.25. Пусть \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга π -разрешимой группы G , V – \mathcal{F} -инъектор группы G и V – π -связная подгруппа, холловская система Σ группы G редуцируется в V и $D = N_G(\Sigma)$. Пусть ρ – такое множество простых чисел, что либо $\rho = \{p\}$, для $p \in \pi$, либо $\rho = \pi'$. Тогда если $K \trianglelefteq G$, $G/K \in \mathfrak{C}_\rho$, холловская ρ' -подгруппа S группы G принадлежит Σ и $V \perp S$, то $(V \cap K) \perp S$ и $V \leq D(V \cap K)$.

Доказательство. Так как S – холловская ρ' -подгруппа в G , то по лемме IV.15.2 [15] SK/K – холловская ρ' -подгруппа в $G/K \in \mathfrak{C}_\rho$. Тогда $S \leq K$ и $S(V \cap K) = SV \cap K \leq G$. Значит, подгруппы $V \cap K$ и S перестановочны. Пусть $G_\rho \in \Sigma$. Следовательно, учитывая $\Sigma \searrow V$, получаем, что $V_\rho = V \cap G_\rho$ является холловской ρ -подгруппой в V . Так как $V \leq SV$, то $V_\rho \leq (SV)_\rho \in \text{Hall}_\rho(SV)$ и по лемме 3.17 $V_\rho \in \text{Hall}_\rho(SV)$.

Пусть $P = V_p \cap N_{SV}(S)$. Покажем, что $P \in Hall_p(N_{SV}(S))$. Так как $S \perp \Sigma$, то по лемме 3.9 $\Sigma \searrow S$ и по лемме 1.7 $\Sigma \searrow SV$. Кроме того, $S = S \cap SV \in \Sigma_{SV}$, где Σ_{SV} – холловская система подгруппы SV . Следовательно, $S \perp \Sigma_{SV}$ и по лемме 3.9 $\Sigma_{SV} \searrow S$. Но $S pr G$ и тогда ввиду леммы 1.6.3.(a) [7] $S pr SV$. Значит, учитывая лемму 3.20, $\Sigma_{SV} \searrow N_{SV}(S)$. Так как $V_p \subseteq G_p \cap SV$ и $V_p \in Hall_p(SV)$, то $V_p = G_p \cap SV$ и

$$V_p \in \Sigma_{SV} \searrow N_{SV}(S).$$

Следовательно, $P \in Hall_p(N_{SV}(S))$.

Теперь из $S \leq SV \cap K \trianglelefteq SV$ и $S pr SV$ по лемме 1.6.3.(b) [7] следует, что $SV = N_{SV}(S)(SV \cap K)$. Ввиду изоморфизма

$$SV / (SV \cap K) \cong SVK / K$$

и того, что $SVK / K \leq G / K \in \mathfrak{C}_p$, получаем $SVK / K \in \mathfrak{C}_p$. Тогда по лемме 3.18 справедливо равенство $SV = P(SV \cap K)$. Из $P \leq V$ и $P \perp (SV \cap K)$ заключаем

$$\begin{aligned} V &= V \cap SV = V \cap P(SV \cap K) = \\ &= P(V \cap SV \cap K) = P(V \cap K). \end{aligned}$$

Так как $G_p \in \Sigma$ и $S \in \Sigma$, то по лемме 3.19 $G_p \cap N_G(S) \in Hall_p(D)$. Учитывая $P \leq G_p \cap N_{N_G(S)}(S) \leq D$ и $V = P(V \cap K)$, получаем

$$V \subseteq D(V \cap K).$$

Ввиду лемм 1.6 $\Sigma \searrow V \cap K$ и леммы IX.1.3.(a) [7], получаем $V \cap K \in Inj_{\mathcal{F}}(K)$. Значит, по лемме 3.8 $V \cap K pr G$. Следовательно, учитывая лемму 3.20, $D \leq N_G(V \cap K)$ и $D(V \cap K) \leq G$. Итак, $V \leq D(V \cap K)$. Лемма доказана.

Теорема 3.26. Пусть \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга π -разрешимой группы G , V – \mathcal{F} -инъектор группы G и V – π -связная подгруппа, причем холловская система Σ группы G редуцируется в V . Пусть $K \trianglelefteq G$ и G / K является π' -группой или нильпотентной π -группой. Тогда если \mathcal{F} – перестановочное множество Фиттинга, то $V \leq N_G(\Sigma)(V \cap K)$.

Доказательство. Обозначим $D = N_G(\Sigma)$.

Пусть ρ – такое множество простых чисел, что либо $\rho = \{p\}$, для $p \in \pi$, либо $\rho = \pi'$. Пусть $S \in \Sigma \cap Hall_p(G)$. Покажем, что $SK \trianglelefteq G$. Так как $G / K \in \mathfrak{X}_\pi \times \mathfrak{C}_\pi$, то $G / K = G_\pi K / K \times G_\pi K / K$, где $G_\pi K / K \in \mathfrak{X}_\pi$. Ввиду $\rho = \{p\}$ для $p \in \pi$, имеем $G_{p'} = G_p' = S$. Заметим, что $G_{p'} pr G$ и, следовательно, по лемме 1.6.3.(c) [7] $G_{p'} K pr G$.

Ввиду изоморфизмов $G / K / G_\pi K / K \cong G / G_\pi K$ и $G / K / G_\pi K / K \cong G_\pi K / G$, получаем

$$G / G_\pi K \in \mathfrak{X}_\pi.$$

Тогда из $G_\pi \subseteq G_{p'}$ следует $G_{p'} K / G_\pi K \leq G / G_\pi K \in \mathfrak{X}_\pi$. Это означает, что $G_{p'} K$ субнормальна в G . Следовательно, учитывая $G_{p'} K pr G$, по лемме 1.6.3.(d) [7] $G_{p'} K \trianglelefteq G$. Если $\rho = \pi'$, то $\rho' = \pi$ и $S = G_\pi$. Тогда $SK = G_\pi K \trianglelefteq G$.

Итак, для любой холловской ρ' -подгруппы S группы G справедливо $SK \trianglelefteq G$.

Аналогично можно показать, что $G_\sigma K \trianglelefteq G$ для любого такого σ' , что $\pi' \subseteq \sigma'$.

Из перестановочности множества Фиттинга \mathcal{F} следует, что V – системно перестановочная подгруппа в G . Тогда ввиду леммы 3.8 $V pr G$ и, учитывая $\Sigma \searrow V$, по лемме 3.21 $V \perp \Sigma$ и, значит, $V \perp S$.

Так как по $S \in Hall_p(G)$, то по лемме IV.15.2 [15] $SK / K \in Hall_p(G / K)$. Ввиду изоморфизма $G / K / SK / K \cong G / SK$, получаем $G / SK \in \mathfrak{C}_p$. Тогда по лемме 3.25 $V \leq D(V \cap K)$.

Пусть $L = \{G_{p_i} \in \Sigma \mid p_i \in \pi, i \in I\}$. Следовательно,

$$V \leq \bigcap_{i \in I} D(V \cap G_{p_i} K) \cap D(V \cap G_\pi K).$$

Тогда, из $G_\sigma K \trianglelefteq G$, с учетом включения $\pi' \subseteq \sigma'$, и применяя последовательно леммы 3.22, 3.24 и 3.23, получим

$$\bigcap_{i \in I} D(V \cap G_{p_i} K) = D\left(V \cap \left(\bigcap_{i \in I} G_{p_i}\right) K\right).$$

Так как $\bigcap_{i \in I} G_{p_i} = G_{\pi'}$, то

$$V \leq D(V \cap G_\pi K) \cap D(V \cap G_{\pi'} K).$$

Ввиду $G / K \in \mathfrak{X}_\pi \times \mathfrak{C}_\pi$, имеем $G_\pi K \trianglelefteq G$ и $G_{\pi'} K \trianglelefteq G$. Значит, учитывая леммы 3.22 и 3.23, получаем

$$\begin{aligned} D(V \cap G_\pi K) \cap D(V \cap G_{\pi'} K) &= \\ &= D(V \cap G_\pi K \cap G_{\pi'} K) = \\ &= D(V \cap (G_\pi \cap G_{\pi'}) K) = D(V \cap K). \end{aligned}$$

Итак, $V \leq D(V \cap K)$. Теорема доказана.

4 Формула инъектора

Докажем сначала свойство локального π -насыщенного множества Фиттинга \mathcal{F} π -разрешимой группы G , которое будем использовать при доказательстве основного результата.

Лемма 4.1. Пусть локальное π -насыщенное множество Фиттинга \mathcal{F} π -разрешимой группы G определяется полной приведенной локальной

H -функцией F группы G и K – \mathcal{F} -подгруппа G . Если S является p -подгруппой G , то $K \cdot C_S(K / K_{F(p)}) \in \mathcal{F}$. В случае, когда $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$ и $H \in \mathcal{F}$, выполняется включение $C_S(H / H_{F(p)}) \leq C_S(K / K_{F(p)})$.

Доказательство. Обозначим

$$C = C_S(K / K_{F(p)}).$$

Так как $[C, K] \leq K_{F(p)}$, то $k^{-1}c^{-1}kc \in K_{F(p)}$ для любых элементов $k \in K$ и $c \in C$. Покажем, что $K_{F(p)} \trianglelefteq KC$. Из того, что $c^{-1} \in C_S(K / K_{F(p)})$ следует $(K_{F(p)})^{kc} = c^{-1}k^{-1}K_{F(p)}kc = (k^{-1}K_{F(p)})c^{-1}kc$.

Ввиду нормальности $K_{F(p)}$ в K , получаем

$$(k^{-1}K_{F(p)})c^{-1}kc = K_{F(p)}k^{-1}c^{-1}kc = K_{F(p)}.$$

Следовательно, $(K_{F(p)})^{kc} = K_{F(p)}$ для любых элементов $k \in K$ и $c \in C$. Значит, $K_{F(p)} \trianglelefteq KC$. Кроме того, из $k^{-1}c^{-1}kc \in K_{F(p)}$ следует $k^{-1}ck \in K_{F(p)}C$.

Тогда для любого элемента $h \in KC$ выполняется равенство $(K_{F(p)}C)^h = (K_{F(p)})^h(C)^h = K_{F(p)}C$. Значит, $K_{F(p)}C \trianglelefteq KC$.

Так как $K_{F(p)}C \in F(p) \circ \mathfrak{R}_p \subseteq \mathcal{F}$ и K является \mathcal{F} -подгруппой, то $KC = K \cdot K_{F(p)}C \in \mathcal{F}$.

Пусть теперь $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$ и $H \in \mathcal{F}$. Тогда из включения

$$[K, C_S(H / H_{F(p)})] \leq K \cap [H, C_S(H / H_{F(p)})] \leq K \cap H_{F(p)} = K_{F(p)}$$

непосредственно следует

$$C_S(H / H_{F(p)}) \leq C_S(K / K_{F(p)}).$$

Лемма доказана.

Основной результат работы представляет

Теорема 4.2. Пусть локальное π -насыщенное множество Фиттинга \mathcal{F} π -разрешимой группы G определяется полной приведенной H -функцией F группы G , Σ – холловская система G , $D = N_G(\Sigma)$ и $D_p \in \Sigma \cap D$. Если W – \mathcal{F} -инъектор группы $O^p(G)$, причем $p \in \pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$ и $\Sigma \searrow W$, то подгруппа $Z = W \cdot C_{D_p}(W / W_{F(p)})$ – \mathcal{F} -инъектор G и $\Sigma \searrow Z$.

Доказательство. Легко видеть, что W – π -связная подгруппа. Так как по лемме 3.8 $W \text{ rg } G$ и $\Sigma \searrow W$, то ввиду леммы 3.20 $D \leq N_G(W)$. Если $d \in D$, то $W = W^d$. Из $W_{F(p)} \trianglelefteq W$ следует $(W_{F(p)})^d \trianglelefteq W^d = W$. Так как $F(p)$ – множество Фиттинга группы G , то $(W_{F(p)})^d \in F(p)$. Тогда, из определения $F(p)$ -радикала вытекает $(W_{F(p)})^d \leq W_{F(p)}$ для любого элемента $d \in D$. Значит, $(W_{F(p)})^{d^{-1}} \leq W_{F(p)}$ и $W_{F(p)} = (W_{F(p)})^d$.

Значит, $D \leq N_G(W_{F(p)})$. Отсюда получаем $(wW_{F(p)})^d \in W / W_{F(p)}$ для любого элемента $w \in W$.

Следовательно, $D \leq N_G(W / W_{F(p)})$. Обозначим $Y = C_{D_p}(W / W_{F(p)})$. Ввиду леммы 4.1,

$$Z = WY \in \mathcal{F}.$$

Пусть V – \mathcal{F} -максимальная подгруппа в G такая, что $Z \subseteq V$. Так как $p \in \pi$ и $W \subseteq V$, то по лемме 3.4 $V \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(G)$. Следовательно, $\Sigma \searrow V^g$ для некоторого элемента $g \in G$.

Докажем, что $W \trianglelefteq V^g$. Так как по лемме 1.2 $V \cap O^p(G) \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(O^p(G))$ и $W \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(O^p(G))$, то ввиду выбора V , получаем $W = V \cap O^p(G) \trianglelefteq V$. Но тогда из $W^g \trianglelefteq V^g$ и $\Sigma \searrow V^g$ вытекает, что $\Sigma \searrow W^g$. Следовательно, учитывая $\Sigma \searrow W$ и $W \text{ pr } G$, по лемме 1.5 $W = W^g$ и поэтому $W \trianglelefteq V^g$.

Покажем $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq V^g$. По лемме 1.3 $V^g \in \text{Inj}_{\mathcal{F}}(G)$. Тогда ввиду леммы 4.1, $V^g \cdot C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \in \mathcal{F}$. Так как V^g – \mathcal{F} -инъектор группы G , то $V^g \cdot C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) = V^g$ и $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq V^g$.

Установим, что $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq Y$. Рассмотрим группу V^g . Из леммы 4.1, ввиду $W \trianglelefteq V^g$, вытекает, что $C_{D_p \cap V^g}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq C_{D_p \cap V^g}(W^g / W_{F(p)}^g)$. Так как $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq V^g$, то $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq C_{D_p \cap V^g}(V^g / V_{F(p)}^g)$. Тогда, учитывая $C_{D_p \cap V^g}(W^g / W_{F(p)}^g) \leq Y$, имеем

$$C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq Y.$$

Проверим, что $V^g \cap D_p = C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g)$.

Учитывая изоморфизм

$$(V^g \cap D_p)V_{F(p)}^g / V_{F(p)}^g \cong V^g \cap D_p / V^g \cap D_p \cap V_{F(p)}^g, \\ a = |V^g \cap D_p : V_{F(p)}^g \cap D_p| = |(V^g \cap D_p)V_{F(p)}^g : V_{F(p)}^g|.$$

Очевидно, что a является p -числом. Кроме того, выполняется равенство

$$a = \frac{|V^g \cap D_p|}{|V_{F(p)}^g \cap D_p|} = \frac{|V^g| |D_p|}{|V^g D_p|} \cdot \frac{|V_{F(p)}^g| |D_p|}{|V_{F(p)}^g D_p|} = \\ = \frac{|V^g|}{|V_{F(p)}^g|} \cdot \frac{|V_{F(p)}^g D_p|}{|V^g D_p|}.$$

Следовательно, $a \cdot \frac{|V^g D_p|}{|V_{F(p)}^g D_p|} = \frac{|V^g|}{|V_{F(p)}^g|}$. Так как

$V^g \in \mathcal{F}$ и F является полной локальной H -функцией группы G , то $\frac{|V^g|}{|V_{F(p)}^g|}$ является p' -числом.

Следовательно, $a - p'$ -число и $a = 1$. Значит, $V^g \cap D_p = V_{F(p)}^g \cap D_p$ и, ввиду $V_{F(p)}^g \trianglelefteq V^g$, получаем $V_{F(p)}^g \cap D_p \leq C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g)$. Тогда $V^g \cap D_p \leq C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g)$. Так как $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq V^g$, то $V^g \cap D_p = C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g)$.

По теореме 2.9 локальное множество Фиттинга \mathcal{F} является множеством Фишера и, значит, ввиду теоремы 3.16, \mathcal{F} – перестановочное множество Фиттинга. Следовательно, для \mathcal{F} -инъектора V^g группы G выполняются все условия теоремы 3.26 и поэтому $V^g \leq D(V^g \cap O^p(G))$. Учитывая $W = V \cap O^p(G)$ и $W = W^g$, получаем $W = V^g \cap O^p(G)$. Значит, $V^g \leq WD$.

Покажем, что $V^g \leq WD_p$. Так как $W \trianglelefteq V^g \leq N_G(W)$, $W \trianglelefteq N_G(W)$, $D \leq N_G(W)$, то $V^g / W \leq WD / W$. Теперь из $W = V^g \cap O^p(G)$ и $V^g / V^g \cap O^p(G) \cong V^g O^p(G) / O^p(G)$ следует

$$V^g / W \in \mathfrak{X}_p.$$

По лемме 3.17 выполняется

$$\begin{aligned} WD_p / W &= (W_p D_p)W / W = \\ &= (WD)_p W / W \in \text{Syl}_p(WD / W). \end{aligned}$$

Следовательно, $(V^g / W)^{wdW} \leq WD_p / W$ для некоторого элемента $wdW \in WD / W$, где $w \in W$ и $d \in D$. Так как $V^g - \pi$ -связная группа, $\Sigma \searrow V^g$, и, ввиду леммы 3.8, $V^g \text{rg} G$, то по лемме 3.20 $D \leq N_G(V^g)$. Значит,

$$V^g / W = (V^g / W)^{wdW} \leq WD_p / W$$

и поэтому $V^g \leq WD_p$.

Учитывая $V^g \leq WD_p$ и

$$V^g \cap D_p = C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g),$$

получаем

$$V^g \leq V^g \cap WD_p = W(V^g \cap D_p) = W \cdot C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g).$$

Тогда из $C_{D_p}(V^g / V_{F(p)}^g) \leq Y$ следует $V^g \leq WY$.

Ввиду выбора V , получаем $V^g \leq WY \leq V$. Таким образом, $V^g = WY = V$ и $\Sigma \searrow V$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brewster, B. \mathfrak{F} -projectors in finite π -solvable groups / B. Brewster // Arch. Math. – 1972. – Vol. 23, № 1. – P. 133–138.

2. Martinez Verduchi, J.R. On the theory of Fitting classes of finite π -solvable groups / J.R. Martinez Verduchi // Rev. Acad. Cienc. Zaragoza. – 1974. – Т 29, № 3–4. – P. 287–292.

3. Hartley, B. On Fischer’s dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, №2. – P. 193–207.

4. D’arcy, P. Locally defined fitting classes / P. D’arcy // J. Austral. Math. Soc. – 1975. – Vol. 20 (Series A). – P. 25–32.

5. Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob’ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.

6. Загурский, В.Н. Инъекторы локальных классов Фиттинга / В.Н. Загурский, Н.Т. Воробьев // Веснік ВДУ. – 2010. – № 4 (58). – С. 17–20.

7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

8. Гольберг, П.А. Холловские θ -базы конечных групп / П.А. Гольберг // Известия высших учебных заведений. – 1961. – № 1 (20). – С. 36–43.

9. Сементовский, В.Г. О пронормальных подгруппах конечных π -разрешимых групп / В.Г. Сементовский // Весн. Віцебс. дзярж. ун-та. – 2002. – № 1. – С. 79–84.

10. Поляков, Л.Я. Нормально погруженные подгруппы конечных групп / Л.Я. Поляков, В.Г. Сементовский // Конечные группы. – Минск : Наука и техника. – 1975. – С. 121–128.

11. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296–1302.

12. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

13. Lockett, F.P. On the Theory of Fitting Classes of finite and soluble groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – P. 103–115.

14. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Мн. : Наука и техника, 1964.

15. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 278 с.

Поступила в редакцию 14.09.09.

УДК 519.246

О σ -СВОЙСТВАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП I

А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON σ -PROPERTIES OF FINITE GROUPS I

A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} , т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Мы говорим, что конечная группа G является: σ -*первичной*, если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; σ -*группой*, если G содержит такое множество $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ холловых подгрупп, что H_i является σ -первичной, $(|H_i|, |H_j|) = 1$ для всех $i \neq j$ и $\pi(G) = \pi(H_1) \cup \dots \cup \pi(H_t)$. Мы анализируем некоторые свойства конечных σ -групп.

Ключевые слова: конечная группа, σ -группа, σ -разрешимая группа, холлова подгруппа, π -сепарабельная группа.

Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be some partition of the set \mathbb{P} of all primes, that is, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. We say that a finite group G is: σ -*primary* if G is a σ_i -group for some $\sigma_i \in \sigma$; a σ -*group* if G has a set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ of Hall subgroups such that H_i is σ -primary, $(|H_i|, |H_j|) = 1$ for all $i \neq j$ and $\pi(G) = \pi(H_1) \cup \dots \cup \pi(H_t)$. We analyze some properties of finite σ -groups.

Keywords: finite group, σ -group, σ -soluble group, Hall subgroup, π -separable group.

Mathematics Subject Classification (2010): 20D10, 20D15, 20D30.

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, n and m are always supposed to be natural numbers and $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ for any subset π of the set \mathbb{P} of all primes. The symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n ; $\pi(G) = \pi(|G|)$. The symbols \mathfrak{N} , \mathfrak{U} and \mathfrak{S} denote the classes of all nilpotent groups, of all supersoluble groups and of all soluble groups, respectively.

Let \mathcal{L} be some non-empty set of subgroups of G . Then a subgroup H of G is called \mathcal{L} -permutable in G if $HA = AH$ for all $A \in \mathcal{L}$. If A permutes with all Sylow subgroups of G , then A is called S -permutable in G . A group G is called a PST -group if S -permutability is a transitive relation in G , that is, every S -permutable subgroup of an S -permutable subgroup of G is S -permutable in G . In fact, in view of the well-known Kegel Theorem on subnormality of S -permutable subgroups [1, 1.2.14 (3)], a soluble group G is a PST -group if and only if every subnormal subgroup of G is S -permutable.

In what follows, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is some partition of \mathbb{P} , that is, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. If for any $i \in I$, σ_i is a one-element set, then we say that σ is the *smallest* partition of \mathbb{P} .

We put

$$\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) \mid i \in I\};$$

$$\sigma(G) = \sigma(|G|).$$

We say that G is:

σ -*primary* if $|\sigma(G)| \leq 1$;

σ_i -*primary* if $\pi(G) \subseteq \sigma_i$;

σ -*biprimary* if $|\sigma(G)| = 2$.

Definition 0.1. We say that a set

$$\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$$

of Hall subgroups of G , where H_i is σ -primary ($i = 1, \dots, t$), is a *complete Hall set of type σ* or simply \mathcal{H} is a *complete Hall set of G* if $(|H_i|, |H_j|) = 1$ for all $i \neq j$ and

$$\pi(G) = \pi(H_1) \cup \dots \cup \pi(H_t).$$

Under these conditions we say also that G is a σ -group.

Definition 0.2. Let \mathfrak{F} be a class of groups. If G has a complete Hall set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ such that $H_i \in \mathfrak{F}$ for all $i = 1, \dots, t$, then we say that \mathcal{H} is a *complete Hall \mathfrak{F} -set*.

In particular, we say that: \mathcal{H} is a *complete Wielandt set* of G if $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$; \mathcal{H} is a *complete generalized Wielandt set* of G if every group in \mathcal{H} is a soluble PST -group.

Definition 0.3. We say that a σ -group G is: σ -soluble if every chief factor of G is σ -primary; σ -nilpotent if G is σ_i -closed for all $i \in I$.

In view of the Blessenohl-Slepova's Theorem [2, IV, 16.2], the class of all σ -soluble groups having a complete Hall \mathfrak{F} -set of type σ is a saturated formation for any partition σ of \mathbb{P} and for any saturated formation \mathfrak{F} . On the other hand, in view of the Vorob'ev – Zagurski's Theorem [3], the class of all soluble groups having a complete Hall \mathfrak{F} -set of type σ is a local Fitting class for any local Fitting class \mathfrak{F} and any partition σ of \mathbb{P} .

It is clear that every σ -nilpotent group is also σ -soluble, and G is σ -soluble if and only if it is σ_i -separable for all $i \in I$.

Example 0.4. G is soluble (respectively nilpotent) if and only if it is σ -soluble (respectively σ -nilpotent), where σ is the smallest partition of \mathbb{P} .

Example 0.5. G is π -separable if and only if it is σ -soluble, where $\sigma = \pi \cup \pi'$.

Example 0.6. G is p -soluble (respectively p -decomposable) if and only if it is σ -soluble (respectively σ -nilpotent), where $\sigma = \{p\} \cup \{p\}'$.

Many well-known results can be generalized on the basis of the concepts of σ -group and of σ -soluble group. The observations of this paper are partial illustration of this.

1 The classes \mathfrak{S}_{σ_i} , \mathfrak{S}_{σ} , \mathfrak{N}_{σ_i} and \mathfrak{N}_{σ}

We use the symbols \mathfrak{S}_{σ_i} , \mathfrak{S}_{σ} , \mathfrak{N}_{σ_i} and \mathfrak{N}_{σ} to denote the classes of all σ_i -separable, of all σ -soluble, of all σ_i -closed and of all σ -nilpotent groups, respectively. Applications of these classes are based on the following fact.

Theorem 1.1. *The classes \mathfrak{S}_{σ_i} , \mathfrak{S}_{σ} , \mathfrak{N}_{σ_i} and \mathfrak{N}_{σ} are hereditary totally local formations, and they are also totally local Fitting classes. Thus, these classes are hereditary saturated Fitting formations.*

Proof. It is clear that the classes \mathfrak{S}_{σ_i} , \mathfrak{S}_{σ} , \mathfrak{N}_{σ_i} and \mathfrak{N}_{σ} are hereditary. It is clear also that any extension of a σ_i -separable (respectively σ -soluble) group by a σ_i -separable (respectively σ -soluble) group is σ_i -separable (respectively σ -soluble). Hence \mathfrak{S}_{σ_i} and \mathfrak{S}_{σ} are hereditary totally local formations, and both these formations are totally local Fitting classes by the results in [4]. The second assertion of the theorem is a corollary of Theorem 4.3.8 in [5] and Theorem 1 in [6].

2 K - σ -subnormal subgroups of σ -groups

We say that a subgroup H of a σ -group G is: a σ -Hall subgroup of G provided $\sigma(H) \subseteq \sigma(G)$;

K - σ -subnormal in G if there is a subgroup chain $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$ such that either H_{i-1} is normal in H_i or $H_i / (H_{i-1})_{H_i}$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, n$.

It is not difficult to show that H is K - σ -subnormal in G if and only if it is K - \mathfrak{N}_{σ} -subnormal in G in the sense of [7, p. 236].

Theorem 2.1 (Skiba [8]). *Let G be a σ -group. If H is a K - σ -subnormal subgroup of G , then $E \cap H$ is a σ -Hall subgroup of H for each σ -Hall subgroup E of G .*

Suppose that G has a complete Hall set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ of type σ .

If $H_i H_j = H_j H_i$ for all i, j , then we say that \mathcal{H} is a σ -basis of G .

For any subgroup H of G and any normal subgroup R of G we write $H \cap \mathcal{H}$ to denote the set $\{H \cap H_1, \dots, H \cap H_t\}$, and we write $\mathcal{H}R/R$ to denote the set $\{H_1 R/R, \dots, H_t R/R\}$. If $H \cap \mathcal{H}$ is a complete Hall set in H , then we say that \mathcal{H} weakly reduces into H .

Theorem 2.2 (Skiba [8]). *Let G be a σ -soluble group. Then H is a K - σ -subnormal subgroup of G if and only if every σ -basis of G weakly reduces into H .*

Corollary 2.3 (Kegel [9, I, Proposition 4.21]). *Let G be a soluble group. Then H is a subnormal subgroup of G if and only if every Hall system of G reduces into H .*

The following well-known result is a corollary of the main result in [10] and Theorem 6.3.3 in [7]. In fact, this result follows also from the results in [11].

Theorem 2.4. *Let G be a σ -group. Then the set of all K - σ -subnormal subgroups of G forms a sublattice of the lattice of all subgroups of G .*

Theorem 2.5 (Skiba [8]). *Let G be a σ -group and $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ a complete Hall set of type σ of G . Let $D = G^{\mathfrak{N}_{\sigma}}$ be the σ -nilpotent residual of G and H a subgroup of G .*

(i) *If H is \mathcal{H} -permutable and K - σ -subnormal in G , then H^G / H_G is σ -nilpotent.*

(ii) *If H is \mathcal{H}^D -permutable, then H is K - σ -subnormal in G .*

Corollary 2.6 (Kegel [13]). *If a subgroup H of G is S -permutable, then H is subnormal in G .*

Corollary 2.7 (Kegel [13], Deskins [14]). *If a subgroup H of G is S -permutable, then H^G / H_G is nilpotent.*

Let \mathfrak{X} be a class of groups. A group G is called \mathfrak{X} -critical if G is not in \mathfrak{X} but all proper subgroups of G are in \mathfrak{X} [9, p. 517]. An \mathfrak{N} -critical group is called a *Schmidt group*.

Example 2.8. Let $G = (C_5 \rtimes C_2) \times S_4$, where $C_5 \rtimes C_2$ is a non-abelian group of order 10 and S_4 is

the symmetric group of degree 4. Let $\sigma(G) = \{2, 3\} \cup \{5\}$. Then $F_\sigma(G) = C_5S_4$ and $G/F_\sigma(G) \cong C_2$ is abelian. Now let H be any Schmidt subgroup of G . If 5 divides $|H|$, then $C_5 \leq H$ and so G/H_G is a $\{2, 3\}$ -group. Hence H is K - σ -subnormal in G . If 5 does not divide $|H|$, then H is not \mathfrak{N}_σ -critical subgroup of G .

In view of Theorem 2.1, the product of all normal σ -nilpotent subgroups of G is σ -nilpotent. We call such a product the σ -Fitting subgroup of G and denote it by $F_\sigma(G)$.

Example 3.8 is a motivation for our next result.

Theorem 2.9 (Skiba [8]). *Suppose that G is a non- σ -nilpotent σ -group. If every \mathfrak{N}_σ -critical subgroup of G is K - σ -subnormal in G , then G' is a σ -nilpotent.*

Corollary 2.10 (Semenchuk [15]). *Suppose that G is a nonnilpotent group. If every Schmidt subgroup of G is subnormal in G , then G is metanilpotent.*

Corollary 2.11 (Monakhov and Knyagina [16]). *Suppose that G is a nonnilpotent group. If every Schmidt subgroup of G is subnormal in G , then G' is nilpotent.*

In the proof of Theorem 2.9 the following our results on \mathfrak{N}_σ -critical groups are used.

Theorem 2.12 (Skiba [8]). *Every σ -soluble \mathfrak{N}_σ -critical group is a Schmidt group.*

Theorem 2.13 (Skiba [8]). *Let G be a σ -soluble group. Suppose that for some $\sigma_i \in \sigma$, G is not σ_i -closed. Then G contains a σ_i -closed \mathfrak{N}_σ -critical subgroup.*

Recall that a subgroup H of G is called a 2-maximal (second maximal) subgroup of G whenever H is a maximal subgroup of some maximal subgroup M of G . Similarly we can define 3-maximal subgroups, and so on.

Theorem 2.14 (Skiba [8]). *Let G be a σ -soluble group with $|\sigma(G)| > n$. If every n -maximal subgroup of G is K - σ -subnormal in G , then G is σ -nilpotent.*

Corollary 2.15 (Mann [17]). *Let G be a soluble group with $|\pi(G)| > n$. If every n -maximal subgroup of G is subnormal in G , then G is nilpotent.*

3 σ -nilpotent and σ -quasinilpotent groups

Let \mathfrak{F} be a class of groups. A chief factor H/K of G is called \mathfrak{F} -central in G provided $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. Otherwise, it is called \mathfrak{F} -eccentric in G .

Theorem 3.1. *Let G be a σ -group and \mathcal{H} a complete Hall set of type σ in G . Any two of the following conditions are equivalent:*

- (i) G is σ -nilpotent.

- (ii) Every subgroup of G is K - σ -subnormal in G .

- (iii) Every maximal subgroup of G is K - σ -subnormal in G .

- (iv) Every member of \mathcal{H} is K - σ -subnormal in G .

- (v) Every chief factor of G is \mathfrak{N}_σ -central in G .

Proof. (i) \Rightarrow (ii), (iii), (iv). It is enough to show that every maximal subgroup M of a σ -nilpotent group G is K - σ -subnormal in G . Assume that $M_G \neq 1$. Then G/M_G is σ -nilpotent by Theorem 2.1, so M/M_G is K - σ -subnormal in G/M_G by induction and hence M is K - σ -subnormal in G by [7, 6.1.6]. Therefore, we can assume that $M_G = 1$. But then, by [9, A, 15.2], either G has a unique minimal normal subgroup or G has exactly two minimal normal subgroups R and N and $R \cong N$. Hence $|\sigma(G)| = 1$ and so M is K - σ -subnormal in G .

(i) \Rightarrow (v). This implication directly follows from the Barnes – Kegel Theorem [9, IV, 1.5].

(*) \Rightarrow (i) for all (*) $\in \{(iii), (iv), (v)\}$. Assume that this is false and let G be a counterexample of minimal order. Let $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ be complete Hall set of type σ of G . Then $t > 1$ since every σ -primary group is evidently σ -nilpotent.

Let R be a minimal normal subgroup of G . It is clear that $\mathcal{H}R/R$ is a complete Hall set of type σ in G/R . Therefore the hypothesis holds for G/R by [7]. Thus G/R is σ -nilpotent by the choice of G . Moreover, in view of Theorem 2.1, the choice of G implies that $R \not\leq \Phi(G)$ and R is the unique minimal normal subgroup of G . Hence $C_G(R) \leq R$ by [9, A, 15.2]. Let M be a maximal subgroup of G such that $RM = G$. Then $M_G = 1$.

Assume that (*)=(iii). In this case M is K - σ -subnormal in G by hypothesis. Hence $G/M_G = G/1$ is σ -primary and so G is σ -nilpotent. This contradiction shows that (iii) \Rightarrow (i).

If (*)=(iv), then every member of \mathcal{H} is normal in G by Theorem 2.1, which implies that G is σ -nilpotent.

Assume that (*)=(v). If R is non-abelian, then $C_G(R) = 1$ and so by hypothesis we have $R \rtimes G \in \mathfrak{N}_\sigma$, which implies that $G \in \mathfrak{N}_\sigma$. Thus $R = C_G(R)$ is abelian and so in this case we have $G \cong G/M_G \cong R \rtimes (G/C_G(R)) \in \mathfrak{N}_\sigma$ by Lemma 3.29 in [19]. This contradiction shows that (v) \Rightarrow (i). The theorem is proved.

Recall that G is said to be quasinilpotent if for every its chief factor H/K and every $x \in G$, x induces an inner automorphism on H/K (see [10, p. 124]). Note that since for every central chief factor H/K of G , an element of G induces trivial automorphism on H/K , one can say that G is

quasinilpotent if for every its *non-central* chief factor H/K and for every $x \in G$, x induces an inner automorphism on H/K . This elementary observation allows us to consider the following analogue:

Definition 3.2. We say that a σ -group G is a σ -quasinilpotent if for every \mathfrak{N}_σ -eccentric chief factor H/K of G , every automorphism of H/K induced by an element of G is inner.

A normal subgroup N of G is said to be \mathfrak{N}_σ -hypercentral in G if either $N=1$ or $N \neq 1$ and every chief factor of G below N is \mathfrak{N}_σ -central in G . The symbol $Z_{\mathfrak{N}_\sigma}(G)$ denotes the \mathfrak{N}_σ -hypercentre of G , that is, the product of all normal \mathfrak{N}_σ -hypercentral subgroups of G .

Theorem 3.3 (Skiba [8]). *Suppose that G has a complete Hall \mathfrak{S} -set of type σ . Then G is σ -quasinilpotent if and only if $G/Z_{\mathfrak{N}_\sigma}(G)$ is semisimple.*

Corollary 3.4 (Huppert and Blackburn [18]). *G is quasinilpotent if and only if $G/Z_\sigma(G)$ is semisimple.*

4 Some properties of σ -soluble groups

By classical Hall's Theorem, G is soluble if and only if it has a Sylow basis. The direct analogue of this result for σ -soluble groups is not true in general. Indeed, let $\sigma = \{2, 3\} \cup \{2, 3\}'$. Then the alternative group A_5 has a σ -basis and it is not σ -soluble. Nevertheless, the following result is true.

Theorem 4.1 (Skiba [8]). *Let G be a σ -group. Then the following are equivalent:*

- (i) G is σ -soluble.
- (ii) G has a σ -basis $\{H_1, \dots, H_t\}$ such that for each $i \neq j$ the subgroup $H_i H_j$ has a Hall $\{p, q\}$ -subgroup for all $p \in \pi(H_i)$ and $q \in \pi(H_j)$.
- (iii) G has a Hall $\{p\} \cup (\pi(E))$ -subgroup for every $p \in \pi(G)$ and every σ -Hall subgroup E of G .
- (iv) Every σ -Hall subgroup of G either covers or avoids each chief factor of G .

We say that G is a σ -group of Sylow type if every subgroup of G is a D_{σ_i} -group for all $i \in I$. It is clear that every σ -soluble group is a σ -group of Sylow type. The alternative group A_5 is a σ -group of Sylow type, where $\sigma = \{2, 3\} \cup \{2, 3\}'$.

We say that the natural numbers n and m are σ -coprime [20] if $\sigma_i \cap \pi(m) = \emptyset$ whenever $\sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset$.

In the proof of Theorem 4.1 the following result is used.

Theorem 4.2 (Skiba [8]). *Suppose that G is a σ -group of Sylow type, and*

$$G = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_1 A_3,$$

where A_1, A_2 and A_3 are σ -soluble subgroups of G . If the indices $|G : N_G(A_1)|, |G : N_G(A_2)|, |G : N_G(A_3)|$ are pairwise σ -coprime, then G is σ -soluble.

Corollary 4.3. *Suppose that*

$$G = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_1 A_3,$$

where A_1, A_2 and A_3 are soluble subgroups of G . If the three indices $|G : N_G(A_1)|, |G : N_G(A_2)|, |G : N_G(A_3)|$ are pairwise coprime, then G is soluble.

Corollary 4.4 (H. Wielandt). *If G has three soluble subgroups A_1, A_2 and A_3 whose indices $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|$ are pairwise coprime, then G is itself soluble.*

Theorem 4.5. *If G is σ -soluble, then*

$$C_G(F_\sigma(G)) \leq F_\sigma(G).$$

Proof. Let $C = C_G(F_\sigma(G))$. Assume that $C \not\leq F_\sigma(G)$ and let $H/F_\sigma(G)$ be a chief factor of G such that $H \leq F_\sigma(G)C$. Then $H = F_\sigma(G)(H \cap C)$. Since G is σ -soluble, $H/F_\sigma(G)$ is σ -nilpotent. Therefore, since $C \leq C_G(H \cap C \cap F_\sigma(G))$, we get in view of the G -isomorphism

$$\begin{aligned} H/F_\sigma(G) &= F_\sigma(G)(H \cap C)/F_\sigma(G) = \\ &= (H \cap C)/((H \cap C) \cap F_\sigma(G)) \end{aligned}$$

that $H \cap C$ is a normal σ -nilpotent subgroup of G . Hence $H \cap C \leq F_\sigma(G)$ and so $H = F_\sigma(G)$. This contradiction completes the proof of the result.

In fact, the following general result is true.

Theorem 4.6 (Skiba [8]). *Suppose that G has a complete Hall \mathfrak{S} -set of type σ . Then*

$$C_G(F_\sigma^*(G)) \leq F_\sigma^*(G).$$

In this theorem $F_\sigma^*(G)$ denotes the product of all normal σ -quasinilpotent subgroups of G .

Consider two classical corollaries of Theorem 4.5.

Corollary 4.7. *If G is soluble, then*

$$C_G(F(G)) \leq F(G).$$

Now note that if G is π -separable and $O_{\pi'}(G) = 1$, then $F_\sigma(G) = O_\pi(G)$, where $\sigma = \pi \cup \pi'$ and so from Theorem 4.5 we get also the following

Corollary 4.8 (Gorenstein [12, 6, 3.2]). *If G is π -separable, then*

$$C_{G/O_{\pi'}}(O_\pi(G/O_{\pi'})) \leq O_\pi(G/O_{\pi'}).$$

From Theorem 4.6 we get the following well-known fact.

Corollary 4.9 (Huppert and Blackburn [18, X, 13.12]). *$C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$.*

Definition 4.10. We say that a maximal subgroup M of G is σ -normal in G if G/M_G is σ -primary. Otherwise, we say that M is σ -abnormal in G .

Definition 4.11. Let G be a σ -group and H a σ -nilpotent subgroup of G . Then we say that H is a

σ -Carter subgroup of G if for any subgroup H_0 of G , where H is a maximal subgroup of H_0 , H is σ -abnormal in H_0 .

Theorem 4.12 (Skiba [8]). *Let G be a σ -soluble group.*

(i) *The set of all σ -Carter subgroups of G coincides with the set of all \mathfrak{N}_σ -covering subgroups of G .*

(ii) *If G contains a σ -Carter subgroup, then all of its σ -Carter subgroups are conjugate.*

Since every soluble group contains at least one \mathfrak{N} -covering subgroup [24, VI, 7.10], from Theorem 4.12 we get the following

Corollary 4.13. *Let G be a soluble group. Then G contains a σ -Carter subgroup and all of its σ -Carter subgroups are conjugate.*

Corollary 4.14 (Carter [24, VI, 12.2]). *Let G be a soluble group. Then G contains a Carter subgroup and all of its Carter subgroups are conjugate.*

Theorem 4.15. *Let M be a non- σ -normal maximal subgroup of a σ -soluble group G and H/M_G a chief factor of G such that*

$$\sigma_i \cap \pi(H/M_G) = \emptyset.$$

Suppose that $O_{\sigma_i}(M/M_G) \neq 1$.

(i) *If E is a σ -Hall subgroup of G such that E avoids H/M_G and covers $O_{\sigma_i}(M/M_G)$, then for some $x \in G$ we have $N_G(E^x) \leq M$.*

(ii) *If for some prime q we have*

$$O_q(O_{\sigma_i}(M/M_G)) \neq 1,$$

then for some Sylow q -subgroup Q of G we have $N_G(Q) \leq M$.

Proof. (i) The hypothesis holds for G/M_G , so in the case when $M_G \neq 1$ we have by induction

$$\begin{aligned} N_G(E^x)M_G/M_G &\leq \\ &\leq N_{G/M_G}((EM_G/M_G)^{xM_G}) \leq M/M_G \end{aligned}$$

for some $xM_G \in G/M_G$, so $N_G(E^x) \leq M$.

Now assume that $M_G = 1$. Since G is σ -soluble, we can assume without loss of the generality that $E \leq M$. Then $O_{\sigma_i}(M) = E \cap HO_{\sigma_i}(M)$ since E avoids H and so $N_G(E) \leq N_G(O_{\sigma_i}(M)) = M$.

(ii) See the proof of (i).

Note that if M is a nonnormal maximal subgroup of a soluble group G , then $F(M/M_G) \neq 1$ and $O_p(M/M_G) = 1$, where p divides the order of the chief factor H/M_G of G . Hence from Theorem 4.14 we get

Corollary 4.16 (Vedernikov [21]). *If G is soluble, then every nonnormal maximal subgroup M of G contains the normalizer of some Sylow subgroup of G .*

Similarly, from Theorem 4.15 we get

Corollary 4.17 (Gritsuk, Monakhov [22]). *Let M be a nonnormal maximal subgroup of a soluble group G . If $F(M/M_G) \neq 1$ and*

$$q \in \pi(F(M/M_G)),$$

then G has a Sylow q -subgroup Q such that $N_G(Q) \leq M$.

Corollary 4.18 (Gritsuk, Monakhov [22]). *Let M be a nonnormal maximal subgroup of a p -soluble group G with p divides $|G:M|$.*

(i) *If $F(M/M_G) \neq 1$ and $q \in \pi(F(M/M_G))$, then G has a Sylow q -subgroup Q such that $N_G(Q) \leq M$.*

(ii) *If $F(M/M_G) = 1$, then $N_G(K) \leq M$ for some Hall p' -subgroup K of G .*

Theorem 4.1 is a motivation for the following our concept: we say that a subgroup E of a σ -group G is a special σ -Hall subgroup of G if either E is a Hall $\{p, q\}$ -subgroup for some $p \in \sigma_i$ and $q \in \sigma_j$ ($i \neq j$) or E is a Hall $\{p\} \cup (\pi(V))$ -subgroup for some $p \in \pi(G)$ and some σ -Hall subgroup $V \neq 1$ of G , where $p \notin \pi(V)$.

We use \mathfrak{A}_σ^* to denote the class of all σ -nilpotent A -groups.

Theorem 4.19 (Skiba [8]). *Let G be a σ -soluble group.*

(i) *If $G/F_\sigma(G)$ is a σ -nilpotent A -group, then $E^{\mathfrak{A}_\sigma^*}$ is normal in G for every σ -Hall subgroup E of G .*

(ii) *If $E^{\mathfrak{A}_\sigma^*}$ is normal in G for every σ -Hall subgroup and every special σ -Hall subgroup E of G , then $G/F_\sigma(G)$ is a σ -nilpotent A -group.*

Corollary 4.20 (Huppert [24, VI, 3.10 (a)]). *If G' is nilpotent, then E' is normal in G for every Hall subgroup E of G .*

Corollary 4.21 (Inagaki [24, VI, 3.10 (b)]). *If E' is normal in G for every Hall subgroup E of a soluble group G , then G' is nilpotent.*

5 Some σ -permutability properties

The results in Section 2 allow us to prove the following fact.

Theorem 5.1 (Skiba [8]). *Let G be a σ -group, $H = \{H_1, \dots, H_t\}$ a complete Hall set of type σ of G and $\mathcal{L} = \mathcal{H}^G$. Then the set $L_{\mathcal{L}}(G)$ of all \mathcal{L} -permutable subgroups of G forms a sublattice of the lattice of all subgroups of G .*

Corollary 5.2 (Kegel [13]). *The set of all S -permutable subgroups of G forms a sublattice of the lattice of all subgroups of G .*

Theorem 5.3 (Guo and Skiba [28]). *Suppose that G is soluble and it has a complete generalized Wielandt set \mathcal{H} of type σ . Then every subnormal subgroup of G is \mathcal{H} -permutable if and only if*

$G = D \rtimes M$ is a supersoluble group, where $D = G^{\sigma}$ is the σ -nilpotent residual of G , D is an abelian Hall subgroup of G such that $(p-1, |G|) \neq 1$ for every prime p dividing $|D|$ and every element of M induces a power automorphism on D .

In the case when σ is the smallest partition of \mathbb{P} , from Theorem 5.3 we get the following well-known result.

Corollary 5.4 (Agrawal [23]). *A soluble group G is a PST-group if and only if $G = D \rtimes M$ is a supersoluble group, where $D = G^{\sigma}$ is the nilpotent residual of G , D is an abelian Hall subgroup of G of odd order such that every element of M induces a power automorphism on D .*

Since every nilpotent group is a soluble PST-group, we get from Theorem 5.3 and Corollary 5.4 the following new characterization of soluble PST-groups.

Corollary 5.5. *A soluble group G is a PST-group if and only if it has a complete Wielandt set \mathcal{W} such that every subnormal subgroup of G is \mathcal{W} -permutable in G .*

Recall that a normal subgroup E of G is called *hypercyclically embedded* in G (see [25, p. 217]) if every chief factor of G below E is cyclic. Hypercyclically embedded subgroups play important role in the theory of soluble groups (see, for example, [1, 25, 26]). We proved the following result in this line research.

Theorem 5.6 (Guo and Skiba [28]). *Let E be a normal subgroup of G . Suppose that G has a complete Hall \mathfrak{A} -set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ such that the maximal subgroups of $H_i \cap E$ are \mathcal{H} -permutable in G for all i such that $H_i \cap E$ is not cyclic. Then E is hypercyclically embedded in G .*

Corollary 5.7 (Huppert [29], Asaad and Heliel [30]). *If G has a complete set \mathcal{S} of Sylow subgroups such that every subgroup in \mathcal{S} permutes with all maximal subgroups of any member of \mathcal{S} , then G is supersoluble.*

Corollary 5.8. *Let \mathfrak{F} be a solubly saturated formation contained all supersoluble group and E a normal subgroup of G with $G/E \in \mathfrak{F}$. Suppose that G has a complete Hall \mathfrak{A} -set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ such that the maximal subgroups of $H_i \cap E$ permute with all members of \mathcal{H} for all $i = 1, \dots, t$. Then $G \in \mathfrak{F}$.*

Corollary 5.9 (Asaad and Heliel [30]). *Let \mathfrak{F} be a saturated formation contained all supersoluble group and E a normal subgroup of G with $G/E \in \mathfrak{F}$. Suppose that G has a complete set \mathcal{S} of Sylow subgroups such that the maximal subgroups*

of $P_i \cap E$ permute with all members of \mathcal{S} for all $i = 1, \dots, t$. Then $G \in \mathfrak{F}$.

Corollary 5.10 (Guo and Skiba [27]). *Suppose that G has a complete Wielandt set \mathcal{H} such that every maximal subgroup of any non-cyclic subgroup in \mathcal{H} permutes with all other members of \mathcal{H} . Then G is supersoluble.*

Let G be a σ -group. Then we say that a subgroup H of G is σ -permutable in G if G has a complete Hall set \mathcal{H} of type σ such that H is \mathcal{H}^G -permutable in G , that is, $HA = AH$ for all $A \in \mathcal{H}$.

Theorem 5.11 (Skiba [8]). *Let G be a σ -group with $|\sigma(G)| > 2$. If every 2-maximal subgroup of G is σ -permutable in G , then G is σ -nilpotent.*

Corollary 5.12 (See [23] or Theorem 6.5 in [26]). *Let G be a group with $|\pi(G)| > 2$. If every 2-maximal subgroup of G is S -permutable in G , then G is nilpotent.*

6 Final remarks, examples and some open question

1. Let p, q, r, t be distinct primes, $C_p \rtimes C_q$ be a non-abelian group of order pq and C a group of order p . Let $C_p = \langle a \rangle$ and $C = \langle b \rangle$. Let

$$G = C_t \wr ((C_p \rtimes C_q) \times (C \times C_r))$$

and $H = \langle ab \rangle$. Let $\sigma(G) = \{p, q\} \cup \{r, t\}$ and $\mathcal{H} = \{C_p C C_q, K C_r\}$, where K is the base group of the regular wreath product G . Then $K C_r$ is normal in G , so H is \mathcal{H} -permutable in G . On the other hand, H does not permute with C_q^x for each $x \in G$ since $C_q \not\leq C_G(C_p)$. Hence H is not \mathcal{S} -permutable in G for any complete set \mathcal{S} of Sylow subgroups.

2. In [32] (see also Paragraph 3 in [24, VI]), Huppert described the soluble groups in which every complete set of Sylow subgroups forms a Sylow basis of the group. Note, in passing, that if $G = P \rtimes (QR)$, where $|P| = 7$, $|Q| = 3$, $|R| = 2$ and $QR \leq \text{Aut}(P)$, then some complete set of Sylow subgroups is not a Sylow basis of G , but every complete Hall set of type σ , where $\sigma(G) = \{2, 3\} \cup \{7\}$, is clearly a σ -basis of G .

Question 6.1. *What can we say about the σ -soluble group G provided every complete Hall set of type σ of G forms a σ -basis in G ?*

3. In view of Theorem 2.12, the following question seems to be natural.

Question 6.2. *Is it true that every \mathfrak{N}_σ -critical group is σ -soluble?*

4. The full description of groups with subnormal Schmidt subgroups was obtained by V.A. Vedernikov in [33].

Question 6.3. Describe σ -groups in which every \mathfrak{N}_σ -critical subgroup is K - σ -subnormal.

5. Theorem 5.3 and Corollary 5.4 are motivations for our next

Question 6.4. Describe σ -soluble groups G in which σ -permutability is a transitive relation in G .

6. Let \mathcal{H} be a complete Hall set of G . From Theorem 5.1 we know that the set $L_{\mathcal{H}}(G)$ of all \mathcal{H}^G -permutable in G subgroups forms a sublattice of the lattice of all subgroups of G .

Question 6.5. What can we say about the σ -group G with distributive (modular) lattice $L_{\mathcal{H}}(G)$?

7. In view of Theorem 5.6, it seems that the answer to the following question is positive.

Question 6.6. Suppose that G has a complete Hall \mathfrak{S} -set \mathcal{H} such that the maximal subgroups of any member of \mathcal{H} are \mathcal{H} -permutable in G . Is it true then that G is soluble?

8. We do not know the answer to the following

Question 6.7. Is it true that any σ -soluble group contains a σ -Carter subgroup?

9. Recall that a series

$$M_t < \dots < M_2 < M_1 < M_0 = G,$$

where M_{i+1} is a maximal subgroup of M_i for all $i = 0, \dots, t-1$, is said to be a maximal chain of G of length t .

Question 6.8. Describe σ -groups in which every maximal chain of length 3 contains a proper σ -subnormal subgroup.

In the case when σ is the smallest partition of \mathbb{P} the answer to Question 6.8 is known [34].

10. Theorem 2.14 and the results in [17, 35] are the motivations for our next two questions.

Question 6.9. Describe σ -soluble groups G with $|\sigma(G)| = n$ in which every n -maximal subgroup is K - σ -subnormal.

We say that a σ -group G is σ -dispersive provided G has a normal series

$$1 = G_1 < G_2 < \dots < G_{t-1} < G_t = G$$

and a complete Hall set $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ of type σ such that $G_i H_i = G_{i+1}$ for all $i = 1, \dots, t-1$.

Question 6.10. Let G be a σ -soluble group and $|\sigma(G)| = n$. Assume that every $(n+1)$ -maximal subgroup of G is σ -subnormal. Is it true then that G is σ -dispersive?

In the case when σ is the smallest partition of \mathbb{P} the answer to Question 6.10 is positive [17].

REFERENCES

1. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 2010.

2. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow : Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1978.

3. Vorob'ev, N.T. Fitting classes with the given properties of Hall subgroups / N.T. Vorob'ev, V.N. Zagurski // Math. Zametki. – 2005. – № 2. – P. 234–240.

4. Shemetkov, L.A. Multiply ω -local formations and Fitting classes of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Siberian Advances in Mathematics. – 2000. – № 2. – P. 114–147.

5. Skiba, A.N. Algebra of formations / A.N. Skiba. – Minsk : Belaruskaja Navuka, 1997.

6. Skiba, A.N. On Boolean lattices of n -multiply local Fitting classes / A.N. Skiba, N.N. Vorobyev // Siberian Math. Zh. – 1999. – № 3. – P. 523–530.

7. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer-Verlag, 2006.

8. Skiba, A.N. On σ -properties of finite groups / A.N. Skiba. – Preprint, 2013.

9. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1992.

10. Kegel, O.H. Untergruppen verbande endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. (Basel). – 1978. – № 3. – P. 225–228.

11. Vasilyev, A.F. On lattices of subgroups of finite groups / A.F. Vasilyev, S.F. Kamornikov, V.N. Semenchuk // S.N. Chernukov, editor, Infinite groups and related algebraic structures, 27–54, Kiev. – Institut Matematiki AN Ukraini, 1993.

12. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York–Evanston–London : Harper & Row Publishers, 1968.

13. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen and Subnormalteilerendlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – P. 205–221.

14. Deskins, W. On quasinormal subgroups of finite groups / W. Deskins // Math. Z. – 1963. – P. 125–132.

15. Semenchuk, V.N. Finite groups with a system of minimal non- \mathfrak{F} -groups / V.N. Semenchuk // Subgroup structure of finite groups. – Minsk : Nauka i tehnika. – 1981. – P. 138–139.

16. Monakhov, V.S. On finite groups with some subnormal Schmidt subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Knyagina // Siberian Math. Zh. – 2004. – № 6. – P. 1316–1322.

17. Mann, A. Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – P. 395–409.

18. Huppert, B. Finite Groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin, New-York : Springer-Verlag, 1982.

19. Shemetkov, L.A. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow :

Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1989.

20. *Murashko, V.I.* On one generalization of Baer's theorems about hypercenter and nilpotent residual / V.I. Murashko // *Problems of Physics, Mathematics and Technics.* – 2013. – № 16. – P. 4–88.

21. *Vedernikov, V.A.* On π -properties of finite groups / V.A. Vedernikov // In “Arithmetic and Subgroup Structure of Finite Groups”. – Mn. : Nauka i Tehnika, 1986. – P. 13–19.

22. *Gritsuk, D.V.* About maximal subgroups of a finite solvable group / D.V. Gritsuk, V.S. Monakhov // *Eurasian Math. J.* – 2012. – № 2. – P. 129–134.

23. *Agrawal, R.K.* Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups / R.K. Agrawal // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1975. – P. 77–83.

24. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1967.

25. *Schmidt, R.* Subgroup lattices of groups / R. Schmid. – Berlin : Walter de Gruyter, 1994.

26. *Between Nilpotent and Solvable* / M. Weinstein (ed.) [et al.]. – Passaic N. J. : Polygonal Publishing House, 1982.

27. *Guo, W.* Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo,

A.N. Skiba // *J. Group Theory.* – DOI :10.1515/jgth-2014-0045.

28. *Guo, W.* Finite groups with \mathcal{H} -permutable subgroups / W. Guo, A.N. Skiba. – Preprint, 2014.

29. *Huppert, B.* Zur Sylow struktur Auflösbarer Gruppen / B. Huppert // *Arch. Math.* – 1961. – P. 161–169.

30. *Asaad, M.* On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A.A. Heliel // *Arch. Math.* – 2003. – P. 113–118.

31. *Agrawal, R.K.* Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1976. – P. 13–21.

32. *Huppert, B.* Zur Sylow struktur Auflösbarer Gruppen, II. / B. Huppert // *Arch. Math.* – 1964. – P. 251–257.

33. *Vedernikov, V.A.* Finite groups with subnormal Schmidt subgroups / V.A. Vedernikov // *Algebra and Logica.* – 2007. – № 6. – P. 669–687.

34. *Andreeva, D.P.* Finite groups of Spencer height ≤ 3 / D.P. Andreeva, W. Guo, A.N. Skiba // *Algebra Colloquium.* – 2014.

35. *Kovaleva, V.A.* Finite soluble groups with all n -maximal subgroups \mathfrak{F} -subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // *J. Group Theory.* – 2014. – № 17. – P. 273–290.

Поступила в редакцию 14.09.14.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С МИНИМАЛЬНЫМИ \mathbb{P} -СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Тютянов¹, П.В. Бычков²

¹Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON FINITE GROUPS WITH MINIMAL \mathbb{P} -SUBNORMAL SUBGROUPS

V.N. Tyutyaynov¹, P.V. Bychkov²

¹Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus

²F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Определены композиционные факторы конечной группы, у которой любая минимальная подгруппа \mathbb{P} -субнормальна.

Ключевые слова: группа, подгруппа, минимальная подгруппа, \mathbb{P} -субнормальная подгруппа.

Composition factors of finite groups in which each minimal subgroup is \mathbb{P} -subnormal were defined.

Keywords: group, subgroup, minimal subgroup, \mathbb{P} -subnormal subgroup.

Введение

В статье рассматриваются только конечные группы. В работе [1] было введено следующее

Определение. Подгруппа H группы G называется \mathbb{P} -субнормальной в G (обозначается через $H \mathbb{P}\text{-sn } G$), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

Естественно рассмотреть вопрос о строении конечной группы с заданной системой \mathbb{P} -субнормальных подгрупп. Так, в [1] было установлено строение групп, у которых все силовские подгруппы \mathbb{P} -субнормальны.

А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов в работе [2] поставили следующую задачу: описать группы G , у которых минимальные подгруппы (примарные циклические подгруппы) \mathbb{P} -субнормальны в G .

В.С. Монахов и В.Н. Княгина [3] описали строение групп, у которых все циклические примарные подгруппы \mathbb{P} -субнормальны. В частности, показано, что такие группы разрешимы.

В настоящей статье мы рассмотрим вопрос о строении конечной группы с минимальными \mathbb{P} -субнормальными подгруппами.

1 Предварительные результаты

Определения и обозначения в основном стандартны. Их можно найти в [4], [5].

Введем обозначения $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G ; $S(G)$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G .

Нам потребуются следующие результаты.

Лемма 1.1. [6, лемма 3.1] Пусть H – подгруппа группы G , N – нормальная подгруппа группы G . Тогда, если $H \mathbb{P}\text{-sn } G$, то $(H \cap N) \mathbb{P}\text{-sn } N$ и $HN/N \mathbb{P}\text{-sn } G/N$.

В [7, теорема 6] показано, что если единичная подгруппа группы G является \mathbb{P} -субнормальной в G , то простые неабелевы факторы группы G принадлежат списку: $SL_3(3)$, $SL_3(5)$, $PSL_2(q)$ для некоторого значения параметра $q \geq 4$. Приведем более точную формулировку теоремы 6 Л.С. Казарина из работы [7].

Лемма 1.2. Пусть G – простая неабелева группа и $1 \mathbb{P}\text{-sn } G$. Тогда

$$G \in \{SL_3(3); SL_3(5); PSL_2(7); PSL_2(11); SL_2(2^n)\},$$

где $2^n + 1 = p$ – простое число}.

Доказательство. Из [8] следует, что если $G \cong SL_3(3)$ или $G \cong SL_3(5)$, то $1 \mathbb{P}\text{-sn } G$. Рассмотрим случай когда $G \cong PSL_2(q)$. По теореме II.8.27 [4] максимальными подгруппами M простого индекса в G могут быть A_4 , S_4 , A_5 и борелевская подгруппа порядка $\varepsilon^{-1}q(q-1)$, где $\varepsilon = (2, q-1)$.

Если $M \cong A_4$, то $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot t$, где t – простое число и $t \notin \{2, 3\}$. Так как $|\pi(G)| = 3$, то из [9, с. 20] следует, что

$$G \in \{PSL_2(2^2), PSL_2(3^2),$$

$$PSL_2(7), PSL_2(2^3), PSL_2(17)\}.$$

Очевидно, что только группа $PSL_2(2^2)$ имеет максимальную подгруппу простого индекса, изоморфную A_4 . Так как $2^2 + 1 = 5$ – простое число

Ферма, то $PSL_2(2^2)$ содержится в списке групп леммы 1.1. Ясно, что $1 \mathbb{P}$ -*sn* $PSL_2(2^2)$.

Если $M \cong S_4$, то как и в предыдущем пункте показывается, что $G \cong PSL_2(7)$. Очевидно, что $1 \mathbb{P}$ -*sn* $PSL_2(7)$.

Пусть $M \cong A_5$. Так как простая неабелева группа не содержит подгрупп индекса 2 и 3, то

$$|G| \in \{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t,$$

где t – простое число и $t \notin \{2, 3, 5\}$.

Из [3, с. 20] следует, что не существует простых неабелевых групп порядка $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Значит

$$|G| = |PSL_2(q)| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t \text{ и } G \cong PSL_2(t).$$

Поэтому $\frac{1}{2}t(t^2 - 1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t$, а значит $t = 11$.

Следовательно, $G \cong PSL_2(11)$ и, очевидно, $1 \mathbb{P}$ -*sn* $PSL_2(11)$.

Пусть M – борелевская подгруппа. Тогда $|G : M| = q + 1$ – простое число. Поэтому $q = 2^n$ и $G \cong PSL_2(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма. При этом $1 \mathbb{P}$ -*sn* $PSL_2(11)$.

Список групп, приведенных в лемме 1.2, будем обозначать \mathfrak{R} .

Лемма 1.3. Пусть G – конечная группа и $1 \mathbb{P}$ -*sn* G , тогда любой неабелев композиционный фактор группы G принадлежит \mathfrak{R} .

Доказательство. Следует индукцией из леммы 1.1 и леммы 1.2.

Лемма 1.4 [10, теорема 1]. Пусть G – конечная группа, $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_k\}$ есть множество простых делителей ее порядка $|G|$ и b_1, \dots, b_k – неотрицательные целые числа. Тогда существует конечная группа K и ее нормальная подгруппа $N \triangleleft K$ такие, что

- (1) N абелева и $K/N \cong G$;
- (2) $\pi(K) = \pi(G)$;
- (3) любой элемент из K порядка p_i^c , где $1 \leq i \leq k$ и $0 \leq c \leq b_i$, лежит в N .

2 Доказательство основной теоремы

Теорема 2.1. Пусть G – конечная неразрешимая группа, $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_k\}$ есть множество простых делителей ее порядка и b_1, \dots, b_k – положительные целые числа. Предположим, что всякая циклическая примарная подгруппа группы G порядка p_i^c $0 \leq c \leq b_i$ \mathbb{P} -субнормальна в G . Тогда $S(G) \neq 1$ и любой неабелев композиционный фактор группы G принадлежит \mathfrak{R} .

Доказательство. Отметим, что $1 \mathbb{P}$ -*sn* G . Пусть G – минимальный контрпример к теореме.

Предположим, что G – простая неабелева группа. Так как по условию теоремы группа G содержит подгруппу простого индекса p , то G изоморфно вкладывается в симметрическую группу подстановок S_p и $p = \max \pi(G)$. Очевидно, силовская p -подгруппа группы G имеет порядок p , а значит является \mathbb{P} -субнормальной в G . Следовательно, группа G имеет подгруппу простого индекса $r \neq p$ и $r = \max \pi(G)$. Противоречие с тем, что $\max \pi(G) = p$.

Таким образом, G не является простой неабелевой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Если N является неразрешимой группой, то $N = N_1 \times \dots \times N_r$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Из леммы 1.1 получим, что N удовлетворяет условию теоремы, поэтому $S(N) \neq 1$, что невозможно. Таким образом, $S(G) \neq 1$.

Рассмотрим фактор-группу $\bar{G} = G/S(G)$. По лемме 1.1 единичная подгруппа группы \bar{G} \mathbb{P} -субнормальна в \bar{G} . Поэтому из леммы 1.3 следует, что неабелевы композиционные факторы группы \bar{G} содержатся в \mathfrak{R} . Следовательно, неабелевы композиционные факторы группы G содержатся в \mathfrak{R} . Это завершает доказательство теоремы.

Замечание. Если в условии леммы 1.4 положить $G \in \mathfrak{R}$, b_1, \dots, b_k – положительные числа, тогда K из леммы 1.4 удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Поэтому все группы из \mathfrak{R} могут быть композиционными факторами неразрешимых групп из теоремы 2.1.

Если в условиях теоремы 2.1 положим $b_1 = \dots = b_k = 1$, то получим решение вопроса 2 [2] для неразрешимых групп.

Теорема 2.2. Пусть G – конечная неразрешимая группа, у которой любая минимальная подгруппа \mathbb{P} -субнормальна в G . Тогда $S(G) \neq 1$ и любой неабелев композиционный фактор группы G принадлежит \mathfrak{R} .

Из леммы 1.4 (смотри замечание) следует, что разрешимые группы с минимальными \mathbb{P} -субнормальными подгруппами не имеют хорошего описания (сверхразрешимость, w -сверхразрешимость и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, №6. – С. 1270–1281.

2. Васильев, А.Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.

3. *Kniahina, V.N.* Finite groups with \mathbb{P} -subnormal primary cyclic subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // arXiv: 1110.4720 v1 [math. GR] 210 ст. – 2011. – P. 15.
4. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert – Berlin : Springer, 1967. – 795 p.
5. *Gorenstein, D.* Finite groups / D. Gorenstein – New-York : Harper and Row, 1968. – 527 p.
6. *Васильев А.Ф.* О произведениях \mathbb{P} -субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.
7. *Казарин, Л.С.* О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26.
8. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.] // Oxford, 1985. – 252 p.
9. *Горестейн, Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горестейн. – М. : Мир. – 1985. – 352 с.
10. *Буриченко В.П.* О группах, элементы малых порядков которых порождают малую подгруппу / В.П. Буриченко // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92, № 3. – С. 361–367.

Поступила в редакцию 24.06.14.

УДК 512.542

О p -СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ С ПРИМАРНЫМИ ИНДЕКСАМИ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

И.К. Чирик

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель, Беларусь

ON p -SUPERSOLUBILITY OF A FINITE FACTORIZED GROUP WITH PRIME INDEXES OF FACTORS

I.K. Chirik

Gomel Engineering Institute of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Gomel, Belarus

Найдены достаточные условия p -сверхразрешимости конечной группы $G = AB$ с циклическими силовскими p -подгруппами в A и в B . В частности, доказана сверхразрешимость конечной группы $G = AB$ при условии, что все силовские подгруппы в A и в B циклические, а индексы подгрупп A и B в группе G примарны.

Ключевые слова: конечная группа, p -сверхразрешимая группа, p -разрешимая группа.

Sufficient conditions for p -supersolubility of a finite group $G = AB$, where A and B have cyclic Sylow p -subgroups are received. In particular, the supersolubility of a finite group $G = AB$ providing that all Sylow subgroups of A and B are cyclic, and the indexes of A and B in the group G are prime is proved.

Keywords: finite group, p -supersoluble group, p -solvable group.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1]–[2].

Пусть p – простое число. Группа называется p -разрешимой, если порядки ее главных факторов либо являются степенью p , либо не делятся на p . Группа называется p -сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов либо равны p , либо не делятся на p .

Следуя [3] группу с циклической силовской p -подгруппой будем называть z_p -группой, а z -группой – группу, у которой все силовские подгруппы циклические.

Группы, факторизуемые z_p -подгруппами, изучались в работах [3]–[7]. Я.Г. Беркович [3] установил p -сверхразрешимость группы $G = AB$ нечетного порядка при условии, что A и B – z_p -подгруппы. Отсюда вытекает сверхразрешимость группы $G = AB$ нечетного порядка, если A и B – z -подгруппы.

Для групп четного порядка аналогичные результаты неверны. Для фиксированного простого p первые примеры не p -сверхразрешимых разрешимых групп $G = AB$ четного порядка с циклическими силовскими p -подгруппами в A и в B привел В.Д. Мазуров. Кроме того, он доказал непрототу группы $G = AB$ при условии, что A и B – z -подгруппы [4]. Такая группа может быть неразрешимой, примером служит группа $\text{PGL}(2, 5)$.

В.Д. Черток [5] доказал p -сверхразрешимость группы $G = AB$ при условии, что A и B – p -разложимые z_p -подгруппы. В.С. Монахов [6] установил 3-сверхразрешимость 3-разрешимой группы $G = AB$ при условии, что силовские 2-подгруппы и 3-подгруппы в A и в B циклические.

В данной работе устанавливаются новые признаки p -сверхразрешимости факторизуемой группы $G = AB$ четного порядка с циклическими силовскими p -подгруппами в сомножителях A и B . В частности, доказывается сверхразрешимость группы $G = AB$ при условии, что все силовские подгруппы в A и в B циклические, а индексы подгрупп A и B в группе G примарны.

1 Вспомогательные результаты

Примарное число – это число, являющееся степенью некоторого простого числа. Пусть p – простое число. Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой, а группа с нормальной p' -холловой подгруппой называется p -нильпотентной. Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G , а $H < G$ будет использоваться в случае, когда $H \leq G$ и $H \neq G$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G . Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так: $G = [A]B$. Конечную группу называют бициклической, если она является произведением двух циклических подгрупп.

Через $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G ; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n ; Z_m и E_{p^t} – циклическая и элементарная абелева группы порядков m и p^t ; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в группе G p - и p' -подгруппы; через $p\mathfrak{U}$ обозначим класс всех p -сверхразрешимых групп; $l_p(G)$ – p -длина p -разрешимой группы G .

Лемма 1.1.

1. Класс $p\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией.
2. Если $G/O_{p'}(G) \in p\mathfrak{U}$, то $G \in p\mathfrak{U}$.
3. Если Z – циклическая нормальная в G подгруппа и $G/Z \in p\mathfrak{U}$, то $G \in p\mathfrak{U}$.

Доказательство. Утверждение 1 хорошо известно [8, с. 35]. Утверждения 2 и 3 просто проверяются по определению p -сверхразрешимой группы.

Лемма 1.2. *Предположим, что p -разрешимая группа G не принадлежит $p\mathfrak{U}$, но $G/K \in p\mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K . Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$.
2. Группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N ,
 $N = O_p(G) = C_G(N)$.
3. G – примитивная группа; если M – примитиватор группы G , то $G = [N]M$.
4. N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$.
5. Если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.

Доказательство. 1. Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то по условию леммы $G/O_{p'}(G) \in p\mathfrak{U}$. Из определения p -сверхразрешимой группы следует, что $G \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по условию $G/\Phi(G) \in p\mathfrak{U}$, а поскольку $p\mathfrak{U}$ – насыщенная формация, то $G \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Значит $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$.

2. Если в группе G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 , то $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию $G/N_1 \in p\mathfrak{U}$, $G/N_2 \in p\mathfrak{U}$, а поскольку $p\mathfrak{U}$ – формация, то $G \cong G/(N_1 \cap N_2) \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Значит, группа G содержит единственную минимальную

нормальную подгруппу N . В p -разрешимой группе каждая минимальная нормальная подгруппа является либо p' -подгруппой, либо абелевой p -подгруппой. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то N будет p -подгруппой. В группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает с произведением всех абелевых минимальных нормальных подгрупп [1, теорема 4.24], поэтому $N = F(G) = O_p(G)$. Из [9, лемма 2] получаем, что $N = C_G(N)$.

3. Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M , не содержащая подгруппу N . Ясно, что $G = MN$. Если $Core_G M \neq 1$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что $N \subseteq Core_G M$, $G = MN = M$, противоречие. Поэтому $Core_G M = 1$ и G – примитивная группа с примитиватором M . Из того, что N – минимальная нормальная в G подгруппа и $G = NM$ следует, что $N \cap M = 1$ и $G = [N]M$.

4. Поскольку G – p -разрешимая группа и $O_{p'}(G) = 1$, то N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n и $n > 1$ по лемме 1.1 (3)).

5. Предположим, что подгруппа M абелева. Так как N – минимальная нормальная в G подгруппа, то M действует неприводимо на N . По [8, лемма 4.1] подгруппа M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$. Лемма доказана.

Примитивные группы со сверхразрешимым примитиватором изучены в [10].

Лемма 1.3 [2, П.8.17]. *Пусть G – группа порядка 12 или 24. Если группа G имеет элементарную абелеву нормальную подгруппу N порядка 4 и $C_G(N) = N$, то $G \cong A_4$ или $G \cong S_4$.*

Лемма 1.4 [11, лемма 2]. *Для p -разрешимой группы G с бициклической силовой p -подгруппой справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $p = 2$, то $G/O_{2,2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3 . В частности, $l_2(G) \leq 2$;
- 2) если $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$.

Лемма 1.5. *Если группа G является p -разрешимой и z_p -группой, то G – p -сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы. В p -разрешимой группе каждая минимальная нормальная подгруппа N либо p' -подгруппа, либо является элементарной абелевой p -подгруппой. Если N – p' -подгруппа, то G/N по индукции p -сверхразрешима, значит и G p -сверхразрешима. Если N – элементарная

абелева p -подгруппа, то N имеет простой порядок, так как силовская в G циклическая. По индукции G/N p -сверхразрешима по индукции. Отсюда G p -сверхразрешима.

Лемма 1.6. Если группа G является p -сверхразрешимой для любого $p \in \pi(G)$, то G – сверхразрешимая группа.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G и $r \in \pi(N)$. Так как G является r -сверхразрешимой, то $|N| = r$. По индукции фактор-группа G/N сверхразрешима. Следовательно, G – сверхразрешимая группа.

Лемма 1.7 [12, теорема 1]. Пусть G – простая неабелева группа, $H < G$ и $|G:H| = p^a$, где p – простое число. Тогда имеет место одно из следующих утверждений.

1. $G \cong A_n$, $p^a = n$.
2. $G \cong \text{PSL}(r, q)$, $p^a = \frac{q-1}{q-1}$ и r – простое число.
3. $G \cong \text{PSL}(2, 11)$, $p^a = 11$.
4. $G \cong M_{23}$, $p^a = 23$.
5. $G \cong M_{11}$, $p^a = 11$.
6. $G \cong \text{PSp}(4, 3)$, $p^a = 27$.

В частности, только $\text{PSL}(2, 7)$ имеет подгруппы двух различных примарных индексов.

Лемма 1.8. Если $U \leq V \leq X$ и L – субнормальная подгруппа в группе X , то $|V \cap L : U \cap L|$ делит $|V : U|$.

Доказательство. В [13, лемма 4] доказано следующее утверждение: если H – подгруппа группы G , то $|K : K \cap H|$ делит $|G : H|$ для каждой субнормальной в G подгруппы K . Применяя это утверждение при $G = V$, $H = U$, $K = V \cap L$, получаем, что $|V \cap L : U \cap L|$ делит $|V : U|$.

2 Критерии p -сверхразрешимости

Теорема 2.1. Пусть G – группа, $p, r \in \pi(G)$, и R – силовская r -подгруппа из G . Если существуют p -разрешимые z_p -подгруппы A и B такие, что

$$G = AB = AR = BR,$$

то группа G p -сверхразрешима.

Доказательство. Вначале докажем, что G p -разрешима. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Из факторизаций $G = AR = BR$ следует, что индексы подгрупп A и B в группе G являются степенями простого числа r . Пусть $|G : A| = r^a$, $|G : B| = r^b$. Поскольку $G = AB$, то

$$|G| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$$

и справедливы равенства:

$$r^a = |G : A| = |B : A \cap B|, |B| = r^a |A \cap B|,$$

$$r^b = |G : B| = |A : A \cap B|, |A| = r^b |A \cap B|,$$

$$|G : A \cap B| = |G : A| \cdot |A : A \cap B| = r^{a+b},$$

$$|G| = r^{a+b} |A \cap B|.$$

Так как $a \neq 0 \neq b$, то группа G содержит подгруппы индексов r^a и $r^{a+b} > r^a$. По лемме 1.7 группа G непростая.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в группе G . Тогда фактор-группа

$$\begin{aligned} G/N &= (AN/N) \cdot (BN/N) = \\ &= (AN/N) \cdot (RN/N) = \\ &= (BN/N) \cdot (RN/N) \end{aligned}$$

удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы и G/N p -сверхразрешима по индукции. Поэтому подгруппу N следует считать не p -разрешимой,

$$N = N_1 \times \dots \times N_k,$$

где N_i – изоморфные простые неабелевы подгруппы. Так как подгруппы A и B p -разрешимы, то N_1 не содержится в A и N_1 не содержится в B , т. е.

$$|N_1 : N_1 \cap A| \neq 1 \neq |N_1 : N_1 \cap B|.$$

Применяя лемму 1.8 к подгруппам $X = A$, $Y = G$ и субнормальной подгруппы N_1 , получим, что $|N_1 : N_1 \cap A|$ делит $|G : A| = r^a$, поэтому $|N_1 : N_1 \cap A| = r^m \neq 1$.

Рассмотрим цепочку подгрупп

$$A \cap B < A < G, |G : A| = r^a,$$

$$|A : A \cap B| = r^b,$$

и применим лемму 1.8 к подгруппам $X = A \cap B$, $Y = A$ и субнормальной подгруппы N_1 . Имеем:

$$|N_1 \cap A : N_1 \cap A \cap B| = r^n, \quad 0 \leq n \leq b.$$

Если $n > 0$, то

$$|N_1 : N_1 \cap A \cap B| = r^{m+n} > r^m$$

и N_1 содержит две подгруппы $N_1 \cap A$ и $N_1 \cap A \cap B$ различных примарных индексов r^m и $r^{m+n} > r^m$. Но это невозможно ввиду леммы 1.7. Следовательно, $n = 0$ и

$$N_1 \cap A \cap B = N_1 \cap A.$$

Аналогично,

$$N_1 \cap A \cap B = N_1 \cap B, N_1 \cap A = N_1 \cap B.$$

Так как $N_1 \cap A$ субнормальна в A и $N_1 \cap B$ субнормальна в B , то $N_1 \cap A$ субнормальна в G [14, 7.7.1]. Но подгруппа N_1 простая, поэтому $N_1 \cap A = 1$ и $|N_1| = r^m$. Противоречие с тем, что N не является p -разрешимой. Итак, группа с рассматриваемой факторизацией всегда p -разрешима.

Теперь покажем, что G p -сверхразрешима. Применим индукцию по порядку группы. Пусть $N \neq 1$ – нормальная в группе G подгруппа. Так как фактор-группа G/N удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы, то G/N p -сверхразрешима по индукции и из леммы 1.2 следует, что

$$O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1,$$

$$N = O_p(G) = F(G) = C_G(N),$$

где N – единственная минимальная нормальная в G подгруппой и N не будет циклической по лемме 1.1.

По [2, VI.4.6] существует силовская p -подгруппа G_p группы G , которая является произведением некоторых силовских p -подгрупп A_p и B_p из A и B , поэтому $G_p = A_p B_p$ бициклическая.

Если $p \neq r$, то из факторизации $G = AR = BR$ следует, что $G_p = A_p = B_p$ – циклическая и по лемме 1.5 группа G p -сверхразрешима.

Поэтому $p = r$ и можно считать, что $R = G_p = A_p B_p$. Так как G p -разрешима, то она является $D_{p'}$ -группой [2, VI.1.7]. Согласно [2, VI.4.6] существует p' -холлова подгруппа $G_{p'}$ группы G , которая является произведением некоторых p' -холловых подгрупп $A_{p'}$ и $B_{p'}$ из A и B . Пусть $p^a = |R|$, $m = |G_{p'}|$. Тогда

$$|G| = p^a m = \frac{|A||R|}{|A \cap R|} = \frac{|B||R|}{|B \cap R|},$$

$$m = \frac{|A|}{|A \cap R|} = \frac{|B|}{|B \cap R|},$$

т. е. m делит $|A|$ и m делит $|B|$. Поэтому

$$m = |A_{p'}| = |B_{p'}| = |G_{p'}|,$$

$$A_{p'} = B_{p'} = G_{p'},$$

значит $G_{p'} \leq A \cap B$. Кроме того, $G = AB_p = A_p B$ и $N \leq G_p = A_p B_p$.

Предположим, что $I_p(G) = 1$. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то G_p нормальна в G . Подгруппа $N = O_p(G)$, поэтому $N = G_p$. Поскольку подгруппа G_p бициклическая, то N будет элементарной абелевой подгруппой порядка p^2 . Теперь подгруппа A p -замкнута, а поскольку $G = AB_p$, то $N = A_p$ нормальна в G , что противоречит тому, что N нециклическая.

Остается случай, когда $I_p(G) > 1$. Так как $G_p = A_p B_p$ бициклическая, то $p = 2$ и $G/N \cong S_3$ по лемме 1.4. Кроме того, подгруппа N дополняема в G и $|N| = 4$ по [11]. Теперь $G \cong S_4$ по

лемме 1.3. Все факторизации группы S_4 известны, среди них нет требуемой. Теорема доказана.

Замечание 2.1. При установлении p -разрешимости группы в теореме 2.1 использовалась теорема из [12], доказательство которой основывается на классификации конечных простых групп.

Следствие 2.1. Пусть A и B – z_p -подгруппы p -разрешимой группы G и $G = AB$. Если индексы в группе G подгрупп A и B примарны, то G p -сверхразрешима.

Доказательство. Пусть

$$|G : A| = r^a, |G : B| = q^b, r, q \in \pi(G).$$

Если $r = q$, то $G = AB = AR = BR$, где R – силовская r -подгруппа группы G и G p -сверхразрешима по теореме 2.1.

Пусть $r \neq q$. Тогда либо $p \neq r$, либо $p \neq q$.

Если $p \neq r$, то $A_p = G_p$ циклическая и по лемме 1.5 группа G p -сверхразрешима. Если $p \neq q$, то $B_p = G_p$ циклическая и опять по лемме 1.5 группа G p -сверхразрешима.

Следствие 2.2. Пусть A и B – z -подгруппы группы G и $G = AB$. Если индексы в группе G подгрупп A и B примарны, то группа G сверхразрешима.

Доказательство. Вначале покажем, что группа разрешима. Пусть

$$|G : A| = r^a, |G : B| = q^b, r, q \in \pi(G).$$

Если $r \neq 2$ или $q \neq 2$, то $G_2 \leq A$ или $G_2 \leq B$, подгруппа G_2 циклическая и группа G 2-нильпотентна [2, IV.2.8]. Поэтому считаем $r = 2 = q$. Теперь $G_2 \leq A \cap B$. Подгруппы A и B сверхразрешимы [2, IV.2.11], поэтому они 2-нильпотентны [2, VI.9.1]. Следовательно, подгруппа G_2 нормальна в A и нормальна в B . Теперь G_2 нормальна в G и G разрешима.

Итак, разрешимость группы G установлена. По следствию 2.1 группа G p -сверхразрешима для любого $p \in \pi(G)$. Из леммы 1.6 получаем, что группа G сверхразрешима.

Замечание 2.2. При получении следствий 2.1 и 2.2 классификация конечных простых групп не используется.

Пример 2.1. В теореме 2.1 требование « A и B – z_p -подгруппы» нельзя ослабить до требования « A и B p -сверхразрешимы». Примером служит группа [324, 160] из библиотеки AllSmallGroups [15]. Она не 3-сверхразрешима и обладает факторизацией

$$G = A_4 \cdot ([E_3]E_4), |G : A_4| = 3^3, |G : [E_3]E_4| = 3,$$

в которой подгруппы A_4 и $[E_3]E_4$ 3-сверхразрешимы.

Пример 2.2. В условиях теоремы 2.1 индексы подгрупп A и B являются степенями одного простого числа. Это требование нельзя ослабить до требования « A и B имеют примарные индексы». Примером служит простая группа

$$\text{PSL}(2,7) = ([Z_7]Z_3) \cdot S_4.$$

В этой факторизации сомножители $[Z_7]Z_3$ и S_4 являются z_p -подгруппами при $p = 3$, их индексы равны 2^3 и 7 .

Пример 2.3. Разрешимая группа

$$G = AB = AR = BR$$

с z_p -подгруппами A , B и R может быть не p -сверхразрешимой. Примером служит группа $G = [E_{3^2}]Q$ [1, с. 159], где Q – группа кватернионов порядка 8. Пусть

$$E_{3^2} = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}_5\} = \langle(1,0)\rangle \oplus \langle(0,1)\rangle$$

– аддитивная элементарная абелева группа порядка 5^2 , Q – мультипликативная группа кватернионов порядка 8:

$$Q = \langle U, V \mid U^4 = V^4 = E, U^2 = V^2, V^{-1}UV = U^{-1} \rangle,$$

где U , V и W – матрицы над полем \mathbb{Z}_5 :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad UV = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку группа Q содержится в $SL(2, \mathbb{Z}_5)$, то в силу [1, 2.50] она является группой автоморфизмов для E_{3^2} . По [1, 2.47], существует группа $G = [E_{3^2}]Q$, она имеет порядок 200, а её подгруппы

$$A = [\langle(1,0)\rangle] \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$B = [\langle(1,2)\rangle] \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$R = [\langle(1,1)\rangle] \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

являются z_5 -подгруппами. Ясно, что $G = AB = AR = BR$, но группа G не является 5-сверхразрешимой [1, с. 160].

Пример 2.4. В следствии 2.1 требование p -разрешимость группы убрать нельзя. Примером служит группа $G = A_5^{(1)} \times A_5^{(2)}$ при $p = 5$, она допускает факторизацию $G = HK$, где $H = A_5^{(1)} \times A_4^{(2)}$ и $|G:H| = 5$, $K = A_4^{(1)} \times A_5^{(2)}$ и $|G:K| = 5$. Здесь H и K – z_5 -подгруппы их индексы примарны, но G не 5-разрешима.

Пример 2.5. В следствиях 2.1 и 2.2 требование примарности индексов сомножителей ослабить нельзя. Примером служит разрешимая группа $S_4 = Z_4 \cdot S_3$. Она несверхразрешима и

является произведением z -подгрупп Z_4 и S_3 индексов 6 и 4.

Теорема 2.2. Пусть A и B – z_p -подгруппы группы G и $G = AB$. Если в группе G существует абелева p' -холлова подгруппа, то группа G p -сверхразрешима.

Доказательство. Поскольку в группе G существует абелева p' -холлова подгруппа $G_{p'}$ и $G = G_p G_{p'}$, то G разрешима по теореме Виландта – Кегеля [2, VI.4.3].

Применим индукцию по порядку группы. Пусть $N \neq 1$ – нормальная в группе G подгруппа. Тогда фактор-группа

$$G/N = (AN/N) \cdot (BN/N)$$

удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы и G/N p -сверхразрешима по индукции. Из леммы 1.2 следует, что

$$O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1,$$

$$N = O_p(G) = F(G) = C_G(N),$$

N – единственная минимальная нормальная в G подгруппа и $G = [N]M$ для некоторой максимальной подгруппы M . По [2, VI.4.6] силовская p -подгруппа G_p группы G является произведением некоторых силовских p -подгрупп A_p и B_p из A и B , поэтому $G_p = A_p B_p$ бициклическая.

Если $l_p(G) > 1$, то из леммы 1.4 следует, что $p = 2$ и $M \cong S_3$. Кроме того, подгруппа N дополняема в G и $|N| = 4$ по [11, лемма 1]. По лемме 1.3 группа $G \cong S_4$, которая не обладает требуемой факторизацией, противоречие. Следовательно, $l_p(G) = 1$. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то G_p нормальна в G . Подгруппа $N = O_p(G)$, поэтому $N = G_p$. Поскольку подгруппа G_p бициклическая, то $N = G_p$ будет элементарной абелевой подгруппой порядка p^2 . Подгруппа M становится p' -холловой подгруппой группы G . Так как $N = G_p$ – минимальная нормальная в G подгруппа, то M циклическая [2, V.4.3].

Из факторизации $G = AB$, следует, что $M = HK$, где H и K некоторые p' -холловы подгруппы из A и B . Ясно, что $N \cap A = \langle a \rangle$, $H = \langle x \rangle$, и

$$A = \langle a, x \mid a^p = x^n = 1, a^x = a^\alpha, (n, p) = 1, 1 \leq \alpha < p \rangle.$$

Аналогично, $N \cap B = \langle b \rangle$, $K = \langle y \rangle$, и

$$B = \langle b, y \mid b^p = y^m = 1, b^y = b^\beta, (m, p) = 1, 1 \leq \beta < p \rangle.$$

Поскольку $N = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, то можно утверждать, что

$$a^y = a^{m_1} b^{n_1}, \quad b^x = a^{m_2} b^{n_2},$$

для некоторых целых n_1, n_2, m_1, m_2 . Теперь

$$a^{xy} = a^{\alpha y} = a^{y\alpha} = a^{m_1\alpha} b^{n_1\alpha},$$

$$a^{yx} = (a^{m_1} b^{n_1})^x = a^{xm_1} b^{xn_1} = a^{\alpha m_1} (a^{m_2} b^{n_2})^{n_1}.$$

Поскольку НК циклическая, то $xy = yx$ и $b^{n_1\alpha} = a^{n_1 m_2} b^{n_1 n_2}$. Поэтому

$$a^{n_1 m_2} = 1, \quad n_1 m_2 = pt, \quad t \in N.$$

Если $n_1 = pt_1$, то $a^y = a^{m_1} b^{n_1} = a^{m_1}$ и подгруппа $\langle a \rangle = N \cap A$ нормальна в G , противоречие. Если $m_2 = pt_2$, то $b^x = a^{m_2} b^{n_2} = b^{n_2}$ и подгруппа $\langle b \rangle = N \cap B = N_2$ нормальна в G , противоречие. Итак, теорема доказана.

Пример 2.6. В условиях теоремы 2.2 условие абелевости p' -холловой подгруппы нельзя ослабить до нильпотентности. Примером при $p = 5$ служит группа $G = [E_{5^2}]Q$ из примера 2.5.

Замечание 2.3. Разрешимая не p -сверхразрешимая группа, факторизуемая z_p -подгруппами, имеет p -ранг 2 при нечетном p и 2-ранг 2 или 3. Такие группы изучены в [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Высшая школа, 2006. – 207с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1967. – 793 s.
3. Беркович, Я.Г. О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Математический сборник. – 1967. – Т. 74 (116), № 1. – С. 75–92.
4. Мазуров, В.Д. Замечания о конечных группах / В.Д. Мазуров; акад. наук СССР. – Новосибирск, 1974. – 7 с. – Деп. в ВИНТИ 27.02.74, № 404–74 // Сиб. матем. журн. – 1974. – 7 с.
5. Черток, В.Д. Об одном классе разрешимых групп / В.Д. Черток // Сибирский математический журнал. – 1969. – Т. 10, № 3. – С. 712–715.
6. Монахов, В.С. О частичной сверхразрешимости конечной факторизуемой группы /

В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С.32–36.

7. Asaad, M. Some sufficient conditions for a finite group to be supersolvable / M. Asaad, V.S. Monakhov // Acta Mathematica Hungarica. – 2012. – Vol. 135, № 1–2. – P.168–173.

8. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, – 1978. – 267 с.

9. Монахов, В.С. О нильпотентной π -длине максимальных подгрупп конечных π -разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Математика. Механика. – 2009. – Т. 6. – С. 3–8.

10. Лемешев, И.В. О разрешимости некоторых конечных примитивных групп / И.В. Лемешев, В.С. Монахов // Проблемы физики, математики, техники. – 2012. – Т. 10, № 1. – С. 87–91.

11. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

12. Guralnick, R.M. Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81, № 2. – P. 304–311.

13. Монахов, В.С. О произведении двух разрешимых подгрупп с максимальным пересечением факторов / В.С. Монахов // Вопросы алгебры : межведомств. сб. / Мин-во высш. и ср. спец. обр. БССР, Гомельский гос. ун-т; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Минск : Университетское, 1985. – Вып. 1. – С. 54–57.

14. Lennox, J.C. Subnormal subgroups of groups / J.C. Lennox, S.E. Stonehewer // Oxford. Clarendon Press. – 1987.

15. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: <http://www.gap-system.org>. – Дата доступа : 20.12.2009.

16. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

Поступила в редакцию 17.03.14.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ КАНАЛОВ ЛВС ПО ПРОТОКОЛАМ TCP/IP, ICMP И UDP

В.Н. Кулинченко, О.М. Демиденко, П.Л. Чечет

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

AN APPROACH TO IDENTIFY CHANNEL CAPACITY OF LAN ON TCP/IP, ICMP AND UDP PROTOCOLS

V.N. Kulichenko, O.M. Demidenko, P.L. Chechat

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Рассмотрен один из подходов определения пропускной способности каналов связи локальной вычислительной сети по наиболее часто используемым протоколам. Этот подход реализован программным способом с использованием мультиплатформенной библиотеки PCAP.

Ключевые слова: пакетное зондирование, пропускная способность, протоколы передачи, ЛВС, библиотека PCAP.

One approach determining network bandwidth of local area network for the most commonly used protocols is describes. This approach is implemented in software using a multiplatform library PCAP.

Keywords: packet sensing, bandwidth, protocols, LAN, library PCAP.

Введение

Для измерения физических характеристик каналов передачи данных можно разработать и создать специальные технические устройства, но более привлекательной является возможность реализации их программного измерения на основе уже интегрированных в системы связи стандартных устройств. Существующие для этого методы получили название пакетных методов. Для анализа пропускной способности каналов локальной вычислительной сети достаточно эффективным является метод однопакетного зондирования.

1 Метод однопакетного зондирования

Для охвата максимального количества тестируемых сетей при использовании этого метода необходимо задействовать наиболее часто используемые протоколы ICMP, TCP/IP и UDP. Зачем использовать ICMP протокол, если есть остальные? Этому есть несколько причин:

- при использовании данного протокола программное обеспечение устанавливается не на клиенте, а только на хосте;
- широкая поддержка данного протокола, в отличие, например, от протокола SNMP, для которого дополнительно на клиенте должен быть запущен соответствующий сервис.

Как известно из проведенных натуральных экспериментов, использовать данный протокол для получения более-менее точных цифр, значит использовать пакеты максимальной длины – 65535 байт, а поскольку их использование в ряде случаев затруднительно из-за блокировок фрагментированных ICMP пакетов, то эта методика

становится менее привлекательной. Вот почему важно реализовать измерения по этой же методике, но с использованием других протоколов [1].

Функционально программа должна генерировать пакеты различной длины и обрабатывать полученные пакеты – отклики. Данный способ является универсальным решением при написании мультиплатформенной программы, но для её использования необходимы права суперпользователя в Unix и Linux и администратора в Windows. В случае использования протокола ICMP для операционной системы Windows XP SP3 и Windows Vista и 7 необходимо дополнительно отключить встроенный фаервол или включить данную программу в список исключений, а также добавить в реестр параметр типа DWORD KEY_LOCAL_MACHINE \SYSTEM \CurrentControlSet \Services \AFD \Parameters \DisableRawSecurity равный 1, поскольку возможность использования «сырых» сокетов в данных операционных системах была отключена компанией Microsoft по умолчанию. Вообще в Windows есть динамически подключаемая библиотека ICMP.dll, реализующая возможности работы с ICMP протоколом, но у нее наблюдаются проблемы при работе в составе мультиплатформенной программы.

Для захвата пакетов при использовании протокола ICMP, также для возможности мультиплатформенности, использовалась бесплатная, свободно распространяемая библиотека PCAP (её Windows аналог – библиотека WinPcap). Архитектура PCAP изначально разрабатывалась для операционных систем с открытым исходным кодом. Закрытые коммерческие операционные

системы остались без внимания разработчиков. Этот факт явился одной из причин, из-за которых практически все более-менее серьезные сетевые приложения написаны для UNIX, Linux, BSD. Windows в этом плане заметно отставала.

Удобство отладки, наличие удобной системы помощи, быстрая разработка приложений и визуальных интерфейсов и масса других положительных качеств у средств разработки приложений (Delphi, C++ Builder, Visual Studio) и отсутствие возможности низкоуровневого управления сетевым интерфейсом привели к возникновению необходимости создания архитектуры, аналогичной PCAP, для семейства ОС Windows. Естественно, разработчики архитектуры WinPCAP не стали изобретать велосипед, а адаптировали существующую архитектуру PCAP для ОС Windows. Процесс переноса PCAP на платформу Windows заключался в адаптации PCAP-драйвера и библиотеки libpcap для работы под Win32. Оригинальная версия libpcap написана на языке C с учетом возможности переноса библиотеки на различные версии UNIX. ОС Windows не поддерживает всех вызовов POSIX-систем, однако предоставляет некоторые аналогичные им функции через API. Модели памяти UNIX и Windows одинаковы (Windows и большинство UNIX являются 32-х битными ОС) и имеют аналогичный размер целых чисел [2].

Версия PCAP для Win32 основана на драйвере захвата пакетов, структура и принцип действия которого аналогичен его предшественнику для UNIX. Это значительно облегчает процесс переноса приложений из одной операционной системы на другую. Библиотеки и функции ОС UNIX, отсутствующие в Windows (например, getnetbyname) и необходимые для компиляции libpcap на Windows-машине, разработчикам пришлось включить в исходный код драйвера. Часть исходного кода, отвечающая за взаимодействие с сетевым адаптером, была изменена для поддержки его NDIS-драйвера. В соответствии с обозначениями, принятыми в оригинальной версии libpcap, исходный код для взаимодействия с драйвером находится в наборе файлов pcap-XXX.c (и соответствующий ему pcap-XXX.h), где XXX – указывает на операционную систему (например, pcap-linux.c). К уже существующим файлам были добавлены pcap-win32.c и pcap-win32.h.

Основному изменению подвергся принцип взаимодействия приложения пользователя с драйвером захвата пакетов. Libpcap для Win32 взаимодействует с аппаратным обеспечением через интерфейс, предоставляемый динамической библиотекой packet.dll (в отличие от Windows, в ОС UNIX сетевой адаптер или модем «виден» как стандартный файл, поэтому нет необходимости в использовании промежуточных библиотек, достаточно просто создать пакет необходимой

структуры и записать его в этот файл). Это не влияет на нормальную работу libpcap, однако может создать определенные проблемы программисту, желающему получить доступ непосредственно к драйверу захвата пакетов. Например, в ОС UNIX возможно использовать системный вызов SELECT для того, чтобы узнать, поступил ли пакет на вход адаптера. В ОС Windows такая возможность отсутствует.

Программист может использовать функции libpcap для обеспечения работоспособности исходного кода приложения на различных операционных системах, но при этом возможности приложения будут ограничены (например, libpcap не позволяет отправлять пакеты через сетевой интерфейс). Если программист решит воспользоваться функциями packet.dll, то его приложение будет работать только под управлением ОС семейства Win32, однако при этом возможности приложения будут практически неограниченными.

Для обеспечения максимальной совместимости исходного кода libpcap различных ОС, часть кода, предназначенная для ОС Windows, отделена от остального кода директивами #ifdef и #ifndef. Например:

```
#ifndef WIN32
/* исходный код для Windows */
#endif
```

Это позволяет компилировать исходный код libpcap как на ОС Windows, так и на UNIX.

2 Алгоритм работы программной реализации метода однопакетного зондирования

Упрощенная блок-схема алгоритма работы программы изображена на рисунке 2.1.

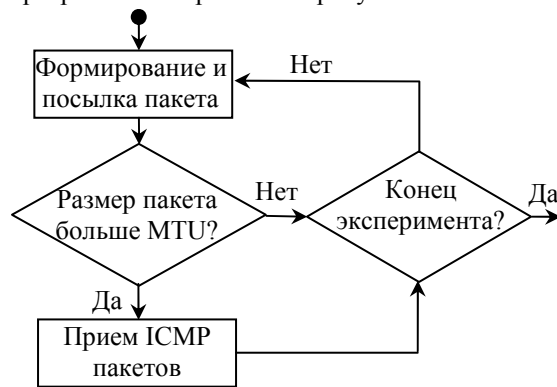


Рисунок 2.1 – Блок-схема алгоритма работы программы по протоколу ICMP

Все функции для работы с «сырыми» сокетами, а также сокетами TCP/IP и UDP содержатся в файле raw_socket.cpp проекта. Функции для работы с сокетами следующие:

- после создания сокета функцией WSASocket, вызывается функция rs_init, инициализирующая библиотеку по работе с сокетами Windows;
- rs_set_raw задает параметры «сырого» сокета;
- rs_exit завершает работу с библиотекой по работе с сокетами Windows;

- `rs_send_ICMP` формирует заголовок и сам пакет ICMP и вызывает функцию `rs_send_IP`;
- `rs_send_IP` непосредственно формирует заголовок IP и производит посылку пакета;
- `Get_Message` служит для получения данных эксперимента по протоколам TCP/IP и UDP;
- `Put_Control_Message` служит для отправки контрольных сообщений от клиента к серверу по протоколам TCP/IP и UDP;
- `Send_Information_To_Client` служит для отправки результатов эксперимента сервера к клиенту по протоколам TCP/IP и UDP;
- `Receive_Information_From_Server` служит для приема результатов эксперимента от сервера для их обработки и отображения клиентом по протоколам TCP/IP и UDP.

Главный модуль программы `main.cpp` представляет пользовательский интерфейс и реализует функциональный алгоритм программы: по действию пользователя запускает процесс генерации пакетов, который может быть как с фиксированной, так и с переменной длиной пакета, изменяющейся в ходе эксперимента с заданным пользователем шагом, а также создает второй рабочий поток приложения, в котором осуществляется прием пакетов [3].

Основные функции главного модуля:

– функция `btn1Click`. Эта функция – обработчик пользовательского нажатия на кнопку «Начать», запускает передачу-прием пакетов. В зависимости от выбора пользователя используется генерация и передача пакета фиксированной длины либо переменной с определенным шагом. В случае использования протокола ICMP, если размер пакета меньше или равен максимальному блоку передачи (MTU), то посылка пакетов осуществляется асинхронно, в противном случае используется синхронная передача – прием. В случае фрагментации время прихода пакета равно времени прихода последнего фрагмента пакета. В случае использования протоколов TCP/IP и UDP посылка буферов осуществляется размером, заданным пользователем, а их возможная фрагментация осуществляется на сетевом уровне модели OSI;

– функция `send_packet` реализует непосредственную отправку пакетов, в которой происходит создание сокета, инициализация сокета, заполнение необходимых заголовков динамически получаемыми данными, установку признака фрагментации и посылку пакета.

Модуль `recv.cpp` отвечает за прием пакетов по протоколу ICMP. В данном модуле происходит обнаружение доступных на машине сетевых адаптеров, а также подключение по выбору к одному из них для фильтрации пакетов ICMP, как входящих, так и исходящих. Основная функция данного модуля – это функция `packet_handler`. Она

вызывается каждый раз при приеме пакета, заданного в фильтре. В данной функции производится разбор пакета, идентификация фрагментированных пакетов и заполнение структуры `sock_time`. При использовании протокола TCP/IP функции сервера исполняются в модуле `tcp_server.cpp`, а UDP – `udp_server.cpp`. Данные серверы реализованы отдельным потоком приложения для избежания эффекта «подтормаживания», а также для реализации возможности работы с главной формой приложения.

Основные структуры, используемые главным модулем приложения и модулем `recv.cpp`:

– структура `sock_time`. В данную структуру записывается идентификатор пакета, время посылки и приема пакета и вычисленная пропускная способность;

– структура сбора статистики `globak_stat`. В данную структуру для определенного размера пакета записываются и номинальная и эффективная пропускные способности, среднее время прохождения пакета, максимальная и минимальная номинальная пропускная способность, размер пакета, для которого эта статистика была набрана.

Заключение

Программная подсистема создавалась на языке C++ в интегрированной среде разработки Borland C++ Builder. Приложение использует «сырые» сокеты для генерации пакетов по протоколу ICMP и API сокеты Java по протоколам TCP/IP и UDP, кроссплатформенную библиотеку *PCap для захвата пакетов из сети, интерфейс реализован в виде web-приложения и командной строки.

При помощи программы опытным путем была рассчитана пропускная способность фрагмента локальной вычислительной сети, состоящего из компьютеров различных архитектур и содержащих операционные системы семейства Microsoft Windows, а также *nix.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко, О.М. Функциональные возможности программного комплекса адаптивной идентификации пользователей корпоративной сети / О.М. Демиденко, В.Д. Левчук, А.И. Кучеров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 69–73.
2. Семенов, Ю.А. Телекоммуникационные технологии : учебное пособие / Ю.А. Семенов. – ГНЦ ИТЭФ, 2010. – 600 с.
3. Lai, K. Measuring Link Bandwidths Using a Deterministic Model of Packet Delay / K. Lai. – Stanford University, 2001.

Поступила в редакцию 24.09.14.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).